A note about the graphical interpretation of the concept of conditional expectation
Una nota sobre la interpretación gráfica del concepto de esperanza condicional

Clara Burgos[a], Julia Calatayud[b],
Juan Carlos Cortés[c], Marc Jornet[d]

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València

emails: a: clabursi@posgrado.upv.es;
b: jucagre@alumni.uv.es; c: jccortes@mat.upv.es; d: marcjor@alumni.uv.es

Resumen

This paper presents an intuitive approximation to the concept of conditional expectation of a random variable based upon a graphical interpretation.

Introducción

El concepto general de esperanza condicional es, sin duda, uno de los más difíciles de estudiar dentro de la Teoría de la Probabilidad, por la cantidad de conceptos abstractos que se requiere comprender previamente para garantizar su correcta asimilación. Se hace imprescindible para ello introducir, en ambiente de Teoría de la Medida, la definición de σ-álgebra y la definición de σ-álgebra generada por: un conjunto, una variable aleatoria (v.a.), un vector aleatorio, un proceso estocástico, etc. Sin embargo, no se puede evitar el estudio meditado del concepto de esperanza condicional, si posteriormente se desea adquirir una sólida comprensión de otras partes de la Teoría de la Probabilidad que resultan imprescindibles en temas de investigación que están de plena actualidad, tales como la integral de Itô o más generalmente las martingalas, las cuales se requieren, no sólo en la Matemática pura [**?**], sino también en sus aplicaciones dentro de campos tan diferentes como las Finanzas [**?**] o la Ingeniería de Procesos Productivos [**?**], por ejemplo.

En este trabajo se muestra, a través de un ejemplo sencillo, una interpretación gráfica del concepto de esperanza condicional de una v.a. que pensamos puede ayudar al lector a aproximarse a este importante concepto, el cual por otra parte involucra cierto grado de abstracción.

1. El concepto de esperanza condicional: una revisión breve

En este apartado recordaremos las ideas básicas sobre el concepto de esperanza condicional que necesitamos introducir para comprender el estudio gráfico posterior. Para más detalles puede consultarse [**?**], por ejemplo.

Cuando se introduce el concepto de esperanza condicional de una v.a., el proceso pedagógico suele seguir una cadena de pasos, cuyo primer eslabón es definir la esperanza condicionada a sucesos, posteriormente condicionada a vs.as. (basándose para ello en la definición dada para sucesos) y posteriormente, en cursos avanzados, se introduce la esperanza condicionada a σ-álgebras (basándose para ello en la definición dada para vs.as.). No obstante, a medida que se generaliza el concepto, se va perdiendo intuición, y el proceso de asimilación se hace más complicado.

Como se adelantó en la Introducción, el objetivo de esta nota es aportar una interpretación gráfica del primer eslabón: la esperanza de una v.a. condicionada a un suceso. Consideremos dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω, donde hay definida una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, la esperanza condicional de A dado B, denotada por $\mathbb{P}[A|B]$, se define por

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}, \tag{1}$$

siempre que $\mathbb{P}[B] > 0$. Obsérvese que la probabilidad $\mathbb{P}[A|B]$ está normalizada respecto del valor $\mathbb{P}[B] > 0$ relativa a la probabilidad de que el suceso B

pueda haber acontecido. A partir de esta idea de normalización utilizada (i.e., dividiendo por el factor de normalización $\mathbb{P}[B] > 0$) para introducir el concepto de probabilidad condicional, se define la función de distribución de una v.a. X dado un suceso B:

$$F_X(x|B) = \frac{\mathbb{P}[X \leq x, B]}{\mathbb{P}[B]}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

y la esperanza condicional

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot I_B]}{\mathbb{P}[B]}, \tag{3}$$

siendo I_B la función indicatriz del suceso B:

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in B, \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin B. \end{cases} \tag{4}$$

En el caso en que $\Omega = \mathbb{R}$, si X es una v.a. discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$, la expresión (**??**) se escribe

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|B] &= \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) = x_k\} \cap B] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{\mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) = x_k\} \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}[X = x_k|B], \end{aligned} \tag{5}$$

y en el caso de una v.a. continua,

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \int_{-\infty}^{\infty} x I_B(x) f_X(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \int_B x f_X(x) \mathrm{d}x. \tag{6}$$

Después de realizar este recordatorio de las ideas básicas relacionadas con la probabilidad condicional, en el siguiente apartado mostraremos una aproximación gráfica al concepto de esperanza de una v.a. condicionada a un suceso, que constituye el objetivo de esta nota.

2. Aproximación intuitiva a la esperanza condicional: Un ejemplo

Para apelar a la intuición, consideremos la v.a. $X(\omega) = \omega$ definida sobre el conjunto $\Omega =]0,1]$, el cual supondremos dotado de una medida de probabilidad

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}: & \Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ & \omega & \longrightarrow & \mathbb{P}\left[]a,b]\right] = b-a, \end{array}$$

para cada $]a,b] \subset]0,1]$. Claramente X tiene una distribución de tipo uniforme sobre el intervalo $]0,1]$, i.e. $X \sim \mathrm{Un}(]0,1])$, ya que, su función de distribución (f.d.) es

$$F_X(x) = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \omega \leq x\}] = \begin{cases} \mathbb{P}[\emptyset] = 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \mathbb{P}[]0,x]] = x & \text{si} \quad x \in]0,1], \\ \mathbb{P}[]0,1]] = 1 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases} \tag{7}$$

y, por la conocida relación entre la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) y la f.d., su f.d.p. es $f_X(x)$ es

$$f_X(x) = 1 \qquad \forall x \in]0,1]. \tag{8}$$

Por ser $X \sim \mathrm{Un}(]0,1])$, se tiene $\mathbb{E}[X] = 0.5$. Ilustramos esta característica en la Figura **??**.

Para introducir la esperanza condicional necesitamos considerar algún suceso del conjunto $\Omega =]0,1]$. Supongamos que algunos de los siguientes sucesos han ocurrido:

$$A_i = \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

entonces teniendo en cuenta (**??**), y que $\mathbb{P}[A_i] = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$, se tiene que según (**??**) (con $B = A_i$) y (**??**)

$$\mathbb{E}[X|A_i] = \frac{1}{\mathbb{P}[A_i]} \int_{A_i} x \mathrm{d}x = n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{2i-1}{n}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

Es ahora cuando resulta especialmente interesante ilustrar gráficamente los resultados obtenidos en (**??**) para aproximarnos a la idea intuitiva de esperanza condicional. En la Figura **??** se ha representado $\mathbb{E}[X|A_i]$ para $n = 5$.

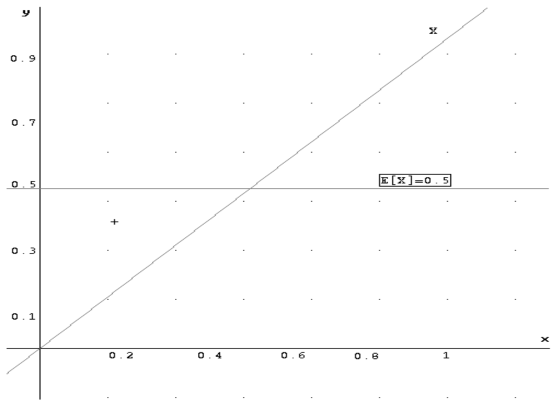

Figura 1: Representación de la v.a. X y de su media $\mathbb{E}[X] = 0.5$ en el contexto del ejemplo.

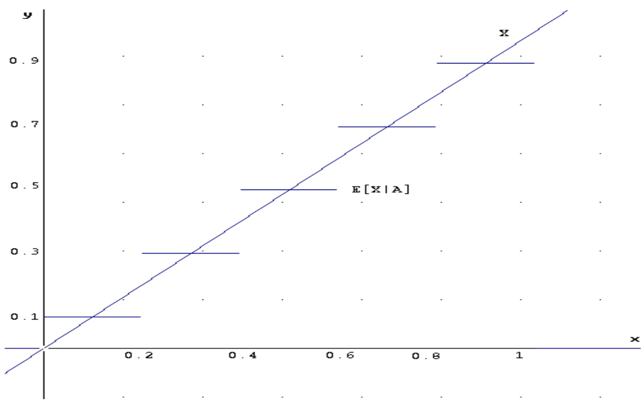

Figura 2: Representación de la v.a. X y de su esperanza condicional $\mathbb{E}[X|A_i]$, siendo A_i los sucesos definidos en **??** con $n = 5$.

Comparando la Figura **??** y la Figura **??**, visualizamos algunas características que suelen citarse en el desarrollo abstracto del concepto de esperanza condicional. Mientras en la Figura **??** observamos $\mathbb{E}[X]$, en la Figura **??**, vemos cómo varía dicho valor como consecuencia de la actualización que experimenta al considerarse condicionada la v.a. X a los sucesos A_i, obteniéndose así: $\mathbb{E}[X|A_i]$. Así por ejemplo, para $n = 5$ en (**??**), a partir de (**??**) se tiene

$$\begin{array}{cccccccccc} i=1, & \mathbb{E}[X|A_1] & = & \mathbb{E}[X|]0,0.2]] & = & \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5} & = & \dfrac{1}{10} & = & 0.1, \\ i=2, & \mathbb{E}[X|A_2] & = & \mathbb{E}[X|]0.2,0.4]] & = & \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5} & = & \dfrac{3}{10} & = & 0.3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots & = & \vdots & = & \vdots \end{array}$$

tal y como se observa en la Figura **??**. Mediante un proceso similar, pero tomando los sucesos en (**??**) como intervalos de longitud más pequeña, digamos

$$B_i = \left]\frac{i-1}{2n}, \frac{i}{2n}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{11}$$

y razonando como antes, se obtiene que

$$\mathbb{P}[B_i] = \frac{i}{2n} - \frac{i-1}{2n} = \frac{1}{2n},$$

$$\mathbb{E}[X|B_i] = \frac{1}{\mathbb{P}[B_i]}\int_{B_i} x\mathrm{d}x = 2n\int_{\frac{i-1}{2n}}^{\frac{i}{2n}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\frac{2i-1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{12}$$

obteniéndose en este caso la representación de la esperanza condicional dada en la Figura **??** (para $n = 5$)

Este enfoque gráfico nos indica que si tomamos sucesos en la forma

$$C_{i,k} = \left]\frac{i-1}{kn}, \frac{i}{kn}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, k\,n\,,$$

con $k \to \infty$, se tendrá

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[X|C_{i,k}] = X. \tag{13}$$

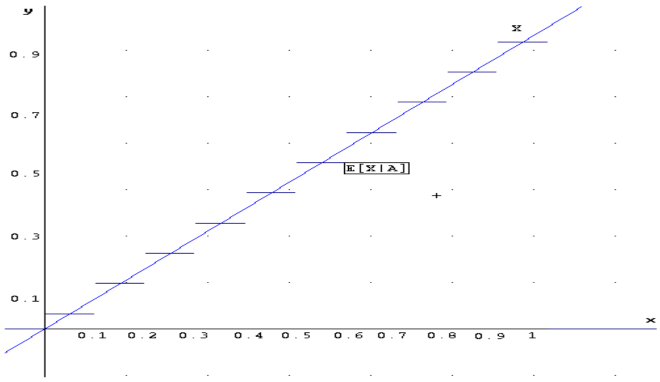

Figura 3: Representación de la v.a. X y de su esperanza condicional $\mathbb{E}[X|B_i]$, siendo B_i los sucesos definidos en (**??**) con $n = 10$.

Por lo tanto, $\mathbb{E}[X|A]$, siendo A un suceso, es una aproximación más o menos "ruda" de la v.a. X: en nuestro ejemplo particular la aproximación a X se obtiene mediante una función escalonada (en la Figura **??** con 5 escalones y en la Figura **??** con 10 escalones).

Terminamos recordando el modo en que, a partir de los conceptos anteriormente señalados, se suele completar la presentación formal de esperanza condicionada a una variable discreta, con el objeto de dar una visión completa del tema tratado.

Una vez introducido el concepto de esperanza condicionada a un suceso, es sencillo entender la definición de esperanza condicionada a una v.a. discreta Y definida sobre el espacio muestral Ω, y que toma valores y_i con $i = 1, 2, \ldots$ sobre los conjuntos A_i, i.e.,

$$A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

En efecto, dada una v.a. X sobre Ω con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ y la v.a. discreta Y, se define la esperanza condicionada de X condicionada a Y como otra v.a. definida como sigue

$$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mathbb{E}[X|A_i] = \mathbb{E}[X|Y = y_i], \quad \omega \in A_i, \; i = 1, 2, \ldots$$

(esta definición se basa en la definición de esperanza condicionada a un suceso antes definida). Obsérvese que si sabemos que A_i ha sucedido, podemos restringirnos a los ω pertenecientes a A_i, para los cuales $\mathbb{E}[X|Y](\omega)$ coincide con la esperanza condicional clásica $\mathbb{E}[X|A_i]$ (véase (**??**)). Por todo ello, y dado que $\mathbb{E}[X|Y]$ sí es una v.a., podemos afirmar que ésta es una aproximación a la v.a. original X.

3. Conclusiones

El objeto de esta nota ha sido proporcionar, mediante un ejemplo sencillo, una metodología didáctica basada en la intuición gráfica para comprender el concepto básico de esperanza condicional desde una interpetación gráfica, como una aproximación a la variable aleatoria que se condiciona a un suceso generando una nueva variable aleatoria. Para que el lector comprenda mejor nuestra propuesta, hemos contextualizado los diferentes conceptos involucrados en el marco teórico que habitualmente se utiliza en los textos de referencia para introducir el concepto de esperanza condicional.

Referencias

[1] Williams, D. (1991): Probability with Martingales, Ed. Cambridge Press, Cambridge.

[2] Seydel R. (2006): Tools for Computational Finance, Ed. Universitext Springer, New York.

[3] Carlton M.A. y Devore J.L. (2014): Probability with Applications in Engineering, Science, and Technology, Springer Texts in Statistics, Switzerland.