Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 106 (Octubre 2018)

A note about the graphical interpretation of the concept of conditional expectation
Una nota sobre la interpretación gráfica del concepto de esperanza condicional

Clara Burgos[a], Julia Calatayud[b],
Juan Carlos Cortés[c], Marc Jornet[d]

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València

emails: a: `clabursi@posgrado.upv.es`; b: `jucagre@alumni.uv.es`;
c: `jccortes@mat.upv.es`; d: `marcjor@alumni.uv.es`

Resumen

This paper presents an intuitive approximation to the concept of conditional expectation of a random variable based upon a graphical interpretation.

Introducción

El concepto general de esperanza condicional es, sin duda, uno de los más difíciles de estudiar dentro de la Teoría de la Probabilidad, por la cantidad de conceptos abstractos que se requiere comprender previamente para garantizar su correcta asimilación. Se hace imprescindible para ello introducir, en ambiente de Teoría de la Medida, la definición de σ-álgebra y la definición de

σ-álgebra generada por: un conjunto, una variable aleatoria (v.a.), un vector aleatorio, un proceso estocástico, etc. Sin embargo, no se puede evitar el estudio meditado del concepto de esperanza condicional, si posteriormente se desea adquirir una sólida comprensión de otras partes de la Teoría de la Probabilidad que resultan imprescindibles en temas de investigación que están de plena actualidad, tales como la integral de Itô o más generalmente las martingalas, las cuales se requieren, no sólo en la Matemática pura [1], sino también en sus aplicaciones dentro de campos tan diferentes como las Finanzas [2] o la Ingeniería de Procesos Productivos [3], por ejemplo.

En este trabajo se muestra, a través de un ejemplo sencillo, una interpretación gráfica del concepto de esperanza condicional de una v.a. que pensamos puede ayudar al lector a aproximarse a este importante concepto, el cual por otra parte involucra cierto grado de abstracción.

1. El concepto de esperanza condicional: una revisión breve

En este apartado recordaremos las ideas básicas sobre el concepto de esperanza condicional que necesitamos introducir para comprender el estudio gráfico posterior. Para más detalles puede consultarse [1], por ejemplo.

Cuando se introduce el concepto de esperanza condicional de una v.a., el proceso pedagógico suele seguir una cadena de pasos, cuyo primer eslabón es definir la esperanza condicionada a sucesos, posteriormente condicionada a variables aleatorias (basándose para ello en la definición dada para sucesos) y posteriormente, en cursos avanzados, se introduce la esperanza condicionada a σ-álgebras. No obstante, a medida que se generaliza el concepto, se va perdiendo intuición, y el proceso de asimilación se hace más complicado.

Como se adelantó en la Introducción, el objetivo de esta nota es aportar una interpretación gráfica del tercer eslabón: la esperanza de una v.a. condicionada a una σ-álgebra. Para su definición formal, empezamos por el primer eslabón: considerados dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω, donde hay definida una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, la probabilidad condicional de A dado B, denotada por $\mathbb{P}[A|B]$, se define por

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}, \tag{1}$$

siempre que $\mathbb{P}[B] > 0$. Obsérvese que la probabilidad $\mathbb{P}[A|B]$ está normalizada respecto del valor $\mathbb{P}[B] > 0$ relativa a la probabilidad de que el suceso B pueda haber acontecido. A partir de esta idea de normalización utilizada (i.e., dividiendo por el factor de normalización $\mathbb{P}[B] > 0$) para introducir el concepto de probabilidad condicional, se define la función de distribución de una v.a. X dado un suceso B:

$$F_X(x|B) = \frac{\mathbb{P}[X \leq x, B]}{\mathbb{P}[B]}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

y la esperanza condicional

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot I_B]}{\mathbb{P}[B]}, \tag{3}$$

siendo I_B la función indicatriz del suceso B:

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in B, \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin B. \end{cases} \tag{4}$$

En el caso en que X es una v.a. discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$, la expresión (3) se escribe

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|B] &= \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}[\{X = x_k\} \cap B] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{\mathbb{P}[\{X = x_k\} \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}[X = x_k|B], \end{aligned} \tag{5}$$

y en el caso de una v.a. continua,

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \int_{-\infty}^{\infty} x I_B(x) f_X(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \int_B x f_X(x) \mathrm{d}x. \tag{6}$$

De hecho, integrando respecto a la medida $\mathbb{P}$, se tiene en general que

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}[B]} \int_B X \, \mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{7}$$

En el segundo eslabón, de define $\mathbb{E}[X|Y]$, siendo X cualquier v.a. e Y una v.a. discreta. Si denotamos los puntos del soporte de Y por $y_1, y_2, \ldots$, entonces se define

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y = y_i] I_{\{Y=y_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X \cdot I_{\{Y=y_i\}}]}{\mathbb{P}[Y = y_i]} I_{\{Y=y_i\}}. \tag{8}$$

Notemos que, a diferencia de lo que ocurre cuando se condiciona a un suceso, condicionar a una v.a. da lugar a una nueva v.a.

Finalmente, en el tercer eslabón, se define la probabilidad condicionada de X a una σ-álgebra $\mathcal{G}$. Esta σ-álgebra se supone contenida dentro de la σ-álgebra de sucesos de nuestro espacio de probabilidad subyacente. A nivel formal, se define $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ como la única variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible con la propiedad $\mathbb{E}[X \cdot I_G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \cdot I_G]$ para cada $G \in \mathcal{G}$. La existencia y unicidad de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ se demuestra mediante el teorema de Radon-Nykodim. Para vs.as. en el espacio $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (existencia de varianza), $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es la mejor aproximación a X en el espacio de las vs.as. $\mathcal{G}$-medibles (proyección).

Un caso particular de esperanza condicionada a una σ-álgebra aparece cuando condicionamos a la σ-álgebra generada por una partición $A_1, \ldots, A_m$ de Ω, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, que se denota $\mathcal{G} = \sigma\{A_1, \ldots, A_m\}$. En tal caso, de puede demostrar que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X|A_i] I_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbb{E}[X \cdot I_{A_i}]}{\mathbb{P}[A_i]} I_{A_i}.$$

Obsérvese que la definición (8) proviene de condicionar X a la σ-álgebra generada por la partición $\{\{Y = y_i\}\}_{i \geq 1}$, esto es, $\mathcal{G} = \sigma\{\{Y = y_i\} : i \geq 1\}$.

Después de realizar este recordatorio de las ideas básicas relacionadas con la probabilidad condicional, en el siguiente apartado mostraremos una aproximación gráfica al concepto de esperanza de una v.a. condicionada a una σ-álgebra generada por una partición de Ω, que constituye el objetivo de esta nota.

2. Aproximación intuitiva a la esperanza condicional: un ejemplo

Para apelar a la intuición, consideremos la v.a. $X(\omega) = \omega$ definida sobre el conjunto $\Omega = [0,1]$, el cual supondremos dotado de la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}[0,1]$ y de una medida de probabilidad

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}[0,1] \longrightarrow [0,1], \quad \mathbb{P}\left[\,]a,b]\right] = b - a.$$

Claramente X tiene una distribución de tipo uniforme sobre el intervalo $[0,1]$, i.e. $X \sim \mathrm{Un}([0,1])$, ya que su función de distribución (f.d.) es

$$F_X(x) = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \omega \leq x\}] = \begin{cases} \mathbb{P}[\emptyset] = 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \mathbb{P}[\,]0,x]] = x & \text{si} \quad x \in]0,1], \\ \mathbb{P}[\,]0,1]] = 1 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases} \tag{9}$$

y, por la conocida relación entre la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) y la f.d., su f.d.p. es $f_X(x)$ dada por

$$f_X(x) = 1, \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{10}$$

Por ser $X \sim \mathrm{Un}([0,1])$, se tiene $\mathbb{E}[X] = 0.5$. Lo ilustramos en la Figura 1.

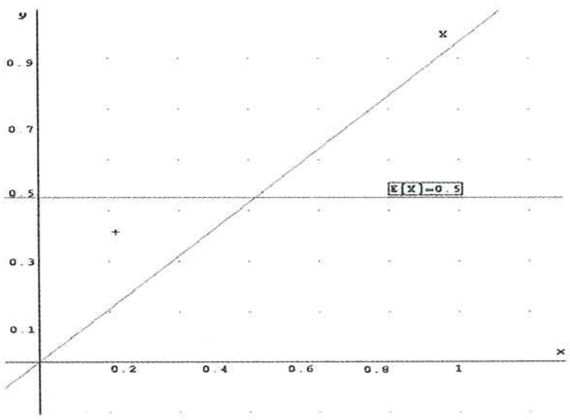

Figura 1: *Representación de la v.a. X y de su media $\mathbb{E}[X] = 0.5$ en el contexto del ejemplo.*

Para introducir la esperanza condicional necesitamos considerar algún suceso del conjunto $\Omega = [0,1]$. Supongamos algunos de los siguientes sucesos:

$$A_i = \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Entonces teniendo en cuenta (10), y que $\mathbb{P}[A_i] = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$, se tiene que según (6) (con $B = A_i$) y (10)

$$\mathbb{E}[X|A_i] = \frac{1}{\mathbb{P}[A_i]} \int_{A_i} x\,\mathrm{d}x = n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{2i-1}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Es ahora cuando resulta especialmente interesante ilustrar gráficamente los resultados obtenidos en (12) para aproximarnos a la idea intuitiva de esperanza condicional. En la Figura 2 se ha representado

$$\mathbb{E}[X|\sigma\{A_1, \ldots, A_5\}] = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}[X|A_i] I_{A_i} = \sum_{i=1}^{5} \frac{2i-1}{10} I_{]\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}]}.$$

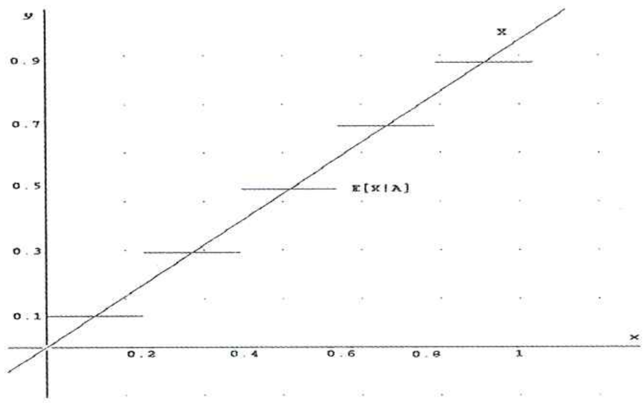

Figura 2: *Representación de la v.a. X y de su esperanza condicional* $\mathbb{E}[X|\sigma\{A_1, \ldots, A_5\}]$.

Mediante un proceso similar, pero tomando los sucesos en (11) como intervalos de longitud más pequeña, se obtiene la representación de la esperanza condicional dada en la Figura 3 (para $n = 10$).

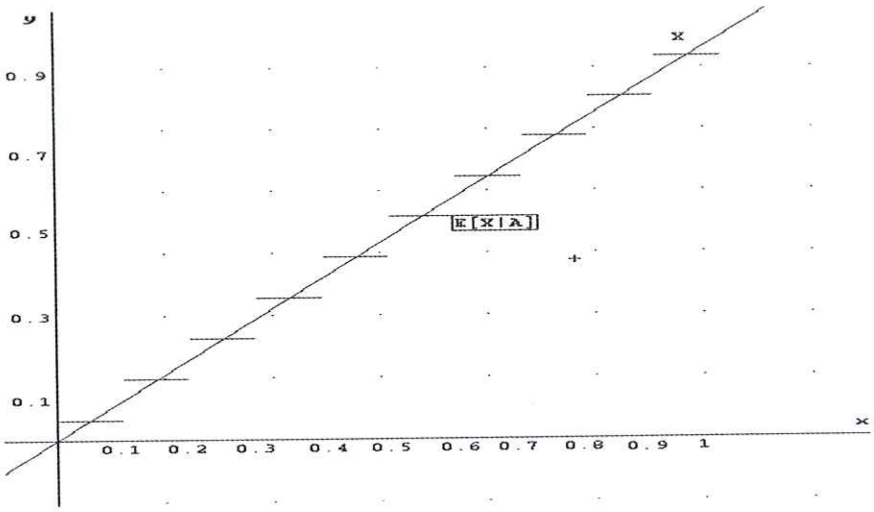

Figura 3: *Representación de la v.a. X y de su esperanza condicional* $\mathbb{E}[X|\sigma\{A_1,\ldots,A_{10}\}]$.

Si definimos $\mathcal{G}_n = \sigma\{A_1,\ldots,A_n\}$, con cada A_i dado por (11), y consideramos las vs.as.

$$X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] I_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2n} I_{]\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

En este caso particular en el que X es la v.a. identidad, esta propiedad es sencilla de probar. Fijado un $\omega \in \Omega$, para cada natural n escogemos i_n tal que $\frac{i_n-1}{n} < X(\omega) = \omega \leq \frac{i_n}{n}$. Por tanto, $X_n(\omega) = \frac{2i_n-1}{2n} \to \omega$, como queríamos. Así, hemos demostrado la propiedad que se observaba en las figuras.

En el caso general de cualquier v.a. X, los sucesos A_i se deben tomar como

$$A_i = \left\{ \frac{i-1}{n} < X \leq \frac{i}{n} \right\}. \tag{13}$$

Se puede demostrar, al igual que hemos hecho con el caso particular anterior, que si definimos $\mathcal{G}_n = \sigma\{A_1, \ldots, A_n\}$, con cada A_i dado por (13), y consideramos las vs.as.

$$X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] I_{A_i},$$

entonces $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. En efecto, dado $\omega \in \Omega$, para cada n tomamos i_n con la propiedad $\frac{i_n - 1}{n} < X(\omega) \leq \frac{i_n}{n}$. Hacemos uso de (7):

$$X_n(\omega) = \mathbb{E}[X|A_{i_n}] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot I_{A_{i_n}}]}{\mathbb{P}[A_{i_n}]} = \frac{\int_{A_{i_n}} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}[A_{i_n}]}.$$

Podemos estimar

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| = \left| \frac{\int_{A_{i_n}} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}[A_{i_n}]} - X(\omega) \right| \leq \frac{1}{\mathbb{P}[A_{i_n}]} \int_{A_{i_n}} |X - X(\omega)| \, d\mathbb{P}.$$

Ahora, en A_{i_n}, se cumple $|X - \frac{i_n}{n}| \leq \frac{1}{n}$. Por la desigualdad triangular, $|X - X(\omega)| \leq |X - \frac{i_n}{n}| + |\frac{i_n}{n} - X(\omega)| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$. Se deduce que

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{\mathbb{P}[A_{i_n}]} \int_{A_{i_n}} |X - X(\omega)| \, d\mathbb{P} \leq \frac{2}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Además, notar que la velocidad de convergencia es independiente de ω, siendo siempre $\frac{2}{n}$. Así, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$ se puede ver como una aproximación a la v.a. X con error $\mathcal{O}(1/n)$.

Conclusiones

El objeto de esta nota ha sido proporcionar, mediante un ejemplo sencillo, una metodología didáctica basada en la intuición gráfica para comprender el concepto de esperanza condicional desde una interpetación gráfica, como una aproximación a la variable aleatoria que se condiciona a una σ-álgebra generando una nueva variable aleatoria. Para que el lector comprenda mejor nuestra propuesta, hemos contextualizado los diferentes conceptos involucrados en el marco teórico que habitualmente se utiliza en los textos de referencia para introducir el concepto de esperanza condicional.

Referencias

[1] Williams, D. (1991): Probability with Martingales, Ed. Cambridge Press, Cambridge.

[2] Seydel R. (2006): Tools for Computational Finance, Ed. Universitext Springer, New York.

[3] Carlton M.A. y Devore J.L. (2014): Probability with Applications in Engineering, Science, and Technology, Springer Texts in Statistics, Switzerland.