UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Órbitas en tres dimensiones: Elementos orbitales

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta los elementos orbitales (clásicos o keplerianos) que permiten situar y orientar una órbita en el espacio tridimensional. En algunas órbitas no se puede medir alguno de esos elementos y se definen otros alternativos que también se presentan en este artículo.

Una vez definidos los elementos se propone una guía para obtenerlos a partir del vector estado de un satélite.

En la Sección 5 se presenta el sistema de coordenadas Perifocal (situado en la propia órbita) y el proceso a seguir para obtener las coordenadas y velocidades de un vehículo cuando se conocen sus elementos.

Finalmente en la última sección se muestra como cambiar las coordenadas de un sistema Perifocal al Geocéntrico-Ecuatorial. De esta manera tendremos un método para pasar de los elementos orbitales de un móvil a sus coordenadas y velocidades geocéntrico-ecuatoriales.

Recordemos que según [**Curtis**] la ecuación orbital de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M por atracción gravitatoria es:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\overrightarrow{h}\| = \|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}\|$ es el momento angular que es constante, $\mu = 398\,600.5\ km^3/s^2$ es el parámetro gravitacional de la Tierra, $e = \|\overrightarrow{C}/\mu\|$ es la excentricidad de la órbita obtenida con el vector de Laplace que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre $\overrightarrow{e}$ y $\overrightarrow{r}$).

Para la aplicación de las ecuaciones debemos recordar algunas relaciones entre parámetros orbitales que se verifican en cualquier órbita kepleriana y que pueden consultarse en la bibliografía:

- El momento angular de cualquier órbita verifica $h = r\,v_\perp$.
- La energía específica cumple $\xi = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu^2}\left(1-e^2\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$.
- La velocidad radial en cualquier posición y órbita es $v_r = \frac{\mu}{h} e \operatorname{sen}\theta$.
- La velocidad transversal es $v_\perp = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta)$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Situar en el espacio un cuerpo cuando se conocen sus elementos orbitales.
- Obtener los elementos orbitales de un satélite si conocemos su vector estado (coordenadas de su posición y de su velocidad).
- Reconocer y situar el sistema de referencia perifocal para poder obtener las coordenadas perifocales a partir de los elementos.
- Obtener las coordenadas de la posición y la velocidad de una nave en el sistema Geocéntrico-Ecuatorial partiendo del conocimiento de sus elementos orbitales.

3 Elementos orbitales clásicos

Para definir una órbita en el plano hacen falta dos parámetros: excentricidad (e) y semieje mayor[1] (a). De estos dos parámetros se pueden deducir otras constantes orbitales como la energía específica (ξ) y, en el caso de la elipse, el periodo orbital (T). Para situar un punto en la órbita es necesario un tercer parámetro, la anomalía verdadera (θ) del que se puede obtener el tiempo desde su paso por el perigeo ($t - t_p$).

Ángulos de Euler:
Para situar una órbita en tres dimensiones son necesarios otros tres parámetros llamados ángulos de Euler (ver figura 1).

En primer lugar definimos la *Línea de Nodos* como la intersección entre el plano orbital y el ecuatorial. El punto de la línea de nodos donde el cuerpo cruza hacia arriba el plano ecuatorial se denomina **Nodo Ascendente** y donde cruza hacia abajo Nodo Descendente. La línea de nodos permite definir el vector $\overrightarrow{n}$ como aquel que apunta al nodo ascendente. El ángulo entre el eje positivo X, que apunta al Punto Vernal, y $\overrightarrow{n}$ es el primer ángulo de Euler denominado **Ascensión Recta del Nodo Ascendente** y que es representado por Ω o por $RAAN$. Por tanto, Ω estará comprendido entre 0^o y 360^o.

El ángulo diedro entre el plano orbital y el ecuatorial se denomina **Inclinación** y se presenta por i. Se mide en sentido antihorario alrededor de la línea de nodos. La inclinación es un ángulo entre 0^o y 180^o. Como el vector del momento angular ($\overrightarrow{h}$) es perpendicular al plano orbital y el eje Z al ecuatorial la inclinación también es el ángulo formado por $\overrightarrow{h}$ y el eje Z positivo.

El tercer ángulo permite situar el perigeo de la órbita. Recordemos que el perigeo es la intersección entre el vector excentricidad ($\overrightarrow{e}$) y la órbita. Definimos como **Argumento del Perigeo** (ω) al ángulo que hay entre los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{e}$ medido sobre el plano de la órbita. El argumento del perigeo puede estar entre 0^o y 360^o.

En resumen, los 6 elementos orbitales son:

- a semieje mayor (a veces sustituido por el momento angular h)
- e excentricidad
- i inclinación
- Ω ascensión recta del nodo ascendente
- ω argumento del perigeo
- θ anomalía verdadera (a veces se usa la anomalía media M).

En órbitas ecuatoriales no hay nodo ascendente por lo que no puede tomarse como referencia para ω y en órbitas circulares no hay perigeo por lo que no puede tomarse como referencia para θ. Por eso en algunas ocasiones (órbitas circulares, ecuatoriales o ambas cosas) se utilizan elementos alternativos (ver figura 2):

- La **longitud del periapsis** $\varpi = \Omega + \omega$
- El **argumento de latitud** $u = \omega + \theta$
- La**longitud verdadera** $L = \Omega + \omega + \theta$.

[1] En ocasiones se utiliza el momento angular (h) de la órbita en lugar del semieje mayor

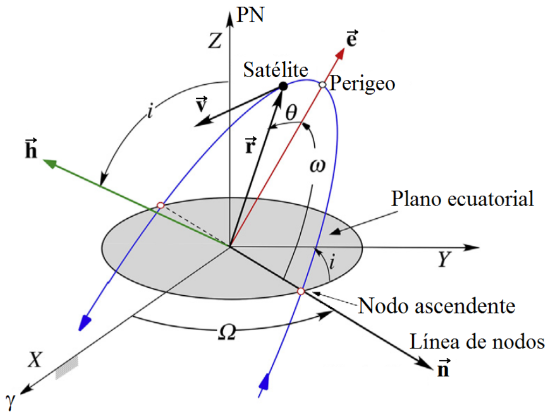


Figura 1: Elementos angulares de una órbita

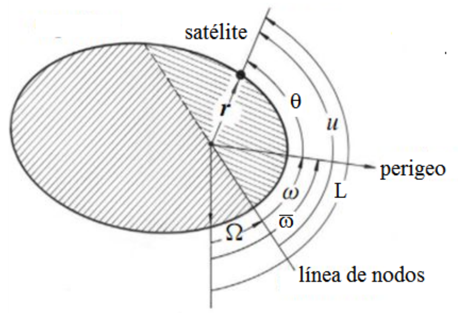


Figura 2: Elementos alternativos para órbitas circulares y/o ecuatoriales: ϖ, u y L

4 Obtención de los elementos orbitales a partir del vector estado

Dada la posición $\vec{r}$ y velocidad $\vec{v}$ de un vehículo en coordenadas geocéntrico-ecuatoriales se pueden calcular sus elementos orbitales, veamos como:

Paso 1: Calcular r y v:

$$r = \|\vec{r}\| \quad \text{y} \quad v = \|\vec{v}\|$$

Paso 2: Calcular la energía específica de la órbita y el **semieje mayor**:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow \boxed{a = -\frac{\mu}{2\xi}} \tag{2}$$

Paso 3: Calcular el momento angular específico: $\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ y $h = \|\vec{h}\|$

Paso 4: Calcular el vector **excentricidad** y su magnitud:

$$\boxed{e} = \|\vec{e}\| = \boxed{\left\| \frac{\vec{C}}{\mu} \right\|} \tag{3}$$

Paso 5: Calcular la **inclinación**. Si tomamos $\vec{k}$ en la dirección de Z, (ver figura 3) resulta:

$$\vec{k} \cdot \vec{h} = k\, h\, \cos(i) \rightarrow \boxed{i} = arccos\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{h}}{h}\right) = \boxed{arccos\left(\frac{h_Z}{h}\right)} \tag{4}$$

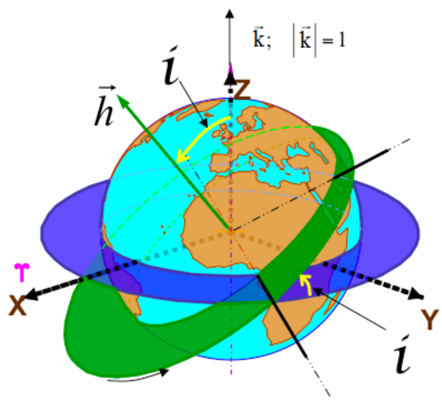


Figura 3: i: Ángulo entre el plano ecuatorial y el orbital.

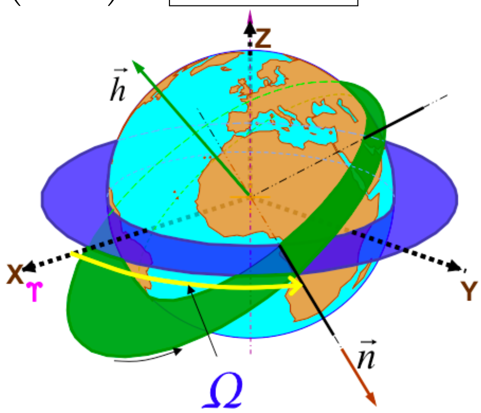


Figura 4: Ω: Ángulo desde el Punto Vernal hasta la línea de nodos medido sobre el Ecuador.

Paso 6: Calcular la dirección de la línea de nodos $\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{h}$ y la **Ascensión Recta del Nodo Ascendente**, (ver figura 4):

$$\vec{i} \cdot \vec{n} = 1\, n\, cos\Omega \rightarrow \Omega = arccos\left(\frac{\vec{i} \cdot \vec{n}}{n}\right) = arccos\left(\frac{n_x}{n}\right)$$

pero $\Omega \in [0^o, 360^o]$ y puede haber ambigüedad de cuadrante al calcular el $arccos$, por lo que

$$\boxed{\Omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{n_x}{n}\right) & (n_y \geq 0) \\ 360^o - \arccos\left(\frac{n_x}{n}\right) & (n_y < 0) \end{cases}} \tag{5}$$

Paso 7: Calcular el **argumento del perigeo**, (ver figura 5):

$$\vec{n} \cdot \vec{e} = n\, e\, cos\omega \rightarrow \omega = arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n\, e}\right)$$

pero como antes, $\omega \in [0^o, 360^o]$ y puede haber ambigüedad al calcular el $arccos$, por lo que

$$\boxed{\omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n\, e}\right) & (e_z \geq 0) \\ 360^o - \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n\, e}\right) & (e_z < 0) \end{cases}} \tag{6}$$

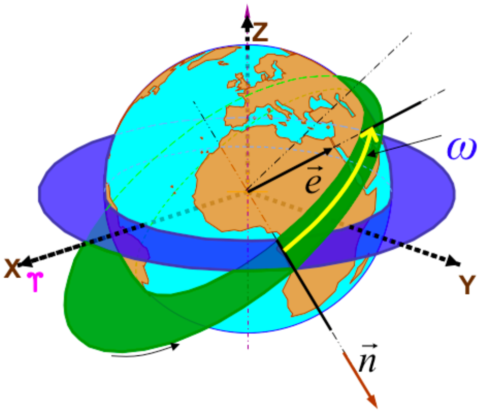


Figura 5: ω : Ángulo entre línea de nodos y perigeo

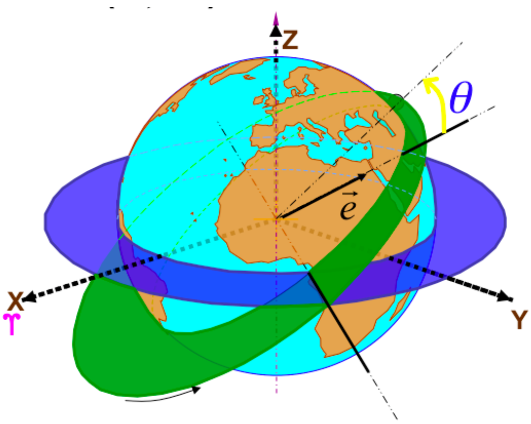


Figura 6: θ : Ángulo entre perigeo y vector posición

Paso 8: Calcular la **anomalía verdadera**, (ver figura 6):

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = e\, r\, \cos\theta \rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e\, r}\right)$$

donde también hay ambigüedad al calcular el $\arccos$ porque $\theta \in [0^o, 360^o]$, así que

$$\boxed{\theta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e\, r}\right) & (\vec{r} \cdot \vec{v} \geq 0) \\ 360^o - \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e\, r}\right) & (\vec{r} \cdot \vec{v} < 0) \end{cases}} \tag{7}$$

Ejemplo 4.1 *La medición de las coordenadas y de la velocidad de un vehículo espacial (vector de estado) referidas al sistema Geocéntrico- Ecuatorial da los siguientes resultados:*

$$\vec{r} = (-10515.45, -5235.37, 49.17)\, km \quad y \quad \vec{v} = (-2.10305, -4.18146, 5.56329) \quad km/s$$

Determina los elementos orbitales a, e, i, Ω, ω y θ del vehículo. Calcula las alturas del perigeo y del apogeo así como el periodo de la órbita.

Solución:

Si seguimos los pasos 1 y 2 llegaremos a deducir el semieje mayor a:

$$r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = 11746.8\, km \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = 7.27032\, km/s$$

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{7.27032^2}{2} - \frac{398600.5}{11746.8} = -7.50401\, km^2/s^2$$

$$a = -\frac{\mu}{2\xi} = -\frac{398600.5}{2 \cdot (-7.50401)} = \boxed{26559.2\, km}$$

Ahora siguiendo los pasos 3 y 4 obtendremos el momento angular y la excentricidad e:

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} = (-28920.3, 58397.1, 32959.7) \to h = 73027$$

$$\vec{C} = \vec{v} \wedge \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = (-105881., 86074.9, -245409.)$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{C}}{\mu} = \frac{(-105881., 86074.9, -245409.)}{398600.5} = (-0.265631, 0.215943, -0.615678)$$

$$e = \|\vec{e}\| = \|(-0.265631, 0.215943, -0.615678)\| = \boxed{0.70445}$$

Siguiendo el paso 5 se halla la inclinación i:

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right) = \arccos\left(\frac{32959.7}{73027}\right) = \boxed{63.1706^\circ}$$

El paso 6 nos permite obtener la línea de nodos $\vec{n}$ y la ascensión recta del nodo ascendente Ω:

$$\vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{h} = (0,0,1) \wedge (-28920.3, 58397.1, 32959.7) = (-58397.1, -28920.3, 0)$$

$$\Omega = 360^\circ - \arccos\left(\frac{n_x}{\|\vec{n}\|}\right) = 360^\circ - \arccos\left(\frac{-58397.1}{65166}\right) = \boxed{206.346^\circ}$$

Utilizando $\vec{n}$ y $\vec{e}$ y siguiendo el paso 7 se puede hallar el argumento del perigeo ω:

$$\omega \overset{(e_z<0)}{=} 360^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n\, e}\right) = 360^\circ - \arccos\left(\frac{9266.96}{45906.2}\right) = 360^\circ - 78.3538^\circ = \boxed{281.646^\circ}$$

El paso 8 y último utiliza $\vec{r}$ y $\vec{e}$ para calcular la anomalía verdadera θ:

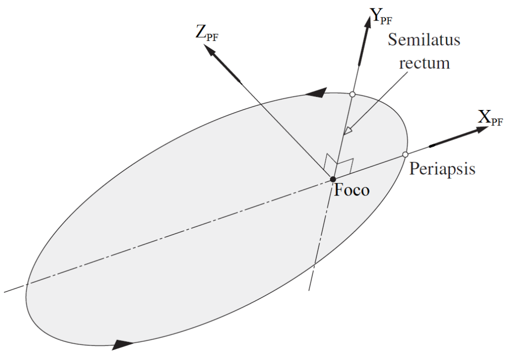
$$\theta \overset{(\vec{r}\cdot\vec{v}>0)}{=} \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e\, r}\right) = \arccos\left(\frac{1632.42}{8275}\right) = \boxed{78.6226^\circ}$$

5 Sistema de referencia Perifocal

En ocasiones hay que utilizar un sistema de coordenadas sobre la órbita. Frecuentemente se utiliza el conocido como **Sistema de Referencia Perifocal** (Perifocal Frame) que podemos ver en la figura 7. Este sistema de referencia considera:

- Origen: El Foco primario de la órbita
- Plano: El plano orbital
- Dirección principal: La dirección del periapsis de la órbita.

Con estas referencias se toma como eje X el que va del foco al periapsis, como eje Y el que corresponde a $\theta = 90^{\circ}$ y como eje Z la dirección de $\overrightarrow{h}$, $\perp$ al plano XY. La representación de este sistema $(X_{PF}; Y_{PF}; Z_{PF})$ se puede ver en figura 7.



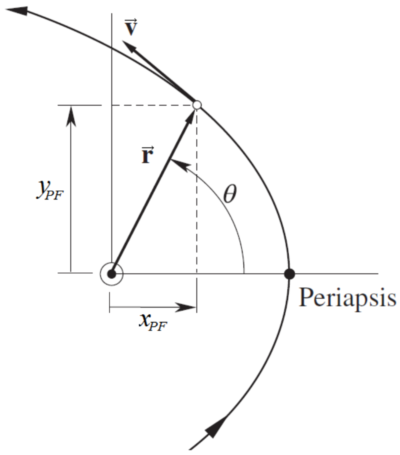


Figura 7: El Sistema Perifocal: X_{PF}, Y_{PF}, Z_{PF}.
El origen está en el foco y la dirección pricipal es la del periapsis.

Según la figura 7 se puede deducir que el vector posición en coordenadas perifocales es:

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x_{PF} \\ y_{PF} \\ z_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Derivando $x_{PF} = r\cos\theta$ e $y_{PF} = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ obtenemos

$$\dot{x}_{PF} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\dot{y}_{PF} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

Pero

$$r\dot{\theta} = v_{\perp} = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta) \qquad \text{y} \qquad \dot{r} = v_r = \frac{\mu}{h} e\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que sustituyendo y simplificando resulta:

$$\dot{x}_{PF} = \left(\frac{\mu}{h} e\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\cos\theta - \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{\mu}{h}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\dot{y}_{PF} = \left(\frac{\mu}{h} e\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta)\cos\theta = \frac{\mu}{h}(e + \cos\theta)$$

De aquí podemos obtener el vector velocidad en coordenadas perifocales es:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{PF} \\ \dot{y}_{PF} \\ \dot{z}_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{h}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\mu}{h}(e+\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ejemplo 5.1 *Un satélite orbita alrededor de la Tierra con una excentricidad de* 0.32 *y un momento angular de* $59000\,km^2/s$. *¿Cuáles son sus vectores posición y velocidad en un sistema de referencia perifocal en el instante que la anomalía verdadera es* $\theta = 135^o$.

Solución: Calculando

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos\theta} = \frac{\frac{59000^2}{398600.5}}{1+0.32\cos(135^o)} = 11287\,km$$

Sustituyendo en (8) se tiene:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_{PF} \\ y_{PF} \\ z_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11287\cos(135^o) \\ 11287\operatorname{sen}(135^o) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7981.12 \\ 7981.12 \\ 0 \end{pmatrix} km$$

Para calcular el vector velocidad en perifocales se aplica (9).Como $\frac{\mu}{h} = 6.75594$, se obtiene:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{PF} \\ \dot{y}_{PF} \\ \dot{z}_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{h}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\mu}{h}(e+\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.75594\operatorname{sen}(135^o) \\ 6.75594\,(0.32+\cos(135^o)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4.77717 \\ -2.61527 \\ 0 \end{pmatrix} km/s$$

6 Deducción del vector estado Geocéntrico-Ecuatorial conociendo los elementos

A partir de los elementos orbitales a, e, i, Ω, ω y θ es sencillo obtener las coordenadas (posición y velocidad) perifocales usando (8) y (9). A continuación esas coordenadas se transforman a sistema geocéntrico-ecuatorial haciendo tres giros sucesivos de esas coordenadas. Ver la figura 8.

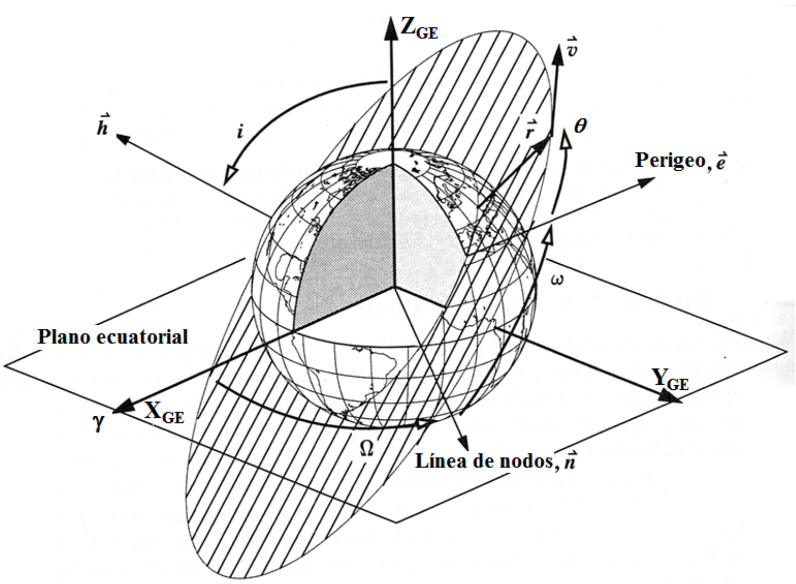


Figura 8: Para pasar las coordenadas del sistema perifocal al Geocéntrico-Ecuatorial habrá que hacer 3 giros a esas coordenadas.

Un primer giro debe ser alrededor del eje $Z_{PF} = \overrightarrow{h}$ en sentido horario y de un ángulo ω (así se lleva la línea del perigeo sobre la del nodo ascendente). Luego se hace otro giro horario de un ángulo i alrededor de la línea de nodos (así coincidirán el plano orbital con el ecuatorial) y finalmente un giro horario del ángulo Ω alrededor del eje polar (de esta forma ya coincidirá la línea de nodos con la del Punto Vernal y por tanto los tres ejes de los dos sistemas de referencia).

La expresión que transforma coordenadas perifocales (X_{PF}, Y_{PF}, Z_{PF}) en geocéntrico-ecuatoriales (X_{GE}, Y_{GE}, Z_{GE}) es:

$$\begin{pmatrix} X_{GE} \\ Y_{GE} \\ Z_{GE} \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \cdot \begin{pmatrix} X_{PF} \\ Y_{PF} \\ Z_{PF} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ejemplo 6.1 *En la web de Horizons podemos encontrar los elementos orbitales de la ISS para una fecha determinada. En particular para el 5 de Febrero de 2019 a las 0h UT se han descargado los siguientes elementos:*

$$a = 6779.89\,km \qquad e = 0.00153853 \qquad i = 51.53196^o$$
$$\Omega = 298.4089^o \qquad \omega = 70.3950^o \qquad \theta = 199.0343^o$$

Calcular las coordenadas de la posición y de la velocidad en ese instante en el sistema Geocéntrico-ecuatorial.

Solución: Para empezar debemos hallar el momento angular

$$h = \sqrt{\mu\, a\,(1-e^2)} = \sqrt{398600.5 \cdot 6779.89\,(1 - 0.00153853^2)} = 51985.2\,km^2/s$$

y con él podemos hallar r y $\frac{\mu}{h}$:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} = \frac{\frac{51985.2^2}{398600.5}}{1 + 0.00153853\cos(199.0343^o)} = 6789.75\,km$$

$$\frac{\mu}{h} = \frac{398600.5}{51985.2} = 7.66758$$

y ahora se pueden obtener las coordenadas perifocales

$$\overrightarrow{r}_{PF} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6789.75\cos(199.0343^o) \\ 6789.75\,\mathrm{sen}(199.0343^o) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6418.51 \\ -2214.37 \\ 0 \end{pmatrix} km$$

$$\overrightarrow{v}_{PF} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{h}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{\mu}{h}\,(e + \cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.66758\,\mathrm{sen}(199.0343^o) \\ 7.66758\,(0.00153853 + \cos 199.0343^o) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.50066 \\ -7.23654 \\ 0 \end{pmatrix} km/s$$

El paso siguiente es transformar estas coordenadas Perifocales en Geocéntrico-ecuatoriales utilizando la expresión (10):

$$\overrightarrow{r}_{GE} = R_z(-\Omega)\cdot R_x(-i)\cdot R_z(-\omega)\cdot \overrightarrow{r}_{PF} =$$
$$= R_z(-298.4089^o)R_x(-51.53196^o)R_z(-70.3950^o)\begin{pmatrix}-6418.51\\-2214.37\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3747.09\\-1949.92\\-5315.81\end{pmatrix}\ km$$

$$\overrightarrow{v}_{GE} = R_z(-\Omega)\cdot R_x(-i)\cdot R_z(-\omega)\cdot \overrightarrow{v}_{PF} =$$
$$= R_z(-298.4089^o)R_x(-51.53196^o)R_z(-70.3950^o)\begin{pmatrix}2.50066\\-7.23654\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.60285\\-6.75552\\-0.0566889\end{pmatrix}\ km/s$$

7 Cierre

En este artículo se han definido los elementos orbitales que sitúan un cuerpo en el espacio.

Se ha detallado la relación existente entre los elementos orbitales y las coordenadas de la posición y velocidad de un vehículo tanto en un sistema de coordenadas Perifocal como en el Geocéntrico-Ecuatorial.

Para ello ha sido necesario explicar el sistema de referencia Perifocal y dar las pautas para poder hacer cambios entre ambos sistemas de referencia

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.