Órbitas en tres dimensiones: Tiempos y Cambios de Coordenadas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Objetivos 2

2. Introducción 2

2.1. Matrices de Rotación 2

3. Tiempo Universal (UT), Día juliano (JD) y Tiempo Sidéreo Local (Θ_L). 3

4. Paso de Geocéntrico-Ecuatoriales a Heliocéntrico-Eclípticas y viceversa. 6

5. Paso de Geocéntrico-Ecuatorial a Topocéntrico-Horizontal y viceversa. 8

6. Cierre 10

1 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Distinguir, relacionar y convertir los distintos tipos de tiempo: Tiempo Solar, Tiempo Universal (UT) y Tiempos Sidéreos.
- Calcular la fecha juliana para un instante concreto.
- Convertir coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales en Heliocéntrico-Eclípticas y viceversa.
- Convertir coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales en Topocéntrico-Horizontales y viceversa.

2 Introducción

Para el estudio de la posición y movimiento de satélites se utilizan diferentes sistemas de coordenadas según la órbita que describen, la posición que ocupan y los cambios que se quieren realizar. En las secciones 4 y 5 de este artículo se recuerdan las características de los más utilizados habitualmente en Astrodinámica:

Heliocéntrico/Baricéntrico/Geocéntrico-Eclíptico

Geocéntrico-Ecuatorial

Topocéntrico-Horizontal

Posteriormente se deducen las fórmulas que permiten cambiar las coordenadas de un cuerpo entre esos sistemas. Cuando en el cambio intervenga el sistema Topocéntrico-Horizontal será necesario conocer el Tiempo sidéreo Local que se habrá definido y explicado con antelación en la sección 3. En la deducción de las fórmulas de cambio de coordenadas necesitaremos recordar las matrices de rotación y alguna de sus propiedades.

2.1 Matrices de Rotación

Las matrices que permiten hallar las coordenadas en un sistema de referencia que ha girado un ángulo α alrededor de uno de los ejes X, Y, Z respecto de otro sistema son respectivamente:

$$R_X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad R_Y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son ortogonales por lo que sus inversas, que calculan las coordenadas cuando el giro se hace con el ángulo opuesto, coinciden con sus traspuestas:

$$R_W(\alpha)^{-1} = R_W(-\alpha) = (R_W(\alpha))^t$$

3 Tiempo Universal (UT), Día juliano (JD) y Tiempo Sidéreo Local (Θ_L).

Para conocer la órbita de un satélite es necesario conocer el tiempo de cada observación. Existen diferentes formas de medir el tiempo de las que vamos a destacar las más utilizadas.

El tiempo que utilizamos en la vida diaria se llama **Tiempo Solar** porque se relaciona con el movimiento del Sol en la Esfera Celeste. Así, un **día solar** (24 horas) es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano del lugar.

Otra medida del tiempo fundamental en Astrodinámica es el **Tiempo Universal** (**UT**). El **UT** se fija cuando a mediodía cruza el Sol por el meridiano de Greenwich ($\lambda = 0°$). A partir del UT se puede obtener el **tiempo civil** de un lugar sin más que añadir 1 hora por cada huso horario ($15°$) comprendido entre Greenwich y el lugar (midiendo hacia el este).

Otro medida de tiempo importante que debemos conocer es el **Día Juliano** (**JD**) que es el número de días transcurrido desde el mediodía[1] del 1 de enero del año 4713 a.C. hasta la fecha deseada. Para hallar el día juliano de una instante (y, m, d, h) debemos hallar primero el JD a las $0h$ UT (J_0) mediante la expresión[2]:

$$J_0 = 367y - ENT\left[\frac{7\left(y + ENT\left(\frac{m+9}{12}\right)\right)}{4}\right] + ENT\left(\frac{275m}{9}\right) + d + 1721013.5 \tag{1}$$

y sumarle las horas expresadas en días. Por tanto

$$JD = J_0 + \frac{h}{24} \tag{2}$$

Nota: La mayoría de software de cálculo permiten calcular el día juliano de un instante mediante un solo comando. Por ejemplo JulianDate en MATHEMATICA o juliandate en Matlab.

Ejemplo 3.1 *Calcula los días julianos que corresponden al 9 de Febrero de 2020 a las 20:15:50* (UT) *y a una fecha que se usa a menudo como referencia, mediodía del 1 de Enero de 2000, conocida como* J_{2000}.

Solución:

En ambos casos, aplicando (1) y (2), debemos hallar primero su correspondiente J_0 y luego sumarle la UT expresada en días:

$$JD = 2458888.5 + \frac{20 + \frac{15}{60} + \frac{50}{3600}}{24} = \boxed{2458889.344}$$

$$J_{2000} = 2451544.5 + \frac{12}{24} = \boxed{2451545.0}$$

[1] Se mide desde el mediodía porque las observaciones astronómicas eran mayoritariamente nocturnas y se quería evitar tener un cambio de fecha en las series de observaciones

[2] Válida entre 1901 y 2099

El **Tiempo Sidéreo** es el medido por la rotación de la Tierra respecto a las estrellas fijas (esfera celeste) definiendo de esta manera el **día sidéreo** (24 horas sidéreas): tiempo transcurrido en completar la Tierra una vuelta completa sobre sí misma respecto a las estrellas. Ver figura 1.

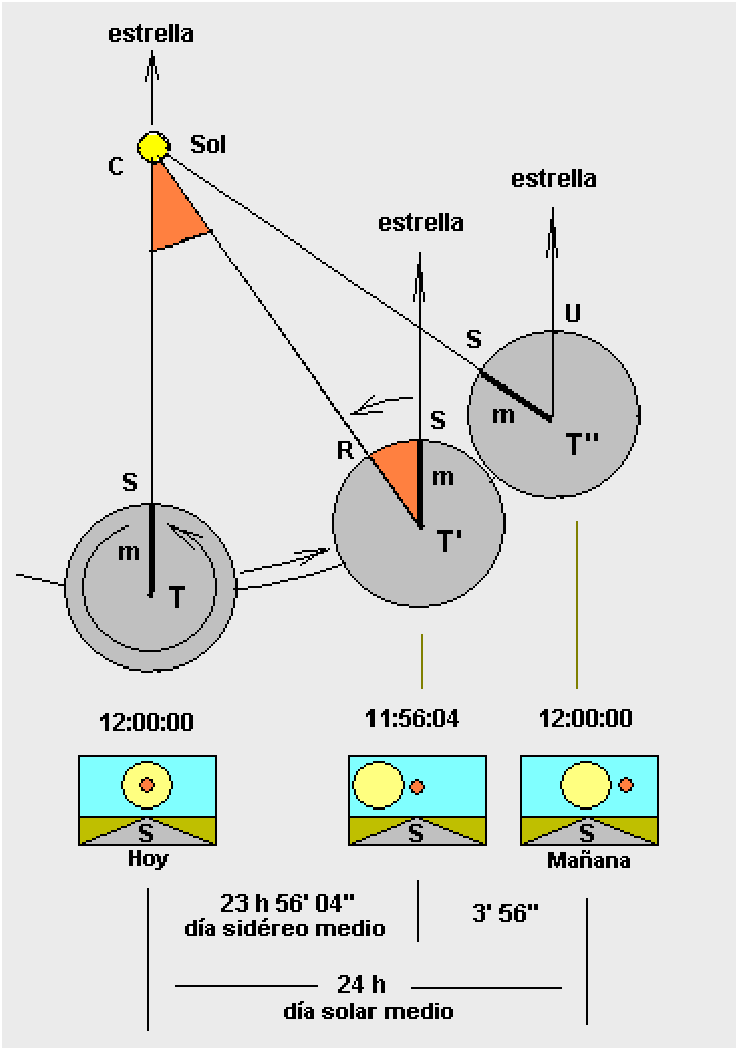

Figura 1: Debido al movimiento de traslación, la Tierra tarda más en hacer una rotación respecto al Sol que respecto a las estrellas.

Como consecuencia de la definición el día sidéreo es más corto que el día solar ($23h\ 56'$) y si la Tierra gira 360^o en un día sidéreo entonces gira 360.986^o en un día solar.

Para saber la situación de un punto en un instante respecto al Sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial es necesario conocer el tiempo sidéreo de un lugar. Se llama **Tiempo Sidéreo Local** (Θ_L o TSL) u **Hora Sidérea Local** de un lugar al tiempo transcurrido desde que el meridiano del lugar pasó sobre el Punto Vernal, es decir, el ángulo medido hacia el Este desde el Punto Vernal hasta el meridiano del lugar expresado en horas). En consecuencia, Θ_L es el ángulo horario que forma el Punto Vernal con el Meridiano del observador.

Para calcular la hora sidérea (Θ_L) de un lugar con longitud geográfica λ en un momento determinado UT, basta sumar la hora sidérea de Greenwich Θ_G, que deberá ser calculada previamente, y la longitud positiva (al Este). A continuación se muestra el proceso a seguir para hacer ese cálculo.

Cálculo del TSL (Θ_L) para un lugar y momento determinados.

Paso 1: Determinar J_0 para la fecha mediante la ecuación (1)

Paso 2: Hallar el tiempo T_0 en siglos julianos entre J_0 y J_{2000}:

$$T_0 = \frac{J_0 - J_{2000}}{36525}$$

Paso 3: Calcular el tiempo sidéreo en Greenwich a las $0h$ UT mediante la expresión:

$$\Theta_{G_0} = 100.4606184 + 36000.77004\,T_0 + 0.000387933\,T_0^2 - 2.583 \cdot 10^{-8}\,T_0^3 \quad (grados)$$

(Si $\Theta_{G_0} \notin [0^o, 360^o]$ debemos sumar/restar múltiplos de 360^o hasta estar en $[0^o, 360^o]$)

Paso 4: Hallar la hora sidérea en Greenwich Θ_G para la UT teniendo en cuenta que la Tierra rota cada día solar más de 360^o respecto a las estrellas:

$$\Theta_G = \Theta_{G0} + 360.98564724\,\frac{UT}{24} \quad (grados)$$

Paso 5: Hallar la hora sidérea local del lugar sumando la longitud geográfica en grados:

$$\Theta_L = \Theta_G + \lambda\,(grados)$$

(Si Θ_L supera los 360^o debemos restar múltiplos de 360^o hasta estar entre 0^o y 360^o)

Podemos ver una representación de estos ángulos en la figura 2)

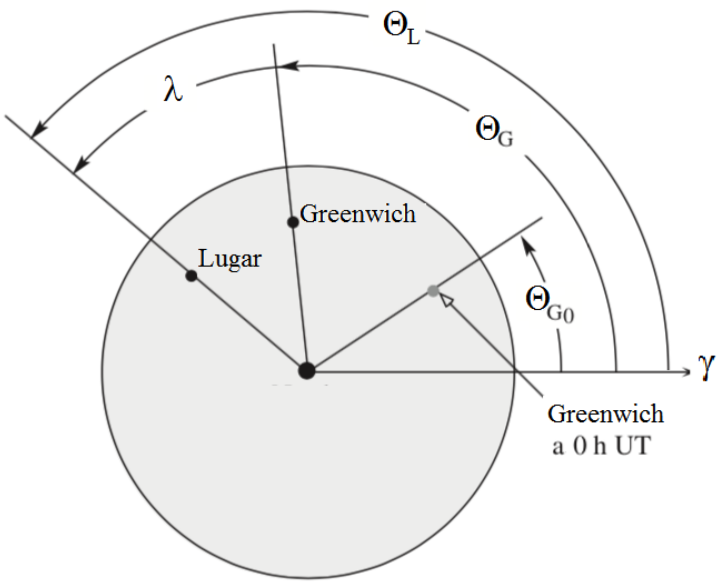

Figura 2: Tiempos sidéreos (medidos desde γ): Θ_{G_0} (Hora sidérea en Greenwich a las $0h$ UT), Θ_G (Hora sidérea en Greenwich) y Θ_L (Hora sidérea del lugar).

Ejemplo 3.2 *Halla la hora sidérea local en la UPV el 9 de Febrero de 2020 a las 20:15:50* UT.

Solución:

Paso 1: Utilizando la igualdad (1):

$$J_0 = 2458888.5^o$$

Paso 2:

$$T_0 = \frac{J_0 - J_{2000}}{36525} = \frac{2458888.5 - 2451545.0}{36525} = 0.201054073$$

Paso 3:

$$\Theta_{G0} = 100.4606184 + 36000.77004\, T_0 + 0.000387933\, T_0^2 - 2.583 \cdot 10^{-8}\, T_0^3 = 7338.56 \rightarrow 138.56207^o$$

Paso 4:

$$\Theta_G = \Theta_{G0} + 360.98564724\, \frac{20 + \frac{15}{60} + \frac{50}{3600}}{24} = 138.56207 + 360.98564724\, \frac{20.263889}{24} = 443.35261^o$$

Paso 5:

$$\Theta_L = \Theta_G + \lambda = 443.35261 + 359.65642 = 803.00903^o \rightarrow \boxed{83.00903^o} \sim 5.53394h$$

4 Paso de Geocéntrico-Ecuatoriales a Heliocéntrico-Eclípticas y viceversa.

El sistema **Heliocéntrico-Eclíptico** es utilizado en misiones interplanetarias cuando las naves escapan de las esferas de influencia de los planetas. Este sistema está definido por: Origen, el Sol; Plano de referencia, el plano de la Eclíptica y como dirección fija, la dirección del Punto Vernal[3]. En este sistema, como se puede ver en la figura 3, el Ecuador está inclinado respecto de la eclíptica un ángulo $\epsilon = 23^o\, 26'$ llamado oblicuidad de la eclíptica. El eje X_ϵ apunta al Punto Vernal, el eje Z_ϵ es perpendicular al plano de la eclíptica y el eje Y_ϵ se elige para formar el triedro a derecha.

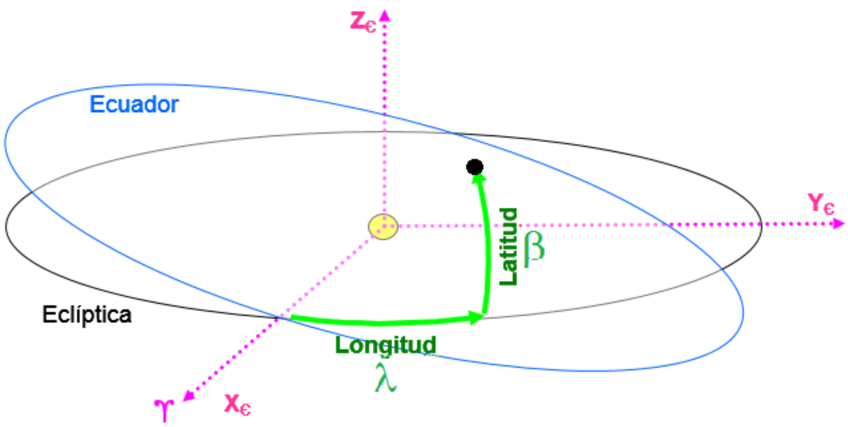

Figura 3: El sistema de referencia Heliocéntrico-Eclíptico: Coordenadas cartesianas y angulares

[3]Si mantenemos los mismos ejes, pero teniendo como Origen el Baricentro del Sistema Solar se le denomina **Baricéntrico-Eclíptico** y si el Origen de las coordenadas es la Tierra, **Geocéntrico-Eclíptico**

Además de estas coordenadas rectangulares se pueden definir dos medidas angulares (figura 3): La **Longitud eclíptica** (λ) es el ángulo medido sobre la Eclíptica desde el Punto Vernal hacia el Este y, la conocida como **Latitud eclíptica** (β) que es el ángulo medido desde ésta y perpendicularmente a ella.

Cuando estamos en la esfera de influencia de la Tierra (SOI) el sistema de coordenadas utilizado es el llamado Geocéntrico-Ecuatorial que se caracteriza por: Origen, el centro de la Tierra; Plano de referencia, el plano ecuatorial y como dirección fija, la dirección del Punto Vernal. Sobre el origen se considera como eje X_{GE} también la dirección del Punto Vernal, como eje Z_{GE} el eje de rotación de la Tierra (Norte como dirección positiva) y como eje Y_{GE} se elije de forma que verifique el triedro a derecha, ver figura 4.

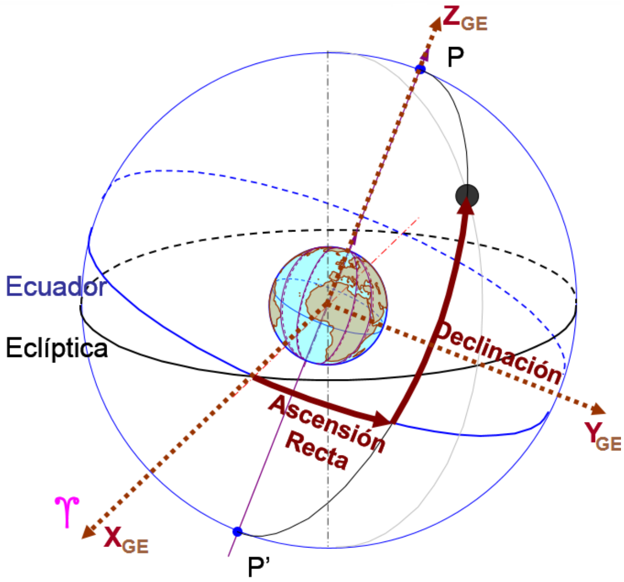

Figura 4: El sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial: Coordenadas cartesianas y angulares

En este caso también se pueden definir coordenadas angulares llamadas coordenadas **Geocéntricas Absolutas**. El ángulo medido sobre el Ecuador desde la dirección del Punto vernal hacia el este se conoce como **Ascensión Recta** ($RA\ \ o\ \ \alpha$) que se indica en grados aunque los astrónomos suelen medirla en horas. El ángulo medido desde el Ecuador y de forma perpendicular a éste se conoce como **Declinación** (δ) que se considera positiva hacia el Norte y negativa hacia el Sur.

Por tanto para hacer un **cambio de coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales a Heliocéntrico-Eclípticas** de una nave (S) será necesario hacer un giro de ángulo ϵ alrededor del eje X, que es común a ambos sistemas, obteniendo geocéntrico-eclípticas y sumar la posición Heliocéntrico-Eclíptica del centro de la Tierra[4] obteniendo así, las coordenadas Heliocéntrico-Eclípticas de S. La expresión de este cambio será:

$$\begin{pmatrix} X_\epsilon \\ Y_\epsilon \\ Z_\epsilon \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} X_\epsilon \\ Y_\epsilon \\ Z_\epsilon \end{pmatrix}_T + R_X(\epsilon) \cdot \begin{pmatrix} X_{GE} \\ Y_{GE} \\ Z_{GE} \end{pmatrix}_S \tag{3}$$

$$\vec{r}_\epsilon(S) = \vec{r}_\epsilon(T) + R_X(\epsilon) \cdot \vec{r}_{GE}(S)$$

[4] calculada mediante efemérides

Ejemplo 4.1 *La sonda Parker fue lanzada el 12 de agosto de 2018 a las* $07:31$ UT. *Descargando de la web JPL-Horizons*[5] *las coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales de la sonda a las 24 h exactas de su lanzamiento. Observa que la distancia a la que se encuentra supera el radio de la SOI de la Tierra* $(924000\ km)$ *por lo que conviene cambiar a coordenadas Heliocéntrico-Eclípticas.*
Calcula esas coordenadas para lo que necesitarás conocer/descargar las coordenadas Heliocéntrico-Eclípticas de la Tierra en ese instante.

Solución:

Entrando en la web 'JPL-Horizons' y configurando la búsqueda[6] obtenemos las coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales de la sonda Parker:

$$\vec{r}_{GE}(S) = (-6.838800581364 \cdot 10^5, -6.600452104704 \cdot 10^5, -4.491655979227 \cdot 10^5) \quad km$$

También obtenemos de la misma web las coordenadas Heliocéntrico-Eclípticas de la Tierra para ese mismo instante:

$$\vec{r}_{\epsilon}(T) = (1.165635882129 \cdot 10^8, -9.689086751318 \cdot 10^7, 3.425685046583 \cdot 10^3) \quad km$$

Utilizando (3) se obtiene

$$\vec{r}_{\epsilon}(S) = \vec{r}_{\epsilon}(T) + R_X(\epsilon) \cdot \vec{r}_{GE}(S) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1.165636 \cdot 10^8 \\ -9.689087 \cdot 10^7 \\ 3.425685 \cdot 10^3 \end{pmatrix} + R_X(\epsilon) \cdot \begin{pmatrix} -6.838800 \cdot 10^5 \\ -6.600452 \cdot 10^5 \\ -4.491656 \cdot 10^5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1.158797 \cdot 10^8 \\ -9.767510 \cdot 10^7 \\ -1.462063 \cdot 10^5 \end{pmatrix} km}$$

Se puede comprobar que tus resultados son buenos comparando con la descarga desde la web de ese tipo de coordenadas.

El cambio recíproco de coordenadas se hace siguiendo el proceso contrario[7]

$$\vec{r}_{GE}(S) = R_X(-\epsilon) \cdot (\vec{r}_{\epsilon}(S) - \vec{r}_{\epsilon}(T)).$$

5 Paso de Geocéntrico-Ecuatorial a Topocéntrico-Horizontal y viceversa.

Las coordenadas del sistema **Topocéntrico-Horizontal** (o Local-Horizontal) son locales. Se caracteriza por usar los siguientes elementos: Origen, el Lugar/Observador; Plano de referencia, el plano del Horizonte y como Dirección fija, la dirección Sur-horizontal que es la del punto intersección entre el meridiano del lugar y el Horizonte. Centrado en el observador se considera como eje X_T la dirección Sur sobre el horizonte, el eje Z_T la dirección del Zenit y en consecuencia el eje Y_T apunta al Este (figura 5). Estos ejes NO se consideran fijos respecto a las estrellas (giran con el giro de la Tierra) y por tanto este sistema no es inercial.

[5] https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi
[6] Vector Table, Sonda Parker, Geocéntricas, 2018-08-13 07:31, , Tipo 1 - Km - Ecuatoriales y Output-Texto
[7] O bien con $\vec{r}_{GE}(S) = R_X(-\epsilon) \cdot \vec{r}_{\epsilon}(S) - \vec{r}_{HE}(T)$

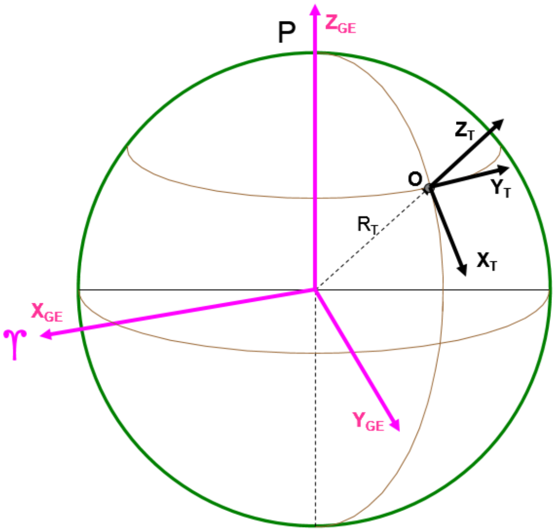

Figura 5: Sistema de referencia Topocéntrico

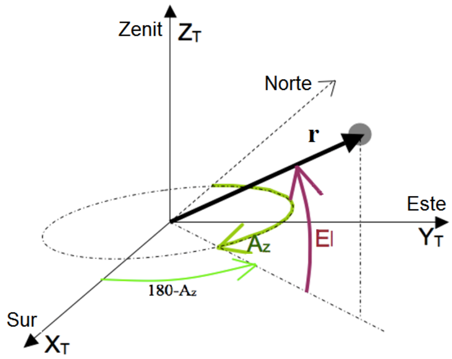

Figura 6: Coordenadas Altazimutales (Topocéntricas angulares)

En el sistema Topocéntrico a veces se usan coordenadas angulares (ver figura 6) llamadas Altazimutales: El **Azimut** (Az), que se mide hacia el Este sobre el Horizonte desde la dirección Norte[8] y la **Elevación** o **Altura** (El o h), que es el ángulo entre la dirección del objeto y el plano del horizonte.

Hacer un **cambio de coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales a Topocéntrico-Horizontales** de una nave (S) requiere girar un ángulo igual al Tiempo Sidéreo Local (Θ_L) alrededor del eje Z, después hacer otro giro alrededor del eje Y de un ángulo igual a la colatitud, $90^o - \phi$, con lo que tendremos las coordenadas en un sistema horizontal pero geocéntrico y para terminar habrá que restar a la tercera coordenada el radio terrestre en el Lugar. La expresión de este cambio será:

$$\vec{r}_T(S) = R_Y(90^o - \phi) \cdot R_Z(\Theta_L) \cdot \vec{r}_{GE}(S) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ejemplo 5.1 *Las coordenadas geográficas de la UPV son $\phi = +39.482369^o$ y $\lambda = 0.343578^o W$, calcula las coordenadas Topográfico-Horizontales de la sonda Parker para el 13 de agosto de 2018 a las $07:31$ UT. Considera que el radio terrestre es $6378\,km$.*

Solución: Del ejemplo anterior sabemos que

$$\vec{r}_{GE}(S) = \begin{pmatrix} -6.838800581364 \cdot 10^5 \\ -6.600452104704 \cdot 10^5 \\ -4.491655979227 \cdot 10^5 \end{pmatrix} \; km$$

Para aplicar (4) debemos conocer previamente el Tiempo sidéreo local de la UPV en ese instante (Θ_L) siguiendo los pasos de la Sección 3:

[8] En Astronomía se mide habitualmente desde el Sur

$$
\begin{aligned}
J_0 &= JD(2018, 8, 13, 0) = 2458343.5\, JD \\
T_0 &= \frac{J_0 - J2000}{36525} = \frac{2458343.5 - 2451545}{36525} = 0.1861327858 \\
\Theta_{G_0} &= 100.4606184 + 36000.77004 T_0 + 0.000387933 T_0^2 - 2.583 \cdot 10^{-8} T_0^3 = 321.3842490046 \\
\Theta_G &= \Theta_{G0} + 360.98564724 \frac{UT}{24} = 321.3842490046 + 360.98564724 \frac{7 + \frac{31}{60}}{24} = 74.4429482444^\circ \\
\Theta_L &= \Theta_G + \lambda = 74.4429482444 - 0.343578 = 74.0993702444^\circ
\end{aligned}
$$

Ahora giramos $\overrightarrow{r}_{GE}(S)$ para tener geocéntricas ecuatoriales pero con el eje X apuntando al meridiano del lugar:

$$
R_Z(\Theta_L) \cdot \overrightarrow{r}_{GE}(S) = \begin{pmatrix} -822153.233 \\ 476881.196 \\ -449165.598 \end{pmatrix}
$$

Este nuevo vector lo giramos para tener geocéntricas pero como plano de referencia tendremos el horizonte local:

$$
R_y(90^\circ - \phi) \cdot R_Z(\Theta_L) \cdot \overrightarrow{r}_{GE}(S) = \begin{pmatrix} -176083.408 \\ 476881.196 \\ -920152.328 \end{pmatrix}
$$

Para terminar desplazamos el origen a la superficie terrestre:

$$
R_y(90^\circ - \phi) \cdot R_Z(\Theta_L) \cdot \overrightarrow{r}_{GE}(S) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6378 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -176083.408 \\ 476881.196 \\ -926530.328 \end{pmatrix}
$$

Podemos hacer todo el proceso en un solo paso siguiendo (4):

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_T(S) &= R_Y(90^\circ - \phi) \cdot R_Z(\Theta_L) \cdot \overrightarrow{r}_{GE}(S) - (0, 0, R_T) = \\
&= R_Y(50.5176^\circ) \cdot R_Z(74.0993702444^\circ) \cdot \begin{pmatrix} -6.8388005813 \cdot 10^5 \\ -6.6004521047 \cdot 10^5 \\ -4.4916559792 \cdot 10^5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6378 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -176083.407913 \\ 476881.196013 \\ -926530.327871 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

El cambio recíproco de coordenadas se puede hacer siguiendo el proceso contrario:

$$
\overrightarrow{r}_{GE}(S) = R_Z(-\Theta_L) \cdot R_Y(-(90^\circ - \phi)) \cdot \left(\overrightarrow{r}_T(S) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix} \right) \quad (5)
$$

6 Cierre

Este artículo ha presentado algunos tipos de medida de tiempo y la relación y conversión entre ellos: UT (Tiempo Universal), JD (Día juliano) y Θ (Tiempo sidéreo).

También se han expuesto las principales características de los tres sistemas de coordenadas más habituales en Astrodinámica (Heliocéntrico-Eclíptico, Geocéntrico-Ecuatorial y Topocéntrico-Horizontal). Además se han deducido las fórmulas que se utilizan para cambiar las coordenadas de un punto entre esos sistemas de referencia.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos basados en situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.