Órbitas en tres dimensiones: Sistemas de Coordenadas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Reconocer y ubicar correctamente los puntos y elementos más destacados de la Esfera Celeste
- Distinguir entre los sistemas de coordenadas más importantes utilizados en Mecánica Orbital (Heliocéntrico, Geocéntrico y Topocéntrico) tanto en sus expresiones cartesianas como sus expresiones angulares.
- Convertir sin ambigüedades las coordenadas cartesianas en angulares y viceversa en cualquiera de ls tres sistemas anteriores.
- Situar en el espacio tridimensional un objeto por sus coordenadas.

2 Introducción

Hay diferentes sistemas de coordenadas utilizados habitualmente en Mecánica Orbital entre los que vamos a destacar:

Heliocéntrico/Baricéntrico/Geocéntrico-Eclíptico

Geocéntrico-Ecuatorial

Topocéntrico-Horizontal

Los sistemas son elegidos para que los diferentes tipos de movimiento sean fáciles de visualizar y calcular. La elección de un sistema de coordenadas adecuado puede simplificar mucho la resolución de un problema. Cada sistema queda definido por:

Un **Origen**,

un **Plano** y

una **Dirección de Referencia**.

Cualquier sistema de referencia ligado a las estrellas fijas (Punto Vernal) se considera inercial (realmente no es así porque el Sol se mueve alrededor del centro de la Galaxia). Incluso se consideran inerciales todos los sistemas con Origen en la Tierra y ejes dirigidos a estrellas fijas pues el error cometido es de una pequeña aceleración centrífuga[1] ($\sim 0.006\, m/s^2$) que es pequeña si la comparamos con la aceleración de la gravedad ($\sim 9.81\, m/s^2$) por lo que no es considerada en las primeras aproximaciones de los cálculos.

3 Elementos destacados en la esfera celeste.

Antes de definir los sistemas de coordenadas utilizados para describir las órbitas de satélites debemos conocer algunos elementos necesarios para su definición.

La **eclíptica** es el plano de la órbita que la Tierra describe en su movimiento alrededor del Sol (ver figura 1)

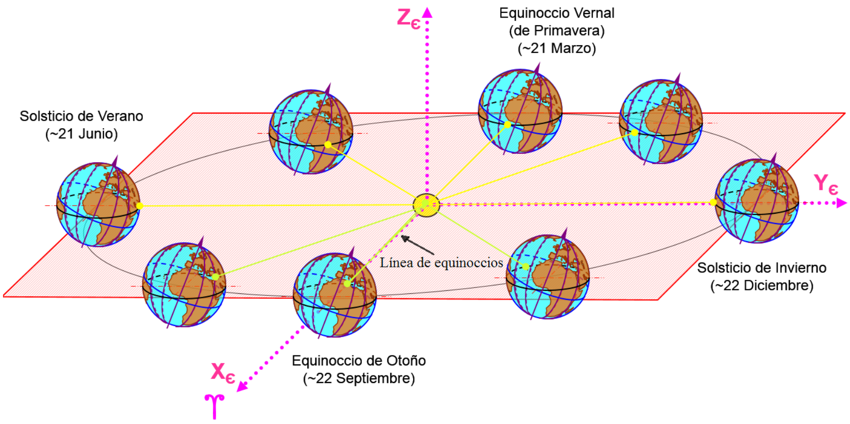

Figura 1: La eclíptica es el plano que contiene la órbita terrestre

En esta figura se puede observar que el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular a la eclíptica y forma con ésta un ángulo que se conoce como **oblicuidad de la eclíptica** y cuyo valor es de $\epsilon = 23.4^o$. Por tanto, el plano ecuatorial y el de la eclíptica intersectan en una recta a la que se llama **línea de equinoccios**.

El equinoccio vernal se produce el primer día de primavera cuando visto desde la Tierra el Sol cruza el Ecuador de Sur a Norte en lo que se llama movimiento aparente del Sol (ver figura 2). La posición del Sol en ese instante define un punto en el cielo, γ, llamado **Punto Vernal** o

[1] $\| \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \| \approx \omega^2\, r \approx \left(\frac{2\pi}{365 \cdot 86164} \right)^2 \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 0.006\, m/s^2$

Punto Aries[2] (ver figura 1 y figura 2). En el equinoccio el día y la noche duran lo mismo y de ahí su nombre. Hay otro equinoccio cuando el Sol aparenta cruzar el Ecuador de Norte a Sur al que se le conoce como equinoccio de otoño o Punto Libra (Ω) el cual se produce medio año después del vernal.

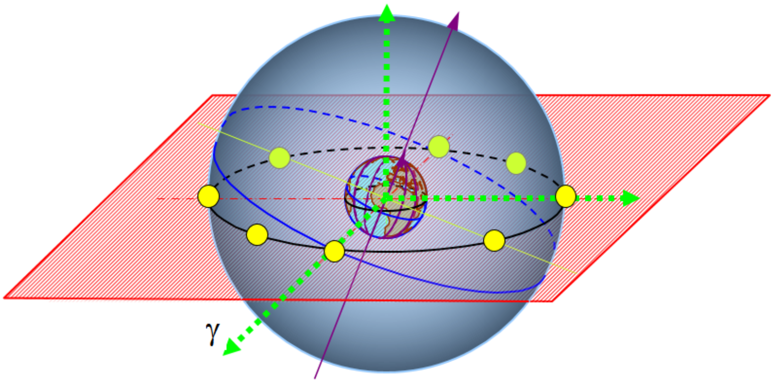

Figura 2: El Sol en su movimiento aparente cruza el plano del ecuador dos veces al año.

En la mayoría de los casos se considera que el punto vernal está fijo en el espacio pero en realidad está girando lentamente. Este giro es debido a que la Tierra no es esférica y a la atracción de la Luna y el Sol. El eje de rotación de la Tierra gira hacia el oeste a razón de 1.4° por siglo alrededor del vector normal a la eclíptica o lo que es lo mismo una vuelta cada 26000 años. Este efecto se conoce como **precesión de los equinoccios** y se puede ver con exageración en la figura 3.

Además, la acción de la Luna añade un efecto de **nutación** sobre la precesión haciendo que la oblicuidad de la eclíptica sufra un pequeño bamboleo con una amplitud de 0.0025° cada 18.6 años (ver figura 3) .

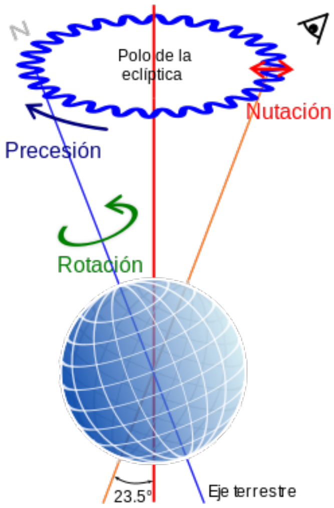

Figura 3: El eje de rotación gira alrededor del eje eclíptico (precesión) y sufre una especie de bamboleo (nutación).

[2] Hace unos 4000 años el punto vernal se encontraba en la constelación de Aries y de ahí su nombre pero, actualmente se encuentra entre Piscis y Acuario

4 Sistema de referencia Heliocéntrico-Eclíptico, (λ, β).

El sistema Heliocéntrico-Eclíptico es utilizado en misiones interplanetarias cuando las naves escapan de las esferas de influencia de los planetas. Este sistema queda definido por:

- Origen: El Sol.
- Plano de referencia: El plano de la eclíptica.
- Dirección fija: La dirección del punto vernal.

En este sistema, como se puede ver en la figura 4, el Ecuador queda inclinado respecto de la eclíptica. El eje X apunta al Punto Vernal, el eje Z es perpendicular al plano de la eclíptica y el eje Y se elige para formar el triedro a derecha.

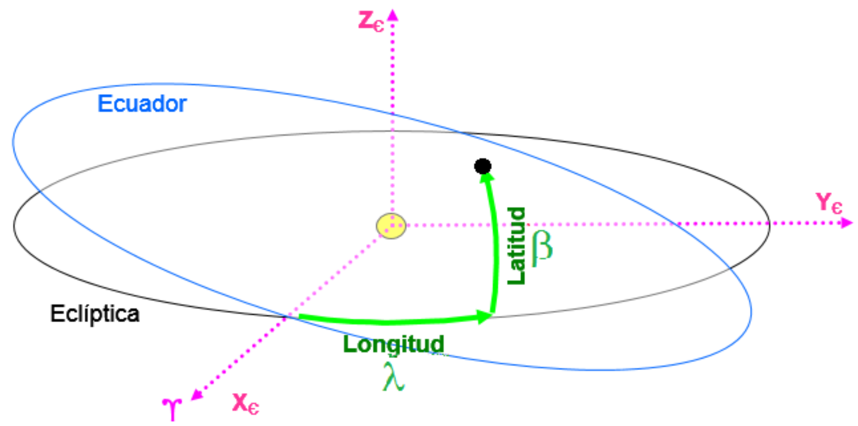

Figura 4: El sistema de referencia Heliocéntrico-Eclíptico: Coordenadas cartesianas y angulares

Además de estas coordenadas rectangulares se pueden definir dos medidas angulares (figura 4): La **Longitud eclíptica** (λ) es el ángulo medido sobre la Eclíptica desde el Punto Vernal hacia el Este y, la conocida como **Latitud eclíptica** (β) que es el ángulo medido desde ésta y perpendicularmente a ella.

Si consideramos este sistema de coordenadas eclíptico, manteniendo los mismos ejes, pero teniendo como Origen el Baricentro del Sistema Solar se le denomina **Baricéntrico-Eclíptico** y si el origen de las coordenadas es la Tierra, **Geocéntrico-Eclíptico**.

Tal y como se mencionó en la Introducción todos estos sistemas de referencia Eclípticos se consideran habitualmente inerciales porque se referencian respecto al Punto Vernal.

Ejemplo 4.1 *Halla la expresión de las coordenadas rectangulares eclípticas* $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_\varepsilon)$ *en función de las angulares* (r, λ, β).

Utiliza esta expresión para hallar las coordenadas eclípticas rectangulares de la sonda Juno cuando sus coordenadas angulares eran:

$$r = 2.0383\, U.A.;\;\; \lambda = 26^o 54' 46" \text{ y } \beta = -7^o 47' 31".$$

Solución:

Observando la figura 4 se deduce que

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= r\ \cos\beta\cos\lambda \\ Y_\varepsilon &= r\ \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ Z_\varepsilon &= r\ \mathrm{sen}\,\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Calculando r en km y aplicando estas igualdades a Juno se obtiene:

$$\begin{aligned} r &= 2.0383 * 149.6\cdot 10^6 = 3.0493\cdot 10^8 \\ X_\varepsilon &= r\ \cos\beta\cos\lambda = 3.0493\cdot 10^8\cos(26.9128^\circ)\cos(-7.79203^\circ) = 2.69391\cdot 10^8 \\ Y_\varepsilon &= r\ \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\lambda = 3.0493\cdot 10^8\cos(26.9128^\circ)\,\mathrm{sen}(-7.79203^\circ) = 1.36745\cdot 10^8 \\ Z_\varepsilon &= r\ \mathrm{sen}\,\beta = 3.0493\cdot 10^8\cos(26.9128^\circ) = -4.13412\cdot 10^7 \end{aligned}$$

5 Sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial, $(\alpha\,,\,\delta)$.

Para la mayoría de los cálculos el sistema de coordenadas utilizado es el llamado Geocéntrico-Ecuatorial que podemos ver en la figura 5 y que se caracteriza por:

- Origen: El centro de masas del cuerpo central (normalmente pero no siempre la Tierra).
- Plano de referencia: El plano ecuatorial
- Dirección fija: La dirección del punto vernal.

A partir de ahí se considera como eje X también la dirección del punto vernal, pero como eje Z el eje de rotación de la Tierra (Norte como dirección positiva) y el eje Y de forma que verifique el triedro a derecha (X_{GE}, Y_{GE}, Z_{GE} en figura 5). Estos ejes se consideran fijos respecto a las estrellas y por tanto inerciales.

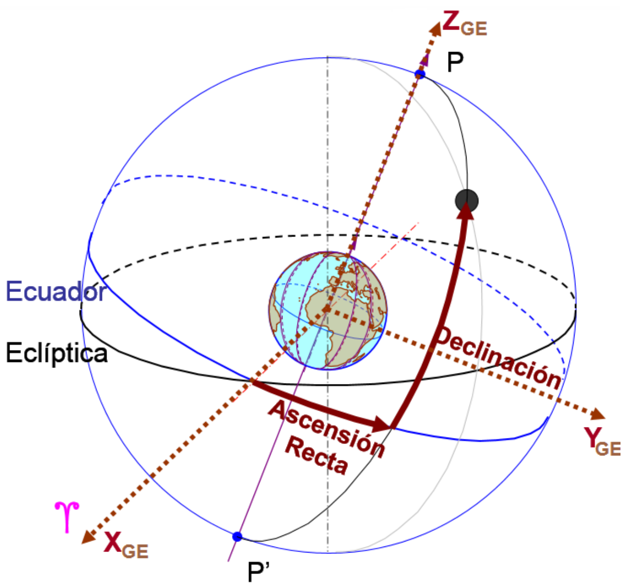

Figura 5: El sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial: Coordenadas cartesianas y angulares

En este caso también se pueden definir coordenadas angulares:
El ángulo medido sobre el Ecuador desde la dirección del punto vernal hacia el este se conoce como **Ascensión Recta** ($RA\ o\ \alpha$) que se indica en grados aunque los astrónomos suelen medirla en horas. El ángulo medido desde el Ecuador y de forma perpendicular a éste se conoce como **Declinación** (δ) que se considera positiva hacia el Norte y negativa hacia el Sur por lo que $-90^o \leq \delta \leq 90^o$. A estas coordenadas se les llama también **coordenadas Absolutas**.

Ejemplo 5.1 *La expresión del vector posición en el sistema geocéntrico-ecuatorial* (X_{GE}, Y_{GE}, Z_{GE}) *en función de las angulares* (r, α, δ) *se obtiene análogamente a como se hizo en el 4.1*

$$\begin{aligned} X_{GE} &= r\ \cos\delta\cos\alpha \\ Y_{GE} &= r\ \cos\delta\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Z_{GE} &= r\ \mathrm{sen}\,\delta \end{aligned} \tag{2}$$

Deduce las expresiones necesarias para obtener las angulares en función de las rectangulares y utilízalas para hallar las coordenadas Geocéntricas Absolutas de la Estación Espacial Internacional (ISS) cuyo vector posición es $\overrightarrow{r} = (-5472, -1805, 3509)\,km.$

Solución:

La distancia y la declinación se pueden calcular directamente

$$\begin{aligned} r &= \|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \delta &= \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{Z}{r}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

pero para la ascensión recta será necesario distinguir si es menor o mayor de 180^o viendo el signo de Y

$$\alpha = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{X/r}{\cos\delta}\right) & (Y \geq 0) \\ 360^o - \arccos\left(\dfrac{X/r}{\cos\delta}\right) & (Y < 0) \end{cases} \tag{4}$$

Sustituyendo los valores de la ISS resulta

$$r = \sqrt{5472^2 + 1805^2 + 3509^2} = 6746.4\,km$$

Ahora la declinación y la ascensión recta se calculan con (3) y (4) respectivamente teniendo en cuenta que $Y = -1805 < 0$:

$$\begin{aligned} \delta &= \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{3509}{6746.4}\right) = \boxed{31.34^o} \\ \alpha &= 360^o - \arccos\left(\frac{-5472/6746.4}{\cos 31.34^o}\right) = \boxed{198.26^o} \end{aligned}$$

Aunque $\overrightarrow{r}$ permite calcular α y δ, el problema recíproco (obtener $\overrightarrow{r}$ a partir de α y δ) no se puede resolver sin conocer la distancia r.

6 Sistema de referencia Topocéntrico-Horizontal, $(El\,, Az)$.

Es un sistema de coordenadas locales también llamado Local-Horizontal o Altazimutal. Se caracteriza por usar los siguientes elementos:

- Origen: El observador
- Plano de referencia: El plano del Horizonte celeste del observador
- Dirección fija: La dirección Sur-horizontal que es la del punto intersección entre el meridiano del lugar[3] y el Horizonte.

Centrado en el observador se considera como eje X la dirección Sur sobre el horizonte, el eje Z la dirección del Zenit y en consecuencia el eje Y apunta al Este (X_T, Y_T, Z_T en figura 6). Estos ejes NO se consideran fijos respecto a las estrellas (giran con el giro de la Tierra) y por tanto este sistema no es inercial.

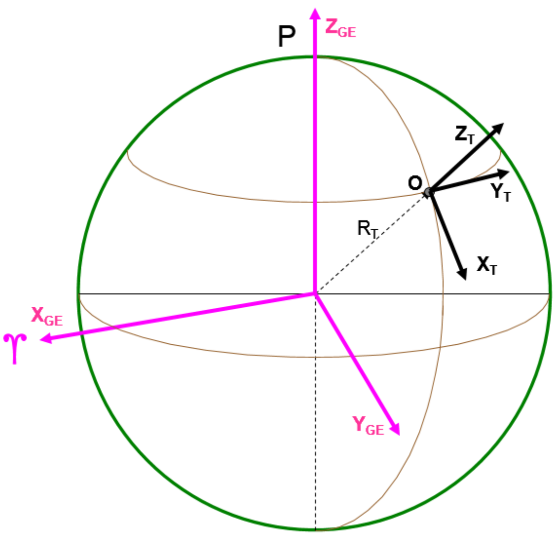

Figura 6: Sistema de referencia Topocéntrico

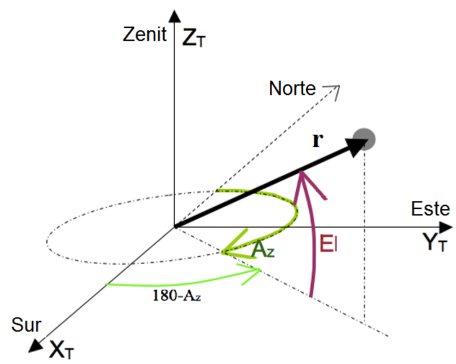

Figura 7: Coordenadas Altazimutales (Topocéntricas angulares)

En el sistema topocéntrico se definen dos coordenadas angulares (ver figura 7): El **Azimut** (Az) que se mide hacia el Este sobre el Horizonte desde la dirección Norte[4] y la **Elevación** o **Altura** (El o h) que es el ángulo entre la dirección del objeto y el plano del horizonte. En algunas ocasiones se usa en lugar de la elevación, su complementario que se conoce como distancia cenital. En este sistema las coordenadas son locales (los valores de las coordenadas de un mismo punto cambian al cambiar el observador).

[3] También conocido como meridiano del observador y se define como el círculo máximo que pasa por los polos y por el zenit del observador

[4] En Astronomía se mide habitualmente desde el Sur

Ejemplo 6.1 *Encuentra las expresiones de las coordenadas topográficas rectangulares en función de las angulares. Deduce también las recíprocas.*

Utiliza esas expresiones para hallar:
a) (X_T, Y_T, Z_T) *de la ISS observada desde un observatorio de Chile con las coordenadas angulares*

$$A_z = 330.257^o; \qquad El = 56.161^o; \qquad dist = 488\,km$$

b) Las coordenadas altazimutales $(A_z, El, dist)$ *de la ISS si las coordenadas topocéntricas desde la ETSID el día 14 de Abril de 2020 son* $(-1329, -432.4, 273.1)\,km$.

Solución:

A partir de la figura 7 se deduce

$$\begin{aligned}
X_T &= r\,\cos(El)\cos(180^o - A_z) &&= -r\,\cos(El)\cos(A_z) \\
Y_T &= r\,\cos(El)\,\mathrm{sen}(180^o - A_z) &&= r\,\cos(El)\,\mathrm{sen}(A_z) \\
Z_T &= r\,\mathrm{sen}(El) &&= r\,\mathrm{sen}(El)
\end{aligned} \tag{5}$$

y con un proceso similar al utilizado en el 5.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
r &= \|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + Z_T^2} \\
El &= \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{Z_T}{r}\right) \\
A_z &= \begin{cases} \mathrm{arc\,cos}\left(\dfrac{-X_T/r}{\cos(El)}\right) & (Y_T \geq 0) \\ 360^o - \mathrm{arc\,cos}\left(\dfrac{-X_T/r}{\cos(El)}\right) & (Y_T < 0) \end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

a) Sustituyendo en (5) los datos de la ISS resulta

$$\begin{aligned}
X_T &= -6378\,\cos(56.161^o)\cos(330.257^o) = -235.955 \\
Y_T &= 6378\,\cos(56.161^o)\,\mathrm{sen}(330.257^o) = -134.805 \\
Z_T &= 6378\,\mathrm{sen}(56.161^o) = 405.336
\end{aligned}$$

b) Utilizando las expresiones de (6) se obtiene

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-1329)^2 + (-432.4)^2 + 273.1^2} = 1424\,km \\
El &= \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{273.1}{1424}\right) = 11.06^o
\end{aligned}$$

Como $Y_T = -432.1 < 0$

$$A_z = 360^o - \mathrm{arc\,cos}\left(\frac{1329/1424}{\cos(11.06^o)}\right) = 341.98^o.$$

7 Otros sistemas de referencia

En ocasiones se utilizan otros sistemas de referencia como:

- Sistema de referencia Local-Ecuatorial u Horario, $(H\,,\,\delta)$. Es un sistema semilocal con origen en el centro de la Tierra, plano de referencia en plano ecuatorial y como dirección principal la de la intersección del meridiano del lugar con el Ecuador.

  Las coordenadas angulares son: El **Ángulo Horario** (H) que se mide hacia el Oeste sobre el Ecuador desde el meridiano del lugar y la **Declinación** (δ) que coincide con la declinación geocéntrico-ecuatorial. Se dice que es semilocal porque el ángulo horario es local pero la declinación es universal.

- Sistema de referencia Geográfico cuyos ángulos son la **Longitud** (λ) y la **Latitud** (φ) **geográficas**. Este sistema ha sido utilizado durante siglos para localizar posiciones en la superficie de la Tierra y en Mecánica Orbital se usa en las 'Ground tracks' o trazas de los satélites que suelen representarse en este sistema de coordenadas utilizando para ello una proyección Mercator o cilíndrica de la superficie terrestre.

- Sistema de referencia Galáctico. Es un sistema utilizado en Astronomía pero que en Mecánica Orbital no suele utilizarse.

8 Cierre

Este artículo ha presentado los tres principales sistemas de coordenadas utilizados en Mecánica Orbital (Heliocéntrico, Geocéntrico y Topocéntrico).

En cada uno de ellos se han expuesto las coordenadas cartesianas y las angulares.

Se han deducido las expresiones que permiten cambiar entre cartesianas y angulares y viceversa en cada uno de los sistemas.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos basados en situaciones reales.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] Brown, Charles D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] Prussing, John E. and Conway, Bruce A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] Chobotov, Vladimir A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.