



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Cálculo cinemático de una estructura isostática

<b>Apellidos, nombre</b>	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
<b>Departamento</b>	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
<b>Centro</b>	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



## 1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se resolverá cinemáticamente una estructura isostática, obteniendo los movimientos en los nudos y las funciones de desplazamiento. Posteriormente se hará una comprobación de flecha y de desplome lateral siguiendo las indicaciones del Código Técnico (CTE DB SE).

## 2 Introducción

Calcular cinemáticamente una estructura significa determinar su configuración cinemática final, es decir, obtener el valor de los movimientos de los nudos, de los extremos de las barras y, mediante las funciones de desplazamiento, el movimiento de cualquier punto de las mismas.

Cuando la estructura es isostática, una vez resuelta estáticamente, se pueden expresar las funciones de desplazamiento en función de las leyes de esfuerzos (en vez de hacerlo en función de las fuerzas exteriores) y plantear las condiciones de compatibilidad externas e internas para calcular los movimientos. Sustituyendo las condiciones de compatibilidad en la expresión de las funciones de desplazamiento se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los movimientos independientes de la estructura que determinan la configuración cinemática buscada.

Para garantizar que se cumple la normativa vigente se hará la comprobación de flecha y desplome lateral según los apartados 4.3.3.1 y 4.3.3.2 del CTE DB SE, respectivamente.

## 3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Obtener las condiciones de compatibilidad externa e interna
- Obtener movimientos de los nudos
- Determinar la expresión de las funciones de desplazamiento
- Hacer la comprobación de deformaciones que indica la normativa vigente

## 4 Cálculo cinemático de una estructura isostática

### 4.1 Datos y esquema del proceso de cálculo la estructura

La estructura de la figura 1 está formada por 2 barras y 3 nudos (1 libre y 2 apoyos). Los apoyos, nudos B y C son respectivamente un apoyo deslizante y un apoyo fijo, siendo el nudo A un nudo rígido.

La estructura es isostática y su estado de cargas se corresponde con una combinación de Estado Límite de Servicio (ELS):



Datos de las barras: barras:  $A=149.1 \text{ cm}^2$ ;  $I= 25166 \text{ cm}^4$ ,  $E=210000 \text{ N/mm}^2$

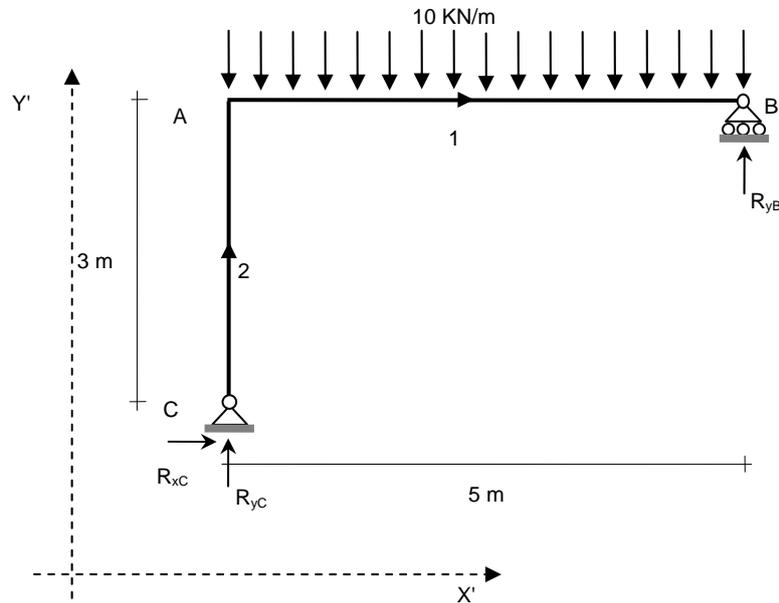


Figura 1. Esquema de la estructura

El proceso de cálculo que seguiremos es el siguiente:

- Resolución estática de la estructura isostática mediante las ecuaciones de equilibrio: obtención de reacciones en los apoyos y leyes de esfuerzos en todas las barras.
- Expresión de las funciones de desplazamiento ( $u(x)$ ,  $v(x)$  y  $v'(x)$ ) a partir de las leyes de esfuerzos. Estas funciones de desplazamiento están definidas en ejes locales y dependerán de los movimientos del extremo  $i$  de cada barra. Asignando a  $x$ , en cada función de desplazamiento, el valor de la longitud de la barra se obtiene la expresión de los movimientos del extremo  $j$  en función de los movimientos en  $i$ .
- Transformación de los movimientos de extremo de barra del sistema de ejes local al global.
- Planteamiento de las condiciones de compatibilidad.
- Obtención de los movimientos de los nudos y de los movimientos de extremo de barra en globales y locales. Formulación de las funciones de desplazamiento.
- Dibujo de la configuración cinemática admisible (deformada de la estructura).
- Comprobación de deformaciones (según indicaciones CTE DB SE, art. 4.3.3).

## 4.2 Resolución estática de la estructura

La estructura planteada es muy sencilla desde el punto de vista estático pudiendo calcular las reacciones directamente, con las ecuaciones de equilibrio global. Una vez obtenidas se planteará el equilibrio en cada barra calculando las leyes de esfuerzos.



Equilibrio de fuerzas exteriores (equilibrio global de la estructura)

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & & R_{x_c} = 0 \\ \sum F_y = 0 & & R_{y_b} + R_{y_c} = 50 \\ \sum M = 0 & & 125 = R_{y_b} \cdot 5 \end{aligned} \qquad R_{y_b} = 25\text{kN} \quad R_{y_c} = 25\text{kN}$$

Leyes de esfuerzos (figura 2)

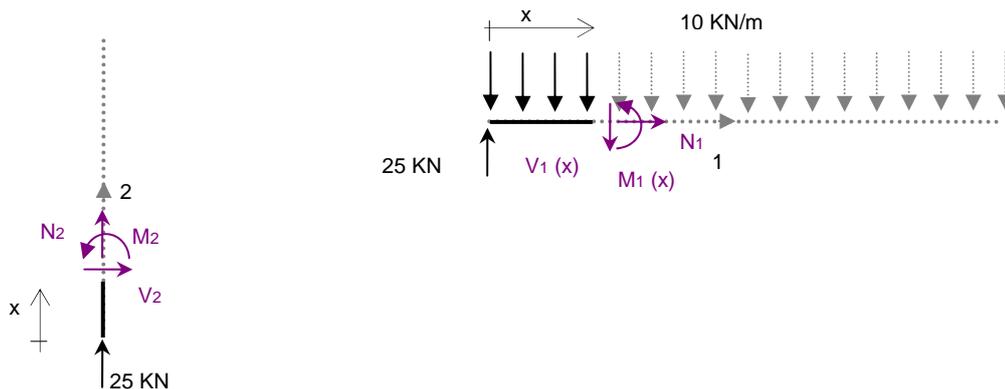


Figura 2. Esquema del equilibrio en las barras

$$\begin{aligned} \text{Barra 1: } N_1 &= 0 & V_1(x) &= 25 - 10x & M_1(x) &= 25x - 5x^2 \\ \text{Barra 2: } N_2 &= -25 & V_2 &= 0 & M_2 &= 0 \end{aligned}$$

### 4.3 Funciones de desplazamiento: $u(x)$ , $v(x)$ y $v'(x)$

Para cada barra se expresarán las funciones de desplazamiento en función de los esfuerzos y de los movimientos en el extremo i.

**BARRA 1**

Función de desplazamientos del axil:

$$u_1(x) = \int_0^x \frac{N_1}{EA} dx + dx_{i_1} \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = dx_{i_1}$$

$$\text{para } x = 5 \quad \Rightarrow \quad u_1(5) = dx_{j_1} \quad \Rightarrow \quad dx_{j_1} = dx_{i_1} \quad (1)$$

Función de desplazamientos y giros del flector:

$$\text{flechas: } v_1(x) = \int_0^x \int \frac{M_1(x)}{EI} dx + \theta_{i_1} x + dy_{i_1}$$

$$v_1(x) = \int_0^x \int \frac{25x - 5x^2}{EI} dx + \theta_{i_1} x + dy_{i_1} = \int_0^x \left( \frac{25x^2}{2EI} - \frac{5x^3}{3EI} \right) dx + \theta_{i_1} x + dy_{i_1} = \frac{25x^3}{6EI} - \frac{5x^4}{12EI} + \theta_{i_1} x + dy_{i_1}$$

$$v_1(x) = 7,884 \cdot 10^{-5} x^3 - 7,884 \cdot 10^{-6} x^4 + \theta_{i_1} x + dy_{i_1}$$

$$\text{para } x = 5 \quad \Rightarrow \quad v_1(5) = dy_{j_1} \quad \Rightarrow \quad dy_{j_1} = 4,9275 \cdot 10^{-3} + 5\theta_{i_1} + dy_{i_1} \quad (2)$$



giros:  $v'_1(x) = \theta_1(x) = \int_0^x \frac{M_1(x)}{EI} dx + \theta_{i_1}$

$$v'_1(x) = \theta_1(x) = \int_0^x \frac{25x - 5x^2}{EI} dx + \theta_{i_1} = \frac{25 \frac{x^2}{2} - 5 \frac{x^3}{3}}{EI} + \theta_{i_1}$$

$$v'_1(x) = \theta_1(x) = 2,365 \cdot 10^{-4} x^2 - 3,153 \cdot 10^{-5} x^3 + \theta_{i_1}$$

para  $x = 5 \Rightarrow v'_1(5) = \theta_{j_1} \Rightarrow \theta_{j_1} = 1,97125 \cdot 10^{-3} + \theta_{i_1}$  (3)

## BARRA 2

*Función de desplazamientos del axil:*

$$u_2(x) = \int_0^x \frac{N_2}{EA} dx + dx_{i_2}$$

$$u_2(x) = \int_0^x \frac{-25}{EA} dx + dx_{i_2} = \frac{-25x}{EA} + dx_{i_2} \Rightarrow u_2(x) = -7,9844 \cdot 10^{-6} x + dx_{i_2}$$

para  $x = 3 \Rightarrow u_2(3) = dx_{j_2} \Rightarrow dx_{j_2} = -2,3953 \cdot 10^{-5} + dx_{i_2}$  (4)

*Función de desplazamientos y giros del flector:*

flechas:  $v_2(x) = \int_0^x \int \frac{M_2(x)}{EI} dx + \theta_{i_2} x + dy_{i_2} \Rightarrow v_2(x) = \theta_{i_2} x + dy_{i_2}$

para  $x = 3 \Rightarrow v_2(3) = dy_{j_2} \Rightarrow dy_{j_2} = 3\theta_{i_2} + dy_{i_2}$  (5)

giros:  $v'_2(x) = \theta_2(x) = \int_0^x \frac{M_2(x)}{EI} dx + \theta_{i_2} \Rightarrow v'_2(x) = \theta_2(x) = \theta_{i_2}$

para  $x = 3 \Rightarrow v'_2(3) = \theta_{j_2} \Rightarrow \theta_{j_2} = \theta_{i_2}$  (6)

## 4.4 Transformación de ejes de los movimientos de extremo de barra

Para poder aplicar las condiciones de compatibilidad es necesario tener los movimientos de los extremos de barra en ejes globales, por lo que se realizará la transformación de ejes locales a ejes globales.

BARRA 1:  $d'x_{i1} = dx_{i1} \quad d'x_{j1} = dx_{j1} \quad (\text{coinciden ambos ejes})$   
 $d'x_{i1} = dx_{i1} \quad d'y_{j1} = dy_{j1}$   
 $\theta'_{i1} = \theta_{i1} \quad \theta'_{j1} = \theta_{j1}$

BARRA 2:  $d'x_{i2} = -dy_{i2} \quad d'x_{j2} = -dy_{j2} \quad (\alpha = 90^\circ)$   
 $d'y_{i2} = dx_{i2} \quad d'y_{j2} = dx_{j2}$   
 $\theta'_{i2} = \theta_{i2} \quad \theta'_{j2} = \theta_{j2}$



## 4.5 Planteamiento de las condiciones de compatibilidad

Si la estructura es isostática, el número de condiciones de compatibilidad efectivas es 3 por el número de barras de la estructura, es decir 6.

Condiciones de compatibilidad efectivas:

$$\begin{aligned} \text{INTERNAS:} \quad d'x_{i1} &= d'x_{j2} = dx_A & (a) \\ d'y_{i1} &= d'y_{j2} = dy_A & (b) \\ \theta'_{i1} &= \theta'_{j2} = \theta_A & (c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EXTERNAS:} \quad d'y_{j1} &= dy_B = 0 & (d) \\ d'y_{i2} &= dy_C = 0 & (e) \\ d'x_{i2} &= dx_C = 0 & (f) \end{aligned}$$

Condiciones de compatibilidad no efectivas:

$$\begin{aligned} \text{EXTERNAS:} \quad d'x_{j1} &= dx_B & (g) \\ \theta'_{j1} &= \theta_B & (h) \\ \theta'_{i2} &= \theta_C & (i) \end{aligned}$$

## 4.6 Obtención de los movimientos y de las funciones de desplazamiento

En las ecuaciones numeradas de 1 a 6 que expresan los movimientos en los extremos  $j$  en función de los movimientos en los extremos  $i$ , se sustituyen los movimientos en locales por los correspondientes en globales y se aplican las condiciones de compatibilidad. Quedará un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los 6 grados de libertad o movimientos independientes de los nudos.

$$(1) \quad dx_{j_1} = dx_{i_1} \quad \Leftrightarrow \quad d'x_{j_1} = d'x_{i_1} \quad \Leftrightarrow \quad dx_B = dx_A$$

$$(2) \quad dy_{j_1} = 4,9275 \cdot 10^{-3} + 5\theta_{i_1} + dy_{i_1}$$

$$d'y_{j_1} = 4,9275 \cdot 10^{-3} + 5\theta'_{i_1} + d'y_{i_1} \quad \Leftrightarrow \quad dy_B = 4,9275 \cdot 10^{-3} + 5\theta_A + dy_A$$

$$dy_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4,9275 \cdot 10^{-3} + 5\theta_A + dy_A = 0$$

$$(3) \quad \theta_{j_1} = 1,97125 \cdot 10^{-3} + \theta_{i_1} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_B = 1,97125 \cdot 10^{-3} + \theta_A$$

$$(4) \quad dx_{j_2} = -2,3953 \cdot 10^{-5} + dx_{i_2}$$

$$d'x_{j_2} = -2,3953 \cdot 10^{-5} + d'x_{i_2} \quad \Leftrightarrow \quad dy_A = -2,3953 \cdot 10^{-5} + dy_C$$

$$dy_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dy_A = -2,3953 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$(5) \quad dy_{j_2} = 30\theta_{i_2} + dy_{i_2}$$

$$-d'x_{j_2} = 30\theta'_{i_2} - d'x_{i_2} \quad \Leftrightarrow \quad -dx_A = 30\theta_C - dx_C$$

$$dx_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dx_A = -30\theta_C$$

$$(6) \quad \theta_{j_2} = \theta_{i_2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_A = \theta_C$$



Resolución del sistema de ecuaciones:

Sustituimos  $dy_A$  en la ecuación (2) y obtenemos  $\theta_A$ :

$$(2) \quad 4,9275 \cdot 10^{-3} + 5\theta_A - 2,3953 \cdot 10^{-5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_A = -9,807 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Sustituimos  $\theta_A$  en las ecuaciones (3) y (6) y obtenemos  $\theta_B$  y  $\theta_C$ :

$$(3) \quad \theta_B = 1,97125 \cdot 10^{-3} - 9,807 \cdot 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_B = 9,9055 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$(6) \quad \theta_A = \theta_C \quad \Leftrightarrow \quad \theta_C = -9,807 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Por último obtenemos  $dx_A$  de la ecuación (5) y  $dx_B$  de la (1)

$$(5) \quad dx_A = -3(-9,807 \cdot 10^{-4}) \quad \Leftrightarrow \quad dx_A = 2,942 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$(1) \quad dx_B = dx_A \quad \Leftrightarrow \quad dx_B = 2,942 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Funciones de desplazamiento

Aplicando de nuevo las condiciones de compatibilidad tenemos los movimientos de extremo de barra en globales y mediante la transformación de ejes, los movimientos de extremo de barra en locales. Con los movimientos de extremo de barra en locales se obtienen las funciones de desplazamiento.

$$dx_A = 2,942 \cdot 10^{-3} \text{ m} = d'x_{i1} = d'x_{j2} = dx_{i1} = -dy_{j2}$$

$$dy_A = -2,3953 \cdot 10^{-5} \text{ m} = d'y_{i1} = d'y_{j2} = dy_{i1} = dx_{j2}$$

$$\theta_A = -9,807 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \theta_{i1} = \theta_{j2}$$

$$dx_B = 2,942 \cdot 10^{-3} \text{ m} = d'x_{j1} = dx_{j1}$$

$$\theta_B = 9,9055 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \theta_{j1}$$

$$\theta_C = -9,807 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \theta_{i2}$$

BARRA 1:

$$u_1(x) = 2,942 \cdot 10^{-3}$$

$$v_1(x) = 7,884 \cdot 10^{-5} x^3 - 7,884 \cdot 10^{-6} x^4 - 9,807 \cdot 10^{-4} x - 2,3953 \cdot 10^{-5}$$

$$v_1'(x) = \theta_1(x) = 2,365 \cdot 10^{-4} x^2 - 3,153 \cdot 10^{-5} x^3 - 9,807 \cdot 10^{-4}$$

BARRA 2:

$$u_2(x) = -7,9844 \cdot 10^{-6} x$$

$$v_2(x) = -9,807 \cdot 10^{-4} x$$

$$v_2'(x) = \theta_2(x) = -9,807 \cdot 10^{-4}$$

## 4.7 Dibujo de la configuración cinemática admisible

En la figura 3 se representa la configuración cinemática admisible, es decir, la deformada de la estructura. Se ha aumentado más la escala del movimiento  $dy_A$  que la de los movimientos  $dx_A$  y  $dx_B$  para que fuera apreciable)

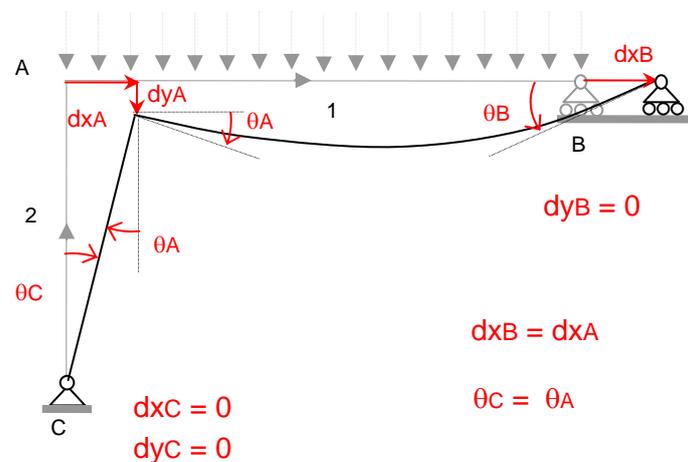


Figura 3. Configuración cinemática admisible

## 4.8 Comprobación de deformaciones

Siguiendo las indicaciones del Código Técnico, debe comprobarse que la barra 1 cumple a flecha y que no se supera la limitación de desplome horizontal

### a) Flecha barra 1

Según el apartado 4.3.3.1 del CTE DB SE:

“Cuando se considere la **integridad de los elementos constructivos**, se admite que la estructura horizontal de un piso o cubierta es suficientemente rígida si, para cualquiera de sus piezas, ante cualquier **combinación de acciones característica**, considerando sólo las deformaciones que se producen después de la puesta en obra del elemento, **la flecha relativa** es menor que:

a) 1/500 en pisos con tabiques frágiles (como los de gran formato, rasillones, o placas) o pavimentos rígidos sin juntas;

b) 1/400 en pisos con tabiques ordinarios o pavimentos rígidos con juntas;

c) 1/300 en el resto de los casos”.

El Código Técnico define la flecha relativa como el descenso máximo de vano respecto al extremo de la pieza que lo tenga menor, dividida por la luz del tramo. En el caso de voladizos se considerara como luz el doble del vuelo

Consideramos que la barra 1 es una viga de cubierta por lo que adoptaremos la limitación de 1/300

Debe cumplirse que:  $\frac{f}{L_1} < \frac{1}{300}$  o bien  $f < \frac{L_1}{300} = 1,66 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Siendo  $f = v_{\max} - \min(dy_{j1}, dy_{j2})$ , en este caso  $f = v_{\max}$ . (figura 4)



Obtenemos el valor de la flecha máxima ( $v_{max}$ ). Para ello primero determinamos su posición, anulando la derivada de la función o, lo que es lo mismo, anulando la función de giro. Conocido el valor de  $x_{max}$  obtenemos el valor de  $v_{max}$  al sustituir en la función de flechas  $v(x)$ .

$$v'_1(x) = \theta_1(x) = 2,365 \cdot 10^{-4} x^2 - 3,153 \cdot 10^{-5} x^3 - 9,807 \cdot 10^{-4} = 0 \quad x_{max} = 2,5 \text{ m}$$

$$v_1(2,5) = 7,884 \cdot 10^{-5} \cdot 2,5^3 - 7,884 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5^4 - 9,807 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 - 2,3953 \cdot 10^{-5} = -1,55 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Por tanto:  $f = 1,55 \cdot 10^{-3} < 1,66 \cdot 10^{-2}$

Se cumple la limitación de flecha

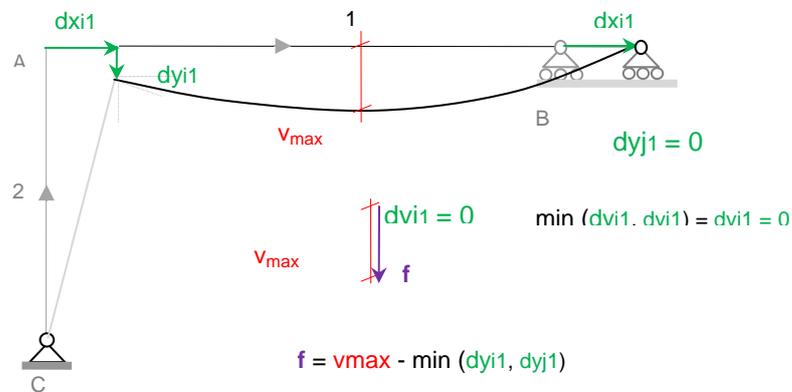


Figura 4. Determinación de la flecha máxima y la flecha relativa

b) Desplome horizontal (figura 5)

Según el apartado 4.3.3.2 del CTE DB SE:

“Cuando se considere la **integridad de los elementos constructivos**, se admite que la estructura global tiene suficiente rigidez lateral, si ante cualquier **combinación de acciones característica**, el desplome (véase figura 4.1) es menor de:

a) *desplome total*: 1/500 de la altura total del edificio;

b) *desplome local*: 1/250 de la altura de la planta, en cualquiera de ellas”

Por tanto debe cumplirse: condición de desplome total  $dx_{i1} < h/500 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

condición de desplome local  $dx_{i1} < h/250 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$$dx_{i1} = dx_A = 2,942 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Se cumple la limitación de desplazamiento

horizontal

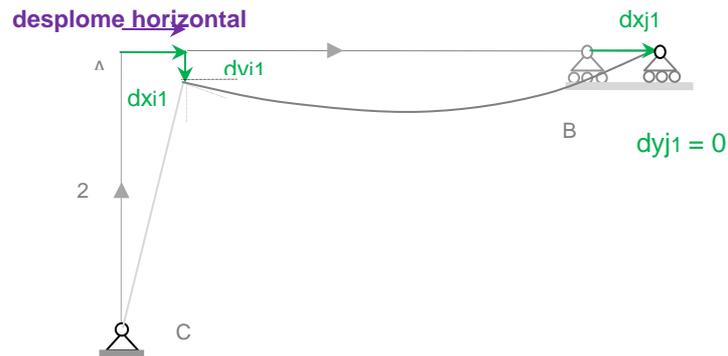


Figura 5. Desplome horizontal

## 5 Cierre

A lo largo de este tema se han obtenido los movimientos de los nudos y las funciones de desplazamiento de una estructura isostática formada por dos barras. Se ha dibujado la deformada y se han realizado las comprobaciones de deformación que indica el Código Técnico. Este esquema de cálculo es aplicable a cualquier estructura isostática independientemente del número de barras así como de sus condiciones de vínculo y enlace.

Como ejercicio de aplicación se propone calcular el valor del desplazamiento  $dy_A$ . Datos: AB: IPE 330, BC: 1 $\phi$ 20. E: 210000 N/mm<sup>2</sup>. (Resultado:  $-7.1 \cdot 10^{-3}$  m)

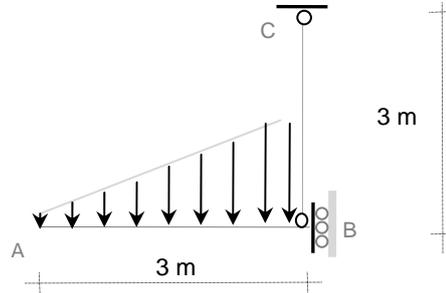


Figura 6. Ejercicio propuesto

## 6 Bibliografía

### 6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

### 6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset)

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Esquema del equilibrio en las barras.

Figura 3. Configuración cinemática admisible.

Figura 4. Determinación de la flecha máxima y la flecha relativa.

Figura 5. Desplome horizontal.

Figura 6. Ejercicio propuesto.