



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

---

# Desarrollo de una metodología para la selección de lazos de control en sistemas multivariables mediante técnicas de optimización multiobjetivo

---

Tesis Doctoral

Autor: Víctor Manuel Huilcapi Subía

Directores: Dr. Francesc Xavier Blasco Ferragud  
Dr. Juan Manuel Herrero Durá

Valencia, Enero 2021



# Agradecimientos

Quisiera empezar primero agradeciendo a Dios porque me ha acompañado y guiado a lo largo de todo el camino, y ha permitido la culminación exitosa de este trabajo. A mis directores Xavier Blasco y Juan Manuel Herrero, gracias a sus enseñanzas y dirección la tesis ha ido por buen camino. Muchas gracias Xavi y JuanMa por sus consejos, la motivación y las múltiples horas dedicadas a este trabajo. Quisiera agradecer también a Gilberto Reynoso por su apoyo a este trabajo. Siento que encontré una familia en la UPV, la familia CPOH, recuerdo con alegría el café que tomamos en donde se disfruta una charla muy amena que me permitía desconectarme un poco de la presión de la rutina. Como no agradecer a Javi, Santi, Sergio, Raúl, y a todo el equipo CPOH por su acogida y enseñanzas. Muchas gracias también a todos mis compañeros de la sala: Alberto, Julio, Yadira, Alejandro, Vanessa, Gloria, Frank, Henry, Eslam, Manuel, Ruben, Temo, por su acogimiento y los gratos momentos compartidos. Quiero también dar un agradecimiento especial a mi esposa Elizabeth y a mis hijos Doménica, Sofía, y Gabriel por su paciencia, cariño y apoyo a lo largo de toda esta travesía. Finalmente pero no menos importante agradezco a mis padres y hermanos, por su amor y apoyo incondicional, somos una familia unida y hemos salido adelante con éxito. Agradezco también a la UPS y los directivos por el apoyo para poder realizar este estudio doctoral.

Este trabajo ha sido subvencionado por la Universidad Politécnica Salesiana (UPS) a través del convenio CB-755-2015.



# Resumen

El control descentralizado de sistemas multivariables es una tarea compleja y su eficiencia depende principalmente de la selección adecuada de sus lazos de control. Por lo general, para seleccionar estos lazos de control se calculan medidas de interacción entre sus variables. Las metodologías clásicas que se han desarrollado para este propósito pueden dar resultados divergentes (en cuanto a los lazos de control a establecer). Esto es debido, entre otras cosas, a que miden las interacciones entre las variables del sistema de diferentes maneras. Además, normalmente no incorporan en el proceso de selección de lazos de control la sintonización de sus controladores. En esta tesis se ha desarrollado una metodología para seleccionar lazos de control óptimos en sistemas multivariables usando un enfoque de optimización multiobjetivo. La metodología analiza el problema de selección óptima de lazos de control y sintonización óptima de las estructuras de control en un marco de trabajo unificado. La metodología permite analizar las características de cada combinación de lazos de control de manera detallada comparando sus desempeños de forma global, lo cual permite a un diseñador tener información relevante para tomar decisiones adecuadas para controlar eficientemente un proceso multivariable. En la metodología propuesta se muestra como las preferencias del diseñador juegan un papel muy importante en la selección de los lazos de control en un sistema multivariable. En esta tesis se aplica la nueva metodología propuesta a varios problemas de ingeniería de control tanto lineales como no lineales. En estos ejemplos se compara la metodología propuesta con las metodologías clásicas de selección de lazos de control más usadas. Esto ha permitido revelar información valiosa sobre el control descentralizado de sistemas multivariables que no hubiese sido factible obtener con las metodologías tradicionales.



# Abstract

Decentralized control of multivariable systems is a complex problem and its efficiency depends mainly on the suitable selection of its control loops (input-output pairings). In general, to select these control loops, measures of interaction between their variables are calculated. The classical methodologies that have been developed for this purpose can give divergent results (in terms of the type of loop pairing to choose). This is because they generally analyze the loop pairing selection and controller tuning independently and optimize a single objective. In this thesis a methodology to select optimal input-output pairings in multivariable systems using a multiobjective optimization approach has been developed. The methodology analyzes the problem of optimal selection of control loops and optimal tuning of control structures in a unified framework. The methodology allows a detailed analysis of the characteristics of each control loop, globally comparing their performance, which allows a designer to have relevant information to make adequate decisions to efficiently control a multivariable process. The proposed methodology shows how the designer's preferences have a very important role in the selection of an input-output pairing in a multivariate system. In this thesis, the new proposed methodology is applied to various control engineering problems, both linear and non-linear. In these examples, the proposed methodology is compared with the classical methodologies of selection of input-output pairings most used for the control of multivariable systems. This has revealed valuable information on the decentralized control of multivariate systems that would not have been feasible to obtain with traditional methodologies.



# Resum

El control descentralitzat de sistemes multivariables és una tasca complexa i la seua eficiència depén principalment de la selecció adequada dels seus llaços de control. En general per a seleccionar aquests llaços de control es calculen mesures d'interacció entre les seues variables. Les metodologies clàssiques que s'han desenvolupat per a aquest propòsit poden donar resultats divergents (quant als llaços de control a establir). Això és degut, entre altres coses, al fet que mesuren les interaccions entre les variables del sistema de diferents maneres. A més normalment no incorporen en el procés de selecció de llaços de control la sintonització dels seus controladors. En aquesta tesi s'ha desenvolupat una metodologia per a seleccionar llaços de control òptims en sistemes multivariables usant un enfocament d'optimització multi-objectiu. La metodologia analitza el problema de selecció òptima de llaços de control i sintonització òptima de les estructures de control en un marc de treball unificat. La metodologia permet analitzar les característiques de cada combinació de llaços de control de manera detallada comparant els seus acompliments de manera global, la qual cosa permet a un dissenyador tindre informació rellevant per a prendre decisions adequades per a controlar eficientment un procés multivariable. En la metodologia proposada es mostra com les preferències del dissenyador tenen un rol molt important en la selecció dels llaços de control en un sistema multivariable. En aquesta tesi s'aplica la nova metodologia proposada a diversos problemes d'enginyeria de control tant lineals com no lineals. En aquests exemples es compara la metodologia proposada amb les metodologies clàssiques de selecció de llaços de control més usades. Això ha permés revelar informació valuosa sobre el control descentralitzat de sistemes multivariables que no haguera sigut factible obtindre amb les metodologies tradicionals.



# Índice general

Resumen	III
1 Motivación y objetivo de la tesis	1
1.1 Introducción	3
1.2 Motivación	3
1.3 Objetivos	9
1.4 Estructura de la tesis	10
2 Antecedentes	13
2.1 Introducción	15
2.2 Diseño mediante optimización multiobjetivo (MOOD)	15
2.3 Definición de un MOP	17
2.4 Proceso de optimización multiobjetivo	20
2.4.1 Fundamentos de los MOEAs	21
2.4.2 Algoritmo ev-MOGA	28
2.5 Etapa de decisión multicriterio	30
2.5.1 Herramientas de visualización de frentes de Pareto	32
2.5.2 Visualización de frentes con level diagrams (LD)	33

2.6	Metodologías de selección de lazos de control en sistemas multivariables . . . . .	39
2.6.1	La matriz de ganancias relativas (RGA) . . . . .	40
2.6.2	La matriz de ganancias relativas dinámica (DRGA) . . . . .	42
2.6.3	La matriz de ganancias relativas normalizada (RNGA) . . . . .	45
2.6.4	Otros enfoques o técnicas de selección de lazos de control. . . . .	48
3	Propuesta metodológica para la selección de lazos de control en sistemas multivariables . . . . .	53
3.1	Introducción . . . . .	55
3.2	Enfoque multiobjetivo para la selección de lazos de control en sistemas multivariables . . . . .	56
3.3	Análisis del coste computacional de la metodología propuesta . . . . .	61
3.4	Conclusiones . . . . .	63
4	Aplicación de la metodología de selección de lazos de control en procesos multivariables . . . . .	65
4.1	Introducción . . . . .	67
4.2	Aplicación a sistemas lineales . . . . .	70
4.2.1	Ejemplo 1: sistema $2 \times 2$ . . . . .	70
4.2.2	Ejemplo 2: sistema $3 \times 3$ . . . . .	98
4.3	Aplicación a sistemas no lineales. . . . .	106
4.3.1	Ejemplo 1: sistema de dos tanques acoplados $2 \times 2$ . . . . .	106
4.3.2	Ejemplo 2: sistema de cuatro tanques acoplados $2 \times 2$ . . . . .	123
4.3.3	Ejemplo 3: sistema de cuatro tanques acoplados $4 \times 4$ . . . . .	131
4.3.4	Ejemplo 4: unidad caldera-turbina $3 \times 3$ . . . . .	138
4.4	Discusión de resultados . . . . .	154
4.5	Conclusiones . . . . .	157
5	Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	159
5.1	Conclusiones . . . . .	161
5.2	Trabajos futuros . . . . .	163

A	Herramientas de optimización multiobjetivo aplicadas en la tesis	165
A.1	Introducción	167
A.2	Modelado de una celda termoeléctrica Peltier	168
A.2.1	Detalles de la identificación multiobjetivo del modelo	172
A.2.2	Conclusiones	175
A.3	Modelado y control de un péndulo invertido rotatorio	180
A.3.1	Detalles de la identificación multiobjetivo del modelo	184
A.3.2	Detalles del proceso de optimización multiobjetivo en el ajuste de controladores	190
A.3.3	Conclusiones	196
	Bibliografía	199



## Capítulo 1

# Motivación y objetivo de la tesis



## 1.1 Introducción

En este capítulo se presentan las ideas que motivaron el desarrollo de esta tesis, así como los objetivos de la misma. En esta tesis se propone una contribución metodológica para realizar el control descentralizado de sistemas multivariables. Así también aquí se presenta la organización de la tesis, y se detalla brevemente cada uno de los capítulos que conforman su estructura.

## 1.2 Motivación

La complejidad de los sistemas multivariables se ha incrementado progresivamente con el transcurso de los años debido al avance de la ciencia y la tecnología. Estos sistemas demandan cada vez exigencias más altas para su control, lo cual ha motivado el desarrollo de diversas estrategias para afrontar eficientemente este reto [89], [145]. En el área de control multivariable se han desarrollado dos grandes enfoques para controlar este tipo de sistemas, uno de ellos es el control centralizado [25], y el otro el control descentralizado [10], ambos tienen ventajas y desventajas.

En un enfoque de control centralizado un único controlador, que tiene una visión global del sistema, calcula las acciones de control considerando todas las interacciones que ocurren entre sus variables. Por el contrario, en un enfoque descentralizado se tienen varios controladores independientes, uno para cada lazo de control del sistema multivariable. Esto tiene una ventaja implícita ya que en caso de fallo o mantenimiento es posible abrir/cerrar lazos de control sin que toda la planta quede fuera de servicio. Otro aspecto relevante es que a medida que los sistemas multivariables incrementan su dimensión el coste computacional que implica controlarlos también aumenta [137], por lo cual la descomposición de los sistemas multivariables en subsistemas ayuda a manejar este aspecto de una forma más equilibrada.

En un enfoque de control descentralizado, por lo general se busca medir las interacciones que ocurren entre las variables del sistema y se priorizan las más fuertes para establecer los lazos de control respectivos. Un trabajo pionero para medir las interacciones de las variables de un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas se denomina *matriz de ganancias relativas (RGA)* y fue propuesta por *Bristol* en [23]. Posterior al trabajo de *Bristol* se presentaron otras metodologías para realizar el control descentralizado de sistemas multi-

variables [104], [27], [157], estas y otras más se describen con mayor detalle en los siguientes capítulos.

Un aspecto relevante a considerar de las metodologías tradicionales que existen para realizar un control descentralizado de sistemas multivariables, es que cada una de ellas pueden sugerir diferentes lazos de control para un mismo sistema, bajo las mismas condiciones de operación, es decir pueden existir divergencias entre sus resultados. Otro aspecto importante a manifestar de las metodologías clásicas de selección de lazos de control en sistemas multivariables es que, por lo general, abordan el tema de la selección de lazos de control de manera independiente a la sintonización de las estructuras de control. Los aspectos manifestados anteriormente indican que el problema de seleccionar adecuadamente lazos de control en sistemas multivariables es una tarea no trivial y compleja, que permanece como un problema abierto en el área de control descentralizado. Es por ello que existen posibilidades de proponer nuevos aportes metodológicos para la selección de lazos de control que permitan analizar con mayor detalle el comportamiento de los sistemas multivariables.

Para ilustrar lo comentado anteriormente se presenta el siguiente ejemplo de selección de lazos de control propuesto en [104] y [70]. Aquí se analiza un sistema con dos entradas y dos salidas cuyo modelo se describe en (1.1), (1.2)

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{5e^{-40s}}{100s+1} & \frac{1e^{-4s}}{10s+1} \\ \frac{-5e^{-4s}}{10s+1} & \frac{5e^{-40s}}{100s+1} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Donde  $y_1, y_2$  representan las salidas del sistema a controlar,  $u_1$  y  $u_2$  son las entradas (acciones de control) del sistema. Los retardos de tiempo están dados en segundos.

Si se aplica la técnica RGA [23], esta metodología sugiere realizar un lazo de control diagonal para controlar este sistema, es decir:  $y_1 - u_1; y_2 - u_2$ . Aunque si se aplica la técnica DRGA (RGA dinámico) [104], esta sugiere realizar un lazo de control off-diagonal para el sistema, es decir:  $y_1 - u_2; y_2 - u_1$ . Debido a que ambas técnicas difieren en sus resultados (selección de lazos de control), es posible indagar un poco más de detalles, incorporando al proceso de selección de lazos la sintonización de sus controladores.

Por ejemplo si se eligen controladores PI de un grado de libertad para cada lazo de control, se tendría:

■ **Lazo de control diagonal**

$$u_1(s) = Kc_1 \left[ e_1(s) + \frac{1}{Ti_1} \frac{1}{s} e_1(s) \right] \quad (1.3)$$

$$u_2(s) = Kc_2 \left[ e_2(s) + \frac{1}{Ti_2} \frac{1}{s} e_2(s) \right] \quad (1.4)$$

■ **Lazo de control off-diagonal**

$$u_2(s) = Kc_1 \left[ e_1(s) + \frac{1}{Ti_1} \frac{1}{s} e_1(s) \right] \quad (1.5)$$

$$u_1(s) = Kc_2 \left[ e_2(s) + \frac{1}{Ti_2} \frac{1}{s} e_2(s) \right] \quad (1.6)$$

Donde  $Kc_1$  y  $Kc_2$  son las ganancias proporcionales en *unidad(u)/unidad(y)*,  $Ti_1$  y  $Ti_2$  son los tiempos integrales en *segundos*,  $e_1 = r_1 - y_1$  y  $e_2 = r_2 - y_2$  son los errores, siendo  $r_1$  y  $r_2$  las referencias (set-points) en las entradas.

Para la sintonización de los controladores propuestos se plantea un enfoque de ajuste óptimo minimizando un único objetivo. Este objetivo es equivalente al propuesto por DRGA, es decir, minimiza los errores  $e_1$  y  $e_2$  y las acciones de control  $u_1$  y  $u_2$  elevados al cuadrado ante cambios en las señales de referencia  $r_1$  y  $r_2$  (señales tipo escalón) para un  $t_f = 1000$  segundos como se muestra en (1.7).

$$J = \int_0^{t_f} (e_1^2 + e_2^2 + u_1^2 + u_2^2) \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} (e_1^2 + e_2^2 + u_1^2 + u_2^2) \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (1.7)$$

Los controladores que optimizan  $J$  se muestran en la tabla 1.1. En este caso el lazo de control off-diagonal sería preferible (ver objetivo  $J$  en negrita). Pero, ¿Qué ocurriría si en lugar de usar controladores PI de un grado de libertad usamos controladores PID de dos grados de libertad?

Para responder a esta pregunta se plantean los siguientes controladores para cada lazo de control:

	Lazo diagonal	Lazo off-diagonal
$Kc_1$	0.194	-0.363
$Ti_1$	123.57	7.857
$Kc_2$	0.49	0.641
$Ti_2$	174.37	628.43
$J$	224.76	<b>205.63</b>

**Tabla 1.1:** Controladores propuestos con el método DRGA, [104]. Sus desempeños se muestran en  $J$ .

▪ **Lazo de control diagonal**

$$u_1 = Kc_1 \left[ b_1 r_1 - y_1 + \frac{1}{Ti_1} \frac{1}{s} e_1 - \frac{Td_1 \cdot s}{\frac{Td_1}{N} s + 1} y_1 \right] \quad (1.8)$$

$$u_2 = Kc_2 \left[ b_2 r_2 - y_2 + \frac{1}{Ti_2} \frac{1}{s} e_2 - \frac{Td_2 \cdot s}{\frac{Td_2}{N} s + 1} y_2 \right] \quad (1.9)$$

▪ **Lazo de control off-diagonal**

$$u_2 = Kc_1 \left[ b_1 r_1 - y_1 + \frac{1}{Ti_1} \frac{1}{s} e_1 - \frac{Td_1 \cdot s}{\frac{Td_1}{N} s + 1} y_1 \right] \quad (1.10)$$

$$u_1 = Kc_2 \left[ b_2 r_2 - y_2 + \frac{1}{Ti_2} \frac{1}{s} e_2 - \frac{Td_2 \cdot s}{\frac{Td_2}{N} s + 1} y_2 \right] \quad (1.11)$$

Donde  $b_1$  y  $b_2$  son los parámetros de ponderación de las referencias (set-points) en la acción proporcional,  $Td_1$  y  $Td_2$  son los tiempos derivativos en segundos y  $N$  es el parámetro del filtro derivativo.

Minimizando el mismo objetivo propuesto en (1.7) se obtienen los resultados mostrados en la tabla 1.2 (para  $N = 10$ ). Como se puede observar ahora el lazo de control diagonal es mejor que el off-diagonal. Aunque por poco, esto es contrario al caso anterior cuando se usaban controladores PI de un grado de libertad.

Lo mostrado anteriormente es un hallazgo relevante que pone de manifiesto la importancia de tener en consideración en el proceso de selección de los lazos

	Lazo diagonal	Lazo off-diagonal
$Kc_1$	0.46	0.91
$Ti_1$	103.3	480.5
$Td_1$	3.1	3.22
$b_1$	0.43	0.88
$Kc_2$	0.71	-0.76
$Ti_2$	103.8	157.8
$Td_2$	2.85	0.5
$b_2$	0.86	0.78
$J$	<b>190.3</b>	200.8

**Tabla 1.2:** Controladores PID óptimos de dos grados de libertad para los lazos de control diagonal y off-diagonal. Sus desempeños se muestran en  $J$ .

de control el tipo de controlador a usar (ya que puede ser relevante para la selección de unos lazos u otros).

Ahora, ¿Qué ocurriría si eligiésemos un indicador diferente para evaluar la calidad del control?

Para responder a esta pregunta se propone usar un objetivo que minimiza los errores  $e_1$  y  $e_2$  y las variaciones de las acciones de control  $du_1/dt$  y  $du_2/dt$  en términos de sus valores absolutos ante cambios en las señales de referencia  $r_1$  y  $r_2$  (señales tipo escalón) como se muestra en (1.12).

$$\begin{aligned}
 J_{new} = & \int_0^{t_f} \left( |e_1| + |e_2| + \left| \frac{du_1}{dt} \right| + \left| \frac{du_2}{dt} \right| \right) \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt \\
 & + \int_0^{t_f} \left( |e_1| + |e_2| + \left| \frac{du_1}{dt} \right| + \left| \frac{du_2}{dt} \right| \right) \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Los controladores que optimizan el objetivo de diseño  $J_{new}$  se muestran en la tabla 1.3. En este caso nuevamente el lazo de control diagonal es mejor que el off-diagonal pero ahora de una forma más holgada. Por tanto, el objetivo elegido por el diseñador es también relevante en el proceso de selección de unos determinados lazos de control (lazos entrada-salida).

De acuerdo con estos hallazgos surge como motivación el proponer en esta tesis un nuevo enfoque metodológico para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables. El enfoque metodológico propuesto se fundamenta en un procedimiento de diseño basado en optimización multiobjetivo.

	Lazo diagonal	Lazo off-diagonal
$Kc_1$	0.26	1.2
$Ti_1$	105	565
$Td_1$	0.73	4.57
$b_1$	0.95	0.96
$Kc_2$	0.48	-0.73
$Ti_2$	124.2	7.58
$Td_2$	0.56	0.66
$b_2$	1	0.62
$J_{new}$	<b>210</b>	260

**Tabla 1.3:** Controladores PID óptimos de dos grados de libertad para los lazos de control diagonal y off-diagonal. Sus desempeños se muestran en  $J_{new}$ .

Se decidió aplicar un enfoque de optimización multiobjetivo para enfrentar el problema de seleccionar de manera óptima lazos de control en sistemas multivariados, ya que permite realizar un análisis multidimensional del problema, donde las preferencias del diseñador desempeñan un importante papel en el momento de seleccionar una combinación de lazos de control óptima para controlar este tipo de sistemas. Así también cuando entran en conflicto los lazos entrada-salida disponibles para el control de un sistema multivariable resulta interesante aplicar un enfoque multiobjetivo ya que permite analizar sus compensaciones (*trade-off*) de manera detallada (el nivel de detalle puede ser ajustado por el diseñador a través de los objetivos de diseño del problema multiobjetivo), y de esta forma, un diseñador pueda elegir con suficiente información el lazo de control adecuado para analizar el comportamiento de un sistema multivariable.

La metodología para la selección de lazos de control en sistemas multivariados propuesta en esta tesis, se puede resumir en tres etapas (en el capítulo 3 se detalla cada etapa).

- Etapa A: Se realiza el planteamiento del problema multiobjetivo para la selección óptima de los lazos de control (lazos entrada-salida).
- Etapa B: Se realiza el proceso de optimización multiobjetivo para obtener los frentes de Pareto (despeños de los lazos de control).
- Etapa C: Corresponde a la etapa de decisión en donde se evalúan las prestaciones de los frentes de Pareto para elegir los lazos y controladores óptimos de acuerdo con las preferencias del diseñador.

La metodología propuesta es aplicable tanto a sistemas lineales como a sistemas no lineales (no se requiere linealizar los sistemas) y es capaz de brindar información detallada sobre el comportamiento de los diferentes lazos de control. El coste computacional de la metodología propuesta es relativamente alto comparado con las metodologías tradicionales de selección de lazos de control. Esto se debe a que tiene embebido tanto la selección óptima de los lazos como el ajuste óptimo de las estructuras de control de los sistemas multivariables (esto por lo general lo analizan de manera independiente las metodologías clásicas).

La metodología de selección de lazos de control propuesta en esta tesis ha sido aplicada a varios sistemas multivariables (lineales y no lineales), donde ha sido posible:

- Comparar de manera global los desempeños de cada uno de los lazos de control de los sistemas multivariables bajo estudio, en contraste con las metodologías clásicas, que se basan en calcular medidas de interacción entre las variables del sistema.
- Mostrar que la aplicación de técnicas de selección de lazos de control para sistemas lineales puede ser imprecisa cuando estas se aplican sobre los sistemas multivariables linealizados en un punto de operación.
- Evidenciar que los objetivos de diseño del problema multiobjetivo y las preferencias del diseñador sobre estos, desempeñan un papel importante en la selección de los lazos de control y los controladores óptimos en un sistema multivariable.

### 1.3 Objetivos

Como se ha comentado anteriormente, las metodologías tradicionales para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables presentan divergencias en sus resultados y podrían ser imprecisas cuando son aplicadas sobre sistemas linealizados. El objetivo principal de esta tesis es:

- Desarrollar una metodología para seleccionar de manera óptima lazos entrada-salida para el control descentralizado de sistemas multivariables bajo un enfoque de optimización multiobjetivo.

Del objetivo principal de la tesis se formulan los siguientes objetivos parciales:

- Definir formalmente una *alternativa de control descentralizado (concepto de diseño)* a través del uso de una *matriz de selección de lazos de control* y un vector de controladores parametrizados.
- Formalizar el ajuste de las diferentes alternativas/conceptos de diseño como un problema de optimización multiobjetivo.
- Realizar un análisis del coste computacional de la metodología propuesta.
- Aplicar la metodología propuesta en sistemas multivariados lineales y no lineales y compararla con las metodologías tradicionales de selección de lazos de control más usadas.

La información que revela la metodología propuesta acerca de las prestaciones de los lazos de control en un sistema multivariable es de gran interés para la toma de decisiones de un diseñador, y no es factible su obtención con las metodologías clásicas de selección de lazos de control, ya que estas se fundamentan en cálculos de medidas de interacción entre las variables del sistema.

## 1.4 Estructura de la tesis

La tesis se ha organizado de la siguiente forma:

- **Capítulo 2. Antecedentes.** En este capítulo se exponen los fundamentos teóricos sobre optimización multiobjetivo. Se describe un procedimiento general de diseño mediante optimización multiobjetivo aplicado a sistemas de control, donde se analiza sus principales etapas: 1) la definición del problema multiobjetivo, 2) el proceso de optimización multiobjetivo, y 3) la etapa de decisión multicriterio. Posteriormente, se presentan los fundamentos teóricos acerca de algoritmos evolutivos multiobjetivos (MOEAs) y se analizan sus principales características. Se describe con mayor detalle el algoritmo ev-MOGA [69] ya que es usado en la etapa de optimización multiobjetivo de la metodología propuesta en esta tesis. Es importante hacer énfasis que la metodología es independiente del algoritmo de optimización usado. Se realiza también un análisis de las herramientas de visualización de frentes de Pareto y se hace una descripción detallada de la herramienta denominada *level diagrams* [19], [20] ya que se la usa para analizar los frentes de Pareto de todos los problemas multiobjetivos planteados en esta tesis. Finalmente se presentan las metodologías de selección de lazos entrada-salida más usadas en la literatura

de control multivariable descentralizado. Algunas de estas metodologías serán comparadas con la metodología propuesta en esta tesis.

- **Capítulo 3. Propuesta metodológica para la selección de lazos de control en sistemas multivariables.** En este capítulo se presenta el enfoque metodológico desarrollado para seleccionar de manera óptima lazos de control en sistemas multivariables. Es importante recalcar que la metodología puede ser aplicada tanto en sistemas lineales como en sistemas no lineales representados en cualquier forma factible de simular. En este capítulo también se analiza el coste computacional de la metodología propuesta, el cual depende principalmente de tres factores: 1) la cantidad de soluciones evaluadas en el proceso de optimización, 2) el coste asociado al cálculo de los objetivos de diseño, y 3) el coste del algoritmo de optimización multiobjetivo.
- **Capítulo 4. Aplicación de la metodología de selección de lazos de control en procesos multivariables.** En este capítulo se muestran varias aplicaciones de la metodología de selección de lazos de control propuesta en problemas de ingeniería de control. Inicialmente se realiza el control descentralizado de sistemas multivariables lineales y se comparan los resultados obtenidos con aquellos que brindan las técnicas clásicas de selección de lazos de control como: *la matriz de ganancias relativas (RGA)*, *la matriz de ganancias relativas dinámica (DRGA)* y *la matriz de ganancias relativas normalizada (RNGA)*. Posteriormente, se aplica la metodología propuesta a sistemas no lineales y de forma equivalente se comparan los resultados con la técnica denominada *matriz de ganancias relativas no lineal (NRGA)*. Para finalizar este capítulo se calcula a modo de ejemplo el coste computacional de la metodología cuando es aplicada a dos sistemas lineales, uno de ellos de orden  $2 \times 2$  y el otro de  $3 \times 3$ .
- **Capítulo 5. Conclusiones y trabajos futuros.** En este capítulo se describen las conclusiones más relevantes de la tesis, y se presentan algunas posibles líneas de trabajos futuros.
- **Apéndice A. Herramientas de optimización multiobjetivo aplicadas en la tesis.** En este capítulo se muestra a través de dos ejemplos didácticos y datos reales las potencialidades de las herramientas de optimización multiobjetivo usadas en esta tesis. En el primer ejemplo se identifica un modelo en primeros principios de una celda termoeléctrica Peltier [75] y en el segundo ejemplo se realiza el modelado y control de un péndulo invertido rotatorio [76]. En ambos ejemplos se usan datos experimentales y se muestran las fortalezas tanto del algoritmo multiob-

jetivo ev-MOGA [69] como también de la herramienta de visualización de frentes de Pareto multidimensionales *level diagrams* [19], [20].

## Capítulo 2

# Antecedentes



## 2.1 Introducción

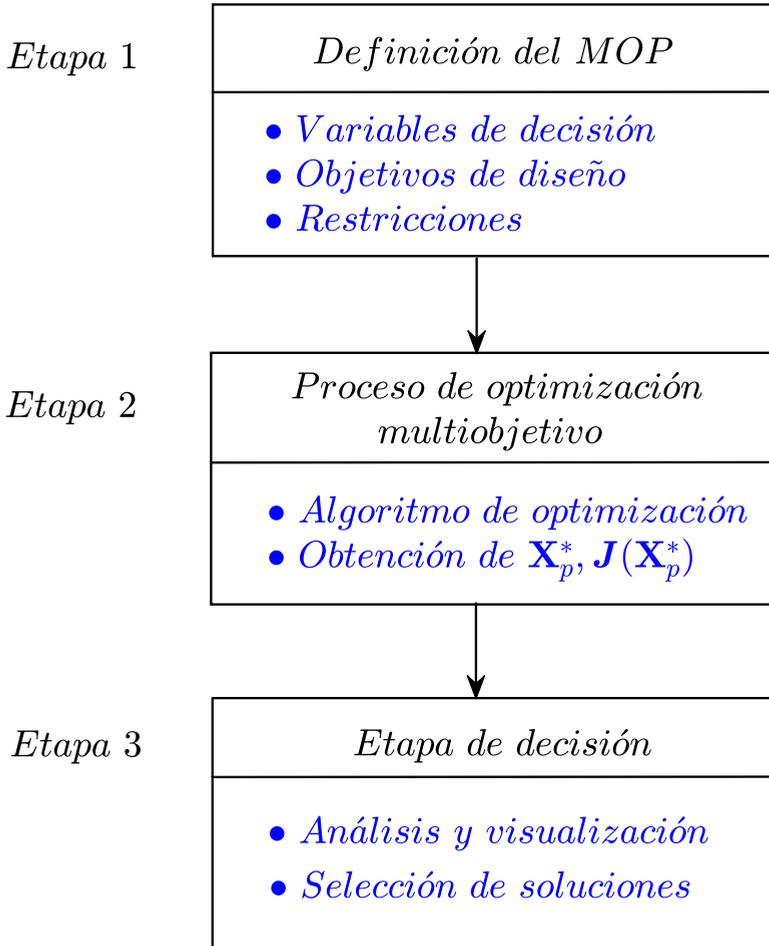
En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos sobre un procedimiento general de diseño basado en optimización multiobjetivo y su aplicación en sistemas de control. En esta sección se explica cada etapa de este procedimiento de diseño. Se analiza cómo definir un problema de optimización multiobjetivo (MOP), el proceso de optimización para obtener las respectivas aproximaciones de los frentes de Pareto, y la etapa de decisión multicriterio para la toma de decisiones. Así también se explica los fundamentos básicos de los algoritmos de optimización multiobjetivo más usados desde un contexto general, y se estudia en detalle el algoritmo ev-MOGA [69] que se aplica en esta tesis. En la etapa de decisión multicriterio se analizan las principales herramientas de visualización de frentes de Pareto multidimensionales y se hace énfasis en la herramienta *level diagrams* [19], [20] que se aplica en cada MOP propuesto en esta tesis. Finalmente se hace un análisis en detalle de las metodologías existentes para la selección de lazos entrada-salida en sistemas multivariables. Este aspecto permitirá comprender la importancia y complejidad que tiene la selección adecuada de lazos de control en sistemas con múltiples entradas y salidas.

## 2.2 Diseño mediante optimización multiobjetivo (MOOD)

Un procedimiento de diseño basado en optimización multiobjetivo (MOOD) está generalmente formado por al menos tres etapas: 1) la definición del problema multiobjetivo (MOP); 2) el proceso de optimización multiobjetivo; y 3) la etapa de decisión [35], [131] como se muestra en la figura 2.1.

En la primera etapa se define el problema de optimización multiobjetivo, aquí se pone de manifiesto la forma de abordar el MOP para lo cual es necesario establecer las variables de decisión y su espacio de búsqueda, el cual por lo general es multidimensional así como las funciones objetivo (espacio de objetivos) con sus respectivos indicadores o medidas de desempeño. Es importante establecer qué tipo de soluciones no son prácticas para el MOP o no son permitidas, para lo cual es posible definir un conjunto de restricciones con el objetivo de encontrar soluciones pertinentes para el MOP.

La segunda etapa corresponde al proceso de optimización multiobjetivo, aquí se debe seleccionar un algoritmo de optimización multiobjetivo para caracte-



**Figura 2.1:** Un procedimiento de diseño mediante optimización multiobjetivo (MOOD) para sistemas de control.

rizar los frentes de Pareto de cada MOP así como los respectivos conjuntos de soluciones de Pareto. En este contexto los algoritmos genéticos (GA) y los algoritmos de optimización multiobjetivo evolutivos (MOEA) brindan resultados satisfactorios y son de amplio uso [154], [119]. Así también los algoritmos que usan inteligencia de enjambre (algoritmos de optimización de enjambre de partícula-PSO) [3], [86].

Por último, en la tercera etapa se realiza el análisis del frente de Pareto obtenido por el algoritmo de optimización (usado en la segunda etapa) con el objetivo de seleccionar una solución final para el MOP. La elección de una solución para el MOP dependerá en cierta medida de las preferencias del diseñador sobre los objetivos de diseño del MOP. Por ejemplo, un diseñador tal vez prefiera seleccionar soluciones que prioricen minimizar uno de los objetivos del MOP o una solución en alguna zona específica de interés del frente.

En las siguientes secciones se analiza con detalle cada una de las etapas del proceso de optimización multiobjetivo mostrado en la figura 2.1.

## 2.3 Definición de un MOP

Un problema de optimización multiobjetivo (MOP) puede definirse como en (2.1)-(2.5).

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x}), \dots, J_s(\mathbf{x})] \quad (2.2)$$

sujeto a:

$$g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.3)$$

$$h(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\underline{\mathbf{x}}_i \leq \mathbf{x}_i \leq \overline{\mathbf{x}}_i, \quad i = [1, \dots, n] \quad (2.5)$$

Donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  es el vector de decisión;  $D$  es el espacio de decisión;  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^s$  es el vector de objetivos;  $g(\mathbf{x})$ ,  $h(\mathbf{x})$  son las restricciones;  $\underline{\mathbf{x}}_i$ , y  $\overline{\mathbf{x}}_i$  son los límites superiores e inferiores del espacio de decisión.

En general un MOP no tiene una única solución, sino un conjunto de soluciones óptimas con diferentes niveles de compensaciones entre sus objetivos de diseño,

donde ninguna solución es mejor que otra. Este conjunto de soluciones óptimas se conoce como frente de Pareto [100]. Las compensaciones o el intercambio de prestaciones que ocurren entre los objetivos de diseño de un MOP se deben a que generalmente están en conflicto, por ejemplo mejorar (minimizar) uno de ellos tiene como consecuencia empeorar otro (maximizar) y viceversa.

El conjunto óptimo de Pareto  $\mathbf{X}_p$  se basa en la definición de dominancia de Pareto propuesta en [123], [110]. Las definiciones de *dominancia*, *conjunto de Pareto*, y *frente de Pareto* se esquematizan en la figura 2.2.

**Definición 2.1** (*Dominancia [123],[110]*): Un vector  $\mathbf{x}^1$  domina a otro vector  $\mathbf{x}^2$ , (denotado por  $\mathbf{x}^1 \preceq \mathbf{x}^2$ ), si  $J(\mathbf{x}^1)$  no es peor que  $J(\mathbf{x}^2)$  en todos los objetivos de diseño, y es mejor en al menos un objetivo.

$$\forall i \in A := [1, \dots, s], J_i(\mathbf{x}^1) \leq J_i(\mathbf{x}^2) \wedge \exists i \in A : J_i(\mathbf{x}^1) < J_i(\mathbf{x}^2) \quad (2.6)$$

**Definición 2.2** (*Conjunto de Pareto [110]*): El conjunto de Pareto (denotado por  $\mathbf{X}_p$ ) es el conjunto de soluciones en  $D$  no dominadas por otras soluciones en  $D$  y definido por:

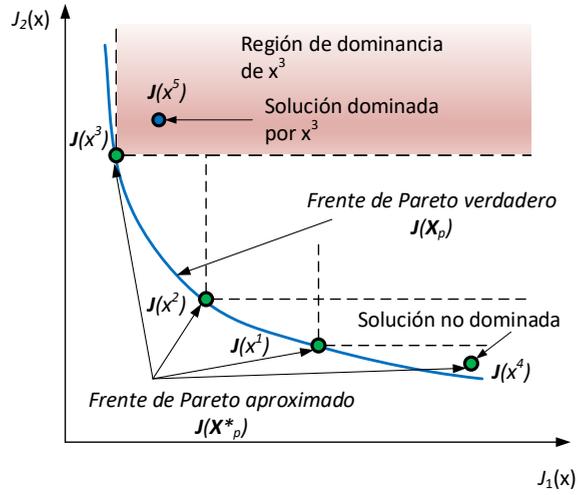
$$\mathbf{X}_p := \{\mathbf{x} \in D \mid \nexists \mathbf{x}' \in D : \mathbf{x}' \preceq \mathbf{x}\} \quad (2.7)$$

**Definición 2.3** (*Frente de Pareto [110]*): Dado el conjunto de Pareto  $\mathbf{X}_p$ , el frente de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p)$  está definido por:

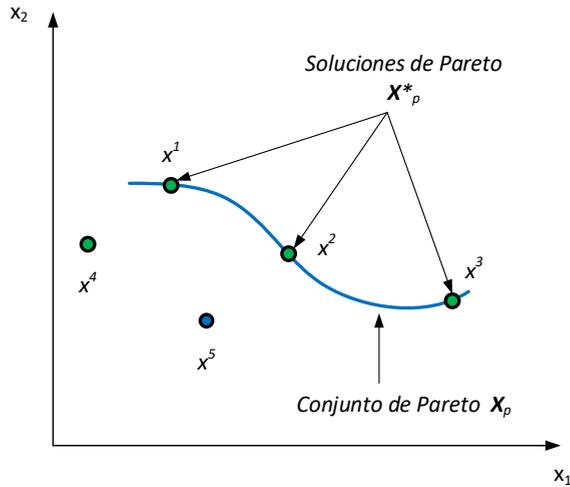
$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_p) := \{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}_p\} \quad (2.8)$$

En la práctica, los algoritmos de optimización tratan de encontrar un conjunto de soluciones  $\mathbf{X}_p^* \subset \mathbf{X}_p$ , y que  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p^*)$  caracterice satisfactoriamente a  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p)$ , esto es debido a que  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p)$  puede ser no factible de obtener si tiene infinitas soluciones, es importante mencionar que  $\mathbf{X}_p^*$  es un conjunto no único. Considerando un conjunto  $\mathbf{X}_p^*$  un diseñador puede seleccionar una solución de acuerdo con sus preferencias. Por ejemplo seleccionado la solución que está más cerca (medida por alguna norma  $\|\cdot\|_n$ ) al punto ideal (solución utópica  $\mathbf{J}^{ideal}$ ), que minimiza cada objetivo de diseño de un MOP.

En la figura 2.2 (a) se observa en color azul el frente de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p)$  de un MOP con dos objetivos de diseño  $J_1(\mathbf{x})$  y  $J_2(\mathbf{x})$  y en la figura 2.2 (b) se muestra el espacio de decisión con sus variables de decisión  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ . Se calcularon cinco soluciones  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^5$  con sus correspondientes vectores de



(a) Dominancia de Pareto y frente de Pareto de un MOP bidimensional



(b) Conjunto de Pareto de un MOP bidimensional

**Figura 2.2:** Esquematación de dominancia de Pareto, frente de Pareto, y conjunto de Pareto en un MOP con dos objetivos de diseño.

objetivos  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^1), \dots, \mathbf{J}(\mathbf{x}^5)$  para obtener el conjunto de Pareto  $\mathbf{X}_p^*$  y el frente de Pareto aproximado  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p^*)$ .

Las soluciones  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^4$ , son soluciones no dominadas, ya que no existen otras soluciones dentro del conjunto calculado que sean mejores en todos los objetivos de diseño. La solución  $\mathbf{x}^5$  se encuentra dominada por la solución  $\mathbf{x}^3$ , por tanto esta solución dominada no forma parte del frente  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p^*)$ . Las soluciones  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^3$  son Pareto óptimas, ya que sus correspondientes objetivos de diseño  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^1), \dots, \mathbf{J}(\mathbf{x}^3)$  se encuentran sobre el frente de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p)$ , mientras que la solución  $\mathbf{x}^4$  no lo es.

## 2.4 Proceso de optimización multiobjetivo

En la etapa de optimización multiobjetivo se debe elegir un algoritmo de optimización que obtenga las aproximaciones de los frentes de Pareto de cada MOP de manera satisfactoria. Existen diversas metodologías clásicas usadas por los algoritmos de optimización para aproximar el frente de Pareto como por ejemplo, *Normal constraint method* [106], [134], *Normal boundary intersection method* (NBI) [39], *Epsilon constraint techniques* [110], [83], *Physical programming* [107], entre otros métodos [100], [66]. Así también existen diversos algoritmos de optimización que utilizan metaheurísticas [43], [118]. Las metaheurísticas son técnicas no deterministas que simulan el comportamiento de algún tipo de fenómeno o sistema natural para resolver problemas de optimización [140]. Estas han demostrado un desempeño satisfactorio en la resolución de problemas complejos (difíciles de abordar por métodos matemáticos clásicos), tanto en problemas tipo *benchmark* como en problemas de la vida real [103], [46].

Existen dos grandes grupos de metaheurísticas: aquellas que están inspiradas en la naturaleza y los que no lo están. Ejemplos importantes de metaheurísticas inspiradas en la naturaleza son los algoritmos evolutivos (EA) y los algoritmos que utilizan inteligencia de enjambre. Dentro de los EAs los algoritmos genéticos (GA) se consideran los representantes más prominentes [154], [140].

Los algoritmos de optimización de enjambre de partículas (PSO) se basan en el comportamiento inteligente que tienen algunas colonias de insectos sociales (abejas, hormigas, luciérnagas, mariposas, entre otros) [141], [132], [122], [85]. Los EAs han sido hibridados con éxito con el enfoque de inteligencia de enjambre [82], [59].

Gradualmente, las técnicas evolutivas se han seguido desarrollando para resolver problemas de optimización multiobjetivo cada vez más complejos. Un ejemplo significativo de estas técnicas son los algoritmos evolutivos multiobjetivos (MOEAs), que se han aplicado con éxito a muchos problemas reales de ingeniería [22], [76], [148]. En la siguiente sección se explica en detalle los fundamentos de los MOEAs.

### 2.4.1 Fundamentos de los MOEAs

Los MOEAs son algoritmos iterativos donde una población inicial de individuos evoluciona buscando cada vez mejores individuos (soluciones), para lo cual utiliza técnicas evolutivas como:

1. Operadores de selección basados en la definición de dominancia de Pareto.
2. Operadores de reproducción (por ejemplo operadores de cruce, mutación)
3. Un proceso de actualización de soluciones de acuerdo al criterio de dominancia de Pareto y la densidad de las mismas.

Los MOEAs son lo suficientemente flexibles para manejar funciones multi-dimensionales no convexas con restricciones estrictas y altas no linealidades [108]. A pesar de la flexibilidad y robustez que tienen los MOEAs no siempre garantizan encontrar el frente de Pareto, sin embargo es posible encontrar una aproximación satisfactoria de dicho frente en un tiempo razonablemente adecuado comparado con otros algoritmos [33].

Un ejemplo de una estructura general de un MOEA básico se muestra en el algoritmo 1. Esta estructura básica es muy similar a otras técnicas evolutivas [126], [51]. En las líneas 1 y 2 se genera y evalúa una población inicial  $P|_0$ , en la línea 3 se construye una aproximación inicial del conjunto de Pareto  $\mathbf{X}_p^*|_0$ , posteriormente en las líneas 5-10 se realiza el proceso de optimización evolutiva. En el proceso de optimización se usan operadores genéticos de cruce y mutación entre individuos (soluciones) para generar nuevas poblaciones (específicamente en líneas 7 y 8) donde las soluciones que obtienen mejores desempeños al ser evaluadas en una determinada función de coste se seleccionan para construir la siguiente generación de individuos (específicamente línea 10).

En la operación de cruce se mezclan los cromosomas de los individuos ya existentes (padres), de tal forma que los nuevos individuos (hijos) tengan cromosomas de ambos. La operación de cruce se realiza de acuerdo a una probabilidad de cruce que asigna un MOEA a los individuos. Así también de acuerdo al

**Algoritmo 1** Algoritmo evolutivo multiobjetivo básico (MOEA básico)

---

```
1: Construir una Población inicial  $P|_0$  con  $N_p$  individuos
2: Evaluar Población inicial  $P|_0$ 
3: Construir una aproximación inicial del conjunto de Pareto  $\mathbf{X}_p^*|_0$ 
4: Contador de generación  $C = 0$ 
5: while (criterio de convergencia no se alcance) do
6:    $C := C + 1$ 
7:   Construir población  $P^*|_C$  usando  $P|_{C-1}$  con técnicas evolutivas (cruce, mutación)
8:   Evaluar la nueva población  $P^*|_C$ 
9:   Construir la aproximación del conjunto de Pareto  $\mathbf{X}_p^*|_C$  a partir de  $\mathbf{X}_p^*|_{C-1}$  y  $P^*|_C$ 
10:  Actualizar la población  $P|_{C+1}$  usando  $P^*|_C$  y  $P|_{C-1}$ 
11: end while
12: Devuelve la aproximación del conjunto de Pareto  $\mathbf{X}_p^*|_C$ 
```

---

tipo de codificación de los cromosomas de cada individuo existen diferentes operadores de cruce. Dentro de las codificaciones más usadas por los MOEAs se tiene la codificación binaria y la codificación real. Entre los operadores de cruce para codificación binaria se puede mencionar: *cruce simple* [71], *cruce multipunto* [41], *cruce uniforme* [143]. En los MOEAs que aplican codificación real es posible usar los operadores de cruce que se usan en la codificación binaria si la dimensión del espacio de decisión es mayor o igual que dos. Existen también otros operadores de cruce para la codificación real como por ejemplo: recombinación lineal [45], recombinación intermedia [52], [8], entre otros.

En la operación de mutación se introducen cambios aleatorios en algunos genes de los cromosomas de acuerdo a una determinada función de probabilidad. La operación de mutación tiene como objetivo lograr mejorar la capacidad de un MOEA para explorar el espacio de búsqueda ya que permite generar información genética que no existe en la población. Uno de los mecanismos más sencillos para generar la mutación entre individuos es la *mutación aleatoria* de acuerdo a una distribución de probabilidad uniforme. La *mutación orientada*, y la *mutación polinomial* son otras formas de generar nuevos individuos en una población usando una distribución de probabilidad diferente en cada uno [9], [102]. Los operadores genéticos que se aplican en un MOEA son un tema de interés y relevancia ya que su adecuada aplicación permitirá que el algoritmo de optimización encuentre soluciones que puedan converger de manera eficiente al frente de Pareto. En la actualidad aún se investiga el tema de operadores genéticos y su aplicación en MOEAs para resolver problemas de optimización [21], [105], [90].

Una motivación importante para usar MOEAs en la solución de problemas multiobjetivo es que posibilitan obtener un conjunto de soluciones óptimas de

Pareto en una única ejecución, no tienen limitaciones para obtener frentes no convexos y con discontinuidades.

Los MOEAs que más han destacado por su desempeño y aplicación son los MOEAs que aplican la definición de elitismo [42], [126]. Los MOEAs elitistas garantizan que las mejores soluciones (las no dominadas) no puedan ser eliminadas de la población en favor de soluciones peores (dominadas), para de esta forma garantizar una convergencia eficiente al frente de Pareto.

Entre los MOEAs elitistas de mayor uso se pueden mencionar: NSGA II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm), [42]; SPEA II (Strength Pareto Evolutionary Algorithm), [163]; PESA II (Pareto Envelope-based Selection Algorithm), [36]. El algoritmo NSGA II logra reducir el coste computacional de su predecesor NSGA (el coste computacional ha sido una crítica que enfrentan los MOEAs, aunque en la actualidad con el avance de la tecnología computacional esto se relativiza cada vez más), así también propone un operador de selección que combina las poblaciones (soluciones) actuales con su descendencia (“padres e hijos”) para generar nuevas soluciones y posteriormente seleccionar las mejores. El algoritmo SPEA II es una versión con características mejoradas de su predecesor SPEA. SPEA II trabaja con una población regular y una población externa. La población externa inicia vacía y las soluciones no dominadas se van almacenando en esta población. Una característica interesante de SPEA II es que utiliza una técnica denominada *clustering* [125] para preservar las características de los frentes de soluciones no dominadas (eliminando soluciones duplicadas o dominadas de la población externa durante el proceso de actualización). El algoritmo PESA II es una mejora respecto de su antecesor PESA. PESA II usa una nueva técnica de selección en el espacio de objetivos a través de lo que denomina como *hiperbox*. En esta técnica la selección selectiva se realiza a través del *hiperbox* y no de manera individual con lo cual se consigue una distribución más eficiente de las soluciones que aproximan el frente de Pareto, así también esta técnica permite disminuir su coste computacional.

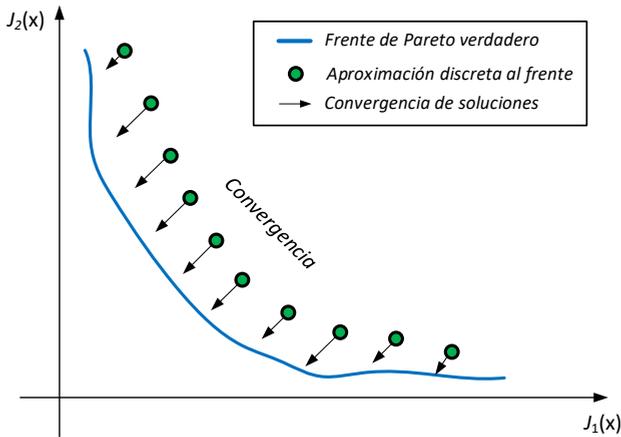
En los últimos años los MOEAs que más han llamado la atención de los investigadores son aquellos algoritmos evolutivos multiobjetivo basados en nuevos enfoques de descomposición (MOEA/D) [160], [159], [155]. Un MOEA/D descompone un problema multiobjetivo en una serie de subproblemas agregados, los cuales son optimizados simultáneamente de manera colaborativa usando la información de sus subproblemas vecinos [150].

Las características deseables para un MOEA, por lo general, están relacionadas con el conjunto de soluciones requeridas por el diseñador o con el planteamiento del problema multiobjetivo [108]. Respecto al conjunto de soluciones del

frente de Pareto que obtiene un MOEA es deseable que cumplan determinadas características como por ejemplo: convergencia, diversidad y pertinencia. Respecto al planteamiento del MOP, es deseable que un MOEA pueda manejar problemas multiobjetivo con restricciones, con muchos objetivos de diseño, multimodales, con un elevado coste computacional, entre otros.

### Convergencia

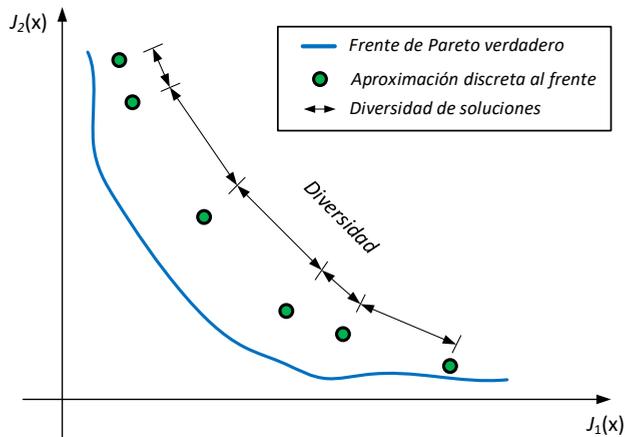
La convergencia es la capacidad que tiene un MOEA para alcanzar el frente de Pareto verdadero como se muestra en la figura 2.3. Es decir mide la aproximación del conjunto de soluciones discretas que encuentra un MOEA con respecto al frente de Pareto verdadero. Se conoce que la característica de convergencia de un MOEA está relacionada con sus parámetros evolutivos [44], [87], siendo esta una de las características más relevantes de los algoritmos evolutivos multiobjetivos. Evaluar la convergencia de un MOEA es una tarea interesante y se vuelve más compleja a medida que se incrementa el número de objetivos de diseño a optimizar, por lo cual, se han propuesto algunas métricas para efectuar esta labor como las mostradas en [54].



**Figura 2.3:** Convergencia de soluciones hacia el frente de Pareto en un espacio de objetivos bidimensional.

### Diversidad

La diversidad se refiere a la capacidad de un MOEA para obtener un conjunto de soluciones bien distribuidas en el espacio de objetivos de diseño, como se muestra en la figura 2.4. Una correcta distribución de las soluciones del frente de Pareto aproximado permite a un diseñador realizar un análisis de compensación de prestaciones entre los objetivos de diseño de manera adecuada. Para lograr este objetivo los MOEAs usan diferentes métodos como por ejemplo el conocido mecanismo de poda con la técnica de  $\epsilon$ -dominancia [92], [16] así también se aplican indicadores de desempeño o medidas de propagación de las soluciones del frente de Pareto aproximado [162].

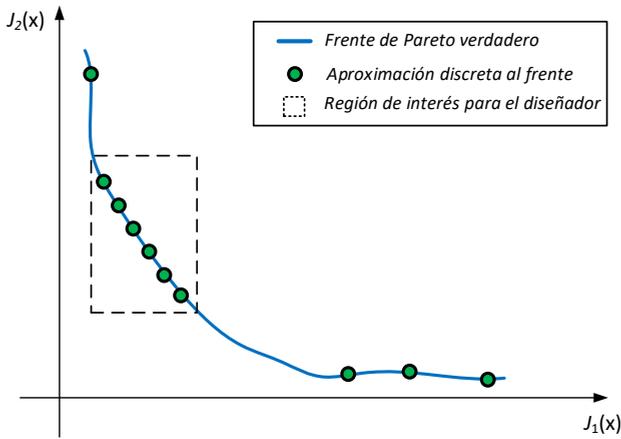


**Figura 2.4:** Diversidad de soluciones en el frente de Pareto en un espacio de objetivos bidimensional.

### Pertinencia

La pertinencia se refiere a la capacidad de un MOEA para obtener soluciones interesantes de acuerdo a las preferencias de un diseñador como se muestra en la figura 2.5. Las preferencias de un diseñador pueden ser ingresadas en el procedimiento MOOD de forma: *a priori*, *progresiva*, o *a posteriori* [116], [127].

- *A priori*: el diseñador conoce claramente qué preferencias desea en el espacio de objetivos por lo cual las define de antemano, esto lleva a que



**Figura 2.5:** Pertinencia de soluciones en el frente de Pareto en un espacio de objetivos bidimensional.

el MOEA proporcione una única solución. Este enfoque tiene como desventaja el perder de vista el resto de soluciones óptimas del frente de Pareto.

- *Progresiva:* se involucran las preferencias del diseñador en el proceso de optimización del MOEA de manera interactiva, de tal forma que estas pueden ser ajustadas sobre la marcha. Este enfoque podría ser deseable cuando un diseñador tiene algún conocimiento sobre el intercambio de prestaciones entre los objetivos de diseño de un problema multiobjetivo.
- *A posteriori:* el diseñador analiza el frente de Pareto que obtiene un MOEA y de acuerdo al conjunto de soluciones obtenidas establece sus preferencias. Este enfoque tiene como desventaja el requerir de mayor tiempo de análisis del conjunto de soluciones por parte del diseñador, pero como ventaja entrega información detallada a un diseñador, sobre las compensaciones que ocurren entre los objetivos de diseño para que pueda elegir una solución de manera más informada.

Es posible mejorar la pertinencia de las soluciones que encuentra un MOEA estableciendo restricciones sobre el problema de optimización multiobjetivo,

por ejemplo, estableciendo restricciones sobre las variables de decisión o los objetivos de diseño de un MOP.

### *Optimización con restricciones*

Otra característica deseable para un MOEA es que pueda resolver problemas de optimización con restricciones, ya que en la mayoría de problemas o aplicaciones reales un diseñador debe enfrentar limitaciones físicas de los sistemas o restricciones de diseño. Para este efecto se han desarrollado varias técnicas para que los MOEAs puedan manejar de manera eficiente las restricciones en los problemas de optimización [53], [83], [109]. Entre las técnicas usadas por los MOEAs para el manejo de restricciones se puede mencionar: reglas de factibilidad, técnicas de clasificación estocástica; métodos  $\epsilon$ - restringidos y funciones de penalización [34], [124].

### *Optimización de muchos objetivos de diseño*

Un aspecto importante de un MOEA es que sea capaz de trabajar con problemas que involucren la optimización de muchos objetivos de diseño, por lo general más de cinco objetivos. Los MOEAs que presentan buenos mecanismos de diversidad para encontrar las soluciones del frente de Pareto pueden enfrentar dificultades cuando optimizan MOPs con un gran número de objetivos de diseño. De acuerdo a [37] se piensa que una de las principales razones para que esto ocurra se debe a que las poblaciones están compuestas en gran medida por soluciones no dominadas y los MOEAs tienen dificultad en distinguir esto con fines selectivos. En los MOEAs se han implementado métodos que permiten la clasificación de soluciones de un conjunto no dominado de tal forma que el algoritmo evite perder tiempo y recursos computacionales cuando enfrenta un proceso de optimización con muchos objetivos de diseño [81], [37].

### *Optimización multimodal*

En optimización multimodal diferentes vectores de variables de decisión tienen un mismo vector de objetivos de diseño. En problemas reales en donde las variables de decisión tienen un significado físico puede resultar interesante evaluar los desempeños de estas soluciones multimodales para elegir la más útil o conveniente. Por ejemplo en un MOP bidimensional, dos soluciones podrían tener los mismos valores de sus objetivos de diseño pero sus desempeños podrían ser diferentes. Se muestran más detalles sobre optimización multimodal en [40], [28], [153].

### *Optimización con elevado coste computacional*

El cálculo de algunas funciones objetivos en problemas de optimización complejos (funciones que evalúan el desempeño de las soluciones que encuentra un MOEA) requieren un elevado coste computacional. El coste computacional de un MOEA depende en principal medida del coste de evaluar cada una de las funciones objetivo y de la cantidad de objetivos de diseño que tenga un problema multiobjetivo. Para enfrentar problemas de optimización computacionalmente costosos se han implementado algunas técnicas las cuales, por lo general, se orientan a generar una superficie *on the fly* en el espacio de objetivos con bajo coste computacional [135], [98].

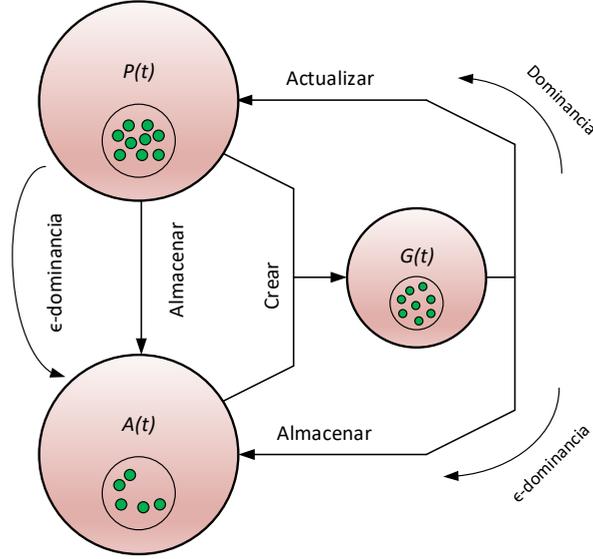
#### *2.4.2 Algoritmo ev-MOGA*

Dentro de los MOEAs los algoritmos genéticos multiobjetivos (MOGA) pueden ser considerados como los representantes de mayor aplicabilidad [117]. Estos algoritmos han sido usados para solucionar una variedad de problemas de optimización con resultados satisfactorios [1], [18], [128], [31]. En el apéndice A se muestran varios ejemplos de aplicación del algoritmo ev-MOGA [69], tanto para identificación de modelos de procesos como para el control de sistemas.

El algoritmo ev-MOGA [69], es un algoritmo evolutivo multiobjetivo elitista que se fundamenta en el concepto de  $\epsilon$ -dominancia [92], donde evolucionan dos subpoblaciones de manera simultánea e iterativa para lograr una convergencia al frente de Pareto de manera efectiva. El algoritmo ev-MOGA está formado por tres poblaciones  $P(t)$ ,  $A(t)$  y  $G(t)$  como se muestra en la figura 2.6.  $P(t)$  es la población principal y su función es explorar el espacio de búsqueda,  $A(t)$  es la población donde se guardan las soluciones de la aproximación al frente de Pareto. El algoritmo ev-MOGA intenta asegurar la convergencia de  $A(t)$  hacia un conjunto  $\epsilon$ -Pareto ( $\mathbf{X}_{P\epsilon}^*$ ) de manera distribuida a lo largo del frente de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p)$  y  $G(t)$  es una población auxiliar donde se guardan los nuevos individuos que se obtienen en cada iteración.

El algoritmo ev-MOGA ajusta de manera dinámica los límites del frente de Pareto con el fin de evitar que las soluciones localizadas en sus extremos se pierdan. El espacio de objetivos es particionado en cajas, en donde para cada dimensión  $i \in B := [1, \dots, s]$ , las celdas  $n\_box_i$  con ancho  $\epsilon_i$  son creadas como se muestra en (2.9)-(2.12).

$$\epsilon_i = \frac{(J_i^{max} - J_i^{min})}{n\_box_i} \quad (2.9)$$



**Figura 2.6:** Estructura del algoritmo ev-MOGA. Este gráfico ha sido inspirado en [69].

$$J_i^{max} = \underset{\mathbf{x} \in X_{P\epsilon}^*}{\text{máx}} J_i(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

$$J_i^{min} = \underset{\mathbf{x} \in X_{P\epsilon}^*}{\text{mín}} J_i(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

$$box_i(\mathbf{x}) = \left[ \frac{J_i(\mathbf{x}) - J_i^{min}}{J_i^{max} - J_i^{min}} (n\_box_i) \right] \forall i \in B \quad (2.12)$$

El algoritmo ev-MOGA aplica el concepto de  $\epsilon$ -dominancia como se muestra en (2.13).

Sea  $\mathbf{box}(\mathbf{x}) = \{box_1(\mathbf{x}), \dots, box_s(\mathbf{x})\}$ . Una solución  $\mathbf{x}^1$  con su valor en el espacio de objetivos  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^1)$ ,  $\epsilon$ -domina a otra solución  $\mathbf{x}^2$  con valor  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^2)$  (denotado por  $\mathbf{x}^1 \prec_\epsilon \mathbf{x}^2$ ), si y solo si se cumple (2.13).

$$\mathbf{box}(\mathbf{x}^1) \prec \mathbf{box}(\mathbf{x}^2) \vee (\mathbf{box}(\mathbf{x}^1) = \mathbf{box}(\mathbf{x}^2) \wedge \mathbf{x}^1 \prec \mathbf{x}^2) \quad (2.13)$$

En consecuencia un conjunto un  $\mathbf{X}_{P_\epsilon}^* \subseteq \mathbf{X}_P$  es  $\epsilon$ -Pareto si y solo si se cumple (2.14).

$$\forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbf{X}_{P_\epsilon}^*, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2, \mathbf{box}(\mathbf{x}^1) \neq \mathbf{box}(\mathbf{x}^2) \wedge \mathbf{box}(\mathbf{x}^1) \not\prec_\epsilon \mathbf{box}(\mathbf{x}^2) \quad (2.14)$$

El algoritmo ev-MOGA tiene como objetivo conseguir un conjunto  $\epsilon$ -Pareto ( $\mathbf{X}_{P_\epsilon}^*$ ) con una cantidad acotada de soluciones para aproximar el frente de Pareto de manera satisfactoria. Las soluciones que contiene el conjunto  $\mathbf{X}_{P_\epsilon}^*$  depende principalmente de la forma del frente y de las cajas  $n\_box_i$ , este conjunto está acotado y no excede la cota que se muestra en (2.15).

$$|\mathbf{X}_{P_\epsilon}^*| \leq \frac{\prod_{i=1}^n n\_box_i + 1}{n\_box_{max} + 1}, \quad n\_box_{max} = \max_i n\_box_i \quad (2.15)$$

En la figura 2.7 se muestra como el algoritmo ev-MOGA obtiene el conjunto  $\mathbf{X}_{P_\epsilon}^*$  aplicando el concepto de  $\epsilon$ -dominancia en un espacio de objetivos bi-dimensional. El espacio de objetivos para este ejemplo se ha dividido en cien cajas, donde  $n\_box_1 = n\_box_2 = 10$ . En cada caja solamente hay una solución, ya que si dos soluciones compiten en una misma caja, la solución que prevalece es la que se encuentra más próxima a su centro. El ancho de las cajas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  dependen de los límites del frente establecidos por  $J_1^{min}$ ,  $J_1^{max}$  y también por  $J_2^{min}$ ,  $J_2^{max}$  (estos límites se ajustan de forma dinámica de acuerdo a como se van localizando las soluciones). Se puede observar en la figura 2.7 que la mayor cantidad de soluciones se ubican en la región marcada por líneas entrecortadas ya que la pendiente es mayor en esta región. El pseudocódigo del algoritmo ev-MOGA <sup>1</sup> se muestra en el algoritmo 2.

## 2.5 Etapa de decisión multicriterio

Una vez que un algoritmo de optimización provee a un diseñador una aproximación del frente de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p^*)$  (etapa 2 de la figura 2.1), es necesario analizar las características o compensaciones de las soluciones que forman este frente  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p^*)$  afin de elegir una solución de manera informada y de acuerdo con las preferencias del diseñador. Las herramientas de visualización de frentes de Pareto son muy útiles y potentes para este efecto, por lo cual han sido ampliamente aceptadas para ayudar a un diseñador a seleccionar soluciones

---

<sup>1</sup>El algoritmo ev-MOGA está disponible en:  
<https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31080-ev-moga-multiobjective-evolutionary-algorithm>.



óptimas de un frente de Pareto [111], [97]. En el siguiente apartado se muestran de manera resumida algunas de las herramientas de visualización usadas para analizar frentes de Pareto multidimensionales.

### 2.5.1 Herramientas de visualización de frentes de Pareto

La visualización de un frente de Pareto de un MOP bi-dimensional puede ser relativamente sencilla, pero a medida que el MOP va incrementando su dimensión (MOP multidimensionales) esta tarea se vuelve cada vez más compleja. Para analizar frentes de Pareto multidimensionales se han desarrollado diversas herramientas alternativas de visualización [146], [26], [129]. Entre las herramientas de visualización de frentes se pueden mencionar: *scatter diagram* [49], esta metodología permite transformar datos de alta dimensión a dos dimensiones con una pérdida tolerable de información de la relación de dominancia entre los datos que forman el frente de Pareto. *Parallel coordinates*, [78], permite analizar de forma analítica y geométrica frentes de Pareto multidimensionales preservando en cierta medida la relación de dominancia de sus soluciones. *Parallel coordinates* transforma la búsqueda de relaciones multivariadas de un conjunto de datos en un problema de reconocimiento de patrones. Para este efecto realiza un mapeo entre las  $N$  variables de un frente multidimensional y las representa con imágenes planas las cuales tienen propiedades geométricas [80], [79]. El método *interactive decision maps* [96] visualiza la superficie del denominado *edgeworth-Pareto hull (EPH)* (no el conjunto de aproximación real). El *EPH* de un conjunto de aproximación  $A$  contiene todos los puntos en el espacio de objetivos que son débilmente dominados por alguna solución en  $A$  [17]. El método *radial coordinate visualization* [77] hace un mapeo del espacio de objetivos  $m$ -dimensional a una gráfica de coordenadas radiales en tres dimensiones mientras intenta preservar la ubicación relativa de las soluciones, la forma del frente de Pareto, la distribución de las soluciones y la tendencia de convergencia de un proceso de optimización multiobjetivo. La metodología *level diagrams* [19], [20] representa cada objetivo y parámetro de diseño de un problema multiobjetivo en diagramas separados. Esta técnica de visualización se basa en dos aspectos claves: 1) la clasificación de los puntos del frente de Pareto según su proximidad a los puntos ideales medidos con una norma específica en un espacio de objetivos normalizados (se pueden utilizar varias normas) y 2) la sincronización de los diagramas en el espacio de objetivos y en el de decisión. Un aspecto importante en esta herramienta es su interactividad lo cual permite a un diseñador ingresar sus preferencias para determinar una solución a un MOP. En el apéndice A se muestran varios ejemplos de aplicación

de la herramienta *level diagrams* [19], [20], donde se analizan diversos frentes de Pareto en problemas de identificación de modelos y control de sistemas.

En esta tesis se usa la herramienta *level diagrams* para visualizar y analizar los frentes de Pareto de los distintos MOPs multidimensionales planteados, por lo cual se la analizará en mayor detalle en el siguiente apartado.

Si un lector está interesado en tener mayores detalles de las herramientas de visualización de frentes de Pareto presentadas en esta sección de la tesis y de otras más, puede buscar en [50], [57].

### 2.5.2 Visualización de frentes con *level diagrams* (LD)

La herramienta de visualización de frentes de Pareto multidimensionales *level diagrams* [19], [20] se fundamenta en la clasificación del frente de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_p^*)$  de acuerdo con su proximidad al punto ideal. El punto ideal se entiende como el punto con valores mínimos en el frente de Pareto para cada objetivo de diseño de un MOP [110].

Para realizar la clasificación del frente de Pareto, cada objetivo de diseño de un problema multiobjetivo ( $J_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, s$ ) se normaliza respecto a sus valores mínimo y máximo del frente de Pareto aproximado como se detalla en (2.16) y (2.17).

$$J_i^M = \max_{\mathbf{x} \in X_p^*} J_i(\mathbf{x}); \quad J_i^m = \min_{\mathbf{x} \in X_p^*} J_i(\mathbf{x}); \quad i = 1, \dots, s \quad (2.16)$$

$$\bar{J}_i(\mathbf{x}) = \frac{J_i(\mathbf{x}) - J_i^m}{J_i^M - J_i^m} \rightarrow 0 \leq \bar{J}_i(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (2.17)$$

La herramienta LD evalúa la distancia de una solución del frente al punto ideal usando una determinada norma. Cada norma ofrece al diseñador diferentes características de los diagramas y proporciona puntos de vista diferentes. Un diseñador con esta información puede tomar decisiones de manera informada y elegir la mejor solución para un MOP de acuerdo con sus preferencias. Las normas más usadas por LD son:

- Norma-1:  $\|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\|_1 = \sum_{i=1}^s |\bar{J}_i(\mathbf{x})|$
- Norma-2 (norma Euclídea):  $\|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^s [\bar{J}_i(\mathbf{x})]^2}$

- Norma- $\infty$  (norma infinito):  $\|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\|_{\infty} = \max[\bar{J}_i(\mathbf{x})]$

De acuerdo a la norma que un diseñador elija para representar un frente de Pareto y de la dimensión del vector de objetivos de diseño se cumple (2.18).

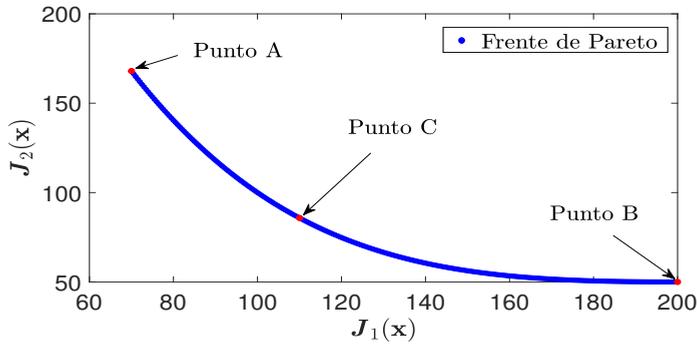
$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\|_1 \leq s \\ 0 &\leq \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\|_2 \leq \sqrt{s} \\ 0 &\leq \|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\|_{\infty} \leq 1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

La norma Euclídea evalúa de manera precisa la distancia geométrica convencional al punto ideal y ofrece una mejor vista de la forma real del frente de Pareto. La norma infinito proporciona información acerca del peor objetivo para un punto específico, es útil cuando un diseñador desea realizar un análisis de compensaciones entre los diferentes objetivos de diseño de un MOP. Un incremento en esta norma indica el empeoramiento de al menos uno de los objetivos de un MOP.

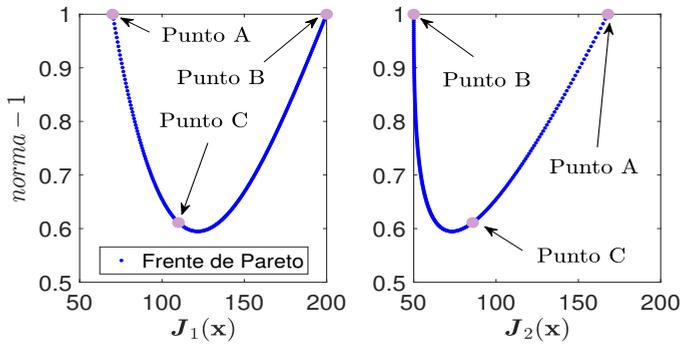
En la figura 2.8 se muestra una aplicación de la herramienta LD para analizar el frente de Pareto de un MOP bidimensional. En la figura 2.8 (a) se muestra una forma clásica de representar este frente de Pareto. En la figura 2.8 (b) se muestra el mismo frente de Pareto pero usando la herramienta LD con norma-1. La herramienta LD asigna a cada objetivo  $J_1$  y  $J_2$  su propio gráfico, de manera equivalente lo hace con cada una de las variables de decisión del MOP. El eje  $Y$  de cada gráfico corresponde al valor de la norma seleccionada para representar el frente, es decir, todos los gráficos están sincronizados respecto a este eje. El eje  $X$  corresponde a los valores de los objetivos de diseño del MOP (en el espacio de objetivos) o el valor de las variables de decisión (en el espacio de decisión).

Para realizar una interpretación adecuada de los diagramas proporcionados por la herramienta LD, cada objetivo de diseño y componente de un punto se representa al mismo nivel en el eje  $Y$  para todos los gráficos. Es decir, que toda la información de un punto multidimensional se gráfica a la misma altura en el eje  $Y$  para todas las dimensiones en el espacio de objetivos y de variables de decisión. En la figura 2.8 (c) se muestra el mismo frente de Pareto usando la herramienta LD con norma- $\infty$ , es importante resaltar que cada norma puede brindar a un diseñador un punto de vista diferente o complementario de las soluciones del frente.

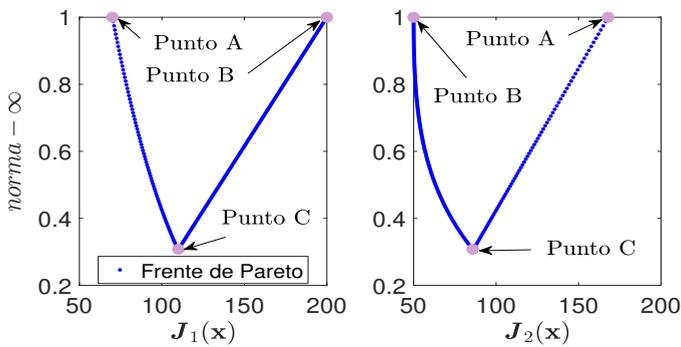
Cada punto del frente de Pareto de la figura 2.8 (a) se corresponde con un punto sobre cada gráfico proporcionado por la herramienta LD en las figuras



(a) Representación clásica de un frente de Pareto bidimensional



(b) Frente de Pareto bidimensional usando LD con  $norma - 1$



(c) Frente de Pareto bidimensional usando LD con  $norma - \infty$

**Figura 2.8:** Representación de frentes de Pareto usando la herramienta *level diagrams*.

2.8 (b) y (c). Por ejemplo el punto A en el frente de la figura 2.8 (b) y (c) está tanto en el objetivo  $J_1$  como en  $J_2$ , de manera equivalente ocurre con los puntos B y C. Estos puntos están representados al mismo nivel en el eje Y de cada gráfico, y muestran la distancia al punto ideal de acuerdo con la norma elegida (para este ejemplo se usó la *norma* – 1 y *norma* –  $\infty$ ).

Usualmente se requiere comparar frentes de Pareto para analizar sus fortalezas y debilidades. Cada frente puede ser asociado a una alternativa o concepto de diseño como se detallará en los siguientes capítulos de esta tesis. La herramienta LD está habilitada para realizar esta tarea como se muestra en [130], donde se define una medida de calidad para comparar frentes de Pareto denominada *quality indicator* ( $QI$ ). El indicador  $QI$  se fundamenta en el indicador binario  $I_\epsilon$  [54]. El indicador  $I_\epsilon$  evalúa el factor  $I_\epsilon(\mathbf{J}_{p1}^*, \mathbf{J}_{p2}^*)$  mediante el cual un frente de Pareto aproximado  $\mathbf{J}_{p1}^*$  es peor que otro frente aproximado  $\mathbf{J}_{p2}^*$  con respecto a todos los objetivos de diseño, y permite a un diseñador determinar si dos frentes son incomparables, iguales, o si uno de ellos tiene mejor desempeño que otro.

**Definición 2.4** (*Indicador de calidad  $Q(\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*)$*  [130]): *El indicador de calidad  $Q(\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*)$  para dos conceptos de diseño  $i, j \in [1, \dots, K]$  es definido como se muestra en (2.19) y (2.20).*

$$Q(\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*) = \begin{cases} 1 & ; \text{si } \min \epsilon_{\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*} > 1 \wedge \min \epsilon_{\mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j), \mathbf{J}_{pi}^*} > 1 \\ \min_{\mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j) \in \mathbf{J}_{pj}^*} \epsilon_{\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*} & ; \text{otros casos} \end{cases} \quad (2.19)$$

Donde:

$$\epsilon_{\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*} = \max_{1 \leq l \leq m} \frac{\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i)_l}{\mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j)_l}, \quad \mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i) \in \mathbf{J}_{pi}^*, \quad \forall \mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j) \in \mathbf{J}_{pj}^* \quad (2.20)$$

$$\mathbf{x}^i \in \mathbf{X}_{pi}^*, \quad \mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i) \in \mathbf{J}_{pi}^*, \quad i \neq j$$

En la tabla 2.1 se resume un breve análisis cuando se comparan dos frentes de Pareto usando el indicador  $QI$ .

En la figura 2.9 se muestra un ejemplo de comparación de dos frentes de Pareto (conceptos de diseño) bidimensionales usando la herramienta LD y aplicando la tabla 2.1. Se observa que existen cuatro zonas en el espacio de objetivos y cada una tiene características diferentes. La zona 1 está cubierta solamente por el frente de Pareto B, por eso la *norma-QI* es igual a la unidad, ya que no existe otro frente para realizar una comparación. La zona 2 está cubierta por ambos frentes, pero el frente de Pareto B es preferible sobre el frente A, ya

---

$Q(\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*) < 1$	$\rightarrow$	$\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i) \in \mathbf{J}_{pi}^*$ domina estrictamente al menos a un $\mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j) \in \mathbf{J}_{pj}^*$
$Q(\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*) = 1$	$\rightarrow$	$\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i) \in \mathbf{J}_{pi}^*$ no es comparable con alguna solución $\mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j) \in \mathbf{J}_{pj}^*$
$Q(\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i), \mathbf{J}_{pj}^*) > 1$	$\rightarrow$	$\mathbf{J}^i(\mathbf{x}^i) \in \mathbf{J}_{pi}^*$ es estrictamente dominado por al menos un $\mathbf{J}^j(\mathbf{x}^j) \in \mathbf{J}_{pj}^*$

---

**Tabla 2.1:** Comparación de dos frentes de Pareto usando el indicador  $QI$  [130].

que la norma- $QI$  del frente B es menor que la unidad. En la zona 3 el frente de Pareto A es preferible sobre el frente B, ya que la norma- $QI$  del frente A es menor que la unidad. Finalmente la zona 4 la cubre solamente el frente de Pareto A y la norma- $QI$  es igual a la unidad como en la zona 1.

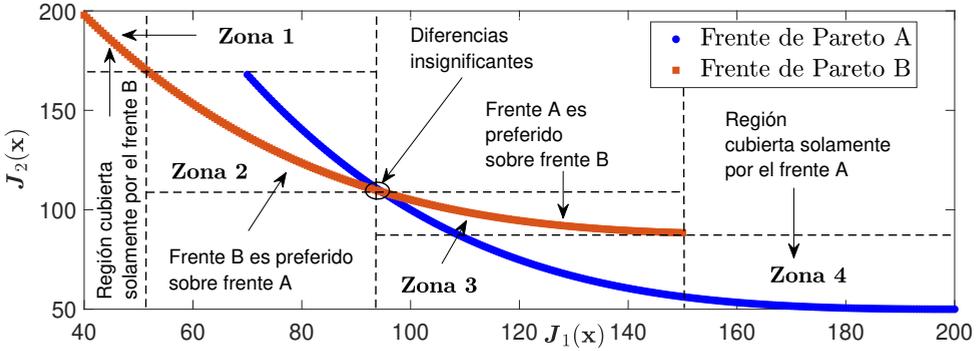
Se puede observar que la herramienta LD permite seleccionar soluciones de manera sincronizada en un frente de Pareto de acuerdo a las preferencias del diseñador (soluciones color amarillo).

La herramienta LD <sup>2</sup> es flexible y tiene características interesantes para analizar frentes de Pareto multidimensionales. Entre las principales características se pueden mencionar:

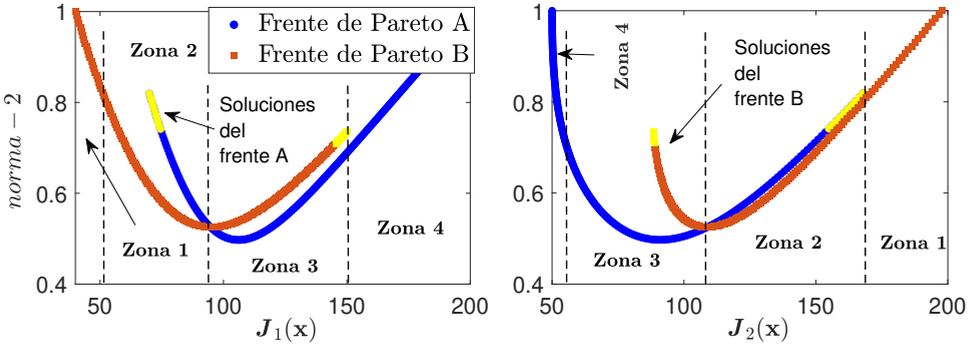
- Flexibilidad para incorporar diferentes puntos de vista (normas de sincronización).
- Capacidad para comparar diferentes frentes de Pareto (conceptos de diseño).
- Resaltado y coloreado de soluciones de manera sincronizada, entre otras características de interactividad.

---

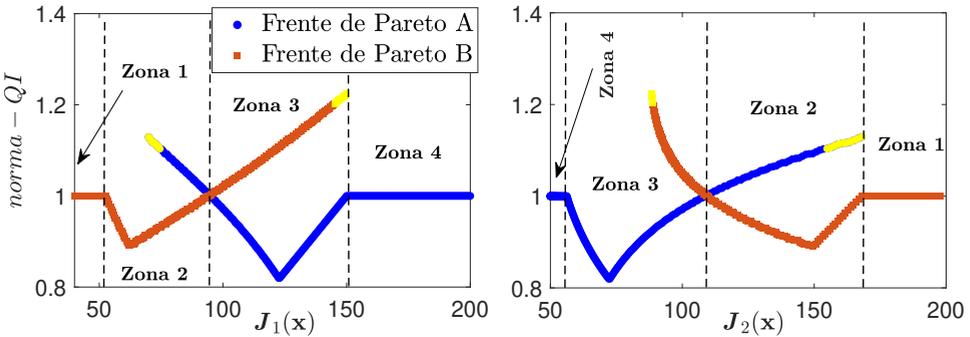
<sup>2</sup>Level diagrams interactive tool available at:  
<https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/62224-interactive-tool-for-decision-making-in-multiobjective-optimization-with-level-diagrams>.



(a) Comparación de frentes usando una representación clásica.



(b) Comparación de frentes usando LD con  $norma - 2$



(c) Comparación de frentes usando LD con  $norma - QI$

**Figura 2.9:** Comparación de frentes de Pareto usando la herramienta *level diagrams*.

## 2.6 Metodologías de selección de lazos de control en sistemas multivariables

El desarrollo de estrategias o metodologías para controlar de manera eficiente sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) sigue siendo un reto hasta la actualidad. Este desafío se debe a la complejidad que encierra el control de las múltiples interacciones que existen entre todas las variables que componen este tipo de sistemas [64].

En el campo de investigación de control multivariable, existen dos enfoques principales para controlar sistemas MIMO: control centralizado y control descentralizado. Cada enfoque tiene ventajas y desventajas en su aplicación.

Los enfoques de control centralizado consisten en un único controlador que tiene una visión global del sistema multivariable y de las interacciones entre todas sus variables. Un ejemplo importante de este tipo de controladores se conoce como control predictivo basado en modelo (MPC) [25]. La principal ventaja de un control centralizado, en comparación con uno descentralizado, es que calcula las acciones de control considerando todas las interacciones del sistema MIMO. Así también entre las ventajas del MPC, se puede mencionar las siguientes: 1) utiliza un modelo de proceso para obtener predicciones de su evolución dinámica; 2) utiliza el concepto de horizonte móvil, que le permite recalcular las acciones de control cuando hay nuevas medidas disponibles del proceso; 3) puede compensar naturalmente los tiempos muertos que existen en una amplia variedad de procesos industriales, así como las perturbaciones medibles y 4) puede contemplar restricciones en la acción de control, sus incrementos, y en las salidas. Una de las principales limitaciones del MPC es que su rendimiento depende de la precisión del modelo del sistema a controlar. Otra desventaja es su elevado coste computacional, ya que un MPC generalmente requiere resolver un problema de optimización en tiempo real [25], [2].

En un enfoque de control descentralizado, las principales ventajas son: facilidad de implementación; existencia de procedimientos sencillos para sintonizar controladores; y efectividad para realizar mantenimiento de lazos de control (abrir lazos de control sin que toda la planta permanezca fuera de línea) [10], [4], [142]. Es importante mencionar que un eficiente control descentralizado de un sistema multivariable depende, en gran medida, de la selección adecuada de sus lazos entrada-salida para controlar dicho sistema. La selección de un lazo de control en un sistema MIMO no es una tarea sencilla, ni mucho menos trivial, por ejemplo, en un sistema multivariable con dimensión  $n \times n$  pueden existir hasta  $n!$  combinaciones de lazos entrada-salida disponibles para contro-

lar este sistema. Para enfrentar este problema se han desarrollado diferentes metodologías, a continuación se detallarán las más usadas en esta tesis y seguidamente se mostrará otros enfoques o técnicas que se usan para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables.

### 2.6.1 La matriz de ganancias relativas (RGA)

Un trabajo pionero sobre el desarrollo de una metodología para seleccionar convenientemente lazos entrada-salida para controlar un sistema MIMO linealizado e invariante en el tiempo se propuso en [23], donde se definió la *matriz de ganancias relativas (RGA)*.

La metodología RGA fue propuesta por Bristol en [23] para medir las interacciones entre las variables de entrada y salida de un sistema multivariable a través de una matriz cuyos elementos indican cómo de fuerte es la dependencia entre estas variables. La interacción entre una entrada  $j$  y una salida  $i$  es más fuerte mientras el elemento  $ij$  de la matriz RGA se aproxime a la unidad, es decir, un diseñador puede elegir un lazo entrada-salida donde el elemento de  $RGA \approx 1$  para controlar de forma descentralizada un sistema multivariable. La metodología propuesta en [23] tiene diversas aplicaciones hasta la actualidad en el área de control descentralizado [147], [24], [152]. El método RGA se muestra en la definición 2.5 y fue propuesto originalmente para la frecuencia cero ( $s = j\omega = 0$ ) de un sistema MIMO, es decir para analizar solamente las interacciones de un sistema multivariable en el régimen permanente.

**Definición 2.5** (La matriz de ganancias relativas RGA [23], [89]): Sea una planta multivariable lineal representada por  $\mathbf{G}(s) = [g_{ij}(s)]$ ;  $i, j = 1, \dots, m$ , donde  $g_{ij}(s)$  representa la función de transferencia en lazo abierto desde la entrada  $j^{th}$  a la salida  $i^{th}$ . Así también sea  $h_{ij}(s)$  la función de transferencia de la salida  $i^{th}$  a la entrada  $j^{th}$ , donde todos los lazos excepto la salida  $i^{th}$  están bajo control estricto. Entonces, el elemento  $(i, j)^{th}$  de RGA considerando las ganancias en régimen estacionario  $g_{ij}(0)$  y  $h_{ij}(0)$  es definido como:  $\lambda_{ij} = g_{ij}(0)/h_{ij}(0)$  y la matriz de ganancias relativas RGA se define como  $\Lambda = [\lambda_{ij}] = \mathbf{G}(0) \otimes \mathbf{G}^{-T}(0)$ . Donde el símbolo “ $\otimes$ ” representa el producto elemento por elemento (producto Hadamard).

Entre las principales propiedades o características de RGA se puede mencionar:

- La suma de los elementos de las filas de RGA es igual a la unidad, esto es:  $\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, m$ .

- La suma de los elementos de las columnas de RGA es igual a la unidad, esto es:  $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .
- El hecho que  $\lambda_{ij} = 0$  quiere decir que no hay posibilidad de afectar con la variable de entrada  $j$  a la variable de salida  $i$ .
- El hecho que  $\lambda_{ij} = 1$  quiere decir que se mantiene la capacidad de control de la variable  $j$  sobre la variable  $i$  al considerar las interacciones del sistema.
- Si  $\lambda_{ij} < 0$  significa que la ganancia del lazo control analizado cambia de signo al cerrar los otros lazos de control debido a que el sistema se somete a una retroalimentación positiva, lo cual causa inestabilidad. Por lo tanto deben evitarse lazos de control donde  $\lambda_{ij} < 0$ .
- El hecho que  $0 < \lambda_{ij} < 1$  quiere decir que la variable  $i$  ve reducida su capacidad para controlar cuando se cierran los demás lazos, lo cual implica que la ganancia en régimen permanente del sistema aumenta y por lo tanto el controlador debe compensar el sistema.
- Si  $\lambda_{ij} > 1$  quiere decir que la interacción de los otros lazos del sistema reduce el efecto de las acciones de control aplicadas al lazo  $ij$ . Esto es, cuanto más grande sea  $\lambda_{ij}$  menor será la capacidad de control de la variable de entrada  $j$  sobre la variable de salida  $i$ .

De acuerdo con la técnica RGA se recomienda seleccionar los lazos de control donde  $\lambda_{ij} \approx 1$ .

Para ejemplificar la aplicación de RGA se analiza el sistema multivariable de dimensión  $3 \times 3$  propuesto en [68], el cual se muestra en (2.21).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-9s}}{6s^2+17s+1} & \frac{-9e^{-5s}}{s^2+4s+1} & \frac{13e^{-3s}}{3s^2+35s+1} \\ \frac{-5e^{-13s}}{2s^2+19s+1} & \frac{8e^{-2s}}{s^2+33s+1} & \frac{7e^{-5s}}{s^2+3s+1} \\ \frac{-16e^{-3s}}{s^2+5s+1} & \frac{3e^{-7s}}{s^2+14s+1} & \frac{e^{-11s}}{3s^2+25s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Se calcula la matriz de régimen permanente  $\mathbf{G}(0)$ , la cual se muestra en (2.22).

$$\mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 13 \\ -5 & 8 & 7 \\ -16 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Posteriormente se calcula la matriz  $[\mathbf{G}(0)]^{-T}$  como se muestra en (2.23).

$$[\mathbf{G}(0)]^{-T} = \begin{bmatrix} -0.0054 & -0.0442 & 0.0467 \\ 0.0198 & 0.0864 & 0.0583 \\ -0.0690 & -0.0298 & -0.0153 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Finalmente el RGA se muestra en (2.24).

$$RGA = \Lambda = \mathbf{G}(0) \otimes [\mathbf{G}(0)]^{-T} = \begin{bmatrix} -0.0054 & 0.3981 & \mathbf{0.6073} \\ -0.0992 & \mathbf{0.6912} & 0.4080 \\ \mathbf{1.1046} & -0.0893 & -0.0153 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

De acuerdo a la metodología RGA se sugiere controlar la salida  $y_1$  con la entrada  $u_3$ , la salida  $y_2$  con la entrada  $u_2$ , y la salida  $y_3$  con la entrada  $u_1$ . Esto es, RGA sugiere realizar el lazo de control:  $y_1 - u_3$ ;  $y_2 - u_2$ ;  $y_3 - u_1$ .

### 2.6.2 La matriz de ganancias relativas dinámica (DRGA)

Posteriormente a la aparición de RGA surgieron otras metodologías para enfrentar el problema de seleccionar lazos de control en sistemas multivariables en donde RGA presenta limitaciones. Por ejemplo en [104] se propone la *matriz de ganancias relativas dinámica (DRGA)* para analizar el comportamiento de sistemas multivariables (seleccionar lazos de control) a frecuencias diferentes de cero. A continuación se define DRGA.

**Definición 2.6** (La matriz de ganancias relativas dinámica DRGA [104], [89]): Sea un sistema multivariable representado en el espacio de estados como se muestra en (2.25).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Con  $x(0) = x_0$ . Donde  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ;  $u(t), y(t) \in \mathbf{R}^m$ . Se propone diseñar una arquitectura de planta ampliada, escalando las variables manipuladas  $u$  a su rango de operación  $u_R$ , y las variables medidas  $y$  a su rango de operación  $y_R$ . Este escalado solo afecta a la condición inicial  $x_0$ . Las variables escaladas se representan por  $\hat{u}$  y  $\hat{y}$ , entonces el sistema mostrado en (2.25) puede ser escrito como se muestra en (2.26).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_S \hat{u}(t) \\ \hat{y}(t) &= C_S x(t)\end{aligned}\tag{2.26}$$

Donde  $B_s$  y  $C_s$  pueden ser calculadas de  $B$  y  $C$  usando los factores de escalado.

Sea un controlador con realimentación de salida proporcional estática dada por (2.27).

$$\hat{u} = -K\hat{y}\tag{2.27}$$

Donde  $K$  es una matriz cuadrada calculada de acuerdo a la dinámica del proceso (siendo el número de variables manipuladas igual al número de variables controladas). El problema de control óptimo se resuelve con un regulador lineal cuadrático con salida retroalimentada como se propone en [93] cuya función objetivo a minimizar se muestra en (2.28).

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\hat{y}^T Q \hat{y} + \hat{u}^T R \hat{u}) dt\tag{2.28}$$

Donde  $Q$  Y  $R$  son típicamente matrices identidad,  $\hat{u}$  y  $\hat{y}$  han sido escaladas a sus rangos de operación.

El cálculo de DRGA se basa sobre el control de la matriz  $K$ , y el  $(i, j)^{th}$  elemento está definido como se muestra en (2.29).

$$\lambda_{Dij} \equiv \frac{\partial u_i / \partial y_j |_{u_k \neq 0, k \neq i}}{\partial u_i / \partial y_j |_{u_k = 0, k \neq i}}\tag{2.29}$$

El numerador y denominador de (2.29) dan la ganancia de  $u_i$  para  $y_i$  durante el estado transitorio en el cual el proceso es controlado usando la matriz de ganancia proporcional de salida  $K$ .

Usando la ecuación (2.27) las derivadas parciales de la ecuación (2.29) pueden ser calculadas como se muestra en (2.30).

$$\lambda_{Dij} = \frac{-K_{ij}}{-1/\hat{K}_{ji}} = K_{ij} \hat{K}_{ji}\tag{2.30}$$

Donde  $\hat{K}$  es igual a  $K^{-1}$ . Por lo tanto el cálculo de DRGA se puede efectuar como se muestra en (2.31).

$$\Lambda_D = K \otimes [K]^{-T} \quad (2.31)$$

Para mostrar la aplicación de DRGA se usa el sistema multivariable propuesto en [89] y que se muestra en (2.32).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{100s+1} & \frac{1}{10s+1} \\ \frac{5}{10s+1} & \frac{1}{100s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

En [89] se proponen los siguientes pasos para el calcular el DRGA:

Una representación del sistema en el espacio de estados, la cual se muestra en (2.33), (2.34).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.11 & -0.001 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.11 & -0.001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (2.33)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.005 & 0.1 & 0.001 \\ 0.1 & 0.001 & 0.05 & 0.005 \end{bmatrix} x \quad (2.34)$$

La resolución del problema de control óptimo seleccionando  $Q = C^T C$  y  $R = I$ , con lo cual se obtiene la matriz de realimentación de salida  $K$  como se muestra en (2.35).

$$K = \begin{bmatrix} 0.2751 & 0.7728 \\ 0.4412 & 0.0559 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Finalmente el cálculo de DRGA se muestra en (2.36).

$$DRGA = \Lambda_D = K \otimes [K]^{-T} = \begin{bmatrix} -0.0472 & \mathbf{1.0472} \\ \mathbf{1.0472} & -0.0472 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

De acuerdo a la metodología DRGA se sugiere controlar la salida  $y_1$  con la entrada  $u_2$ , y la salida  $y_2$  con la entrada  $u_1$ . Esto es DRGA sugiere realizar un lazo de control off-diagonal:  $y_1 - u_2$ ;  $y_2 - u_1$ .

Es interesante comparar el resultado de la técnica DRGA con lo propuesto por la técnica RGA, para lo cual se calcula la matriz de ganancias relativas (RGA) como se muestra en (2.37).

$$RGA = \Lambda = \mathbf{G}(0) \otimes [\mathbf{G}(0)]^{-T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1.25} & -0.25 \\ -0.25 & \mathbf{1.25} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Como se puede observar en (2.37) la técnica RGA sugiere realizar lazos de control diferentes (es decir un control diagonal) al propuesto por la técnica DRGA.

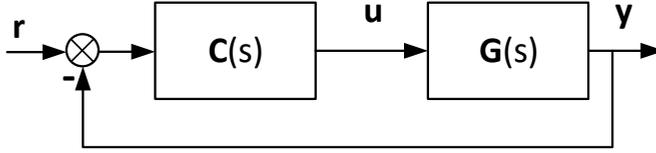
### 2.6.3 La matriz de ganancias relativas normalizada (RNGA)

Otra medida de interacción (fundamentada en RGA) que permite seleccionar lazos de control en sistemas multivariables analizando su comportamiento tanto en el régimen permanente como en el régimen transitorio fue propuesta en [68], [30] y se denomina *matriz de ganancias relativas normalizada (RNGA)*.

De acuerdo con [68], por lo general, existen dos factores importantes a tener en consideración para seleccionar adecuadamente lazos de control en sistemas multivariables. Estos factores son:

- La información del régimen permanente del sistema, ya que la ganancia de régimen permanente de la función de transferencia de un sistema MIMO refleja el efecto de la variable manipulada  $u_j$  sobre la variable controlada  $y_i$ .
- La información del régimen transitorio del sistema, ya que es responsable de la sensibilidad de la variable controlada  $y_i$  sobre la variable manipulada  $u_j$ , es decir de la rapidez de la respuesta de una salida particular a una entrada y de la capacidad de rechazar las interacciones de otros lazos de control.

Para definir RNGA se usa en [68], [30] un sistema multivariable de dimensión  $n \times n$  con una estructura de control retroalimentada como se muestra en la figura 2.10, donde  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$ , son los vectores de referencias, entradas, y salidas respectivamente.  $\mathbf{G}(s) = [g_{ij}(s)]_{n \times n}$  es la matriz de funciones de transferencia del sistema y  $\mathbf{C}(s) = \text{diag}\{c_1(s), \dots, c_n(s)\}$  es el control descentralizado;  $i, j = 1, \dots, n$  son índices enteros.



**Figura 2.10:** Diagrama de bloques de una estructura de control descentralizada.

Sea  $g_{ij}(s) = g_{ij}(0) \times \bar{g}_{ij}(s)$ , donde  $g_{ij}(0)$  y  $\bar{g}_{ij}(s)$  con  $\bar{g}_{ij}(0) = 1$  son la ganancia de régimen permanente y la función de transferencia normalizada de  $g_{ij}(s)$  respectivamente. Se asume que el proceso  $\bar{g}_{ij}(s)$  es estable en lazo abierto y su salida  $\bar{y}_i = \bar{g}_{ij}(s)u_j$  está inicialmente en cero. Para evaluar la dinámica del proceso se adopta el criterio de la integral del error y se calcula  $\bar{A}_{ij}$  como se muestra en (2.38). Donde  $\bar{A}_{ij}$  es igual a la diferencia acumulada entre la salida real del proceso y la salida esperada cuando se aplica una señal escalón unitario a la entrada.  $\bar{A}_{ij}$  es equivalente al tiempo promedio de residencia  $\tau_{ar,ij}$  de  $\bar{g}_{ij}(s)$  (es decir  $\tau_{ar,ij} = \bar{A}_{ij}$ ). De acuerdo a [7], el tiempo de residencia promedio es una medida aproximada del tiempo que tarda la respuesta de un sistema en establecerse, cuando se aplica a su entrada una señal escalón unitario.

$$\bar{A}_{ij} = \int_0^{\infty} [\bar{y}_i(\infty) - \bar{y}_i(t)] dt \quad (2.38)$$

De acuerdo a esto se define la ganancia normalizada  $k_{N,ij}$  para una función de transferencia particular  $g_{ij}(s)$  como se muestra en (2.39).

$$k_{N,ij} = \frac{g_{ij}(0)}{\tau_{ar,ij}} \quad (2.39)$$

Aplicando la ecuación (2.39) a la matriz  $\mathbf{G}(s)$  se obtiene la matriz de ganancias normalizada como se muestra en (2.40).

$$\mathbf{K}_N = [k_{N,ij}]_{n \times n} = \mathbf{G}(0) \odot \mathbf{T}_{ar} = \mathbf{G}(0) \odot [\tau_{ar,ij}]_{n \times n} \quad (2.40)$$

Donde  $\odot$  indica la división elemento por elemento. Así también al reemplazar la matriz de ganancias de régimen permanente con la matriz de ganancias

normalizada  $\mathbf{K}_N$  se obtiene la ganancia normalizada relativa ( $\phi_{ij}$ ) entre la salida  $y_i$  y la entrada  $u_j$  como se muestra en (2.41).

$$\phi_{ij} = \frac{k_{N,ij}}{\hat{k}_{N,ij}} \quad (2.41)$$

Donde  $\hat{k}_{N,ij}$  es la ganancia efectiva entre la salida  $y_i$  y la entrada  $u_j$  cuando todos los otros lazos están cerrados. Finalmente al calcular todas las ganancias relativas normalizadas para todas las combinaciones de lazos de control de un sistema multivariable se obtiene la *matriz de ganancias relativas normalizada (RNGA)* como se muestra en (2.42).

$$\Phi = [\phi_{ij}]_{n \times n} = \mathbf{K}_N \otimes \mathbf{K}_N^{-T} \quad (2.42)$$

Donde  $\otimes$  es el producto Hadamard (producto elemento por elemento).

Se muestra la aplicación de la técnica RNGA en un sistema multivariable de dimensión  $2 \times 2$  propuesto en [104] y [68], el cual muestra en (2.43).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5e^{-40s}}{100s+1} & \frac{1e^{-4s}}{10s+1} \\ \frac{-5e^{-4s}}{10s+1} & \frac{5e^{-40s}}{100s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

En [68] se calcula la matriz de tiempo de residencia promedio  $\mathbf{T}_{ar}$ , la matriz de ganancias normalizadas  $\mathbf{K}_N$  y el arreglo de ganancias relativas normalizado RNGA ( $\Phi$ ) como se muestra en las ecuaciones (2.44)- (2.46) respectivamente.

$$\mathbf{T}_{ar} = \begin{bmatrix} 140 & 14 \\ 14 & 140 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{K}_N = \begin{bmatrix} 0.0357 & 0.0714 \\ -0.3571 & 0.0357 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\Phi = \mathbf{K}_N \otimes \mathbf{K}_N^{-T} = \begin{bmatrix} 0.0476 & \mathbf{0.9524} \\ \mathbf{0.9524} & 0.0476 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

De acuerdo a la técnica RNGA se debería controlar la salida  $y_1$  con la entrada  $u_2$  y la salida  $y_2$  con la entrada  $u_1$ , es decir esta metodología sugiere realizar un lazo de control off-diagonal:  $y_1 - u_2; y_2 - u_1$ .

Es interesante comparar este resultado con lo propuesto por la metodología RGA. La matriz de ganancias relativas (RGA) del sistema (2.43) se muestra en (2.47).

$$RGA = \Lambda = \mathbf{G}(0) \otimes [\mathbf{G}(0)]^{-T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.8333} & 0.1667 \\ 0.1667 & \mathbf{0.8333} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Se puede observar en (2.47) que la técnica RGA sugiere unos lazos de control diferentes (control diagonal:  $y_1 - u_1; y_2 - u_2$ ) al propuesto por la técnica RNGA.

#### 2.6.4 Otros enfoques o técnicas de selección de lazos de control

Existen otras interesantes contribuciones para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables que aparecieron para contrarrestar las limitaciones de la técnica RGA. Por ejemplo el RGA original solamente podía ser aplicado para plantas multivariables cuadradas, esto representaba una limitación ya que una gran parte de plantas industriales son por naturaleza no cuadradas. Es por este motivo que surgió la denominada *ganancia relativa para sistemas multivariables no cuadrados (NRG)* [27]. Es evidente que si un sistema tiene más salidas que entradas no es posible controlarlo totalmente. Sin embargo, en el sentido de mínimos cuadrados el objetivo de control puede ser planteado como la minimización de la suma de los errores al cuadrado de sus salidas en régimen permanente y diseñar una estructura de control no cuadrada como se propone en [27]. Otro enfoque (el más usado) para diseñar un sistema de control para un proceso no cuadrado es dividir el sistema no cuadrado en subsistemas cuadrados (es decir seleccionar el mismo número de salidas que entradas) más un subsistema complementario (no cuadrado). El objetivo de control es minimizar la suma de los errores al cuadrado de las salidas no controladas cuando el subsistema cuadrado está bajo control. Para ambos enfoques NRG proporciona una alternativa para la selección de los subsistemas cuadrados, es decir sugiere la selección de los lazos de control en estos subsistemas.

Otra importante limitación del RGA original, es que su aplicación está definida solamente para plantas multivariables estables. Una forma de evaluar la estabilidad de un sistema multivariable en lazo cerrado fue propuesta con el denominado *índice de Niederlinski (NI)* [120] que evalúa la *integridad* de un sistema de control descentralizado como se muestra en la definición 2.7.

**Definición 2.7** (*Índice de Niederlinski* [120], [89]): El *índice de Niederlinski* para una planta multivariable lineal representada por su matriz de funciones de transferencia  $G(s) = [g_{ij}(s)]$ ;  $i, j = 1, \dots, m$ , se define como se muestra en (2.48).

$$NI = \frac{\det[G(0)]}{\prod_{i=1}^m g_{ii}(0)} \quad (2.48)$$

Un sistema de control diagonal descentralizado es inestable en lazo cerrado si  $NI < 0$ , es decir, los elementos de la diagonal de la matriz de ganancias relativas (RGA) corresponden a un lazo de control apropiado si el  $NI$  es positivo.

Para poder extender la aplicación de RGA a plantas multivariables inestables en lazo abierto se propusieron dos teoremas, uno de ellos extiende la aplicación del  $NI$ , y el otro extiende la aplicación de RGA, ambos para sistemas MIMO inestables [72].

La *ganancia relativa parcial (PRG)* [65] proporciona las condiciones necesarias para que una configuración de control sea controlable con integridad [32]. La técnica PRG fue propuesta para intentar superar la ambigüedad que presenta RGA para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables de dimensión mayor a  $2 \times 2$  (en sistemas MIMO con dimensión mayor a  $2 \times 2$ , RGA no garantiza una selección adecuada de lazos de control [65]). Para lo cual propone dividir el sistema en subsistemas parcialmente controlados. Esto le permitió seleccionar estructuras descentralizadas en bloque y comparar las prestaciones de las diferentes configuraciones de control.

La *matriz de ganancias relativas efectiva (ERGA)* [157] fue propuesta como una medida de interacción de las variables de un sistema MIMO en términos de relación de transmisión de energía. De tal forma que la interacción de los lazos de control se cuantifican por dos elementos: la ganancia relativa en régimen permanente que permite analizar el efecto de las variables manipuladas sobre las variables controladas y la frecuencia crítica relativa que permite analizar la sensibilidad de las variables controladas sobre las manipuladas.

La *matriz de interacción relativa (RIA)* [133], [67] usa un enfoque de descomposición de lazos para transformar una planta multivariable en diversas plantas de una entrada y una salida (SISO) de forma similar a RGA. Cuando existen varios lazos entrada-salida disponibles para controlar un sistema MIMO para elegir el mejor candidato es posible calcular una medida de interacción global basada en RIA. El cálculo de RIA se realiza como:  $\Phi_{RIA} = [\phi_{ij}]$ , donde

$\phi_{ij} = [(1/\lambda_{ij}) - 1]$  y  $\lambda_{ij}$  son los elementos de RGA. La medida de interacción global puede ser calculada como:  $\min \sum |\phi_{ij}^k|, \forall k$ , y se sugiere seleccionar los lazos de control donde  $\sum |\phi_{ij}^k|$  es mínimo. Una ventaja de RIA es que provee información acerca de la estabilidad de un sistema multivariable en lazo cerrado, de su integridad y robustez [161].

La *matriz de ganancia relativa absoluta (ARGA)* [11] se propuso tanto para resolver problemas de integridad y robustez como de variación de parámetros y efectos de no linealidades de los sistemas multivariables. En esta metodología se propone caracterizar los componentes no lineales de un sistema (por ejemplo, condiciones de fallo de los lazos de control) mediante una matriz diagonal de términos no lineales. Estas componentes no lineales son descritas mediante funciones algebraicas de entrada-salida, por ejemplo, un cierre de un lazo puede verse como la transición de una condición de cortocircuito (la salida es igual a la entrada) o una condición de circuito abierto (la salida es igual a cero).

Para sistemas multivariables representados en el espacio de estados se usan las matrices de Gramian [48] como mecanismo para seleccionar lazos entrada-salida, y para evaluar la interacción de los lazos de control se analiza la controlabilidad y observabilidad de estas matrices [112]. Una desventaja de las matrices de Gramian es que no ofrecen un sentido físico a las interacciones de los lazos de control de un sistema multivariable, por lo cual se propuso la denominada *matriz de participación (PM)* [133] que permite evaluar el rendimiento alcanzable por un controlador multivariable en estructuras descentralizadas. Un enfoque similar que aplica la *matriz de índice de interacción de Hankel (HIIA)* cuantifica las interacciones dependientes de la frecuencia, lo que a su vez propone una solución al problema de seleccionar adecuadamente lazos entrada-salida en sistemas MIMO. Una de las principales ventajas de HIIA es su significado físico para cuantificar la relación entre las entradas y salidas de los sistemas multivariables en el espacio de estados [156], [138].

Para seleccionar lazos entrada-salida en sistemas multivariables que presentan incertidumbre en sus parámetros se propuso una metodología basada en la matriz de índice de interacción de Hankel. El objetivo era mostrar como la variación de parámetros en plantas multivariables puede afectar a la selección de un determinado lazo de control [114].

Existen enfoques para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables que no se fundamentan en la matriz de ganancias relativas (RGA) ni en sus extensiones. Entre estos enfoques es importante mencionar: el enfoque basado en valores singulares estructurados (*enfoque SSV*) [91], [139] y el enfoque basado en la teoría de la pasividad [12], [13], [14].

Para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables aplicando el *enfoque SSV* se emplean los valores singulares estructurados (SSV) de la matriz de funciones de transferencia de lazo abierto. Los valores singulares estructurados cuantifican las interacciones que ocurren en las plantas multivariables lineales aplicando controladores diagonales. El *enfoque SSV* puede ser aplicado en el dominio de la frecuencia, de modo que el problema de selección de lazos de control se puede analizar en un rango de frecuencias que tenga importancia práctica para un sistema multivariable.

En [12], [13], [14] se propone un enfoque para seleccionar lazos de control en sistemas multivariables basado en la *teoría de la pasividad*. Las propiedades y aplicaciones de la teoría de la pasividad en el análisis de estabilidad y el diseño de sistemas de control son bien conocidas [136], [149], [47]. Sin embargo, este concepto se ha introducido recientemente para analizar las interacciones de los sistemas multivariables y seleccionar lazos entrada-salida de manera conveniente. Esta metodología introduce como medida de interacción un índice de pasividad (grado de pasividad) que depende de la frecuencia para seleccionar lazos de control.

Entre las contribuciones para enfrentar el problema de seleccionar lazos de control adecuados para controlar sistemas multivariables no lineales se puede mencionar a *la matriz de orden relativo* propuesta en [38]. La matriz de orden relativo se utilizó como un enfoque preliminar para evaluar la interacción entre las variables de entrada-salida de un sistema MIMO no lineal. Posteriormente en [61] se propuso una primera extensión de RGA para su aplicación directa en sistemas MIMO no lineales y en [113], [89] se define *la matriz de ganancia relativa no lineal (NRGA)* como una extensión de RGA para su aplicación a este tipo de sistemas.

Una forma indirecta de seleccionar lazos de control en sistemas multivariables no lineales consiste en linealizar estos sistemas en un determinado punto de operación de interés y aplicar alguno de los métodos de selección de lazos entrada-salida existentes para sistemas lineales (este enfoque es el más usado en la literatura de control descentralizado).

En los últimos años han emergido nuevos enfoques o metodologías para la selección de lazos entrada-salida en sistemas multivariables basados en *inteligencia artificial*. Por ejemplo enfoques basados en lógica difusa y redes neuronales [115], [94], [158]. En [88] se propone un enfoque basado en optimización para seleccionar lazos entrada-salida en sistemas multivariables (el enfoque es ilustrado en un problema de optimización bi-objetivo). En este enfoque se evalúa la medida de interacción ( $\mu$ ) [63] y se aplican las propiedades del método RGA.

En [70] se proponen algunas consideraciones preliminares para seleccionar lazos entrada-salida en sistemas multivariables desde un enfoque de optimización multiobjetivo y un análisis multicriterio. Donde se muestra como las preferencias del diseñador pueden influir en la selección de un lazo de control en un sistema MIMO.

Es importante mencionar que las metodologías clásicas de selección de lazos entrada-salida en sistemas multivariables que existen en la literatura de control pueden brindar información diferente a un diseñador. Es decir, cada metodología puede indicar la selección de un diferente lazo de control para un sistema MIMO. Así también, cuando un sistema no lineal se linealiza en torno a un punto de operación, el método RGA, así como la matriz de orden relativo, o el método NRGGA para el mismo punto de operación pueden proporcionar información diferente sobre el tipo de lazo entrada-salida a escoger.

Otro aspecto limitante de los métodos para la selección de lazos de control propuestos en este apartado es que, por lo general, afrontan el problema de selección del lazo entrada-salida de manera independiente a la sintonización de las estructuras de control multivariables. Como se mostró en [70] la sintonización de las estructuras de control pueden condicionar la elección de un lazo de control.

La gran variedad de métodos propuestos para controlar de manera descentralizada sistemas multivariables y la divergencia en sus resultados muestra que la tarea de seleccionar adecuadamente lazos de control en sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas es compleja y sigue aún como un problema abierto para proponer nuevas metodologías o nuevos enfoques para el control descentralizado de este tipo de sistemas.

Propuesta metodológica para la  
selección de lazos de control en  
sistemas multivariables



### 3.1 Introducción

En el capítulo 2 se presentaron los conceptos básicos sobre las principales metodologías existentes para la selección de lazos entrada-salida para el control descentralizado de sistemas MIMO. Se hizo énfasis tanto en sistemas linealizados como en sistemas no lineales. Así también se explicó los fundamentos teóricos sobre las técnicas de optimización multiobjetivo y las principales herramientas usadas en esta tesis en cada una de sus fases (fase de planteamiento del problema multiobjetivo, fase de optimización multiobjetivo y fase de toma de decisiones).

Es importante mencionar que la eficiencia de las estructuras de control descentralizado en los sistemas multivariables depende en gran manera de una adecuada selección de sus lazos entrada-salida. En un sistema MIMO con  $n$  entradas y  $n$  salidas pueden existir hasta  $n!$  combinaciones de lazos entrada-salida disponibles para controlar dicho sistema. Esto pone de manifiesto que la tarea de elegir lazos de control en un sistema MIMO a medida que este aumenta su dimensión es una tarea compleja.

Debido a la complejidad e importancia de realizar una selección adecuada de lazos de control en sistemas MIMO, existen diferentes metodologías clásicas para este propósito como se analizó en el capítulo 2, aunque cada una de ellas pueden sugerir unos lazos diferentes para controlar un determinado sistema MIMO bajo las mismas condiciones de operación. Esta divergencia de criterios de las metodologías tradicionales de selección de lazos de control muestra que esta tarea puede ser no trivial.

Por esta razón en este capítulo se propone una nueva metodología para el diseño de controladores descentralizados para sistemas MIMO que permita tanto, la selección adecuada de sus lazos de control, como la sintonización óptima de sus controladores aplicando un enfoque de optimización multiobjetivo. Esta metodología forma parte de los artículos [73], [74]. Se pretende con la metodología propuesta contribuir a la generación de un nuevo marco de trabajo para diseñar controladores descentralizados en sistemas multivariables más de acuerdo con las necesidades y preferencias de un diseñador o ingeniero de control.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la sección 3.2 se formaliza la metodología de selección de lazos de control propuesta en esta tesis, se explica lo que se denomina como *concepto de diseño*, la definición de la *matriz de selección de lazos de control*, se ejemplifica como obtener esta matriz y se

detalla cada etapa de la metodología a través de un diagrama de flujo. En la sección 3.3 se analiza el coste computacional que tiene la metodología propuesta y finalmente en la sección 3.4 se redactan algunas conclusiones del capítulo.

### 3.2 Enfoque multiobjetivo para la selección de lazos de control en sistemas multivariables

Considere un sistema MIMO a controlador que tiene  $n$  entradas  $(u_1, \dots, u_n)$  y  $n$  salidas  $(y_1, \dots, y_n)$  y está definido de acuerdo a la ecuación 3.1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$  es el *vector de estado*,  $\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbf{R}^n$  son los vectores con las entradas y salidas del sistema. El control multivariable descentralizado para el sistema descrito en (3.1) (la metodología también es válida para otras formas de representación de un sistema multivariable y es aplicable para cualquier modelo que pueda ser simulado) en un determinado punto de operación  $\varphi$  o zona de operación del sistema está definido por:

1. Un vector  $\mathbf{c}_k$  cuyos elementos representan los controladores para estabilizar las salidas del sistema como se muestra en (3.2).
2. Una matriz de selección de lazos de control  $L_p^{c_k}$  que conecta las salidas  $\hat{u}_i$  de cada controlador con las entradas  $u_i$  del sistema MIMO como se muestra en (3.3).

$$\mathbf{c}_k = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_k}, \dots, C_{y_i, \hat{u}_i}^{c_k}, \dots, C_{y_n, \hat{u}_n}^{c_k}] \tag{3.2}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = L_p^{c_k} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_i \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$k \in \{1, \dots, w\}; k, w \in \mathbb{Z}^+$$

Es importante considerar que en esta metodología propuesta, el vector  $\mathbf{c}_k$  representa una alternativa al control del sistema, lo que se denomina un *concepto de diseño* (pueden existir diversos conceptos de diseño desde 1 hasta  $w$ ).

En la ecuación (3.2), el elemento  $C_{y_i, \hat{u}_i}^{c_k}$  representa el controlador que estabiliza la salida  $y_i$  del vector de control  $\mathbf{c}_k$ . El controlador  $C_{y_i, \hat{u}_i}^{c_k}$  genera la salida  $\hat{u}_i$  la cual es conectada con la entrada  $u_i$  del sistema multivariable usando la matriz de selección de lazos de control  $L_p^{c_k}$  como se muestra en la figura 3.1.  $L_p^{c_k}$  es una matriz Booleana  $\mathfrak{B}_{n \times n}$  como se muestra en (3.4).

$$L_p^{c_k} = \begin{bmatrix} l_{11} & \dots & l_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}; l_{ij} = 0, 1; \forall i, j = 1 \dots n \quad (3.4)$$

La matriz  $L_p^{c_k}$  debe tener únicamente un valor lógico 1 en cada una de sus filas o columnas, además cuando se suman todos los elementos de una fila y/o columna su resultado será la unidad. Por ejemplo para un sistema MIMO con cuatro entradas y cuatro salidas, donde la salida  $y_1$  es controlada con  $u_3$  ( $l_{31} = 1$ ),  $y_2$  es controlada con  $u_4$  ( $l_{42} = 1$ ),  $y_3$  es controlada con  $u_2$  ( $l_{23} = 1$ ), y  $y_4$  es controlada con  $u_1$  ( $l_{14} = 1$ ). La matriz  $L_p^{c_k}$  y los esfuerzos de control  $u_i$  son como se muestra en (3.5).

$$L_p^{c_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_4 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Cada controlador  $C_{y_i, \hat{u}_i}^{c_k}$  debe ser sintonizado óptimamente a través de un vector de parámetros de ajuste  $\mathbf{x}^{c_k}$  y teniendo en cuenta el lazo de control asociado de acuerdo a  $L_p^{c_k}$ . Por lo tanto, el control del proceso sería parametrizado por el vector que se muestra en (3.6).

$$\mathbf{x}^{c_k} = [\mathbf{x}_{y_1}^{c_k}, \dots, \mathbf{x}_{y_n}^{c_k}] \quad (3.6)$$

Para cada concepto de diseño, se proponen MOPs como se muestra en (3.7)-(3.9).

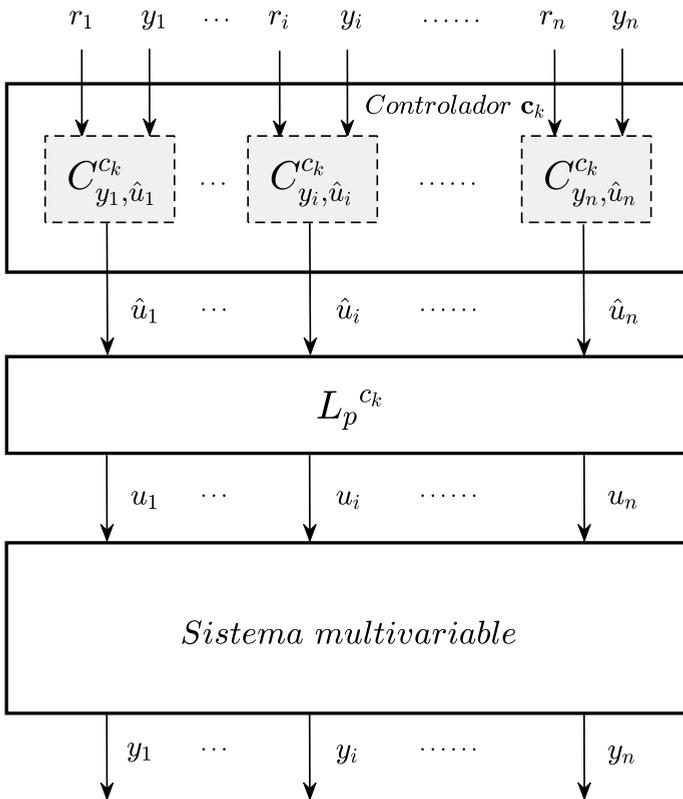
$$\mathbf{X}^{c_k} = \arg \min_{\mathbf{x}^{c_k}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{c_k}) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{c_k}) = [J_1(\mathbf{x}^{c_k}), \dots, J_s(\mathbf{x}^{c_k})] \quad (3.8)$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{c_k} \leq \mathbf{x}^{c_k} \leq \bar{\mathbf{x}}^{c_k} \quad (3.9)$$

Donde,  $\underline{\mathbf{x}}^{ck}$  y  $\overline{\mathbf{x}}^{ck}$  son los límites superiores e inferiores del espacio de búsqueda del vector de parámetros  $\mathbf{x}^{ck}$  para el concepto de diseño  $\mathbf{c}_k$ .

La metodología de optimización multiobjetivo propuesta genera para cada concepto de diseño un conjunto de soluciones óptimas de Pareto  $\mathbf{X}^{ck}$  y los correspondientes frentes de Pareto  $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{ck})$ . Al final se comparan los frentes de Pareto obtenidos para cada MOP (que corresponden a distintos lazos entrada-salida, cada uno con una estructura de control).



**Figura 3.1:** Diagrama de bloques del sistema de control multivariable descentralizado definido en (3.2) y (3.3).

La propuesta metodológica se muestra en la figura 3.2. Se asume que la metodología de selección de lazos de control, parte de disponer de un modelo del proceso multivariable factible de poder ser simulado. Este modelo puede ser lineal o no lineal, así como podría estar definido en primeros principios o ser del

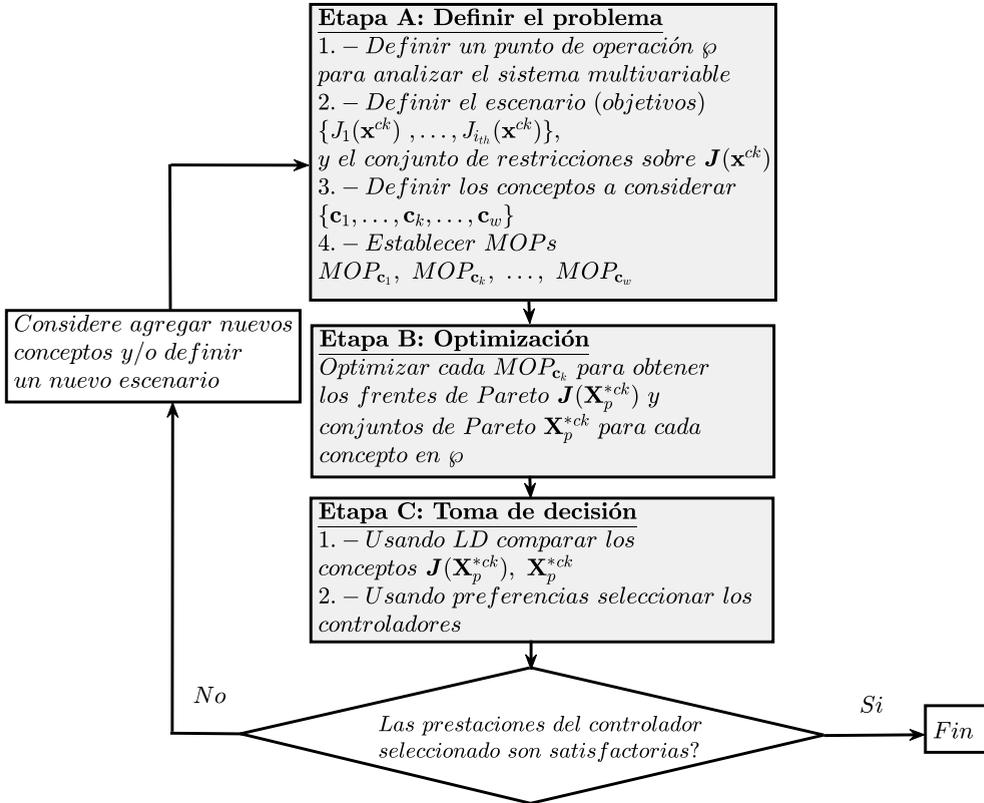
tipo caja negra, en definitiva, la metodología propuesta es válida con cualquier forma de representación del proceso siempre que pueda ser simulado.

En la **etapa A** se define el problema (selección óptima de unos determinados lazos de control) a través de considerar varios aspectos como se detalla a continuación.

El *punto 1*, hace referencia a la región de interés donde se desea controlar el sistema (punto de operación  $\varphi$ ). Si el sistema es no lineal debe trabajar en el punto de operación fijado por un diseñador, y si se trata de un sistema lineal, este tiene asociado en su modelo el punto de operación donde fue linealizado. Es importante establecer un punto de operación para analizar el sistema multivariable, ya que su comportamiento puede variar dependiendo de la región donde este trabaja, y por consiguiente, la selección del lazo de control también podría verse afectado. Es decir, los lazos entrada-salida para controlar un sistema en un punto de operación no tienen porque necesariamente coincidir en otro punto de operación.

En el *punto 2* se define el escenario. Un escenario establece lo que un diseñador desea que se contemple en el diseño multiobjetivo, a través de plantear los objetivos que formarán parte del problema de optimización (es posible fijar un conjunto de restricciones sobre estos objetivos si el problema lo requiere). Por ejemplo, un diseñador podría desear contemplar objetivos que midan las prestaciones de las salidas del sistema y que evalúen el esfuerzo de control, esto podría ser para seguimiento de una referencia en una de las salidas o en todas las salidas o frente a rechazo de perturbaciones. Es posible para un diseñador plantear escenarios con  $2, 3, 4, \dots, J_{i_{th}}(\mathbf{x}^{ck})$  objetivos de diseño, esto dependerá del nivel de detalle con que se desea/requiere analizar el problema (selección de lazos de control). Por ejemplo, se puede contemplar agregar las prestaciones de todas las salidas o se puede contemplar agregar las prestaciones asociadas a cada salida de forma independiente, esto genera escenarios con menos o más objetivos respectivamente. Cuanto menos objetivos tiene un escenario, el problema de optimización y su fase de análisis son más sencillos, pero al agregar objetivos se tiene como desventaja la posibilidad de enmascaramiento de información que podría ser relevante para la toma de decisión (enmascarar características asociadas de forma independiente a cada salida del sistema). El contemplar las prestaciones de cada salida de forma independiente, así como también analizar los esfuerzos de control independientemente, aumenta el número de objetivos del escenario. Esto implica un mayor coste computacional en el proceso de optimización y mayor complejidad en la etapa de decisión, pero tiene la ventaja que ofrece a un diseñador mayor información sobre el

comportamiento del sistema para que pueda tomar una decisión de manera más informada.



**Figura 3.2:** Diagrama de flujo de la metodología propuesta para la selección de lazos de control en sistemas multivariables.

En el *punto 3* un diseñador establece todos los conceptos de diseño que desea analizar, un concepto de diseño está formado por unos posibles lazos de control y una posible estructura de control. Es posible que existan diferentes conceptos de diseño que utilicen unos mismos lazos de control, pero apliquen estructuras de control diferentes (por ejemplo, un concepto que asocie un control diagonal con una estructura de control PI versus otro concepto con los mismos lazos de control pero con una estructura de control PD) o viceversa, es decir, estructuras de control del mismo tipo pero cada una de ellas con unos lazos de control diferente.

Finalmente, en el *punto 4* se plantean los problemas de optimización multiobjetivo como se describen en las ecuaciones (3.7)-(3.9).

En la **etapa B** se ejecuta el proceso de optimización multiobjetivo y se obtienen los frentes de Pareto (desempeños de cada lazo entrada-salida del sistema MIMO) así como los respectivos conjuntos de Pareto (parámetros de los controladores ajustados de manera óptima). En esta etapa es importante usar un algoritmo de optimización multiobjetivo que garantice en cierta medida características satisfactorias de convergencia, diversidad y pertinencia en los frentes de Pareto, así como también un coste computacional razonable. En esta etapa se usa el algoritmo evolutivo multiobjetivo ev-MOGA aunque la metodología es independiente del algoritmo de optimización usado.

En la **etapa C** se evalúan los diferentes frentes de Pareto obtenidos y se comparan sus fortalezas y debilidades usando la herramienta de visualización de frentes de Pareto multidimensionales denominada *level diagrams* (LD). Una vez que un diseñador elige los controladores más adecuados, de acuerdo a sus preferencias, para un sistema MIMO (controladores con unos lazos de control concretos y con sus parámetros de sintonía ajustados de manera óptima) podría ser que las prestaciones de estos controladores sean o no satisfactorias. Si las prestaciones obtenidas en el sistema con los controladores seleccionados no satisfacen al diseñador es posible modificar algunos puntos de la etapa A mostrada en la figura 3.2, por ejemplo, se podría definir un nuevo escenario con un mayor número de objetivos debido a que el nivel de detalle no es el adecuado, o cambiar los objetivos de diseño ya que no son los adecuados para las estructuras de control utilizadas. Si las prestaciones de los controladores seleccionados son satisfactorias y un diseñador desea controlar el sistema en otro punto de operación podría regresar al inicio de la metodología en la etapa A y definir otro problema teniendo en consideración este nuevo punto de operación.

### 3.3 Análisis del coste computacional de la metodología propuesta

Primero que todo, se debe dejar claro que el coste computacional de la metodología propuesta es difícil de generalizar, ya que depende de muchos factores. En general el coste computacional de la metodología propuesta es más alto que el coste computacional de muchos de los métodos clásicos que existen para seleccionar lazos de control en sistemas MIMO. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la metodología tiene en consideración las preferencias del diseñador,

el tipo de controladores utilizados y el ajuste óptimo de sus parámetros. Estas consideraciones son decisivas para la selección de los lazos de control y no pueden ignorarse si se desean unos lazos ajustados a las necesidades/preferencias del diseñador. Por lo tanto, no sería del todo justo comparar computacionalmente la metodología propuesta en este capítulo con las metodologías clásicas, ya que el coste de seleccionar un lazo de control no puede separarse del coste de sintonizar la estructura de control. Sin embargo, esta sección proporciona una reflexión sobre el coste computacional que debería asumirse al aplicar la metodología propuesta.

El coste computacional ( $CC$ ) del método de selección de lazos de control propuesto depende principalmente del número de MOPs que se plantean y el coste computacional de cada uno de ellos como se muestra en (3.10).

$$CC = \sum_{k=1}^w CC(MOP_{\mathbf{c}_k}) \quad (3.10)$$

El número de MOPs es igual al número de conceptos de diseño  $\mathbf{c}_k$  que se desea analizar. Como se muestra en la ecuación (3.2) un concepto de diseño es un vector que contiene unos determinados lazos de control y los controladores asociados con este. El número de combinaciones de lazos de control a estudiar será al menos dos, pero en un sistema  $n \times n$  pueden existir hasta  $n!$  combinaciones posibles.

El coste computacional de un MOP (ver ecuación 3.11) depende de tres factores:

1. El número de soluciones evaluadas en el proceso de optimización  $\eta_p$ .
2. El coste de calcular los objetivos de diseño (mostrados en 3.8) elegidos  $CC_J$ .
3. El coste del algoritmo multiobjetivo en sí mismo ( $CC_{MO}$ ).

$$CC(MOP_{\mathbf{c}_k}) = \eta_p \cdot CC_J + CC_{MO} \quad (3.11)$$

Normalmente,  $\eta_p \cdot CC_J \gg CC_{MO}$ , porque  $CC_J$  tiene  $n_{simul}$  simulaciones asociadas del sistema controlado que deben realizarse para calcular los objetivos de diseño (los cuales generalmente miden el desempeño de las salidas y los esfuerzos de control del sistema). Por otro lado,  $\eta_p$  depende del número de evaluaciones de la función objetivo requeridas por el algoritmo de optimización

utilizado. Cabe señalar que el coste computacional de la optimización puede variar considerablemente si, por ejemplo, se aplica computación paralela. No es el objetivo de este capítulo discutir el algoritmo de optimización utilizado, ya que la propuesta metodológica es independiente del algoritmo multiobjetivo seleccionado.

Como se puede concluir de lo que se ha dicho hasta ahora, hay muchas variables que dificultan la determinación exacta del coste computacional de la metodología propuesta. Para cuantificarlo, se harán los siguientes supuestos:

1. Considerar  $CC_{MO}$  despreciable.
2. Dado un problema de selección de lazos de control específico, todos los conceptos de diseño tendrán el mismo coste computacional.
3.  $CC_J = n_{simul} \cdot CC_{simul}$ , considerando que, dado un problema particular, el coste de una simulación es similar.

Por lo tanto:

$$CC \approx w \cdot \eta_p \cdot n_{simul} \cdot CC_{simul} \quad (3.12)$$

Por ejemplo, si un diseñador solo quiere analizar un tipo de controlador para cada combinación de lazos de control (entre los  $n_{loops}$  lazos que se puede estudiar), entonces el cálculo del coste computacional será:

$$CC \approx n_{loops} \cdot \eta_p \cdot n_{simul} \cdot CC_{simul}, \quad (3.13)$$

Donde:  $n_{loops} \in [2, \dots, n!]$ .

### 3.4 Conclusiones

En este capítulo se ha explicado en detalle la metodología propuesta para la selección de lazos de control en sistemas multivariables. La metodología es aplicable en sistemas MIMO con diferentes formas de representación, siempre que puedan ser simulados.

La metodología es aplicable directamente sobre sistemas no lineales, esto le da una ventaja significativa sobre las metodologías de selección de lazos de control clásicas, que requieren linealizar los sistemas previamente para analizar sus interacciones.

La metodología tiene embebido, en lo que se conoce como *concepto de diseño*, tanto la selección óptima de lazos de control, como el ajuste óptimo de los parámetros de las estructuras de control (con la simulación del sistema en lazo cerrado). Esto eleva su coste computacional frente a las metodologías de selección de lazos de control tradicionales, que solo calculan medidas de interacción entre las variables entrada-salida del sistema.

Es importante mencionar que en la metodología propuesta en este capítulo se aplica un enfoque de optimización multiobjetivo donde se usa el algoritmo evolutivo multiobjetivo *ev-MOGA* [69] (en la etapa B de la figura 3.2), aunque el método es independiente del algoritmo de optimización usado es necesario garantizar que el mismo tenga un desempeño satisfactorio en la obtención de los frentes de Pareto. Otro aspecto importante de la metodología se realiza en la fase de toma de decisiones (Etapa C de la figura 3.2). En esta fase se aplica la herramienta de visualización de frentes *Level diagrams* [19], [20] ya que permite realizar un análisis multidimensional e interactivo de los frentes de Pareto utilizando diferentes normas de sincronización, facilitando así la toma de decisiones.

## Capítulo 4

# Aplicación de la metodología de selección de lazos de control en procesos multivariables



## 4.1 Introducción

Una vez explicada la metodología para realizar una selección óptima de lazos de control en sistemas multivariables bajo un enfoque de optimización multiobjetivo, en este capítulo se presenta su aplicación en diferentes problemas de ingeniería de control de procesos. Las aplicaciones mostradas en este capítulo forman parte de los artículos [73] y [74].

El control de procesos con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) constituye un reto para los diseñadores o ingenieros de control debido a la complejidad de analizar las múltiples interacciones entre todas las variables de este tipo de sistemas. Para poder establecer formas de cuantificar las interacciones que ocurren entre las variables de entrada y salida de los sistemas multivariables existen una amplia variedad de propuestas metodológicas como se analizó en el capítulo de antecedentes de esta tesis. Una de las metodologías más conocidas se denomina *matriz de ganancias relativas* (RGA) y se muestra en [23]. RGA cuantifica las interacciones entre las variables de un sistema a frecuencia cero. Otra metodología de amplio uso se denomina *matriz de ganancias relativas dinámica* (DRGA) [104], se la usa para analizar las interacciones de un sistema multivariable en frecuencias diferentes de cero.

Un aspecto adicional que revela la complejidad de cuantificar las interacciones entre las variables de un sistema MIMO es que las diferentes medidas de interacción creadas para este efecto pueden sugerir diferentes lazos entrada-salida para controlar un sistema multivariable, lo cual podría generar incertidumbre en la selección de un lazo de control u otro.

Debido al conflicto que ocurre cuando los métodos clásicos para la selección de lazos de control no coinciden en sus resultados, así como también debido a que las metodologías clásicas abordan, por lo general, el problema de selección de lazos de control de forma independiente con la sintonización de los controladores multivariables, se propone en esta tesis una nueva metodología de selección de lazos de control aplicando herramientas de optimización multiobjetivo. El enfoque multiobjetivo posibilita analizar en detalle las contraprestaciones de cada combinación de lazos entrada-salida para ofrecer a un diseñador/ingeniero de control información detallada, y poder así, enfrentar el problema de seleccionar de manera óptima lazos de control en sistemas multivariables.

Para la etapa de optimización multiobjetivo se usó el algoritmo evolutivo multiobjetivo ev-MOGA [69] el cual se encarga de obtener de manera satisfactoria

los frentes de Pareto de cada concepto de diseño. En la etapa de toma de decisiones se usó la herramienta de visualización de frentes de Pareto denominada *level diagrams* [19], [20] ya que permite realizar una comparación global entre frentes de Pareto multidimensionales para analizar las fortalezas y debilidades de cada lazo de control en un sistema MIMO.

En la tarea de seleccionar lazos entrada-salida para el control de sistemas MIMO se plantean MOPs con diferentes objetivos de diseño, para de esta forma, evaluar el desempeño de cada lazo de control sobre las salidas y las entradas del sistema. Se analizan diferentes escenarios donde de manera progresiva se incrementa la cantidad de objetivos de diseño de cada MOP para ir revelando información, cada vez más detallada acerca de las prestaciones de cada lazo de control. El nivel de detalle requerido para analizar cada sistema es seleccionable por el diseñador o ingeniero de control, lo cual brinda flexibilidad a la propuesta metodológica presentada en esta tesis.

En la metodología propuesta en esta tesis resulta interesante analizar los frentes de Pareto usando la norma QI (quality indicator) [130], ya que permite realizar una comparación global de dominancia entre los mismos, con lo cual se tiene mayor certeza en la selección de lazos entrada-salida. Con esta propuesta metodológica se pretende contribuir a generar un nuevo marco de trabajo que permita seleccionar lazos de control más de acuerdo con las necesidades y preferencias de los diseñadores para el control de sistemas MIMO.

El capítulo se estructura de la siguiente manera: en la sección 4.2 se muestra la aplicación de la metodología en sistemas lineales. Se analiza como primer ejemplo un sistema con dos entradas y dos salidas, donde existen dos posibles lazos entrada-salida, lo relevante de este primer ejemplo es el detalle del análisis realizado en varios escenarios que ponen de manifiesto la complejidad y la importancia de conocer detalles de cada combinación de lazos de control para seleccionar adecuadamente uno de ellos. Posteriormente se analiza un sistema de tres entradas y tres salidas con el objetivo de mostrar la escalabilidad en la aplicación de la metodología. En los ejemplos presentados se contrastan diferentes metodologías tradicionales como por ejemplo RGA, DRGA, NRGGA, entre otras, versus la propuesta metodológica presentada en esta tesis. En la sección 4.3 se aplica la metodología de selección de lazos de control sobre sistemas no lineales, se empieza como primer y segundo ejemplo con un sistema MIMO denominado sistema de dos tanques acoplados, en estos ejemplos se contrastan los resultados al aplicar el método sobre cada sistema linealizado versus su aplicación directa sobre el sistema no lineal. En el tercer ejemplo se amplía la dimensión del sistema, esta vez con un sistema de cuatro entradas y cuatro salidas (sistema de cuatro tanques acoplados) donde fue factible

aplicar satisfactoriamente la metodología propuesta para controlar dicho sistema. Finalmente se analizó un sistema con altas no linealidades denominado unidad caldera-turbina (sistema con tres entradas y tres salidas) el cual se propuso para la generación de energía eléctrica, donde fue factible aplicar la metodología y establecer unos determinados lazos de control que estabilizan de manera satisfactoria el sistema. Por último, se presenta una sección de análisis de resultados y las conclusiones.

## 4.2 Aplicación a sistemas lineales

En este apartado se aplica la metodología de selección de lazos de control propuesta en esta tesis a dos sistemas lineales, uno de ellos de dimensión  $2 \times 2$  y el otro de  $3 \times 3$ . Para el sistema con dos entradas y dos salidas se plantean cuatro escenarios de análisis. El objetivo de establecer diferentes escenarios es mostrar como las preferencias de un diseñador pueden afectar a la selección de los lazos de control para controlar un sistema multivariable. Cada escenario revela información que el anterior no mostraba (o enmascaraba por la agregación de objetivos principalmente), es decir el nivel de detalle con que se analiza cada escenario se incrementa progresivamente para brindar cada vez mayor información sobre el comportamiento del sistema de control, para que de esta forma, el diseñador pueda tomar una decisión de manera más informada (elegir unos lazos de control y un conjunto de parámetros de sintonía ajustados de manera óptima).

Para el sistema con tres entradas y tres salidas se plantea solo un escenario de análisis con seis objetivos de diseño, ya que este escenario brinda información detallada que permite analizar de manera independiente las prestaciones de las salidas del sistema, así como evaluar sus esfuerzos de control para que el diseñador pueda elegir los lazos de control para controlar este sistema con información pormenorizada.

### 4.2.1 Ejemplo 1: sistema $2 \times 2$

Con el fin de mostrar la aplicación del enfoque multiobjetivo propuesto en el capítulo 3 y seleccionar lazos de control en sistemas MIMO lineales, se analiza un sistema con dos entradas y dos salidas [104] cuyo modelo se describe en (4.1), donde  $y_1$ ,  $y_2$  son las salidas del sistema y  $u_1$ ,  $u_2$  son las entradas, las constantes de tiempo y retardos del sistema están dados en segundos. El sistema involucra una dinámica off-diagonal rápida comparada con su dinámica diagonal. Para controlar este sistema el método RGA ( $\Lambda$ ) sugiere realizar un control diagonal, y el método DRGA ( $\Lambda_D$ ) uno off-diagonal como se muestra en (4.2) y (4.3).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5e^{-40s}}{100s+1} & \frac{1e^{-4s}}{10s+1} \\ \frac{-5e^{-4s}}{10s+1} & \frac{5e^{-40s}}{100s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{0.8333} & 0.1667 \\ 0.1667 & \mathbf{0.8333} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\Lambda_D = \begin{bmatrix} 0.25 & \mathbf{0.75} \\ \mathbf{0.75} & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Debido a que en [104], RGA y DRGA proponen lazos entrada-salida diferentes para controlar el sistema mostrado en (4.1), se propone diseñar un controlador PI de un grado de libertad (1-DOF) para cada combinación de lazos de control, con el objetivo de compararlos, y finalmente decidirse por uno u otro. Estos controladores se muestran en (4.4)-(4.11) y se ajustan de tal manera que se minimiza una única función que aglutina las acciones de control con los errores de todas las salidas del sistema como se muestra en (4.12).

$$\mathbf{c}_1 = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_1}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_1}] \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_1} = \frac{K_1^{c_1}(s + 1/Ti_1^{c_1})}{s}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_1} = \frac{K_2^{c_1}(s + 1/Ti_2^{c_1})}{s} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}^{c_1} = [K_1^{c_1}, Ti_1^{c_1}, K_2^{c_1}, Ti_2^{c_1}] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{c}_2 = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_2}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_2}] \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_2} = \frac{K_1^{c_2}(s + 1/Ti_1^{c_2})}{s}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_2} = \frac{K_2^{c_2}(s + 1/Ti_2^{c_2})}{s} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}^{c_2} = [K_1^{c_2}, Ti_1^{c_2}, K_2^{c_2}, Ti_2^{c_2}] \quad (4.11)$$

$$J = \int_0^{t_f} (e_1^2 + e_2^2 + u_1^2 + u_2^2) \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} (e_1^2 + e_2^2 + u_1^2 + u_2^2) \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.12)$$

Donde  $e_1 = r_1 - y_1$ ,  $e_2 = r_2 - y_2$ , son los errores de cada salida respecto de la señal de referencia establecida,  $u_1$ ,  $u_2$  son los esfuerzos de control. Los controladores PIs obtenidos para ambos conceptos de diseño se muestran en la tabla 4.1, donde se ha resaltado en **negrita** el mejor resultado para el objetivo de diseño  $J$ . De aquí en adelante, cuando se comparen varios controladores con varios objetivos de diseño se resaltarán en **negrita** los mejores resultados de cada objetivo. Las respuestas del sistema con los controladores PIs diagonal y off-diagonal de la tabla 4.1 se muestran en la figura 4.1.

DRGA PI off-diagonal		DRGA PI Diagonal	
$K_1^{c2}$	-0.363	$K_1^{c1}$	0,194
$Ti_1^{c2}$	7.9	$Ti_1^{c1}$	123.6
$K_2^{c2}$	0.641	$K_2^{c1}$	0.49
$Ti_2^{c2}$	628.4	$Ti_2^{c1}$	174.4
$J(\mathbf{x}^{c2})$	<b>205.6</b>	$J(\mathbf{x}^{c1})$	224.9

**Tabla 4.1:** Controladores PIs diagonal y off-diagonal propuestos con el método DRGA, [104]. Sus desempeños se muestran en  $J(\mathbf{x})$ .

Para establecer un marco de comparación y análisis coherente entre los controladores propuestos en la tabla 4.1 se evalúa la integral del error al cuadrado (ISE) asociada a cada salida, y la integral de la acción de control (ISU) asociada a cada entrada. Los resultados se muestran en la tabla 4.2. Se puede observar en la tabla 4.1 que  $J(\mathbf{x}^{c2}) < J(\mathbf{x}^{c1})$ , lo cual significa que desde el enfoque propuesto en [104] un control off-diagonal es preferible al diagonal para controlar el sistema mostrado en (4.1). Así también, al observar la tabla 4.2 se puede notar que el ISE en la salida  $y_2$  del controlador DRGA off-diagonal presenta una notable mejoría comparado con el DRGA diagonal, pero en la salida  $y_1$  ocurre lo contrario. Algo parecido ocurre también al evaluar el ISU para cada acción de control. El controlador off-diagonal ha conseguido minimizar  $J(\mathbf{x}^{c2})$  priorizando la minimización del error  $e_2$ , y sacrificando  $e_1$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  cuyos valores son mayores que para el controlador diagonal como se muestra en la tabla 4.2. Estos detalles no se detectan, si solo se analiza el valor de  $J$  en la tabla 4.1 porque han quedado ocultos al agregar el ISE e ISU en un único objetivo de diseño.

Referencias	$\int(\cdot)^2$	DRGA off-diagonal	DRGA diagonal
$r_1 = 1$	$e_1$	57.344	<b>50.501</b>
	$e_2$	<b>0.648</b>	34.783
$r_2 = 0$	$u_1$	29.430	<b>28.077</b>
	$u_2$	45.042	<b>35.766</b>
$r_1 = 0$	$e_1$	28.492	<b>7.825</b>
	$e_2$	<b>6.782</b>	31.547
$r_2 = 1$	$u_1$	8.490	<b>1.431</b>
	$u_2$	<b>29.430</b>	34.929

**Tabla 4.2:** Evaluación del ISE asociado a cada salida, y del ISU de cada entrada, para los controladores de la tabla 4.1.

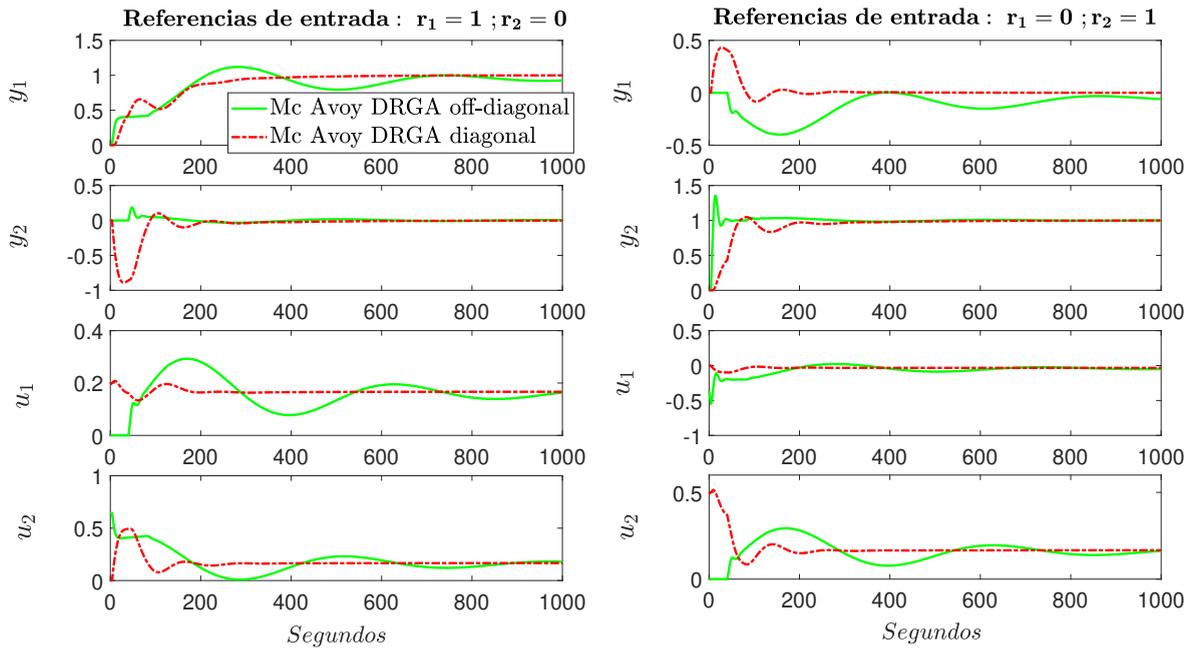


Figura 4.1: Respuestas del sistema con los controladores descritos en la tabla 4.1.

### Primer escenario

En este escenario se plantean dos MOPs con dos objetivos de diseño cada uno (etapa A de la metodología). Un objetivo aglutina los esfuerzos de control y otro los errores en las salidas.

Los conceptos de diseño diagonal ( $k = 1$ ) y off-diagonal ( $k = 2$ ) son los mostrados en (4.4) y (4.8) respectivamente. Estos conceptos de diseño se mantendrán fijos para todos los escenarios de este primer ejemplo. Se plantea los MOPs como se muestra en (4.13)-(4.19).

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.14)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} (e_1^2 + e_2^2) \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} (e_1^2 + e_2^2) \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.15)$$

$$J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.16)$$

$$t_f = 1000 \text{ segundos}$$

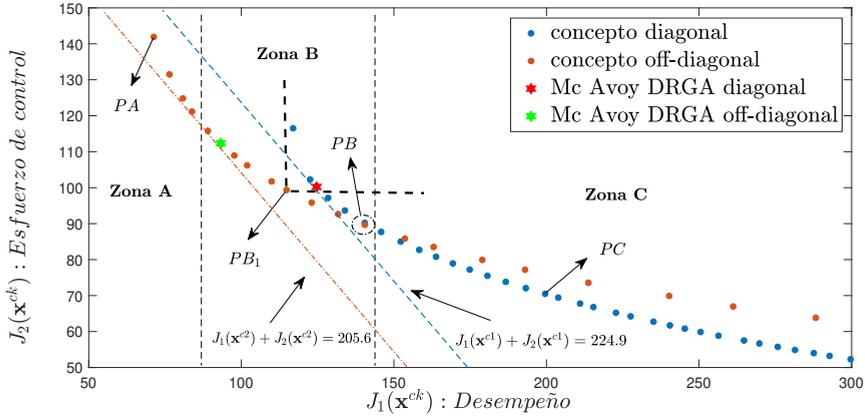
$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.17)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) \leq 300; J_2(\mathbf{x}^{ck}) \leq 150 \quad (4.18)$$

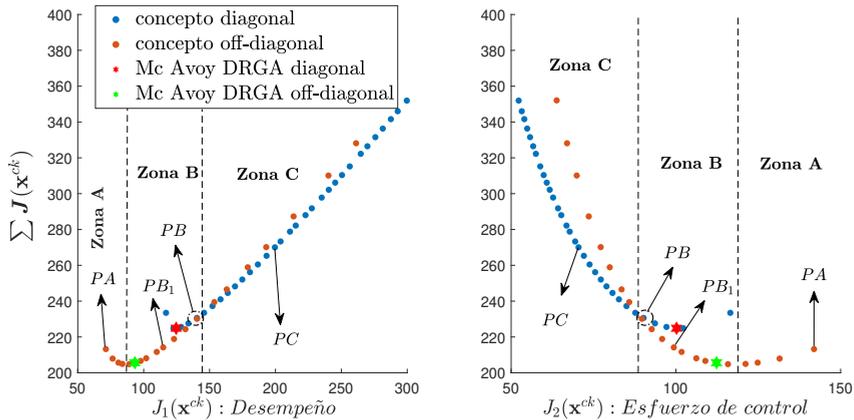
$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, T\iota_1^{ck}, K_2^{ck}, T\iota_2^{ck}] \quad (4.19)$$

Los límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  se describen en la tabla 4.3, estos límites se eligieron tomando en consideración los controladores de referencia propuestos en [104] para poder compararlos con los controladores obtenidos con la metodología propuesta. Estos límites se mantendrán fijos para todos los escenarios del ejemplo 1. La optimización de los objetivos de diseño (etapa B) de los controladores Mc Avoy DRGA diagonal y off-diagonal se muestran en la tabla 4.4. Los frentes de Pareto obtenidos para cada concepto de diseño (etapa C) se muestran en la figura 4.2.

En los frentes de Pareto mostrados en la figura 4.2 se observan tres zonas: *A*, *B* y *C*. La *Zona A* está cubierta solamente por el concepto de diseño off-diagonal. En esta zona se encuentran los controladores con mejores desempeños en sus salidas, pero con mayores esfuerzos de control. Se selecciona el controlador off-diagonal *PA* para mostrar este conflicto (ver objetivos  $J_1$  y  $J_2$  en la tabla 4.5).



(a)



(b)

**Figura 4.2:** Frentes de Pareto y comparación de conceptos de diseño usando level diagrams para el primer escenario. Las soluciones  $PA$ ,  $PB$ , y  $PC$  han sido seleccionadas para analizar sus desempeños. Los desempeños de los controladores propuestos en [104] se muestran mediante un hexagrama rojo (DRGA diagonal) y uno verde (DRGA off-diagonal). (a) Frentes de Pareto para los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal. (b) Frentes de Pareto usando LD con norma  $\sum J(\mathbf{x}^{ck})$ .

Límites de $\mathbf{x}^{ck}$				
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$T_{i_1}^{c1}$	$K_2^{c1}$	$T_{i_2}^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.01	1	0.01	1
$\overline{\mathbf{x}}^{c1}$	1	1000	1	1000
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$T_{i_1}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$T_{i_1}^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	-1	1	0.1	1
$\overline{\mathbf{x}}^{c2}$	-0.1	200	10	1000

**Tabla 4.3:** Límites del espacio de búsqueda de  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$ .

DRGA PI off-diagonal	DRGA PI diagonal		
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	<b>93.27</b>	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	124.7
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	112.3	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	<b>100.2</b>
$\sum_{q=1}^2 J_q(\mathbf{x}^{c2})$	205.6	$\sum_{q=1}^2 J_q(\mathbf{x}^{c1})$	224.9

**Tabla 4.4:** Objetivos de diseño para los controladores DRGA Mc Avoy diagonal y off-diagonal del primer escenario.

En la *Zona B* el concepto off-diagonal domina al concepto diagonal. Ambos controladores Mc Avoy DRGA diagonal y off-diagonal se encuentran en esta zona. Se puede apreciar en la tabla 4.4 que el controlador DRGA PI off-diagonal presenta menores errores en las salidas que el diagonal, ya que  $J_1(\mathbf{x}^{c2}) < J_1(\mathbf{x}^{c1})$ , pero también presenta mayores esfuerzos de control debido a que  $J_2(\mathbf{x}^{c2}) > J_2(\mathbf{x}^{c1})$ . Desde un enfoque multiobjetivo, analizando sus objetivos de diseño por separado, se puede afirmar que el controlador DRGA PI off-diagonal no domina totalmente al DRGA PI diagonal. Un diseñador podría encontrar un controlador PI off-diagonal que domine al controlador Mc Avoy DRGA diagonal en esta zona. La metodología propuesta brinda la posibilidad de realizar un análisis global de los frentes de Pareto de cada concepto de diseño. Es posible observar en la figura 4.2 que, por ejemplo, el controlador en  $PB_1$  domina al controlador Mc Avoy DRGA diagonal (este análisis no es posible realizarlo con el método clásico de selección de lazos de control DRGA).

Los controladores DRGA PI diagonal y off-diagonal (propuestos por el método de selección de lazos de control DRGA, [104]) forman parte de los frentes de Pareto. Estos controladores se obtienen al intersectar, con cada frente, las rectas  $J_1(\mathbf{x}^{ck}) + J_2(\mathbf{x}^{ck}) = L$ , donde  $L = \sum_{q=1}^2 J_q(\mathbf{x}^{c1}) = 224.9$  para el controlador DRGA PI diagonal y  $L = \sum_{q=1}^2 J_q(\mathbf{x}^{c1}) = 205.6$  para el DRGA PI off-diagonal como se muestra en la Figura 4.2 (a).

En la *Zona C* el concepto diagonal domina al concepto off-diagonal. Esta zona corresponde a los controladores con menores esfuerzos de control, pero con mayores errores en las salidas. Un ejemplo que muestra este conflicto es el controlador diagonal en *PC* cuyos objetivos se muestran en la tabla 4.5.

La evaluación del ISE e ISU de los controladores en *PA*, *PB* (en este punto coinciden dos controladores uno para cada concepto de diseño) y *PC* se muestra en las tablas 4.6 y 4.7 y sus respuestas en las figuras 4.3 y 4.4. Se puede observar que el controlador off-diagonal en *PA* comparado con el diagonal en *PC* presenta un mejor desempeño en las salidas  $y_1$  y  $y_2$  (ver en tabla 4.6 valores resaltados en negrita). Solo el controlador diagonal en *PC* es mejor para controlar la salida  $y_1$  cuando sigue la referencia  $r_1 = 0; r_2 = 1$ . El mejor desempeño del controlador off-diagonal en *PA* tiene como desventaja un empeoramiento en los esfuerzos de control como se muestra en la tabla 4.6, y también se puede observar en la figura 4.3 un comportamiento oscilatorio de sus acciones de control.

En la tabla 4.7 se muestra los desempeños de los dos controladores en *PB*. Se puede observar que el controlador PI off-diagonal en *PB* tiene un mejor desempeño para controlar la salida  $y_2$  mientras que el controlador PI diagonal en *PB* tiene un mejor desempeño para controlar la salida  $y_1$ . Existe un intercambio de prestaciones entre las acciones de control de ambos controladores. Las respuestas de los dos controladores en *PB* se muestran en la figura 4.4.

Los controladores en *PB* de ambos conceptos de diseño tienen un  $J_1(\mathbf{x}^{c1}) \approx J_1(\mathbf{x}^{c2})$  y un  $J_2(\mathbf{x}^{c1}) \approx J_2(\mathbf{x}^{c2})$  como se puede apreciar en la tabla 4.5, a pesar de esto, se puede observar en la figura 4.4 que sus respuestas son muy diferentes. Estas características no son detectables al considerar sólo dos objetivos de diseño y podría ser interesante analizarlas para tomar una decisión final y ofrecer una solución a cada MOP. Por esta razón, y a pesar que este escenario presenta como ventaja un proceso de toma de decisión relativamente sencillo para analizar cada MOP, resulta interesante seguir desagregando los objetivos de diseño para analizar más en detalle las compensaciones que ocurren entre estos, es decir entre las respuestas de los controladores (definir un nuevo escenario en la etapa A).

Controladores PIs off-diagonal			Controladores PIs diagonal		
Parámetros	PA	PB	Parámetros	PB	PC
$K_1^{c2}$	-0.427	-0.353	$K_1^{c1}$	0.185	0.188
$Ti_1^{c2}$	7.49	8.213	$Ti_1^{c1}$	172.4	351.6
$K_2^{c2}$	0.927	0.4544	$K_2^{c1}$	0.435	0.38
$Ti_2^{c2}$	612.8	869.1	$Ti_2^{c1}$	211.6	394.5
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	71.3	140.5	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	140.4	199.6
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	141.9	89.67	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	90.2	70.47
$\sum_{q=1}^2 J_q(\mathbf{x}^{c2})$	213.2	230.17	$\sum_{q=1}^2 J_q(\mathbf{x}^{c1})$	230.6	270.07

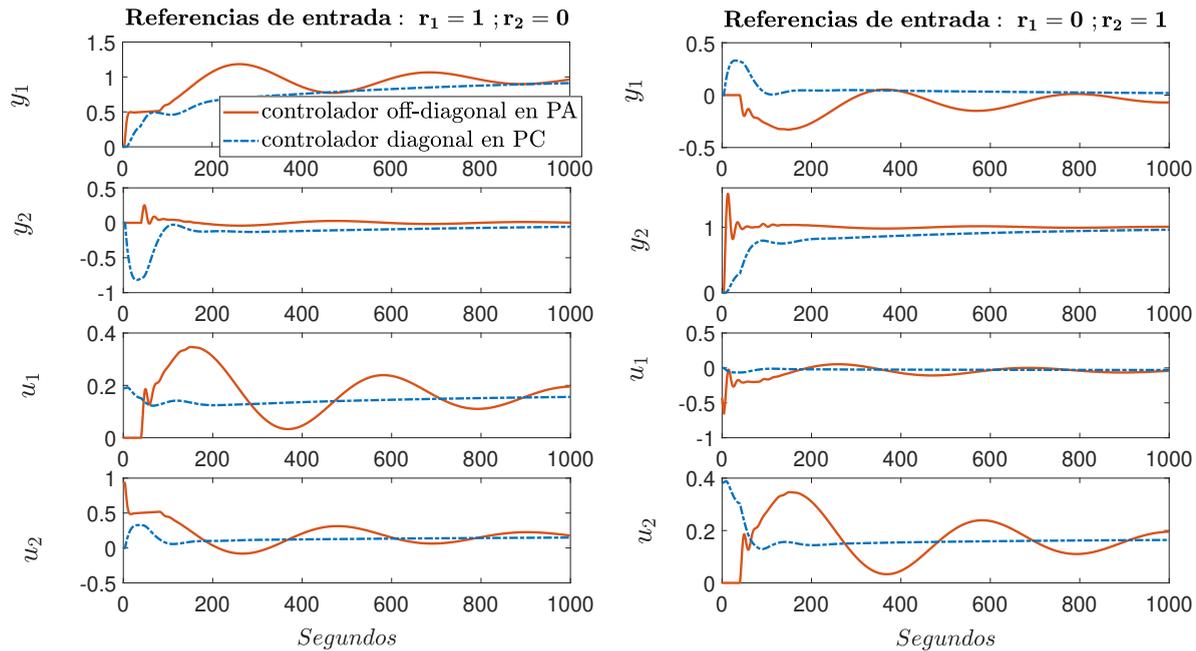
**Tabla 4.5:** Controladores PIs diagonal y off-diagonal en  $PA$ ,  $PB$  y  $PC$ . El desempeño de cada uno se muestra en  $J(\mathbf{x})$ .

Referencias	$f(\cdot)^2$	PI off-diagonal	PI diagonal
		PA	PC
$r_1 = 1$ $r_2 = 0$	$e_1$	<b>44.920</b>	101.652
	$e_2$	<b>0.920</b>	39.301
	$u_1$	35.034	<b>20.523</b>
	$u_2$	62.803	<b>20.134</b>
$r_1 = 0$ $r_2 = 1$	$e_1$	18.262	<b>6.058</b>
	$e_2$	<b>7.609</b>	52.971
	$u_1$	9.291	<b>0.805</b>
	$u_2$	35.034	<b>29.055</b>

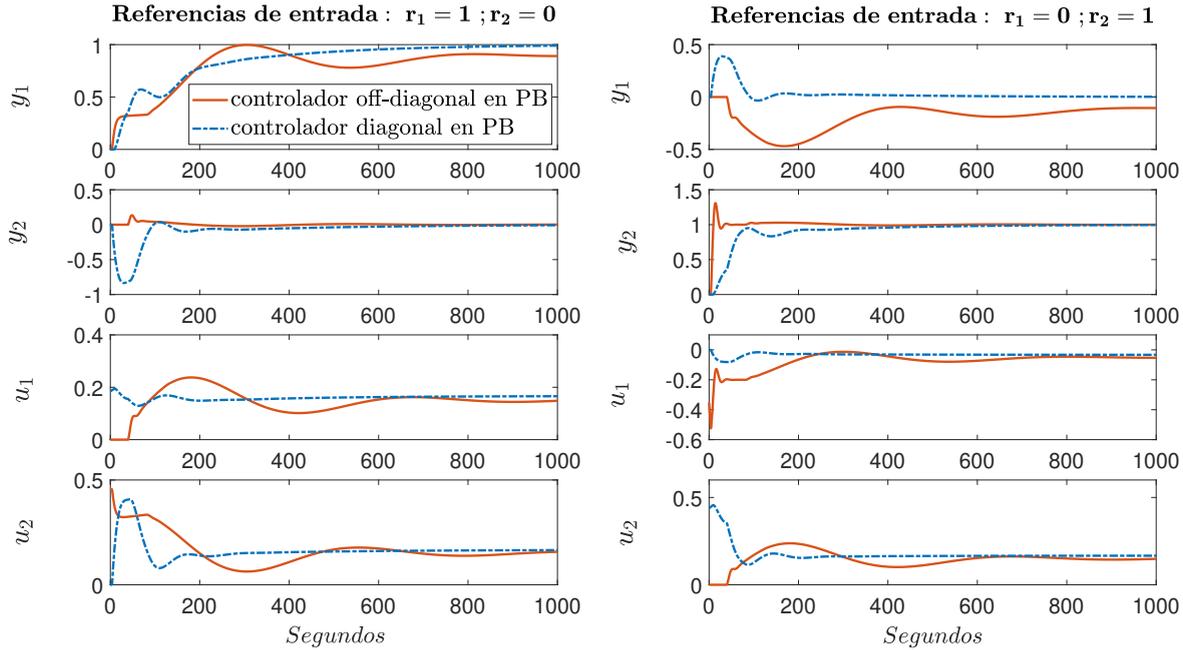
**Tabla 4.6:** Evaluación del ISE y del ISU para los controladores en  $PA$ , y  $PC$ .

Referencias	$f(\cdot)^2$	PI off-diagonal	PI diagonal
		PB	PB
$r_1 = 1$ $r_2 = 0$	$e_1$	82.687	<b>64.581</b>
	$e_2$	<b>0.385</b>	33.065
	$u_1$	<b>23.721</b>	<b>25.677</b>
	$u_2$	33.073	<b>30.106</b>
$r_1 = 0$ $r_2 = 1$	$e_1$	51.01	<b>6.811</b>
	$e_2$	<b>6.804</b>	36.382
	$u_1$	9.239	<b>1.204</b>
	$u_2$	<b>23.721</b>	33.278

**Tabla 4.7:** Evaluación del ISE y del ISU para los dos controladores en  $PB$ .



**Figura 4.3:** Respuestas del sistema con el controlador off-diagonal en *PA* y con el controlador diagonal en *PC*, corresponden a las zonas *A* y *C* respectivamente.



**Figura 4.4:** Respuestas del sistema con los controladores diagonal y off-diagonal en  $PB$ , corresponden a la zona  $B$ .

### Segundo escenario

En este escenario, se proponen dos MOPs con cuatro objetivos de diseño cada uno (etapa A). Los errores de cada salida no se agregan y ahora constituyen dos objetivos parcialmente independientes (ya que aún están agregados los errores de una misma salida), los otros dos objetivos corresponden a los esfuerzos de control de cada entrada. Cada MOP se define como se muestra en (4.20)-(4.28).

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.20)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.21)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} e_{1|r_1=1}^2|_{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} e_{1|r_1=0}^2|_{r_2=1} dt \quad (4.22)$$

$$J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} e_{2|r_1=1}^2|_{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} e_{2|r_1=0}^2|_{r_2=1} dt \quad (4.23)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} u_{1|r_1=1}^2|_{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} u_{1|r_1=0}^2|_{r_2=1} dt \quad (4.24)$$

$$J_4(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} u_{2|r_1=1}^2|_{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} u_{2|r_1=0}^2|_{r_2=1} dt \quad (4.25)$$

$$t_f = 1000 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.26)$$

$$J_i(\mathbf{x}^{ck}) \leq 300, i \in [1, \dots, 4] \quad (4.27)$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, T_{i_1}^{ck}, K_2^{ck}, T_{i_2}^{ck}] \quad (4.28)$$

El desempeño de los controladores PI diagonal y off-diagonal propuestos por el método DRGA se muestran en la tabla 4.8 (etapa B). El controlador DRGA PI diagonal es mejor en tres de los cuatro objetivos de diseño ( $J_1$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ ) comparado con el controlador DRGA PI off-diagonal como se muestra en la tabla 4.8.

Los frentes de Pareto del concepto de diseño diagonal y del concepto off-diagonal se muestran en la figura 4.5 (a) y (b) respectivamente.

La comparación de ambos conceptos de diseño aplicando el indicador de calidad  $QI$  se muestra en la figura 4.6 (a). Los frentes de Pareto con norma  $\sum_{i=1}^4 J_i(\mathbf{x}^{ck})$  de ambos conceptos de diseño se muestran en la figura 4.6 (b) (etapa C).

DRGA PI off-diagonal		DRGA PI diagonal	
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	85.84	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>58.33</b>
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	<b>7.43</b>	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	66.33
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	37.87	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	<b>29.51</b>
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	74.47	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	<b>70.70</b>
$\sum_{q=1}^4 J_q(\mathbf{x}^{c2})$	205.6	$\sum_{q=1}^4 J_q(\mathbf{x}^{c1})$	224.9

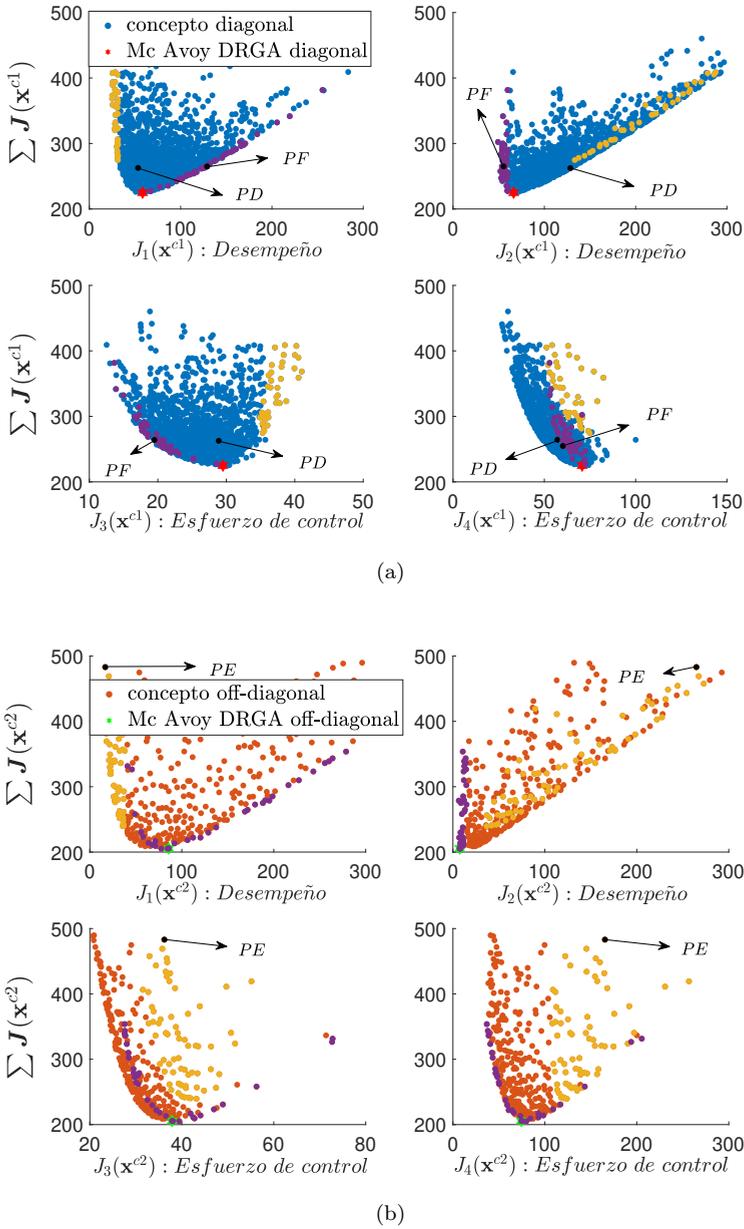
**Tabla 4.8:** Objetivos de diseño para los controladores DRGA PI diagonal y off-diagonal del segundo escenario.

Controlador PI off-diagonal		Controladores PIs diagonal		
<i>Parámetros</i>	<i>PE</i>	<i>Parámetros</i>	<i>PD</i>	<i>PF</i>
$K_1^{c2}$	0.612	$K_1^{c1}$	0.335	0.171
$Ti_1^{c2}$	122.52	$Ti_1^{c1}$	324.31	370.83
$K_2^{c2}$	0.432	$K_2^{c1}$	0.391	0.597
$Ti_2^{c2}$	613.45	$Ti_2^{c1}$	439.70	277.18
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	<b>16.74</b>	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	52.97	126.11
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	264.77	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	<b>126.35</b>	<b>55.25</b>
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	36.20	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	<b>28.54</b>	<b>19.50</b>
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	165.33	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	<b>56.53</b>	<b>63.16</b>
$\sum_{q=1}^4 J_q(\mathbf{x}^{c2})$	483.04	$\sum_{q=1}^4 J_q(\mathbf{x}^{c1})$	264.39	264.03

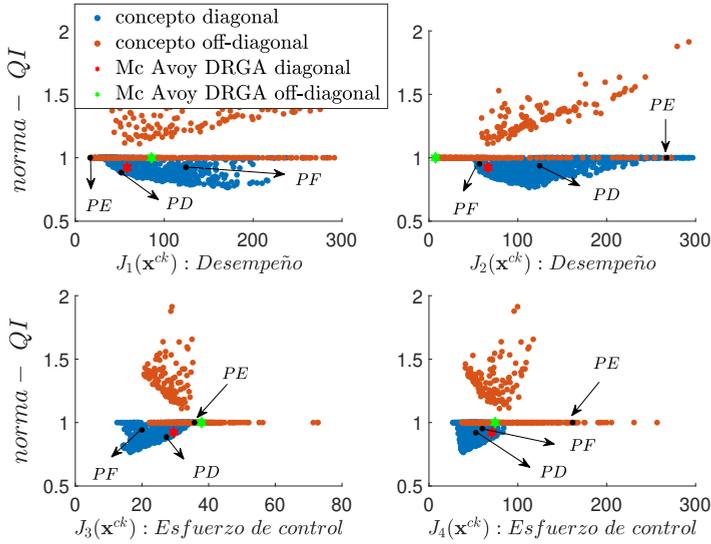
**Tabla 4.9:** Controladores PIs en *PD*, *PE*, *PF* mostrados en las figuras 4.5 y 4.6. Se compara *PE* versus *PD* y también *PE* versus *PF*.

Referencias	$\int(\cdot)^2$	PI off-diagonal	PI diagonal
		<i>PE</i>	<i>PD</i>
$r_1 = 1$	$e_1$	<b>14.83</b>	49.35
	$e_2$	223.56	<b>77.79</b>
$r_2 = 0$	$u_1$	33.22	<b>27.39</b>
	$u_2$	133.61	<b>29.42</b>
$r_1 = 0$	$e_1$	<b>2.12</b>	3.82
	$e_2$	<b>41.42</b>	48.76
$r_2 = 1$	$u_1$	2.99	<b>1.18</b>
	$u_2$	33.22	<b>27.15</b>

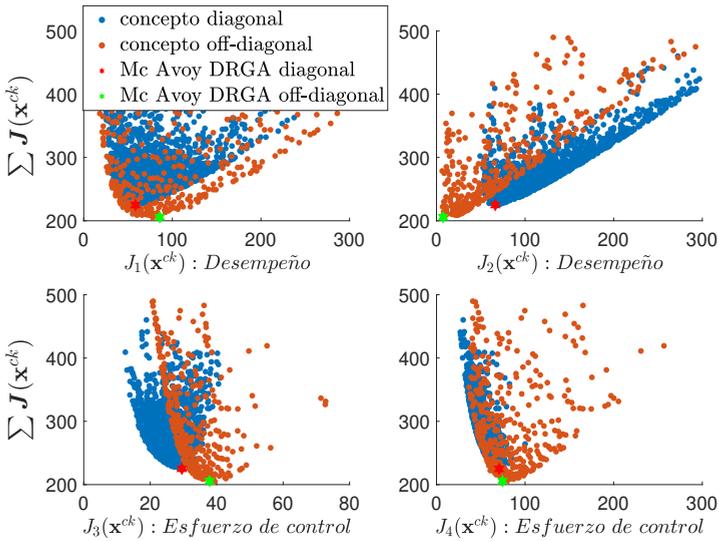
**Tabla 4.10:** Evaluación del ISE e ISU para los controladores en *PD*, *PE*.



**Figura 4.5:** Frentes de Pareto usando level diagrams con norma  $\sum_{i=1}^4 J_i(x^{c^k})$  para el segundo escenario. (a) Concepto diagonal. (b) Concepto off-diagonal.



(a)



(b)

**Figura 4.6:** Comparación de conceptos de diseño para el segundo escenario. Las soluciones  $PD$ ,  $PE$ ,  $PF$  fueron seleccionadas para analizar sus respuestas. (a) Conceptos de diseño usando LD con norma -  $QI$ . (b) Conceptos de diseño usando LD con norma  $\sum_{i=1}^4 J_i(\mathbf{x}^{ck})$ .

Se seleccionaron los controladores en  $PD$  y  $PF$  para el concepto de diseño diagonal. El controlador en  $PD$  se seleccionó en una región con un buen desempeño para  $J_1(\mathbf{x}^{ck})$  y el controlador en  $PF$  prioriza minimizar principalmente  $J_3(\mathbf{x}^{ck})$  y  $J_4(\mathbf{x}^{ck})$ . Así también, se seleccionó el controlador en  $PE$  para el concepto de diseño off-diagonal, este controlador minimiza  $J_1(\mathbf{x}^{ck})$ . Se continuará analizando el controlador DRGA PI off-diagonal que se muestra en la tabla 4.8 y que minimiza  $J_2(\mathbf{x}^{ck})$ . Con estas selecciones efectuadas se intenta analizar el comportamiento del sistema con diferentes preferencias de control (unos controladores con preferencias sobre las prestaciones en las salidas y otros sobre las acciones de control).

Con el enfoque multiobjetivo propuesto el controlador diagonal en  $PD$  mostrado en la tabla 4.9 es mejor en los objetivos  $J_1$ ,  $J_3$ , y  $J_4$ , que el controlador DRGA PI off-diagonal de la tabla 4.8. El controlador DRGA PI off-diagonal minimiza el error en la salida  $y_2$ , es decir minimiza  $J_2$ . Así también el controlador diagonal en  $PD$  es mejor en  $J_2$ ,  $J_3$ , y  $J_4$  comparado con el controlador off-diagonal en  $PE$  (ver tabla 4.9). El controlador en  $PF$  (comparado con el controlador en  $PE$ ) tiene prioridad para minimizar los esfuerzos de control de cada entrada como se muestra en la tabla 4.9. Las respuestas de estos controladores se muestran en la figura 4.7.

En la figura 4.5 (a), las franjas con soluciones de color amarillo en los objetivos  $J_1$  y  $J_2$  revelan que el concepto de diseño diagonal tiene un conflicto entre estos objetivos. El conflicto entre  $J_1$  y  $J_2$  implica que mejorar el desempeño de la salida  $y_1$  tiene como consecuencia empeorar el desempeño de la salida  $y_2$ . Lo opuesto también es verdadero y se muestra en las soluciones color morado en los mismos objetivos. Así también existe conflicto entre los objetivos  $J_1$  y  $J_3$

Referencias	$\int(\cdot)^2$	PI off-diagonal	PI diagonal
		$PE$	$PF$
$r_1 = 1$	$e_1$	<b>14.83</b>	114.37
	$e_2$	223.56	<b>21.97</b>
$r_2 = 0$	$u_1$	33.22	<b>18.53</b>
	$u_2$	133.61	<b>24.59</b>
$r_1 = 0$	$e_1$	<b>2.12</b>	11.94
	$e_2$	41.42	<b>33.48</b>
$r_2 = 1$	$u_1$	2.99	<b>0.984</b>
	$u_2$	<b>33.22</b>	38.66

**Tabla 4.11:** Evaluación del ISE e ISU para los controladores en  $PD$  y  $PF$ .

y entre  $J_2$  y  $J_4$ , es decir, entre cada una de sus entradas-salidas emparejadas (ver controladores  $PD$  y  $PF$  en la tabla 4.9).

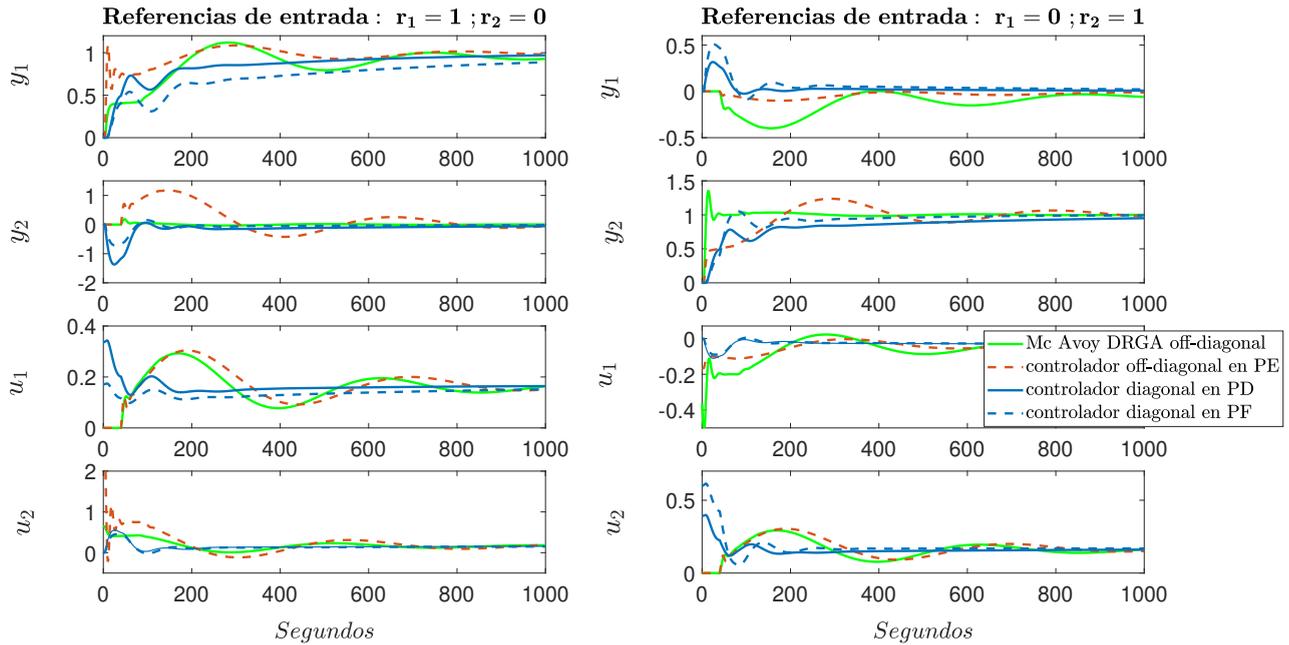
La sintonización de los parámetros de los controladores diagonales en  $PD$  y  $PF$  así como sus desempeños y del controlador off-diagonal  $PE$  (con el mejor desempeño en  $J_1$ ) se muestra en la tabla 4.9.

En las franjas (soluciones) color amarillo de la figura 4.5 (b) se puede observar que para el concepto de diseño off-diagonal también existe conflicto entre los desempeños de las salidas  $y_1$  y  $y_2$ , es decir entre  $J_1$  y  $J_2$ . La relación que existe entre los desempeños de cada salida y sus esfuerzos de control se muestran en las franjas color morado en los objetivos  $(J_1, J_3)$  y  $(J_2, J_4)$ . En la tabla 4.8 se puede observar que los mejores desempeños alcanzados por la salida  $y_2$  corresponden a grandes esfuerzos de control (ver  $J_2$  y  $J_4$  del controlador DRGA PI off-diagonal). De igual manera ocurre entre los mejores desempeños de la salida  $y_1$  y su esfuerzo de control  $u_1$  (ver  $J_1$  y  $J_3$  del controlador  $PE$  en la tabla 4.9). Estos conflictos se pueden observar también en las respuestas del sistema mostradas en la figura 4.7.

Un aspecto interesante que se empezó a evidenciar en el primer escenario, y que ahora en este segundo escenario se muestra con mayor claridad en la figura 4.6 (a), es que al comparar los conceptos de diseño con el indicador  $QI$  se puede observar que existe una región amplia en donde el concepto diagonal es preferible al concepto off-diagonal, esta región corresponde a valores donde  $QI < 1$  para dicho concepto.

Se evaluó el ISE e ISU para los controladores  $PD$ ,  $PE$ ,  $PF$  (ver tablas 4.10 y 4.11). Aunque es posible observar los errores en cada una de las salidas y sus esfuerzos de control para cada referencia de entrada  $r_1$  y  $r_2$ , no es factible en este escenario conocer la relación de conflictividad de cada uno de ellos de manera totalmente independiente. Este escenario pone de manifiesto un proceso de toma de decisión más complejo pero tiene la ventaja que brinda mayor información acerca de las compensaciones que ocurren entre los objetivos de diseño de cada MOP en comparación con primer escenario. En este escenario se pone de manifiesto que el concepto off-diagonal es preferible sólo cuando se tiene como prioridad minimizar  $J_2$ .

Para analizar los conflictos y prestaciones de las salidas y acciones de control para cada referencia  $r_1$  y  $r_2$  de manera totalmente independiente es factible generar un escenario con 8 objetivos de diseño, planteando así el tercer escenario (regresar a la etapa A de la metodología propuesta y repetir el proceso).



**Figura 4.7:** Respuestas del sistema para los controladores seleccionados en *PD*, *PC*, *PF*, comparados con el controlador DRGA off-diagonal propuesto en [104].

### Tercer escenario

En este escenario se plantean dos MOPs con 8 objetivos de diseño cada uno (etapa A). En este escenario se analizan de manera completamente independiente los errores asociados a cada una de las salidas y los esfuerzos de control de cada una de las entradas. Una señal tipo escalón se aplica en cada una de las referencias  $r_1$  y  $r_2$ . Por lo tanto, se define cada MOP como se muestra en (4.29)-(4.37).

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck}), J_5(\mathbf{x}^{ck}), J_6(\mathbf{x}^{ck}), J_7(\mathbf{x}^{ck}), J_8(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.30)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} e_1^2|_{r_1=1}^{r_2=0} dt; \quad J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} e_2^2|_{r_1=1}^{r_2=0} dt \quad (4.31)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} e_1^2|_{r_1=0}^{r_2=1} dt; \quad J_4(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} e_2^2|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.32)$$

$$J_5(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} u_1^2|_{r_1=1}^{r_2=0} dt; \quad J_6(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} u_2^2|_{r_1=1}^{r_2=0} dt \quad (4.33)$$

$$J_7(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} u_1^2|_{r_1=0}^{r_2=1} dt; \quad J_8(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} u_2^2|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.34)$$

$$t_f = 1000 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.35)$$

$$[J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck}), J_5(\mathbf{x}^{ck}), J_6(\mathbf{x}^{ck}), J_7(\mathbf{x}^{ck}), J_8(\mathbf{x}^{ck})] \leq 300 \quad (4.36)$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, T_{i_1}^{ck}, K_2^{ck}, T_{i_2}^{ck}] \quad (4.37)$$

Los desempeños de los controladores DRGA PIs diagonal y off-diagonal se muestran en la tabla 4.12 (etapa B). Los frentes de Pareto de cada MOP planteado para los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal se muestran en las figuras 4.8 y 4.9 respectivamente (etapa C).

Las franjas (soluciones) amarillas y moradas de cada concepto de diseño indican los conflictos entre los objetivos de diseño (ver figuras 4.8 y 4.9). Para el concepto de diseño off-diagonal se observa un conflicto entre  $J_5(\mathbf{x}^{c2})$  y  $J_7(\mathbf{x}^{c2})$ , es decir, mejorar uno significa empeorar otro. El conflicto entre estos objetivos permite observar que para el concepto de diseño off-diagonal el esfuerzo

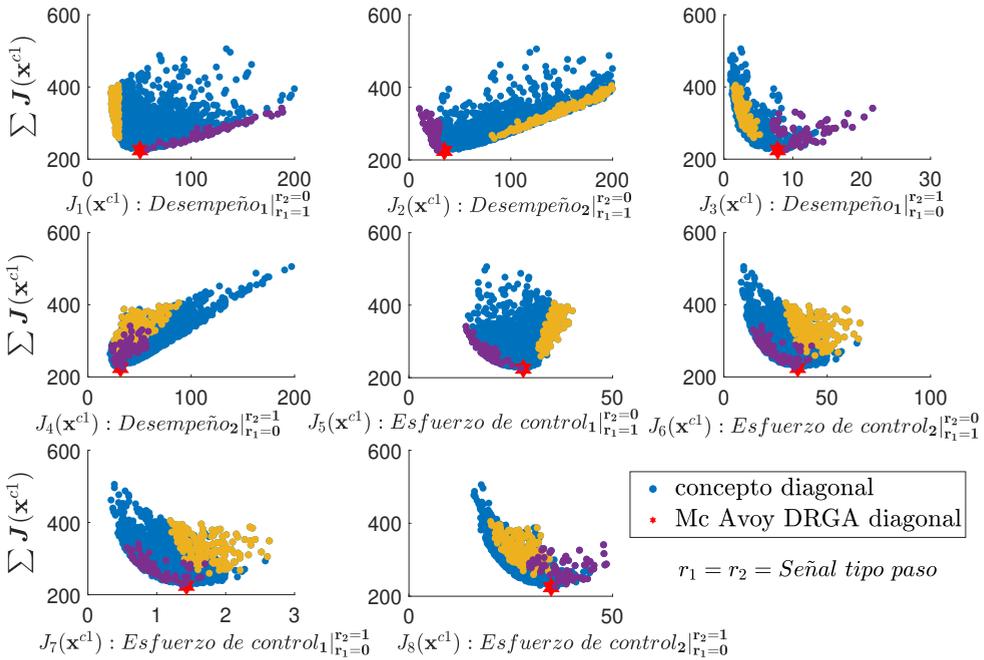
de control  $u_1$  será mayor cuando ingresa la señal tipo escalón en  $r_1$ , y menor cuando ingresa en  $r_2$ . En los objetivos  $J_6(\mathbf{x}^{c1})$  y  $J_8(\mathbf{x}^{c1})$ , que representan el esfuerzo de control  $u_2$  del concepto de diseño diagonal, se puede observar un nivel de conflictividad menor que en el caso del concepto off-diagonal.

Es importante enfatizar que esta información estaba oculta en el primer y segundo escenario. Si un diseñador o ingeniero de control desea conocer este tipo de detalles en las prestaciones del sistema debería analizar este escenario. Para ambos conceptos de diseño, los objetivos  $J_1(\mathbf{x}^{ck})$  y  $J_3(\mathbf{x}^{ck})$  representan el error de seguimiento de referencia en la salida  $y_1$  cuando se aplica en las entradas  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente una señal tipo escalón unitario, de manera equivalente ocurre con  $J_2(\mathbf{x}^{ck})$  y  $J_4(\mathbf{x}^{ck})$  que representa el error de seguimiento de referencia en la salida  $y_2$ . Cada uno de los objetivos mencionados anteriormente permiten analizar de manera independiente el comportamiento de las salidas del sistema para seguimiento de una referencia, si bien es cierto se puede observar en cada frente de Pareto que estos objetivos no están en conflicto, esta información no se podía conocer a priori, sino hasta llegar a analizar este escenario.

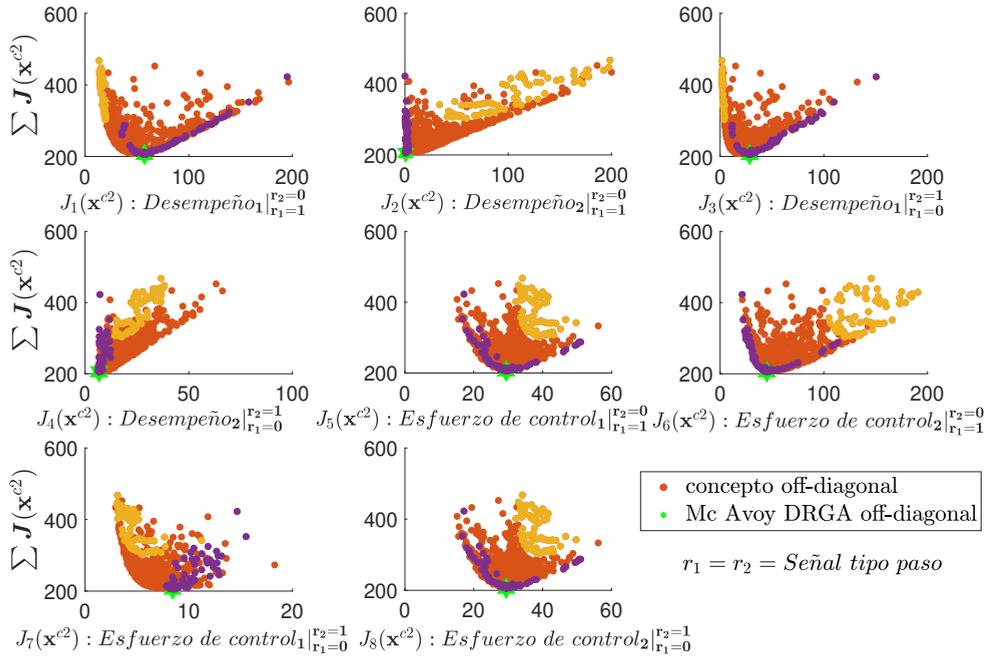
En la figura 4.7 es importante analizar que los esfuerzos de control de cada controlador seleccionado están oscilando. Para garantizar que los controladores óptimos mejoren este aspecto, es posible volver a la etapa A de la metodología y proponer un nuevo escenario con nuevos objetivos de diseño.

DRGA PI off-diagonal		DRGA PI Diagonal	
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	57.34	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>50.5</b>
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.648</b>	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	34.78
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	28.49	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	<b>7.83</b>
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	<b>6.78</b>	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	31.55
$J_5(\mathbf{x}^{c2})$	29.43	$J_5(\mathbf{x}^{c1})$	<b>28.08</b>
$J_6(\mathbf{x}^{c2})$	45.04	$J_6(\mathbf{x}^{c1})$	<b>35.77</b>
$J_7(\mathbf{x}^{c2})$	8.44	$J_7(\mathbf{x}^{c1})$	<b>1.43</b>
$J_8(\mathbf{x}^{c2})$	<b>29.43</b>	$J_8(\mathbf{x}^{c1})$	34.93
$\sum_{q=1}^8 J_q(\mathbf{x}^{c2})$	205.6	$\sum_{q=1}^8 J_q(\mathbf{x}^{c1})$	224.9

**Tabla 4.12:** Objetivos de diseño del escenario 3 para los controladores DRGA PIs diagonal y off-diagonal.



**Figura 4.8:** Frente de Pareto usando norma  $\sum_{i=1}^8 J_i(\mathbf{x}^{ck})$  para el concepto de diseño diagonal.



**Figura 4.9:** Frente de Pareto usando norma  $\sum_{i=1}^8 J_i(x^{c^k})$  para el concepto de diseño off-diagonal.

### Cuarto escenario

En este escenario se plantean nuevos objetivos de diseño para cada MOP (se plantean dos MOPs con cuatro objetivos de diseño para cada uno, etapa A). Se aplica la integral del valor absoluto del error (IAE), como índice de desempeño de las salidas y la integral del valor absoluto de la derivada de la señal de control (IADU), para las acciones de control. Se pretende con el IAE dar un mejor sentido físico al análisis del error para seguimiento de referencia y evitar analizar señales de error elevadas al cuadrado (ISE) que son menos intuitivas. Para intentar disminuir las oscilaciones de las acciones de control se propone aplicar el IADU. Cada MOP se plantea como se muestra en (4.38)-(4.46).

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.39)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_1| \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} |e_1| \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.40)$$

$$J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_2| \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} |e_2| \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.41)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.42)$$

$$J_4(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{r_1=1}^{r_2=0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{r_1=0}^{r_2=1} dt \quad (4.43)$$

$$t_f = 1000 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.44)$$

$$[J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck})] < 500; [J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck})] < 2 \quad (4.45)$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, T_{i_1}^{ck}, K_2^{ck}, T_{i_2}^{ck}] \quad (4.46)$$

Se efectuó el proceso de optimización de cada MOP (etapa B), y se muestra en la tabla 4.13 los objetivos optimizados de tres controladores ( $PH$ ,  $PJ$ ,  $PK$ ). Estos controladores se seleccionaron (de acuerdo a las preferencias del diseñador) en los frentes de Pareto de ambos conceptos de diseño que se muestran en la figura 4.10 (etapa C). Las franjas (soluciones) en color amarillo y morado indican las compensaciones que ocurren entre los objetivos de diseño de cada MOP. Se seleccionó los controladores en  $PH$  y  $PJ$  para el concepto de diseño diagonal y también el controlador en  $PK$  para el concepto de diseño off-diagonal. El controlador diagonal en  $PH$  tiene como preferencia minimizar

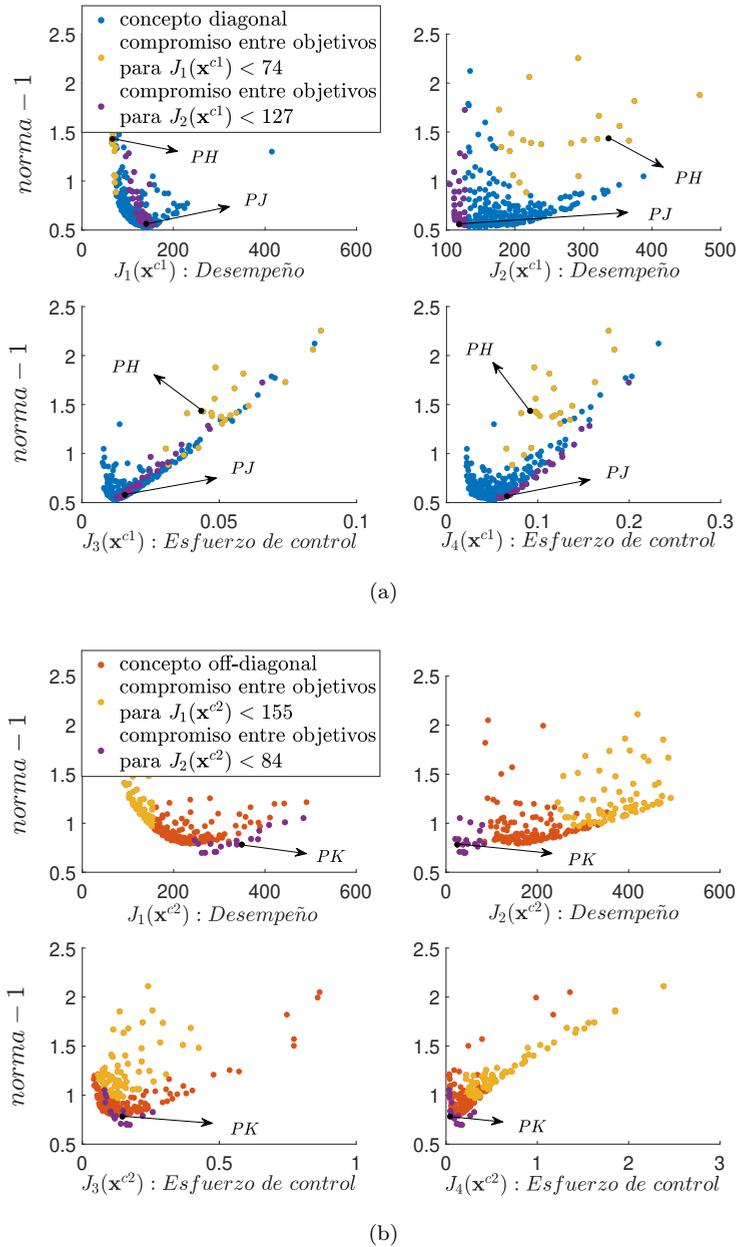
$J_1(\mathbf{x}^{ck})$  y el controlador diagonal en  $PJ$  fue seleccionado como una solución de compromiso porque tiene un mejor desempeño en tres objetivos de diseño comparado con los controladores  $PH$  y  $PK$  (ver tabla 4.13). El controlador off-diagonal en  $PK$  prioriza minimizar  $J_2(\mathbf{x}^{ck})$ . Para el concepto diagonal, el indicador  $QI$  presenta valores bajo la unidad ( $QI < 1$ ), y para el concepto off-diagonal está sobre la unidad ( $QI > 1$ ). Esto muestra que desde el enfoque multiobjetivo propuesto el concepto diagonal es ampliamente preferible al concepto off-diagonal como se muestra en la figura 4.11 (a). El concepto off-diagonal solo sería preferible en la región donde  $J_2(\mathbf{x}^{ck}) < 104.8$ , ya que esta región solo la cubre el concepto de diseño off-diagonal. El IAE e IADU para los controladores  $PH$ ,  $PJ$ ,  $PK$  (seleccionados en las figuras 4.10 y 4.11) se muestran en la tabla 4.14. Las respuestas de estos controladores ahora tienen menores oscilaciones con respecto a las respuestas del sistema en el segundo y tercer escenario (ver figura 4.12). En este escenario, se puede evidenciar cómo modificar los objetivos de diseño puede cambiar drásticamente las preferencias del diseñador, para seleccionar una determinada combinación de lazos entrada-salida para controlar el sistema MIMO propuesto.

Off-diagonal PI		Diagonal PIs		
<i>Parámetros</i>	<i>PK</i>	<i>Parámetros</i>	<i>PH</i>	<i>PJ</i>
$K_1^{c2}$	-0.3948	$K_1^{c1}$	0.3527	0.1417
$Ti_1^{c2}$	9.3481	$Ti_1^{c1}$	102.04	98.89
$K_2^{c2}$	0.3649	$K_2^{c1}$	0.2003	0.2849
$Ti_2^{c2}$	419.98	$Ti_2^{c1}$	209.13	99.17
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	338.37	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>66.06</b>	140.57
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	<b>24.80</b>	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	336.46	118.53
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	0.1460	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	0.0434	<b>0.0146</b>
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	0.0809	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	0.0916	<b>0.0662</b>
$\sum_{q=1}^4 J_q(\mathbf{x}^{c2})$	363.40	$\sum_{q=1}^4 J_q(\mathbf{x}^{c1})$	402.66	<b>259.18</b>

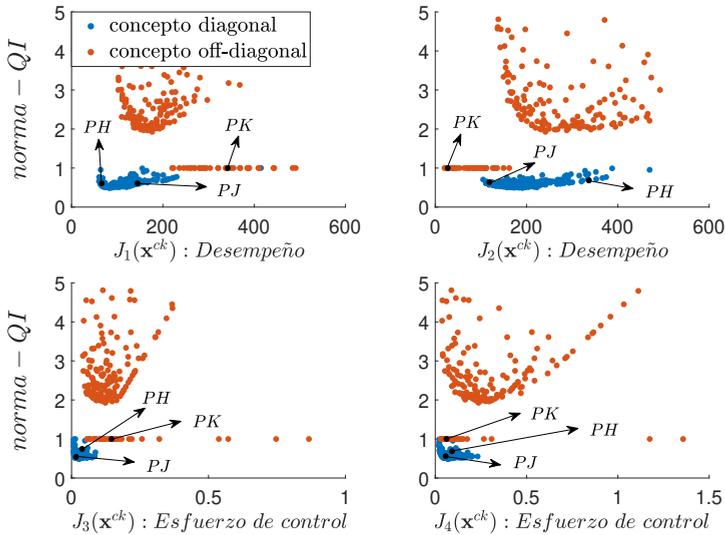
**Tabla 4.13:** Controladores en *PH*, *PJ*, *PK* seleccionados en las figura 4.10 y 4.11.

Referencias	$\int  \cdot  dt$	Off-diagonal PI	Diagonal PIs	
		<i>PK</i>	<i>PH</i>	<i>PJ</i>
$r_1 = 1$	$e_1$	174.03	<b>53.20</b>	116.55
	$e_2$	<b>9.05</b>	168.99	60.30
$r_2 = 0$	$u_1$	0.1927	0.1415	<b>0.0284</b>
	$u_2$	<b>0.2116</b>	0.3785	0.2232
$r_1 = 0$	$e_1$	164.55	<b>13.06</b>	24.22
	$e_2$	<b>15.96</b>	167.67	58.42
$r_2 = 1$	$u_1$	0.5370	0.0757	<b>0.0446</b>
	$u_2$	0.1927	<b>0.0795</b>	0.1077

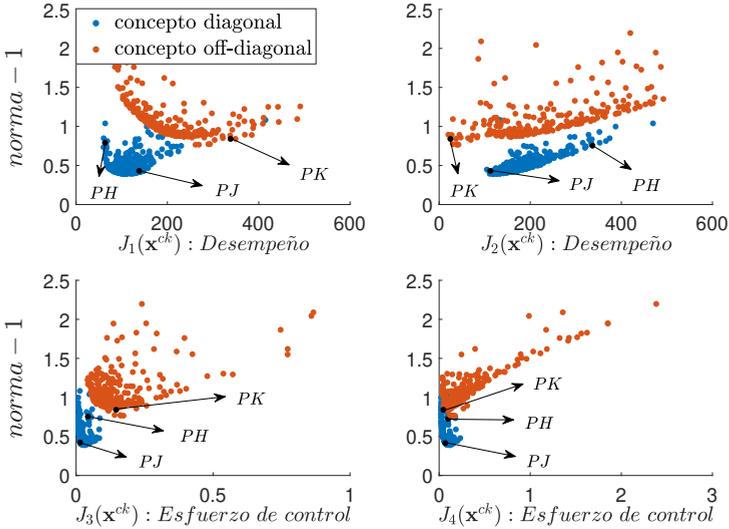
**Tabla 4.14:** Evaluación del IAE e IADU para los controladores seleccionados en *PH*, *PJ* y *PK*.



**Figura 4.10:** Frentes de Pareto usando norma-1 para los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal. (a) Concepto diagonal. (b) Concepto off-diagonal.

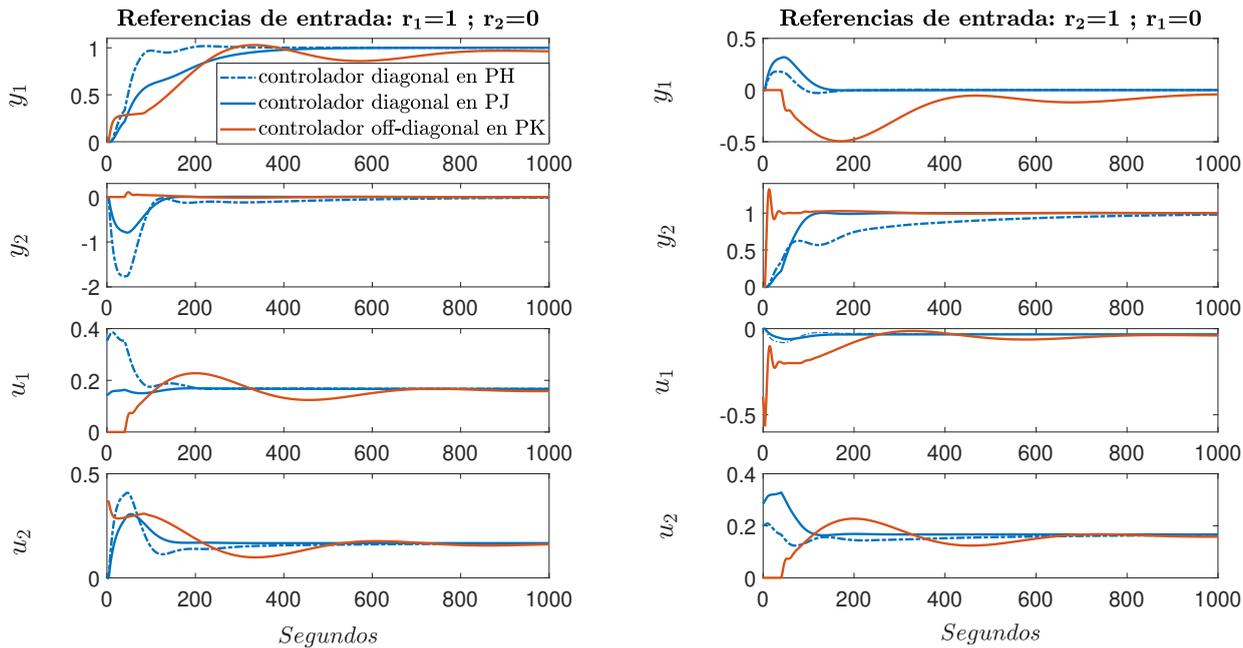


(a)



(b)

**Figura 4.11:** Comparación de conceptos de diseño diagonal y off-diagonal con el indicador  $QI$ . Se muestran las soluciones donde  $QI < 5$ . (a) LD con norma- $QI$ . (b) LD con norma-1.



**Figura 4.12:** Respuestas del sistema con los controladores seleccionados en los frentes de Pareto del cuarto escenario.

### 4.2.2 Ejemplo 2: sistema 3 x 3

En este ejemplo se analiza un sistema con tres entradas y tres salidas propuesto en [68] cuyo modelo se muestra en (4.47). Las salidas del sistema son  $y_1, y_2, y_3$ , y las entradas son  $u_1, u_2, u_3$  que representan las acciones de control del sistema, las constantes de tiempo y retardos están dados en segundos. Para realizar el control descentralizado de este sistema la metodología RGA propone elegir el lazo de control  $LP_1$ , formado por:  $y_1 - u_3/y_2 - u_2/y_3 - u_1$  como se muestra en (4.48). Sin embargo la metodología denominada RNGA propone realizar el lazo de control  $LP_2 : y_1 - u_2/y_2 - u_3/y_3 - u_1$  como se muestra en (4.49). Es posible observar como estas dos metodologías de selección de lazos entrada-salida, de nuevo, difieren en la selección de los lazos de control para el mismo sistema MIMO.

En general, para un proceso  $3 \times 3$  existen otras combinaciones para la asignación de los lazos de control, en total existen  $3! = 6$  posibles combinaciones de lazos entrada-salida. En este caso particular, algunas de las combinaciones no consideradas tienen un índice de Niederlinski positivo (como por ejemplo el control diagonal con un NI=302.38), pero debido a que estas combinaciones tienen valores de RGA negativos (que indica inestabilidad en el sistema cuando alguno de los lazos pasa a bucle abierto), no se han tenido en cuenta en la comparación. Con el objetivo de reducir el número de conceptos de diseño y el coste computacional asociado al estudio de los lazos de control, se comparan solo las dos alternativas que recomiendan RGA y NRGGA.

De manera general, si se conoce un modelo lineal de un sistema multivariable (o al menos las ganancias estáticas), puede ser útil indagar inicialmente las ganancias relativas del sistema (RGA), para analizar con la metodología propuesta solamente aquellas combinaciones de lazos de control donde los elementos de RGA sean mayores que cero (ya que estos lazos de control en principio son los viables). Esto reduce el conjunto de combinaciones de lazos de control que posibilitan el control del sistema y, por tanto, se limita el número de MOPs a estudiar.

Para comprobar el funcionamiento de cada combinación de lazos de control, se plantea en [68] el diseño de controladores PID de un grado de libertad cuyo ajuste está basado en reglas de sintonización de IMC-PID. Para evaluar el desempeño de los controladores se aplica en [68] el indicador ISE (integral del error al cuadrado), los resultados de simulación demuestran que  $LP_2$  es significativamente mejor que  $LP_1$ .

Para realizar un estudio más profundo del problema de como seleccionar lazos de control, teniendo en consideración preferencias más acordes con las del diseñador, se aplica la metodología multiobjetivo propuesta en el capítulo 3. Se establecen dos conceptos de diseño  $\mathbf{c}_1$  (lazo de control  $LP_1$ ) y  $\mathbf{c}_2$  (lazo de control  $LP_2$ ) como se muestra en (4.50)-(4.61). Cada lazo entrada-salida tiene asociado el diseño de controladores PID con un grado de libertad y con filtro derivativo ( $N=100$ ).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-9s}}{6s^2+17s+1} & \frac{-9e^{-5s}}{s^2+4s+1} & \frac{13e^{-3s}}{3s^2+35s+1} \\ \frac{-5e^{-13s}}{2s^2+19s+1} & \frac{8e^{-2s}}{s^2+33s+1} & \frac{7e^{-5s}}{s^2+3s+1} \\ \frac{-16e^{-3s}}{s^2+5s+1} & \frac{3e^{-7s}}{s^2+14s+1} & \frac{e^{-11s}}{3s^2+25s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.0054 & 0.3981 & \mathbf{0.6073} \\ -0.0992 & \mathbf{0.6912} & 0.4080 \\ \mathbf{1.1046} & -0.0893 & -0.0153 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\Lambda_\Phi = \begin{bmatrix} -0.0024 & \mathbf{0.9237} & 0.0787 \\ -0.0063 & 0.0829 & \mathbf{0.9235} \\ \mathbf{1.0088} & -0.0066 & -0.0022 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{c}_1 = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_1}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_1}, C_{y_3, \hat{u}_3}^{c_1}] \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_1} = K_1^{c_1} \left( 1 + \frac{1}{Ti_1^{c_1}s} + Td_1^{c_1} \frac{N}{1 + N/s} \right) \quad (4.52)$$

$$C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_1} = K_2^{c_1} \left( 1 + \frac{1}{Ti_2^{c_1}s} + Td_2^{c_1} \frac{N}{1 + N/s} \right) \quad (4.53)$$

$$C_{y_3, \hat{u}_3}^{c_1} = K_3^{c_1} \left( 1 + \frac{1}{Ti_3^{c_1}s} + Td_3^{c_1} \frac{N}{1 + N/s} \right) \quad (4.54)$$

$$\mathbf{x}^{c_1} = [K_1^{c_1}, Ti_1^{c_1}, Td_1^{c_1}, K_2^{c_1}, Ti_2^{c_1}, Td_2^{c_1}, K_3^{c_1}, Ti_3^{c_1}, Td_3^{c_1}] \quad (4.55)$$

$$\mathbf{c}_2 = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_2}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_2}, C_{y_3, \hat{u}_3}^{c_2}] \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$C_{y_1, \hat{u}_1}^{c2} = K_1^{c2} \left( 1 + \frac{1}{Ti_1^{c2}s} + Td_1^{c2} \frac{N}{1 + N/s} \right) \quad (4.58)$$

$$C_{y_2, \hat{u}_2}^{c2} = K_2^{c2} \left( 1 + \frac{1}{Ti_2^{c2}s} + Td_2^{c2} \frac{N}{1 + N/s} \right) \quad (4.59)$$

$$C_{y_3, \hat{u}_3}^{c2} = K_3^{c2} \left( 1 + \frac{1}{Ti_3^{c2}s} + Td_3^{c2} \frac{N}{1 + N/s} \right) \quad (4.60)$$

$$\mathbf{x}^{c2} = [K_1^{c2}, Ti_1^{c2}, Td_1^{c2}, K_2^{c2}, Ti_2^{c2}, Td_2^{c2}, K_3^{c2}, Ti_3^{c2}, Td_3^{c2}] \quad (4.61)$$

Continuando con la aplicación de la metodología propuesta en este documento, dos MOPs son planteados (de acuerdo a la etapa A de la figura 3.2),  $k = 1$  corresponde a la combinación de lazos de control  $LP_1$  y  $k = 2$  corresponde a la combinación de lazos de control  $LP_2$  como se muestra en las ecuaciones (4.62)-(4.68). Para cada MOP se plantean seis objetivos de diseño, esto permite realizar una evaluación independiente de los desempeños de cada una de las salidas así como de sus esfuerzos de control (es decir sin agregarlos, etapa B). Para este ejemplo,  $e_\eta$  representa el error de cada salida y  $u_\eta$  el esfuerzo de control de cada entrada.

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.62)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck}), J_5(\mathbf{x}^{ck}), J_6(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.63)$$

$$J_\eta(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{r_1=1}^{r_2, r_3=0} dt + \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{r_2=1}^{r_1, r_3=0} dt + \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{r_3=1}^{r_1, r_2=0} dt \quad (4.64)$$

$$J_{\eta+3}(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{r_1=1}^{r_2, r_3=0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{r_2=1}^{r_1, r_3=0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{r_3=1}^{r_1, r_2=0} dt \quad (4.65)$$

$$\eta = 1, 2 \text{ y } 3$$

$$t_f = 1000 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.66)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) \leq 400, J_2(\mathbf{x}^{ck}) \leq 400, J_3(\mathbf{x}^{ck}) \leq 300, J_4(\mathbf{x}^{ck}) \leq 1, J_5(\mathbf{x}^{ck}) \leq 1, J_6(\mathbf{x}^{ck}) \leq 0.5 \quad (4.67)$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, Ti_1^{ck}, Td_1^{ck}, K_2^{ck}, Ti_2^{ck}, Td_2^{ck}, K_3^{ck}, Ti_3^{ck}, Td_3^{ck}] \quad (4.68)$$

Los límites de  $\mathbf{x}^{ck}$  se generan teniendo en consideración los controladores de referencia propuestos en [68] y se muestran en la tabla 4.15.

Límites de $\mathbf{x}^{ck}$									
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$Ti_1^{c1}$	$Td_1^{c1}$	$K_2^{c1}$	$Ti_2^{c1}$	$Td_2^{c1}$	$K_3^{c1}$	$Ti_3^{c1}$	$Td_3^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.01	1	0.01	0.01	1	0.01	-1	1	0.01
$\overline{\mathbf{x}}^{c1}$	1	50	1	1	50	1	-0.01	50	1
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$Ti_1^{c2}$	$Td_1^{c2}$	$K_2^{c2}$	$Ti_2^{c2}$	$Td_2^{c2}$	$K_3^{c2}$	$Ti_3^{c2}$	$Td_3^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	-1	1	0.01	0.01	1	0.01	-1	1	0.01
$\overline{\mathbf{x}}^{c2}$	-0.01	50	1	1	50	1	-0.01	50	1

**Tabla 4.15:** Límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  para el segundo ejemplo.

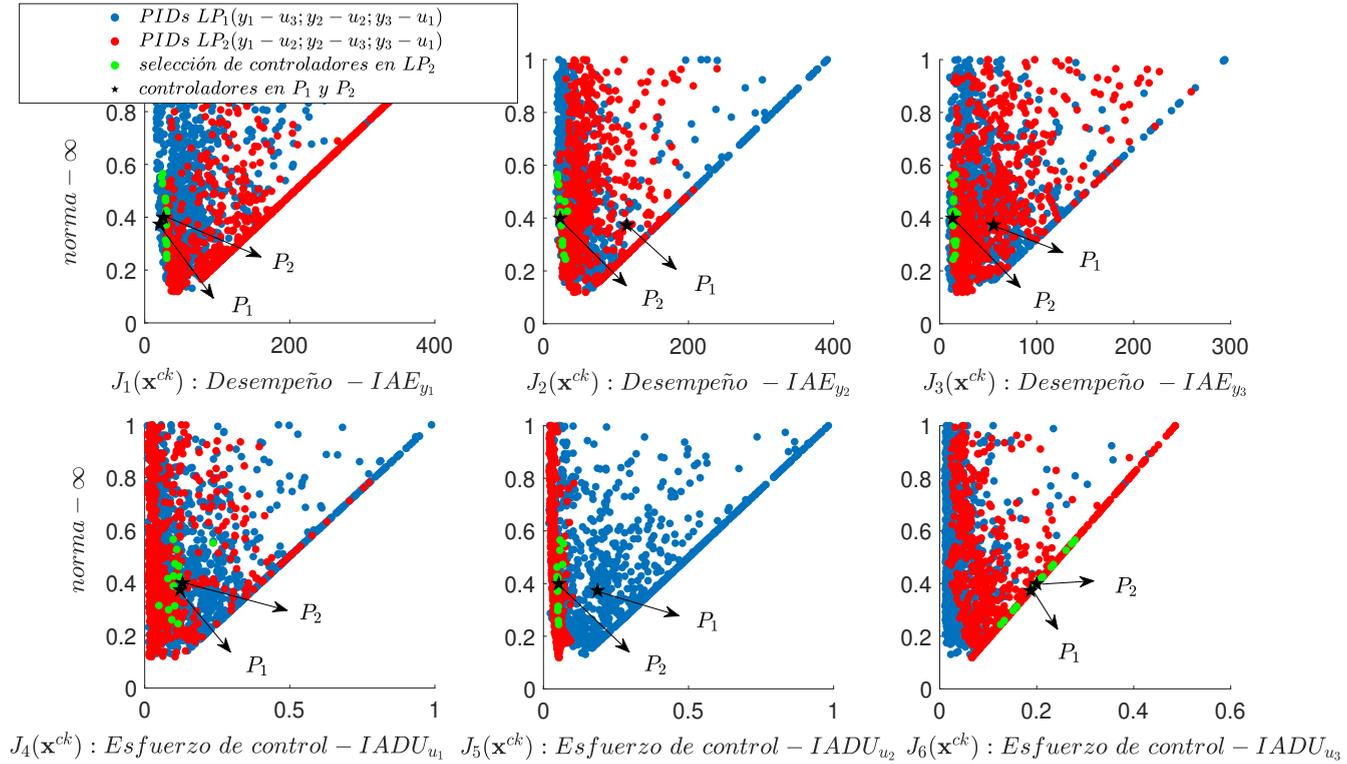
En la figura 4.13 se muestran los frentes de Pareto para cada lazo de control  $LP_1$  y  $LP_2$  (etapa C). Un aspecto a destacar es que es posible en ambas combinaciones de lazos entrada-salida encontrar controladores con buen rendimiento para alguno de los objetivos de diseño de forma independiente. La mayor diferencia puede ser apreciada en el objetivo  $J_1$ , donde  $LP_1$  puede conseguir un mejor desempeño comparado con  $LP_2$ . La solución  $P_1$  fue elegida del concepto de diseño  $LP_1$  y se observa que existe un conflicto entre los objetivos  $J_1, J_2, J_3$ , es decir, mejorar el desempeño de la salida  $y_1$  tiene como efecto empeorar el desempeño de las salidas  $y_2$  y también de  $y_3$ . Esta situación no ocurre con el lazo de control  $LP_2$ , donde es posible encontrar una zona de compromiso (soluciones en color verde:  $J_1 < 30.5, J_2 < 33.2, J_3 < 23.8$ ), donde existen soluciones (controladores) con desempeños satisfactorios para las tres salidas del sistema. La solución  $P_2$  se seleccionó de esta zona, es posible observar en la figura 4.13 que esta solución no presenta conflicto entre los objetivos de diseño  $J_1, J_2, J_3$ , pero si entre estos y los esfuerzos de control  $J_4, J_5, J_6$  (especialmente con  $u_3$ ). Con respecto a los esfuerzos de control se observa en los frentes de Pareto que ambos controladores ( $P_1$  y  $P_2$ ) son muy próximos entre sí para  $u_1$  y  $u_3$ , pero la acción de control  $u_2$  del controlador en  $P_2$  es menor que la del controlador en  $P_1$ .

En la tabla 4.16 se muestra el desempeño de las salidas del sistema y los esfuerzos de control para las soluciones  $P_1$  y  $P_2$  seleccionadas en cada frente de Pareto. La figura 4.14 muestra las salidas del sistema. Se puede observar que el controlador en  $P_1$  es ligeramente mejor que el controlador en  $P_2$  para controlar la salida  $y_1$ , pero el controlador en  $P_2$  presenta una notable mejora

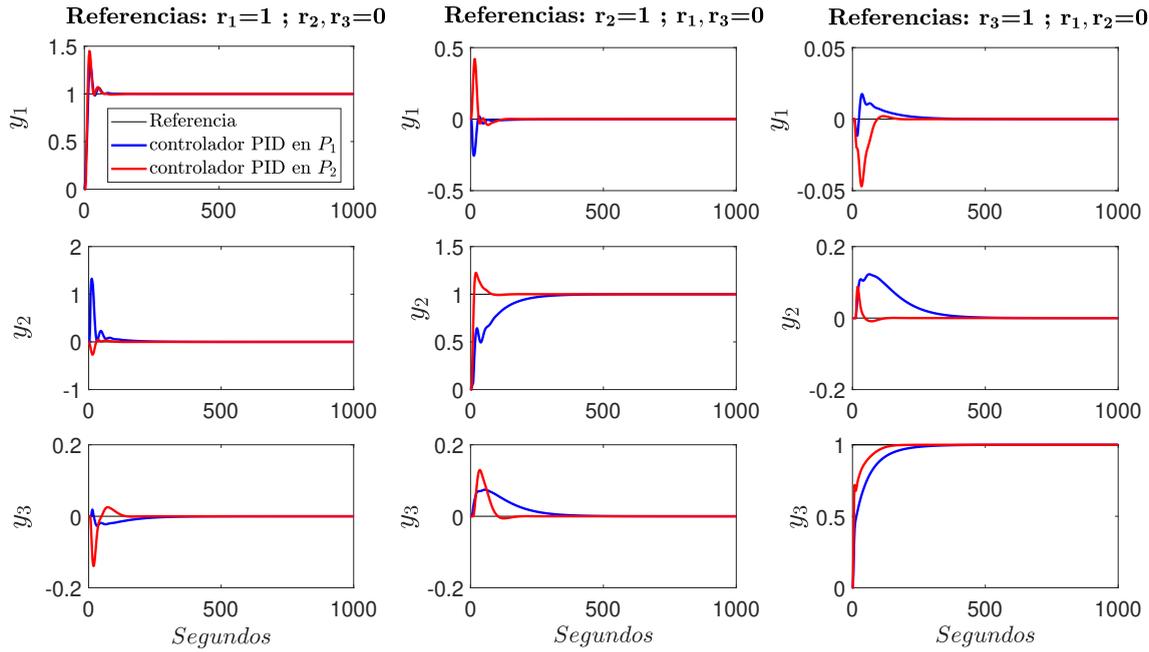
sobre  $P_1$  para controlar las salidas  $y_2$  e  $y_3$ . En la figura 4.15 se muestran los esfuerzos de control de cada controlador  $P_1$  y  $P_2$ . Nuevamente en este ejemplo se puede apreciar que solo teniendo en cuenta las preferencias del diseñador es posible decidirse por un lazo de control u otro, pues ninguno de los dos es mejor (domina) al otro. En el caso que un diseñador prefiera soluciones que minimizen el error de la salida  $y_1$  podría elegir la combinación de lazos de control  $LP_1$  o si prefiere minimizar el error en las salidas  $y_2, y_3$  podría elegir la combinación de lazos de control  $LP_2$ .

Lazo de control $LP_1$		Lazo de control $LP_2$	
Parámetros	$P_1$	Parámetros	$P_2$
$K_1^{c1}$	0.2021	$K_1^{c2}$	-0.052
$Ti_1^{c1}$	17.34	$Ti_1^{c2}$	2.89
$Td_1^{c1}$	0.694	$Td_1^{c2}$	0.209
$K_2^{c1}$	0.035	$K_2^{c2}$	0.058
$Ti_2^{c1}$	24.71	$Ti_2^{c2}$	3.24
$Td_2^{c1}$	0.479	$Td_2^{c2}$	0.282
$K_3^{c1}$	-0.036	$K_3^{c2}$	-0.069
$Ti_3^{c1}$	21.37	$Ti_3^{c2}$	19.02
$Td_3^{c1}$	0.314	$Td_3^{c2}$	0.536
$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>20.88</b>	$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	26.07
$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	114.85	$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	<b>23.11</b>
$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	55.58	$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	<b>13.31</b>
$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	<b>0.122</b>	$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	0.131
$J_5(\mathbf{x}^{c1})$	0.186	$J_5(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.053</b>
$J_6(\mathbf{x}^{c1})$	<b>0.187</b>	$J_6(\mathbf{x}^{c2})$	0.199

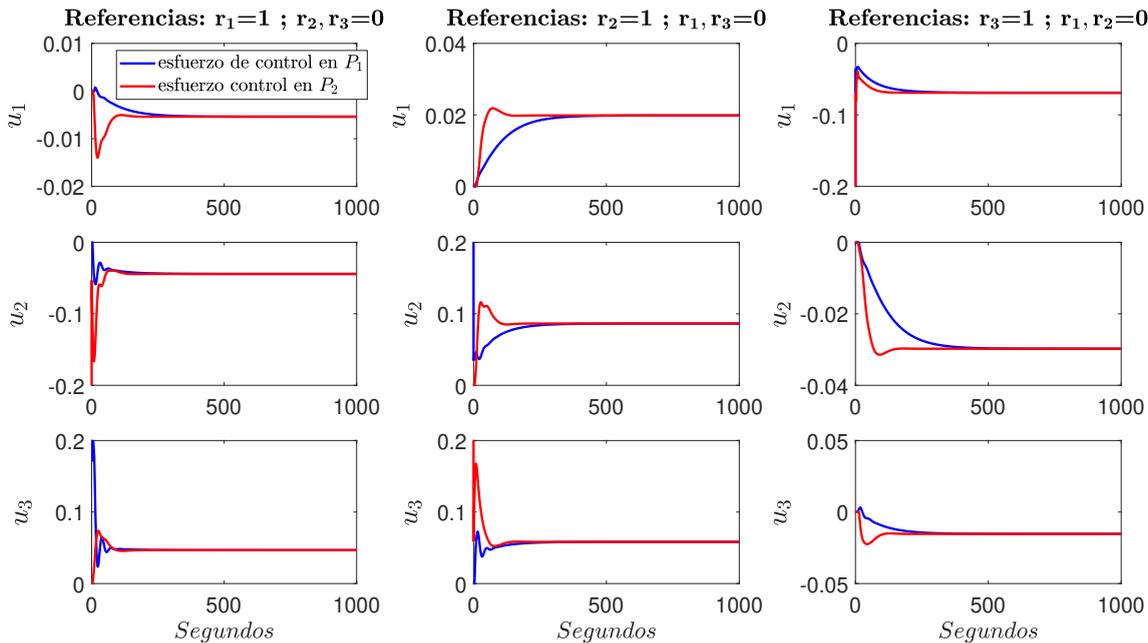
**Tabla 4.16:** Controladores  $P_1$  y  $P_2$  seleccionados en la figura 4.13.



**Figura 4.13:** Frentes de Pareto de los lazos de control  $LP_1$  y  $LP_2$  para el segundo ejemplo.



**Figura 4.14:** Respuestas del sistema con los controladores PID seleccionados en los frentes de Pareto del segundo ejemplo.



**Figura 4.15:** Esfuerzos de control de los controladores PID seleccionados en los frentes de Pareto del segundo ejemplo.

### 4.3 Aplicación a sistemas no lineales

En este apartado se aplica la metodología de selección de lazos de control propuesta en esta tesis a tres sistemas no lineales. El primer sistema se trata de un proceso de dos tanques acoplados, luego se analiza un sistema de cuatro tanques acoplados, y finalmente un sistema denominado caldera-turbina. En el primer ejemplo se analiza en detalle varios aspectos: se muestra cómo puede influir en la selección de los lazos de control el hecho de aplicar la metodología sobre el sistema linealizado versus su aplicación directa sobre su modelo no lineal (la metodología tiene como ventaja versus las metodologías clásicas que permite su aplicación directamente sobre un sistema no lineal, es decir, no requiere linealización). Así también, se pone en evidencia como el punto de operación (región de operación) donde trabaja el sistema puede influir directamente en la selección de los lazos de control (unos lazos entrada-salida que controlan un sistema en un punto de operación no necesariamente tienen porque ser los más adecuados en otros puntos de operación). También se muestra como el nivel de detalle con que se analiza un escenario es posible que condicione la selección de unos lazos de control u otros en un sistema MIMO.

Para el ejemplo de cuatro tanques acoplados se aplica directamente la metodología al modelo no lineal y se muestra información relevante sobre cada lazo entrada-salida que posibilita controlar este sistema, en donde las preferencias del diseñador tienen un rol importante en la selección final. Finalmente se aplica la metodología a un sistema no lineal con tres entradas y tres salidas (sistema caldera-turbina) el cual presenta altas no linealidades, se puede evidenciar que con la metodología propuesta fue posible establecer unos lazos de control adecuados para este sistema.

#### 4.3.1 Ejemplo 1: sistema de dos tanques acoplados 2 x 2

El diagrama esquemático del sistema no lineal de dos tanques acoplados se muestra en la figura 4.16 y su modelo matemático se muestra en (4.69), (4.70).

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = -a_1 \sqrt{2gh_1} + a_2 \sqrt{2gh_2} + \gamma kv \quad (4.69)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = -a_2 \sqrt{2gh_2} + (1 - \gamma)kv \quad (4.70)$$

Donde:

$A_1, A_2$ : sección transversal de los tanques.

$a_1, a_2$ : sección transversal de los orificios de salida.

$h_1, h_2$ : niveles de agua.

$\gamma$ : coeficiente de apertura/cierre de la válvula.

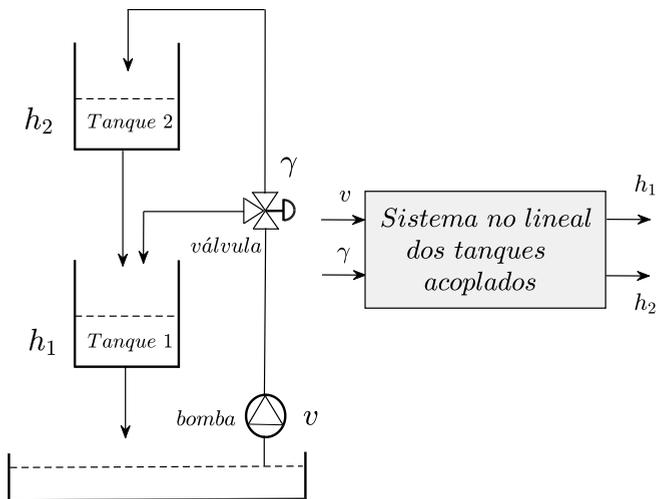
$v$ : voltaje aplicado a la bomba.

$k$ : coeficiente del flujo de entrada de agua de la bomba.

$g$ : aceleración de la gravedad.

Los actuadores del sistema presentan restricciones como se muestra en (4.71).

$$0 \leq v \leq 7.2 V, 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (4.71)$$



**Figura 4.16:** Diagrama esquemático del sistema de dos tanques acoplados definido en (4.69), (4.70).

Los parámetros del modelo definido en (4.69), (4.70) se muestran en la tabla 4.17.

Parámetro	Valor
$A_1$	$28 \text{ cm}^2$
$A_2$	$32 \text{ cm}^2$
$a_1$	$0.071 \text{ cm}^2$
$a_2$	$0.057 \text{ cm}^2$
$k$	$3.33 \text{ cm}^3/V.s$
$g$	$981 \text{ cm}/s^2$

**Tabla 4.17:** Parámetros del sistema de dos tanques acoplados.

Mediante este primer ejemplo se pretende mostrar tres aspectos importantes a considerar cuando se seleccionan lazos de control en un sistema no lineal. Estos aspectos son: a) la validez de unos lazos de control en un sistema linealizado no garantiza una correcta selección de esos lazos de control en el sistema no lineal; b) la validez de los lazos de control para diferentes puntos de operación de un sistema multivariable no lineal; y c) la importancia de analizar los lazos de control mediante el establecimiento de un escenario multiobjetivo adecuado. Se propone realizar tres análisis para mostrar estos aspectos importantes:

Análisis 1) la metodología presentada en el capítulo 3 se aplica al sistema linealizado y luego directamente al sistema no lineal en el punto de operación 1 ( $\wp_1$ ) para comparar los resultados en ambos casos. Esto pretende mostrar que la aplicación de técnicas de selección de lazos de control para sistemas linealizados pueden ser inexactas cuando se aplican en un sistema no lineal.

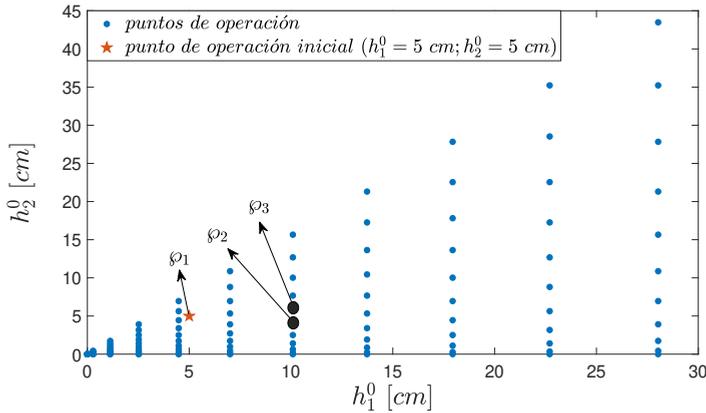
Análisis 2) la metodología presentada en el capítulo 3 se aplica al sistema no lineal en los puntos de operación 2 y 3 ( $\wp_2$  y  $\wp_3$ ) para comparar estos resultados con los obtenidos en el punto operativo 1 ( $\wp_1$ ). Este análisis tiene como objetivo mostrar que los mejores lazos entrada-salida para controlar un sistema no lineal en un punto de operación, no tienen porque coincidir necesariamente con los más adecuados en otro punto de operación del sistema.

Análisis 3) se analiza un escenario multiobjetivo con dos objetivos de diseño (desempeño versus esfuerzo de control) y seguidamente el escenario multiobjetivo es expandido con cuatro objetivos de diseño (desempeño versus esfuerzo de control de cada salida y cada entrada independientemente). Esto muestra la importancia de establecer un escenario multiobjetivo adecuado para la selección de los lazos de control. En un escenario multiobjetivo adecuado, un diseñador no tiene la necesidad de agregar desempeños de las salidas entre sí o con esfuerzos de control y de esta forma puede evitar una posible pérdida de in-

formación al agregar objetivos de diseño de un MOP, así como el inconveniente de establecer pesos de agregación.

Para efectuar estos tres análisis propuestos se genera un conjunto de puntos de operación factibles de alcanzar por el sistema de la figura 4.16. Los puntos de operación fueron obtenidos incrementando el voltaje de la bomba desde 0 voltios a 5 voltios con incrementos de 0.5 voltios, y el coeficiente de apertura de la válvula desde 0 % a 1 % con incrementos de 0.1 % como se muestra en la figura 4.17.

Se seleccionó  $\varphi_1$  como punto de operación inicial de análisis del sistema. En  $\varphi_1$  ambos niveles de los tanques tienen el mismo valor ( $h_1 = h_2 = 5 \text{ cm}$ ). Luego se eligió  $\varphi_2$  para analizar el comportamiento del sistema cuando el nivel  $h_1$  cambia su valor y el nivel  $h_2$  permanece fijo ( $h_1 = 10 \text{ cm}; h_2 = 5 \text{ cm}$ ). Finalmente,  $\varphi_3$  fue elegido para analizar el comportamiento del sistema cuando ambos niveles  $h_1$  y  $h_2$  cambian con respecto al punto de operación inicial  $\varphi_1$  ( $h_1 = 10 \text{ cm}; h_2 = 7.7 \text{ cm}$ ) como se muestra en la tabla 4.18. Esto tiene la intención de mostrar la validez de los lazos entrada-salida del sistema no lineal de dos tanques acoplados en diferentes puntos de operación.



**Figura 4.17:** Conjunto de puntos de operación para el análisis del sistema de dos tanques acoplados.

El sistema fue linealizado en los puntos de operación mostrados en la tabla 4.18.  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  y  $G_3(s)$  se muestran en (4.72), (4.73) y (4.74) respectivamente.

Puntos de operación ( $\wp$ )	$\wp_1$	$\wp_2$	$\wp_3$
$h_1^0$	5 cm	10 cm	10 cm
$h_2^0$	5 cm	5 cm	7.7 cm
$v^0$	2.1181 V	2.9865 V	3 V
$\gamma^0$	0.1972	0.4323	0.3

**Tabla 4.18:** Puntos de operación del sistema de dos tanques acoplados.

Se calculó la matriz de ganancias relativas RGA ( $\Lambda$ ), esta metodología propone claramente elegir un lazo de control diagonal para efectuar el control descentralizado de cada planta como se muestra en (4.75).

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.02345s+0.002098}{s^2+0.04276s+0.0004431} & \frac{0.2512s}{s^2+0.04276s+0.0004431} \\ \frac{0.08354}{s+0.01764} & \frac{-0.2198}{s+0.01764} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.05142s+0.002098}{s^2+0.0354s+0.0003133} & \frac{0.3552s}{s^2+0.0354s+0.0003133} \\ \frac{0.05907}{s+0.01764} & \frac{-0.3108}{s+0.01764} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$G_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.03568s+0.001694}{s^2+0.03192s+0.0002518} & \frac{0.3568s}{s^2+0.03192s+0.0002518} \\ \frac{0.07284}{s+0.01424} & \frac{-0.3122}{s+0.01424} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\Lambda_{G_1} = \Lambda_{G_2} = \Lambda_{G_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Para determinar que lazos entrada-salida pueden controlar satisfactoriamente el sistema mostrado en la figura 4.16, se aplica la metodología propuesta en el capítulo 3 tanto al sistema linealizado como directamente al sistema no lineal. Para ambos casos se proponen dos conceptos de diseño:  $\mathbf{c}_1$  (concepto diagonal) y  $\mathbf{c}_2$  (concepto off-diagonal) como se muestra en (4.76), (4.77), y (4.80), (4.81). Para estabilizar el sistema, se aplican controladores PIs de un grado de libertad con anti-windup como se muestra en (4.78), (4.79), y (4.82), (4.83).

$$\mathbf{c}_1 = [C_{h_1, \hat{u}_1}^{c_1}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c_1}] \quad (4.76)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$C_{h_1, \hat{u}_1}^{c_1} = \frac{K_1^{c_1}(s + 1/Ti_1^{c_1})}{s}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c_1} = \frac{K_2^{c_1}(s + 1/Ti_2^{c_1})}{s} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{x}^{c1} = [K_1^{c1}, Ti_1^{c1}, K_2^{c1}, Ti_2^{c1}] \quad (4.79)$$

$$\mathbf{c}_2 = [C_{h_1, \hat{u}_1}^{c2}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c2}] \quad (4.80)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$C_{h_1, \hat{u}_1}^{c2} = \frac{K_1^{c2}(s + 1/Ti_1^{c2})}{s}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c2} = \frac{K_2^{c2}(s + 1/Ti_2^{c2})}{s} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{x}^{c2} = [K_1^{c2}, Ti_1^{c2}, K_2^{c2}, Ti_2^{c2}] \quad (4.83)$$

Se proponen dos MOPs con dos objetivos de diseño cada uno como se muestra en (4.84)-(4.90), donde para  $k = 1$ , el MOP está asociado con el concepto de diseño  $\mathbf{c}_1$  o concepto diagonal y para  $k = 2$ , está asociado con el concepto de diseño  $\mathbf{c}_2$  o concepto off-diagonal.

El objetivo  $J_1$  agrega y evalúa los errores de los niveles de cada tanque  $h_1$  y  $h_2$  aplicando el IAE para seguimiento de una señal de referencia de entrada (respuesta ante una señal tipo **escalón unitario**). El objetivo  $J_2$  agrega y evalúa los esfuerzos de control de la bomba  $v$  y la válvula  $\gamma$  aplicando el IADU. Debido a que el IADU de la bomba fue agregado con el IADU de la válvula, la acción de control ( $v$ ) fue dividida por su valor máximo de voltaje para asignar a esta variable un peso relativo equivalente al de la válvula (es decir para que  $v$  varíe desde 0 a 1). Los límites del vector de parámetros de cada controlador  $\mathbf{x}^{ck}$  se muestran en la tabla 4.19. Para establecer estos límites se auto sintonizó un controlador de seguimiento de referencia, para el sistema operando en  $\wp_1$ , con el objetivo de disminuir el espacio de búsqueda del algoritmo de optimización y por tanto el coste computacional.

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.84)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.85)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_1| + |e_2| \Big|_{h_1=h_1^0+1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} |e_1| + |e_2| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0+1cm} dt \quad (4.86)$$

$$J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| + \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0+1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| + \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0+1cm} dt \quad (4.87)$$

$$t_f = 400 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \overline{\mathbf{x}}^{ck} \tag{4.88}$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) < 200; J_2(\mathbf{x}^{ck}) < 14 \tag{4.89}$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, Ti_1^{ck}, K_2^{ck}, Ti_2^{ck}] \tag{4.90}$$

Límites de $\mathbf{x}^{ck}$ - $\phi_1$				
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$Ti_1^{c1}$	$K_2^{c1}$	$Ti_2^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.1	1	-10	5
$\overline{\mathbf{x}}^{c1}$	10	100	-0.1	100
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$Ti_1^{c2}$	$K_2^{c2}$	$Ti_2^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	0.1	1	0.1	1
$\overline{\mathbf{x}}^{c2}$	20	100	30	50

**Tabla 4.19:** Límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  para el primer ejemplo-punto de operación 1.

### Análisis 1: sistema linealizado versus sistema no lineal

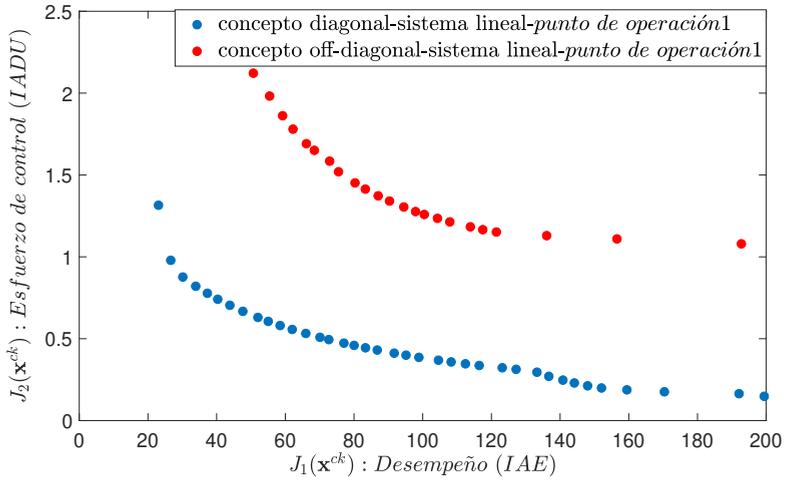
En este primer análisis, se aplica la técnica de selección de lazos de control propuesta en el capítulo 3 primero al sistema linealizado y luego al sistema no lineal.

Al optimizar los MOPs planteados en (4.84)-(4.90) para el sistema linealizado en el punto de operación 1 se obtienen los frentes de Pareto mostrados en la figura 4.18. Es posible observar que el concepto de diseño diagonal domina al concepto off-diagonal. Por lo tanto, en este caso se sugiere seleccionar un lazo de control diagonal para controlar el sistema de dos tanques acoplados (este resultado concuerda con lo propuesto por RGA).

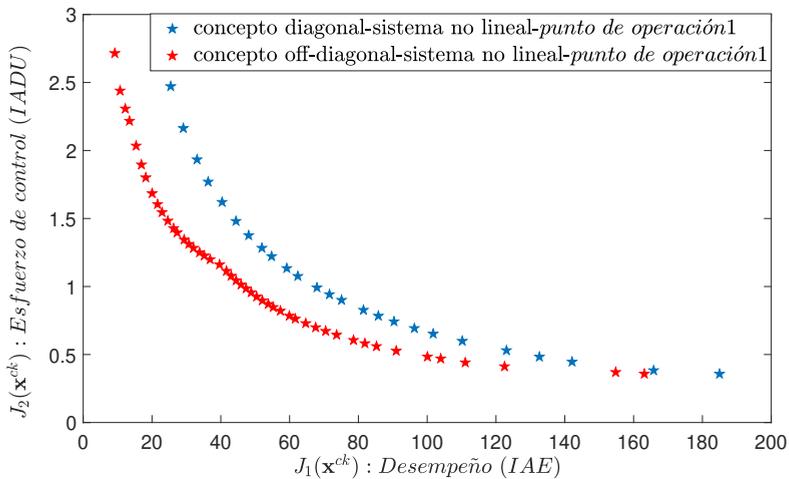
El mismo procedimiento se aplicó directamente al sistema no lineal. Los frentes de Pareto de cada concepto de diseño se muestran en la figura 4.19. Es posible observar que el escenario ha cambiado radicalmente, y ahora el concepto de diseño off-diagonal domina al concepto diagonal.

A partir de este simple análisis, se puede concluir que al aplicar una técnica de selección de lazos de control en un sistema linealizado, los resultados obtenidos pueden no coincidir con los que se obtendrían aplicando la misma técnica directamente sobre un sistema no lineal. Esto brinda una ventaja significativa a las técnicas que se pueden aplicar directamente sobre los sistemas no lineales

(como la propuesta en el capítulo 3 de esta tesis) frente a las técnicas que necesitan linealizar previamente la planta para poder ser aplicadas.



**Figura 4.18:** Frentes de Pareto de los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal para el sistema lineal.



**Figura 4.19:** Frentes de Pareto de los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal para el sistema no lineal.

Límites de $\mathbf{x}^{ck}$ - $\varphi_2$ y $\varphi_3$				
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$Ti_1^{c1}$	$K_2^{c1}$	$Ti_2^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.1	1	-50	1
$\bar{\mathbf{x}}^{c1}$	50	200	-0.1	200
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$Ti_1^{c2}$	$K_2^{c2}$	$Ti_2^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	0.01	1	0.01	1
$\bar{\mathbf{x}}^{c2}$	50	200	100	200

**Tabla 4.20:** Límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  para el primer ejemplo, puntos de operación 2 y 3.

### *Análisis 2: sistema no lineal en diferentes puntos de operación*

En este apartado se analizan los lazos entrada-salida para controlar el sistema MIMO que se muestra en la figura 4.16. Se analiza el comportamiento del sistema cuando los tanques disminuyen sus niveles ( $h_1$  y  $h_2$  disminuyen 1 cm desde sus puntos de operación).

Los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal, los controladores PIs de un grado de libertad, y los MOPs propuestos en este escenario son los mismos que para el punto de operación 1 (análisis 1). Debido a que se analizará el sistema en dos puntos de operación diferentes al propuesto en el análisis 1, se ampliaron los límites del vector de parámetros  $\mathbf{x}^{ck}$  para generar un espacio de búsqueda mayor para el algoritmo de optimización como se muestra en la tabla 4.20.

Los frentes de Pareto de cada concepto de diseño obtenidos al aplicar la metodología del capítulo 3 directamente sobre el sistema no lineal en el punto de operación 2 se muestran en la figura 4.20. A diferencia del punto de operación 1 (ver figura. 4.19), ningún concepto de diseño domina completamente al otro en el punto de operación 2.

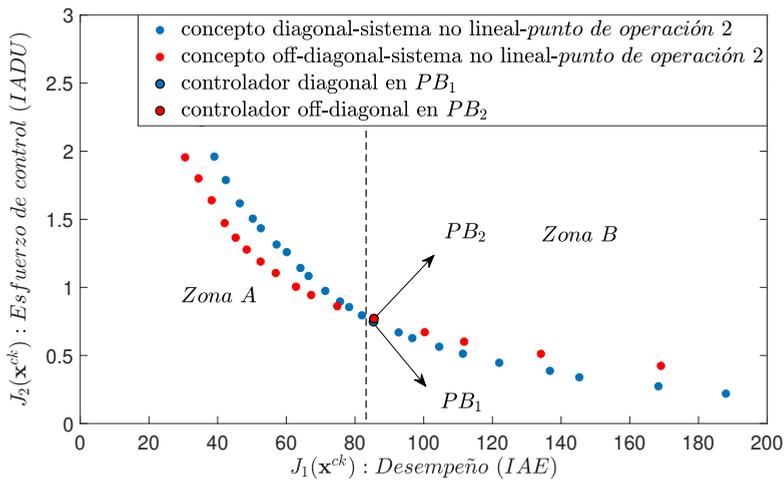
Es posible analizar con mayor detalle los compromisos entre estos frentes de Pareto estableciendo dos zonas en el espacio de objetivos (zona A y zona B) donde cada zona tiene diferentes características como se muestra en la figura 4.20.

La zona A corresponde a la región donde el concepto off-diagonal domina el concepto diagonal. En esta zona se encuentran los controladores con el mejor rendimiento para el seguimiento de referencia de los niveles  $h_1$  y  $h_2$ , y con mayores esfuerzos de control en la bomba  $v$  y la válvula  $\gamma$ .

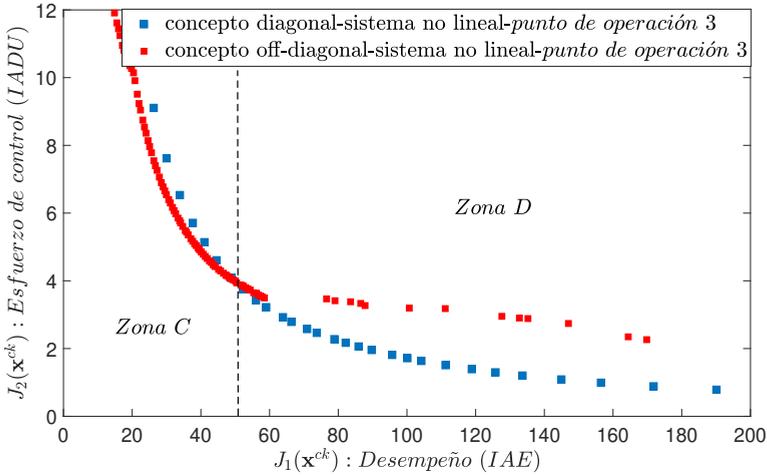
La zona B corresponde a la región donde el concepto diagonal domina el concepto off-diagonal. En esta zona se encuentran los controladores con el rendimiento más bajo para el seguimiento de referencia en  $h_1$  y  $h_2$ , pero con esfuerzos de control menos agresivos para  $v$  y  $\gamma$ . Por lo tanto, en el punto de operación 2, los mejores lazos entrada-salida para controlar el sistema dependerá de las preferencias del diseñador a posteriori.

Los frentes de Pareto (uno para cada concepto de diseño) obtenidos cuando la metodología propuesta se aplica al sistema no lineal en el punto de operación 3 se muestran en la figura 4.21. El escenario es equivalente al que se obtuvo en el punto de operación 2, es decir ningún concepto de diseño domina completamente al otro. (en la zona C, es preferible el lazo de control off-diagonal y, en la zona D, es preferible el lazo de control diagonal).

Este desacuerdo de resultados entre puntos de operación nos permite concluir que para el sistema no lineal de dos tanques analizado, la mejor combinación de lazos de control depende del punto de operación en que se analice este sistema.



**Figura 4.20:** Frentes de Pareto de los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal para sistema no lineal en el punto de operación 2.



**Figura 4.21:** Frentes de Pareto de los conceptos de diseño diagonal y off-diagonal para el sistema no lineal en el punto de operación 3.

**Análisis 3: escenario multiobjetivo con dos objetivos versus cuatro objetivos**

Se comparan dos escenarios en este tercer análisis: el escenario con dos objetivos de diseño en el punto de operación 2 que fue presentado en el análisis 2; y otro escenario con cuatro objetivos de diseño en el mismo punto de operación. Se analizan las ventajas y desventajas de ambos escenarios.

En el análisis 2, se proponen MOPs con dos objetivos de diseño ( $J_1$ : IAE de  $h_1$  y  $h_2$ ;  $J_2$ : IADU de  $v$  y  $\gamma$ ) para encontrar los lazos de control óptimos. Una ventaja fundamental de este escenario es que es fácil comparar los frentes de Pareto, en cada problema multiobjetivo en el espacio bidimensional, como se muestra en la figura 4.20. Sin embargo, un escenario de solo dos objetivos de diseño tiene la desventaja de que hay información que se podría enmascarar, al agregar los errores de las diferentes salidas, en un solo objetivo de diseño  $J_1$ . Además, al agregar el IADU de  $v$  y  $\gamma$  en un solo objetivo de diseño  $J_2$ , se mezclan dos variables del sistema que representan físicamente cantidades con diferentes unidades de medida. Esto podría ocultar información sobre sus comportamientos y dificultar una interpretación correcta.

Para analizar las diferencias entre ambas combinaciones de lazos entrada-salida, se elige un controlador de cada concepto de diseño:  $PB_1$  del concepto

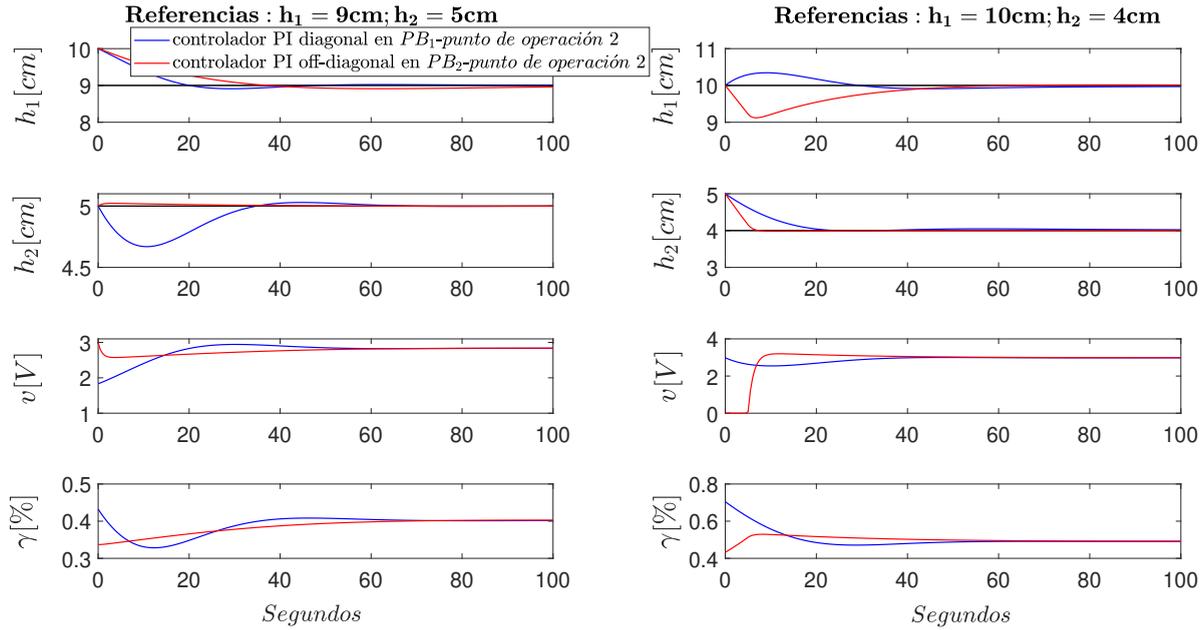
diagonal y  $PB_2$  del concepto off-diagonal como se muestra en la figura 4.20. En la tabla 4.21 se muestran los desempeños de los controladores en  $PB_1$  y  $PB_2$ . Se puede observar que ambos controladores tienen desempeños muy similares, ya que  $J_1(\mathbf{x}^{c2}) \approx J_1(\mathbf{x}^{c1})$  y  $J_2(\mathbf{x}^{c2}) \approx J_2(\mathbf{x}^{c1})$ . Un diseñador al analizar estos objetivos puede no ser capaz de detectar que los controladores son diferentes. Las respuestas de estos controladores se muestran en la figura 4.22. El controlador diagonal tiene un mejor rendimiento para el seguimiento de referencia en  $h_1$ , y el controlador off-diagonal para el seguimiento de referencia en  $h_2$ . Esto no es detectable en el objetivo de diseño  $J_1$  porque este objetivo mezcla el rendimiento de  $h_1$  y  $h_2$ .

Para analizar con mayor detalle los desempeños de cada una de las salidas del sistema, la metodología del capítulo 3 permite la generación de un nuevo escenario de análisis con cuatro objetivos de diseño. En este escenario, las variables de salida y de entrada no están agregadas y se analiza de forma independiente las compensaciones que existen entre el IAE asociado a la salida  $h_1$  y el IAE asociado a la salida  $h_2$ , de manera equivalente se hace con el análisis del IADU de cada una de las entradas  $v$  y  $\gamma$ .

Analizando las compensaciones de manera independiente entre el IADU de la bomba con el IADU de la válvula se consigue una mejor interpretación del problema y se tiene un mejor sentido físico del sistema. En este escenario no es necesario reescalar el esfuerzo de control  $v$  ya que este no está agregado con el esfuerzo de control  $\gamma$ .

Controlador PI off-diagonal		Controlador PI diagonal	
Parámetros	$PB_2$	Parámetros	$PB_1$
$K_1^{c2}$	0.0953	$K_1^{c1}$	1.1549
$Ti_1^{c2}$	28.17	$Ti_1^{c1}$	63.78
$K_2^{c2}$	17.68	$K_2^{c1}$	-0.2724
$Ti_2^{c2}$	57.50	$Ti_2^{c1}$	52.95
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	85.50	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	85.38
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	0.7705	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	0.7481

**Tabla 4.21:** Controladores PIs diagonal y off-diagonal seleccionados en la figura 4.20.



**Figura 4.22:** Respuestas del sistema no lineal con los controladores PIs en  $PB_1$  y  $PB_2$  para el punto de operación 2.

Se plantean dos MOPs con cuatro objetivos de diseño cada uno de acuerdo a (4.91)-(4.99). Los límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{ck}$  son los mismos que los mostrados en la tabla 4.19.

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.91)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.92)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_1| \Big|_{h_1=h_1^0-1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} |e_1| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0-1cm} dt \quad (4.93)$$

$$J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_2| \Big|_{h_1=h_1^0-1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} |e_2| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0-1cm} dt \quad (4.94)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0-1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0-1cm} dt \quad (4.95)$$

$$J_4(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0-1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0-1cm} dt \quad (4.96)$$

$$t_f = 400 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.97)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) < 200; J_2(\mathbf{x}^{ck}) < 200; \quad (4.98)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) < 14; J_4(\mathbf{x}^{ck}) < 14$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, Ti_1^{ck}, K_2^{ck}, Ti_2^{ck}] \quad (4.99)$$

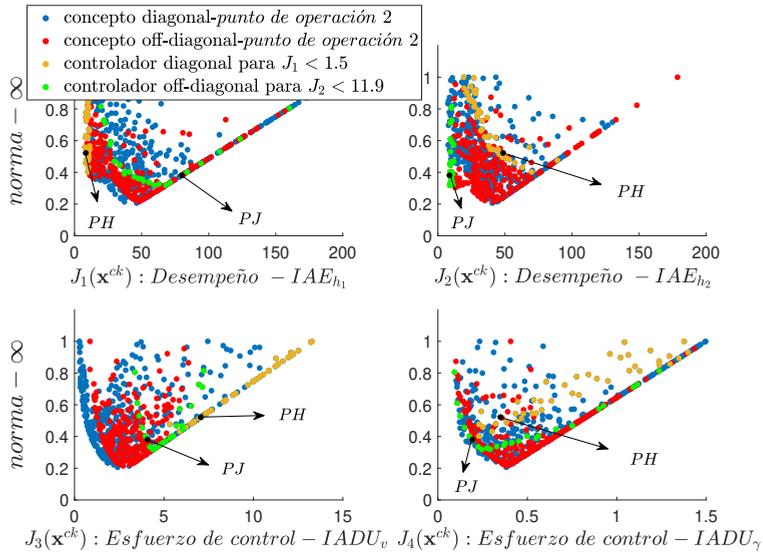
Los frentes de Pareto asociados con los conceptos de diseño diagonal ( $k = 1$ ) y off-diagonal ( $k = 2$ ) obtenidos de la optimización de cada MOP planteado en (4.91) se muestran en la figura 4.23 (a). Es posible observar que el concepto de diseño diagonal consigue un mejor desempeño para  $h_1$  que el concepto off-diagonal (soluciones color café). El concepto off-diagonal consigue un mejor desempeño que el concepto diagonal para  $h_2$  (soluciones color verde). En la figura 4.23 (b) al aplicar la norma  $QI$  se puede observar que existe una zona donde el concepto diagonal domina al concepto off-diagonal ( $QI_{diagonal} < 1$ ) y una zona diferente donde lo opuesto es verdadero ( $QI_{off-diagonal} < 1$ ).

Se seleccionó un controlador de cada concepto de diseño entre aquellos que tienen los mejores desempeños para cada salida ( $PH$  y  $PJ$ ) y sus respuestas se muestran en la figura 4.24. El controlador diagonal es mejor para seguimiento de referencia de  $h_1$ , lo opuesto es verdad para el controlador off-diagonal como se muestra en la figura 4.24. Lo comentado anteriormente se cuantifica en los objetivos  $J_1(\mathbf{x}^{ck})$  y  $J_2(\mathbf{x}^{ck})$  como se muestra en la tabla 4.22. El controlador off-diagonal tiene esfuerzos de control más suaves comparado con el controlador diagonal como se muestra en los objetivos  $J_3(\mathbf{x}^{ck})$  y  $J_4(\mathbf{x}^{ck})$  en la tabla 4.22.

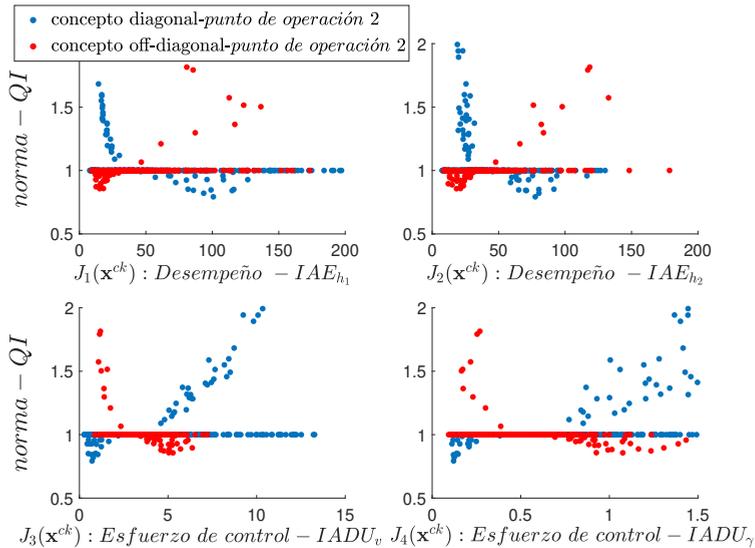
Controlador PI off-diagonal		Controlador PI diagonal	
<i>Parámetros</i>	<i>PJ</i>	<i>Parámetros</i>	<i>PH</i>
$K_1^{c2}$	0.087	$K_1^{c1}$	32.50
$Ti_1^{c2}$	21.70	$Ti_1^{c1}$	30.63
$K_2^{c2}$	18.19	$K_2^{c1}$	-0.131
$Ti_2^{c2}$	54.65	$Ti_2^{c1}$	23.61
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	80.01	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>8.43</b>
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	<b>8.69</b>	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	48.63
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	4.08	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	7.06
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	0.193	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	0.35

**Tabla 4.22:** Controladores PIs diagonal y off-diagonal seleccionados en la figura 4.23.

Este escenario tiene como principal ventaja que ofrece información detallada sobre las compensaciones entre IAE e IADU de cada salida y cada entrada respectivamente. Un diseñador puede elegir en este escenario una combinación de lazos entrada-salida con preferencias independientes sobre estos índices para controlar el sistema de dos tanques acoplado. Otra ventaja de este escenario es que poseer más información sobre cada MOP ayuda a un diseñador a elegir una solución óptima con mayor certeza (con un desempeño satisfactorio de acuerdo con determinadas preferencias). Como desventaja se puede decir que el análisis en la etapa de toma de decisiones es más complejo, en comparación con un escenario de solo dos objetivos de diseño. Se pudo analizar en este primer ejemplo que los lazos entrada-salida óptimos para realizar el control descentralizado del sistema no lineal de la figura 4.16 dependen de los siguientes aspectos: 1) el punto de operación del sistema y su dinámica en este punto; 2) los objetivos de diseño propuestos para cada concepto de diseño; 3) las preferencias del diseñador sobre los objetivos de diseño; 4) el tipo de estructura de control.

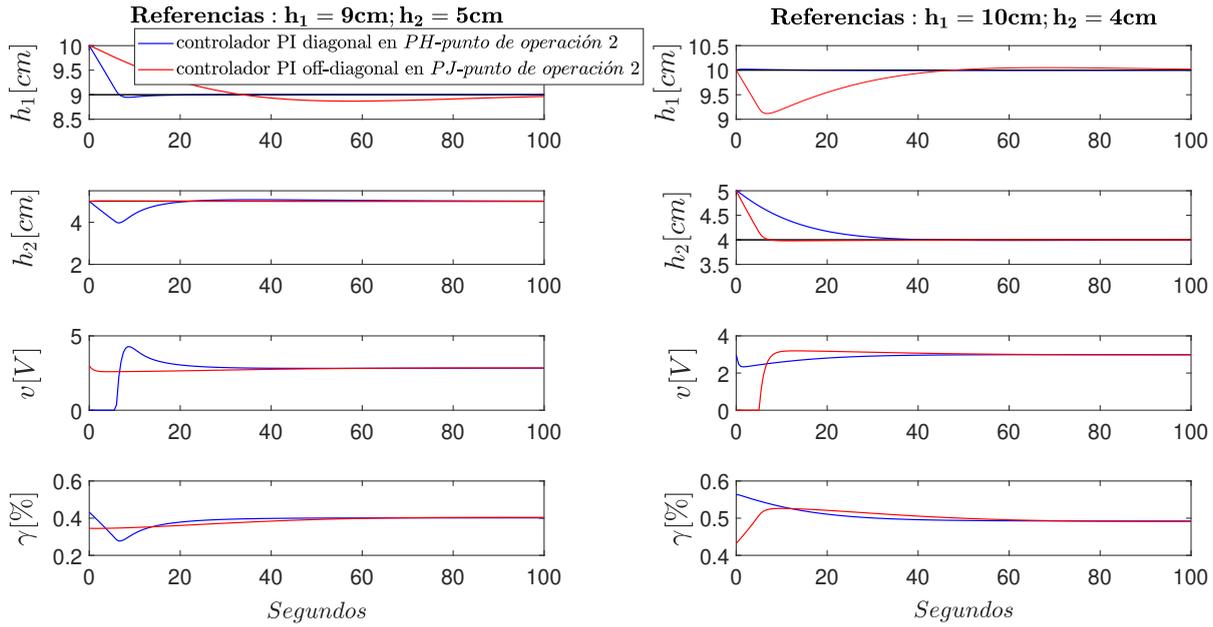


(a)



(b)

**Figura 4.23:** Frentes de Pareto y comparación de conceptos de diseño usando LD para el punto de operación 2.  $PH$  y  $PJ$  fueron seleccionadas para analizar sus compensaciones. (a) Conceptos de diseño usando norma  $-\infty$ . (b) Conceptos de diseño usando norma  $-QI$ .



**Figura 4.24:** Respuestas del sistema con los controladores PIs en *PH* y *PJ* para el punto de operación 2.

### 4.3.2 Ejemplo 2: sistema de cuatro tanques acoplados 2 x 2

En este ejemplo se analiza el sistema no lineal de cuatro tanques acoplados usado en [84]. El diagrama esquemático del sistema se muestra en la figura 4.25 y su modelo se muestra en (4.100)-(4.103).

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1 \quad (4.100)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2 \quad (4.101)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}v_2 \quad (4.102)$$

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1 \quad (4.103)$$

Donde, para  $i=1$  hasta 4 y  $j=1$  hasta 2.

$A_i$ : sección transversal del tanque  $i$ .

$a_i$ : sección transversal del orificio de salida  $i$ .

$h_i$ : nivel de agua del tanque  $i$ .

$\gamma_j$ : coeficiente de apertura/cierre de la válvula  $j$ .

$v_j$ : voltaje aplicado a la bomba  $j$ .

$k_j v_j$ : flujo de la bomba  $j$ .

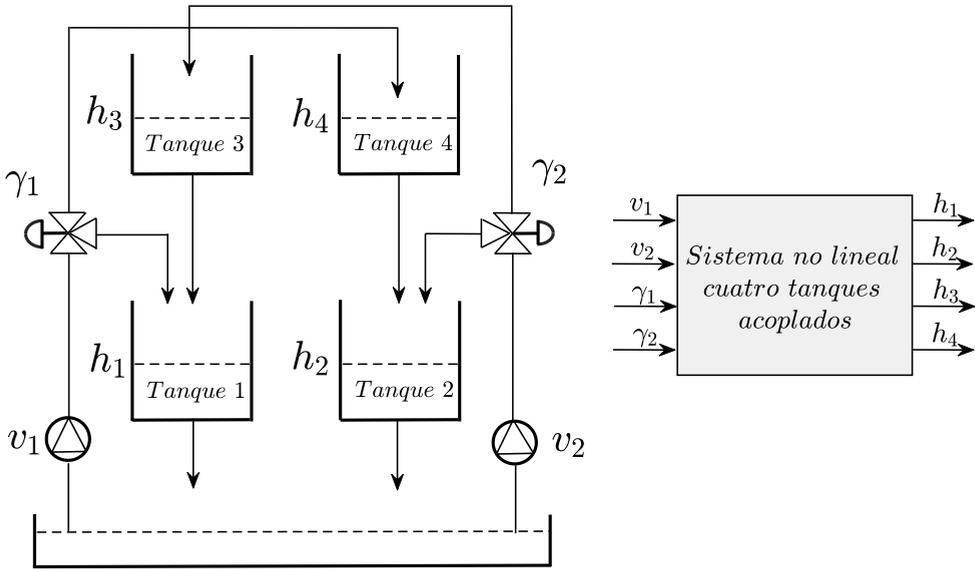
$g$ : aceleración de la gravedad.

Los actuadores del sistema tienen restricciones como se muestra en (4.104).

$$0 \leq v_j \leq 7.2V, 0 \leq \gamma_j \leq 1 \quad (4.104)$$

Los parámetros del modelo se muestran en la tabla 4.23.

Para este ejemplo, las salidas  $h_1$  y  $h_2$  son controladas a través de las bombas  $v_1$  y  $v_2$ , los coeficientes de las válvulas son  $\gamma_1 = 0.43$  y  $\gamma_2 = 0.34$ . Bajo estas condiciones de operación se obtiene el escenario propuesto en [84], el cual se compara con otros escenarios generados con la metodología propuesta en



**Figura 4.25:** Diagrama esquemático del sistema de cuatro tanques acoplados definido en (4.100), (4.103).

Parámetro	Valor
$A_1, A_3$	$28 \text{ cm}^2$
$A_2, A_4$	$32 \text{ cm}^2$
$a_1, a_3$	$0.071 \text{ cm}^2$
$a_2, a_4$	$0.057 \text{ cm}^2$
$k_1$	$3.14 \text{ cm}^3/Vs$
$k_2$	$3.29 \text{ cm}^3/Vs$
$\gamma_1$	0.43
$\gamma_2$	0.34
$g$	$981 \text{ cm}/s^2$

**Tabla 4.23:** Parámetros para el sistema de cuatro tanques acoplados.

el capítulo 3. El sistema bajo estas condiciones de las válvulas presenta un comportamiento de fase no mínima, lo cual añade complejidad al control [84].

El sistema fue linealizado en el punto de operación propuesto en [84] que se muestra en la tabla 4.24 lo cual permite contrastar la metodología del capítulo 3 en un proceso real de laboratorio. La técnica RGA ( $\Lambda$ ) en este punto de operación propone elegir un control off-diagonal para efectuar el control descentralizado del sistema de la figura 4.25, como se muestra en (4.105). Una extensión de RGA para sistemas no lineales propuesto en [61] sugiere elegir un lazo de control diagonal para estabilizar el sistema de cuatro tanques acoplado, el cálculo del RGA extendido se muestra en (4.106). Por otra parte el RGA no lineal (NRGA, [89], [113]) para el sistema se muestra en (4.107). NRGA propone considerar el punto de operación y los parámetros del sistema de cuatro tanques acoplado para elegir unos lazos de control adecuados. Al calcular el NRGA en el punto de operación mostrado en la tabla 4.24, este sugiere elegir un control off-diagonal para controlar el sistema multivariable bajo estudio.

Es importante mencionar que en [89] se sugiere analizar las respuestas del sistema en lazo cerrado para evaluar el desempeño de cada posible combinación de lazos de control (simular los controladores diagonal y off-diagonal).

La metodología propuesta en el capítulo 3 se aplicó directamente al sistema no lineal de la figura 4.25 con el objetivo de analizar en detalle como elegir unos lazos entrada-salida apropiados para poder controlar este sistema. Se plantean dos conceptos de diseño  $\mathbf{c}_1$  (concepto diagonal) y  $\mathbf{c}_2$  (concepto off-diagonal), se usan controladores PIs de un grado de libertad con anti-windup equivalentes a los propuestos en [84] como se muestra en (4.108)-(4.115).

Punto de operación $\varphi$	
$h_1^0$	12.44 cm
$h_2^0$	13.17 cm
$h_3^0$	4.73 cm
$h_4^0$	4.99 cm
$v_1^0$	3.15 V
$v_2^0$	3.15 V

**Tabla 4.24:** Punto de operación del sistema de cuatro tanques acoplado.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.6357 & \mathbf{1.6357} \\ \mathbf{1.6357} & -0.6357 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

$$\Lambda_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \end{bmatrix} \cdot * \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

$$\Lambda_{NRGA} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \sqrt{\frac{h_1 h_2}{h_3 h_4}}} & \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)} \sqrt{\frac{h_3 h_4}{h_1 h_2}}} \\ \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)} \sqrt{\frac{h_3 h_4}{h_1 h_2}}} & \frac{1}{1 - \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \sqrt{\frac{h_1 h_2}{h_3 h_4}}} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1730 & \mathbf{1.1730} \\ \mathbf{1.1730} & -0.1730 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_1 = [C_{h_1, \hat{u}_1}^{c1}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c1}] \quad (4.108)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

$$C_{h_1, \hat{u}_1}^{c1} = \frac{K_1^{c1}(s + 1/Ti_1^{c1})}{s}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c1} = \frac{K_2^{c1}(s + 1/Ti_2^{c1})}{s} \quad (4.110)$$

$$\mathbf{x}^{c1} = [K_1^{c1}, Ti_1^{c1}, K_2^{c1}, Ti_2^{c1}] \quad (4.111)$$

$$\mathbf{c}_2 = [C_{h_1, \hat{u}_1}^{c2}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c2}] \quad (4.112)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$C_{h_1, \hat{u}_1}^{c2} = \frac{K_1^{c2}(s + 1/Ti_1^{c2})}{s}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c2} = \frac{K_2^{c2}(s + 1/Ti_2^{c2})}{s} \quad (4.114)$$

$$\mathbf{x}^{c2} = [K_1^{c2}, Ti_1^{c2}, K_2^{c2}, Ti_2^{c2}] \quad (4.115)$$

Para cada concepto de diseño se plantea un MOP. Cada MOP tiene cuatro objetivos de diseño como se muestra en (4.116)-(4.124). Dos objetivos de diseño analizan de manera independiente el IAE de las salidas  $h_1$  y  $h_2$  y los otros objetivos analizan el IADU de cada entrada  $v_1$  y  $v_2$ .

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.116)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.117)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_1| \Big|_{h_1=h_1^0+1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} |e_1| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0+1cm} dt \quad (4.118)$$

$$J_2(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_2| \Big|_{h_1=h_1^0+1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} |e_2| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0+1cm} dt \quad (4.119)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0+1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_1}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0+1cm} dt \quad (4.120)$$

$$J_4(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0+1cm}^{h_2=h_2^0} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_2}{dt} \right| \Big|_{h_1=h_1^0}^{h_2=h_2^0+1cm} dt \quad (4.121)$$

$$t_f = 1500 \text{ segundos} \\ \underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \bar{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.122)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) < 500; J_2(\mathbf{x}^{ck}) < 2000; \quad (4.123)$$

$$J_3(\mathbf{x}^{ck}) < 5; J_4(\mathbf{x}^{ck}) < 5$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, Ti_1^{ck}, K_2^{ck}, Ti_2^{ck}] \quad (4.124)$$

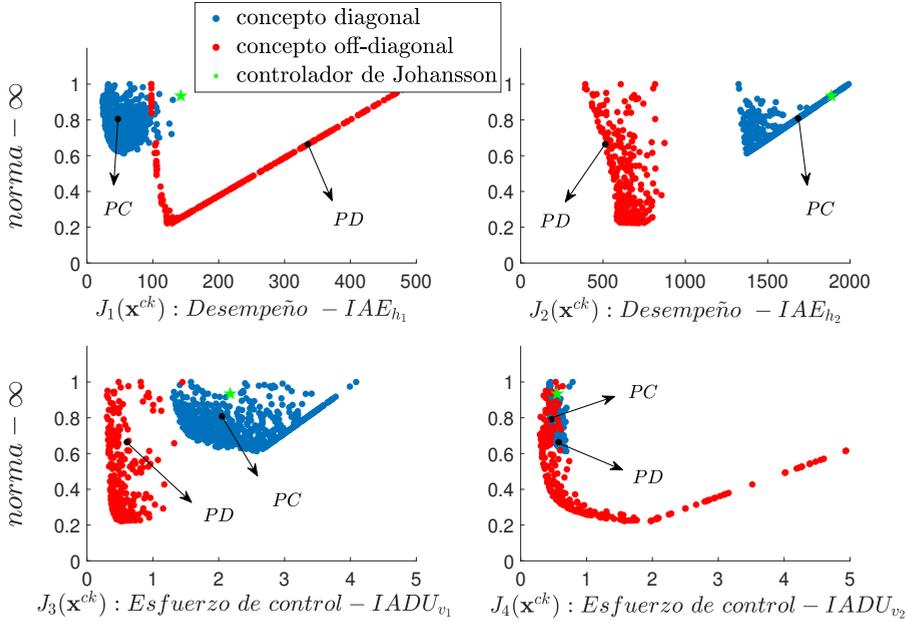
Los límites del vector  $\mathbf{x}^{ck}$  se muestran en la tabla 4.25. Estos límites se ajustaron teniendo en consideración los controladores de referencia propuestos en [84].

Límites de $\mathbf{x}^{ck}$				
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$Ti_1^{c1}$	$K_2^{c1}$	$Ti_2^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.1	10	-1	5
$\bar{\mathbf{x}}^{c1}$	3	50	-0.01	200
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$Ti_1^{c2}$	$K_2^{c2}$	$Ti_2^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	0.1	10	0.1	50
$\bar{\mathbf{x}}^{c2}$	5	100	1	200

**Tabla 4.25:** Límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  para el segundo ejemplo.

Después del proceso de optimización de cada MOP se obtuvo los frentes de Pareto que se muestran en la figura 4.26.

El concepto diagonal tiene un mejor desempeño para seguimiento de referencia de la salida  $h_1$  comparado con el concepto off-diagonal ya que la zona donde  $J_1(\mathbf{x}^{c1}) < 96.43$  es cubierta solamente por el concepto diagonal.



**Figura 4.26:** Frentes de Pareto usando LD para el segundo ejemplo. Las soluciones *PC*, *PD* fueron seleccionados para analizar sus compensaciones.

El concepto off-diagonal tiene un mejor desempeño para seguimiento de la referencia en la salida  $h_2$  comparado con el concepto diagonal, ya que cubre una región donde  $J_2(\mathbf{x}^{c2}) < 873.8$  que este último no alcanza.

Los esfuerzos de control de la bomba  $v_1$  del concepto diagonal ( $J_3(\mathbf{x}^{c1}) > 1.302$ ) son más grandes que los del concepto off-diagonal ( $J_3(\mathbf{x}^{c2}) < 1.448$ ). Los esfuerzos de control de la bomba  $v_2$  comparten una misma región en los frentes de Pareto para ambos conceptos de diseño ( $0.2916 \leq J_4(\mathbf{x}^{ck}) \leq 0.789$ ). Los esfuerzos de control del concepto off-diagonal donde  $J_4(\mathbf{x}^{c2}) > 0.789$  corresponden a las mejores prestaciones de  $h_1$ .

Se eligió una solución de cada concepto de diseño (*PC* y *PD*) para analizar sus desempeños y compararlos con la solución propuesta en [84]. Estas soluciones fueron elegidas teniendo en consideración las fortalezas de cada frente de Pareto mostrado en la figura 4.26, así la solución *PC* prioriza minimizar  $J_1(\mathbf{x}^{ck})$  y

la solución *PD* prioriza minimizar  $J_2(\mathbf{x}^{c_k})$ . Se aplicó una señal de referencia tipo escalón unitario partiendo desde el punto de operación del sistema, las respuestas se muestran en la figura 4.27 y sus prestaciones en la tabla 4.26.

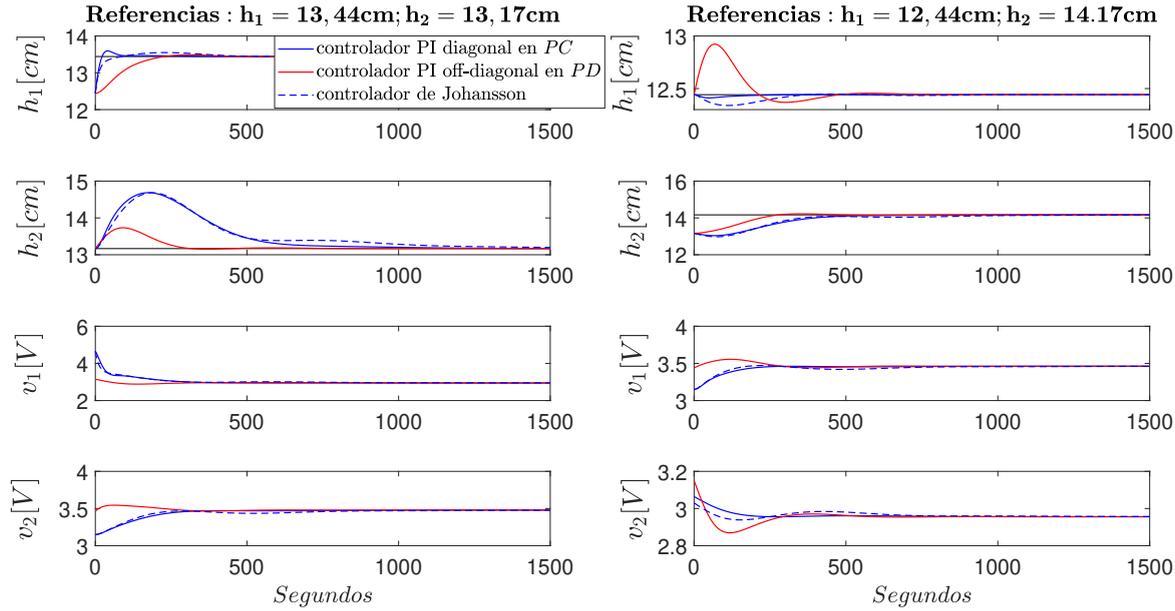
Se puede observar que el controlador off-diagonal en *PD* tiene un mejor desempeño en la salida  $h_2$  comparado con el controlador diagonal en *PC* como se muestra en la tabla 4.26 ( $J_2(\mathbf{x}^{c2}) \ll J_2(\mathbf{x}^{c1})$ ), y en la figura 4.27. Por el contrario el controlador diagonal en *PC* tiene un mejor desempeño en la salida  $h_1$  ( $J_1(\mathbf{x}^{c1}) \ll J_1(\mathbf{x}^{c2})$ ) (ver tabla 4.26 y la figura 4.27). El esfuerzo de control de la bomba  $v_1$  es más suave para el controlador diagonal *PD* comparado con el controlador off-diagonal en *PC* ( $J_3(\mathbf{x}^{c2}) < J_3(\mathbf{x}^{c1})$ ), lo opuesto es verdad con el esfuerzo de control de la bomba  $v_2$  para el controlador *PC* ( $J_4(\mathbf{x}^{c1}) < J_4(\mathbf{x}^{c2})$ ).

El controlador diagonal en *PC* sintonizado con la técnica multiobjetivo presentada en esta tesis consigue mejores prestaciones en todos los objetivos de diseño, que el controlador diagonal propuesto en [84] como se muestra en la tabla 4.26) y en la figura 4.27.

En este ejemplo podemos apreciar que existe un conflicto entre las dos combinaciones de lazos entrada-salida disponibles para controlar el sistema de cuatro tanques propuesto en [84]. Una combinación de lazos entrada-salida es mejor para controlar el nivel de uno de los tanques y viceversa. Es interesante resaltar que con la metodología propuesta es posible encontrar un controlador diagonal con mejores desempeños (para los cuatro objetivos del MOP planteado) que el controlador diagonal propuesto en [84]. Lo comentado anteriormente se puede evidenciar en los frentes de Pareto y objetivos de diseño mostrados en la figura 4.26 y en la tabla 4.26) respectivamente, así como también en las respuestas del sistema mostradas en la figura 4.27.

Controlador PI off-diagonal		Controlador PI diagonal		
<i>Parámetros</i>	<i>PD</i>	<i>Parámetros</i>	<i>PC</i>	[84]
$K_1^{c2}$	0.313	$K_1^{c1}$	1.513	1.5
$Ti_1^{c2}$	78.02	$Ti_1^{c1}$	18.22	110
$K_2^{c2}$	0.289	$K_2^{c1}$	-0.086	-0.12
$Ti_2^{c2}$	133.62	$Ti_2^{c1}$	138.12	220
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	335.32	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>48.94</b>	142.49
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	<b>514.25</b>	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	1685	1887.02
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.609</b>	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	2.05	2.17
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	0.576	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	<b>0.452</b>	0.55

**Tabla 4.26:** Controladores PI diagonal y off-diagonal seleccionados en la figura 4.27. [84] representa el controlador propuesto por Johansson.



**Figura 4.27:** Respuestas del sistema con los controladores en *PC*, *PD* y del controlador propuesto en [84]. Las salidas del controlador propuesto por [84] están convertidas de voltios a centímetros.

### 4.3.3 Ejemplo 3: sistema de cuatro tanques acoplados 4 x 4

En este ejemplo se analiza el sistema propuesto en [84] y que se muestra en la figura 4.25. A diferencia del ejemplo 4.3.2 ahora se controlan los cuatro niveles de los tanques ( $h_1, h_2, h_3, h_4$ ) a través de las bombas y válvulas disponibles ( $v_1, v_2, \gamma_1, \gamma_2$ ). El cálculo de RGA ( $\Lambda$ ) del sistema linealizado en el punto de operación propuesto en [84] (ver tabla 4.24) se muestra en (4.125).

$$\Lambda = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.43 & 0 & \mathbf{0.57} & 0 \\ 0 & 0.34 & 0 & \mathbf{0.66} \\ 0 & \mathbf{0.66} & 0 & 0.34 \\ \mathbf{0.57} & 0 & 0.43 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.125)$$

RGA sugiere elegir la combinación de lazos entrada-salida que está resaltado en negrita como se muestra en (4.125), esto equivale a controlar  $h_1$  con la válvula  $\gamma_1$ ,  $h_2$  con la válvula  $\gamma_2$ ,  $h_3$  con la bomba  $v_2$ , y  $h_4$  con la bomba  $v_1$ . Además de la combinación de lazos que sugiere RGA, se va a analizar la combinación opuesta, es decir,  $h_1$  con  $v_1$ ,  $h_2$  con  $v_2$ ,  $h_3$  con  $\gamma_2$ , y  $h_4$  con  $\gamma_1$ . Estas dos combinaciones no coinciden entre si en ningún lazo de control.

De manera general la metodología propuesta puede ser aplicada directamente sobre sistemas multivariables no lineales, aunque para acotar el estudio del conjunto de posibles combinaciones de lazos de control puede ser útil indagar inicialmente las ganancias relativas del sistema (calculando RGA) en cada punto de operación, de esta forma se analizaría solo aquellos lazos de control donde los elementos de RGA sean mayores que cero (que en principio son las combinaciones viables para controlar el sistema). Esto reduciría el número de MOPs a estudiar y por tanto el coste computacional de la metodología propuesta.

El desempeño de cada combinación de lazos de control sugeridos por RGA es analizado con la metodología propuesta en esta tesis para poder elegir el óptimo incorporando las preferencias del diseñador para controlar al sistema MIMO no lineal presentado.

Se plantean dos conceptos de diseño:  $\mathbf{c}_1$  (lazos de control  $LP_1$ ); y  $\mathbf{c}_2$  (lazos de control  $LP_2$ ), se usan controladores PIs de un grado de libertad con antiwindup como se muestra en (4.126)-(4.133). Se plantea un MOP para cada concepto de diseño y a su vez cada concepto de diseño tiene ocho objetivos de diseño como se muestra en (4.134)-(4.140). Cuatro objetivos se plantean para poder analizar las compensaciones entre el IAE de cada salida ( $h_1, h_2, h_3, h_4$ ) y

los cuatro objetivos restantes para poder analizar las compensaciones entre el IADU de cada entrada  $(v_1, v_2, \gamma_1, \gamma_2)$ . Se proponen MOPs con ocho objetivos de diseño, esto proporciona más información a un diseñador para elegir un lazo de control óptimo.

$$\mathbf{c}_1 = [C_{h_1, \hat{u}_1}^{c_1}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c_1}, C_{h_3, \hat{u}_3}^{c_1}, C_{h_4, \hat{u}_4}^{c_1}] \quad (4.126)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

$$C_{h_1, \hat{u}_1}^{c_1} = \frac{K_1^{c_1}(s + 1/Ti_1^{c_1})}{s}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c_1} = \frac{K_2^{c_1}(s + 1/Ti_2^{c_1})}{s} \quad (4.128)$$

$$C_{h_3, \hat{u}_3}^{c_1} = \frac{K_3^{c_1}(s + 1/Ti_3^{c_1})}{s}, C_{h_4, \hat{u}_4}^{c_1} = \frac{K_4^{c_1}(s + 1/Ti_4^{c_1})}{s}$$

$$\mathbf{x}^{c_1} = [K_1^{c_1}, Ti_1^{c_1}, K_2^{c_1}, Ti_2^{c_1}, K_3^{c_1}, Ti_3^{c_1}, K_4^{c_1}, Ti_4^{c_1}] \quad (4.129)$$

$$\mathbf{c}_2 = [C_{h_1, \hat{u}_1}^{c_2}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c_2}, C_{h_3, \hat{u}_3}^{c_2}, C_{h_4, \hat{u}_4}^{c_2}] \quad (4.130)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

$$C_{h_1, \hat{u}_1}^{c_2} = \frac{K_1^{c_2}(s + 1/Ti_1^{c_2})}{s}, C_{h_2, \hat{u}_2}^{c_2} = \frac{K_2^{c_2}(s + 1/Ti_2^{c_2})}{s} \quad (4.132)$$

$$C_{h_3, \hat{u}_3}^{c_2} = \frac{K_3^{c_2}(s + 1/Ti_3^{c_2})}{s}, C_{h_4, \hat{u}_4}^{c_2} = \frac{K_4^{c_2}(s + 1/Ti_4^{c_2})}{s}$$

$$\mathbf{x}^{c_2} = [K_1^{c_2}, Ti_1^{c_2}, K_2^{c_2}, Ti_2^{c_2}, K_3^{c_2}, Ti_3^{c_2}, K_4^{c_2}, Ti_4^{c_2}] \quad (4.133)$$

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.134)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = \{J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck}), J_5(\mathbf{x}^{ck}), J_6(\mathbf{x}^{ck}), J_7(\mathbf{x}^{ck}), J_8(\mathbf{x}^{ck})\} \quad (4.135)$$

$$J_\eta(\mathbf{x}^{ck}) = \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{\substack{(h_2, h_3, h_4) = (h_2^0, h_3^0, h_4^0) \\ h_1 = h_1^0 + 1cm}} dt + \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{\substack{(h_1, h_3, h_4) = (h_1^0, h_3^0, h_4^0) \\ h_2 = h_2^0 + 1cm}} dt + \\ \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{\substack{(h_1, h_2, h_4) = (h_1^0, h_2^0, h_4^0) \\ h_3 = h_3^0 + 1cm}} dt + \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{\substack{(h_1, h_2, h_3) = (h_1^0, h_2^0, h_3^0) \\ h_4 = h_4^0 + 1cm}} dt \quad (4.136)$$

$$\begin{aligned}
 J_{\eta+4}(\mathbf{x}^{ck}) = & \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{\substack{(h_2, h_3, h_4) = (h_2^0, h_3^0, h_4^0) \\ h_1 = h_1^0 + 1cm}} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{\substack{(h_1, h_3, h_4) = (h_1^0, h_3^0, h_4^0) \\ h_2 = h_2^0 + 1cm}} dt + \\
 & \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{\substack{(h_1, h_2, h_4) = (h_1^0, h_2^0, h_4^0) \\ h_3 = h_3^0 + 1cm}} dt + \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{\substack{(h_1, h_2, h_3) = (h_1^0, h_2^0, h_3^0) \\ h_4 = h_4^0 + 1cm}} dt
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

$\eta = 1$  hasta 4

$t_f = 1000$  segundos

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \overline{\mathbf{x}}^{ck} \tag{4.138}$$

$$\begin{aligned}
 J_1(\mathbf{x}^{ck}) \leq 8000, J_2(\mathbf{x}^{ck}) \leq 10000, J_3(\mathbf{x}^{ck}) \leq 2000, \\
 J_4(\mathbf{x}^{ck}) \leq 5000, J_5(\mathbf{x}^{ck}) \leq 3, J_6(\mathbf{x}^{ck}) \leq 3,
 \end{aligned} \tag{4.139}$$

$$J_7(\mathbf{x}^{ck}) \leq 1, J_8(\mathbf{x}^{ck}) \leq 1$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, T i_1^{ck}, K_2^{ck}, T i_2^{ck}, K_3^{ck}, T i_3^{ck}, K_4^{ck}, T i_4^{ck}] \tag{4.140}$$

Los límites de  $\mathbf{x}^{ck}$  se muestran en la tabla 4.27. Estos límites se ajustaron teniendo en consideración los controladores de referencia propuestos en [84], posteriormente se los comparará con los controladores obtenidos con la metodología propuesta.

Límites de $\mathbf{x}^{ck}$								
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$T i_1^{c1}$	$K_2^{c1}$	$T i_2^{c1}$	$K_3^{c1}$	$T i_3^{c1}$	$K_4^{c1}$	$T i_4^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.1	10	0.1	10	0.1	10	0.1	10
$\overline{\mathbf{x}}^{c1}$	1	50	1	30	1	50	1	100
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$T i_1^{c2}$	$K_2^{c2}$	$T i_2^{c2}$	$K_3^{c2}$	$T i_3^{c2}$	$K_4^{c2}$	$T i_4^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	0.1	10	0.1	10	-1	10	-1	10
$\overline{\mathbf{x}}^{c2}$	2	100	2	100	-0.1	100	-0.1	50

**Tabla 4.27:** Límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  para el tercer ejemplo.

En el proceso de optimización multiobjetivo de cada MOP se obtuvo los frentes de Pareto que se muestran en la figura 4.28. Es posible visualizar que el concepto de diseño  $\mathbf{c}_1$  (lazos de control  $LP_1$ ) tiene un mejor desempeño para seguimiento de referencia de  $h_1$  y  $h_2$  comparado con el concepto de diseño  $\mathbf{c}_2$  (lazos de control  $LP_2$ ), mientras lo opuesto es verdad para los niveles  $h_3$  y  $h_4$ .

Para analizar las compensaciones entre el IAE e IADU, se seleccionó una solución de cada concepto de diseño ( $PE$  y  $PF$ ) teniendo en consideración las regiones con el mejor desempeño para  $h_1$  y  $h_2$  y también  $h_3$  y  $h_4$ . Las respuestas de los controladores en  $PE$  y  $PF$  se muestran en la figura 4.29.

Controlador PI- $LP_2$		Controlador PI- $LP_1$	
Parámetros	$PF$	Parámetros	$PE$
$K_1^{c2}$	0.152	$K_1^{c1}$	0.764
$Ti_1^{c2}$	51.95	$Ti_1^{c1}$	31.14
$K_2^{c2}$	0.074	$K_2^{c1}$	0.095
$Ti_2^{c2}$	57.39	$Ti_2^{c1}$	24.13
$K_3^{c2}$	-0.259	$K_3^{c1}$	0.884
$Ti_3^{c2}$	88.78	$Ti_3^{c1}$	26.29
$K_4^{c2}$	-0.579	$K_4^{c1}$	0.599
$Ti_4^{c2}$	24.32	$Ti_4^{c1}$	40.39
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	387.79	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>17.50</b>
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	818.82	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	<b>28.58</b>
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	<b>20.25</b>	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	293.84
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	<b>75.08</b>	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	107.39
$J_5(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.505</b>	$J_5(\mathbf{x}^{c1})$	2.42
$J_6(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.476</b>	$J_6(\mathbf{x}^{c1})$	0.518
$J_7(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.319</b>	$J_7(\mathbf{x}^{c1})$	0.904
$J_8(\mathbf{x}^{c2})$	<b>0.391</b>	$J_8(\mathbf{x}^{c1})$	0.768

**Tabla 4.28:** Controladores PIs seleccionados en la figura 4.28.

El controlador en  $PE$  tiene un mejor desempeño que el controlador en  $PF$  para seguimiento de referencia de los niveles  $h_1$  y  $h_2$  como se muestra en la figura 4.29 y en los objetivos  $J_1(\mathbf{x}^{c1})$  y  $J_2(\mathbf{x}^{c1})$  mostrados en la tabla 4.28.

El controlador en  $PF$  tiene mejor desempeño que el controlador en  $PE$  para seguimiento de referencia de los niveles  $h_3$  y  $h_4$  como se muestra en figura 4.29 y en los objetivos  $J_3(\mathbf{x}^{c2})$  y  $J_4(\mathbf{x}^{c2})$  mostrados en la tabla 4.28. Con respecto a los esfuerzos de control, el controlador en  $PF$  es menos agresivo que el controlador en  $PE$  como se muestra en la figura 4.30, y en los objetivos  $J_5(\mathbf{x}^{c2})$ ,  $J_6(\mathbf{x}^{c2})$ ,  $J_7(\mathbf{x}^{c2})$ ,  $J_8(\mathbf{x}^{c2})$  como se muestra en la tabla 4.28.

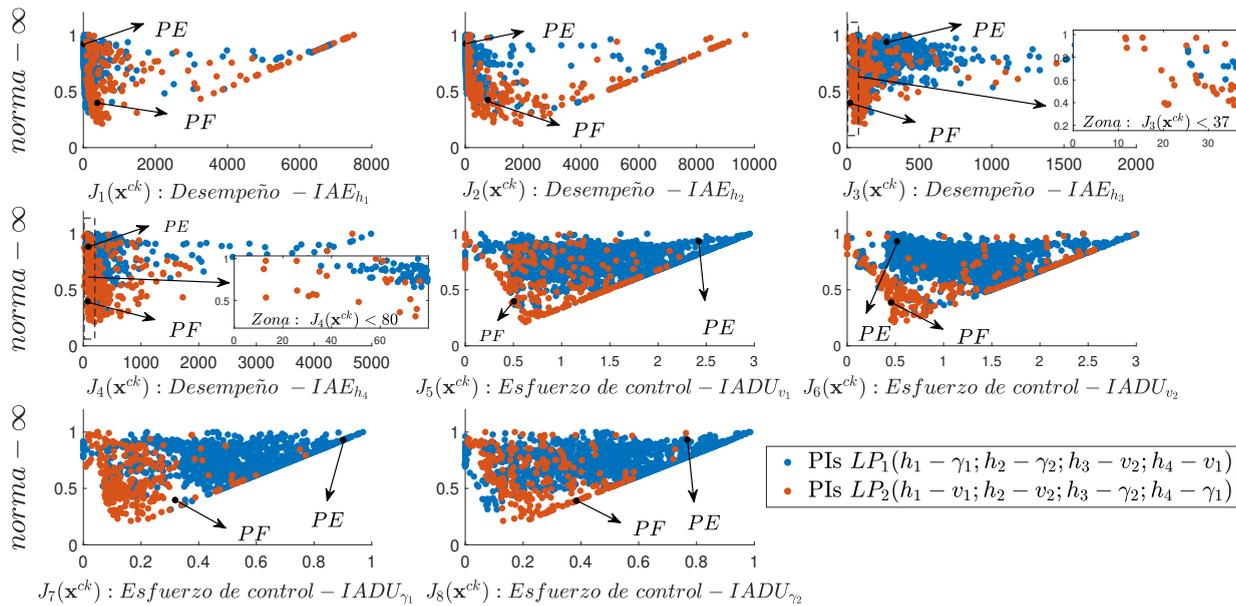


Figura 4.28: Representación de frentes de Pareto para los lazos  $LP_1$  y  $LP_2$  usando LD.

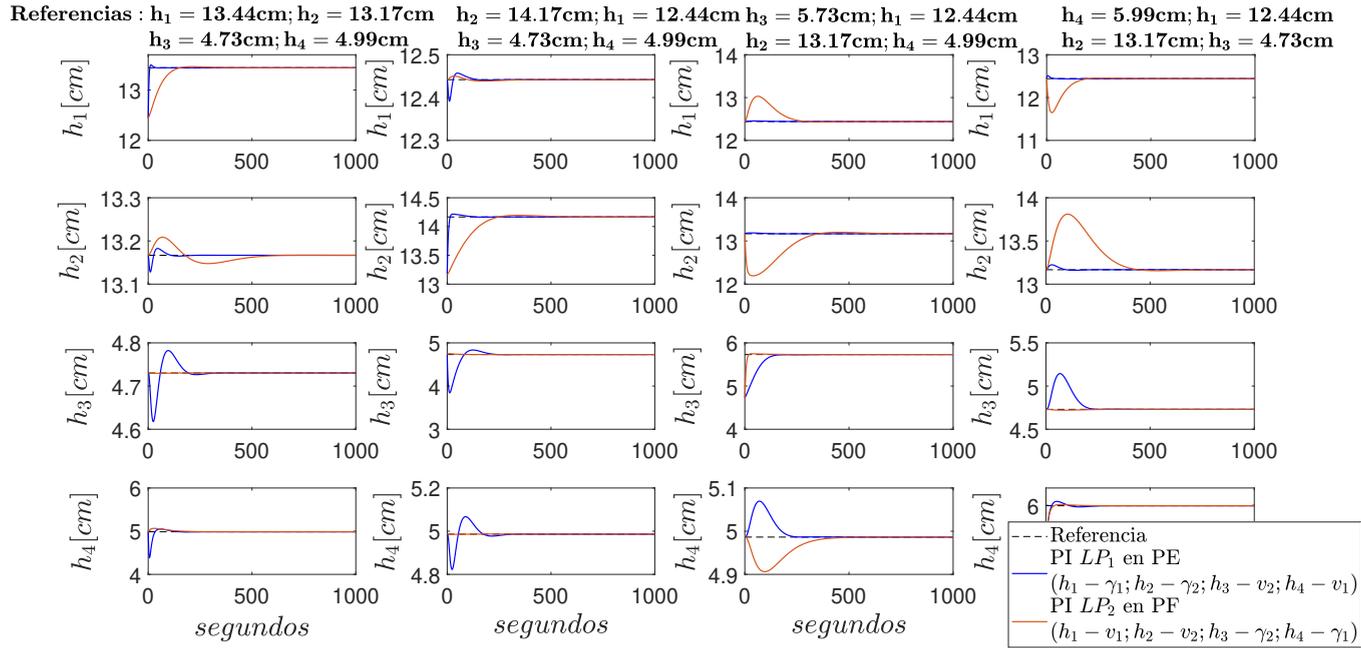
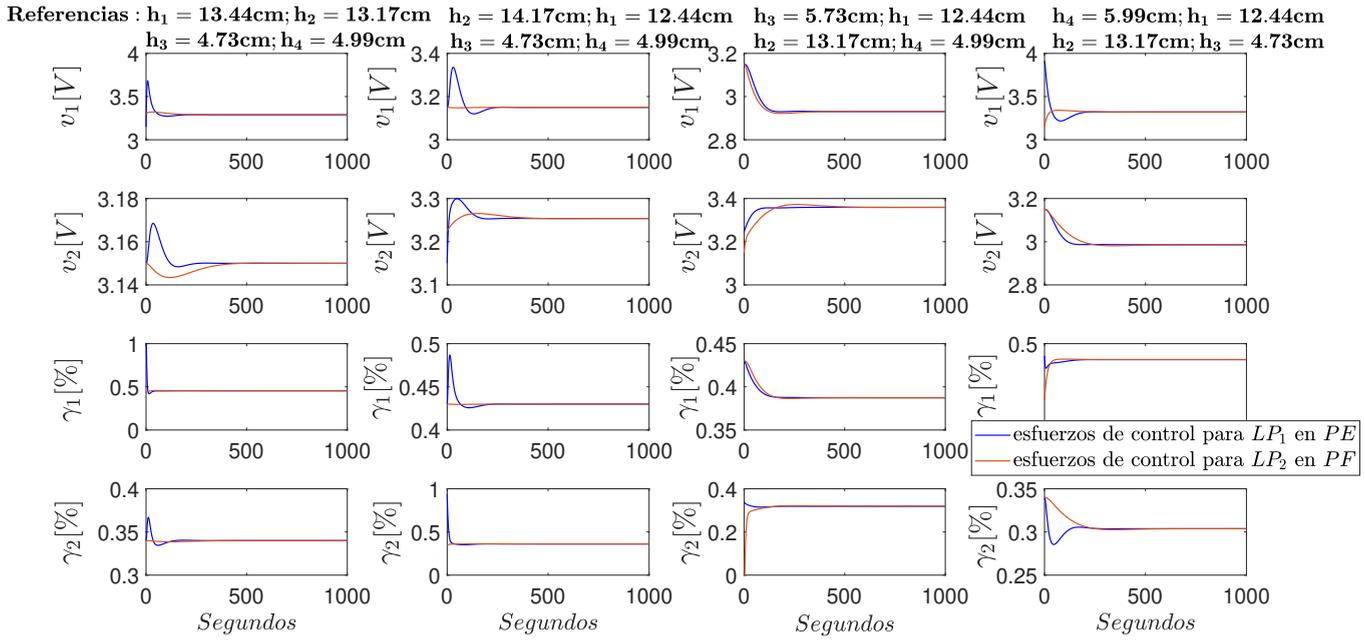


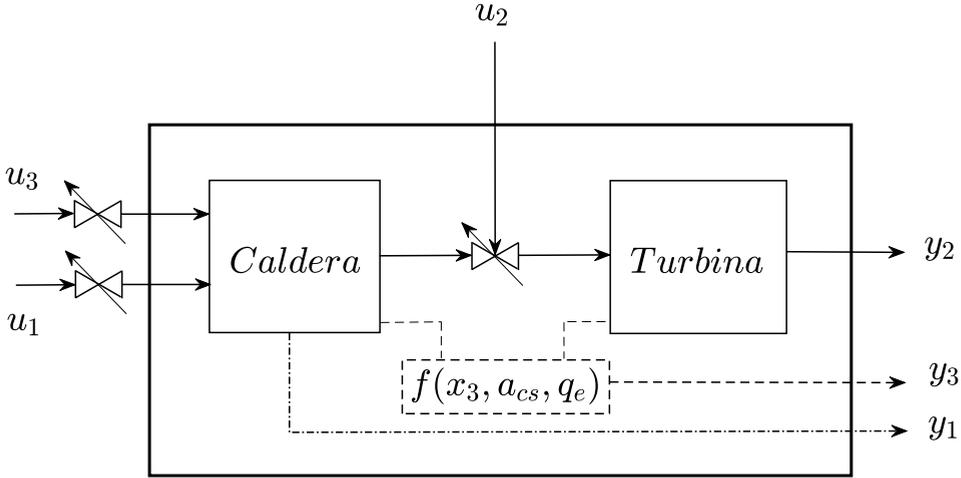
Figura 4.29: Salidas del sistema para los controladores en PE y PF.



**Figura 4.30:** Esfuerzos de control para los controladores en  $PE$  y  $PF$ .

#### 4.3.4 Ejemplo 4: unidad caldera-turbina 3 x 3

En este ejemplo se analiza un sistema MIMO no lineal denominado unidad caldera-turbina, el cual se usa para la generación de energía eléctrica y fue propuesto en [5]. El sistema presenta tres entradas y tres salidas como se muestra en el diagrama esquemático de la figura 4.31.



**Figura 4.31:** Diagrama esquemático de la unidad caldera-turbina definido en (4.141), (4.145).

El sistema de la figura 4.31 presenta altas no linealidades debido al fuerte acoplamiento entre sus variables de entrada-salida [58], [144]. La dinámica del sistema fue modelada por [5] y está fundamentada en el grupo caldera-turbina P16/G16 de la planta Sydvenska Kraft AB en Malmö, Suecia [29], [60]. El modelo en primeros principios del sistema de la figura 4.31 se muestra en las ecuaciones (4.141)-(4.145).

$$\dot{x}_1 = -0.0018u_2x_1^{9/8} + 0.9u_1 - 0.15u_3 \quad (4.141)$$

$$\dot{x}_2 = (0.073u_2 - 0.016)x_1^{9/8} - 0.1x_2 \quad (4.142)$$

$$\dot{x}_3 = (141u_3 - (1.1u_2 - 0.19)x_1)/85 \quad (4.143)$$

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 \quad (4.144)$$

$$y_3 = 0.05(0.13073x_3 + 100a_{cs} + q_e/9 - 67.975) \quad (4.145)$$

Donde:  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  son las variables de estado del sistema y representan;  $x_1$ : presión de la caldera [ $Kg/cm^2$ ];  $x_2$ : potencia eléctrica de salida [ $MW$ ];  $x_3$ : densidad del fluido [ $Kg/m^3$ ].

Las entradas se denotan por  $u_1$ ,  $u_2$ , y  $u_3$  y representan;  $u_1$ : posición de la válvula para el flujo de combustible;  $u_2$ : posición de la válvula para el control del vapor;  $u_3$ : posición de la válvula para el control de flujo de agua de alimentación.

La salida  $y_1$  representa la presión de la caldera en [ $Kg/cm^2$ ];  $y_2$  es la potencia eléctrica de salida en [ $MW$ ]; y la salida  $y_3$  representa el nivel del agua en el colector de la caldera en [ $m$ ] con respecto del nivel de referencia para el punto de operación nominal del sistema. La salida  $y_3$  puede ser tanto positiva como negativa y depende de  $a_{cs}$  y  $q_e$  que representan la calidad del vapor y la tasa de evaporación en [ $Kg/s$ ] respectivamente y se detallan en las ecuaciones (4.146), (4.147).

$$a_{cs} = \frac{(1 - 0.001538x_3)(0.8x_1 - 25.6)}{x_3(1.0394 - 0.0012304x_1)} \quad (4.146)$$

$$q_e = (0.854u_2 - 0.147)x_1 + 45.59u_1 - 2.514u_3 - 2.096 \quad (4.147)$$

Los actuadores del sistema presentan limitaciones físicas y tienen restricciones como se detalla en las ecuaciones (4.148)-(4.151).

$$0 \leq u_i \leq 1; i = 1, 2, 3 \quad (4.148)$$

$$-0.007 \leq \dot{u}_1 \leq 0.007 \quad (4.149)$$

$$-2 \leq \dot{u}_2 \leq 0.02 \quad (4.150)$$

$$-0.05 \leq \dot{u}_3 \leq 0.05 \quad (4.151)$$

Algunos puntos de operación típicos del sistema descrito en [5] son propuestos en [121], [144] y se muestran en la tabla 4.29.

El punto de operación nominal del sistema de la figura 4.31 de acuerdo con la literatura de control [5], [144] es usualmente el punto  $\varphi_4$ . Al linealizar el sistema en este punto de operación se obtiene la planta propuesta en [60] y que se muestra en la ecuación (4.152).

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \frac{0.9}{s + 0.002509} \\
 G_{12} &= \frac{-0.34904}{s + 0.002509} \\
 G_{13} &= \frac{-0.15}{s + 0.002509} \\
 G_{21} &= \frac{-1.3878 \cdot 10^{-17}(s - 4.502 \cdot 10^{15})}{(s + 0.002509)(s + 0.1)} \\
 G_{22} &= \frac{14.1555(s + 0.0007969)}{(s + 0.002509)(s + 0.1)} \\
 G_{23} &= \frac{-0.010414}{(s + 0.002509)(s + 0.1)} \\
 G_{31} &= \frac{0.25328(s - 0.003871)(s + 0.02892)}{(s + 0.002509)s} \\
 G_{32} &= \frac{0.5124(s - 0.01535)(s + 0.0007)}{(s + 0.002509)s} \\
 G_{33} &= \frac{-0.013967(s - 0.4918)(s + 0.003539)}{(s + 0.002509)s}
 \end{aligned}$$

P. operación ( $\wp$ )	$\wp_1$	$\wp_2$	$\wp_3$	$\wp_4$	$\wp_5$	$\wp_6$	$\wp_7$
$x_1^0$	75.60	86.40	97.20	108	118.8	129.6	140.4
$x_2^0$	15.27	36.65	50.52	66.65	85.06	105.8	128.9
$x_3^0$	299.6	324.4	385.2	428	470.8	513.6	556.4
$u_1^0$	0.156	0.209	0.271	0.34	0.418	0.505	0.6
$u_2^0$	0.483	0.552	0.621	0.69	0.759	0.828	0.897
$u_3^0$	0.183	0.256	0.340	0.433	0.543	0.663	0.793
$y_3^0$	-0.97	-0.65	-0.32	0	0.32	0.64	0.98

**Tabla 4.29:** Puntos de operación de la unidad caldera-turbina.

Es importante observar en la ecuación (4.152) que la salida  $y_3$  de la planta tiene un polo en el origen ( $s = 0$ ). El RGA del sistema de acuerdo con [60] se muestra en la ecuación (4.153).

$$\Lambda = \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \left( \begin{array}{ccc} 0.3119 & \mathbf{0.6824} & 0.0058 \\ \mathbf{0.9294} & 0.3176 & -0.2474 \\ -0.2413 & 0 & \mathbf{1.2413} \end{array} \right) \end{array} \quad (4.153)$$

De acuerdo con la metodología RGA la combinación de lazos entrada-salida sugerido para controlar el sistema de manera descentralizada es:  $y_1 - u_2; y_2 - u_1; y_3 - u_3$ . Es posible observar en la ecuación (4.153) que existe otra combinación disponible que podría posibilitar el control de sistema:  $y_1 - u_1; y_2 - u_2; y_3 - u_3$ .

Aunque existen otras combinaciones de lazos de control estas no se analizan debido a que RGA para estas combinaciones tiene un valor nulo o negativo. Esto contribuye a reducir el número de conceptos de diseño y el coste computacional de la metodología. Se estudiarán solo los lazos de control donde RGA tiene valores mayores que cero.

Para analizar con mayor detalle como elegir los lazos entrada-salida óptimos para controlar el sistema de la figura 4.31 se aplica la metodología propuesta. Se establecen dos conceptos de diseño  $\mathbf{c}_1$  (lazos de control  $LP_1$ ); y  $\mathbf{c}_2$  (lazos de control  $LP_2$ ). Se usan controladores PIs de un grado de libertad con antiwindup para limitar las acciones de control como se muestra en (4.154)-(4.161).

$$\mathbf{c}_1 = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_1}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_1}, C_{y_3, \hat{u}_3}^{c_1}] \quad (4.154)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

$$C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_1} = \frac{K_1^{c_1}(s + 1/Ti_1^{c_1})}{s} \quad (4.156)$$

$$C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_1} = \frac{K_2^{c_1}(s + 1/Ti_2^{c_1})}{s}$$

$$C_{y_3, \hat{u}_3}^{c_1} = \frac{K_3^{c_1}(s + 1/Ti_3^{c_1})}{s}$$

$$\mathbf{x}^{c_1} = [K_1^{c_1}, Ti_1^{c_1}, K_2^{c_1}, Ti_2^{c_1}, K_3^{c_1}, Ti_3^{c_1}] \quad (4.157)$$

$$\mathbf{c}_2 = [C_{y_1, \hat{u}_1}^{c_2}, C_{y_2, \hat{u}_2}^{c_2}, C_{y_3, \hat{u}_3}^{c_2}] \quad (4.158)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned} C_{y_1, \hat{u}_1}^{c2} &= \frac{K_1^{c2}(s + 1/Ti_1^{c2})}{s} \\ C_{y_2, \hat{u}_2}^{c2} &= \frac{K_2^{c2}(s + 1/Ti_2^{c2})}{s} \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} C_{y_3, \hat{u}_3}^{c2} &= \frac{K_3^{c2}(s + 1/Ti_3^{c2})}{s} \\ \mathbf{x}^{c2} &= [K_1^{c2}, Ti_1^{c2}, K_2^{c2}, Ti_2^{c2}, K_3^{c2}, Ti_3^{c2}] \end{aligned} \quad (4.161)$$

Se plantea un MOP para cada concepto de diseño, donde cada MOP tiene seis objetivos de diseño. Tres objetivos analizan el desempeño de cada una de las salidas ( $y_1, y_2, y_3$ ) aplicando el IAE y los tres objetivos restantes analizan los esfuerzos de control del sistema ( $u_1, u_2, u_3$ ) aplicando el IADU. De esta forma se evalúa de manera adecuada el desempeño de cada combinación de lazos entrada-salida disponible para controlar el sistema MIMO. Para el punto de operación nominal del sistema la salida  $y_3$  permanece en cero, por lo cual se plantea cada MOP como se detalla en las ecuaciones (4.162)-(4.168).

$$\min_{\mathbf{x}^{ck}} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) \quad (4.162)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{ck}) = [J_1(\mathbf{x}^{ck}), J_2(\mathbf{x}^{ck}), J_3(\mathbf{x}^{ck}), J_4(\mathbf{x}^{ck}), J_5(\mathbf{x}^{ck}), J_6(\mathbf{x}^{ck})] \quad (4.163)$$

$$\begin{aligned} J_\eta(\mathbf{x}^{ck}) &= \int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{r_1=y_1^0+\Delta y_1}^{(r_2, r_3)=(y_2^0, y_3^0)} dt + \\ &\int_0^{t_f} |e_\eta| \Big|_{r_2=y_2^0+\Delta y_1}^{(r_1, r_3)=(y_1^0, y_3^0)} dt \end{aligned} \quad (4.164)$$

$$\begin{aligned} J_{\eta+3}(\mathbf{x}^{ck}) &= \int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{r_1=y_1^0+\Delta y_1}^{(r_2, r_3)=(y_2^0, y_3^0)} dt + \\ &\int_0^{t_f} \left| \frac{du_\eta}{dt} \right| \Big|_{r_2=y_2^0+\Delta y_2}^{(r_1, r_3)=(y_1^0, y_3^0)} dt \end{aligned} \quad (4.165)$$

$$\eta = 1 \text{ hasta } 3$$

$$t_f = 500 \text{ segundos}$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{ck} \leq \mathbf{x}^{ck} \leq \overline{\mathbf{x}}^{ck} \quad (4.166)$$

$$J_1(\mathbf{x}^{ck}) \leq 12 \cdot 10^4, J_2(\mathbf{x}^{ck}) \leq 2.5 \cdot 10^5, J_3(\mathbf{x}^{ck}) \leq 600, \quad (4.167)$$

$$J_4(\mathbf{x}^{ck}) \leq 150, J_5(\mathbf{x}^{ck}) \leq 50, J_6(\mathbf{x}^{ck}) \leq 200$$

$$\mathbf{x}^{ck} = [K_1^{ck}, Ti_1^{ck}, K_2^{ck}, Ti_2^{ck}, K_3^{ck}, Ti_3^{ck}] \quad (4.168)$$

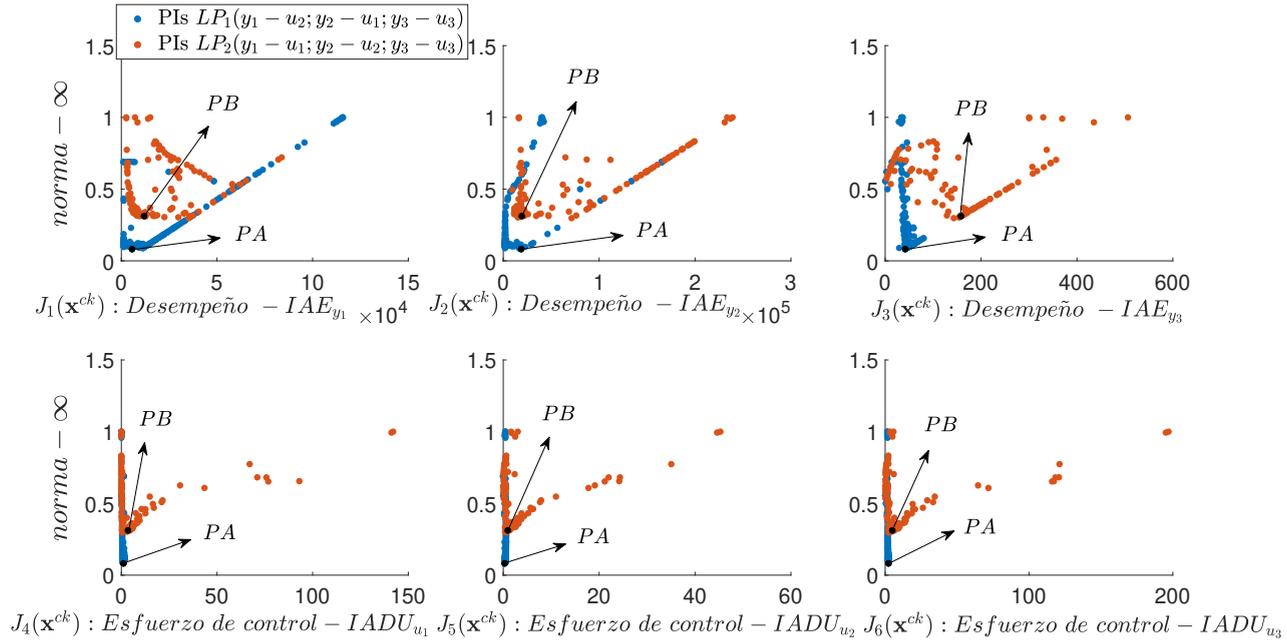
Límites de $\mathbf{x}^{ck}$						
$\mathbf{x}^{c1}$	$K_1^{c1}$	$Ti_1^{c1}$	$K_2^{c1}$	$Ti_2^{c1}$	$K_3^{c1}$	$Ti_3^{c1}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c1}$	0.001	10	0.001	5	5	15
$\bar{\mathbf{x}}^{c1}$	1	50	1	20	10	30
$\mathbf{x}^{c2}$	$K_1^{c2}$	$Ti_1^{c2}$	$K_2^{c2}$	$Ti_2^{c2}$	$K_3^{c2}$	$Ti_3^{c2}$
$\underline{\mathbf{x}}^{c2}$	0.001	40	-1	50	5	50
$\bar{\mathbf{x}}^{c2}$	1	60	0.1	70	10	150

**Tabla 4.30:** Límites de los vectores de decisión  $\mathbf{x}^{c1}$  y  $\mathbf{x}^{c2}$  para el cuarto ejemplo.

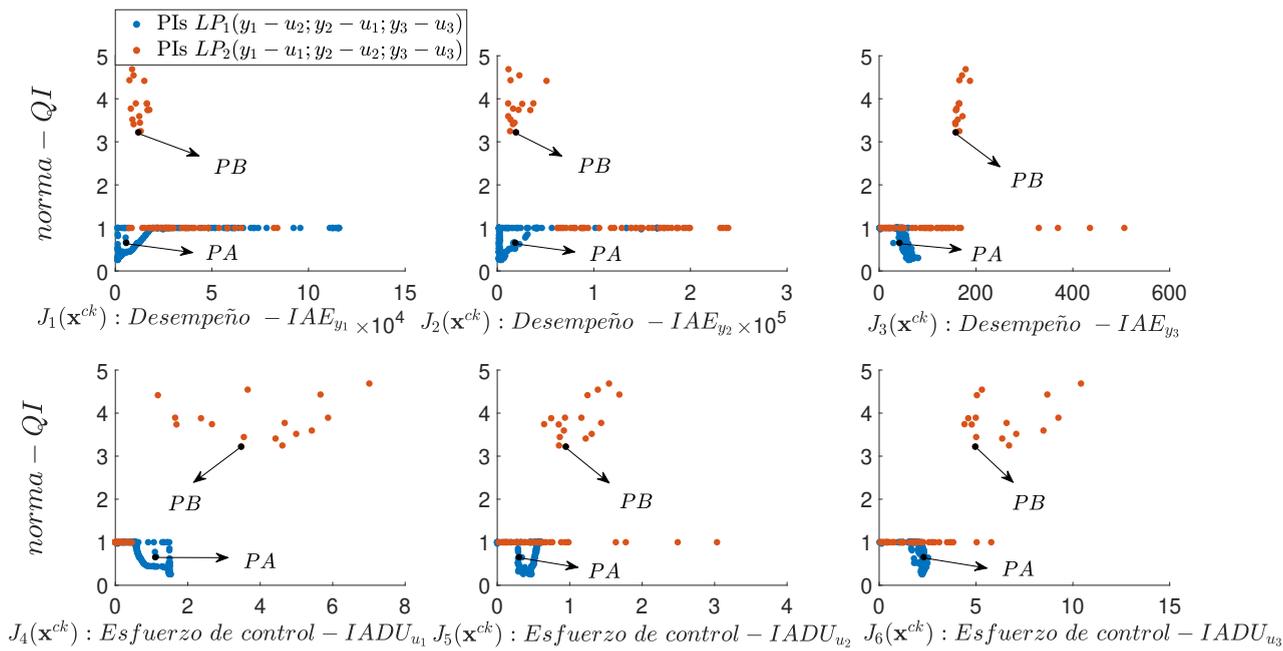
Los límites de  $\mathbf{x}^{ck}$  se muestran en la tabla 4.30. Estos límites se establecieron tomando en consideración los controladores de referencia propuestos en [144].

En el proceso de optimización multiobjetivo de cada MOP se obtuvo los frentes de Pareto que se muestran en la figuras 4.32 y 4.33. En la figura 4.32 se aplicó la norma- $\infty$  en la representación de cada frente de Pareto para realizar un análisis de compensaciones entre los objetivos de diseño de cada MOP. Se puede observar en los objetivos  $J_1$ ,  $J_2$ , y  $J_3$  de la figura 4.32 que el control  $LP_1$  tiene mejores prestaciones para seguimiento de referencias de las salidas  $y_1, y_2, y_3$  comparado con el control  $LP_2$  ya que  $LP_1$  cubre una región que  $LP_2$  no alcanza y que corresponde a los mejores desempeños para cada una de las salidas, especialmente para  $y_1$  e  $y_2$ . Esta región corresponde a:  $J_1(\mathbf{x}^{c1}) < 2557$ ,  $J_2(\mathbf{x}^{c1}) < 9476$ ,  $J_3(\mathbf{x}^{c1}) < 2.47$ . Con respecto a las acciones de control del sistema se puede observar en los objetivos  $J_4$ ,  $J_5$ , y  $J_6$  de la figura 4.32 que el control  $LP_1$  consigue menores esfuerzos de control para controlar el sistema comparado con el control  $LP_2$ .

En la figura 4.33 se observa los frentes de Pareto de cada concepto de diseño  $LP_1$  y  $LP_2$  aplicando la norma  $QI$ . Es posible observar que el control  $LP_1$  tiene una región que domina al control  $LP_2$ , esta zona corresponde a las soluciones del frente de  $LP_1$  donde  $QI < 1$ , es decir, las soluciones que están bajo la unidad. Para analizar en detalle el desempeño de cada lazo  $LP_1$  y  $LP_2$  se seleccionó una solución del frente de Pareto de cada uno. La solución  $PA$  del concepto de diseño  $LP_1$  y  $PB$  del concepto de diseño  $LP_2$ .



**Figura 4.32:** Representación de frentes de Pareto para los lazos  $LP_1$  y  $LP_2$  usando LD con norma- $\infty$ .



**Figura 4.33:** Representación de frentes de Pareto para los lazos  $LP_1$  y  $LP_2$  usando LD con norma- $QI$ . Solo se grafican las soluciones donde  $QI < 5$ .

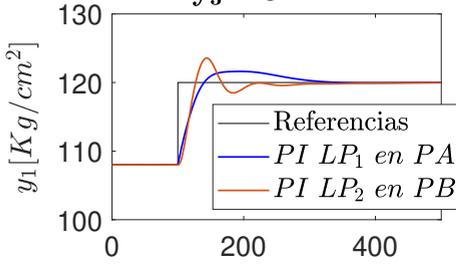
La solución  $PA$  del concepto de diseño  $LP_1$  corresponde a la solución con menores prestaciones en todos sus objetivos de diseño (como se usó la norma- $\infty$  esta solución está en el codo inferior de su frente de Pareto) y la solución  $PB$  está próxima al codo inferior de su frente de Pareto (se seleccionó así tratando que los objetivos de diseño de  $LP_2$  no se deterioren mucho). Aunque los frentes de Pareto mostrados en las figuras 4.32 y 4.33 revelan que el concepto de diseño  $LP_1$  tiene mejores prestaciones que el concepto  $LP_2$  para controlar el sistema, es importante analizar las respuestas del sistema en lazo cerrado.

Inicialmente el sistema se mueve del punto de operación nominal a un punto de operación cercano, por lo cual para  $t=100$  segundos la presión de la caldera  $y_1$  cambia de  $108 \text{ Kg/cm}^2$  hasta  $120 \text{ Kg/cm}^2$ , la potencia eléctrica de salida  $y_2$  de  $66.65 \text{ MW}$  a  $100 \text{ MW}$  y el nivel de agua en el colector de caldera  $y_3$  se mantiene en su valor nominal ( $0 \text{ m}$ ). Las respuestas del sistema se muestran en la figura 4.34, donde se puede observar que ambos controladores  $PA$  y  $PB$  pueden estabilizar el sistema, pero está claro que el controlador en  $PA$  (control  $LP_1$ ) tiene mejor desempeño que el controlador en  $PB$  (control  $LP_2$ ). Lo comentado anteriormente se cuantifica en los objetivos de diseño  $J_1, J_2, J_3$  mostrados en la tabla 4.31. Así también, los esfuerzos de control para ambos controladores se muestran en la figura 4.35, donde se observa acciones de control menos agresivas del controlador en  $PA$  comparado con las acciones del controlador en  $PB$  (esto se cuantifica en los objetivos de diseño  $J_4, J_5, y, J_6$  en la tabla 4.31).

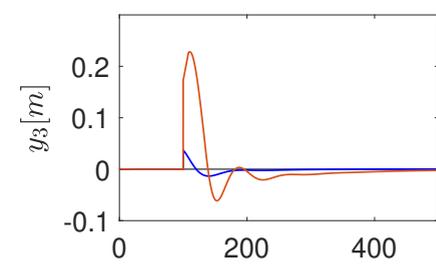
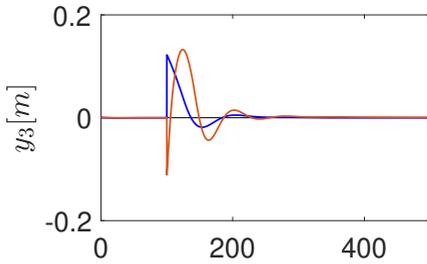
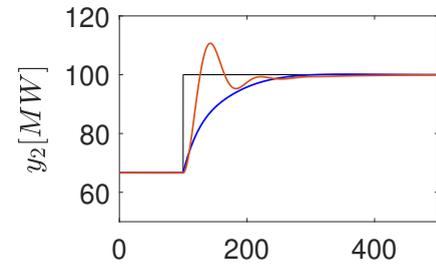
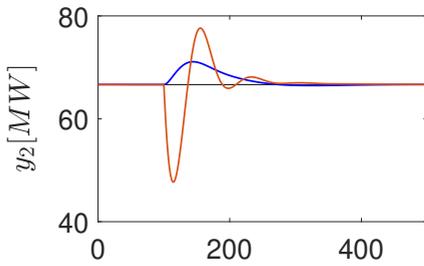
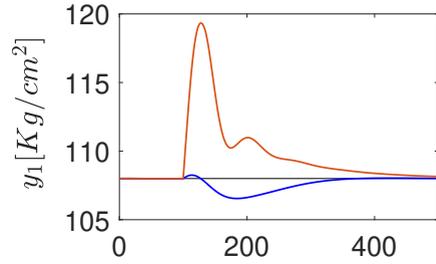
Controlador PI- $LP_2$		Controlador PI- $LP_1$	
<i>Parámetros</i>	<i>PB</i>	<i>Parámetros</i>	<i>PA</i>
$K_1^{c2}$	0.0236	$K_1^{c1}$	0.0382
$Ti_1^{c2}$	59.17	$Ti_1^{c1}$	49.42
$K_2^{c2}$	-0.01673	$K_2^{c1}$	0.00187
$Ti_2^{c2}$	59.98	$Ti_2^{c1}$	11.66
$K_3^{c2}$	7.31	$K_3^{c1}$	9.83
$Ti_3^{c2}$	145.35	$Ti_3^{c1}$	16.42
$J_1(\mathbf{x}^{c2})$	11913.2	$J_1(\mathbf{x}^{c1})$	<b>5618.2</b>
$J_2(\mathbf{x}^{c2})$	19357.5	$J_2(\mathbf{x}^{c1})$	<b>18719.3</b>
$J_3(\mathbf{x}^{c2})$	158.09	$J_3(\mathbf{x}^{c1})$	<b>41.76</b>
$J_4(\mathbf{x}^{c2})$	3.474	$J_4(\mathbf{x}^{c1})$	<b>1.103</b>
$J_5(\mathbf{x}^{c2})$	0.9462	$J_5(\mathbf{x}^{c1})$	<b>0.2999</b>
$J_6(\mathbf{x}^{c2})$	4.96	$J_6(\mathbf{x}^{c1})$	<b>2.30</b>

**Tabla 4.31:** Controladores PIs seleccionados en las figuras 4.32 y 4.33.

Referencias :  $y_1 = 120$ ;  $y_2 = 66.65$   
 $y_3 = 0$



$y_1 = 108$ ;  $y_2 = 100$ ;  $y_3 = 0$

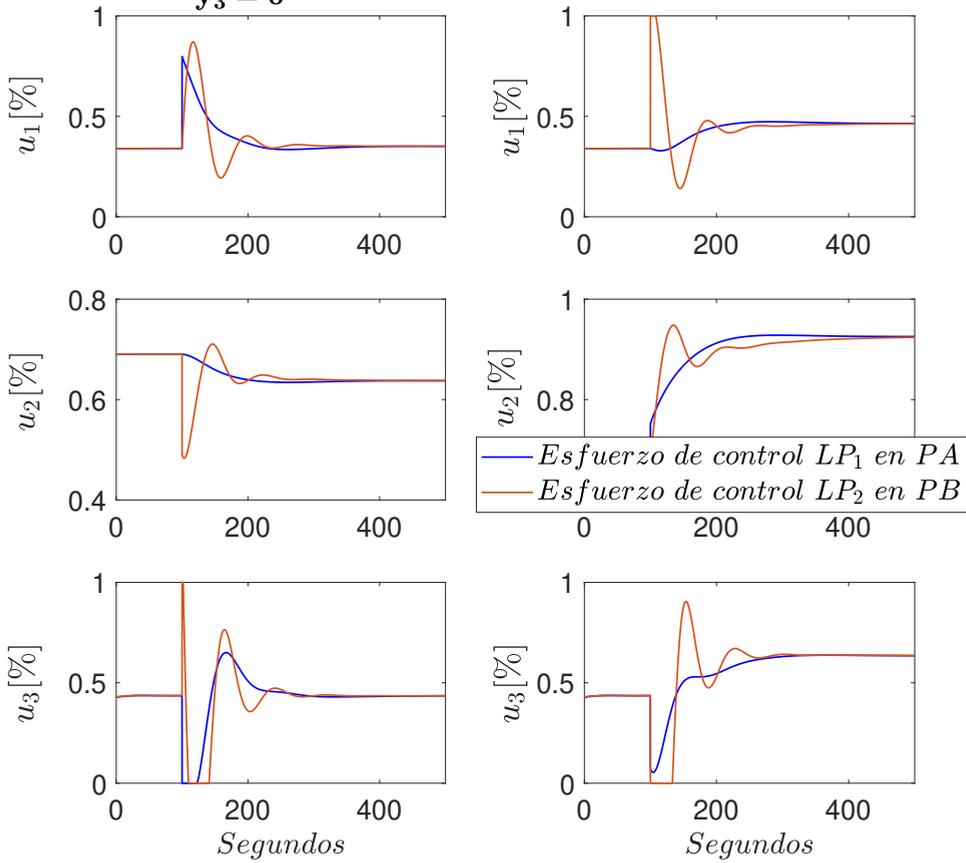


Segundos

Segundos

**Figura 4.34:** Respuestas del sistema con los controladores en  $PA$ ,  $PB$  en un punto de operación cercano al punto nominal de trabajo.

Referencias :  $y_1 = 120; y_2 = 66.65$   $y_1 = 108; y_2 = 100; y_3 = 0$   
 $y_3 = 0$



**Figura 4.35:** Esfuerzos de control para los controladores en  $PA, PB$  en un punto de operación cercano al punto nominal de trabajo.

Para analizar la no linealidad del sistema en un punto de operación alejado del punto nominal de trabajo, se simula el comportamiento del sistema cuando en  $t=100$  segundos  $y_1$  cambia de  $108 \text{ Kg/cm}^2$  a  $150 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $y_2$  de  $66.65 \text{ MW}$  a  $100 \text{ MW}$ , y el nivel de agua en el colector de caldera  $y_3$  cambia de  $0 \text{ m}$  a  $0.5 \text{ m}$ . Las respuestas del sistema se muestran en la figura 4.36 donde se puede observar que el controlador en  $PA$  (lazo de control  $LP_1$ ) sigue manteniendo un mejor desempeño para estabilizar el sistema comparado con el controlador en  $PB$  (lazo de control  $LP_2$ ). Así también los esfuerzos de control del controlador en  $PA$  presentan menores saturaciones para controlar el sistema como se muestra en la figura 4.37.

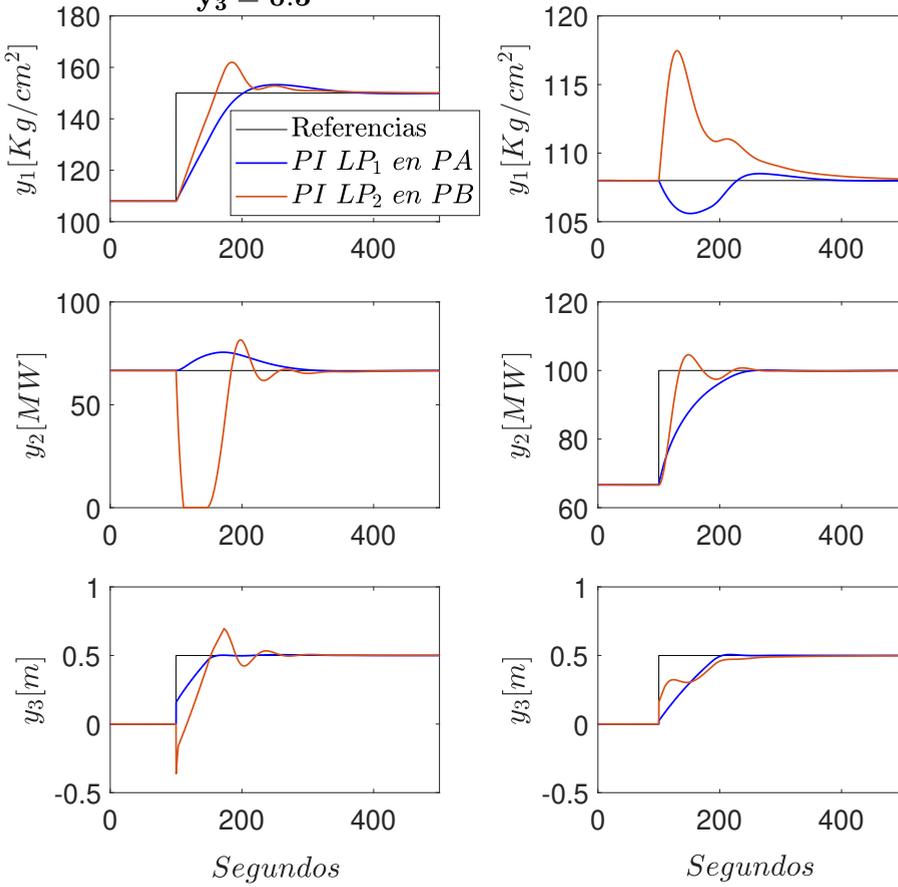
Finalmente, se analiza como responde el sistema cuando disminuye la presión en la caldera desde su valor nominal debido a un decremento de la demanda de potencia eléctrica, por lo cual también disminuye el nivel de agua en el colector de la caldera. Para generar este escenario utilizaremos los mismos controladores en  $PA$  y  $PB$  y el sistema será puesto a trabajar en el punto de operación  $\wp_2$  mostrado en la tabla 4.29. Las salidas del sistema se muestran en la figura 4.38, donde se puede observar que el controlador en  $PA$  (control  $LP_1$ ) estabiliza de mejor forma el sistema comparado con el controlador en  $PB$  (control  $LP_2$ ). Los esfuerzos de control se muestran en la figura 4.39, en donde se aprecia saturaciones en los actuadores durante un tiempo considerable.

Como conclusión final de este ejemplo se puede mencionar que el lazo de control  $LP_1$  es mejor que el  $LP_2$  en todos los objetivos de diseño, lo cual coincide con lo propuesto por RGA. Si bien el coste computacional es mucho mayor en la metodología planteada, esta inversión tiene como ventaja (recompensa) lo siguiente:

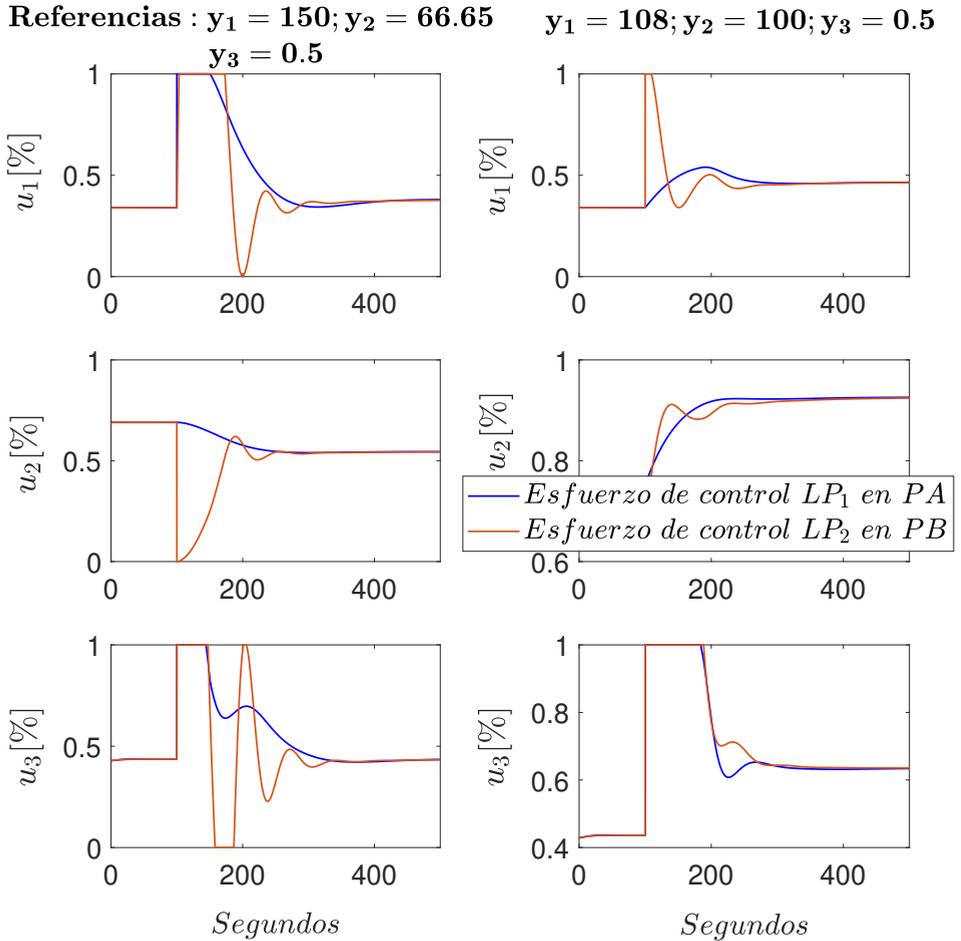
1. Se comprueba que la combinación de lazos de control  $LP_1$  es adecuada para controlar el sistema multivariable teniendo en consideración las preferencias del diseñador (objetivos de diseño).
2. Se tiene el diseño óptimo de los controladores con sus respectivos parámetros ajustados.

Referencias :  $y_1 = 150$ ;  $y_2 = 66.65$   
 $y_3 = 0.5$

$y_1 = 108$ ;  $y_2 = 100$ ;  $y_3 = 0.5$

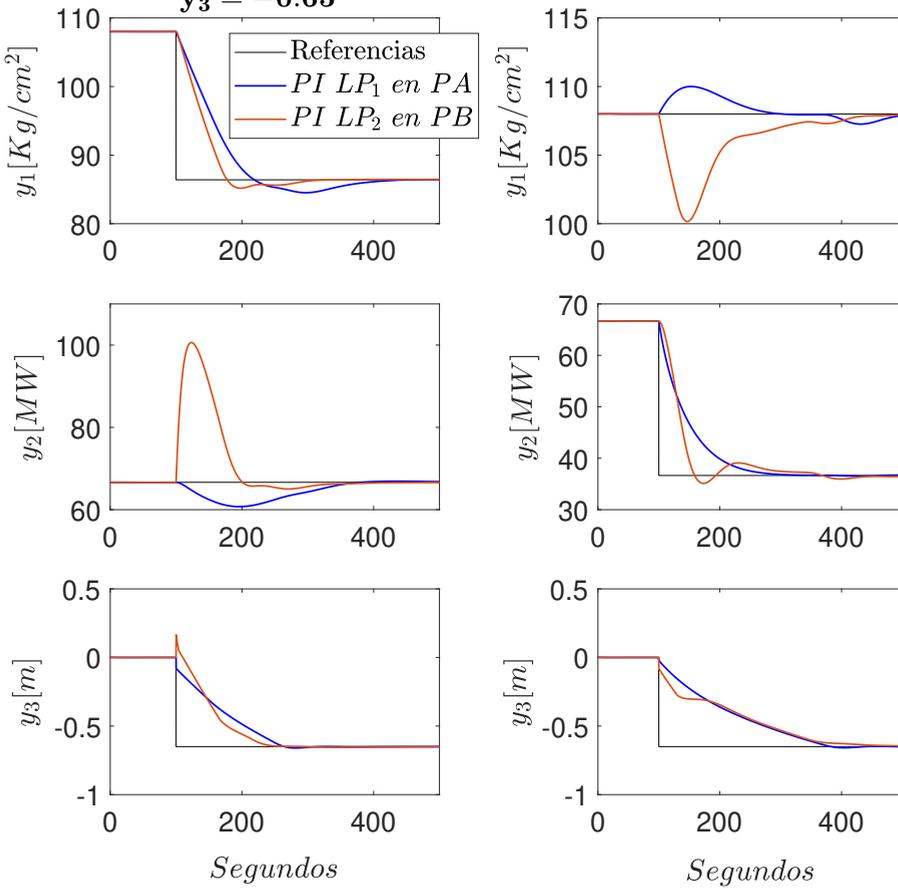


**Figura 4.36:** Respuestas del sistema con los controladores en  $PA$ ,  $PB$  en un punto de operación alejado del punto nominal de trabajo.



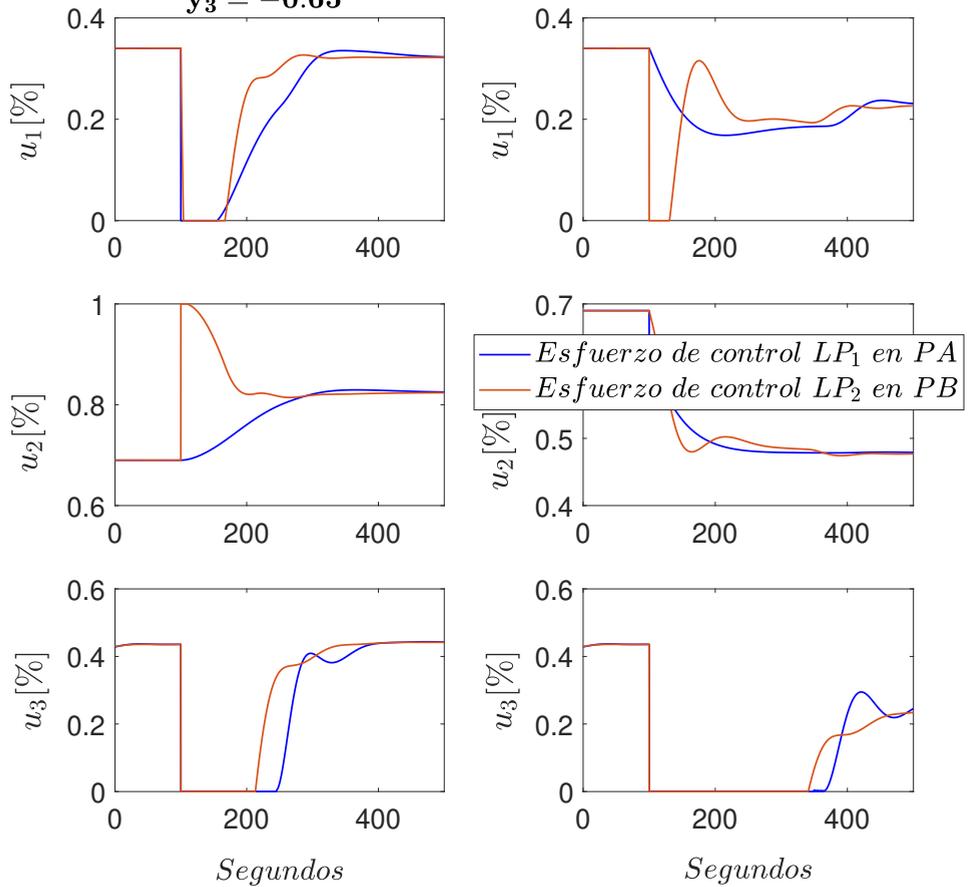
**Figura 4.37:** Esfuerzos de control para los controladores en *PA*, *PB* en un punto de operación alejado del punto nominal de trabajo.

Referencias :  $y_1 = 86.40$ ;  $y_2 = 66.65$   $y_1 = 108$ ;  $y_2 = 36.65$ ;  $y_3 = -0.65$   
 $y_3 = -0.65$



**Figura 4.38:** Respuestas del sistema para los controladores en  $PA$ ,  $PB$  en el punto de operación  $\varphi_2$ .

Referencias :  $y_1 = 86.40$ ;  $y_2 = 66.65$   $y_1 = 108$ ;  $y_2 = 36.65$ ;  $y_3 = -0.65$   
 $y_3 = -0.65$



**Figura 4.39:** Esfuerzos de control para los controladores en  $PA$ ,  $PB$  en el punto de operación  $\varphi_2$ .

## 4.4 Discusión de resultados

Desde los ejemplos analizados en este capítulo se pone de manifiesto que la estructura de control y el ajuste óptimo de sus parámetros, los objetivos de diseño y las preferencias del diseñador sobre estos objetivos, tienen un rol importante en la selección óptima de lazos entrada-salida para controlar de manera satisfactoria un sistema MIMO.

El primer ejemplo de este capítulo es un sistema lineal de dos entradas y dos salidas donde las metodologías RGA y DRGA proponen cada una unos lazos de control diferentes para controlarlo, (RGA: sugiere un control diagonal, DRGA: sugiere uno off-diagonal). Con la metodología propuesta se comparó de manera global las fortalezas y debilidades de cada combinación de lazos de control y se mostró como las preferencias de un diseñador pueden influir en la decisión de los lazos entrada-salida a elegir para controlar el sistema MIMO. Para evaluar el desempeño del control se usó como índices de desempeño: IAE, ISE, ISU, IADU con el objetivo de generar diversos escenarios de comparación, se pudo observar en los frentes de Pareto que cada combinación de lazos de control tiene una región de dominancia, pero que ninguna domina totalmente a la otra.

El primer escenario se propone desagregando cada MOP con dos objetivos de diseño. Este escenario revela que el concepto de diseño off-diagonal no domina completamente el concepto diagonal, ya que solo es preferible en una determinada zona de interés.

En el segundo escenario, los errores de las salidas y los esfuerzos de control se analizan de forma parcialmente independiente (sin agregación), y se propone cada MOP con cuatro objetivos de diseño. El análisis de los frentes de Pareto de cada concepto de diseño revela que el concepto diagonal tiene mejores características que el concepto off-diagonal. De hecho, el concepto off-diagonal sería preferible solo si un diseñador prioriza minimizar de manera rigurosa el objetivo  $J_2$  (asociado al ISE de la salida  $y_2$ ). Este fenómeno estuvo oculto en el primer escenario.

En el tercer escenario, se propone cada MOP con ocho objetivos de diseño. En este escenario, los errores de cada salida y los esfuerzos de control se analizan de forma totalmente independiente. La complejidad del análisis de las compensaciones de los objetivos de diseño aumenta, pero el detalle de la información es mucho mayor, lo cual permite a un diseñador elegir una solución óptima para el MOP de manera más informada.

Posteriormente se planteó un cuarto escenario, debido a que las acciones de control eran oscilatorias en los escenarios anteriores, se decidió cambiar los índices que evalúan los objetivos de diseño de cada MOP. Esto produjo un cambio radical en las respuestas del sistema y en las prestaciones de los lazos de control (conceptos de diseño). Ahora el concepto de diseño diagonal fue ampliamente preferible sobre el concepto off-diagonal. De esta forma, se reveló cómo las preferencias del diseñador a través de la elección de los objetivos de cada MOP pueden condicionar la selección de los lazos entrada-salida.

En el segundo ejemplo se aborda la selección de lazos de control en un sistema lineal con tres entradas y tres salidas. Aquí las metodologías tradicionales RGA y RNGA difieren con respecto al tipo de lazos a elegir para controlar el sistema (existen dos posibles combinaciones). Se aplicó la metodología propuesta en esta tesis a este ejemplo y se pudo mostrar en los frentes de Pareto para los objetivos de diseño seleccionados, que ninguna combinación de lazos entrada-salida domina a la otra en su totalidad, es decir, la elección final dependerá de las preferencias del diseñador (por ejemplo, al seleccionar una zona de interés de un frente de Pareto).

La aplicación de la metodología sobre sistemas no lineales se efectuó sobre cuatro ejemplos. En el primer ejemplo presentado (sistema de dos tanques acoplados  $2 \times 2$ ) se mostró que, la aplicación de la técnica de selección de lazos de control al sistema linealizado, puede generar resultados que no coinciden con los obtenidos al aplicar la técnica directamente sobre el sistema no lineal. Esto da más valor añadido a las técnicas de selección de lazos de control que se pueden aplicar directamente a los sistemas no lineales (como la técnica presentada en esta tesis) que aquellas técnicas que necesitan linealizar la planta antes de su aplicación. Así también, dado que el sistema es no lineal, el punto de operación en el que este trabaja, puede condicionar la combinación de lazos de control a elegir, es decir, una combinación de lazos entrada-salida adecuada para un punto de operación no tiene porque serlo para otros puntos de operación del sistema.

En el segundo ejemplo (sistema de cuatro tanques acoplados  $2 \times 2$ ), la metodología propuesta se aplicó directamente al sistema no lineal. Se reveló que existe una compensación entre los desempeños de cada combinación de lazos de control, lo cual significa que uno de ellos es mejor para controlar una de las salidas y viceversa. Esto muestra que ninguna combinación de lazos entrada-salida es mejor que la otra en todos los aspectos y que un diseñador puede elegir una u otra según sus preferencias.

El tercer ejemplo tiene como objetivo mostrar la escalabilidad de la metodología propuesta. En este caso, se usa el mismo sistema no lineal del segundo ejemplo, pero aumentando su orden (sistema de cuatro tanques acoplados  $4 \times 4$ ). En este ejemplo, una combinación de lazos entrada-salida es mejor para controlar dos de las salidas del sistema (niveles  $h_1$  y  $h_2$ ) y la otra es mejor para controlar las otras dos salidas (niveles  $h_3$  y  $h_4$ ). Esto muestra que existe una compensación entre los desempeños de los lazos que posibilitan controlar el sistema. Vale la pena mencionar que en este ejemplo con la metodología propuesta, no solo se encontró una combinación de lazos óptima (de acuerdo con las preferencias del diseñador) sino que también se realizó el ajuste de sus parámetros de control y se consiguieron controladores con mejores desempeños que los propuestos en [84].

Finalmente, se analizó como cuarto ejemplo un sistema caldera-turbina usado para la generación de energía eléctrica, que presenta altas no linealidades lo cual agrega complejidad a su control. En este caso se pudo mostrar al analizar los frentes de Pareto que una combinación de lazos ( $LP_1$ ) es mejor que la otra ( $LP_2$ ) en todos los objetivos de diseño, lo cual implica que  $LP_1$  sería claramente la combinación de lazos que resultaría recomendable para realizar el control descentralizado del sistema. Así también el sistema se controló en diferentes puntos de operación y en cada uno de ellos el lazo de control  $LP_1$  mostró mejores desempeños que el  $LP_2$  lo cual coincide con lo propuesto por RGA. Aunque como ventaja de la propuesta de selección de lazos de control presentada en esta tesis comparada con la metodología RGA, se ajustó de forma óptima los parámetros de diseño de cada estructura de control y se verificó su funcionamiento en lazo cerrado.

El coste computacional de la metodología de selección de lazos de control propuesta en esta tesis es relativamente alto en comparación con las metodologías tradicionales ya que tiene en cuenta las preferencias del diseñador, el tipo de controladores y sobre todo incluye el ajuste óptimo de sus parámetros. Estas consideraciones son decisivas para la selección adecuada de los lazos de control y no pueden ignorarse si se desea seleccionar una combinación de lazos entrada-salida más acorde a las necesidades/preferencias del diseñador. Por lo tanto, no sería del todo justo comparar computacionalmente la metodología propuesta en esta tesis con las metodologías clásicas, ya que el coste de selección de los lazos de control no puede separarse del coste de ajustar las estructuras de control. Simplemente para que sirva de ejemplo, el coste computacional para los sistemas lineales de  $2 \times 2$  y de  $3 \times 3$  fueron de  $13.256 \cdot 10^3$  segundos (aproximadamente 3.68 horas por la optimización de dos MOPs) y  $26.146 \cdot 10^3$  segundos (aproximadamente 7.26 horas por la optimización de dos MOPs) y se utilizó

un ordenador con un procesador Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ (2.80 GHz, 16 GB de RAM) y MATLAB R2017b.

## 4.5 Conclusiones

En este capítulo se aplicó la metodología de selección de lazos de control propuesta en esta tesis para el control de sistemas multivariables lineales y no lineales.

Se estableció un enfoque metodológico que permite fusionar en un *concepto de diseño* tanto las estructuras de control y la sintonización óptima de sus parámetros, como la selección de los lazos entrada-salida óptimos para poder controlar un sistema MIMO. La metodología planteada necesita de la simulación de cada sistema en lazo cerrado para poder evaluar los objetivos de diseño. Esto la hace computacionalmente más costosa que los métodos de selección de lazos de control tradicionales, que no realizan este proceso y solamente basan su análisis en cálculo de medidas de interacción entre las variables que componen el sistema MIMO.

Sin embargo, la metodología propuesta permite a un diseñador o ingeniero de control analizar en detalle la dinámica del sistema MIMO controlado para que pueda tomar decisiones *a posteriori* de acuerdo con sus preferencias. El detalle de análisis de cada MOP es configurable por el diseñador y está relacionado principalmente con la cantidad de objetivos de diseño que se planteen. A medida que se incrementa el número de objetivos de diseño de un MOP, como desventaja la etapa de decisión se vuelve más compleja, pero como ventaja se obtiene mayor detalle de cada MOP permitiendo elegir una solución de una manera más informada. Es posible agregar objetivos de diseño para reducir el coste computacional de la metodología, pero esto podría tener como desventaja la pérdida de información, que podría ser relevante para solucionar de manera satisfactoria la selección de lazos entrada-salida y el ajuste óptimo de los controladores.

La metodología propuesta permite realizar un análisis multidimensional de cada MOP y de sus frentes de Pareto, lo cual permite analizar las fortalezas y debilidades de los lazos de control de una manera global. Así también, puede ser aplicada directamente sobre sistemas no lineales, es decir no se requiere linealizar previamente los sistemas multivariables no lineales, lo cual brinda una ventaja significativa a la metodología propuesta en esta tesis comparada con las metodologías tradicionales de selección de lazos de control que necesitan linealizar los sistemas.



## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajos futuros



## 5.1 Conclusiones

En esta tesis se presenta, como principal contribución, el desarrollo de una propuesta metodológica para seleccionar de manera óptima, lazos de control en sistemas multivariables aplicando un enfoque de optimización multiobjetivo. Un aspecto interesante de la metodología propuesta es que aglutina, tanto la selección óptima de lazos de control, como la sintonización óptima de sus controladores en el proceso de optimización multiobjetivo (en lo que se denomina en esta tesis un *concepto de diseño*).

La metodología permite simular el sistema en lazo cerrado para analizar las características de los lazos de control, y de esta forma, un diseñador pueda tomar una decisión (seleccionar unos lazos de control u otros) de acuerdo con sus preferencias. Este aspecto, como es lógico, incrementa el coste computacional de la metodología, pero tiene como ventaja que brinda información detallada acerca del comportamiento de los lazos entrada-salida, para que un diseñador de manera informada, pueda seleccionar los más adecuados para el control eficiente de un sistema multivariable.

Las principales características de la metodología se pueden resumir como:

- Flexibilidad para trabajar con sistemas multivariables lineales y no lineales.
- No requiere la linealización de un sistema multivariable, ya que es factible su aplicación directamente sobre un sistema multivariable no lineal.
- Es flexible para manejar diferentes representaciones de los sistemas multivariables (modelos en primeros principios, tipo caja negra, etc). Puede trabajar con cualquier representación del sistema, siempre y cuando pueda ser simulada.
- Permite realizar un análisis multidimensional pormenorizado de las características de los lazos de control disponibles para controlar un sistema MIMO, donde el diseñador puede ajustar el nivel de detalle al plantear cada problema multiobjetivo.
- Permite al diseñador seleccionar de manera óptima lazos de control, más de acuerdo con sus preferencias, con información que puede ser interpretada fácilmente.

Otra aportación de la tesis, tiene que ver con las aplicaciones de la metodología a varios problemas de ingeniería de control. Es importante mencionar que la metodología permite realizar una comparación global de las prestaciones de los lazos de control, lo cual revela información importante que antes no fue posible conocer con las técnicas tradicionales de selección de lazos de control. Por ejemplo, al aplicar la metodología al sistema multivariable lineal con dos entradas y dos salidas del capítulo 4 la técnica RGA propuso un lazo de control diagonal y la técnica DRGA uno off-diagonal, esta controversia fue analizada con la metodología propuesta en diferentes escenarios y se pudo demostrar como las preferencias del diseñador pueden influenciar para elegir el lazo de control adecuado. Es decir, se demostró que ningún lazo de control domina al otro en su totalidad (de una forma no consciente tanto RGA como DRGA tomaron una decisión a priori y optimizaron una única función objetivo para abordar el problema).

Otros aspectos importantes que se pudo evidenciar, al aplicar la metodología propuesta a sistemas no lineales, son:

- La validez de la selección de un lazo de control sobre un sistema linealizado no garantiza un correcto lazo de control en el sistema no lineal.
- La validez de un lazo de control en un punto de operación de un sistema no lineal no garantiza el correcto lazo de control en otros puntos de operación del sistema.

Lo comentado anteriormente agrega valor a la metodología propuesta, ya que la misma puede ser aplicada directamente sobre un sistema no lineal. El coste computacional de la misma se ve compensado con la calidad y detalle de la información que entrega a un diseñador/ingeniero de control para realizar el control eficiente de un sistema multivariable.

La metodología es costosa computacionalmente y, por lo tanto, es conveniente evitar analizar combinaciones de lazos de control poco adecuadas o directamente no factibles. En este sentido, partir de la información de una de las metodologías clásicas con bajo coste computacional (por ejemplo RGA), puede permitir una reducción importante de los tiempos de cálculo e interpretación. Esto es fácilmente aplicable incluso en procesos no lineales puesto que en muchos casos sólo son necesarias las ganancias para la aplicación de la metodología clásica. A cambio, la metodología propuesta ofrece un diseño más adecuado (o al menos más fiable) combinando, de forma integrada, la selección de lazos, el ajuste de controladores y la inclusión de preferencias del diseñador.

En esta tesis se ha demostrado la relevancia de aplicar la metodología propuesta en diversos sistemas de control. Para demostrar la escalabilidad de la metodología se ha aplicado la misma a sistemas multivariables de diferente orden. Tanto la metodología como gran parte de los ejemplos propuestos en esta tesis han sido publicados en una revista de primer nivel, mediante los siguientes artículos [73], [74].

## 5.2 Trabajos futuros

Las líneas futuras de investigación podrían estar enfocadas en los siguientes aspectos:

- Aplicar la metodología propuesta a sistemas multivariables con incertidumbre en sus parámetros, ya que este efecto puede degradar la eficiencia de los lazos de control en los sistemas multivariables.
- Aplicar la metodología propuesta a sistemas multivariables con restricciones en sus salidas o sistemas en los cuales determinados lazos de control se pongan fuera de línea por mantenimiento.
- Mejorar el coste computacional de la metodología de selección de lazos de control presentada en esta tesis. Esto implica realizar mejoras en las herramientas de optimización multiobjetivo usadas, lo cual permitirá analizar sistemas con un gran número de variables.
- Considerar la posibilidad de incorporar más indicadores para analizar el problema de seleccionar de manera óptima lazos de control en sistemas multivariables. Por ejemplo indicadores que posibiliten analizar la respuesta en el dominio de la frecuencia de los lazos de control.
- Generalizar la aplicación de la metodología propuesta para sistemas multivariables no cuadrados tanto lineales como no lineales.
- Considerar la posibilidad de automatizar la aplicación de la metodología propuesta teniendo en consideración las preferencias del diseñador y acercándola a diseñadores menos experimentados.



Apéndice A

# Herramientas de optimización multiobjetivo aplicadas en la tesis



## A.1 Introducción

En este capítulo se presentan aplicaciones preliminares sobre un procedimiento de diseño basado en optimización multiobjetivo (como el mostrado en el capítulo 2 en la figura 2.1) para el modelado y ajuste de controladores en sistemas no lineales. Las aplicaciones mostradas en esta sección forman parte de los artículos [75], [76].

Este apartado pretende brindar una comprensión integral, de cada una de las fases de un procedimiento general de diseño, basado en optimización multiobjetivo. Es decir, desde la definición del MOP, el proceso de optimización multiobjetivo y la etapa de decisión multicriterio. Así también se analizarán las potencialidades y limitaciones de las herramientas de optimización multiobjetivo usadas en esta tesis.

En este capítulo se usa el algoritmo de optimización multiobjetivo ev-MOGA [69] y la herramienta de visualización de frentes de Pareto multidimensionales denominada *level diagrams* [19], [20] para el modelado de una celda Peltier, así como también para el modelado y control de un péndulo invertido rotatorio (PIR).

En cuanto al modelado de la celda Peltier, el enfoque multiobjetivo aplicado permite obtener un conjunto de modelos óptimos usando datos experimentales. Los modelos obtenidos como se mostrará tienen un cierto grado de conflicto entre sí y el enfoque multiobjetivo aplicado es recomendable para analizar este tipo de situaciones donde hay intercambio de prestaciones entre los objetivos de diseño que evalúan el desempeño de cada modelo. El modelo identificado de la celda Peltier fue satisfactorio y se comprobó su eficiencia en un prototipo experimental de laboratorio.

Para el péndulo invertido rotatorio se aplica la metodología de diseño, basada en optimización multiobjetivo, para identificar los parámetros de un modelo no lineal propuesto para este prototipo usando datos experimentales. Posteriormente se aplicó el mismo enfoque para ajustar de manera óptima dos controladores, uno de ellos de tipo PID para controlar el péndulo del PIR para rechazo de perturbaciones externas y otro de tipo PI para seguimiento de referencias del brazo del PIR. Ambos procedimientos fueron satisfactorios, se pudo verificar la eficiencia del modelo identificado para caracterizar la dinámica del sistema en un prototipo experimental de laboratorio, así también se comprobó el funcionamiento satisfactorio de los controladores del PIR.

## A.2 Modelado de una celda termoeléctrica Peltier

En este apartado se muestra la aplicación de un procedimiento de diseño basado en optimización multiobjetivo (como el mostrado en el capítulo 2 en la figura 2.1) para la identificación de un modelo no lineal en primeros principios de una celda Peltier usando datos experimentales.

Una celda Peltier es un generador termoeléctrico que usa el *efecto Seebeck* para convertir el calor en electricidad y el *efecto Peltier* para convertir la energía eléctrica en un gradiente de temperatura [99]. Una celda Peltier está formada por semiconductores tipo  $p$  y tipo  $n$  conectados en serie y cubiertos por platos cerámicos eléctricamente aislados pero térmicamente conductivos [151], [101].

La celda Peltier usada en la experimentación es parte del prototipo mostrado en la figura A.1. Se adquirió datos de este prototipo sobre un periodo de tiempo adecuado para lograr medir las variaciones de temperatura sobre las caras fría y caliente de la Peltier. La temperatura en la cara fría es medida a través de un termopar tipo K que permite detectar variaciones de temperatura en un rango de  $-34^{\circ}\text{C}$  hasta  $70^{\circ}\text{C}$  con un rango de voltaje entre 2 Vdc y 10 Vdc. La temperatura en la cara caliente y en el radiador (acoplado con un ventilador) se miden a través de un sensor LM35 que está acoplado para medir temperaturas entre  $0^{\circ}\text{C}$  y  $100^{\circ}\text{C}$  con un rango de voltaje entre 0 Vdc y 10 Vdc (equivalente a variaciones entre 0 % y 100 % respectivamente). El voltaje aplicado a la Peltier está en un rango que varía desde 0 Vdc hasta 6 Vdc equivalente a variaciones entre 0 % y 100 % respectivamente, la temperatura ambiente promedio medida durante el experimento fue de  $23.5^{\circ}\text{C}$ .

El prototipo experimental de la celda Peltier puede ser representando en un diagrama de bloques como se muestra en la figura A.2. Este sistema presenta dos entradas y tres salidas. La entrada  $V_{in}$  representa el voltaje aplicado a la Peltier y  $V_{fan}$  el voltaje aplicado al ventilador que está acoplado al radiador. La salida  $T_{cool}$  representa la temperatura en la cara fría de la Peltier,  $T_{hot}$  es la temperatura de la cara caliente, y  $T_{rad}$  es la temperatura del radiador. La entrada  $T_{amb}$  representa la temperatura ambiente que se mide durante el experimento.

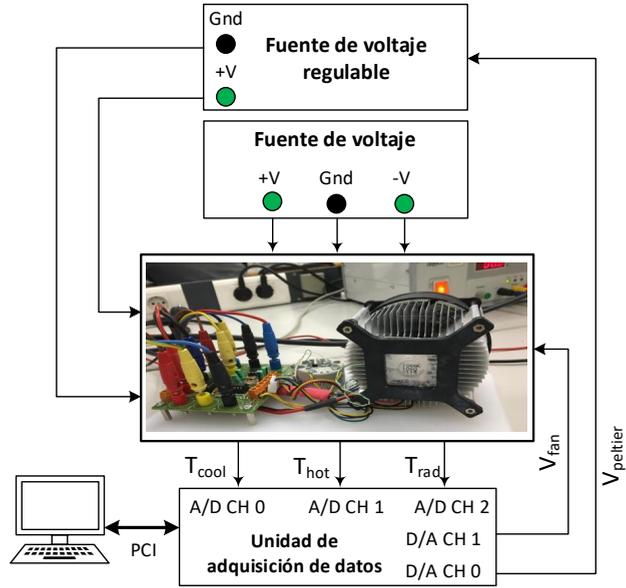


Figura A.1: Prototipo experimental con una celda Peltier.

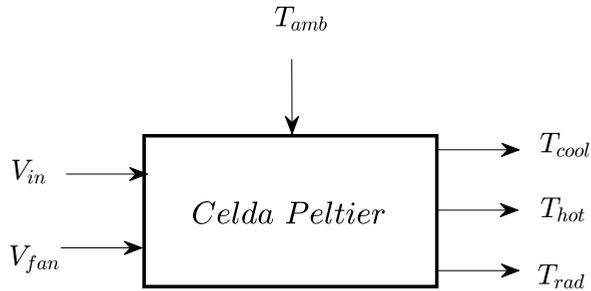


Figura A.2: Diagrama de bloques del prototipo de la celda Peltier de la figura A.1

### Modelo de la celda Peltier

Para describir el modelo en primeros principios de la celda Peltier bajo estudio se usa la nomenclatura mostrada en la tabla A.1. Se usó la literatura sobre transferencia de calor presentada en [62] y [55] para plantear las ecuaciones térmicas del módulo termoeléctrico Peltier mostrado en la figura A.1.

Símbolo	Descripción	Unidades
$Q_{cf}$	flujo de calor neto en la cara fría	W
$Q_{acf}$	flujo de calor transmitido por convección entre el medio ambiente y la cara fría	W
$Q_{pcf}$	flujo de calor que absorbe la cara fría debido al efecto Peltier	W
$Q_j$	flujo de calor generado por la celda Peltier debido al efecto Joule	W
$Q_{cond}$	flujo de calor transferido por conducción desde la cara caliente a la cara fría	W
$Q_{hf}$	flujo neto de calor en la cara caliente	W
$Q_{rhf}$	flujo de calor transmitido por radiación entre la cara caliente y el radiador	W
$Q_{phf}$	flujo de calor disipa la cara caliente debido al efecto Peltier	W
$Q_{rf}$	flujo neto de calor en el radiador	W
$Q_{acc}$	flujo de calor transmitido por convección entre el ambiente y el radiador	W
$K_{fan}$	factor de amplificación de convección entre el ambiente y el radiador debido a la acción del ventilador	W/°K
$T_{amb}$	temperatura ambiente	°C
$T_{cool}$	temperatura en la cara fría	°C
$T_{hot}$	temperatura en la cara caliente	°C
$T_{rad}$	temperatura en el radiador	°C
$\alpha$	coeficiente de Seebeck	V/°K
$I_p$	flujo de corriente en la celda Peltier	A
$R_p$	resistencia de la celda Peltier	$\Omega$
$K_{convp}$	coeficiente de convección térmica de la celda Peltier	W/°K
$K_{rad}$	coeficiente de convección térmica entre la cara caliente y el radiador	W/°K
$K_{conva}$	coeficiente de convección térmica entre la cara caliente y el medio ambiente	W/°K
$mce_{cool}$	capacidad térmica en la cara fría	J/°K
$mce_{hot}$	capacidad térmica en la cara caliente	J/°K
$mce_{rad}$	capacidad térmica en el radiador	J/°K
$V_{fan}$	voltaje aplicado al ventilador	%
$V_{in}$	voltaje aplicado a la Peltier	%

**Tabla A.1:** Nomenclatura usada en el modelo del prototipo Peltier de la figura A.1

En la cara fría de la Peltier:

$$Q_{cf} = Q_{acf} - Q_{pcf} - Q_j + Q_{cond} \quad (\text{A.1})$$

$$Q_{cf} = mce_{cool} \frac{d}{dt} T_{cool}(t) \quad (\text{A.2})$$

$$Q_{acf} = (T_{amb} - T_{cool}) K_{conva} \quad (\text{A.3})$$

$$Q_{pcf} = \alpha T_{cool} I_p \quad (\text{A.4})$$

$$Q_j = \frac{1}{2} I_p^2 R_p \quad (\text{A.5})$$

$$Q_{cond} = (T_{hot} - T_{cool}) K_{convp} \quad (\text{A.6})$$

$$I_p = \frac{V_{in} - (T_{hot} - T_{cool}) \alpha}{R_p} \quad (\text{A.7})$$

En la cara caliente de la Peltier:

$$Q_{hf} = Q_{rhf} + Q_{phf} + Q_j - Q_{cond} \quad (\text{A.8})$$

$$Q_{hf} = mce_{hot} \frac{d}{dt} T_{hot}(t) \quad (\text{A.9})$$

$$Q_{rhf} = (T_{rad} - T_{hot}) K_{rad} \quad (\text{A.10})$$

$$Q_{phf} = \alpha T_{hot} I_p \quad (\text{A.11})$$

En el radiador acoplado a la Peltier:

$$Q_{rf} = Q_{acc} - Q_{rhf} \quad (\text{A.12})$$

$$Q_{rf} = mce_{rad} \frac{d}{dt} T_{rad}(t) \quad (\text{A.13})$$

$$Q_{acc} = K_{fan} (T_{amb} - T_{rad}) \quad (\text{A.14})$$

$$K_{fan} = \begin{cases} 0.81 & \text{if } V_{fan} \leq 16\% \\ 0.0032V_{fan}^3 - 0.24V_{fan}^2 & \\ +6.6V_{fan} - 56 & \text{if } V_{fan} > 16\% \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

### A.2.1 Detalles de la identificación multiobjetivo del modelo

Se analiza el modelo propuesto para la celda Peltier en (A.1)-(A.15) con el enfoque de diseño basado en optimización multiobjetivo propuesto en el capítulo 2, para lo cual es necesario tener en consideración los parámetros a identificar de este modelo, las condiciones iniciales del proceso, las restricciones del sistema, y los objetivos de diseño del MOP (criterios de optimalidad). Teniendo en consideración estos aspectos se plantea el MOP como se muestra en (A.16)-(A.22).

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x}), J_3(\mathbf{x})] \quad (\text{A.17})$$

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |T_{cool(exp)}(k) - T_{cool(ident)}(k)| dt \quad (\text{A.18})$$

$$J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |T_{hot(exp)}(k) - T_{hot(ident)}(k)| dt \quad (\text{A.19})$$

$$J_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |T_{rad(exp)}(k) - T_{rad(ident)}(k)| dt \quad (\text{A.20})$$

$$N = 10890 \text{ muestras}$$

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{A.21})$$

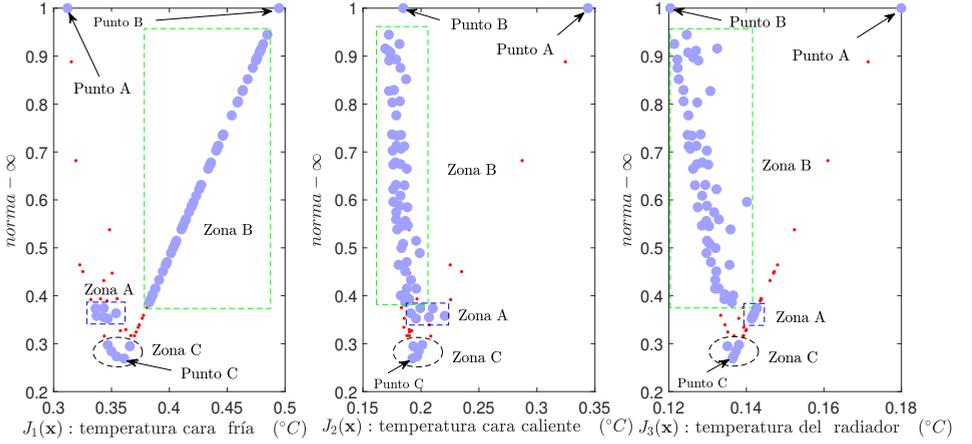
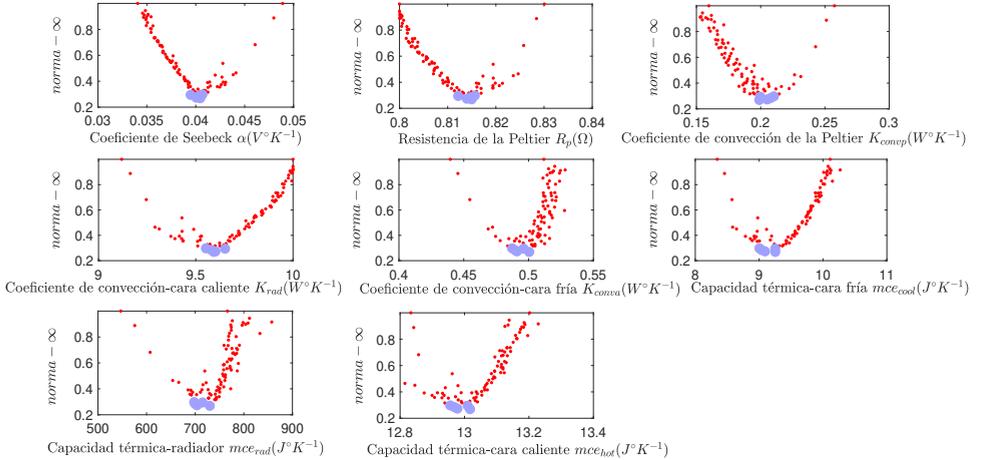
El vector de decisión está representado por los parámetros del modelo a identificar, como se muestra en (A.22).

$$\mathbf{x} = [\alpha, R_p, K_{convp}, K_{rad}, K_{conva}, mce_{cool}, mce_{rad}, mce_{hot}] \quad (\text{A.22})$$

Los límites del vector de decisión están definidos como se muestra en la tabla A.2. Estos límites se han planteado teniendo en consideración las especificaciones técnicas establecidas por el fabricante de la celda Peltier y generando experimentos preliminares para garantizar una operación segura del sistema.

En el proceso de optimización multiobjetivo se usó el algoritmo ev-MOGA [69] y para la representación de los frentes de Pareto se aplicó la herramienta de visualización denominada *level diagrams* [19],[20].

$\mathbf{x}$	$\alpha$	$R_p$	$K_{convp}$	$K_{rad}$	$K_{conva}$	$mce_{cool}$	$mce_{rad}$	$mce_{hot}$
$\underline{\mathbf{x}}$	0.01	0.95	0.01	0.1	0.01	0.1	10	0.1
$\overline{\mathbf{x}}$	0.1	1.2	10	10	10	15	10000	15

**Tabla A.2:** Límites para el vector de decisión de la celda Peltier

**Figura A.3:** Representación del frente de Pareto usando norma- $\infty$ .

**Figura A.4:** Representación de los parámetros óptimos de Pareto (variables de decisión del MOP). Las soluciones localizadas en la Zona C están sombreadas.

La representación del frente de Pareto se muestra en la figura A.3, este frente contiene un conjunto óptimo de modelos para la celda Peltier bajo análisis, es decir para la cara fría, cara caliente, y el radiador de este módulo termoeléctrico. Cada uno de estos modelos tiene prestaciones diferentes. El conjunto de Pareto se muestra en la figura A.4, aquí se muestra un conjunto óptimo de los parámetros de cada uno de los modelos de la Peltier mostrados en el frente de Pareto.

Los puntos A y B mostrados en el frente de Pareto así como los puntos de la zona B indican claramente que existe un conflicto entre el modelo de la temperatura de la cara fría con el modelo de la temperatura de la cara caliente y del radiador de la Peltier, porque mejorar uno de ellos implica empeorar otro. En el frente de Pareto se puede observar las zonas (A,B,C) donde un diseñador puede seleccionar una solución óptima (modelo) de acuerdo a sus preferencias. Por ejemplo, en la zona B las prestaciones de los modelos de las temperaturas de las cara caliente y el radiador son ligeramente mejores que los modelos de la zona C (observar  $J_2$  y  $J_3$  en la figura A.3), pero los modelos de la temperatura de la cara fría son peores (observar  $J_1$  en la figura A.3).

En la zona A un diseñador puede seleccionar un modelo para la temperatura de la cara fría con mejores prestaciones que los modelos disponibles en la zona B, perdiendo un poco en cuanto a las prestaciones en los modelos de la temperatura de la cara caliente y especialmente del radiador. Si un diseñador tiene preferencias por elegir modelos que se encuentren más próximos a la solución ideal del MOP puede elegir un modelo de la zona C (zona de compromiso), como por ejemplo el modelo en el punto C. Los objetivos de diseño y los parámetros de los modelos de la Peltier para esta zona se muestran en las tablas A.3 y A.4 respectivamente.

Norma	$J_1$	$J_2$	$J_3$
$norma - \infty$	[0.34-0.36]	$\approx 0.19$	$\approx 0.14$

**Tabla A.3:** Objetivos de diseño para los modelos de la Peltier seleccionados en la zona C.

$\alpha$	$R_p$	$K_{convp}$	$K_{rad}$
$\approx 0.041$	$\approx 0.82$	[0.19-0.21]	[9.51-9.67]
$K_{conva}$	$mce_{cool}$	$mce_{rad}$	$mce_{hot}$
$\approx 0.50$	[9-9.4]	[695.7-749.4]	$\approx 13$

**Tabla A.4:** Parámetros de los modelos de la Peltier seleccionados en la zona C.

### Validación de modelos de la celda Peltier

Para validar los modelos de la celda Peltier obtenidos en el proceso de optimización multiobjetivo se usó un conjunto de datos diferentes a los de identificación. En las figuras A.5-A.7 se muestra la simulación de cada una de las salidas  $T_{cool}$ ,  $T_{hot}$ , y  $T_{rad}$  con los datos del ensayo de identificación y en las figuras A.8-A.10 se muestra la simulación con los datos del ensayo de validación.

Para mostrar el comportamiento de los modelos obtenidos para la celda Peltier sobre el ensayo de validación, se seleccionaron aquellos que corresponden a los puntos A, B y C en el frente de Pareto de la figura A.3. El punto A representa un modelo con el mejor desempeño para caracterizar la dinámica de la temperatura de la cara fría (objetivo  $J_1$ ), pero con el peor desempeño para caracterizar las temperaturas de la cara caliente y del radiador (objetivos  $J_2$  y  $J_3$  respectivamente). En contraposición, el punto B representa un modelo entre los de mejor desempeño para caracterizar la temperatura de la cara caliente, pero con el desempeño más bajo para caracterizar las temperaturas de la cara fría y del radiador. El punto C representa un modelo de compromiso, el cual caracteriza de manera satisfactoria a la celda Peltier bajo estudio, es decir a cada una de las temperaturas  $T_{cool}$ ,  $T_{hot}$ , y  $T_{rad}$  presentes en este módulo.

Se evaluó el desempeño de los modelos representados por los puntos A, B y C sobre el ensayo de validación y se muestran en la tabla A.5. Un histograma que muestra los errores en los modelos de las temperaturas de la celda Peltier se muestra en la figura A.11.

$J(\mathbf{x})$	Punto A	Punto C	Punto B
$J_1(\mathbf{x})$	0.3120	0.361	0.4948
$J_2(\mathbf{x})$	0.344	0.1927	0.1847
$J_3(\mathbf{x})$	0.1799	0.1364	0.1204

Tabla A.5: Objetivos de diseño para los modelos mostrados en las figuras. A.8-A.10

#### A.2.2 Conclusiones

En este ejemplo se muestra la aplicación de un procedimiento de diseño basado en optimización multiobjetivo para identificar un modelo no lineal de una celda Peltier. Se usó un módulo termoeléctrico Peltier de laboratorio y se realizó la adquisición de datos para poder identificar y validar un conjunto óptimo de modelos que caractericen adecuadamente su operación. El modelo elegido ajusta la respuesta de cada salida de la Peltier (temperaturas de la cara fría, de

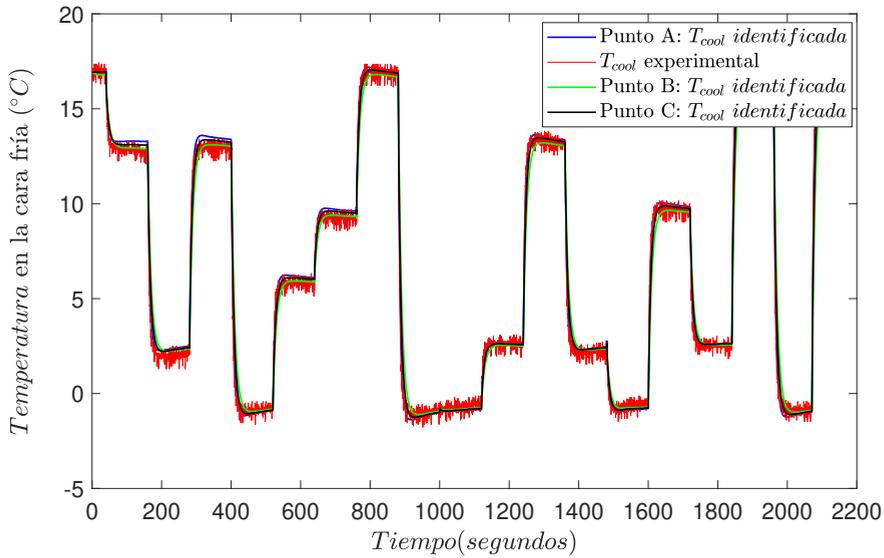


Figura A.5: Simulación de la salida  $T_{cool}$  con los datos del ensayo de identificación.

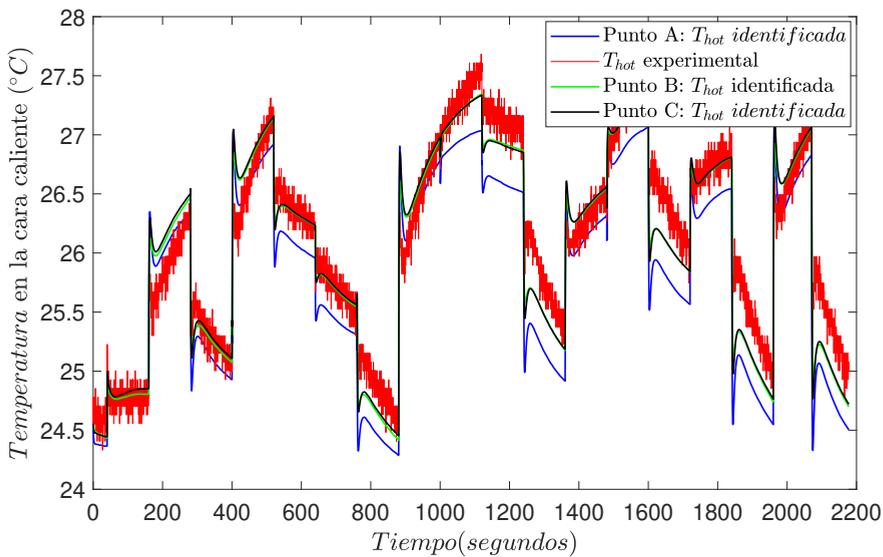


Figura A.6: Simulación de la salida  $T_{hot}$  con los datos del ensayo de identificación.

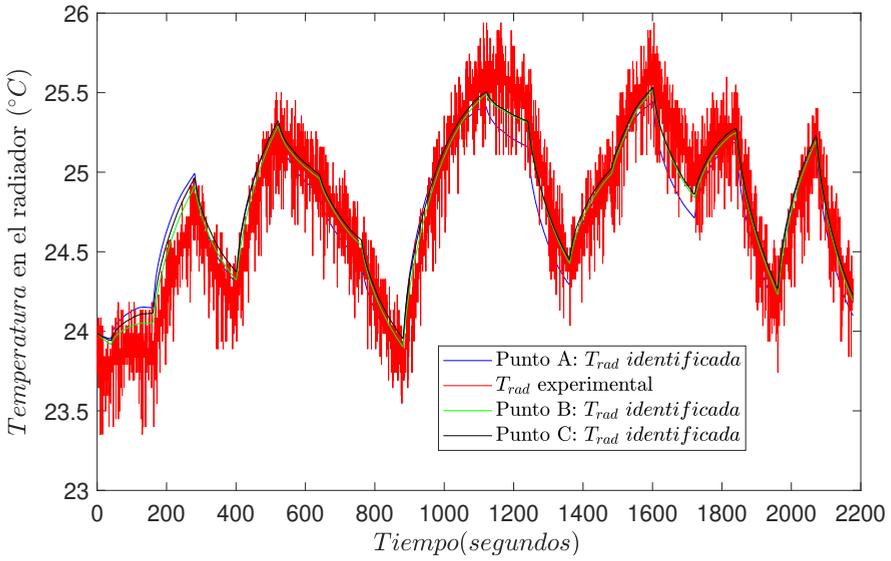


Figura A.7: Simulación de la salida  $T_{rad}$  con los datos del ensayo de identificación.

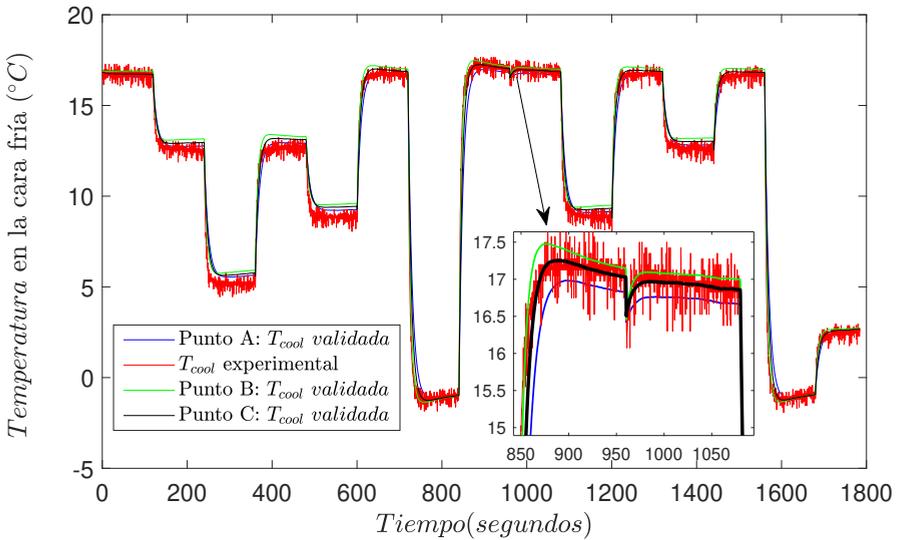


Figura A.8: Simulación de la salida  $T_{cool}$  con los datos del ensayo de validación.

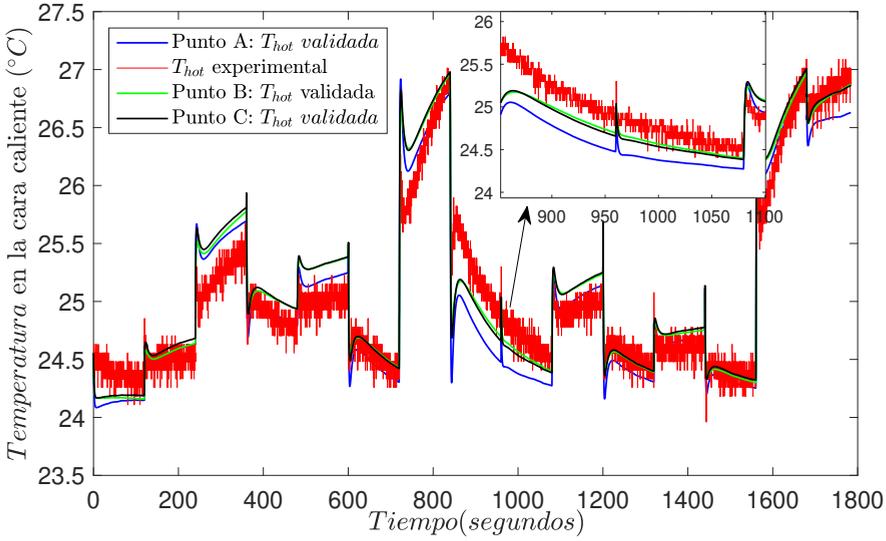


Figura A.9: Simulación de la salida  $T_{hot}$  con los datos del ensayo de validación.

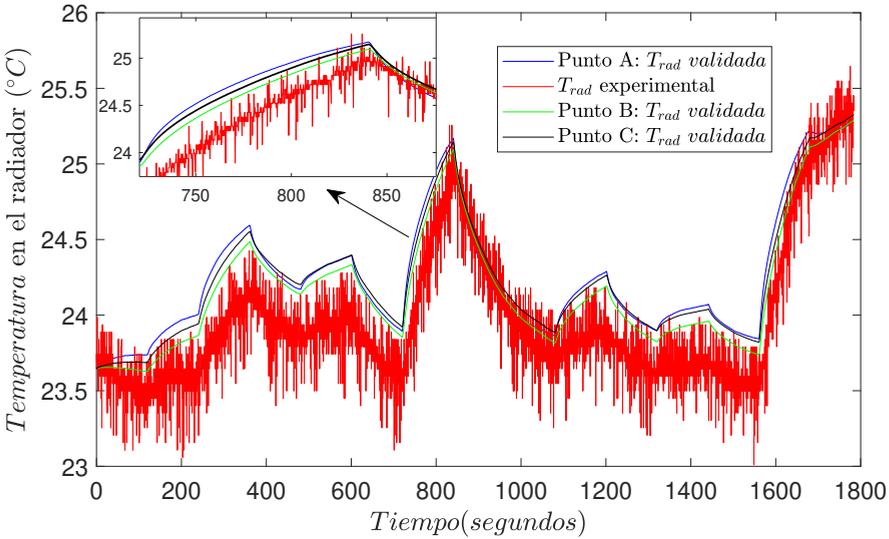
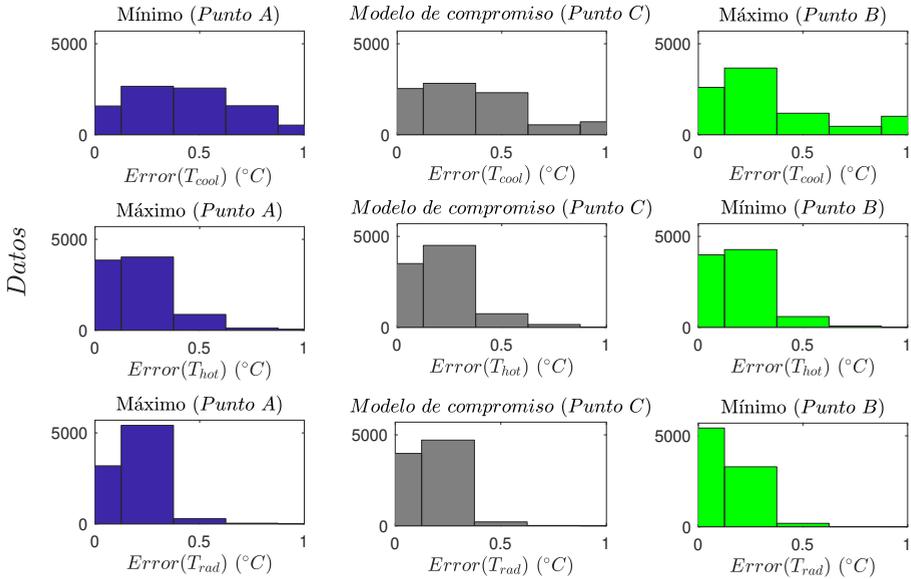


Figura A.10: Simulación de la salida  $T_{rad}$  con los datos del ensayo de validación.



**Figura A.11:** Histograma de errores en los modelos mostrados en las figuras A.8-A.10.

la cara caliente y del radiador) de manera satisfactoria, aunque se pudo evidenciar que estas salidas presentan conflicto entre sí, ya que si un diseñador quiere mejorar el ajuste de una de ellas esto implica empeorar las otras. Este conflicto si bien es cierto muestra que existe dinámica no modelada y la posibilidad de realizar alguna mejora en el modelo propuesto, pone de manifiesto también que con un enfoque multiobjetivo un diseñador de manera informada y basado en sus preferencias puede ajustar un modelo que represente satisfactoriamente al sistema Peltier sin la necesidad de usar modelos más complicados.

### A.3 Modelado y control de un péndulo invertido rotatorio

En esta sección se aplica un enfoque de diseño basado en optimización multiobjetivo para identificar un modelo no lineal en primeros principios de un péndulo invertido rotatorio (PIR), y posteriormente, diseñar controladores PI y PID para estabilizarlo. Se propone un modelo no lineal para el PIR y se identifica sus parámetros estructurales con datos experimentales adquiridos en ensayos de laboratorio.

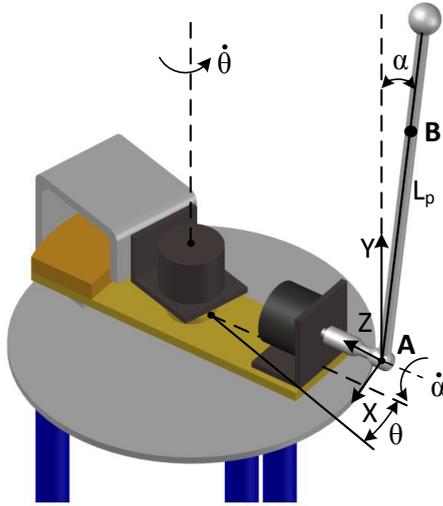
Un péndulo invertido rotatorio es conocido también como péndulo de Furuta [56], [6], es un sistema no lineal inestable y subactuado, ya que posee una única acción de control y dos salidas a controlar. Está formado por un motor de corriente continua acoplado a un brazo mecánico, el cual se desplaza horizontalmente debido a un *par* que este le aplica. El brazo del PIR está acoplado a una varilla cilíndrica que constituye el péndulo del sistema, el cual puede moverse libremente en posición vertical. El prototipo tiene dos encoders rotativos para medir los desplazamientos del brazo y del péndulo (ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  respectivamente). El objetivo de control es mantener el péndulo en equilibrio en posición vertical hacia arriba y rechazar las perturbaciones externas que se le apliquen. El diagrama esquemático del PIR se muestra en la figura A.12.

El péndulo invertido rotatorio bajo estudio se comunica con un computador a través de una tarjeta PCI-1711 que recibe los datos de los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  que son adquiridos por una tarjeta arduino Mega, estas variables representan las salidas del sistema. El esfuerzo de control del PIR es el voltaje de armadura aplicado al motor DC del brazo, y representa la entrada del sistema, este voltaje es previamente acondicionado por una etapa de potencia. Para contrarrestar la fricción estática de la plataforma PIR se aplica un voltaje de compensación a la salida analógica de la tarjeta PCI-1711 para los dos sentidos de giro del motor que está acoplado al brazo del sistema. La plataforma experimental vista como diagrama de bloques se muestra en la figura A.13.

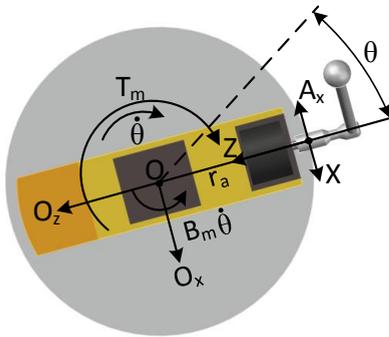
#### *Modelo del péndulo invertido rotatorio*

El modelo usado para representar el PIR es el propuesto en [15] y [95]. Para describir en detalle este modelo se usa la nomenclatura mostrada en la tabla A.6 y el diagrama de la figura A.12.

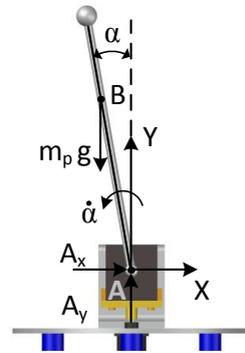
Las coordenadas del centro de masa del péndulo en el punto B respecto del punto A se muestran en (A.23).



(a) Péndulo invertido rotatorio (PIR)



(b) Vista superior



(c) Vista frontal

**Figura A.12:** Diagrama esquemático del péndulo invertido rotatorio (PIR).

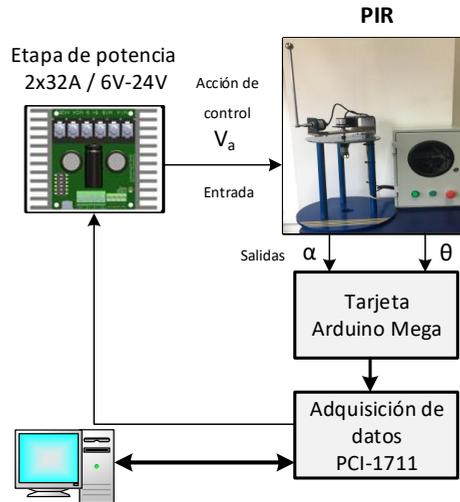


Figura A.13: Prototipo experimental del péndulo invertido rotatorio.

Símbolo	Descripción	Unidades
$m_p$	Masa del péndulo	$Kg$
$L_p$	Longitud del eje al centro de masa del péndulo	$m$
$r_a$	Longitud del brazo rotatorio	$m$
$g$	Aceleración gravitacional	$m/s^2$
$R_{ma}$	Resistencia de armadura	$\Omega$
$L_{ma}$	Inductancia de armadura	$H$
$J_{em}$	Momento de inercia equivalente del rotor	$Kg \cdot m^2$
$J_a$	Momento de inercia equivalente del brazo	$Kg \cdot m^2$
$J_p$	Momento de inercia equivalente del péndulo	$Kg \cdot m^2$
$B_p$	Coefficiente de fricción viscosa del péndulo	$N \cdot m \cdot s/rad$
$B_m$	Coefficiente de fricción viscosa del motor	$N \cdot m \cdot s/rad$
$k_b$	Constante de fuerza contraelectromotriz	$V \cdot s/rad$
$k_t$	Constante de par electromagnético	$N \cdot m/A$
$T_m$	Par del motor DC acoplado al brazo	$N \cdot m$
$V_a$	Voltaje de armadura	$V$
$\alpha$	Ángulo de giro del péndulo	$Grados$
$\theta$	Ángulo de rotación del brazo	$Grados$

Tabla A.6: Nomenclatura para describir el modelo del PIR.

$$X_{BA} = -L_p \text{sen}(\alpha); Y_{BA} = L_p \text{cos}(\alpha) \quad (\text{A.23})$$

La velocidad del péndulo en el punto B respecto del punto A se muestra en (A.24).

$$\dot{X}_{BA} = -L_p \text{cos}(\alpha) \dot{\alpha}; \dot{Y}_{BA} = -L_p \text{sen}(\alpha) \dot{\alpha} \quad (\text{A.24})$$

Las coordenadas de la velocidad del péndulo considerando la velocidad del brazo se muestra en (A.25).

$$\dot{X}_B = r_a \dot{\theta} - L_p \text{cos}(\alpha) \dot{\alpha}; \dot{Y}_B = -L_p \text{sen}(\alpha) \dot{\alpha} \quad (\text{A.25})$$

Las coordenadas de la aceleración del péndulo se muestran en (A.26) y (A.27).

$$\ddot{X}_B = r_a \ddot{\theta} + L_p \text{sen}(\alpha) \dot{\alpha}^2 - L_p \text{cos}(\alpha) \ddot{\alpha} \quad (\text{A.26})$$

$$\ddot{Y}_B = -L_p \text{cos}(\alpha) \dot{\alpha}^2 - L_p \text{sen}(\alpha) \ddot{\alpha} \quad (\text{A.27})$$

Al aplicar las leyes de Newton y Euler para movimiento rotacional de cuerpos se calculan las fuerzas y momentos dinámicos netos en los ejes de las abscisas y ordenadas y en los puntos B y O como se muestra en (A.28)-(A.31).

$$\sum F_x = A_x = m_p r_a \ddot{\theta} + m_p L_p \text{sen}(\alpha) \dot{\alpha}^2 - m_p L_p \text{cos}(\alpha) \ddot{\alpha} \quad (\text{A.28})$$

$$\sum F_y = A_y = -m_p L_p \text{cos}(\alpha) \dot{\alpha}^2 - m_p L_p \text{sen}(\alpha) \ddot{\alpha} + m_p g \quad (\text{A.29})$$

$$\sum M_B = J_p \ddot{\alpha} = A_x L_p \text{cos}(\alpha) + A_y L_p \text{sen}(\alpha) - B_p \dot{\alpha} \quad (\text{A.30})$$

$$\sum M_O = (J_a + J_{em}) \ddot{\theta} = T_m - B_m \dot{\theta} - A_x r_a \quad (\text{A.31})$$

Donde  $T_m$  es el par del motor DC que está acoplado al brazo del PIR, el cual está definido por su voltaje de armadura y su velocidad angular como se muestra en (A.32).

$$T_m = \frac{k_t}{R_{ma}} (V_a - k_b) \dot{\theta} \quad (\text{A.32})$$

Al reemplazar las ecuaciones (A.28) y (A.29) en la ecuación (A.30), así también reemplazando (A.28) y (A.32) en (A.31) se obtiene el modelo en primeros principios del PIR como se muestra en (A.33).

$$\begin{bmatrix} J_p + m_p L_p^2 & -(m_p r_a L_p \cos(\alpha)) \\ -(m_p r_a L_p \cos(\alpha)) & (J_a + J_{em} + m_p r_a^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_p \dot{\alpha} + m_p g L_p \sin(\alpha) \\ \frac{k_t}{R_{ma}} V_a - (\frac{k_t k_b}{R_{ma}} + B_m) \dot{\theta} - (m_p r_a L_p \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

### A.3.1 Detalles de la identificación multiobjetivo del modelo

Se plantea un problema de optimización multiobjetivo para identificar un modelo no lineal para el PIR, para lo cual es necesario determinar que parámetros se requiere identificar del modelo propuesto en (A.33). Se necesita establecer un criterio de optimalidad para plantear los objetivos de diseño del MOP (Para este caso los objetivos evalúan los errores promedios de los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$ ), y de ser necesario establecer restricciones para el MOP. Se plantea el MOP como se muestra en (A.34)-(A.39).

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x})] \quad (\text{A.35})$$

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\theta_{experimental}(k) - \theta_{identificado}(k)| \quad (\text{A.36})$$

$$J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_{experimental}(k) - \alpha_{identificado}(k)| \quad (\text{A.37})$$

$$N = 12000 \text{ muestras}$$

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{A.38})$$

El vector de decisión está representado por los parámetros del modelo del PIR que se requiere identificar y se muestra en (A.39).

$$\mathbf{x} = [R_{ma}, L_{ma}, k_b, k_t, J_{em}, B_m, J_a, L_p, J_p, B_p] \quad (\text{A.39})$$

Los límites del vector de decisión se muestran en la tabla A.7. Estos límites se establecieron considerando información de los fabricantes de los dispositivos

electromecánicos, así como realizando un análisis mecánico preliminar de la estructura del PIR.

$\mathbf{x}$	$R_{ma}$	$L_{ma}$	$k_b$	$k_t$	$J_{em}$
$\underline{\mathbf{x}}$	5	0.001	0.4	0.3	0.00002
$\bar{\mathbf{x}}$	6	0.002	1.2	1.5	0.00009
$\mathbf{x}$	$B_m$	$J_a$	$L_p$	$J_p$	$B_p$
$\underline{\mathbf{x}}$	0.01	0.005	0.18	0.001	0.0010
$\bar{\mathbf{x}}$	0.05	0.020	0.25	0.002	0.0018

**Tabla A.7:** Límites del vector de decisión para la identificación de un modelo para el PIR.

En la experimentación realizada para identificar un modelo no lineal del PIR se aplicó una señal de voltaje al motor de su brazo mecánico, que consiste en una suma de señales senoidales con diferentes frecuencias cuando el péndulo está en posición vertical hacia abajo. El ensayo de identificación se realizó de esta forma ya que el PIR es inestable en lazo abierto y no es posible mantenerlo en posición vertical hacia arriba sino es mediante la aplicación de un controlador.

Para el proceso de optimización multiobjetivo se usó el algoritmo ev-MOGA [69] y para la representación del frente de Pareto se aplicó la herramienta de visualización de frentes multidimensionales llamada *level diagrams* [19],[20].

La representación del frente de Pareto se muestra en la figura A.14 y las variables de decisión (parámetros identificados de los modelos del PIR) en la figura A.15. En este frente se muestran dos zonas A y B y cuatro puntos seleccionados como  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , estos puntos representan modelos para el PIR. Los puntos  $M_1$  y  $M_2$  muestran que existe un conflicto entre el ajuste de la respuesta del modelo de una salida u otro (ángulo  $\theta$  y ángulo  $\alpha$ ), ya que mejorar uno tiene como consecuencia empeorar el otro. El punto  $M_1$  representa el modelo con mejor ajuste para el ángulo  $\theta$  (se encuentra dentro de la zona A) pero así mismo es el modelo con peor ajuste para el ángulo  $\alpha$ . El punto  $M_2$  representa el modelo con peor ajuste para el ángulo  $\theta$  pero representa también el modelo con mejor ajuste para el ángulo  $\alpha$ . El punto  $M_3$  representa un modelo con prestaciones satisfactorias para  $\alpha$  y  $\theta$ , aunque no es el mejor modelo para representar a ambos ángulos. El punto  $M_4$  se seleccionó aproximadamente en el centro entre los puntos  $M_1$  y  $M_3$ , tiene mejor desempeño que  $M_3$  para representar la respuesta del ángulo  $\theta$  pero para representar a  $\alpha$  es lo opuesto. Al observar las zonas A y B en el frente de Pareto (ver figura A.14) se puede notar que los modelos del PIR que pertenecen a la zona A tienen prestaciones satisfactorias tanto para el ángulo  $\theta$  como para  $\alpha$ , mientras que tomar un modelo de la zona B implicaría mejorar en muy poco las prestaciones del modelo

en el ajuste de  $\alpha$ , pero las prestaciones del modelo en el ajuste de ángulo  $\theta$  empeorarían significativamente. En la tabla A.8 se muestran las prestaciones de los modelos del PIR que se encuentran en zona A, y en la tabla A.9 sus parámetros estructurales.

En la figura A.16 se muestran las salidas  $\theta$  y  $\alpha$  obtenidas para los modelos representados por los puntos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , y  $M_4$  sobre los datos del ensayo de identificación. En la figura A.17 se muestra la validación de los modelos de las salidas  $\theta$  y  $\alpha$  sobre un conjunto de datos diferentes a los usados para la identificación. Las prestaciones de cada uno de estos modelos sobre los datos de identificación y sobre los datos de validación se muestran en los objetivos  $J_1$  y  $J_2$  de la tabla A.10.

$J_1(\mathbf{x})$	$J_2(\mathbf{x})$
[1.355-3.523]	[1.453-1.772]

**Tabla A.8:** Prestaciones de los modelos del PIR pertenecientes a la zona A .

Parámetro	Valor
$R_{ma}$	[5.66-5.90]
$L_{ma}$	[0.0014-0.0018]
$k_b$	[0.625-0.872]
$k_t$	[0.639-0.796]
$J_{em}$	[4.29e-05-6.559E-05]
$B_m$	[0.0185-0.0390]
$J_a$	[0.0054-0.0074]
$L_p$	[0.2047-0.2330]
$J_p$	[0.0013-0.0016]
$B_p$	$\approx 0.001428$

**Tabla A.9:** Parámetros identificados de los modelo del PIR pertenecientes a la zona A .

$\mathbf{J}(\mathbf{x})$	Punto $M_1$	Punto $M_2$	Punto $M_3$	Punto $M_4$
$J_1(\mathbf{x})$	1.427	8.698	3.523	2.422
$J_2(\mathbf{x})$	2.217	1.453	1.772	1.917
$J_1(\mathbf{x})$	3.738	12.233	7.318	6.116
$J_2(\mathbf{x})$	4.570	3.507	3.684	3.787

**Tabla A.10:** Valores de los objetivos de diseño para los modelos mostrados en las figuras A.16 y A.17. Las dos primeras filas corresponden al ensayo de identificación y las dos últimas filas al ensayo de validación.

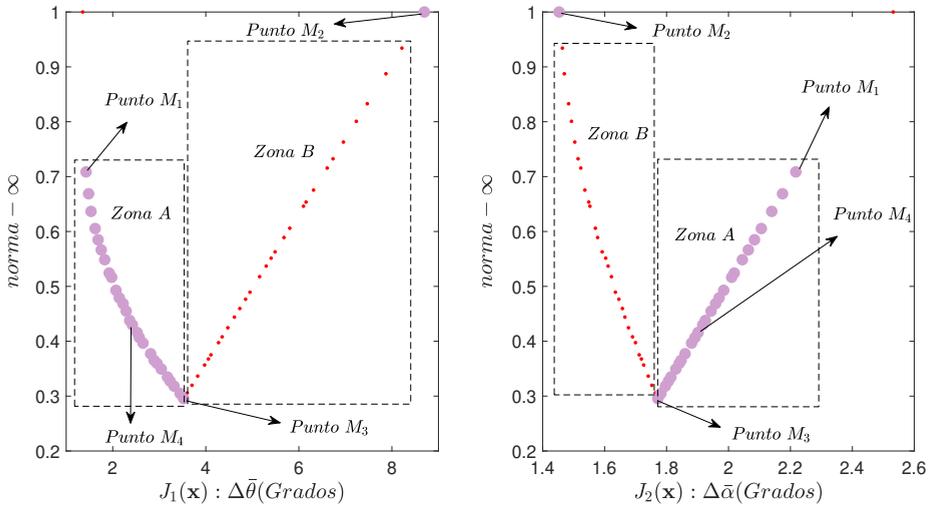


Figura A.14: Representación del frente de Pareto de los modelos del PIR usando  $norma - \infty$ .

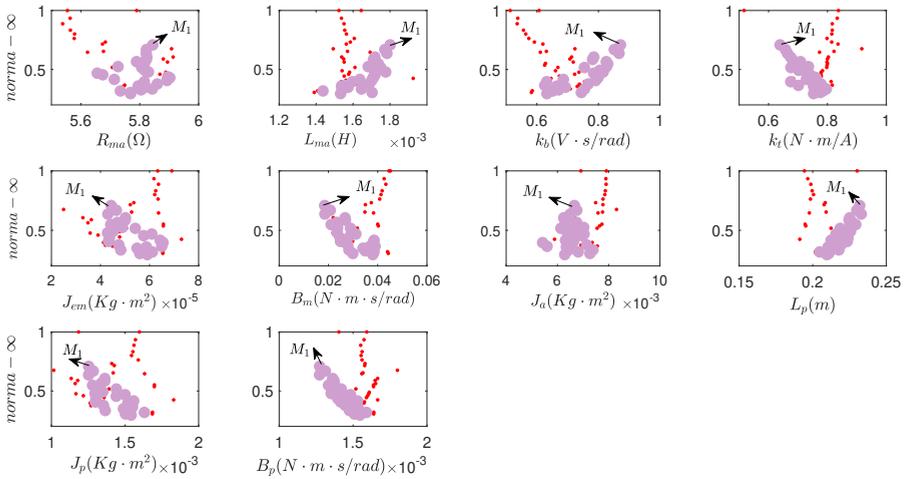
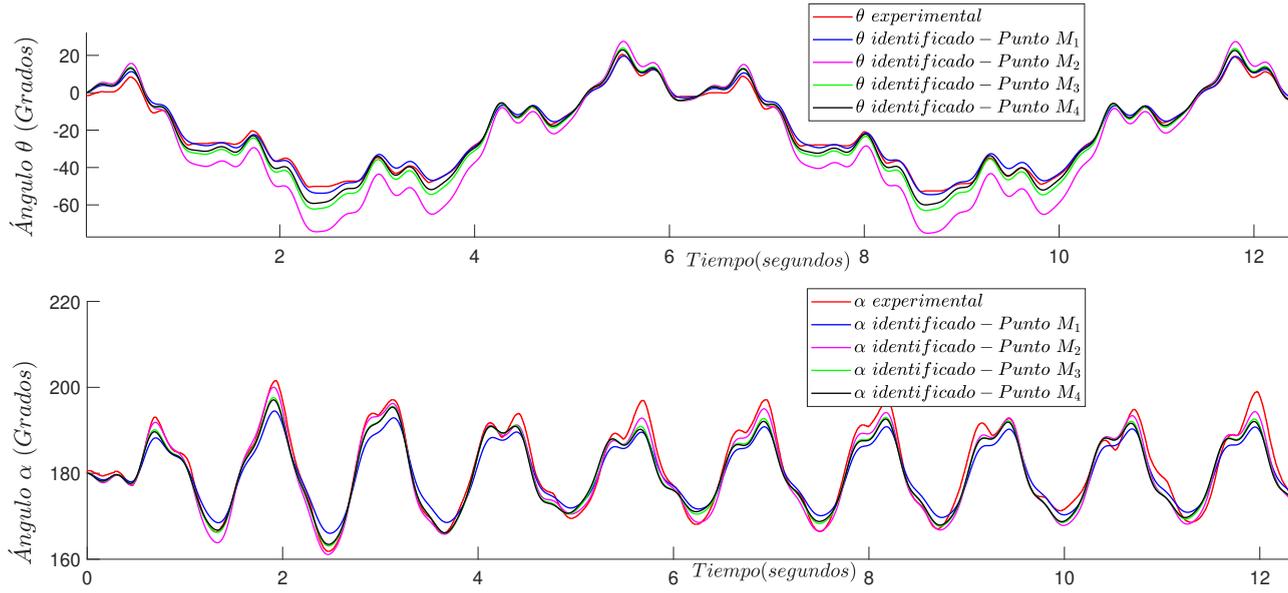
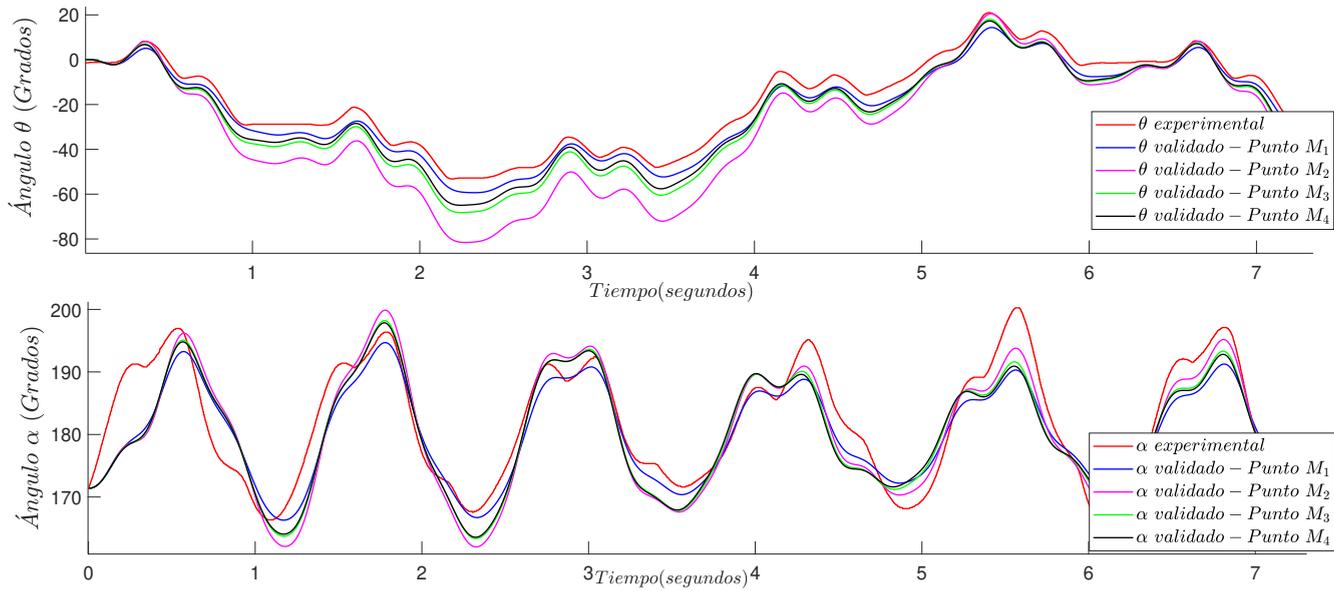


Figura A.15: Representación de los parámetros óptimos de Pareto para los modelos del PIR. Los puntos sombreados pertenecen a la zona A.  $M_1$  representa el conjunto de parámetros del modelo elegido para representar el PIR.



**Figura A.16:** Simulación de las salidas  $\theta$  y  $\alpha$  del PIR con los datos del ensayo de identificación para los modelos representados en el frente de Pareto por los puntos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ .



**Figura A.17:** Simulación de las salidas  $\theta$  y  $\alpha$  del PIR con los datos del ensayo de validación para los modelos representados en el frente de Pareto por los puntos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ .

Se seleccionó el modelo del punto  $M_1$  para representar al PIR, ya que es muy bueno en el objetivo  $J_1$  y pierde pocas prestaciones en el objetivo  $J_2$ , en comparación con los modelos de la zona B. Es decir,  $M_1$  caracteriza muy bien la dinámica del ángulo  $\theta$  perdiendo muy pocas prestaciones para caracterizar el ángulo  $\alpha$ . Es posible observar en el frente de Pareto mostrado en la figura A.15 que el modelo del PIR representado por  $M_1$  garantiza un error promedio de aproximadamente dos grados en la caracterización de ambos ángulos. Los parámetros identificados del modelo  $M_1$  se muestran en la tabla A.11. Los datos conocidos del modelo del PIR son: aceleración de la gravedad ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ), la masa del péndulo ( $m_p = 0.127 \text{ Kg}$ ), y la longitud del brazo ( $r_a = 0.125 \text{ m}$ ).

$R_{ma}$	$L_a$	$k_b$	$k_t$	$J_{em}$
5.844	0.00180	0.87167	0.63891	4.43304E-05
$B_m$	$J_a$	$L_p$	$J_p$	$B_p$
0.01847	0.0066	0.23189	0.00125	0.00127

**Tabla A.11:** Parámetros identificados para el modelo del PIR representado por el Punto  $M_1$ .

### A.3.2 Detalles del proceso de optimización multiobjetivo en el ajuste de controladores

La estructura de control implementada para el PIR se muestra en la figura A.18. Para controlar el PIR se diseñaron dos controladores, uno para el brazo y otro para el péndulo. Estratégicamente se diseñó un controlador PID para el péndulo ya que el mismo estará sometido a perturbaciones externas y la acción derivativa mejora el rechazo de estas perturbaciones. Para controlar el movimiento del brazo del PIR en cuanto a seguimiento de referencias se diseñó un controlador PI. Las ecuaciones de los controladores se muestran en (A.40) y (A.41).

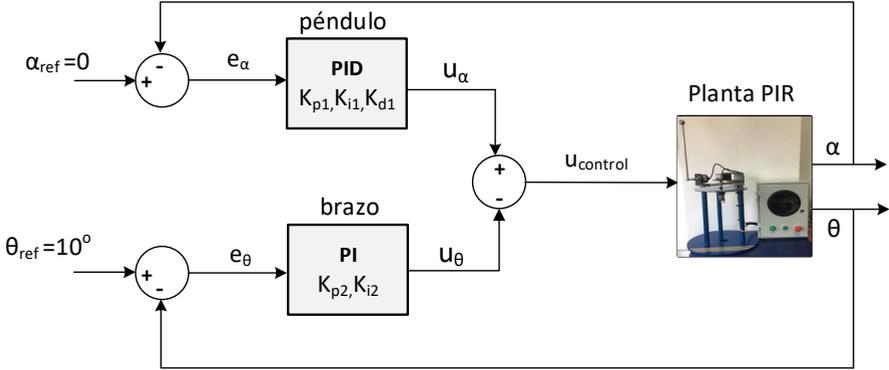
$$U_\alpha(s) = \left( K_{p1} + K_{i1} \frac{1}{s} + K_{d1} \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} \right) E_\alpha(s) \quad (\text{A.40})$$

$$U_\theta(s) = \left( K_{p2} + K_{i2} \frac{1}{s} \right) E_\theta(s) \quad (\text{A.41})$$

Donde:

$K_{p1}$ ,  $K_{i1}$ ,  $K_{d1}$  representan las ganancias proporcional, integral y derivativa del controlador PID.

$K_{p2}$ ,  $K_{i2}$  representan las ganancias proporcional, e integral del controlador PI.  $N$  representa el filtro derivativo. El valor usado fue  $N=100$ .



**Figura A.18:** Estructura de control del péndulo invertido rotatorio.

Para ajustar los controladores PID y PI con un enfoque de optimización multiobjetivo se usó como indicador de desempeño la integral del valor absoluto del error (IAE) para evaluar la calidad del control, y la integral del valor absoluto de la derivada de la acción de control (IADU) para evaluar cada esfuerzo de control.

El problema de optimización multiobjetivo se plantea como se muestra en (A.42)-(A.50). El MOP tiene como objetivo encontrar los parámetros de sintonía óptimos  $K_{p1}$ ,  $K_{i1}$ ,  $K_{d1}$ ,  $K_{p2}$ ,  $K_{i2}$  de cada controlador propuesto, para lo cual se plantean dos escenarios, uno de ellos para seguimiento de referencia, y el otro para rechazo de perturbaciones. Se aplica una señal de referencia tipo escalón de 10 grados de amplitud, para evaluar el seguimiento de referencia del brazo del PIR (ángulo  $\theta$ ). Cuando el sistema se estabiliza se aplica una perturbación al péndulo (ángulo  $\alpha$ ) lo cual produce un desplazamiento del ángulo  $\theta$  de aproximadamente 40 grados. La referencia del ángulo  $\alpha$  debe mantenerse en cero grados para evitar que el péndulo caiga. El tiempo de muestreo de las señales es de un milisegundo ( $T_s = 1 \text{ ms}$ ).

El primer escenario propuesto analiza el seguimiento de referencia a través de los objetivos de diseño  $J_{11}$  y  $J_{21}$  y evalúa las prestaciones obtenidas en cada ángulo. El segundo escenario analiza el sistema frente al rechazo de pertur-

baciones a través de los objetivos  $J_{12}$  y  $J_{22}$ . El MOP también contempla los objetivos  $J_{31}$  y  $J_{32}$  que evalúan el esfuerzo de control para cada escenario.

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [J_{11}(\mathbf{x}), J_{12}(\mathbf{x}), J_{21}(\mathbf{x}), J_{22}(\mathbf{x}), J_{31}(\mathbf{x}), J_{32}(\mathbf{x})] \quad (\text{A.43})$$

$$J_{11}(\mathbf{x}) = [IAE]_{11} = \frac{1}{t_{f1}} \int_0^{t_{f1}} |\alpha_{ref} - \alpha| dt \quad (\text{A.44})$$

$$J_{12}(\mathbf{x}) = [IAE]_{12} = \frac{1}{t_{f2}} \int_0^{t_{f2}} |\alpha_{ref} - \alpha| dt \quad (\text{A.45})$$

$$J_{21}(\mathbf{x}) = [IAE]_{21} = \frac{1}{t_{f1}} \int_0^{t_{f1}} |\theta_{ref} - \theta| dt \quad (\text{A.46})$$

$$J_{22}(\mathbf{x}) = [IAE]_{22} = \frac{1}{t_{f2}} \int_0^{t_{f2}} |\theta_{ref} - \theta| dt \quad (\text{A.47})$$

$$J_{31}(\mathbf{x}) = [IADU]_{31} = \int_0^{t_{f1}} \left| \frac{du_{control}}{dt} \right| dt \quad (\text{A.48})$$

$$J_{32}(\mathbf{x}) = [IADU]_{32} = \int_0^{t_{f2}} \left| \frac{du_{control}}{dt} \right| dt \quad (\text{A.49})$$

$t_{f1} = 5$  segundos posterior al cambio de referencia

$t_{f2} = 9$  segundos posterior a aplicar la perturbación

$$\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{A.50})$$

El vector de decisión está formado por los parámetros de ajuste de cada controlador (PID y PI) como se muestra en (A.51).

$$\mathbf{x} = [K_{p1}, K_{i1}, K_{d1}, K_{p2}, K_{i2}] \quad (\text{A.51})$$

Los límites del vector de decisión fueron establecidos diseñando controladores de referencia para el PIR (auto sintonizados). Estos límites se muestran en la tabla A.12.

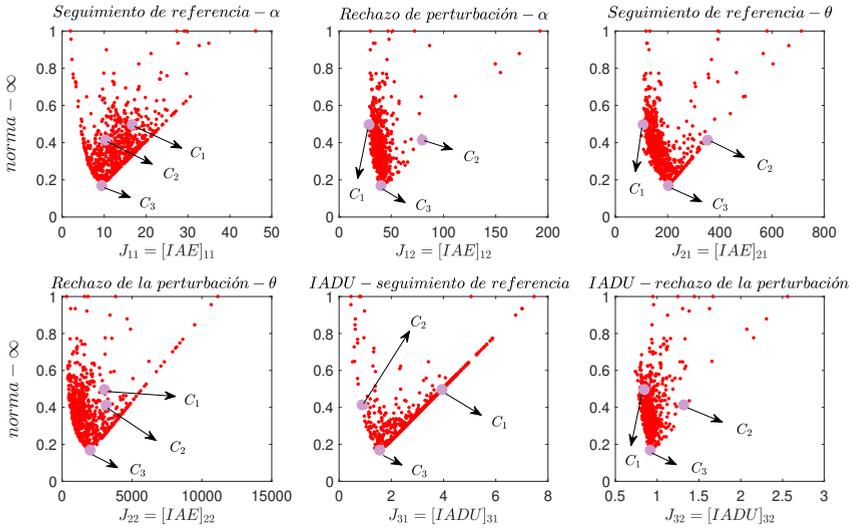
Una vez realizado el proceso de optimización multiobjetivo para el ajuste de controladores del PIR se obtuvo el frente de Pareto mostrado en la figura A.19. En este frente los objetivos  $J_{11}$  y  $J_{12}$  evalúan el IAE del ángulo  $\alpha$  para seguimiento de una referencia y frente al rechazo de una perturbación respectivamente. Así también  $J_{21}$  y  $J_{22}$  evalúan el IAE del ángulo  $\theta$  para seguimiento

$\mathbf{x}$	$K_{p1}$	$K_{i1}$	$K_{d1}$	$K_{p2}$	$K_{i2}$
$\underline{\mathbf{x}}$	20	50	0.1	1	1
$\overline{\mathbf{x}}$	50	300	1.2	10	10

**Tabla A.12:** Límites del vector de decisión para el ajuste de controladores del PIR.

de referencia y rechazo de perturbación. Finalmente  $J_{31}$  y  $J_{32}$  evalúan el IADU para seguimiento de referencia y para rechazo de una perturbación.

Se eligieron tres controladores del frente de Pareto de, estos son:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , con el fin de analizar el intercambio de prestaciones entre estos para rechazar una perturbación en  $\alpha$ . Se priorizó la elección de los controladores en el frente analizando el objetivo  $J_{12}$  ya que es de fundamental importancia que el PIR mantenga en equilibrio el péndulo ( $\alpha = 0$  grados) y evite que se caiga. Se observa que el objetivo  $J_{12}$  está en conflicto con el objetivo  $J_{31}$ , ya que los controladores representados por  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran en extremos diferentes de ambos frentes. Esto significa que si se elige el controlador  $C_1$  se logrará muy buen desempeño para rechazo de una perturbación del péndulo (ángulo  $\alpha$ ), pero se requiere grandes esfuerzos de control para seguimiento de referencias del PIR.



**Figura A.19:** Frente de Pareto de controladores sintonizados para el PIR usando  $norma - \infty$ .

Si un diseñador elige el controlador representado por  $C_2$  ocurre lo contrario. Es posible observar en el frente de la figura A.19 que el objetivo  $J_{12}$  también tiene conflicto con los objetivos  $J_{11}$  y  $J_{22}$ , ya que ganar en prestaciones para el rechazo de una perturbación del péndulo del PIR, implica perder un poco en prestaciones para seguimiento de una referencia en  $\alpha$  y para el rechazo de una perturbación en  $\theta$  (brazo del PIR).

Los parámetros de los controladores PID y PI del PIR ajustados de manera óptima se muestran en la figura A.20. Estos parámetros de sintonía corresponden a los controladores del frente de Pareto de la figura A.19. Las respuestas de los controladores representados en el frente de Pareto como  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se muestran en la figura A.21. En las tablas A.13 y A.14 se muestran los valores de sus objetivos de diseños y los parámetros de sintonía de cada controlador respectivamente.

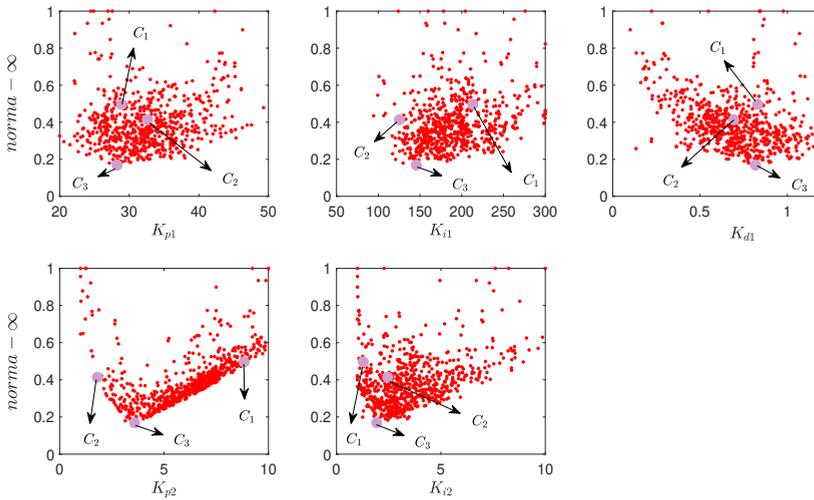
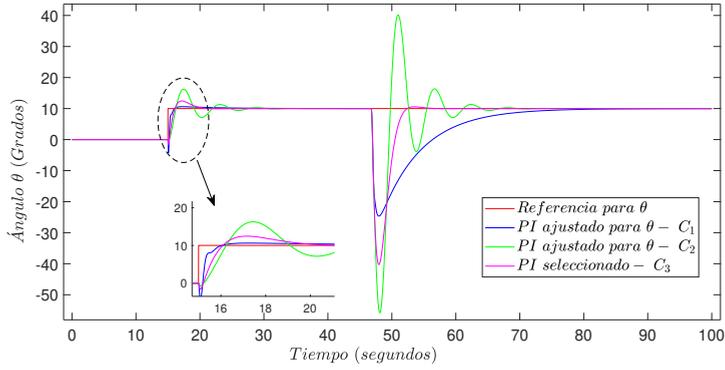


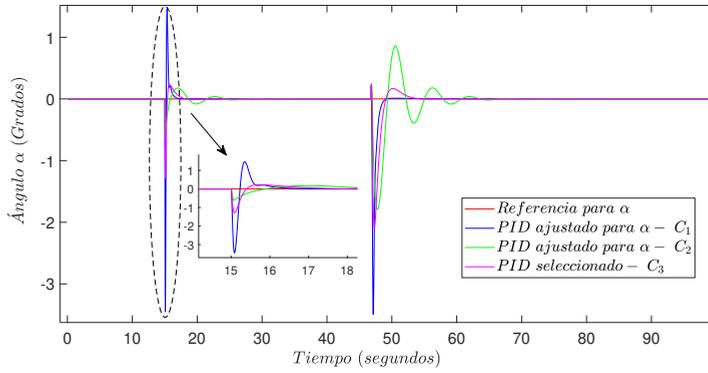
Figura A.20: Parámetros de sintonización de los controladores del PIR.

	$J_{11}$	$J_{12}$	$J_{21}$	$J_{22}$	$J_{31}$	$J_{32}$
$C_1$	16.69	28.7	106.2	3027	3.993	0.8463
$C_2$	10.37	79.66	353	3150	0.8825	1.317
$C_3$	9.446	40.09	203.1	2004	1.556	0.9175

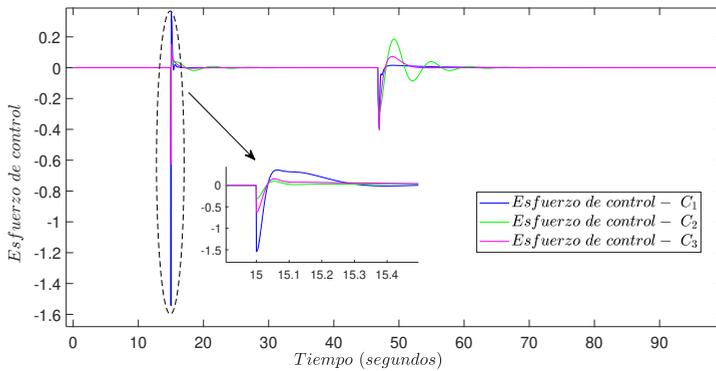
Tabla A.13: Valores de los objetivos de diseño para los controladores del PIR representados por  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .



(a) Controlador PI para el ángulo  $\theta$



(b) Controlador PID para el ángulo  $\alpha$



(c) Esfuerzo de control del PIR

Figura A.21: Simulación de controladores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  para el PIR.

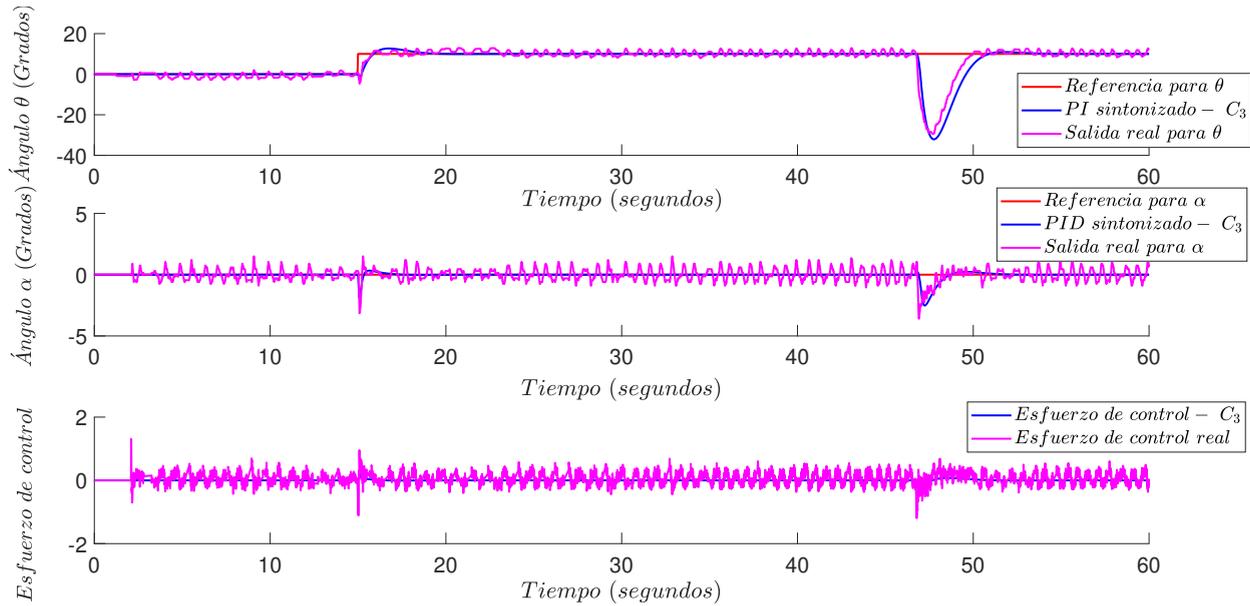
	$K_{p1}$	$K_{i1}$	$K_{d1}$	$K_{p2}$	$K_{i2}$
$C_1$	28.9	213.3	0.8303	8.836	1.279
$C_2$	32.61	124.6	0.6858	1.803	2.45
$C_3$	28.25	145.6	0.8182	3.592	1.921

**Tabla A.14:** Parámetros de sintonización de los controladores PID y PI del PIR representados por  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

Es posible observar en la tabla A.13 que el controlador  $C_1$  tiene mejores prestaciones para rechazar una perturbación en  $\alpha$  comparado con  $C_2$  (ver objetivo  $J_{12}$ ), pero en contrapartida el esfuerzo de control del PIR para seguimiento de referencias es más grande (ver objetivo  $J_{31}$ ). Así también el controlador  $C_1$  es peor que los controladores  $C_2$  y  $C_3$  para seguimiento de referencias del ángulo  $\alpha$  (ver objetivo  $J_{11}$ ). El controlador  $C_2$  es mejor que los controladores  $C_1$  y  $C_3$  en su acción de control para seguimiento de referencias del PIR (ver objetivo  $J_{31}$ ), pero es peor en los otros objetivos de diseño. Con respecto al ángulo  $\theta$  se aplica una perturbación al péndulo del PIR y se observa en la figura A.21 que cada controlador  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  (uno mejor que otro) rechazan esta perturbación y estabilizan el PIR. Finalmente se eligió el controlador  $C_3$  como un controlador de compromiso del PIR ya que tiene prestaciones satisfactorias (evaluadas por el IAE y el IADU) tanto para seguimiento de referencias como para el rechazo de una perturbación. Las respuestas de las salidas angulares  $\theta$  y  $\alpha$  sobre la planta real se muestran en la figura A.22.

### A.3.3 Conclusiones

En este ejemplo se muestra la aplicación de un procedimiento de diseño con un enfoque de optimización multiobjetivo para el modelado y control de un péndulo invertido rotatorio. Se pudo mostrar que el ajuste del comportamiento del modelo del ángulo  $\alpha$  tiene conflicto con el del ángulo  $\theta$ , ya que mejorar uno implica empeora el otro. Fue factible identificar un modelo no lineal satisfactorio para caracterizar el sistema, el cual fue utilizado para realizar el ajuste de los controladores PID y PI para el péndulo y brazo del PIR respectivamente. Se mostró que existe conflicto también entre el IAE e IADU de los controladores del PIR (equivalente a lo ocurrido con el modelado), el enfoque multobjetivo es recomendable para analizar este tipo de situaciones ya que permite a un diseñador de acuerdo a sus preferencias establecer controladores óptimos para el PIR. Se observa un rizado casi ciclo límite en la respuesta real del PIR debido a que el prototipo presenta una degradación en sus componentes lo cual genera una zona muerta grande, aunque esto no invalida el procedimiento aplicado.



**Figura A.22:** Respuestas de los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  del PIR aplicando el controlador  $C_3$  sobre la planta real.



# Bibliografía

- [1] M. H. Abidi, A. M. Al-Ahmari, U. Umer y M. S. Rasheed. «Multi-objective optimization of micro-electrical discharge machining of nickel-titanium-based shape memory alloy using MOGA-II». En: *Measurement* 125 (2018), págs. 336-349 (vid. pág. 28).
- [2] K. M. Abughalieh y S. G. Alawneh. «A survey of parallel implementations for model predictive control». En: *IEEE Access* 7 (2019), págs. 34348-34360 (vid. pág. 39).
- [3] S. Agrawal, Y. Dashora, M. K. Tiwari e Y.-J. Son. «Interactive particle swarm: a Pareto-adaptive metaheuristic to multiobjective optimization». En: *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics-Part A: Systems and humans* 38.2 (2008), págs. 258-277 (vid. pág. 17).
- [4] L. A. Amézquita-Brooks, J. Licéaga-Castro, E. Licéaga-Castro y C. E. Ugalde-Loo. «Induction motor control: multivariable analysis and effective decentralized control of stator currents for high-performance applications». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62.11 (2015), págs. 6818-6832 (vid. pág. 39).
- [5] K. J. Åström y R. Bell. «Dynamic models for boiler-turbine alternator units: Data logs and parameter estimation for a 160 MW unit». En: *Research Reports TFRT-3192* (1987) (vid. págs. 138, 139).

- [6] K. J. Åström y K. Furuta. «Swinging up a pendulum by energy control». En: *Automatica* 36.2 (2000), págs. 287-295 (vid. pág. 180).
- [7] K. J. Åström y T. Häggglund. *PID controllers: theory, design, and tuning*. Vol. 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC, 1995 (vid. pág. 46).
- [8] T. Back y Á. E. Eiben. «Generalizations of intermediate recombination in evolution strategies». En: *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation-CEC99 (Cat. No. 99TH8406)*. Vol. 2. IEEE. 1999, págs. 1566-1573 (vid. pág. 22).
- [9] T. Bäck y M. Schütz. «Intelligent mutation rate control in canonical genetic algorithms». En: *International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems*. Springer. 1996, págs. 158-167 (vid. pág. 22).
- [10] L. Bakule. «Decentralized control: Status and outlook». En: *Annual Reviews in Control* 38.1 (2014), págs. 71-80 (vid. págs. 3, 39).
- [11] A. Balestrino, E. Crisostomi, A. Landi y A. Menicagli. «ARGA loop pairing criteria for multivariable systems». En: *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. 2008, págs. 5668-5673 (vid. pág. 50).
- [12] J. Bao, K. H. Chan, W. Z. Zhang y P. L. Lee. «An experimental pairing method for multi-loop control based on passivity». En: *Journal of Process Control* 17.10 (2007), págs. 787-798 (vid. págs. 50, 51).
- [13] J. Bao, P. L. LEE, F. WANGC, W. ZHOU e Y. SAMYUDIA. «A new approach to decentralised process control using passivity and sector stability conditions». En: *Chemical Engineering Communications* 182.1 (2000), págs. 213-237 (vid. págs. 50, 51).
- [14] J. Bao, P. J. McLellan y J. F. Forbes. «A passivity-based analysis for decentralized integral controllability». En: *Automatica* 38.2 (2002), págs. 243-247 (vid. págs. 50, 51).
- [15] D. I. Barbosa, J. S. Castillo y L. F. Cómbita. «Rotary inverted pendulum with real time control». En: *IX Latin American Robotics Sym-*

- 
- posium and IEEE Colombian Conference on Automatic Control, 2011 IEEE*. IEEE. 2011, págs. 1-6 (vid. pág. [180](#)).
- [16] L. S. Batista, F. Campelo, F. G. Guimarães y J. A. Ramírez. «Pareto cone  $\varepsilon$ -dominance: improving convergence and diversity in multiobjective evolutionary algorithms». En: *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer. 2011, págs. 76-90 (vid. pág. [25](#)).
- [17] V. E. Berezkin, A. V. Lotov y E. Lotova. «Study of hybrid methods for approximating the Edgeworth-Pareto hull in nonlinear multicriteria optimization problems». En: *Computational mathematics and mathematical physics* 54.6 (2014), págs. 919-930 (vid. pág. [32](#)).
- [18] M. S. Biswas, K Mandal y S Sarkar. «MOGA approach in WEDM of advanced aluminium alloy». En: *Materials Today: Proceedings* (2020) (vid. pág. [28](#)).
- [19] X. Blasco, J. M. Herrero, J. Sanchis y M. Martínez. «A new graphical visualization of n-dimensional Pareto front for decision-making in multiobjective optimization». En: *Information Sciences* 178.20 (2008), págs. 3908-3924 (vid. págs. [10](#), [12](#), [15](#), [32](#), [33](#), [64](#), [68](#), [167](#), [172](#), [185](#)).
- [20] X. Blasco, J. M. Herrero, G. Reynoso-Meza y M. A. M. Iranzo. «Interactive tool for analyzing multiobjective optimization results with level diagrams». En: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion*. 2017, págs. 1689-1696 (vid. págs. [10](#), [12](#), [15](#), [32](#), [33](#), [64](#), [68](#), [167](#), [172](#), [185](#)).
- [21] P. Błażej, M. Wntrzak y P. Mackiewicz. «The role of crossover operator in evolutionary-based approach to the problem of genetic code optimization». En: *Biosystems* 150 (2016), págs. 61-72 (vid. pág. [22](#)).
- [22] W. Boukadida, A. Benamor, H. Messaoud y P. Siarry. «Multi-objective design of optimal higher order sliding mode control for robust tracking of 2-DoF helicopter system based on metaheuristics». En: *Aerospace Science and Technology* 91 (2019), págs. 442-455 (vid. pág. [21](#)).
- [23] E. Bristol. «On a new measure of interaction for multivariable process control». En: *IEEE transactions on automatic control* 11.1 (1966), págs. 133-134 (vid. págs. [3](#), [4](#), [40](#), [67](#)).

- [24] L.-J. Cai, I. Erlich y J. Fortmann. «Dynamic voltage stability analysis for power systems with wind power plants using relative gain array (RGA)». En: *IFAC Proceedings Volumes* 45.21 (2012), págs. 331-336 (vid. pág. 40).
- [25] E. F. Camacho y C. B. Alba. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013 (vid. págs. 3, 39).
- [26] B. N. Chaffi y F. S. Tafreshi. «Nasseh method to visualize high-dimensional data». En: *Applied Soft Computing* 84 (2019), pág. 105722 (vid. pág. 32).
- [27] J.-W. Chang y C.-C. Yu. «The relative gain for non-square multivariable systems». En: *Chemical engineering science* 45.5 (1990), págs. 1309-1323 (vid. págs. 4, 48).
- [28] D. Chen e Y. Li. «A development on multimodal optimization technique and its application in structural damage detection». En: *Applied Soft Computing* (2020), pág. 106264 (vid. pág. 27).
- [29] P.-C. Chen y J. S. Shamma. «Gain-scheduled 1-optimal control for boiler-turbine dynamics with actuator saturation». En: *Journal of process control* 14.3 (2004), págs. 263-277 (vid. pág. 138).
- [30] Q. Chen, X. Luan y F. Liu. «RNGA Loop Pairing Criterion for Multivariable Systems Subject to a Class of Reference Inputs». En: *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014), págs. 4721-4726 (vid. pág. 45).
- [31] W.-H. Chen, P.-H. Wu e Y.-L. Lin. «Performance optimization of thermoelectric generators designed by multi-objective genetic algorithm». En: *Applied energy* 209 (2018), págs. 211-223 (vid. pág. 28).
- [32] M. S. Chiu e Y. Arkun. «Decentralized control structure selection based on integrity considerations». En: *Industrial & engineering chemistry research* 29.3 (1990), págs. 369-373 (vid. pág. 49).
- [33] C. A. C. Coello. «Evolutionary multi-objective optimization: basic concepts and some applications in pattern recognition». En: *Mexican Conference on Pattern Recognition*. Springer. 2011, págs. 22-33 (vid. pág. 21).

- 
- [34] C. A. C. Coello. «Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art». En: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191.11-12 (2002), págs. 1245-1287 (vid. pág. 27).
- [35] C. A. C. Coello, G. B. Lamont y D. A. V. Veldhuizen. «Multi-criteria decision making». En: *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems: Second Edition* (2007), págs. 515-545 (vid. pág. 15).
- [36] D. W. Corne, N. R. Jerram, J. D. Knowles y M. J. Oates. «PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization». En: *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. 2001, págs. 283-290 (vid. pág. 23).
- [37] D. W. Corne y J. D. Knowles. «Techniques for highly multiobjective optimisation: some nondominated points are better than others». En: *Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. 2007, págs. 773-780 (vid. pág. 27).
- [38] P. Daoutidis y C. Kravaris. «Structural evaluation of control configurations for multivariable nonlinear processes». En: *Chemical engineering science* 47.5 (1992), págs. 1091-1107 (vid. pág. 51).
- [39] I. Das y J. E. Dennis. «Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems». En: *SIAM journal on optimization* 8.3 (1998), págs. 631-657 (vid. pág. 20).
- [40] S. Das, S. Maity, B.-Y. Qu y P. N. Suganthan. «Real-parameter evolutionary multimodal optimization—A survey of the state-of-the-art». En: *Swarm and Evolutionary Computation* 1.2 (2011), págs. 71-88 (vid. pág. 27).
- [41] K. A. De Jong. *Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*. Inf. téc. 1975 (vid. pág. 22).
- [42] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap y T. Meyarivan. «A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II». En: *International conference on parallel problem solving from nature*. Springer. 2000, págs. 849-858 (vid. pág. 23).

- [43] T. Dokeroglu, E. Sevinc, T. Kucukyilmaz y A. Cosar. «A survey on new generation metaheuristic algorithms». En: *Computers & Industrial Engineering* 137 (2019), pág. 106040 (vid. pág. 20).
- [44] A. E. Eiben, Z. Michalewicz, M. Schoenauer y J. E. Smith. «Parameter control in evolutionary algorithms». En: *Parameter setting in evolutionary algorithms*. Springer, 2007, págs. 19-46 (vid. pág. 24).
- [45] A. E. Eiben y M. Schoenauer. «Evolutionary computing». En: *Information Processing Letters* 82.1 (2002), págs. 1-6 (vid. pág. 22).
- [46] O. Ertenlice y C. B. Kalayci. «A survey of swarm intelligence for portfolio optimization: Algorithms and applications». En: *Swarm and evolutionary computation* 39 (2018), págs. 36-52 (vid. pág. 20).
- [47] F. Fabiani, D. Fenucci y A. Caiti. «A distributed passivity approach to AUV teams control in cooperating potential games». En: *Ocean Engineering* 157 (2018), págs. 152-163 (vid. pág. 51).
- [48] K Fernando y H Nicholson. «On the structure of balanced and other principal representations of SISO systems». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 28.2 (1983), págs. 228-231 (vid. pág. 50).
- [49] J. Fieldsend y R. Everson. «Visualising high-dimensional Pareto relationships in two-dimensional scatterplots». En: *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer. 2013, págs. 558-572 (vid. pág. 32).
- [50] B. Filipič y T. Tušar. «A taxonomy of methods for visualizing pareto front approximations». En: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2018, págs. 649-656 (vid. pág. 33).
- [51] P. J. Fleming y R. C. Purshouse. «Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey». En: *Control engineering practice* 10.11 (2002), págs. 1223-1241 (vid. pág. 21).
- [52] D. B. Fogel y H.-G. Beyer. «A note on the empirical evaluation of intermediate recombination». En: *Evolutionary Computation* 3.4 (1995), págs. 491-495 (vid. pág. 22).

- 
- [53] C. M. Fonseca y P. J. Fleming. «Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. I. A unified formulation». En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* 28.1 (1998), págs. 26-37 (vid. pág. 27).
- [54] C. M. Fonseca, J. D. Knowles, L. Thiele y E. Zitzler. «A tutorial on the performance assessment of stochastic multiobjective optimizers». En: *Third International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2005)*. Vol. 216. 2005, pág. 240 (vid. págs. 24, 36).
- [55] C. H. Forsberg. *Heat Transfer Principles and Applications*. Academic Press, 2020 (vid. pág. 169).
- [56] K. Furuta, M Yamakita y S Kobayashi. «Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback». En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 206.4 (1992), págs. 263-269 (vid. pág. 180).
- [57] H. Gao, H. Nie y K. Li. «Visualisation of pareto front approximation: A short survey and empirical comparisons». En: *2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. IEEE. 2019, págs. 1750-1757 (vid. pág. 33).
- [58] R. Garduno-Ramirez y K. Y. Lee. «Multiobjective optimal power plant operation through coordinate control with pressure set point scheduling». En: *IEEE Transactions on energy conversion* 16.2 (2001), págs. 115-122 (vid. pág. 138).
- [59] H. Garg. «A hybrid PSO-GA algorithm for constrained optimization problems». En: *Applied Mathematics and Computation* 274 (2016), págs. 292-305 (vid. pág. 20).
- [60] J. Garrido, F. Morilla y F. Vazquez. «Centralized PID control by decoupling of a boiler-turbine unit». En: *2009 European Control Conference (ECC)*. IEEE. 2009, págs. 4007-4012 (vid. págs. 138-140).
- [61] S. Glad. «Extensions of the RGA concept to nonlinear systems». En: *1999 European Control Conference (ECC)*. IEEE. 1999, págs. 961-963 (vid. págs. 51, 125).

- [62] R. Goldstein, W. Ibele, S. Patankar, T. Simon, T. Kuehn, P. Strykowski, K. Tamma, J. Heberlein, J. Davidson, J Bischof y col. «Heat transfer—A review of 2004 literature». En: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.21-22 (2010), págs. 4343-4396 (vid. pág. 169).
- [63] P. Grosdidier y M. Morari. «Interaction measures for systems under decentralized control». En: *Automatica* 22.3 (1986), págs. 309-319 (vid. pág. 51).
- [64] L. Grüne y J. Pannek. «Nonlinear model predictive control». En: *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, 2017, págs. 45-69 (vid. pág. 39).
- [65] K. E. Haeggblom. «Partial relative gain: A new tool for control structure selection». En: *AIChE Annual Meeting*. Citeseer. 1997 (vid. pág. 49).
- [66] M. Hartikainen, K. Miettinen y K. Klamroth. «Interactive nonconvex Pareto Navigator for multiobjective optimization». En: *European Journal of Operational Research* 275.1 (2019), págs. 238-251 (vid. pág. 20).
- [67] M.-J. He y W.-J. Cai. «New criterion for control-loop configuration of multivariable processes». En: *Industrial & engineering chemistry research* 43.22 (2004), págs. 7057-7064 (vid. pág. 49).
- [68] M.-J. He, W.-J. Cai, W. Ni y L.-H. Xie. «RNGA based control system configuration for multivariable processes». En: *Journal of Process control* 19.6 (2009), págs. 1036-1042 (vid. págs. 41, 45, 47, 98, 101).
- [69] J. Herrero, X. Blasco, M Martínez, C Ramos y J Sanchis. «Non-linear robust identification of a greenhouse model using multi-objective evolutionary algorithms». En: *Biosystems Engineering* 98.3 (2007), págs. 335-346 (vid. págs. 10, 12, 15, 28, 29, 31, 64, 67, 167, 172, 185).
- [70] J. Herrero, G Reynoso-Meza, C Ramos y X Blasco. «Considerations on loop pairing in MIMO processes. A multi-criteria analysis». En: *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), págs. 4454-4459 (vid. págs. 4, 52).
- [71] J. H. Holland y col. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press, 1992 (vid. pág. 22).

- 
- [72] M. Hovd y S. Skogestad. «Pairing criteria for decentralized control of unstable plants». En: *Industrial & engineering chemistry research* 33.9 (1994), págs. 2134-2139 (vid. pág. 49).
- [73] V. Huilcapi, X. Blasco, J. M. Herrero y G. Reynoso-Meza. «A loop pairing method for multivariable control systems under a multi-objective optimization approach». En: *IEEE Access* 7 (2019), págs. 81994-82014 (vid. págs. 55, 67, 163).
- [74] V. Huilcapi, X. Blasco, J. M. Herrero y G. Reynoso-Meza. «A Loop Pairing Method for Non-Linear Multivariable Control Systems Under a Multi-Objective Optimization Approach». En: *IEEE Access* 8 (2020), págs. 41262-41281 (vid. págs. 55, 67, 163).
- [75] V. Huilcapi, J. M. Herrero, X. Blasco y M. Martínez-Iranzo. «Non-linear identification of a peltier cell model using evolutionary multi-objective optimization». En: *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), págs. 4448-4453 (vid. págs. 11, 167).
- [76] V. Huilcapi, B. Lima, X. Blasco y J. M. Herrero. «Multi-objective optimization in modeling and control for rotary inverted pendulum». En: *RIAI-Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial* (2018), págs. 363-373 (vid. págs. 11, 21, 167).
- [77] A. Ibrahim, S. Rahnamayan, M. V. Martin y K. Deb. «3D-RadVis: Visualization of Pareto front in many-objective optimization». En: *2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. IEEE. 2016, págs. 736-745 (vid. pág. 32).
- [78] A. Inselberg. *Parallel coordinates: visual multidimensional geometry and its applications*. Vol. 20. Springer Science & Business Media, 2009 (vid. pág. 32).
- [79] A. Inselberg y B. Dimsdale. «Parallel coordinates: a tool for visualizing multi-dimensional geometry». En: *Proceedings of the First IEEE Conference on Visualization: Visualization90*. IEEE. 1990, págs. 361-378 (vid. pág. 32).

- [80] A. Inselberg y B. Dimsdale. «Parallel coordinates for visualizing multi-dimensional geometry». En: *Computer Graphics 1987*. Springer, 1987, págs. 25-44 (vid. pág. 32).
- [81] H. Ishibuchi, N. Tsukamoto e Y. Nojima. «Evolutionary many-objective optimization: A short review». En: *2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. IEEE. 2008, págs. 2419-2426 (vid. pág. 27).
- [82] B. Jamali, M. Rasekh, F. Jamadi, R. Gandomkar y F. Makiabadi. «Using PSO-GA algorithm for training artificial neural network to forecast solar space heating system parameters». En: *Applied Thermal Engineering* 147 (2019), págs. 647-660 (vid. pág. 20).
- [83] J.-Y. Ji, W.-J. Yu, Y.-J. Gong y J. Zhang. «Multiobjective optimization with  $\epsilon$ -constrained method for solving real-parameter constrained optimization problems». En: *Information Sciences* 467 (2018), págs. 15-34 (vid. págs. 20, 27).
- [84] K. H. Johansson. «The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero». En: *IEEE Transactions on control systems technology* 8.3 (2000), págs. 456-465 (vid. págs. 123, 125, 127-131, 133, 156).
- [85] D. Karaboga. *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization*. Inf. téc. Technical report-tr06, Erciyes university, engineering faculty, computer . . . , 2005 (vid. pág. 20).
- [86] D. Karaboga y B. Basturk. «A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm». En: *Journal of global optimization* 39.3 (2007), págs. 459-471 (vid. pág. 17).
- [87] G. Karafotias, M. Hoogendoorn y Á. E. Eiben. «Parameter control in evolutionary algorithms: Trends and challenges». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 19.2 (2014), págs. 167-187 (vid. pág. 24).

- 
- [88] V. Kariwala e Y. Cao. «Branch and bound method for multiobjective pairing selection». En: *Automatica* 46.5 (2010), págs. 932-936 (vid. pág. 51).
- [89] A. Khaki-Sedigh y B. Moaveni. *Control configuration selection for multivariable plants*. Vol. 391. Springer, 2009 (vid. págs. 3, 40, 42, 44, 49, 51, 125).
- [90] B. Koohestani. «A Crossover Operator for Improving the Efficiency of Permutation-Based Genetic Algorithms». En: *Expert Systems with Applications* (2020), pág. 113381 (vid. pág. 22).
- [91] H. Lau, J. Alvarez y K. Jensen. «Synthesis of control structures by singular value analysis: Dynamic measures of sensitivity and interaction». En: *AIChE Journal* 31.3 (1985), págs. 427-439 (vid. pág. 50).
- [92] M. Laumanns, L. Thiele, K. Deb y E. Zitzler. «Combining convergence and diversity in evolutionary multiobjective optimization». En: *Evolutionary computation* 10.3 (2002), págs. 263-282 (vid. págs. 25, 28).
- [93] W. Levine y M. Athans. «On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems». En: *IEEE Transactions on Automatic control* 15.1 (1970), págs. 44-48 (vid. pág. 43).
- [94] Q.-F. Liao, W.-J. Cai, S.-Y. Li e Y.-Y. Wang. «Interaction analysis and loop pairing for MIMO processes described by T-S fuzzy models». En: *Fuzzy Sets and Systems* 207 (2012), págs. 64-76 (vid. pág. 51).
- [95] B. Lima, R. Cajo, V. Huilcapi y W. Agila. «Modeling and comparative study of linear and nonlinear controllers for rotary inverted pendulum». En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 783. 1. IOP Publishing, 2017, pág. 012047 (vid. pág. 180).
- [96] A. V. Lotov, V. A. Bushenkov y G. K. Kamenev. *Interactive decision maps: Approximation and visualization of Pareto frontier*. Vol. 89. Springer Science & Business Media, 2013 (vid. pág. 32).
- [97] A. V. Lotov y K. Miettinen. «Visualizing the Pareto frontier». En: *Multiobjective optimization*. Springer, 2008, págs. 213-243 (vid. pág. 32).

- [98] M. Lozano, D. Molina y F. Herrera. «Editorial scalability of evolutionary algorithms and other metaheuristics for large-scale continuous optimization problems». En: *Soft Computing* 15.11 (2011), págs. 2085-2087 (vid. pág. 28).
- [99] G. A. Mannella, V. La Carrubba y V. Brucato. «Peltier cells as temperature control elements: Experimental characterization and modeling». En: *Applied thermal engineering* 63.1 (2014), págs. 234-245 (vid. pág. 168).
- [100] R. T. Marler y J. S. Arora. «Survey of multi-objective optimization methods for engineering». En: *Structural and multidisciplinary optimization* 26.6 (2004), págs. 369-395 (vid. págs. 18, 20).
- [101] A Martínez, D Astrain, A Rodríguez y P Aranguren. «Advanced computational model for Peltier effect based refrigerators». En: *Applied Thermal Engineering* 95 (2016), págs. 339-347 (vid. pág. 168).
- [102] M. K. Maschek. «Intelligent mutation rate control in an economic application of genetic algorithms». En: *Computational Economics* 35.1 (2010), pág. 25 (vid. pág. 22).
- [103] M. Mavrovouniotis, C. Li y S. Yang. «A survey of swarm intelligence for dynamic optimization: Algorithms and applications». En: *Swarm and Evolutionary Computation* 33 (2017), págs. 1-17 (vid. pág. 20).
- [104] T. Mc Avoy, Y. Arkun, R. Chen, D. Robinson y P. D. Schnelle. «A new approach to defining a dynamic relative gain». En: *Control Engineering Practice* 11.8 (2003), págs. 907-914 (vid. págs. 4, 6, 42, 47, 67, 70-72, 74-76, 87).
- [105] C. Mejía-Moncayo y O. Battaia. «A hybrid optimization algorithm with genetic and bacterial operators for the design of cellular manufacturing systems». En: *IFAC-PapersOnLine* 52.13 (2019), págs. 1409-1414 (vid. pág. 22).
- [106] A. Messac, A. Ismail-Yahaya y C. A. Mattson. «The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier». En: *Structural and multidisciplinary optimization* 25.2 (2003), págs. 86-98 (vid. pág. 20).

- 
- [107] A. Messac y C. A. Mattson. «Generating well-distributed sets of Pareto points for engineering design using physical programming». En: *Optimization and Engineering* 3.4 (2002), págs. 431-450 (vid. pág. 20).
- [108] G. R. Meza, X. Blasco, J. Sanchis y J. M. Herrero. *Controller tuning with evolutionary multiobjective optimization: A holistic multiobjective optimization design procedure*. Vol. 85. Springer, 2016 (vid. págs. 21, 23).
- [109] E. Mezura-Montes y C. A. C. Coello. «Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future». En: *Swarm and Evolutionary Computation* 1.4 (2011), págs. 173-194 (vid. pág. 27).
- [110] K. Miettinen. *Nonlinear multiobjective optimization*. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2012 (vid. págs. 18, 20, 33).
- [111] K. Miettinen. «Survey of methods to visualize alternatives in multiple criteria decision making problems». En: *OR spectrum* 36.1 (2014), págs. 3-37 (vid. pág. 32).
- [112] B Moaveni y A Khaki-Sedigh. «A new approach to compute the cross-Gramian matrix and its application in input-output pairing of linear multivariable plants». En: *JApSc* 8.4 (2008), págs. 608-614 (vid. pág. 50).
- [113] B. Moaveni y A. Khaki-Sedigh. «Input-output pairing for nonlinear multivariable systems». En: *Journal of Applied Science* 7.22 (2007), págs. 3492 -3498 (vid. págs. 51, 125).
- [114] B. Moaveni y A. K. Sedigh. «Input-output pairing analysis for uncertain multivariable processes». En: *Journal of Process Control* 18.6 (2008), págs. 527-532 (vid. pág. 50).
- [115] S. Mollov, R. Babuska y H. B. Verbruggen. «Analysis of interactions in MIMO Takagi-Sugeno fuzzy models». En: *10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems.(Cat. No. 01CH37297)*. Vol. 2. IEEE. 2001, págs. 769-773 (vid. pág. 51).
- [116] M. Munro y B. Aouni. «Group decision makers' preferences modelling within the goal programming model: An overview and a typology». En:

- Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 19.3-4 (2012), págs. 169-184 (vid. pág. 25).
- [117] T. Murata y H. Ishibuchi. «MOGA: multi-objective genetic algorithms». En: *IEEE international conference on evolutionary computation*. Vol. 1. 1995, págs. 289-294 (vid. pág. 28).
- [118] S. J. Nanda y G. Panda. «A survey on nature inspired metaheuristic algorithms for partitional clustering». En: *Swarm and Evolutionary computation* 16 (2014), págs. 1-18 (vid. pág. 20).
- [119] E. S. Nicoara, F. G. Filip y N. Paraschiv. «Simulation-based optimization using genetic algorithms for multi-objective flexible JSSP». En: *Studies in Informatics and Control* 20.4 (2011), págs. 333-344 (vid. pág. 17).
- [120] A. Niederlinski. «A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems». En: *Automatica* 7.6 (1971), págs. 691-701 (vid. págs. 48, 49).
- [121] B. A. Ogunnaike. *Process dynamics, modeling, and control*. 660.28 O48. 1994 (vid. pág. 139).
- [122] M. G. Omran y S. Al-Sharhan. «Improved continuous Ant Colony Optimization algorithms for real-world engineering optimization problems». En: *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 85 (2019), págs. 818-829 (vid. pág. 20).
- [123] V. Pareto y col. «Manual of political economy». En: (1971) (vid. pág. 18).
- [124] C. Peng, H.-L. Liu y E. D. Goodman. «Handling multi-objective optimization problems with unbalanced constraints and their effects on evolutionary algorithm performance». En: *Swarm and Evolutionary Computation* (2020), pág. 100676 (vid. pág. 27).
- [125] G. T. Pulido y C. A. C. Coello. «Using clustering techniques to improve the performance of a multi-objective particle swarm optimizer». En: *Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Springer. 2004, págs. 225-237 (vid. pág. 23).

- 
- [126] B. Qu, Y. Zhu, Y. Jiao, M. Wu, P. N. Suganthan y J. Liang. «A survey on multi-objective evolutionary algorithms for the solution of the environmental/economic dispatch problems». En: *Swarm and Evolutionary Computation* 38 (2018), págs. 1-11 (vid. págs. [21](#), [23](#)).
- [127] L. Rachmawati y D. Srinivasan. «Preference incorporation in multi-objective evolutionary algorithms: A survey». En: *2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. IEEE. 2006, págs. 962-968 (vid. [pág. 25](#)).
- [128] M. Radovanovic. «Multi-Objective Optimization of Abrasive Water Jet Cutting Using MOGA». En: *Procedia Manufacturing* 47 (2020), págs. 781-787 (vid. [pág. 28](#)).
- [129] W. J. Raseman, J. Jacobson y J. R. Kasprzyk. «Parasol: an open source, interactive parallel coordinates library for multi-objective decision making». En: *Environmental Modelling & Software* 116 (2019), págs. 153-163 (vid. [pág. 32](#)).
- [130] G. Reynoso-Meza, X. Blasco, J. Sanchis y J. M. Herrero. «Comparison of design concepts in multi-criteria decision-making using level diagrams». En: *Information Sciences* 221 (2013), págs. 124-141 (vid. págs. [36](#), [37](#), [68](#)).
- [131] G. Reynoso-Meza, X. Blasco, J. Sanchis y M. Martínez. «Controller tuning using evolutionary multi-objective optimisation: current trends and applications». En: *Control Engineering Practice* 28 (2014), págs. 58-73 (vid. [pág. 15](#)).
- [132] K. M. Sagayam y D. J. Hemanth. «ABC algorithm based optimization of 1-D hidden Markov model for hand gesture recognition applications». En: *Computers in Industry* 99 (2018), págs. 313-323 (vid. [pág. 20](#)).
- [133] M. E. Salgado y A. Conley. «MIMO interaction measure and controller structure selection». En: *International Journal of Control* 77.4 (2004), págs. 367-383 (vid. págs. [49](#), [50](#)).
- [134] J Sanchis, M Martinez, X Blasco y J. Salcedo. «A new perspective on multiobjective optimization by enhanced normalized normal constraint

- method». En: *Structural and multidisciplinary optimization* 36.5 (2008), págs. 537-546 (vid. pág. 20).
- [135] L. V. Santana-Quintero, A. A. Montano y C. A. C. Coello. «A review of techniques for handling expensive functions in evolutionary multi-objective optimization». En: *Computational intelligence in expensive optimization problems*. Springer, 2010, págs. 29-59 (vid. pág. 28).
- [136] A. J. Van der Schaft y A. Van Der Schaft. *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Vol. 2. Springer, 2000 (vid. pág. 51).
- [137] D. Šiljak. «Decentralized control and computations: status and prospects». En: *Annual Reviews in Control* 20 (1996), págs. 131-141 (vid. pág. 3).
- [138] S. Skogestad e I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control: analysis and design*. Vol. 2. Wiley New York, 2007 (vid. pág. 50).
- [139] C. Smith, C. Moore y D. Bruns. «A structural framework for multivariable control applications». En: *Proceeding of the Joint American Control Conference, Charlottesville, Virginia*. 1981 (vid. pág. 50).
- [140] I. Strumberger, E. Tuba, N. Bacanin, R. Jovanovic y M. Tuba. «Convolutional neural network architecture design by the tree growth algorithm framework». En: *2019 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. IEEE. 2019, págs. 1-8 (vid. pág. 20).
- [141] I. Strumberger, E. Tuba, N. Bacanin, M. Zivkovic, M. Beko y M. Tuba. «Designing convolutional neural network architecture by the firefly algorithm». En: *Proceedings of the 2019 International Young Engineers Forum (YEF-ECE), Costa da Caparica, Portugal*. 2019, págs. 59-65 (vid. pág. 20).
- [142] H. Sun, G. Zong y C. P. Chen. «Adaptive decentralized output feedback PI tracking control design for uncertain interconnected nonlinear systems with input quantization». En: *Information Sciences* 512 (2020), págs. 186-206 (vid. pág. 39).

- 
- [143] G. Syswerda. «Uniform crossover in genetic algorithms». En: *Proceedings of the 3rd international conference on genetic algorithms*. 1989, págs. 2-9 (vid. pág. 22).
- [144] W. Tan, H. J. Marquez, T. Chen y J. Liu. «Analysis and control of a nonlinear boiler-turbine unit». En: *Journal of process control* 15.8 (2005), págs. 883-891 (vid. págs. 138, 139, 143).
- [145] G. Tao. «Multivariable adaptive control: A survey». En: *Automatica* 50.11 (2014), págs. 2737-2764 (vid. pág. 3).
- [146] T. Tušar y B. Filipič. «Visualization of Pareto front approximations in evolutionary multiobjective optimization: A critical review and the projection method». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 19.2 (2014), págs. 225-245 (vid. pág. 32).
- [147] J. Uhlmann. «On the Relative Gain Array (RGA) with singular and rectangular matrices». En: *Applied Mathematics Letters* 93 (2019), págs. 52-57 (vid. pág. 40).
- [148] M. G. Villarreal-Cervantes, A. Rodríguez-Molina, C.-V. García-Mendoza, O. Penaloza-Mejia y G. Sepúlveda-Cervantes. «Multi-objective on-line optimization approach for the DC motor controller tuning using differential evolution». En: *IEEE Access* 5 (2017), págs. 20393-20407 (vid. pág. 21).
- [149] C. Wang, H. Zhang, W. Fan y P. Ma. «Adaptive control method for chaotic power systems based on finite-time stability theory and passivity-based control approach». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 112 (2018), págs. 159-167 (vid. pág. 51).
- [150] J. Wang, Y. Su, Q. Lin, L. Ma, D. Gong, J. Li y Z. Ming. «A Survey of Decomposition Approaches in Multiobjective Evolutionary Algorithms». En: *Neurocomputing* (2020) (vid. pág. 23).
- [151] J. Wang, P. Cao, X. Li, X. Song, C. Zhao y L. Zhu. «Experimental study on the influence of Peltier effect on the output performance of thermoelectric generator and deviation of maximum power point». En: *Energy Conversion and Management* 200 (2019), pág. 112074 (vid. pág. 168).

- [152] Y. Wang, W. Wang, C. Wang y X. Wu. «Coupling analysis on current control at low switching frequency for the three-phase PWM converter based on RGA and a novel output feedback decoupling method». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63.11 (2016), págs. 6684-6694 (vid. pág. 40).
- [153] Y. Wang, H.-X. Li, G. G. Yen y W. Song. «MOMMOP: Multiobjective optimization for locating multiple optimal solutions of multimodal optimization problems». En: *IEEE transactions on cybernetics* 45.4 (2014), págs. 830-843 (vid. pág. 27).
- [154] Z. Wang y A. Sobey. «A comparative review between Genetic Algorithm use in composite optimisation and the state-of-the-art in evolutionary computation». En: *Composite Structures* (2019), pág. 111739 (vid. págs. 17, 20).
- [155] W. Wen-xiang, L. Kang-shun, T. Xing-zhen y G. Fa-hui. «An Improved MOEA/D Algorithm with an Adaptive Evolutionary Strategy». En: *Information Sciences* (2020) (vid. pág. 23).
- [156] B. Wittenmark y M. E. Salgado. «Hankel-norm based interaction measure for input-output pairing». En: *IFAC Proceedings Volumes* 35.1 (2002), págs. 429-434 (vid. pág. 50).
- [157] Q. Xiong, W.-J. Cai, M.-J. He y M. He. «Decentralized control system design for multivariable processes a novel method based on effective relative gain array». En: *Industrial & engineering chemistry research* 45.8 (2006), págs. 2769-2776 (vid. págs. 4, 49).
- [158] C. Xu e Y. C. Shin. «Interaction analysis for MIMO nonlinear systems based on a fuzzy basis function network model». En: *Fuzzy sets and systems* 158.18 (2007), págs. 2013-2025 (vid. pág. 51).
- [159] H. Xu, W. Zeng, D. Zhang y X. Zeng. «MOEA/HD: A multiobjective evolutionary algorithm based on hierarchical decomposition». En: *IEEE transactions on cybernetics* 49.2 (2017), págs. 517-526 (vid. pág. 23).
- [160] Q. Zhang y H. Li. «MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition». En: *IEEE Transactions on evolutionary computation* 11.6 (2007), págs. 712-731 (vid. pág. 23).

- [161] Z.-X. Zhu. «Variable pairing selection based on individual and overall interaction measures». En: *Industrial & engineering chemistry research* 35.11 (1996), págs. 4091-4099 (vid. pág. 50).
- [162] E. Zitzler y S. Künzli. «Indicator-based selection in multiobjective search». En: *International conference on parallel problem solving from nature*. Springer. 2004, págs. 832-842 (vid. pág. 25).
- [163] E. Zitzler, M. Laumanns y L. Thiele. «SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm». En: *TIK-report* 103 (2001) (vid. pág. 23).

