



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



Máster Universitario
en Tecnologías, Sistemas y
Redes de Comunicaciones

Modelización y análisis económicos de servicios 5G basados en "Network Slicing"

Autor: Cinthya González Chiriboga

Director: Luis Guijarro Coloma

Fecha de comienzo: 9/25/2017

Objetivos – El principal objetivo de este trabajo es analizar el modelado matemático y los aspectos económicos de servicios 5G basados en Network Slicing en distintos escenarios para determinar los máximos beneficios.

Comparar los resultados de los distintos escenarios propuestos frente a las variables de la función de beneficios del proveedor de servicios como la sensibilidad al precio o a la calidad de servicio, el costo, entre otros.

Metodología – Definir el comportamiento de los usuarios, proveedores de servicios y proveedor de red, así obtener un modelo económico para los servicios 5G basados en Network Slicing en distintos escenarios y comprender como afectan las diferentes variables. Se plantearon 5 escenarios en los cuales varia el número de proveedores de servicios ya sea uno o dos, o estos proveedores que eligen para obtener los máximos beneficios como el precio, la calidad de servicio o ambos.

Desarrollos teóricos realizados – Obtener el precio, la calidad de servicio o ambos dependiendo del escenario y de los valores de las otras variables como el costo, la sensibilidad al precio u otro, con la ayuda de la teoría de juegos y el equilibrio de Nash se realiza el desarrollo de este análisis. Se muestra un análisis cuando la demanda tiene la opción a no adquirir el servicio y cuando no tiene esta opción.

Resultados – En esta sección se muestra el comportamiento del beneficio del proveedor de servicios o de los proveedores de servicios en el caso del mercado duopolista, el precio o la calidad de servicio en función de las otras variables.

Abstract – The 5th Generation Mobile technology is characterized by flexibility and scalability, the key component for this purpose is "network slicing" that allows the integration of services through the same infrastructure.

First, the aspects of the service provider are defined, such as the function of demand or costs, as well as variables such as quality of service.

For economic analysis, we have based on concepts such as game theory and Nash equilibrium for the resolution of different scenarios. The scenarios are divided into two parts, 2 scenarios in a monopolistic market in which they choose the price or quality of service and 3 scenarios in a duopolistic market where they compete for the price, the quality of service or both.

Finally, a graphical analysis of the results in each scenario based on the other dependent variables.

Autor: Cinthya González Chiriboga, email: cingon@teleco.upv.es

Director: Luis Guijarro Coloma, email: lguijar@dc.com.upv.es

Fecha de entrega: 9-11-18

Índice

1. Descripción de Network Slicing en 5G	4
2. Escenarios	5
3. Descripción del modelo	6
3.1. Modelo	7
3.1.1. Proveedor de red	7
3.1.2. Usuarios	8
3.1.3. Proveedores de servicio	9
3.2. Teoría de Juegos	9
3.2.1. Equilibrio de Nash	10
4. Análisis del modelo simplificado	11
4.1. Escenario 3: Competencia en precio	12
4.2. Escenario 4: Competencia en servicio	14
4.3. Escenario 5: Competencia simultánea en precio y servicio	15
5. Análisis del modelo extendido	17
5.1. Monopolio	18
5.1.1. Escenario 1: Máximos beneficios en función del precio	18
5.1.2. Escenario 2: Máximos beneficios en función del servicio	19
5.2. Duopolio	21
5.2.1. Escenario 3: Competencia en precio	21
5.2.2. Escenario 4: Competencia en calidad de servicio	23
5.2.3. Escenario 5: Competencia simultánea en precio y calidad de servicio	24
6. Resultados	26
6.1. Monopolio	26
6.1.1. Escenario 1: Máximos beneficios en función del precio	27
6.1.2. Escenario 2: Máximos beneficios en función del servicio	29
6.2. Duopolio	30
6.2.1. Escenario 3: Competencia en precio	31
6.2.2. Escenario 4: Competencia en calidad de servicio	35
6.2.3. Escenario 5: Competencia en precio y calidad de servicio	37
A. Anexos	40
A.1. Competencia en precios	40
A.2. Competencia en calidad de servicio	42

1. Descripción de Network Slicing en 5G

La tecnología del teléfono móvil de 5^{ta} generación o 5G se caracterizará por la flexibilidad y la escalabilidad, además de proveer mejoras con la tecnología móvil este permitirá la integración con nuevos servicios lo que no es posible con 4G. El componente clave para este propósito es el Network Slicing, que permite la integración de diversos servicios como video UHD, aplicaciones machine to machine (M2M) entre otros.

Network slicing o "rebanado de redes" es un componente clave para la futura tecnología 5G, permite crear varias redes virtuales, permitiendo reusar los componentes de la red dependiendo de las características de cada red virtual, cada red virtual aunque pertenece a una misma red puede tener su propia arquitectura y configuración. [1]

Entre los requerimientos de Network slicing tenemos la tecnología de la nube, las redes definidas por software(SDN) y la virtualización de funciones de red (NFV), la combinación de estos componentes provee la modularidad, flexibilidad y escalabilidad necesaria para crear redes virtuales. [2]

El proveedor de red es el encargado de la comunicación de extremo a extremo en la red, esta tecnología le permite operar redes virtuales en paralelo es decir puede ofrecer redes virtuales a uno o más proveedores de servicios, estos son los encargados de ofrecer los servicios a los usuarios finales. Con la ayuda de la virtualización de funciones el proveedor de servicios puede optar por contratar ciertas funciones que satisfagan las necesidades de su servicio y no todas las funciones de la red.

Cada red virtual opera de manera independiente, cada uno tiene sus características por ejemplo la seguridad, latencia, calidad de servicio, entre otros, estos factores son los que diferencian a los servicios entre los distintos proveedores de servicios permitiendo a los proveedores de red crear diferentes estrategias de precio.

Entre las características de la tecnología 5G se incluyen las siguientes:

- Baja latencia
- Alta confiabilidad
- Alta eficiencia espectral
- Alta tasa de datos
- Amplia convergencia
- Conexión masiva

La integración de servicios en 5G debe permitir ajustar estas características a las necesidades del servicio, por ejemplo un medidor de temperatura no necesita alta tasas de datos pero quizás si una conexión masiva, otro ejemplo es el de video UHD, el cual necesita baja

latencia, alta confiabilidad y alta tasas de datos, es decir las características dependerán del servicio.

En la Fig. 1 se muestra un proveedor de red con dos redes virtuales, las redes virtuales tienen acceso a determinadas funciones de red dependiendo de la necesidad del servicio, incluso ambas pueden tener acceso a la misma función debido a que comparten la red.

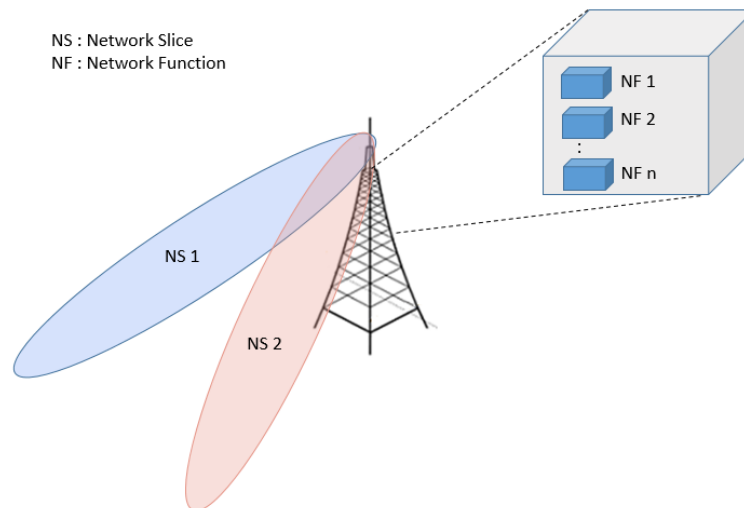


Figura 1: Network Slicing

2. Escenarios

El presente modelo consiste en un proveedor de red que alquila una red virtual a uno o más proveedores de servicios. Cada proveedor de servicios obtiene los datos a través de la misma red y ofrece sus servicios a los usuarios. Los datos de los proveedores de servicios tendrán diferentes características por ejemplo retraso, redundancia o tasas de transmisión, lo que implica diferentes calidades de servicio.

El objetivo de este análisis se centra en determinar el precio, la calidad de servicio o ambos para que el proveedor de servicios obtenga los máximos beneficios. El precio es el valor que los usuarios pagarán por el servicio a los proveedores de servicios y la calidad de servicio es un valor que dependerá del tiempo de espera del servicio, cuanto mayor sea el tiempo que espere el usuario la calidad del servicio será menor y viceversa.

Se propone analizar 5 escenarios, escenarios 1 y 2, un análisis con un solo proveedor de servicios y después analizar la situación con dos proveedores de servicios compartiendo la misma red en los escenarios 3, 4 y 5.

- Monopolio: Un mercado de monopolio está compuesto por un solo proveedor de servicios o productor es decir no existe otro proveedor que ofrezca el mismo servicio o producto, para los escenarios 1 y 2 el proveedor de red ofrece una red virtual a un solo proveedor de servicios, en estos escenarios se analizará cual será el precio o la calidad de servicio para obtener los máximos beneficios.
 - Escenario 1: Máximos beneficios con respecto al precio.
 - Escenario 2: Máximos beneficios con respecto a la calidad de servicio.
- Duopolio: Un mercado de duopolio está compuesto por dos proveedores de servicios o productos que ofrecen el mismo servicio o producto, por lo que existe una competencia ya sea por precio, calidad de servicio o por ambos, a diferencia de los escenarios anteriores, ahora el proveedor de red tiene dos redes virtuales, una para cada proveedor de servicios.
 - Escenario 3: Competencia por precios.
 - Escenario 4: Competencia por servicios.
 - Escenario 5: Competencia simultánea entre precio y servicio.

3. Descripción del modelo

El escenario del modelo se muestra en la Fig. 2, se compone de un proveedor de red, 1 o 2 proveedores de servicios y M usuarios, para los escenarios 1 y 2 solo existe un proveedor de servicios por lo que habría una sola red virtual, la figura muestra más relación con los escenarios 3, 4 y 5 en donde existen dos proveedores de servicios que comparten la misma red, el objetivo es analizar la demanda de los usuarios, el costo del proveedor de red, entre otros factores que afectan los beneficios de los proveedores de servicios.

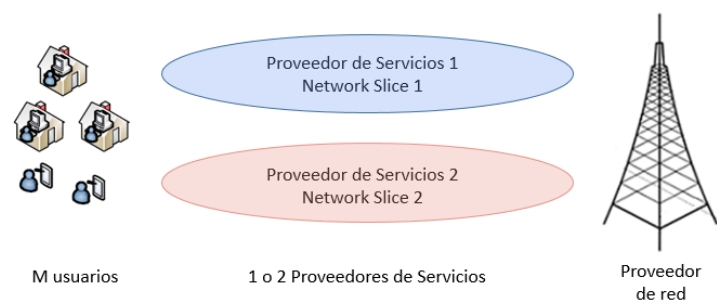


Figura 2: Escenario

A continuación se dará mas detalle de cada uno de los integrantes de este modelo, así como la justificación de las funciones utilizadas para este propósito.

3.1. Modelo

3.1.1. Proveedor de red

Existe un proveedor de red que alquila una red virtual a cada proveedor de servicios. El modelo del sistema de la red se lo analizará como una cola M/M/1, la teoría de colas nos permite modelar el comportamiento que se presenta en el procesamiento de paquetes en una red [6], en este modelo los paquetes llegan al sistema y se procesan a medida que van llegando, es decir cada paquete tiene un tiempo de espera en el sistema y este tiempo es el que definirá la calidad del servicio. Cada usuario genera paquetes y el retardo de cada uno de los paquetes es el que indica si la calidad de servicio es mejor o peor.

Para el presente modelo del sistema se propone que se analice como una cola M/M/1 para facilidad de los cálculos futuros, no se quiere complicar el modelo con otro tipo sistema ya que el objetivo del modelo es analizar con más detalle los aspectos económicos que se proponen más adelante.

Este modelo de colas es el más simple y muy utilizado para este tipo de análisis, tal como Allon que hace un análisis de la competencia entre proveedores de servicios en base al tiempo de espera de los usuarios y modela la facilidad del servicio como una cola M/M/1 [7], Hübl lo utiliza para una capacidad con 2 diferentes tasas de producción en un sistema con capacidad flexible [8], Darzanos utiliza esta cola para la capacidad computacional del sistema de servidores en un modelo de proveedores de servicios en la nube [9].

En [6] el modelo de colas M/M/1 o también denominado modelo de colas M/M/1/ ∞ /FIFO tiene las siguientes características:

- M: modelo de llegadas exponencial con un proceso de llegadas de Poisson homogéneo con número medio de llegadas por unidad de tiempo (λ) > 0 ,
- M: modelo de salidas exponencial con un proceso de salidas de Poisson homogéneo con número medio de paquetes que el servidor puede procesar por unidad de tiempo (μ) > 0 ,
- 1: un solo servidor,
- ∞ : capacidad del servidor es infinita,
- FIFO: procesamiento de paquetes FIFO, es decir el primer paquete que llega es el primer paquete que sale.

En la Fig. 3 se muestra una cola M/M/1 con un número medio de llegadas por unidad de tiempo λ_1 que es la cantidad de paquetes por unidad de tiempo de los usuarios que suscriben al servicio, λ_0 de las personas que no desean el servicio y Λ la cantidad total de paquetes que generan los usuarios.

Del modelo de colas M/M/1 se detalla la siguiente ecuación que nos servirá más adelante:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda_1} \quad (1)$$

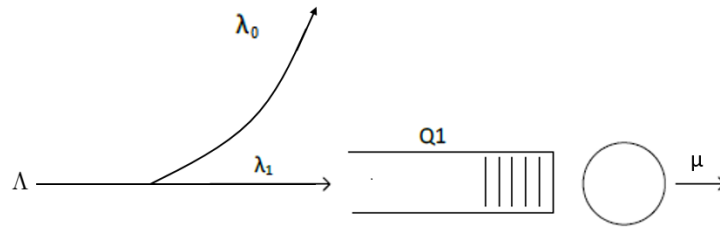


Figura 3: Cola M/M/1

Donde T es el tiempo medio que un paquete permanece en el sistema y μ es el número medio de paquetes que el servidor es capaz de procesar por unidad de tiempo.

Para nuestro análisis se define la calidad de servicio θ como el inverso del tiempo T , es decir mientras más tiempo un paquete permanece en el sistema, menor será la calidad de servicio percibida por el usuario y viceversa, por lo tanto se pueden derivar las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{T} \\ \mu = \theta + \lambda_1 \end{cases} \quad (2)$$

3.1.2. Usuarios

Para realizar un análisis económico es necesario conocer o estimar la función de demanda, esta es la relación que existe entre el precio y la cantidad demandada, existen varias funciones de demanda predeterminadas para estos análisis que tienen ciertas características y se utilizan en una u otra aplicación dependiendo del enfoque del estudio. En este documento se propone la función del modelo de atracción que incluye la función multinomial logit (MNL) que depende del precio y de la calidad de servicio, además se analizará como afectan los diversos parámetros a las decisiones de los proveedores de servicios.

La función del modelo de atracción, en donde un mercado con M usuarios que generan un total de paquetes por unidad de tiempo Λ , es determinado por un valor de atractividad v_i que depende del precio p_i y la calidad de servicio θ_i del proveedor de servicios i [7]. La expresión de la función de demanda se muestra a continuación:

$$\lambda_i = \Lambda \frac{v_i(p_i, \theta_i)}{\sum_{j=1}^N v_j(p_j, \theta_j) + v_o}, N = 1, 2, i = 1, 2 \quad (3)$$

Siendo v_o la función de atractividad a no suscribir y v_i la función de atractividad a suscribir al proveedor de servicios i , siendo $v_i = e^{a_i(\theta_i) - b_i p_i}$, donde a es la sensibilidad con respecto al servicio y b es la sensibilidad con respecto al precio, con $a_i = a$ y $b_i = b$ para todos los proveedores de servicios.

Este modelo de demanda MNL es un modelo de elección estocástica en donde la función nos da la probabilidad de que el consumidor elija una opción, los usuarios pueden escoger

entre comprar el servicio a uno de los proveedores de servicios o no comprarles el servicio. [3]

En otros papers han utilizado este modelo de función de demanda, como Qin en donde analizan el precio óptimo para el Metro en un sistema de transporte público en donde el usuario puede elegir los otros medios de transporte como bus, taxi, bicicleta o carro [10], Suhua analiza la cantidad de personas por vehículo para la disminución de tráfico por los carriles HOV o vehículos de alta ocupación, en donde las opciones son que exista un carro con 1 pasajero, con dos pasajeros, mas de dos pasajeros y buses [11], Liang utiliza este modelo para las diferentes opciones de estacionamiento en un centro comercial incluyendo características como las preferencias del usuario y los niveles del servicio [12].

Para el caso del monopolio la cantidad de paquetes por unidad de tiempo que generan los usuarios que suscriben al proveedor de servicios se muestra en la siguiente expresión:

$$\lambda = \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} \quad (4)$$

Para el caso del duopolio la cantidad de paquetes por unidad de tiempo que generan los usuarios que suscriben al proveedor de servicios i se muestra en la expresión (5), teniendo en cuenta que las variables a , b , Λ y v_o son las mismas para ambos proveedores.

$$\lambda_i = \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o}, \quad i \neq j \quad (5)$$

3.1.3. Proveedores de servicio

Los proveedores de servicios alquilan una red virtual al proveedor de red para brindar sus servicios a los usuarios a través de esa red.

Los beneficios del proveedor de servicios viene dada por los ingresos menos los costos, tal como se observa en la expresión (6).

$$\Pi_i = \lambda_i p_i - \delta \mu_i \quad (6)$$

Siendo λ_i la cantidad paquetes por unidad de tiempo que generan los usuarios que suscriben al proveedor i , y δ el costo por unidad de capacidad. Con la ayuda de las ecuaciones (1), podemos expresar (6) de la siguiente manera:

$$\Pi_i = \lambda_i(p_i - \delta) - \delta \theta_i \quad (7)$$

3.2. Teoría de Juegos

La teoría de juegos es una herramienta matemática que nos ayuda en el análisis de las decisiones frente a diversas situaciones, se basa en analizar las decisiones o estrategias óptimas para obtener los mejores resultados dentro del juego. Un juego estratégico es una situación donde interactúan dos o mas jugadores con diferentes estrategias en donde las estrategias de un jugador afectan las decisiones de los otros jugadores.

El objetivo de este modelo es conocer las decisiones con respecto al precio o a la calidad

de servicio que escogerá cada proveedor de servicios para maximizar sus beneficios en los escenarios propuestos, se puede analizar este modelo como un juego estratégico en donde tenemos dos jugadores que serían los proveedores de servicios y las estrategias de cada uno serían las decisiones con respecto al precio, calidad de servicio o ambas, depende del escenario.

Se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Cooperación
 - Cooperación: Los jugadores se ponen de acuerdo en las decisiones.
 - No hay cooperación: Los jugadores buscan los máximos beneficios sin importar los beneficios de los otros jugadores.
- Movimientos
 - Estrategia simultánea: Los jugadores juegan su estrategia a la vez.
 - Estrategia secuencial: Los jugadores juegan su estrategia en turnos.
- Repetición
 - Una vez: Los jugadores juegan una sola vez.
 - Varias: Los jugadores juegan mas de una vez.

El modelo propuesto se analizará como un juego no cooperativo de tirada simultánea, ya que los proveedores de servicios no cooperan entre sí, juegan una sola vez y ambos al mismo tiempo. Se dice que es un juego no cooperativo ya que ambos proveedores de servicios no llegan a un acuerdo cuando eligen su estrategia, cada proveedor de servicios elige su estrategia para maximizar sus propios beneficios; además el juego es de estrategia simultánea ya que ambos proveedores de servicios eligen su estrategia al mismo tiempo sin conocer la estrategia del otro proveedor de servicios; finalmente se dice que es un juego de una sola jugada o sin repetición ya que en los escenarios propuestos ambos proveedores de servicios eligen su estrategia una sola vez y no hay más etapas del juego es decir se acaba el juego.

3.2.1. Equilibrio de Nash

Dentro de la teoría de juegos tenemos el equilibrio de Nash que analiza la mejor estrategia de un jugador frente a las mejores estrategias de los otros jugadores y así obtener los mejores resultados. El equilibrio de Nash nos brinda una solución en un juego no cooperativo, es la combinación de las mejores estrategias que los jugadores pueden tomar considerando la decisión de los otros jugadores en donde ningún jugador tiene un incentivo de desviar su elección es decir si un jugador opta por otra estrategia el beneficio de ese jugador será menor siempre y cuando los otros jugadores se mantengan con su estrategia [13].

El equilibrio de Nash es uno de los conceptos más aplicados para el análisis de modelos económicos, tal como Pablo Caballero que realiza un análisis de un juego con network Slicing en donde utiliza el modelo de recursos compartidos, en este compiten los proveedores para maximizar su propia utilidad demostrando que bajo ciertas condiciones la estrategia de los jugadores converge al equilibrio de Nash [14], en las redes de sensores como Wanyue Sun que determina el equilibrio de Nash en un escenario con dos proveedores de servicios en un juego de dos etapas [15], existen muchas aplicaciones que aplican este concepto para su análisis económico.

Para este caso la estrategia del jugador 1 será la mejor respuesta frente a la estrategia del jugador 2 que maximice sus beneficios, de manera similar la estrategia del jugador 2 será la mejor respuesta frente a la estrategia del jugador 1 que maximice sus beneficios, la resolución de este juego estratégico viene dada por el equilibrio de Nash.

4. Análisis del modelo simplificado

En los escenarios presentados a continuación, los usuarios solo tienen 2 opciones a elegir, suscribir con el proveedor de servicios 1 o con el proveedor de servicios 2. En este capítulo se hace el análisis con dos proveedores de servicios en donde todos los usuarios suscriben con uno de los dos proveedores de servicios, por lo que la expresión de beneficios del proveedor i queda de la siguiente manera:

$$\Pi_i = \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j}} (p_i - \delta) - \delta\theta_i, \quad i \neq j \quad (8)$$

Donde Λ es el total de paquetes que generan los M usuarios, δ el costo por procesar un paquete por unidad de tiempo, a es la sensibilidad con respecto a la calidad de servicio, b es la sensibilidad con respecto al precio, θ_i y p_i la calidad de servicio y el precio del servicio del proveedor de servicios i respectivamente.

Para la resolución del problema de maximización en cada uno de los escenarios propuestos, utilizaremos el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (Teorema de KKT), el cual proporciona las condiciones necesarias también denominadas condiciones KKT para obtener candidatos que corresponden a un máximo local.

En [17] el teorema de KKT de manera general menciona lo siguiente:

Sea una función f_0 y f_i tal que $i = 1, \dots, m$ sean funciones continuamente diferenciables. Suponga: $\rho(\nabla\phi_E(x^*)) = |E|$ donde $E \subset 1, \dots, m + p$ es el conjunto de restricciones efectivas para x^* , y $\phi_E \equiv (f_i)_{i \in E}$.

Si x^* es un máximo local de f_0 en D , entonces existe un vector $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \mathfrak{R}^m$ tal que:

$$\begin{cases} \lambda_i^* \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ \lambda_i^* f_i(x^*) = 0 & i = 1, \dots, m \\ \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Además si se cumple que f_0 es diferenciable al menos dos veces en todo el dominio y se cumplen las condiciones de KKT se puede resolver un problema de optimización de

funciones con restricciones no lineales [16]. Si f_0 y f_i son funciones cóncavas se dice que el problema es convexo y las condiciones del teorema de KKT son necesarias y suficientes para resolver un problema de maximización.

Para los siguientes escenarios se propuso la función de demanda del modelo de atracción en donde incluye la función multinomial, según Allon con la función logit multinomial $v_i = e^{a_i(\theta_i) - b_i p_i}$, donde a es la sensibilidad con respecto al servicio y b es la sensibilidad con respecto al precio, con $a_i = a$ y $b_i = b$ para todos los proveedores de servicios, demuestra que la función es log-concava en p_i dando como resultado un único máximo en la región. [7]

A continuación se detalla el análisis matemático para la resolución de los escenarios propuestos.

4.1. Escenario 3: Competencia en precio

En este escenario dos proveedores de servicios eligen el precio de forma simultánea para maximizar sus beneficios, para la resolución de este problema debemos obtener los precios (p_1^*, p_2^*) que viene dado por el equilibrio de Nash al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1^* = \max_{p_1} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_1) - bp_1}}{e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2}} (p_1 - \delta) - \delta\theta_1 \quad \text{subject to } p_1 \geq 0 \\ p_2^* = \max_{p_2} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_2) - bp_2}}{e^{aln(\theta_2) - bp_2} + e^{aln(\theta_1) - bp_1}} (p_2 - \delta) - \delta\theta_2 \quad \text{subject to } p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(10) es un problema no lineal con respecto al precio de cada proveedor de servicios.

Dado que ambos proveedores de servicios tienen una función de beneficios similar, las condiciones de KKT expresadas en (9) para el proveedor de servicios i se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i f_1(p_i^*) = 0 \\ \nabla f_0(p_i^*) + \lambda_i \nabla f_1(p_i^*) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_0(p_i) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i) - bp_i}}{e^{aln(\theta_i) - bp_i} + e^{aln(\theta_j) - bp_j}} (p_i - \delta) - \delta\theta_i, \quad i \neq j \\ \nabla f_0(p_i) &= \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i) - bp_i}}{e^{aln(\theta_i) - bp_i} + e^{aln(\theta_j) - bp_j}} + \frac{be^{aln(\theta_j) - bp_j} e^{aln(\theta_i) - bp_i} (\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i) - bp_i} + e^{aln(\theta_j) - bp_j})^2} \right] \\ f_1(p_i) &= p_i \\ \nabla f_1(p_i) &= 1 \end{aligned}$$

Siendo f_0 y f_1 la función del beneficios y la restricción con respecto al precio del proveedor i respectivamente, ambas son funciones diferenciables, f_1 es lineal por lo tanto es cóncava, además f_0 es cóncava (ver Apéndice (??)), por lo tanto la solución de las condiciones de

4.2. Escenario 4: Competencia en servicio

En este escenario dos proveedores de servicios eligen la calidad del servicio de forma simultánea para maximizar sus beneficios, para la resolución de este problema debemos obtener las calidades de servicio (θ_1^*, θ_2^*) que viene dado por el equilibrio de Nash al resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \theta_1^* = \max_{\theta_1} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_1)-bp_1}}{e^{aln(\theta_1)-bp_1} + e^{aln(\theta_2)-bp_2}} (p_1 - \delta) - \delta\theta_1 \quad \text{subject to } \theta_1 \geq 0 \\ \theta_2^* = \max_{\theta_2} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_2)-bp_2}}{e^{aln(\theta_2)-bp_2} + e^{aln(\theta_1)-bp_1}} (p_2 - \delta) - \delta\theta_2 \quad \text{subject to } \theta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(20) es un problema no lineal con respecto a la calidad de servicio de cada proveedor de servicios.

Las condiciones de KKT expresadas en (9) para el proveedor de servicios i se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i f_1(\theta_i^*) = 0 \\ \nabla f_0(\theta_i^*) + \lambda_i \nabla f_1(\theta_i^*) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_0(\theta_i) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j}} (p_i - \delta) - \delta\theta_i, \quad i \neq j \\ \nabla f_0(\theta_i) &= \Lambda \frac{ae^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} - \delta \\ f_1(\theta_i) &= \theta_i \\ \nabla f_1(\theta_i) &= 1 \end{aligned}$$

Siendo f_0 y f_1 la función del beneficios y la restricción con respecto a la calidad de servicios del proveedor i respectivamente, ambas son funciones diferenciables, f_1 es lineal por lo tanto es cóncava, además f_0 es cóncava (ver Apéndice (??)), por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global, y así obtener el equilibrio de Nash de este PMP.

Solución de las condiciones de KKT para el proveedor de servicios i :

- $\lambda_i > 0$

$$f_1(\theta_i^*) = 0 \Leftrightarrow \theta_i^* = 0$$

$$\Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] - \delta + \lambda_i = 0 \quad (22)$$

Con $\theta_i^* = 0$ se produce una indeterminación debido al Logaritmo natural, por lo tanto se descarta esta opción.

- $\lambda_i = 0$

$$f_1(\theta_i^*) > 0 \Leftrightarrow \theta_i^* > 0$$

$$\Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] - \delta = 0 \quad (23)$$

A continuación se muestra la calidad de servicio obtenida de la ecuación anterior:

$$(\theta_i^*)^a = -(e^{aln(\theta_j)-bp_j})e^{bp_i} + \sqrt{\frac{(\theta_i^*)^a}{\theta_i^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p_i - \delta)}{\delta} (e^{aln(\theta_j)-bp_j})e^{bp_i}} \quad (24)$$

La solución del equilibrio de Nash se obtiene a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (\theta_1^*)^a = -(e^{aln(\theta_2)-bp_2})e^{bp_1} + \sqrt{\frac{(\theta_1^*)^a}{\theta_1^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p_1 - \delta)}{\delta} (e^{aln(\theta_2)-bp_2})e^{bp_1}} \\ (\theta_2^*)^a = -(e^{aln(\theta_1)-bp_1})e^{bp_2} + \sqrt{\frac{(\theta_2^*)^a}{\theta_2^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p_2 - \delta)}{\delta} (e^{aln(\theta_1)-bp_1})e^{bp_2}} \end{cases} \quad (25)$$

Asumiendo que $p_1 = p_2 = p$:

$$\theta_1^* = \theta_2^* = \theta^* = \frac{\Lambda a (p - \delta)}{4\delta} \quad (26)$$

Entonces el beneficio del proveedor de servicios i :

$$\Pi_i^* = \frac{\Lambda(p - \delta)(2 - a)}{4} \quad (27)$$

4.3. Escenario 5: Competencia simultánea en precio y servicio

En este escenario dos proveedores de servicios eligen el precio y la calidad del servicio de forma simultánea para maximizar sus beneficios, para la resolución de este problema debemos obtener los precios y las calidades de servicio $(p_1^*, \theta_1^*, p_2^*, \theta_2^*)$ que vienen dados por el equilibrio de Nash al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (p_1^*, \theta_1^*) = \max_{p_1, \theta_1} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_1)-bp_1}}{e^{aln(\theta_1)-bp_1} + e^{aln(\theta_2)-bp_2}} (p_1 - \delta) - \delta \theta_1 \quad \text{subject to } p_1 \geq 0 \text{ y } \theta_1 \geq 0 \\ (p_2^*, \theta_2^*) = \max_{p_2, \theta_2} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_2)-bp_2}}{e^{aln(\theta_2)-bp_2} + e^{aln(\theta_1)-bp_1}} (p_2 - \delta) - \delta \theta_2 \quad \text{subject to } p_2 \geq 0 \text{ y } \theta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(28) es un problema no lineal con respecto al precio y a la calidad de servicio de cada proveedor de servicios.

Las condiciones de KKT para el proveedor de servicios i :

$$\begin{cases} \lambda_{i1}, \lambda_{i2} \geq 0 \\ \lambda_{i1} f_1(p_i^*) = 0 \\ \lambda_{i2} f_2(\theta_i^*) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_i} f_0(p_i^*, \theta_i^*) + \lambda_{i1} \frac{\partial}{\partial p_i} f_1(p_i^*) + \lambda_{i2} \frac{\partial}{\partial p_i} f_2(\theta_i^*) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_0(p_i^*, \theta_i^*) + \lambda_{i1} \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_1(p_i^*) + \lambda_{i2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_2(\theta_i^*) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 f_0(p_i, \theta_i) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j}} (p_i - \delta) - \delta \theta_i, \quad i \neq j \\
 \frac{\partial}{\partial p_i} f_0(p_i, \theta_i) &= \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j}} - \frac{be^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] \\
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_0(p_i, \theta_i) &= \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] - \delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1(p_i) &= p_i & f_2(\theta_i) &= \theta_i \\
 \frac{\partial}{\partial p_i} f_1(p_i) &= 1 & \frac{\partial}{\partial p_i} f_2(\theta_i) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_1(p_i) &= 0 & \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_2(\theta_i) &= 1
 \end{aligned}$$

Siendo f_0 , f_1 y f_2 la función del beneficios, la restricción con respecto al precio y la restricción con respecto a la calidad de servicio del proveedor de servicios i respectivamente, todas ellas funciones diferenciables y cóncavas, por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global, y así obtener el equilibrio de Nash de este PMP.

Solución de las condiciones KKT para el proveedor de servicios i :

- $\lambda_{i1} > 0$ y $\lambda_{i2} > 0$

$$\begin{aligned}
 f_1(p_i^*) &= 0 \Leftrightarrow p_i^* = 0 \\
 f_2(\theta_i^*) &= 0 \Leftrightarrow \theta_i^* = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j}} - \frac{be^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] + \lambda_{i1} &= 0 \\
 \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)-bp_i} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] - \delta + \lambda_{i2} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)}}{e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j}} + \frac{b\delta e^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)}}{(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] + \lambda_{i1} = 0 \\
 \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j)-bp_j} e^{aln(\theta_i)} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j})^2} \right] - \delta + \lambda_{i2} = 0
 \end{cases} \quad (30)$$

Con $\theta_i^* = 0$ se produce una indeterminación debido al Logaritmo natural, la misma indeterminación ocurre cuando $\lambda_{i1} = 0$ y $\lambda_{i2} > 0$, por lo tanto se descartan estas opciones.

- $\lambda_{i1} > 0$ y $\lambda_{i2} = 0$

$$\begin{aligned}
 f_1(p_i^*) &= 0 \Leftrightarrow p_i^* = 0 \\
 f_2(\theta_i^*) &> 0 \Leftrightarrow \theta_i^* > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)}}{e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j}} + \frac{b\delta e^{aln(\theta_j) - bp_j} e^{aln(\theta_i)}}{(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j})^2} \right] + \lambda_{i1} = 0 \\ \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j) - bp_j} e^{aln(\theta_i)} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j})^2} \right] - \delta = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Con $a, b, \delta, \Lambda, \theta_i, \theta_j$ y p_j variables no negativas, entonces es imposible que $\lambda_{i1} > 0$.

- $\lambda_{i1} = 0$ y $\lambda_{i2} = 0$

$$\begin{aligned} f_1(p_i^*) &> 0 \Leftrightarrow p_i^* > 0 \\ f_2(\theta_i^*) &> 0 \Leftrightarrow \theta_i^* > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)}}{e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j}} + \frac{b\delta e^{aln(\theta_j) - bp_j} e^{aln(\theta_i)}}{(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j})^2} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_j) - bp_j} e^{aln(\theta_i)} (p_i - \delta)}{\theta_i (e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j})^2} \right] - \delta = 0 \end{cases} \quad (32)$$

La solución del equilibrio de Nash se obtiene a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*}}{e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} + e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*}} - \frac{be^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*} e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} (p_1^* - \delta)}{(e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} + e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*})^2} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*} e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} (p_1^* - \delta)}{\theta_1^* (e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} + e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*})^2} \right] - \delta = 0 \\ \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*}}{e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} + e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*}} - \frac{be^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*} (p_2^* - \delta)}{(e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} + e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*})^2} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{ae^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*} (p_2^* - \delta)}{\theta_2^* (e^{aln(\theta_1^*) - bp_1^*} + e^{aln(\theta_2^*) - bp_2^*})^2} \right] - \delta = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Dado el sistema de ecuaciones (33) se cumple que $p_i^* = p_j^* = p^*$ y $\theta_i^* = \theta_j^* = \theta^*$, por lo que el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{1}{2} - \frac{b(p^* - \delta)}{4} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{a(p^* - \delta)}{4\theta^*} \right] - \delta = 0 \end{cases} \quad (34)$$

La solución del sistema de ecuaciones (34) se muestra a continuación:

$$\begin{cases} p^* = \frac{2+b\delta}{b} \\ \theta^* = \Lambda \frac{a}{2b\delta} \end{cases} \quad (35)$$

5. Análisis del modelo extendido

En este capítulo se muestra el análisis matemático para la resolución del problema de maximización en cada uno de los escenarios propuestos, para lo cual utilizaremos el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (Teorema de KKT) tal como se mencionó en el capítulo anterior.

En los escenarios presentados a continuación, los usuarios tienen 3 opciones a elegir, suscribir con uno de los proveedores de servicios o no suscribir con ninguno es decir no comprar el servicio.

A continuación se detalla el análisis matemático para la resolución de los escenarios cuando hay uno y dos proveedores de servicios.

5.1. Monopolio

En el monopolio solo tenemos un proveedor de servicios y para obtener los máximos beneficios tendremos que maximizar la función de la ecuación (7), para el monopolio sustituimos la ecuación (4) y la expresión del beneficio nos queda de la siguiente manera:

$$\Pi = \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} (p - \delta) - \delta\theta \quad (36)$$

Donde Λ es el total de paquetes que generan los M usuarios, θ la calidad de servicio, p el precio del servicio, δ el costo por procesar un paquete por unidad de tiempo, a es la sensibilidad con respecto a la calidad de servicio y b es la sensibilidad con respecto al precio.

5.1.1. Escenario 1: Máximos beneficios en función del precio

En este escenario el problema de optimización se detalla a continuación:

$$\begin{aligned} \max_p \quad & \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} (p - \delta) - \delta\theta \\ \text{subject to} \quad & p \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(37) es un problema de maximización de beneficios(PMP) no lineal con respecto al precio.

Las condiciones de KKT expresadas en (9) para el PMP se muestran a continuación:

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_1 f_1(p^*) = 0 \\ \nabla f_0(p^*) + \lambda_1 \nabla f_1(p^*) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_0(p) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} (p - \delta) - \delta\theta \\ \nabla f_0(p) &= \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} - \frac{bv_o e^{aln(\theta)-bp} (p - \delta)}{(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^2} \right] \\ f_1(p) &= p \\ \nabla f_1(p) &= 1 \end{aligned}$$

Siendo f_0 y f_1 la función de los beneficios del proveedor de servicios y la restricción con respecto al precio respectivamente, ambas son funciones continuamente diferenciables, f_1 es lineal lo tanto es cóncava, por otro lado f_0 es cóncava (ver Apéndice (74)), por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global.

Solución de las condiciones de KKT:

- $\lambda_1 > 0$

$$f_1(p^*) = 0 \Leftrightarrow p^* = 0$$

$$\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta)}}{e^{aln(\theta)} + v_0} + \frac{b\delta v_0 e^{aln(\theta)}}{(e^{aln(\theta)} + v_0)^2} \right] + \lambda_1 = 0 \quad (39)$$

Con $a, b, \delta, v_0, \Lambda$ y θ variables no negativas, entonces es imposible que $\lambda_1 > 0$

- $\lambda_1 = 0$

$$f_1(p^*) > 0 \Leftrightarrow p^* > 0$$

$$\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta)-bp^*}}{e^{aln(\theta)-bp^*} + v_0} - \frac{bv_0 e^{aln(\theta)-bp^*} (p^* - \delta)}{(e^{aln(\theta)-bp^*} + v_0)^2} \right] = 0 \quad (40)$$

A continuación se muestra el precio óptimo obtenido de la ecuación anterior, expresado en términos de $W[z]$, denominada función ProductLog o también función Lambert W, en donde:

$$p^* = \frac{1}{b} \left[b\delta + 1 + W \left[\frac{e^{aln(\theta)-b\delta-1}}{v_0} \right] \right] \quad (41)$$

Entonces el beneficio óptimo es:

$$\Pi^* = \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-[b\delta+1+W[\frac{e^{aln(\theta)-b\delta-1}}{v_0}]]}}{e^{aln(\theta)-[b\delta+1+W[\frac{e^{aln(\theta)-b\delta-1}}{v_0}]]} + v_0} \left(\frac{1}{b} \left[b\delta + 1 + W \left[\frac{e^{aln(\theta)-b\delta-1}}{v_0} \right] \right] - \delta \right) - \delta\theta \quad (42)$$

5.1.2. Escenario 2: Máximos beneficios en función del servicio

En este escenario el problema de optimización se detalla a continuación:

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \quad & \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_0} (p - \delta) - \delta\theta \\ \text{subject to} \quad & \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (43)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(43) es un PMP no lineal con respecto a la calidad de servicio.

Las condiciones de KKT expresadas en (9) para el PMP se muestran a continuación:

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_1 f_1(\theta^*) = 0 \\ \nabla f_0(\theta^*) + \lambda_1 \nabla f_1(\theta^*) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} (p - \delta) - \delta\theta \\ \nabla f_0(\theta) &= \Lambda \frac{av_o(p - \delta)e^{aln(\theta)-bp}}{\theta(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^2} - \delta \\ f_1(\theta) &= \theta \\ \nabla f_1(\theta) &= 1 \end{aligned}$$

Siendo f_0 y f_1 la función de los beneficios del proveedor de servicios y la restricción con respecto a la calidad de servicio respectivamente, ambas son funciones continuamente diferenciables, f_1 es lineal lo tanto es cóncava, por otro lado f_0 es cóncava (ver Apéndice (80)), por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global.

Solución de las condiciones de KKT:

- $\lambda_1 > 0$

$$f_1(\theta^*) = 0 \Leftrightarrow \theta^* = 0$$

$$\Lambda \frac{av_o(p - \delta)e^{aln(\theta^*)-bp}}{\theta^*(e^{aln(\theta^*)-bp} + v_o)^2} - \delta + \lambda_1 = 0 \quad (45)$$

Con $\theta^* = 0$ se produce una indeterminación debido al Logaritmo natural, por lo tanto se descarta esta opción.

- $\lambda_1 = 0$

$$f_1(\theta^*) > 0 \Leftrightarrow \theta^* > 0$$

$$\Lambda \frac{av_o(p - \delta)e^{aln(\theta^*)-bp}}{\theta^*(e^{aln(\theta^*)-bp} + v_o)^2} - \delta = 0 \quad (46)$$

A continuación se muestra la calidad de servicio óptima obtenida de la ecuación anterior:

$$(\theta^*)^a = -v_o e^{bp} + \sqrt{\frac{(\theta^*)^a}{\theta^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p-d)}{d} v_o e^{bp}} \quad (47)$$

Como se puede observar en la ecuación (47) no se puede despejar θ^* , se puede llegar a una solución analítica cuando $a = 1$, dando como resultado:

$$\theta^* = -v_o e^{bp} + \sqrt{\frac{\Lambda(p-d)}{d} v_o e^{bp}} \quad (48)$$

Entonces el beneficio óptimo para el caso particular donde $a = 1$ es:

$$\Pi^* = \Lambda \frac{e^{aln(-v_o e^{bp} + \sqrt{\frac{\Lambda(p-d)}{d} v_o e^{bp}}) - bp}}{e^{aln(-v_o e^{bp} + \sqrt{\frac{\Lambda(p-d)}{d} v_o e^{bp}}) - bp} + v_o} (p - \delta) - \delta (-v_o e^{bp} + \sqrt{\frac{\Lambda(p-d)}{d} v_o e^{bp}}) \quad (49)$$

5.2. Duopolio

En el duopolio tenemos dos proveedores de servicios por lo que cantidad de usuarios que suscriben a cada proveedor viene dado por la ecuación (5), por lo que la expresión de beneficios del proveedor i queda de la siguiente manera:

$$\Pi_i = \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} (p_i - \delta) - \delta\theta_i, \quad i \neq j \quad (50)$$

Para los siguientes escenarios en donde tenemos dos proveedores de servicios la resolución del problema de maximización de beneficios viene dado al determinar el equilibrio de Nash.

Según Gallego la existencia del equilibrio de Nash en los próximos escenarios se demuestra mediante la cuasiconcavidad de la función de beneficios [4].

Según Cachon y Harker existe un único equilibrio cuando ambas empresas tienen funciones de demanda positivas. [5]

5.2.1. Escenario 3: Competencia en precio

En este escenario dos proveedores de servicios eligen el precio de forma simultánea para maximizar sus beneficios, para la resolución de este problema debemos obtener los precios (p_1^*, p_2^*) que viene dado por el equilibrio de Nash al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1^* = \max_{p_1} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_1)-bp_1}}{e^{aln(\theta_1)-bp_1} + e^{aln(\theta_2)-bp_2} + v_o} (p_1 - \delta) - \delta\theta_1 & \text{subject to } p_1 \geq 0 \\ p_2^* = \max_{p_2} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_2)-bp_2}}{e^{aln(\theta_2)-bp_2} + e^{aln(\theta_1)-bp_1} + v_o} (p_2 - \delta) - \delta\theta_2 & \text{subject to } p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (51)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(51) es un problema no lineal con respecto al precio de cada proveedor de servicios.

Dado que ambos proveedores de servicios tienen una función de beneficios similar, las condiciones de KKT expresadas en (9) para el proveedor de servicios i se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i f_1(p_i^*) = 0 \\ \nabla f_0(p_i^*) + \lambda_i \nabla f_1(p_i^*) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_0(p_i) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} (p_i - \delta) - \delta\theta_i, \quad i \neq j \\ \nabla f_0(p_i) &= \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)e^{aln(\theta_i)-bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] \\ f_1(p_i) &= p_i \\ \nabla f_1(p_i) &= 1 \end{aligned}$$

Siendo f_0 y f_1 la función del beneficios y la restricción con respecto al precio del proveedor i respectivamente, ambas son funciones diferenciables, f_1 es lineal lo tanto es cóncava, por otro lado f_0 es cóncava (ver Apéndice (75)), por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global, y así obtener el equilibrio de Nash de este PMP.

Solución de las condiciones de KKT para el proveedor de servicios i :

- $\lambda_i > 0$

$$f_1(p_i^*) = 0 \Leftrightarrow p_i^* = 0$$

$$\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)e^{aln(\theta_i)-bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)^2} \right] + \lambda_i = 0$$

$$\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)}}{e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)e^{aln(\theta_i)}(\delta)}{(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)^2} \right] + \lambda_1 = 0 \quad (53)$$

Con $a, b, \delta, v_0, \Lambda, \theta_i, \theta_j$ y p_j variables no negativas, entonces es imposible que $\lambda_i > 0$.

- $\lambda_i = 0$

$$f_1(p_i^*) > 0 \Leftrightarrow p_i^* > 0$$

$$\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)e^{aln(\theta_i)-bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)^2} \right] = 0 \quad (54)$$

A continuación se muestra el precio obtenido de la ecuación anterior, expresado en términos de la función ProductLog o también función Lambert W:

$$p_i^* = \frac{1}{b} \left[b\delta + 1 + W \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-b\delta-1}}{e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0} \right] \right] \quad (55)$$

La solución del equilibrio de Nash se obtiene a partir del siguiente de ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1^* = \frac{1}{b} [b\delta + 1 + W[\frac{e^{aln(\theta_1)-b\delta-1}}{e^{aln(\theta_2)-bp_2^*+v_0}}]] \\ p_2^* = \frac{1}{b} [b\delta + 1 + W[\frac{e^{aln(\theta_2)-b\delta-1}}{e^{aln(\theta_1)-bp_1^*+v_0}}]] \end{cases} \quad (56)$$

Asumiendo que $\theta_1 = \theta_2 = \theta$:

$$p_1^* = p_2^* = p^* = (1/b) \left[bd + 1 + W \left[\frac{e^{aln(\theta)-bd-1}}{aln(\theta)-bd-1-W\left[\frac{e^{aln(\theta)-bd-1}}{aln(\theta)-bd-1-W\left[\frac{e^{aln(\theta)-bd-1}}{aln(\theta)-bd-1-W\left[\frac{e^{aln(\theta)-bd-1}}{e^{aln(\theta)-bd-1+v_0}}\right]+v_0}\right]+v_0}\right]+v_0}\right]+v_0}\right] \right] \quad (57)$$

Entonces el beneficio del proveedor de servicios i es:

$$\Pi_i^* = \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp^*}}{2e^{aln(\theta)-bp^*} + v_0} (p^* - \delta) - \delta\theta \quad (58)$$

5.2.2. Escenario 4: Competencia en calidad de servicio

En este escenario dos proveedores de servicios eligen la calidad del servicio de forma simultánea para maximizar sus beneficios, para la resolución de este problema debemos obtener las calidades de servicio (θ_1^*, θ_2^*) que viene dado por el equilibrio de Nash al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \theta_1^* = \max_{\theta_1} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_1)-bp_1}}{e^{aln(\theta_1)-bp_1} + e^{aln(\theta_2)-bp_2} + v_o} (p_1 - \delta) - \delta\theta_1 \quad \text{subject to } \theta_1 \geq 0 \\ \theta_2^* = \max_{\theta_2} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_2)-bp_2}}{e^{aln(\theta_2)-bp_2} + e^{aln(\theta_1)-bp_1} + v_o} (p_2 - \delta) - \delta\theta_2 \quad \text{subject to } \theta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (59)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(20) es un problema no lineal con respecto la calidad de servicio de cada proveedor de servicios.

Las condiciones de KKT expresadas en (9) para el proveedor de servicios i se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i f_1(\theta_i^*) = 0 \\ \nabla f_0(\theta_i^*) + \lambda_i \nabla f_1(\theta_i^*) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_0(\theta_i) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} (p_i - \delta) - \delta\theta_i, \quad i \neq j \\ \nabla f_0(\theta_i) &= \Lambda \frac{a(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} - \delta \\ f_1(\theta_i) &= \theta_i \\ \nabla f_1(\theta_i) &= 1 \end{aligned}$$

Siendo f_0 y f_1 la función del beneficios y la restricción con respecto a la calidad de servicios del proveedor i respectivamente, ambas son funciones diferenciables, f_1 es lineal lo tanto es cóncava, por otro lado f_0 es cóncava (ver Apéndice (81)), por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global, y así obtener el equilibrio de Nash de este PMP.

Solución de las condiciones de KKT para el proveedor de servicios i :

- $\lambda_i > 0$

$$f_1(\theta_i^*) = 0 \Leftrightarrow \theta_i^* = 0$$

$$\Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] - \delta + \lambda_i = 0 \quad (61)$$

Con $\theta_i^* = 0$ se produce una indeterminación debido al Logaritmo natural, por lo tanto se descarta esta opción.

- $\lambda_i = 0$

$$f_1(\theta_i^*) > 0 \Leftrightarrow \theta_i^* > 0$$

$$\Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] - \delta = 0 \quad (62)$$

A continuación se muestra la calidad de servicio obtenida de la ecuación anterior:

$$(\theta_i^*)^a = -(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)e^{bp_i} + \sqrt{\frac{(\theta_i^*)^a}{\theta_i^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p_i - \delta)}{\delta} (e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)e^{bp_i}} \quad (63)$$

La solución del equilibrio de Nash se obtiene a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (\theta_1^*)^a = -(e^{aln(\theta_2)-bp_2} + v_o)e^{bp_1} + \sqrt{\frac{(\theta_1^*)^a}{\theta_1^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p_1 - \delta)}{\delta} (e^{aln(\theta_2)-bp_2} + v_o)e^{bp_1}} \\ (\theta_2^*)^a = -(e^{aln(\theta_1)-bp_1} + v_o)e^{bp_2} + \sqrt{\frac{(\theta_2^*)^a}{\theta_2^*}} \sqrt{a \frac{\Lambda(p_2 - \delta)}{\delta} (e^{aln(\theta_1)-bp_1} + v_o)e^{bp_2}} \end{cases} \quad (64)$$

Asumiendo que $p_1 = p_2 = p$, se puede llegar a una solución analítica cuando $a = 1$.

$$\theta_1^*, \theta_2^* = \theta^* = \frac{1}{8} \left[\frac{\Lambda(p - d)}{d} - 4v_o e^{bp} + \sqrt{\left(\frac{\Lambda(p - d)}{d} \right) \left(\frac{M(p - d)}{d} + 8v_o e^{bp} \right)} \right] \quad (65)$$

Entonces el beneficio del proveedor de servicios i cuando $a = 1$:

$$\Pi_i^* = \Lambda \frac{e^{aln(\theta^*)-bp}}{2e^{aln(\theta^*)-bp} + v_o} (p - \delta) - \delta \theta^* \quad (66)$$

5.2.3. Escenario 5: Competencia simultánea en precio y calidad de servicio

En este escenario dos proveedores de servicios eligen el precio y la calidad del servicio de forma simultánea para maximizar sus beneficios, para la resolución de este problema debemos obtener los precios y las calidades de servicio $(p_1^*, \theta_1^*, p_2^*, \theta_2^*)$ que viene dado por el equilibrio de Nash al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (p_1^*, \theta_1^*) = \max_{p_1, \theta_1} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_1)-bp_1}}{e^{aln(\theta_1)-bp_1} + e^{aln(\theta_2)-bp_2} + v_o} (p_1 - \delta) - \delta \theta_1 \quad \text{subject to } p_1 \geq 0 \text{ y } \theta_1 \geq 0 \\ (p_2^*, \theta_2^*) = \max_{p_2, \theta_2} \Lambda \frac{e^{aln(\theta_2)-bp_2}}{e^{aln(\theta_2)-bp_2} + e^{aln(\theta_1)-bp_1} + v_o} (p_2 - \delta) - \delta \theta_2 \quad \text{subject to } p_2 \geq 0 \text{ y } \theta_2 \geq 0 \end{cases} \quad (67)$$

El problema de maximización descrito en la ecuación(67) es un problema no lineal con respecto al precio y a la calidad de servicio de cada proveedor de servicios.

Las condiciones de KKT para el proveedor de servicios i :

$$\begin{cases} \lambda_{i1}, \lambda_{i2} \geq 0 \\ \lambda_{i1} f_1(p_i^*) = 0 \\ \lambda_{i2} f_2(\theta_i^*) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_i} f_0(p_i^*, \theta_i^*) + \lambda_{i1} \frac{\partial}{\partial p_i} f_1(p_i^*) + \lambda_{i2} \frac{\partial}{\partial p_i} f_2(\theta_i^*) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_0(p_i^*, \theta_i^*) + \lambda_{i1} \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_1(p_i^*) + \lambda_{i2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_2(\theta_i^*) = 0 \end{cases} \quad (68)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
f_0(p_i, \theta_i) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} (p_i - \delta) - \delta \theta_i, \quad i \neq j \\
\frac{\partial}{\partial p_i} f_0(p_i, \theta_i) &= \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)e^{aln(\theta_i)-bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] \\
\frac{\partial}{\partial \theta_i} f_0(p_i, \theta_i) &= \Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] - \delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(p_i) &= p_i & f_2(\theta_i) &= \theta_i \\
\frac{\partial}{\partial p_i} f_1(p_i) &= 1 & \frac{\partial}{\partial p_i} f_2(\theta_i) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \theta_i} f_1(p_i) &= 0 & \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_2(\theta_i) &= 1
\end{aligned}$$

Siendo f_0 , f_1 y f_2 la función del beneficios, la restricción con respecto al precio y la restricción con respecto a la calidad de servicio del proveedor de servicios i respectivamente, todas ellas funciones diferenciables y cóncavas, por lo tanto la solución de las condiciones de KKT es un máximo global, y así obtener el equilibrio de Nash de este PMP.

Solución de las condiciones KKT para el proveedor de servicios i :

- $\lambda_{i1} > 0$ y $\lambda_{i2} > 0$

$$\begin{aligned}
f_1(p_i^*) &= 0 \Leftrightarrow p_i^* = 0 \\
f_2(\theta_i^*) &= 0 \Leftrightarrow \theta_i^* = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)e^{aln(\theta_i)-bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] + \lambda_{i1} &= 0 \\
\Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] - \delta + \lambda_{i2} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)}}{e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)e^{aln(\theta_i)}(\delta)}{(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] + \lambda_{i1} = 0 \\
\Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_o)^2} \right] - \delta + \lambda_{i2} = 0
\end{cases} \quad (69)$$

Con $\theta_i^* = 0$ se produce una indeterminación debido al Logaritmo natural, la misma indeterminación ocurre cuando $\lambda_{i1} = 0$ y $\lambda_{i2} > 0$, por lo tanto se descartan estas opciones.

- $\lambda_{i1} > 0$ y $\lambda_{i2} = 0$

$$\begin{aligned}
f_1(p_i^*) &= 0 \Leftrightarrow p_i^* = 0 \\
f_2(\theta_i^*) &> 0 \Leftrightarrow \theta_i^* > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)}}{e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0}} + \frac{b(e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})e^{aln(\theta_i)}(\delta)}{(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})^2} \right] + \lambda_{i1} = 0 \\ \Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i)}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i)} + e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})^2} \right] - \delta + \lambda_{i2} = 0 \end{cases} \quad (70)$$

Con a , b , δ , v_0 , Λ , θ_i , θ_j y p_j variables no negativas, entonces es imposible que $\lambda_{i1} > 0$.

- $\lambda_{i1} = 0$ y $\lambda_{i2} = 0$

$$f_1(p_i^*) > 0 \Leftrightarrow p_i^* > 0$$

$$f_2(\theta_i^*) > 0 \Leftrightarrow \theta_i^* > 0$$

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i) - bp_i}}{e^{aln(\theta_i) - bp_i} + e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0}} + \frac{b(e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})e^{aln(\theta_i) - bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i) - bp_i} + e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})^2} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})(p_i - \delta)e^{aln(\theta_i) - bp_i}}{\theta_i(e^{aln(\theta_i) - bp_i} + e^{aln(\theta_j) - bp_j + v_0})^2} \right] - \delta = 0 \end{cases} \quad (71)$$

Dado el sistema de ecuaciones (71) no se puede llegar a una solución analítica debido a la complejidad de las ecuaciones.

La solución del equilibrio de Nash se obtiene a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_1) - bp_1}}{e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0}} + \frac{b(e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0})e^{aln(\theta_1) - bp_1}(\delta - p_1)}{(e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0})^2} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0})(p_1 - \delta)e^{aln(\theta_1) - bp_1}}{\theta_1(e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0})^2} \right] - \delta = 0 \\ \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_2) - bp_2}}{e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0}} + \frac{b(e^{aln(\theta_1) - bp_1 + v_0})e^{aln(\theta_2) - bp_2}(\delta - p_2)}{(e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0})^2} \right] = 0 \\ \Lambda \left[\frac{a(e^{aln(\theta_1) - bp_1 + v_0})(p_2 - \delta)e^{aln(\theta_2) - bp_2}}{\theta_2(e^{aln(\theta_1) - bp_1} + e^{aln(\theta_2) - bp_2 + v_0})^2} \right] - \delta = 0 \end{cases} \quad (72)$$

Dado el sistema de ecuaciones (72) se cumple que $p_i = p_j = p$ y $\theta_i = \theta_j = \theta$ pero no se puede llegar a una solución general. En la sección de Resultados se analizará como es el comportamiento de la solución frente a los otros parámetros.

6. Resultados

En esta sección se presentan los resultados de las gráficas obtenidas para cada uno de los escenarios planteados anteriormente, para lo cual se utilizó la herramienta Wolfram Mathematica, este es un programa que nos permite hacer el computo y análisis de datos incluyendo tareas numéricas, algebráicas y gráficas, además se lo utiliza en varios campos como las ciencias físicas, matemáticas, financieras entre otros. [18]

6.1. Monopolio

En los capítulos 4 y 5 se realizó el cálculo del precio óptimo en función de las otras variables tal como a , b , δ , v y θ , siendo la sensibilidad a la calidad de servicio, sensibilidad al precio, costo, personas que no contratan el servicio y calidad de servicio respectivamente.

6.1.1. Escenario 1: Máximos beneficios en función del precio

En este escenario tenemos un proveedor de servicios el cual elige el precio tal que maximice sus beneficios, a continuación los resultados del comportamiento del precio en función de las otras variables.

En la Fig. 4 se muestra como varía los beneficios del proveedor de servicios en función del precio p , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $b = 1$, $\theta = 2$, $v_o = 1$, $\delta = 1$, $\Lambda = 100$, se muestra que tiene un comportamiento cóncavo hasta llegar al precio $p = p^*$ en donde el proveedor de servicios obtiene los máximos beneficios Π^* y después tiende a una curva exponencial negativa. El objetivo de este análisis es conocer el comportamiento de este precio cuando varían las otras variables de la función de beneficios tal como se muestra en las imágenes posteriores.

En la Fig. 5 se muestra la variación del precio p^* en función de la sensibilidad al precio b

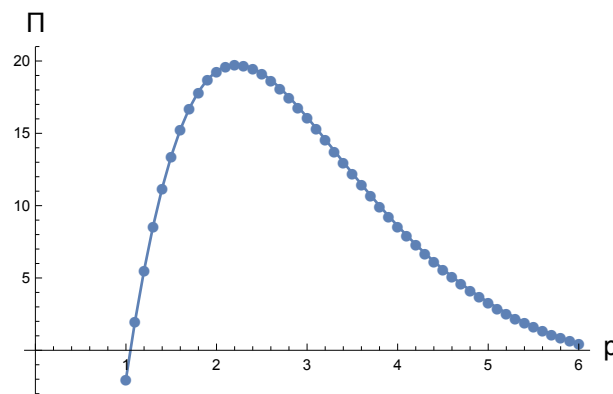


Figura 4: Escenario 1: Π vs p

para distintos valores de costos δ , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v_o = 1$ y $\theta = 2$, podemos observar que si la demanda es más sensible al precio, el precio que escogerá el proveedor de servicios será menor, aunque existe un límite ya que el objetivo del proveedor de servicios es obtener beneficios positivos por ende el precio escogido será mayor o igual al costo.

En esta gráfica también podemos observar como es el comportamiento del precio frente a la variación del costo, en todos los casos el precio aumenta cuando el costo aumenta independientemente de la sensibilidad al precio.

Con solo un proveedor de servicios los usuarios solo tienen dos opciones aceptar o no aceptar el servicio, el precio que elegirá el proveedor de servicios dependerá de que tan sensible es la demanda con respecto al precio, es decir un valor de sensibilidad pequeño implica que la demanda no es muy sensible al precio por lo que el precio será mayor en comparación a una función de demanda muy sensible al precio ya que una mínima variación del precio significaría una gran variación en la cantidad demandada.

En cuanto al costo, el precio es mayor cuando el costo aumenta, este razonamiento es algo intuitivo ya que el productor no va a mantener el mismo precio sabiendo que gasta más que antes. Además el precio tiene que ser mayor al costo si se desea tener beneficios

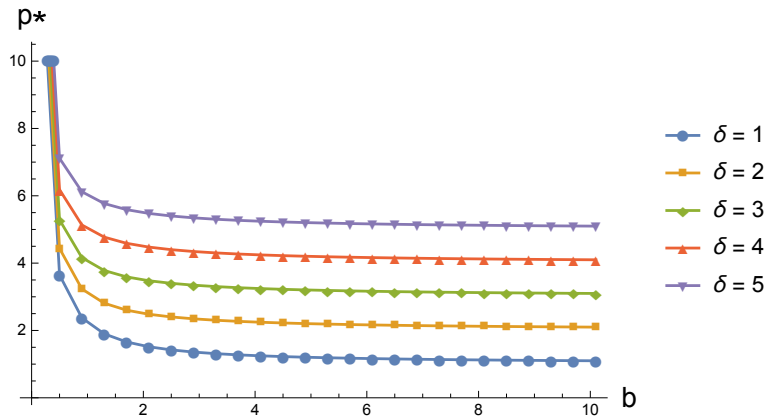


Figura 5: Escenario 1: p^* vs b con diferentes valores de δ

positivos, por lo tanto por más sensible que sea la demanda, el precio mínimo será el valor de costo.

En la Fig. 6 se muestra la variación del precio p^* en función de la calidad de servicio θ para distintos valores de la sensibilidad a la calidad de servicio a , la gráfica se muestra con valores: $b = 1$, $v_o = 1$ y $\delta = 1$, podemos observar que el comportamiento de p^* es creciente a medida que aumenta θ , a diferencia del caso anterior, el precio no tiende a algún valor, lo mismo sucede cuando variamos a , el precio es mayor pero el comportamiento es similar.

Para este escenario la calidad de servicio es fija, pero el precio p^* también depende de la

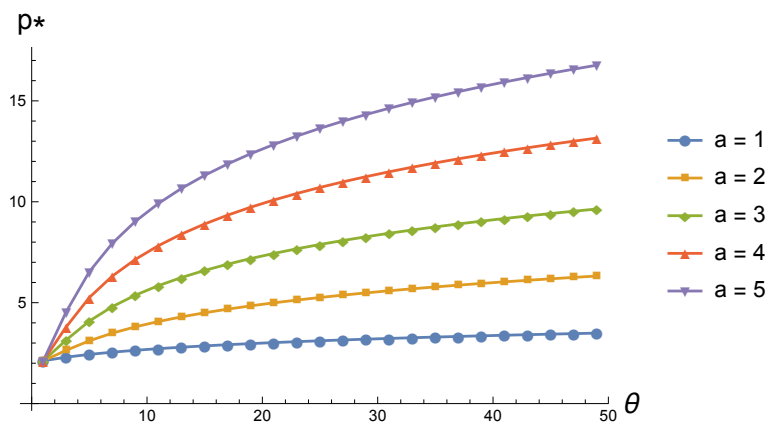


Figura 6: Escenario 1: p^* vs θ con diferentes valores de a

calidad de servicio seleccionada, teniendo en cuenta que si aumenta la calidad de servicio aumenta el costo por lo tanto el precio aumenta. Por otro lado tenemos la sensibilidad con respecto a la calidad de servicio, cuando a es mayor es decir cuanto más sensible es la demanda el proveedor podrá elegir un precio mayor y por ende tener mas beneficios.

En la Fig. 7 se muestra como varía el precio p^* en función de la cantidad de personas que no aceptan el servicio v_o , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $b = 1$, $\theta = 2$ y $\delta = 1$,

si revisamos la ecuación (41) podemos notar el caso particular en donde $v_o = 0$, es decir todos aceptan el servicio, en este caso $p^* = p_{max}$, en caso contrario el comportamiento del precio es decreciente a medida que aumenta v_o , además el precio tiende a un valor mínimo cuando v_o tiende al infinito.

A medida que v_o aumenta significa que la demanda que no acepta el servicio aumenta,

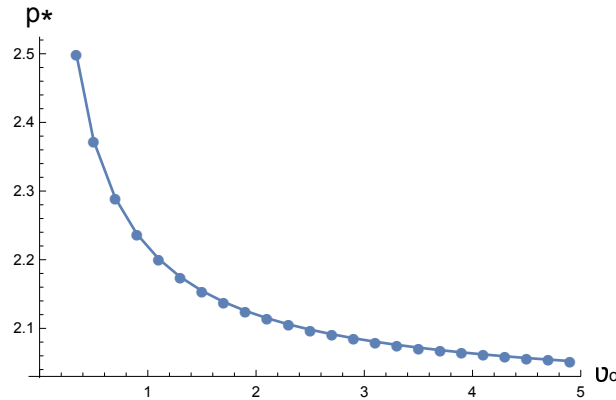


Figura 7: Escenario 1: p^* vs v_o

como vemos en la gráfica el precio es mayor cuando hay mas personas que aceptan el servicio, el proveedor prefiere atraer la mayor cantidad de demanda para obtener mayores beneficios.

6.1.2. Escenario 2: Máximos beneficios en función del servicio

En este escenario tal como el anterior solo tenemos un proveedor de servicios pero en este caso elige la calidad de servicio para maximizar sus beneficios, a continuación se muestran los resultados de la calidad de servicio en función de las otras variables.

En la Fig. 8 se muestra como varían los beneficios del proveedor de servicios en función de la calidad de servicio θ , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $b = 1$, $p = 2$, $v_o = 1$, $\delta = 1$, $\Lambda = 100$, se muestra que la gráfica tiene un comportamiento cóncavo, el punto en el cual el beneficio es máximo es cuando $\theta = \theta^*$, el cual depende de los valores de las otras variables de la función tal como se observa en los resultados posteriores.

En la Fig. 9 se muestra como varía la calidad de servicio θ^* en función del precio p para distintos valores de sensibilidad al precio, la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v_o = 1$, $\delta = 1$, $\Lambda = 100$, se puede observar que al principio la gráfica es creciente hasta llegar a un punto (p_c, θ_{max}^*) en donde cambia su comportamiento, después la gráfica es abruptamente decreciente, además mientras mayor sea b el valor p_c disminuye.

En este escenario el proveedor de servicios elige la calidad de servicios para obtener los máximos beneficios por lo tanto el precio se fija antes, como se ve en la Fig. 9 el proveedor de servicios no puede fijar cualquier precio, tiene un rango de precios dependiendo de la sensibilidad con respecto al precio, si la demanda no es muy sensible el rango del precio es más amplio.

En la Fig. 10 se muestra como varía la calidad de servicio θ^* en función del costo δ , la

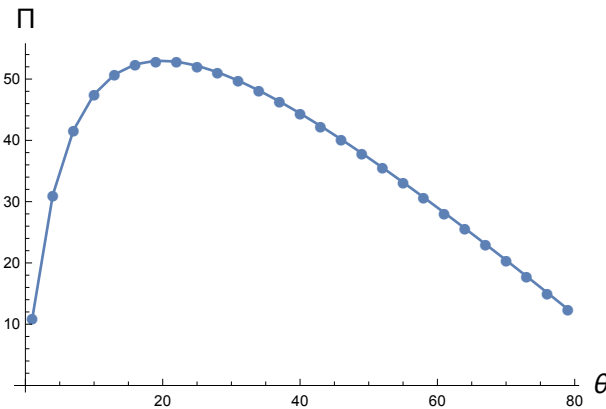


Figura 8: Escenario 2: Π vs θ

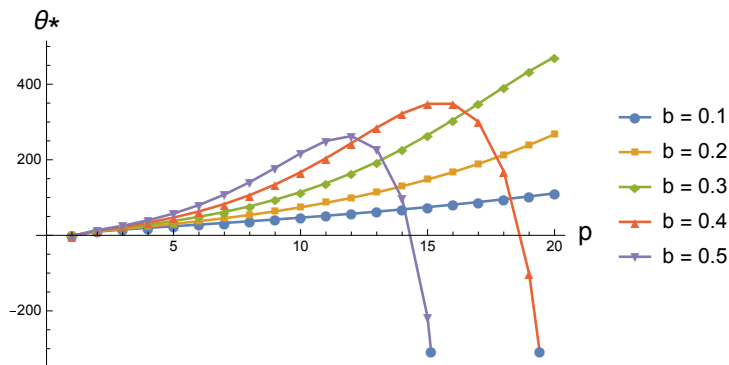


Figura 9: Escenario 2: θ^* vs p con diferentes valores de b

gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v_o = 1$, $b = 1$, $p = 2$ y $\Lambda = 100$, al mantener el precio fijo y el costo aumenta, el proveedor de servicios no ofrecerá la misma calidad de servicio, es decir esta disminuye a medida que el costo aumente. Hay que tener en cuenta que la calidad de servicios es positiva por lo que con los otros parámetros fijos, el costo no puede pasar de cierto límite para obtener beneficios positivos, en este caso el precio $p = 2$ por lo que el costo no puede ser mayor al precio.

En la Fig. 11 se muestra como varía la calidad de servicio θ^* en función de la sensibilidad a , esta gráfica se muestra con valores: $\delta = 1$, $v_o = 1$, $b = 1$, $p = 2$ y $\Lambda = 100$, se puede observar que la gráfica es creciente hasta cierto valor de a , después de este máximo la función decrece.

6.2. Duopolio

En los próximos escenarios tenemos a dos proveedores de servicios, tal como se mencionó en el capítulo 4, ambos proveedores tienen los mismos parámetros en su función de beneficios, es decir el mismo valor de sensibilidad respecto al precio y a la calidad de servicio.

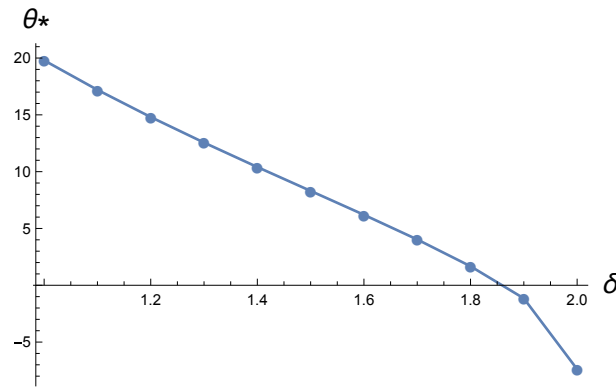


Figura 10: Escenario 2: θ^* vs δ

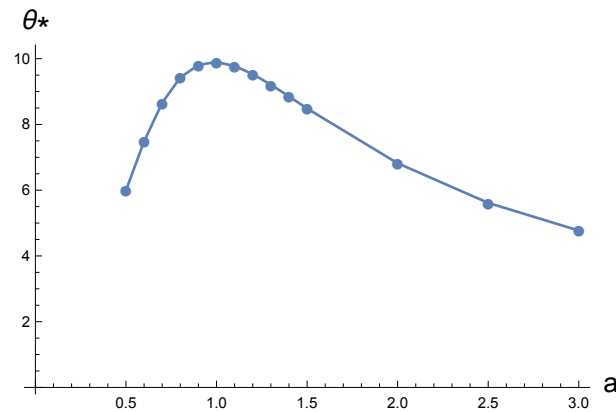


Figura 11: Escenario 2: θ^* vs a

6.2.1. Escenario 3: Competencia en precio

El análisis es similar al escenario 1 cuando solo había un proveedor de servicios es cogiendo el precio óptimo que maximice sus beneficios, pero en esta situación la demanda tiene 3 opciones, contratar los servicios del proveedor 1, del proveedor 2 o no contratar los servicios de ningún proveedor.

En la Fig. 12 se muestra el precio $p_1^* = p_2^* = p^*$ en función de la sensibilidad b , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v_o = 1$ y $\theta = 2$, podemos observar que la tendencia es similar al escenario 1, a medida que aumenta b disminuye el precio, teniendo como precio mínimo el valor del costo para poder obtener beneficios positivos. De igual manera si mantenemos fijos los otros parámetros cuando aumenta el costo aumenta el precio.

En la Fig. 13 muestra como varía el precio p^* en función de la calidad de servicio θ , la gráfica se muestra con valores: $b = 1$, $v_o = 1$ y $\delta = 1$, a diferencia del escenario 1 en este caso el precio si tiende a un valor para todo $a > 0$, mientras mayor es a mas rápido converge, podemos ver que con $a = 1$ no es muy abrupta la curva a diferencia de $a = 5$,

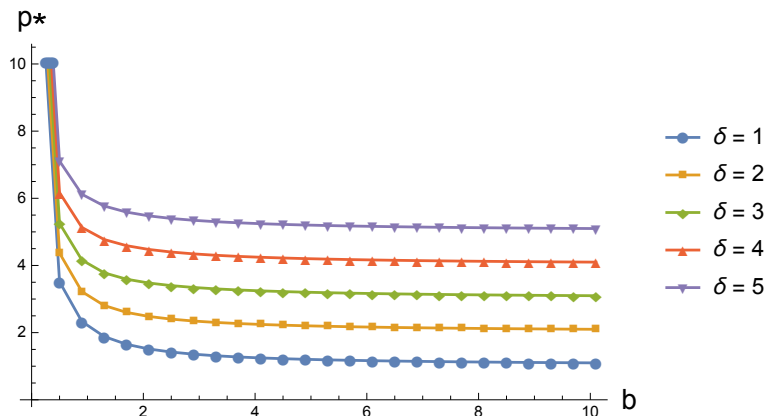


Figura 12: Escenario 3: p^* vs b para distintos valores de δ

es decir si la demanda es muy sensible a la calidad de servicio el proveedor de servicios podrá ofrecer poca calidad de servicio y fijar un precio alto pero si la demanda no es muy sensible a la calidad de servicio el proveedor tendrá que ofrecer mayor calidad de servicio para fijar un precio mayor.

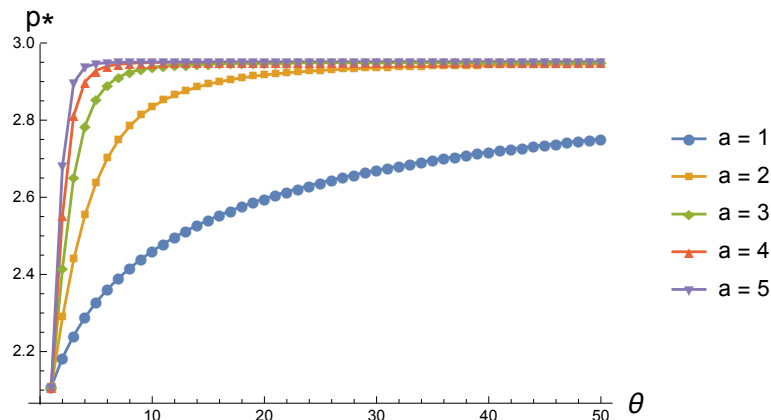


Figura 13: Escenario 3: p^* vs θ para distintos valores de a

El precio que ambos proveedores elegirán dependerá de la calidad de servicio que fijen y de la sensibilidad de la demanda, como se observa en la Fig. 13 mientras más sensible es la demanda más rápido converge la gráfica, una vez la gráfica converge el precio no aumenta pero al aumentar la calidad de servicio aumenta la demanda.

En la Fig. 14 se observa el precio p^* en función de v_0 , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $b = 1$, $\theta = 2$ y $\delta = 1$, el precio tiene un comportamiento similar al escenario 1, es una curva decreciente, con la diferencia que el precio en el escenario del monopolio es mayor.

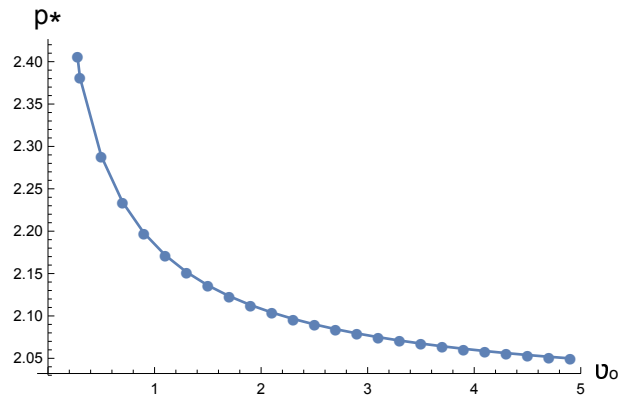


Figura 14: Escenario 3: p^* vs v_0

A continuación se muestra una comparación del precio cuando los usuarios tienen 2 opciones, es decir contratan con el proveedor de servicios 1 o contratan con el proveedor de servicios 2, o cuando tienen 3 opciones, es decir a parte de las dos opciones anteriores tienen la opción de no contratar el servicio.

Comparando ambas expresiones del precio 18 y 57, cuando tienen 2 opciones y 3 opciones respectivamente, cuando tienen 2 opciones el precio no depende de la sensibilidad a la calidad de servicio ni de la calidad de servicio, solo del costo y la sensibilidad al precio, mientras que cuando tienen 3 opciones depende de todos los parámetros.

En la Fig. 15 se muestra la variación del precio frente a la sensibilidad al precio, la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $\theta = 2$, $\delta = 1$ y $v_0 = 1$, como se puede observar la tendencia es parecida pero el precio cuando la demanda solo tiene dos opciones siempre es mayor.

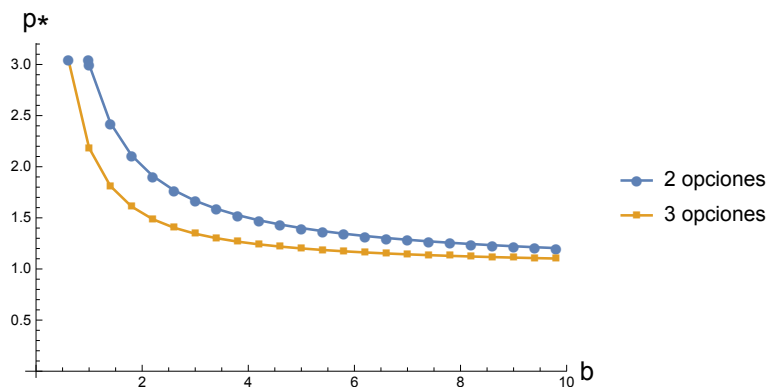


Figura 15: Escenario 3: p^* vs b con 2 y 3 opciones

Con los mismos valores de la figura anterior, a continuación en la Fig. 16 se muestra el beneficio de los proveedores de servicios frente a la sensibilidad al precio, como se puede observar el beneficio de los proveedores de servicios cuando la demanda solo tiene dos opciones es mayor para todo valor de la sensibilidad, además tiene beneficios positivos en un rango mas amplio, para este ejemplo en particular cuando la demanda tiene 3 opciones la sensibilidad al precio no puede ser mayor a 2.5 para obtener beneficios positivos.

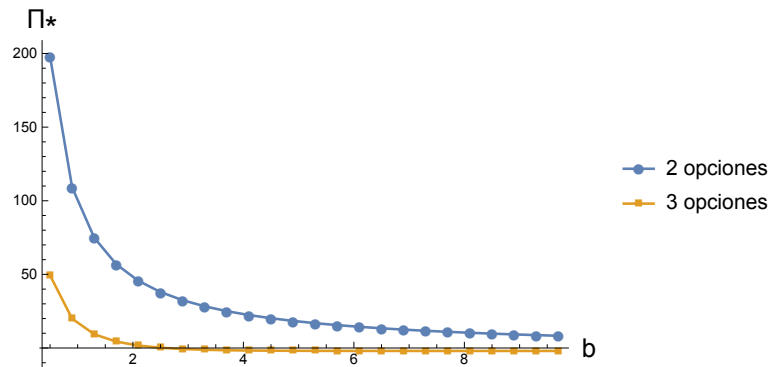


Figura 16: Escenario 3: Π^* vs b con 2 y 3 opciones

En la Fig. 17 se muestra la variación del precio frente al costo, la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $\theta = 2$, $b = 1$ y $v_0 = 1$, como se puede observar la tendencia es parecida tal como el análisis anterior el precio cuando la demanda solo tiene dos opciones siempre es mayor .

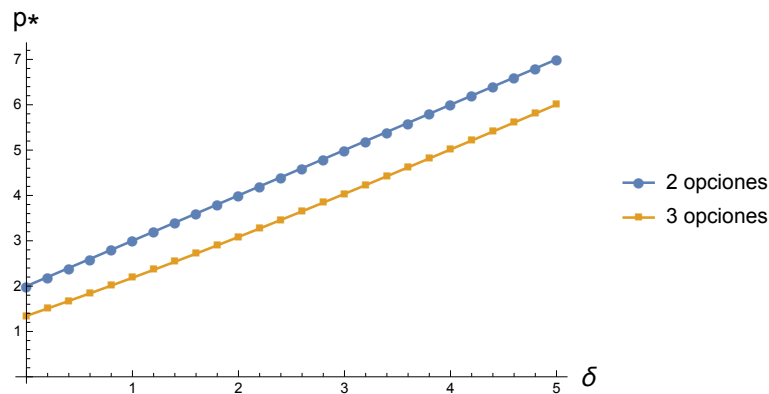


Figura 17: Escenario 3: p^* vs δ con 2 y 3 opciones

Con los mismos valores de la figura anterior, a continuación en la Fig. 18 se muestra el beneficio de los proveedores de servicios frente a la costo, como se puede observar el beneficio de los proveedores de servicios cuando la demanda solo tiene dos opciones es mayor para todo valor de costo, además tiene beneficios positivos en un rango mas amplio, para este ejemplo en particular cuando la demanda tiene 3 opciones el costo no puede ser mayor a 2.5 para obtener beneficios positivos.

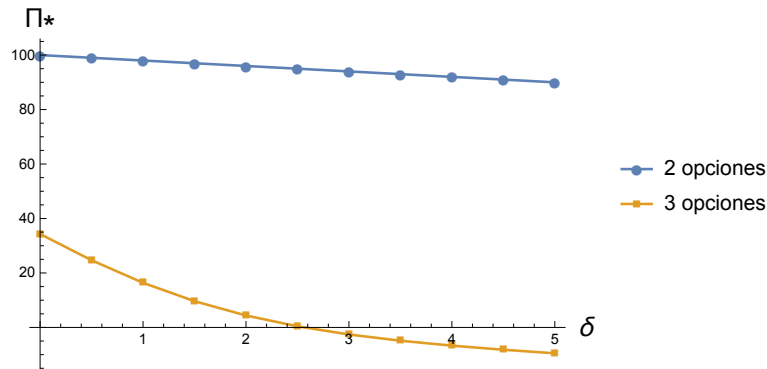


Figura 18: Escenario 3: Π^* vs δ con 2 y 3 opciones

6.2.2. Escenario 4: Competencia en calidad de servicio

El análisis es similar al escenario 2 cuando solo había un proveedor de servicios escogiendo la calidad de servicio óptima que maximice sus beneficios, pero en esta situación la demanda tiene 3 opciones, contratar los servicios del proveedor 1, del proveedor 2 o no contratar los servicios de ningún proveedor.

En la Fig. 19 se muestra como varía la calidad del servicio θ^* en función del precio para distintos valores de la sensibilidad b , esta gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v_o = 1$, $\delta = 1$ y $\Lambda = 100$, a medida que el precio aumenta la calidad del servicio aumenta, hasta cierto punto, que aumenta tanto el precio que debe disminuir la calidad de servicio para obtener los máximos beneficios con ese precio fijado.

Podemos observar que el precio máximo que se puede fijar depende del parámetro b , mientras menor es b , mayor será el rango del precio.

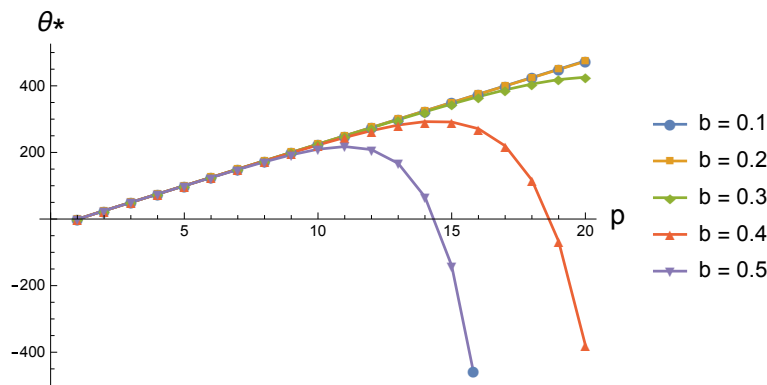


Figura 19: Escenario 4: θ^* vs p con diferentes valores de b

Tal como se analizó el escenario anterior, a continuación se muestra la diferencia entre los dos escenarios, cuando la demanda tiene 2 y 3 opciones por elegir.

En la Fig. 20 se muestra como varía la calidad de servicio θ^* en función de la sensibilidad a , esta gráfica se muestra con valores: $\delta = 1$, $v_o = 1$, $b = 1$ y $\Lambda = 100$, se puede observar que ambas curvas son practicamente lineales, es decir con el precio fijo cuando la demanda es más sensible con respecto a la calidad del servicio, la calidad de servicio elegida por los proveedores será mayor.

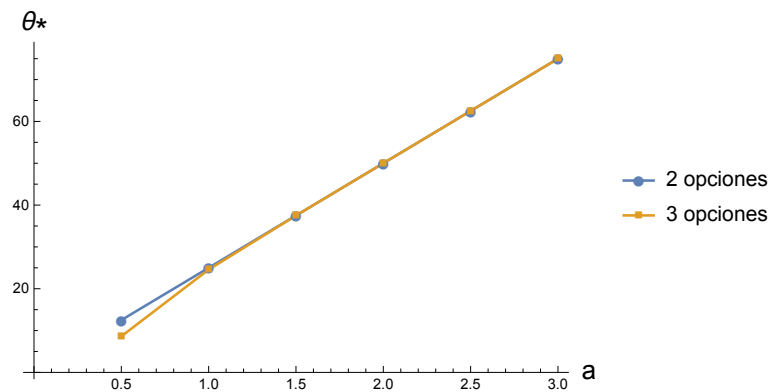


Figura 20: Escenario 4: θ^* vs a

De la expresión 27 de beneficios del proveedor de servicios cuando la demanda tiene 2 opciones el beneficio no depende de la sensibilidad al precio b a diferencia cuando la demanda tiene 3 opciones en donde depende de todos los parámetros.

Con los mismos valores de la figura anterior, a continuación en la Fig. 21 se muestra el beneficio de los proveedores de servicios frente a la sensibilidad a la calidad de servicios a , como se puede observar ambas curvas tienden al mismo punto aunque el beneficio de los proveedores de servicios cuando la demanda solo tiene dos opciones es mayor para todo valor de a , además tiene beneficios positivos en un rango mas amplio, para este ejemplo en particular cuando la demanda tiene 2 opciones la sensibilidad no puede ser mayor a 2 mientras que con 3 opciones no puede ser mayor a 1.5 para obtener beneficios positivos.

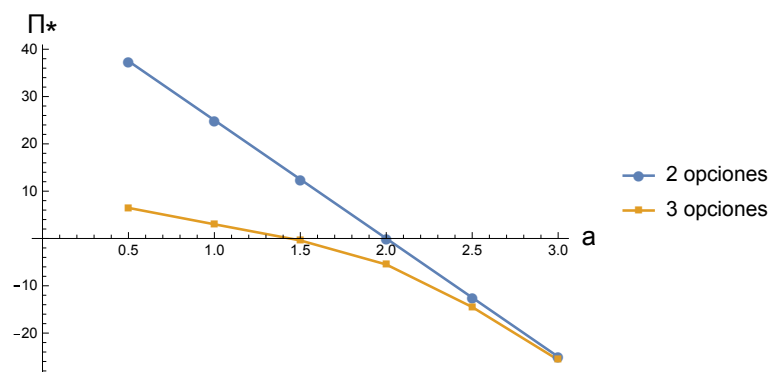


Figura 21: Escenario 4: Π^* vs a con 2 y 3 opciones

6.2.3. Escenario 5: Competencia en precio y calidad de servicio

Para la resolución del sistema de ecuaciones propuesto en la sección 5 se analizaron estas ecuaciones con distintos valores de los parámetros a , b , δ , v_o y Λ , así se obtuvieron las gráficas que se muestran a continuación.

En este escenario ambos proveedores de servicios eligen el precio y la calidad de servicio que maximice sus beneficios, en la Fig. 22 se muestra la curva del precio p^* vs la sensibilidad al precio b , esta gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v_o = 1$ y $\Lambda = 100$, para todos los valores del costo δ la curva es decreciente, además sigue el mismo comportamiento de los escenarios en donde elegían solamente el precio. Podemos observar que mientras menor sea el costo mayor puede ser la sensibilidad al precio para que los proveedores de servicios puedan elegir un precio y obtener beneficios positivos, es decir por ejemplo con un costo $\delta = 4$ la sensibilidad al precio de la demanda no puede ser mayor a 1, a diferencia si el costo es menor, la demanda puede ser mas sensible al precio y aun así el proveedor de servicios puede obtener beneficios positivos.

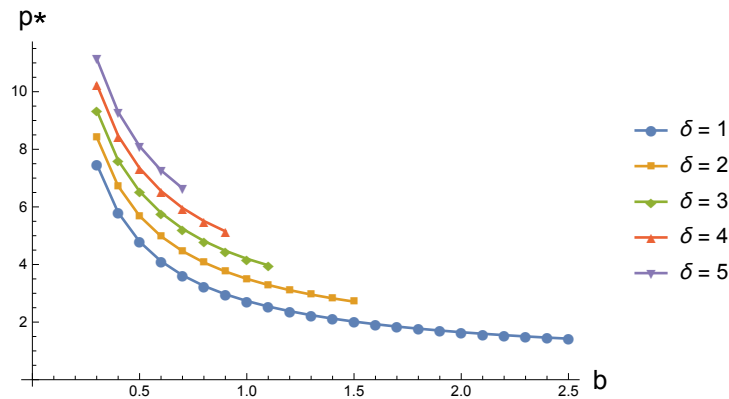


Figura 22: Escenario 5: p^* vs b con diferentes valores de δ

A continuación se muestra una comparación en este escenario cuando la demanda tiene 2 y 3 opciones que elegir, de la expresión 35 con 2 opciones el precio de los proveedores de servicios no depende de la sensibilidad a la calidad de servicio ni de la calidad de servicio, a diferencia cuando la demanda tiene 3 opciones en donde depende de todos los parámetros.

En la Fig. 23 se puede observar que las curvas son similares, tal como el escenario 3 en donde los dos proveedores de servicios solo competían por el precio, además el precio cuando la demanda tiene dos opciones es mayor.

En la Fig. 24 se muestra la curva del servicio óptimo θ^* vs la sensibilidad al precio b , la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $v = 1$ y $\Lambda = 100$, para todos los valores de δ la curva es decreciente.

En la Fig. 25 se muestra la curva del servicio óptimo θ^* vs la sensibilidad al precio b cuando la demanda tiene 2 y 3 opciones, la gráfica se muestra con valores: $a = 1$, $\delta = 1$, $v = 1$ y $\Lambda = 100$, para todos los valores de δ la curva es decreciente y la curva con solo 2 opciones es ligeramente mayor a la curva con 3 opciones.

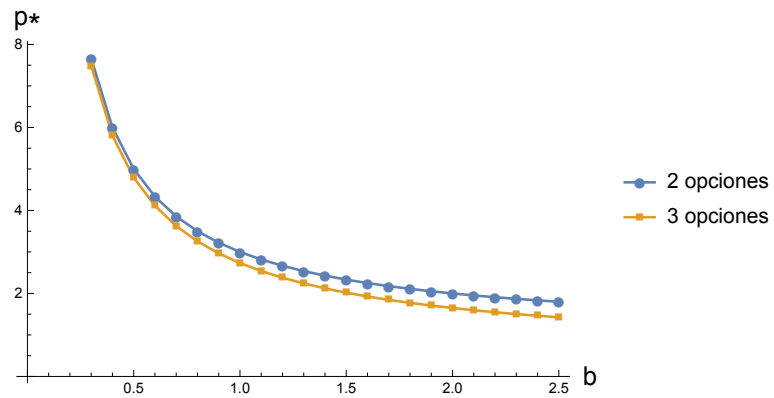


Figura 23: Escenario 5: p^* vs b con 2 y 3 opciones

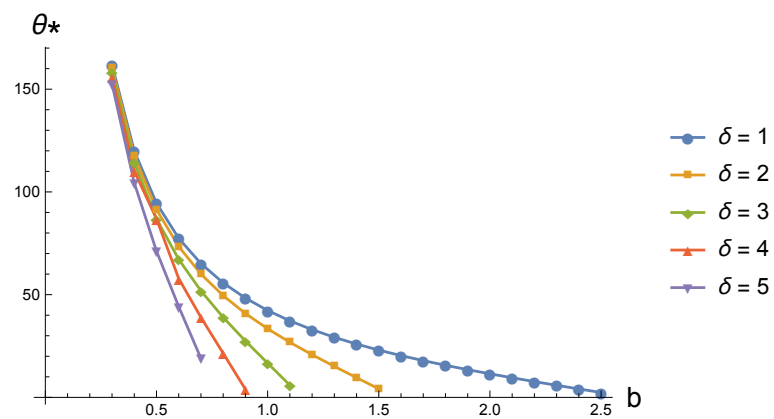


Figura 24: Escenario 5: θ^* vs b con diferentes valores de δ

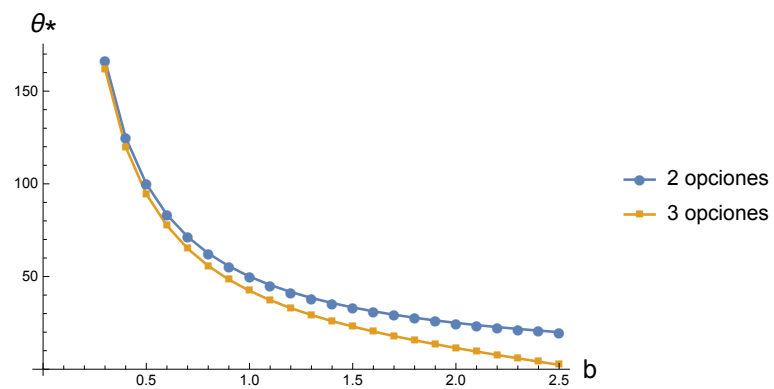


Figura 25: Escenario 5: θ^* vs b con diferentes valores de δ

Referencias

- [1] 5G Americas. *Network Slicing for 5G Networks and Services*, White Paper - Network Slicing for 5G and Beyond, Noviembre 2016.
- [2] J. Ordoñez-Lucena, P. Ameigeiras, D. Lopez, J.J. Ramos-Munoz, J. Lorca y J. Folgueira. *Network Slicing for 5G with SDN/NFV: Concepts, Architectures and Challenges*, IEEE Communications Magazine, 2017.
- [3] J. Hoogland, M. M. D. Weerdts and H. L. Poutré. *Winning in Retail Market Games: Relative Profit and Logit Demand*, 2015 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence, Cape Town, pp. 1794-1800, 2015.
- [4] Gérard P. Cachon, Patrick T. Harker. *Price Competition with the Attraction Demand Model: Existence of Unique Equilibrium and Its Stability*, Manufacturing and Service Operations Management, Vol. 48, No. 4, pp. 359-375, 2006.
- [5] Gérard P. Cachon, Patrick T. Harker. *Competition and Outsourcing with Scale Economies*, Management Science © 2002 INFORMS, Vol. 48, No. 10, pp. 1314-1333, Octubre 2002.
- [6] Fabiola Garduño Aguilar. *Software para dimensionamiento de troncales para redes*, Universidad de las Américas Puebla, 2007.
- [7] Gad Allon, Awi Federgrun. *Service Competition with General Queueing Facilities*, Operations Research, Vol 56, No 4, pp 827-849, Julio-Agosto 2008.
- [8] A. Hübl and K. Altendorfer. *State probabilities for an M/M/1 queueing system with two capacity levels*, 2015 Winter Simulation Conference (WSC), Huntington Beach, CA, pp. 2219-2226, 2015.
- [9] George Darzanos, Iordanis Koutsopoulos, George D. Stamoulis. *Optimizing Pricing Function for Metro in a Competitive Public Transport System*, 2016 IFIP Networking Conference (IFIP Networking) and Workshops, Vienna, pp. 485-493, 2016.
- [10] Feifei Qin , Haicheng Jia. *Optimizing Pricing Function for Metro in a Competitive Public Transport System*, 2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics, Jinan, pp. 1187-1192, 2007.
- [11] C. Suhua, Z. Xiaojun and D. Jianming. *Feasibility on HOV lanes based on multinomial logit model*, 2010 2nd IEEE International Conference on Information and Financial Engineering, Chongqing, pp. 135-138, 2010.
- [12] W. Liang, J. Hu, Y. Zhang and Z. Wang. *Multinomial logit model-based parking choice in a mall at city*, 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC), Yinchuan, pp. 320-323, 2016.
- [13] Bernard Guerrien. *Microeconomía*, Primera Edición, pp. 149, 2008.

- [14] P. Caballero, A. Banchs, G. de Veciana and X. Costa-Pérez. *Network Slicing Games: Enabling Customization in Multi-Tenant Networks*, IEEE INFOCOM 2017 - IEEE Conference on Computer Communications, Atlanta, GA, pp. 1-9, 2017.
- [15] W. Sun, L. Guijarro, V. Pla and J. R. Vidal. *Joint Resource and Price Competition in Wireless Sensor Network-based Service Provision*, 2017 14th IEEE Annual Consumer Communications and Networking Conference (CCNC), Las Vegas, NV, pp. 254-259, 2017.
- [16] Francisco Venegas Martínez. *Riesgos financieros y económicos/ Financial and Economical Risks: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Segunda Edición, Cap 78, pp 953, 2008.
- [17] Luis Guijarro. *Non-linear Optimization*, Telecommunications Economics and Regulation, UPV, 2017.
- [18] Stephen Wolfram. *The Mathematica Book*, 5^{ta} edición, Wolfram Media, 2003.

A. Anexos

A.1. Competencia en precios

Para la resolución de los problemas de maximización propuestos en los escenarios 1 y 3, en el caso 1 del monopolio y el 3 del duopolio, en ambos escenarios eligen el precio para maximizar sus beneficios.

Podemos utilizar el teorema de KKT si y solo si la función a maximizar y la restricciones son cóncavas, a continuación se muestra las condiciones para cumplir la concavidad de la función del beneficio para el escenario de un solo proveedor de servicios:

$$\begin{aligned}
 f_0(p) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_0} (p - \delta) - \delta\theta \\
 \frac{\partial}{\partial p} f_0(p) &= \Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_0} + \frac{bv_0 e^{aln(\theta)-bp} (\delta - p)}{(e^{aln(\theta)-bp} + v_0)^2} \right] \\
 \frac{\partial^2}{\partial p^2} f_0(p) &= \Lambda \left[\frac{bv_0 e^{aln(\theta)-bp} (b(p - \delta) - 2)}{(e^{aln(\theta)-bp} + v_0)^2} - \frac{2b^2 v_0 e^{2aln(\theta)-2bp} (p - \delta)}{(e^{aln(\theta)-bp} + v_0)^3} \right]
 \end{aligned}$$

Una función es cóncava respecto a una variable si se cumple que la segunda derivada respecto a esa variable es negativa, por lo tanto se debe de cumplir que:

$$\Lambda \left[\frac{bv_0 e^{aln(\theta)-bp} (b(p - \delta) - 2)}{(e^{aln(\theta)-bp} + v_0)^2} - \frac{2b^2 v_0 e^{2aln(\theta)-2bp} (p - \delta)}{(e^{aln(\theta)-bp} + v_0)^3} \right] < 0 \quad (73)$$

$$\frac{2}{b(p - \delta)} > \frac{v_0 - e^{aln(\theta)-bp}}{v_0 + e^{aln(\theta)-bp}} \quad (74)$$

Con $v_0 = 0$ en la ecuación (74) podemos observar que la función es cóncava en todo el dominio ya que el precio p es mayor al costo δ , o también podemos verlo directamente en la función f_0 con $v_0 = 0$ la función es lineal con respecto al precio es decir cóncava.

Para el caso de dos proveedores del servicio, la resolución de este problema de maximización es obtener el equilibrio de Nash en este juego, para ello se debe demostrar que existe este equilibrio.

Para demostrar que existe un equilibrio de Nash y además es único se deben cumplir los 3 enunciados del teorema 4 de Allon, los cuales son aplicables en este caso [7], tal como se muestra a continuación:

1. "Asuma que la elasticidad del precio $e_i = (p_i/\lambda_i)(\partial\lambda_i/\partial p_i)$ es decreciente en p_i para todo $i = 1, \dots, N$. Entonces existe un equilibrio del precio p^* que satisface las condiciones de primer orden."

A continuación se demuestra que la elasticidad del precio e_i es decreciente en p_i :

$$\lambda_i = \Lambda \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \lambda_i = -\Lambda b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0) \frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)^2}$$

$$\frac{p_i}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_i} = \frac{-b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)p_i}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0} \quad (75)$$

Con (75) decreciente en p_i se demuestra la existencia del equilibrio de Nash que debe satisfacer las condiciones de primer orden.

2. "Asuma que la elasticidad del precio e_i es decreciente en p_i mientras el $\lim_{p_i \rightarrow \infty} e_i < -1$ $i = 1, \dots, N$. Entonces el equilibrio del precio p^* es único."

$$\lim_{p_i \rightarrow \infty} e_i = -\infty < -1 \quad (76)$$

Con (76) se demuestra que el equilibrio de Nash es único.

3. "Asuma que el costo es de la forma C^{LJN} . Entonces bajo funciones de atracción totalmente generales existe un equilibrio del precio p^* que satisface:"

$$\Lambda \left[\frac{e^{aln(\theta_i)-bp_i}}{e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0} + \frac{b(e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)e^{aln(\theta_i)-bp_i}(\delta - p_i)}{(e^{aln(\theta_i)-bp_i} + e^{aln(\theta_j)-bp_j} + v_0)^2} \right] = 0 \quad (77)$$

Este equilibrio es único si la función de atracción es log-cóncavo en p_i , tal como se muestra a continuación:

$$v_i = e^{aln(\theta_i)-bp_i} \ln(v_i) = \ln(e^{aln(\theta_i)-bp_i}) = aln(\theta_i) - bp_i \quad (78)$$

Con (78) se demuestra que la función de atracción es log-cóncavo en p_i ya que es lineal en p_i por lo tanto el equilibrio de Nash es único.

A.2. Competencia en calidad de servicio

Para la resolución de los problemas de maximización propuestos en los escenarios 2 y 4, en el caso 2 del monopolio y el 4 del duopolio, en ambos escenarios eligen la calidad de servicio para maximizar sus beneficios.

Podemos utilizar el teorema de KKT si y solo si la función a maximizar y la restricciones son cóncavas, a continuación se muestra las condiciones para cumplir la concavidad de la función del beneficio para el escenario de un solo proveedor de servicios:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= \Lambda \frac{e^{aln(\theta)-bp}}{e^{aln(\theta)-bp} + v_o} (p - \delta) - \delta\theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} f_0(\theta) &= \Lambda \frac{av_o(p - \delta)e^{aln(\theta)-bp}}{\theta(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^2} - \delta \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f_0(\theta) &= \Lambda av_o(p - \delta)e^{aln(\theta)-bp} \left[\frac{a - 1}{\theta^2(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^2} - \frac{2ae^{aln(\theta)-bp}}{\theta^2(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^3} \right] \end{aligned}$$

Una función es cóncava respecto a una variable si se cumple que la segunda derivada respecto a esa variable es negativa, por lo tanto se debe de cumplir que:

$$\Lambda av_o(p - \delta)e^{aln(\theta)-bp} \left[\frac{a - 1}{\theta^2(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^2} - \frac{2ae^{aln(\theta)-bp}}{\theta^2(e^{aln(\theta)-bp} + v_o)^3} \right] < 0 \quad (79)$$

$$\frac{1}{a} > \frac{v_o - e^{aln(\theta)-bp}}{v_o + e^{aln(\theta)-bp}} \quad (80)$$

Con $v_o = 0$ en la ecuación (80) podemos observar que la función es cóncava en todo el dominio ya que $a > 0$, o también podemos verlo directamente en la función f_0 con $v_o = 0$ la función es lineal con respecto a la calidad de servicio es decir cóncava.

Para el caso de dos proveedores del servicio, la resolución de este problema de maximización es obtener el equilibrio de Nash en este juego, para ello se debe demostrar que existe este equilibrio.

Para demostrar que existe un equilibrio de Nash se referencia el teorema 5 de Allon, el cual es aplicable en este caso [7], el cual menciona lo siguiente: "Asuma la función de capacidad de costo C_i es convexa en el volumen de demanda λ_i . Asuma que la función de atracción v_i es cóncava en θ_i . Entonces existe un equilibrio de calidad de servicio $\theta^*(p)$ para cualquier valor de p el cual satisface las condiciones de primer orden."

Allon demuestra que λ_i es cóncava en θ_i , por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= (p_i - \delta)\lambda_i - \delta\theta_i \\ \frac{\partial}{\partial\theta_i}\Pi_i &= (p - \delta)\frac{\partial}{\partial\theta_i}\lambda_i - \delta \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}\Pi_i &= (p - \delta)\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}\lambda_i < 0\end{aligned}\tag{81}$$

Con (81) negativa se demuestra la existencia del equilibrio de Nash [7].