UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Modelos económicos discretos versus continuos: un estudio comparativo a través de la amortización de hipotecas

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario e Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

El estudio de modelos discretos y continuos a través de ecuaciones en diferencias y diferenciales, respectivamente, aparece con frecuencia en la formación académica en numerosas áreas, y en particular en Economía. Un ejemplo importante es el estudio de la amortización de un préstamo hipotecario donde se determina el principal o capital pendiente de pago por cada uno de los enfoques anteriores, así como otras magnitudes económicas de interés. En este artículo se analiza la relación entre los resultados proporcionados por ambos enfoques mediante un paso al límite, que de forma natural permite conectar ambos tipos de ecuaciones. Mediante el problema analizado en este trabajo se pretende mostrar la conexión entre las soluciones proporcionadas por los modelos discretos y continuos formulados para un mismo problema, y analizar dicha relación.

2 Introducción

Frecuentemente en la formación académica se imparten contenidos docentes distintos que son aplicados para estudiar un mismo problema, sin que los docentes nos detengamos en buscar las conexiones entre dichos enfoques. Esta actitud, muchas veces motivada por las premuras y restricciones en impartir el temario en un período de tiempo reducido, nos impide dotar de mayor consistencia y conexión a los programas que impartimos. En Economía y en otras áreas aplicadas, un ejemplo lo constituyen las ecuaciones en diferencias (eed's) y las ecuaciones diferenciales (edo's). Las primeras constituyen potentes herramientas para estudiar problemas formulados en términos discretos, mientras que las edo's han sido utilizadas con gran éxito en la modelización de fenómenos continuos. Aunque en ocasiones los fenómenos discretos no admiten un tratamiento matemático continuo y viceversa, en otras sin embargo, es posible estudiar el caso continuo a partir de un paso al límite del fenómeno discreto. Cuando esta situación se da, resulta enormemente formativo encontrar la conexión entre los dos enfoques. En este trabajo vamos a profundizar en este sentido tomando como ejemplo conductor de nuestro estudio un problema importante que aparece en economía: el estudio de la amortización de un préstamo hipotecario a través de los tipos de regímenes de capitalización de intereses, el discreto y el continuo.

Para realizar este estudio necesitaremos los siguientes prerrequisitos matemáticos:

- La solución de un problema de valor inicial (pvi) basado en una eed lineal de primer orden completa a coeficientes constantes (véase la Ecuación 1).

$$\left.\begin{array}{rcl} x(n+1) & = & a\,x(n)+b \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(n)=\begin{cases} a^n\left(x_0+\dfrac{b}{a-1}\right)-\dfrac{b}{a-1} & \text{si} \quad a\neq 1 \\ bn+x_0 & \text{si} \quad a=1 \end{cases}$$

Ecuación 1. Solución de un pvi basado en una eed lineal de primer orden no homogénea a coeficientes constantes.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

- La solución de un problema de valor inicial (pvi) basado en una edo lineal de primer orden completa a coeficientes constantes (véase la Ecuación 2).

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & ax(t)+b \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} e^{at}\left(x_0+\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{b}{a} & \text{si} \quad a\neq 0 \\ bt+x_0 & \text{si} \quad a=0 \end{cases}$$

Ecuación 2. Solución de un pvi basado en una edo lineal de primer orden no homogénea a coeficientes constantes.

- El valor de un límite del tipo del número "e" (véase la Ecuación 3).

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=e^{rt}$$

Ecuación 3. Un límite del tipo del número de Euler "e" que juega un papel importante en nuestro estudio.

El problema que abordaremos consiste en el cálculo de las diferentes magnitudes asociadas a la devolución de un préstamo, tales como el capital pendiente de pago en cada momento; la cuota constante a pagar para liquidar el préstamo en un plazo previamente fijado o, recíprocamente, fijada la cuota a priori, la determinación del plazo para cancelar el préstamo. El estudio de este problema general admite dos posibles enfoques dependiendo del tipo de régimen de capitalización que se considere: el régimen de capitalización a interés compuesto discreto (r.c.i.c.d.) y el régimen de capitalización a interés compuesto continuo (r.c.i.c.c.). Analizaremos estos dos casos y estudiaremos la conexión entre sus respuestas.

Para analizar el problema bajo el r.c.i.c.d. estableceremos un modelo basado en una e.e.d. del tipo mostrada en la Ecuación 1, mientras que en el contexto del r.c.i.c.c. utilizaremos una e.d.o. del tipo dada en la Ecuación 2. El resultado mostrado en la Ecuación 3 nos permitirá mostrar la relación entre las respuestas proporcionadas por ambos enfoques.

3 Objetivos

El principal objetivo docente de este artículo es que el alumno sea capaz de:

- Plantearse la búsqueda de la conexión entre las respuestas proporcionadas por los modelos discretos y continuos que considere en el estudio de problemas económicos, y en particular, de los modelos de amortización de préstamos con tipos de interés y cuotas periódicas constantes.

3.1 Estudio a través del modelo discreto

En este caso el problema que se plantea es el siguiente:

Régimen de capitalización a interés compuesto discreto (r.c.i.c.d.): Supongamos que pedimos un préstamo de valor (también denominado principal) P_0 unidades monetarias (u.m.) que deseamos devolver en N

cuotas constantes de valor c u.m. cada una a un cierto tipo de interés constante r referido a cada uno de los períodos en que se pagan las cuotas. Asumiremos que las cuotas se pagan al final de cada uno de los períodos de vida de préstamo.

Queremos, en primer lugar, determinar el valor del capital pendiente de pago en el período n (siendo n un valor variando en el conjunto $n=0,1,2,\ldots,N$). En el contexto de capitalización de intereses discretos, denotaremos este capital por: $P^D(n)$. Posteriormente también calcularemos otros valores de interés referidos al préstamo, que por claridad en la presentación ahora no especificamos.

Para plantear la eed que modeliza el problema objeto de estudio en el escenario discreto vamos a describir el proceso de amortización del préstamo a través de la Tabla 1:

- Fila 1 de la Tabla 1: Cuando se inicia el préstamo (n=0) no se paga cuota alguna, y por tanto no se pagan intereses ni se amortiza nada del principal, quedando todo el préstamo pendiente de pago.
- Fila 2 de la Tabla 1: En el primer período se paga la primera cuota de c u.m. Esta cuota se compone en una parte del interés correspondiente a ese período. Ese interés es directamente proporcional al valor del principal pendiente de pago durante ese período, (es decir, la totalidad del préstamo: $P(0)=P_0$), al tipo de interés común r aplicado en cada período y, a la longitud del período al que corresponde la cuota (que en nuestro caso se toma siempre como una unidad temporal). Por todo ello, el interés del primer período es: $I(1)=P(0)r$. El resto de la cuota corresponde al capital amortizado: $c-I(1)$. De este modo, después de realizar el pago de la primera cuota el principal pendiente de pago será: $P(1)=P(0)-(c-I(1))$.
- Fila 3 de la Tabla 1: En el segundo período se paga la segunda cuota de valor fijo c. Como antes, esta cuota se compone en una parte del interés correspondiente a ese período. Ese interés es directamente proporcional al valor del principal pendiente de pago durante ese período (que ahora es$P(1)$), al tipo de interés común aplicado en cada período r y, a la longitud del período al que corresponde la cuota (que como hemos dicho es una unidad temporal). Por todo ello, el interés del segundo período es: $I(2)=P(1)r$. El resto de la cuota corresponde al capital amortizado: $c-I(2)$. De este modo, después de realizar el pago de la segunda cuota el principal pendiente de pago será: $P(2)=P(1)-(c-I(2))$.
- Fila n de la Tabla 1: En un período arbitrario n (entre 1 y N), se paga la enésima cuota de valor fijo c. Como antes, esta cuota se compone, en una parte del interés correspondiente a ese período. Ese interés es directamente proporcional al valor del principal pendiente de pago durante ese período (que ahora es $P(n-1)$), al tipo de interés común aplicado en cada período r y, a la longitud del período al que corresponde la cuota (que es la unidad temporal). Por todo ello, el interés del enésimo período es: $I(n)=P(n-1)r$. El resto de la cuota corresponde al

capital amortizado: c-I(n). De este modo, después de realizar el pago de la enésima cuota el principal pendiente de pago será: P(n)=P(n-1)-(c-I(n)).

Con todo ello estamos en condiciones de plantear una eed para la dinámica de P(n). Obsérvese que de la última fila de la Tabla 1 se deduce la Ecuación 4 (donde obsérvese que en el último paso hemos trasladado una unidad la variable independiente n para expresar el modelo en la forma estándar dada en la Ecuación 1). Identificando los coeficientes y variables de la Ecuación 4 con los de la Ecuación 1: $a=1+\mathrm{r}\neq 1$; b=-c; $\mathrm{x}_0=P_0$; $x(n)=P(n)$, obtenemos el valor P(n) (véase la Ecuación 5).

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathrm{P(n)} & = & \mathrm{P(n\text{-}1)\text{-}(c\text{-}I(n))} \\ I(n) & = & P(n-1)r \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{P(n)=P(n\text{-}1)\text{-}(c\text{-}}P(n-1)r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P(n)=(1+r)P(n\text{-}1)\text{-}}c \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{P(n+1)} & = & \mathrm{(1+r)P(n)\text{-}}c \\ P(0) & = & P_0 \end{array}\right.$$

Ecuación 4. Modelización del problema discreto mediante una eed.

Período	**Cuota constante**	**Interés**	**Principal amortizado**	**Principal P(n) pendiente después del pago n**
0	---	---	---	$P(0)=P_0$
1	c	$I(1)=P(0)r$	c-I(1)	P(1)=P(0)-(c-I(1))
2	c	$I(2)=P(1)r$	c-I(2)	P(2)=P(1)-(c-I(2))
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	c	$I(n)=P(n-1)r$	c-I(n)	P(n)=P(n-1)-(c-I(n))

Tabla 1. Descripción de la amortización del préstamo bajo el r.c.i.c.d.

$$P^D(n)=(1+r)^n\left(P_0-\frac{c}{r}\right)+\frac{c}{r}=(1+r)^n P_0-\frac{c}{r}\left((1+r)^n-1\right), \quad n=0,1,2,\ldots,N$$

Ecuación 5. Dinámica explícita del capital pendiente de amortización en el período n bajo el r.c.i.c.d.

Como comprobación de la respuesta dada en la Ecuación 5, obsérvese que $P^D(0)=(1+r)^0 P_0-\frac{c}{r}\left((1+r)^0-1\right)=P_0$.

A partir de esta expresión podemos dar respuesta a otras preguntas de interés, tales como:

- ¿Cuál debe ser el valor de la cuota fija c para que el préstamo sea cancelado bajo el r.c.i.c.d. en N períodos?

Obsérvese que la condición para que se cancele el préstamo es que $P^D(N)=0$, lo que impuesto sobre la Ecuación 5, nos permite despejar el valor de c buscado (véase la Ecuación 6).

$$(1+r)^N P_0 - \frac{c}{r}\left((1+r)^N - 1\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{r P_0 (1+r)^N}{(1+r)^N - 1}$$

Ecuación 6. Cuota para cancelar el préstamo de principal P_0 *en* N períodos bajo el r.c.i.c.d. y tipo de interés r.

En ocasiones, el problema anterior se podía plantear en los siguientes términos:

- ¿Cuál debe ser el plazo en que se cancelará un préstamo de principal P_0, tipo de interés r bajo el r.c.i.c.d. si se desea pagar una cuota fija cuyo valor constante es de c u.m.?

En este caso, en lugar de despejar la cuota c en la Ecuación 6, basta despejar el valor de N:

$$(1+r)^N P_0 - \frac{c}{r}\left((1+r)^N - 1\right) = 0 \Rightarrow N = \frac{\ln\left(\dfrac{c}{c-P_0 r}\right)}{\ln(1+r)}$$

Ecuación 7. Plazo para cancelar el préstamo bajo el r.c.i.c.d. y tipo de interés r pagando una cuota fija de c u.m.

3.2 Estudio a través del modelo continuo

Ahora vamos a analizar el problema asumiendo que se aplica un régimen de capitalización continuo, lo que significa que la capitalización de intereses tiene lugar en todo instante. Para plantear el modelo aprovecharemos el mismo argumento que en el caso discreto sobre un período de longitud $\Delta t > 0$, que posteriormente haremos tender a cero tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ (lo que significa que la capitalización de intereses y el pago de la cuota se realiza de forma instantánea).

Obsérvese, al igual que se planteó en la Ecuación 4, donde en el período $\left[n-1, n\right]$ se llegó a la relación: $P(n)=P(n-1)-(c-P(n-1)r)$, que si ahora consideramos el intervalo $\left[t, t+\Delta t\right]$, obtendremos: $P(t+\Delta t)=P(t)-(c-P(t)r)\Delta t$. A diferencia del razonamiento discreto, ahora el período $\left[t, t+\Delta t\right]$ no es unitario sino de longitud Δt, por ello ahora el capital amortizado en el período $\left[t, t+\Delta t\right]$ es la diferencia entre la cuota referida a ese período ($c\Delta t$) menos los intereses pagados en dicho período que son $P(t)r\Delta t$, resultando: $c\Delta t - P(t)r\Delta t = (c-P(t)r)\Delta t$. Obsérvese que estamos implícitamente realizando la identificación: $n \mapsto t$ y $n+1 \mapsto t+\Delta t$ (es decir: $1 \mapsto \Delta t$). Ahora basta tomar límites cuando $\Delta t \to 0$ para establecer la edo del modelo continuo (véase la Ecuación 6 y recuérdese la definición de derivada de una función).

$$\mathrm{P(t+\Delta t)=P(t)\text{-}(c\text{-}}P(t)r)\Delta \mathrm{t} \Rightarrow \frac{\mathrm{P(t+\Delta t)}-P(t)}{\Delta \mathrm{t}} = rP(t)-c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathrm{P(t+\Delta t)}-P(t)}{\Delta \mathrm{t}} = \lim_{\Delta t\to 0} rP(t)-c \Rightarrow P'(t)=rP(t)-c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'(t) &=& rP(t)-c \\ P(0) &=& P_0 \end{cases}$$

Ecuación 6. Modelización del problema continuo mediante una edo.

Aplicando la fórmula dada en la Ecuación 2 (previa identificación de los coeficientes y variables: $a=r\neq 0$; b=-c; $x_0=P_0$; $x(t)=P(t)$ *nos permite obtener la solución del modelo dado en la Ecuación 6 (véase Ecuación 7).*

$$P^C(t)=e^{rt}\left(P_0+\frac{-c}{r}\right)-\frac{-c}{r}=e^{rt}P_0-\frac{c}{r}\left(e^{rt}-1\right).$$

Ecuación 7. Dinámica explícita del capital pendiente de amortización en el instante t bajo el r.c.i.c.c.

Por analogía al estudio realizado para el caso discreto, respondemos ahora a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál debe ser el valor de la cuota fija c que se debe pagar en cada instante para que el préstamo sea cancelado en el intervalo $\left[0,T\right]$ bajo un r.c.i.c.c.?
- ¿Cuál será el plazo en que se cancelará un préstamo de principal P_0, tipo de interés r bajo el r.c.i.c.c. si se desea pagar una cuota fija cuyo valor constante en todo instante es de c u.m.?

Como en el caso discreto, obsérvese que la condición para que se cancele el préstamo es que $P^C(T)=0$, lo que impuesto sobre la Ecuación 7, nos permite despejar el valor de c buscado (véase la Ecuación 8).

$$e^{rT}P_0-\frac{c}{r}\left(e^{rT}-1\right)=0 \Rightarrow c=\frac{P_0 r e^{rT}}{e^{rT}-1}$$

Ecuación 8. Cuota para cancelar el préstamo en intervalo $\left[0,T\right]$ bajo el r.c.i.c.c.

Para responder a la segunda cuestión, en lugar de despejar la cuota c en la Ecuación 7, hay que despejar el valor de T (véase la Ecuación 9).

$$e^{rT}P_0-\frac{c}{r}\left(e^{rT}-1\right)=0 \Rightarrow T=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{c}{c-P_0 r}\right)$$

Ecuación 9. Plazo para cancelar el préstamo bajo el r.c.i.c.c. y tipo de interés r pagando en todo instante una cuota fija de c u.m .

En la Tabla 2 recopilamos, a modo de comparación, los valores obtenidos para las distintas magnitudes analizadas en ambos tipos de regímenes de capitalización de intereses.

Tipo de régimen	***r.c.i.c.d.***	***r.c.i.c.c.***
p.v.i. asociado	$\begin{cases} P(n+1) = (1+r)P(n)-c \\ P(0) = P_0 \end{cases}$	$\begin{cases} P'(t) = rP(t)-c \\ P(0) = P_0 \end{cases}$
Principal pendiente después del pago n o t	$P^D(n)=(1+r)^n P_0-\frac{c}{r}\left((1+r)^n-1\right)$	$P^C(t)=e^{rt}P_0-\frac{c}{r}\left(e^{rt}-1\right)$
Cuota fija para cancelar el préstamo	$c=\frac{rP_0(1+r)^N}{(1+r)^N-1}$	$c=\frac{P_0 r e^{rT}}{e^{rT}-1}$
Plazo para cancelar el préstamo	$N=\frac{\ln\left(\frac{c}{c-P_0 r}\right)}{\ln(1+r)}$	$T=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{c}{c-P_0 r}\right)$

Tabla 2. Comparación entre las magnitudes claves relativas a un préstamo mediante los dos tipos de regímenes de capitalización a interés compuesto discreto (r.c.i.c.d.) y continuo (r.c.i.c.c.).

4 Relacionando ambos enfoques

Con el objeto de relacionar ambos enfoques supongamos por comodidad que $T=N$, N siendo un valor entero positivo en el contexto expuesto hasta ahora. Dividamos cada uno de los N períodos de longitud unitaria en m subperíodos de longitud $1/m=\Delta t$. Tenemos así definidos $m\times N$ subintervalos. Consideremos uno cualquiera de estos subperíodos que denotaremos por n (siendo n un valor entre $0,1,2,\ldots,m\times N$). Entonces considerando que el tipo de interés r estaba referido al período de longitud unitario, a cada subperíodo le corresponderá como tipo de interés su parte proporcional, es decir, r/m (o equivalentemente: $r\Delta t$). Si ahora replicamos el razonamiento mostrado en el caso discreto para cada subintervalo de longitud $1/m=\Delta t$, es inmediato ver que el capital pendiente de pago después de pagar la cuota $n=t$ estará dado por la Ecuación 10.

$$P^{D,m}(t)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\times t}P_0-\frac{c}{r}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\times t}-1\right)$$

Ecuación 10. Dinámica explícita del capital pendiente de amortización en el instante $n=t$ bajo el r.c.i.c.d. *y m subperiodos en cada uno de los períodos.*

Para relacionar el enfoque discreto con el continuo, todo lo que tenemos que hacer ahora es exigir que $m \to \infty$ (lo que equivale, según la relación $1/m = \Delta t$, a que $\Delta t \to 0$, que es exactamente lo que hemos impuesto anteriormente cuando hemos planteado la e.d.o. en el modelo continuo). Considerando el resultado mostrado en la Ecuación 3, esto nos conduce a la relación buscada entre el modelo discreto y el continuo (véase la Ecuación 11).

$$\lim_{m\to\infty} P^{D,m}(t) = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right)^t P_0 - \frac{c}{r}\left(\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right)^t - 1\right)$$

$$= \left(e^r\right)^t P_0 - \frac{c}{r}\left(\left(e^r\right)^t - 1\right) = e^{rt}P_0 - \frac{c}{r}\left(e^{rt}-1\right) = P^C(t)$$

Ecuación 11. Relación entre la dinámica explícita del capital pendiente de amortización bajo los dos regímenes de capitalización de intereses.

5 Cierre

En este trabajo se ha mostrado a través de un ejemplo importante de la Economía (la amortización de un préstamo bajo los dos tipos de regímenes de capitalización compuesta de intereses, el discreto y el continuo), la relación entre que existe entre modelizar un problema según un enfoque discreto o según un enfoque continuo. El análisis de esta relación se ha buscado tanto a través del propio planteamiento del problema como de las respuestas que proporcionan ambos enfoques. Más allá del problema específico para desarrollar nuestra presentación, nos interesa que el lector reflexione sobre la dualidad discreto-continuo que numerosas veces podemos adoptar para resolver un problema, pero que en cualquier caso, se hace necesario replantearse un estudio comparativo de los respuestas que arrojan estos dos enfoques, aunque desde luego, el contexto del problema nos debería de indicar cuál es el que resulta más conveniente para resolverlo.

6 Bibliografía

[1] Chiang, A.: “Métodos Fundamentales de Economía Matemática”, Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en la economía.