UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Una clase inicial de motivación para el Álgebra Matricial

Apellidos, nombre	Benítez López, Julio[1] (jbenitez@upv.es) Carpitella, Silvia[2] (carpitella@utia.cas.cz) Izquierdo Sebastián, Joaquín[1] (jizquier@upv.es)
Departamento	[1] Departamento de Matemática Aplicada [2] Department of Decision-Making Theory
Centro	[1] Universitat Politècnica de València [2] Institute of Information Theory and Automation, Praga

1 Resumen

La motivación es clave en la educación universitaria. Especialmente en primeros cursos de Escuelas Técnicas, en algunas asignaturas básicas, resulta difícil captar la atención del alumnado y crear una motivación suficiente por una asignatura que, en principio, puede parecer alejada de los aspectos prácticos que espera en una carrera técnica. Es, pues, imprescindible encontrar mecanismos de motivación eficientes. Puede pensarse que en Álgebra Matricial tal empeño es complicado, pues el bagaje formativo del alumnado no permite encontrar problemas de relevancia que: i) le puedan interesar y ii) utilicen técnicas algebraicas sencillas. Este artículo presenta el contenido de una posible primera clase para un curso de Álgebra Matricial, perfectamente apta en diversas Escuelas y Facultades universitarias. Aquí, se ha aplicado en la asignatura Matemáticas II del doble grado Telecomunicación+ADE. El problema, centrado en la toma de decisiones, es conceptualmente asequible para los alumnos. No obstante, en el desarrollo, se muestra la necesidad de determinadas herramientas avanzadas (que forman parte esencial en la asignatura), lo que abre el apetito hacia tales herramientas.

2 Introducción

La toma de decisiones impregna la actividad humana. Con frecuencia, la decisión no es simple porque involucra elementos cualitativos, subjetivos, intangibles. Tomar decisiones acertadas y efectivas es crucial en los procesos de optimización del mundo real que involucran variables difíciles de cuantificar. En este caso, la toma de decisiones es comúnmente impulsada por la experiencia personal de un experto o, a menudo, por la participación consensuada de un grupo de tomadores de decisiones. En diversos métodos de decisión multi-criterio, los elementos protagonistas de tales procesos son comparados dos a dos, y tales comparaciones se utilizan para construir una matriz de comparaciones, de cuyo estudio emerge la decisión. En AHP (Analytic Hierarchy Process) (Benítez e Izquierdo, 2019), por ejemplo, las prioridades se obtienen vía el vector propio de Perron de tales matrices. En este artículo se utiliza el caso del Jefe de Personal de una empresa que debe seleccionar uno entre varios candidatos a un determinado puesto de trabajo. La utilización de AHP – técnica muy simple, que el alumno entiende sin dificultad –, conduce de manera natural hacia el problema de valor y vector propio, que es central en el Álgebra Matricial. El escenario, dada su sencillez, se puede presentar utilizando casi exclusivamente conceptos que el alumno conoce de cursos anteriores. Por supuesto, los conceptos nuevos aparecen como una necesidad, y se comenta que, justamente una parte la asignatura está dedicada a ellos.

3 Objetivos

Tras concluir con la lectura de este documento, serás capaz de:

- Explicar los elementos básicos de la comparación dos a dos en ciertos problemas de decisión multicriterio.
- Diseñar, elaborar y resolver problemas de decisión multicriterio semejantes.
- Obtener los vectores de prioridades para los distintos elementos (criterios o alternativas) que aparecen en un problema de decisión multicriterio.

4 Desarrollo

Para leer este artículo deberás tener nociones de:

Requisitos
1. Álgebra matricial elemental (matrices y operaciones básicas con matrices).
2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
3. Operaciones simples en algún entorno computacional.

Tabla 1. Requisitos básicos

UN PROBLEMA DE TOMA DE DECISIONES

El jefe de personal de una empresa, que denominaremos DM (por *decision maker*), tiene que abordar el siguiente problema de toma de decisiones (*decision-making*).

- Tiene como **objetivo** **cubrir un puesto de trabajo vacante**.
- Para ello tiene tres **alternativas**, correspondiente a tres candidatos, **A_1, A_2** y **A_3**, presentados.

¿Cómo puede tomar la decisión? Obviamente, debe considerar algún **criterio** para valorar a los candidatos (típicamente, asignándoles unos pesos que los ponderen y permitan establecer un ranking con ellos).

Presentamos varios problemas, simplificaciones adecuadas para este artículo.

Problema 1

Supongamos que el DM solo considera un criterio: la **edad**, $e(\cdot)$. El DM prefiere una edad menor, ya que busca una vida laboral larga en el seleccionado.

Se ha pedido a los candidatos un CV del que en este primer problema consideramos solo su edad. A la vista de los CVs, se tiene

$$e_1 \coloneqq e(\mathrm{A}_1) = 36, \;\; e_2 \coloneqq e(\mathrm{A}_2) = 28, \;\; e_3 \coloneqq e(\mathrm{A}_3) \; = \; 44.$$

La solución es clara: el elegido será A_2, ya que es el más joven y, por tanto, tiene, *a priori*, una mayor trayectoria laboral.

Pero supóngase que se quiere ponderar a los candidatos basados en la duración de la vida laboral esperada, $vl(\cdot)$, de cada uno. En este caso, hay que evaluar el número de años que les restan para la jubilación. Los datos a tener en cuenta, supuesta la jubilación a los 65 años, son los siguientes:

$$vl(1) = 65 - 36 = 29; \quad vl(2) = 65 - 28 = 37; \quad vl(3) = 65 - 44 = 21.$$

En esta situación, en que hay que maximizar la duración de la vida laboral, el elegido, obviamente, sigue siendo A_2.

Para establecer, tal como se pide, una ponderación, se puede dividir cada uno de los valores por la suma de los tres:

$$w_i = \frac{vl(i)}{\sum_{i=1}^{3} vl(i)} = \frac{vl(i)}{87}.$$

(La letra *w* es por *weight*). Así, se obtienen los pesos

$$w_1 = \frac{29}{87} = 0.333,\ \ w_2 = \frac{37}{87} = 0.426,\ \ w_3 = \frac{21}{87} = 0.241.$$

Observa que la suma de los tres pesos es justamente 1, y se dice que los pesos están normalizados a suma 1. A veces, esto se expresa en %, es decir, 33.3%, 42.6% y 24.1%.

Al analizar los pesos, el mayor en términos relativos, 0.426, apunta, de nuevo, a A_2.

El cálculo de estos pesos tiene su importancia porque quizá el problema real tenga más componentes y convenga tener bien ponderada la influencia de este criterio.

Puede argüirse que para realizar esta decisión no hacen falta tanto cálculo ni tanta nomenclatura. Claro. Pero consideremos los siguientes problemas.

Problema 2

Supongamos que, además de la edad, el DM quiere considerar la **titulación**, $t(\cdot)$, de cada uno de los candidatos. Esto constituye un nuevo criterio, que quizá el DM quiera tener en cuenta simultáneamente con la edad. Centrémonos ahora en la titulación.

Examinando, de nuevo, el CV de cada candidato se obtiene la siguiente información:

$$t(\mathrm{A}_1) = \mathrm{T{+}A}\,, t(\mathrm{A}_2) = \mathrm{I{+}A}\,, t(\mathrm{A}_3) = \mathrm{T},$$

donde $\mathrm{T{+}A}$ = Teleco + ADE; $\mathrm{I{+}A}$ = Informática + ADE; T = Teleco.

Observa que ahora no hay ninguna escala numérica (directa) que permita valorar estas titulaciones. Sin embargo, el DM tiene sus **propias opiniones** (subjetivas, intangibles) y las quiere aplicar. Sus opiniones, comparando dos a dos, son, por ejemplo, las siguientes:

- Prefiere T+A, digamos, el triple que I+A, y cuatro veces más que T;
- Prefiere I+A el doble que T.

Obviamente, las preferencias inversas se corresponden con las inversas de las indicadas (por ejemplo, prefiere T la mitad que $\mathrm{I{+}A}$, de acuerdo al segundo punto anterior).

Nos preguntamos cómo elegir candidato considerando este criterio, es decir, la titulación. O, mejor, cómo obtener una ponderación de los candidatos para este criterio que, quizá pueda combinarse con la ponderación para el criterio anterior (la edad) y otros criterios que el DM quiera considerar.

Utilizando la comparación dos a dos de los puntos anteriores, el DM puede organizar tales comparaciones y construir la siguiente tabla para el criterio **titulación**:

TITUL	A_1	A_2	A_3
A_1	1	3	4
A_2	1/3	1	2
A_3	1/4	1/2	1

Ejercicio 1: Comprueba que los valores de esta matriz se corresponden con los valores que expresan las opiniones del DM. ¿Puedes explicar los elementos igual a 1 de la diagonal principal? Observa cómo los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son inversos entre sí.

Los términos en rojo son bien conocidos. Vamos a denotar por A la matriz anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ {}^{1}/_{3} & 1 & 2 \\ {}^{1}/_{4} & {}^{1}/_{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a denotar por $\mathbf{w} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3)^T$ el vector cuyas tres componentes son los pesos buscados. Seguro que también conoces la notación $(\quad)^T$ que sirve para trasponer vectores y matrices. Por lo tanto, fíjate que $\mathbf{w}$ es un vector columna**.** Se puede demostrar que el vector de pesos (también llamado de prioridades), $\mathbf{w}$, se obtiene resolviendo el sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, siendo λ un cierto número real,

$$A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}.$$

Ejercicio 2. Escribe este sistema explícitamente.

Utilizando la matriz identidad, I, el sistema se puede expresar como

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Ejercicio 3. Escribe, también, este sistema explícitamente.

Se trata de un sistema homogéneo que tiene infinitas soluciones solo para ciertos valores del parámetro λ (para los demás valores de λ, el sistema solamente tiene la solución trivial). NOTA (para el alumno): Esto es algo elemental, que has estudiado.

¿Cómo se halla el vector $\mathbf{w}$? (No te asustes por los términos en rojo que vas a leer a continuación, que no tienen por qué sonarte).

1. Se busca el valor de λ de mayor módulo, que denotamos por $\lambda_{máx}$, para el que este sistema tiene solución no trivial; a tales valores de λ se los denomina valores propios de la matriz A, y a $\lambda_{máx}$ se lo denomina valor propio principal o valor propio de Perron de la matriz A; (Oskar Perron (1880-1975), matemático alemán).
2. $\mathbf{w}$ es una solución normalizada a 1 (suma de sus componentes igual a 1) del sistema de ecuaciones anterior para $\lambda_{máx}$, denominado vector propio principal o vector propio de Perron de A asociado a $\lambda_{máx}$.

Ejercicio 4. Resuelve el problema anterior (de selectividad, excepto por algún cálculo numérico, que se menciona). Nota: si no consigues resolver todo no te preocupes que esto lo estudiaremos pronto. Y si no conoces las palabras en rojo (varias sí te son familiares), tampoco te preocupes. Todo esto se ve con detalle en Matemáticas II.

Esquema de la solución del Ejercicio 4.

Con lo que sabes hasta ahora, hay que hacer lo siguiente. ¡Atrévete!

1. Hallar el valor de $\lambda_{máx}$: recuerda que los valores para los que el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones son los valores que anulan el determinante de la matriz de los coeficientes, $A - \lambda I$, es decir, hay que empezar calculando
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$
Esto es algo que seguro sabes hacer. (Resolver un determinante es una de las cosas menos interesantes que se enseñan en los cursos preuniversitarios).
2. Has tenido que obtener un polinomio de grado 3 en λ, del que hay que encontrar sus raíces y elegir la mayor. Se obtiene $\lambda_{máx} = 3.018$. (Para este punto, por ahora, tendrás que utilizar tus conocimientos de Cálculo; seguro que has hecho alguna práctica de raíces de polinomios).
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones para este valor, $\lambda_{máx} = 3.018$, y se considera la solución normalizada a uno. (¡No dejes de hacerlo!, esto te lo he contado antes). Se obtiene el vector $\mathbf{w}$**,** que denotamos por $\mathbf{w}^{\mathbf{Tit}} = (0.625 \quad 0.238 \quad 0.137)^T$, que da, en tanto por uno, la prioridad de los tres candidatos, en términos del criterio de titulación. (Este apartado lo puedes hacer a mano).

Nota: En Matemáticas II se ve otra forma de resolver el problema completo.

Ahora que has acabado con los cálculos vamos al grano. Mira el vector $\mathbf{w}^{\mathbf{Tit}}$ obtenido. Observa que el DM, si utiliza solo este criterio, elegiría claramente al primer candidato, A_1, que es el que obtiene mayor peso: 0.625 = primera componente de $\mathbf{w}^{\mathbf{Tit}}$.

<u>Problema 3</u>

Para dar al problema de toma de decisiones una mayor generalidad (sin llegar a constituir una aplicación real, aunque no dista mucho de algunas de las aplicaciones de AHP), vamos a suponer que el DM, además de los criterios ya vistos

- C_1 = vida laboral, y
- C_2 = titulación,

utiliza otros dos criterios:

- C_3 = idiomas, y
- C_4 = entrevista.

Estos dos últimos criterios se corresponden con la impresión (de nuevo subjetiva, intangible) del DM tras valorar el conocimiento de idiomas de los candidatos, y también entrevistar a los mismos.

Una palabra clave en la metodología es <u>Jerarquía</u>. De hecho, es la parte fundamental del problema porque ayuda a organizarlo y entenderlo propiamente. Para este sencillo problema la jerarquía se representa en la figura siguiente:

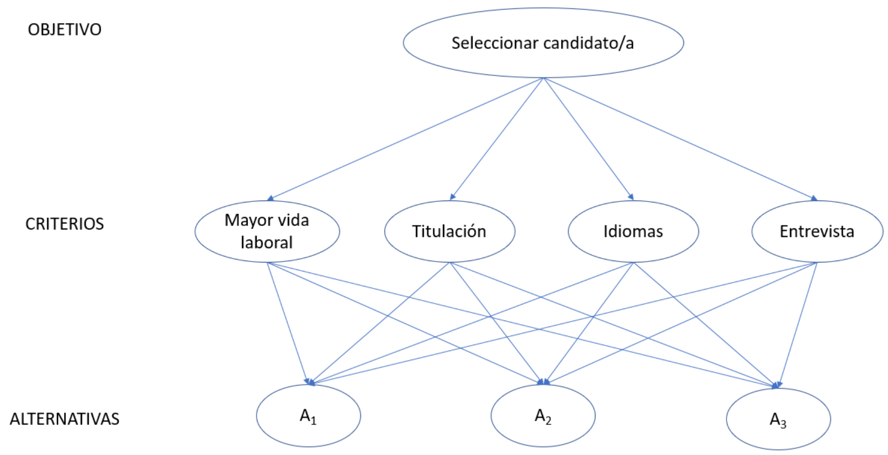

Figura. Jerarquía en términos de objetivo, criterios y alternativas

Supongamos que lo relevante (para esta simulación) de los CVs de los candidatos es:

Criterio\Candidato	**A_1**	**A_2**	**A_3**
C_1 – *Edad*	36	28	44
C_2 – *Titulación*	T+A (Teleco+ADE)	I+A (Informática+ADE)	T (Teleco)
C_3 – *Idiomas*	En+De (inglés+alemán)	En (inglés)	Fr (francés)
C_4 – *Entrevista*	B	C+	A

Nota: las letras A, B y C de la entrevista corresponden a la opinión del DM, en el rango A a D, en orden decreciente con variaciones menores dadas por los signos + y -.

Realicemos para los cuatro criterios el mismo trabajo realizado con el criterio de la titulación. Procedemos por orden.

<u>Para el C_1 = vida laboral</u>, en vez de utilizar los pesos obtenidos en el problema 1, para abrir una nueva perspectiva, que se presenta a veces, suponemos que el DM considera no estrictamente relevante la edad exacta, sino el hecho de que el candidato tenga

- menos de 30 años,
- entre 30 y 40 años, o
- más de 40 años.

Y para poder comparar, utiliza la siguiente consideración (personal, subjetiva):

- Prefiere un candidato menor de 30 años el doble que uno entre 30 y 40, y cuatro veces más que uno de más de 40;
- Prefiere un candidato de entre 30 y 40 tres veces más que uno de más de 40.

Obviamente, las preferencias inversas están claras. Entonces, si el DM realiza una comparación dos a dos y organiza matricialmente tales comparaciones puede construir la siguiente matriz, de muy fácil interpretación:

VIDALAB	A_1	A_2	A_3
A_1	1	1/2	3
A_2	2	1	4
A_3	1/3	1/4	1

Para esta matriz se obtienen las prioridades $\mathbf{w}^{\mathbf{VL}} = (0.320 \quad 0.558 \quad 0.122)^T$.

Ejercicio 5. Interpreta los valores de la matriz teniendo en cuenta las preferencias del DM. Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente y resuélvelo para obtener $\mathbf{w}^{\mathbf{VL}}$.

<u>Para el C_2 = titulación</u>, recuerda que obtuvimos $\mathbf{w}^{\mathbf{Tit}} = (0.625 \quad 0.238 \quad 0.137)^T$.

<u>Para el C_3 = idiomas</u>, el DM examina los CVs y obtiene que

- A1 domina inglés y alemán (En+De);
- A2 domina inglés (En); y
- A3 domina francés (Fr).

Según su criterio personal, la matriz de comparación dos a dos es:

IDIOM	A_1	A_2	A_3
A_1	1	3	5
A_2	1/3	1	4
A_3	1/5	1/4	1

De alguna manera, prefiere (En+De) el triple que (En) y cinco veces más que (Fr); además, prefiere solo (En) cuatro veces más que solo (Fr).

Para esta matriz se obtienen las prioridades $\mathbf{w}^{\mathbf{Idi}} = (0.627 \quad 0.280 \quad 0.093)^T$.

Ejercicio 6. ¿Qué significado asocias a los valores 3, 5 y 4 de la matriz anterior? Escribe el sistema y resuélvelo para hallar $\mathbf{w}^{\mathbf{Idi}}$.

<u>Para el C_4 = entrevista</u>, se procede de manera análoga teniendo en cuenta las opiniones, de nuevo subjetivas e intangibles del DM, correspondientes a su opinión, que se pueden compendiar en la siguiente matriz de comparación dos a dos:

ENTREV	A_1	A_2	A_3
A_1	1	3	1/2
A_2	1/3	1	1/5
A_3	2	5	1

Esta matriz se obtuvo porque, tras las entrevistas, el DM prefirió A_1 el triple que A_2, pero la mitad que A_3; y prefirió A_3 el doble que A_1.

Para esta matriz se obtienen las prioridades $\mathbf{w}^{\mathbf{Ent}} = (0.309 \quad 0.109 \quad 0.582)^T$, que parecen primar al tercer candidato, el de mayor edad (quizá por mostrar mayor experiencia).

Ejercicio 7. Escribe el sistema correspondiente y resuélvelo.

Resumiendo, tenemos cuatro vectores, uno por criterio, que contienen los pesos de las alternativas respecto de cada criterio. Pongamos estos vectores en una matriz de tamaño 3×4, cuyas columnas son los vectores de pesos obtenidos:

$$W = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{w}^{\mathbf{VL}} & \mathbf{w}^{\mathbf{Tit}} & \mathbf{w}^{\mathbf{Idi}} & \mathbf{w}^{\mathbf{Ent}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.320 & 0.625 & 0.627 & 0.309 \\ 0.558 & 0.280 & 0.280 & 0.109 \\ 0.122 & 0.093 & 0.093 & 0.582 \end{pmatrix}.$$

De esta matriz se puede ver que si el DM eligiese en función de solo el primer criterio (vida laboral), elegiría al A_2 (el más joven) pues en la primera columna tiene el peso mayor, 0.558. Sin embargo, elegiría al A_1 si atendiese al C_2 = titulación y al C_3 = Idiomas, pues los mayores valores en las columnas 2 y 3 están en la primera posición. Finalmente, si se guiase solo por la entrevista (criterio C_4), elegiría al candidato A_3, que tiene el mayor valor en la cuarta columna.

Para tener en cuenta todos los criterios, quizá te plantees hacer medias. Se obtiene: para A_1, $0.470 = \frac{1}{4}(0.320 + 0.625 + 0.627 + 0.309)$; para A_2, 0.297; y para A_3, 0.233.

Pero, ¿cuentan por igual los cuatro criterios para el DM? En general, no será así: quizá no influya lo mismo el conocimiento de idiomas que la titulación, por ejemplo; o la edad (vida laboral futura) que la experiencia (entrevista).

Ponderación (distinta) de los criterios. Para concluir con la toma de decisiones, es necesario, saber en qué medida unos criterios son más importantes que otros para el DM. Es decir, es necesario, tener el peso que el DM va a dar a cada criterio en la decisión (y no precisamente $\frac{1}{4} = 0.25$, a todos por igual). Supongamos que el DM:

- opina que la entrevista es 3 veces más importante que la vida laboral, 2 veces más importante que la titulación, y 4 veces más importante que los idiomas;
- valora la titulación el doble que la vida laboral, y 3 veces más que los idiomas; y
- da a la edad 4 veces más importancia que al dominio de idiomas.

Estas opiniones se traducen en la siguiente matriz de comparación dos a dos de criterios:

CRITERIOS	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	1/2	4	1/3
C_2	2	1	3	1/2
C_3	1/4	1/3	1	1/4
C_4	3	2	4	1

Y, procediendo como en los casos anteriores (utilizando un ordenador), pero ahora con otro tamaño de matriz, se obtiene el vector de pesos de los criterios:

$$\mathbf{w}^{\mathbf{Crit}} = (0.193 \quad 0.271 \quad 0.080 \quad 0.456)^T.$$

Ejercicio 8. Explica los valores de la matriz de criterios, escribe el sistema y resuélvelo.

$\mathbf{w}^{\mathbf{Crit}}$ muestra que el DM pondera mucho más la entrevista (4ª componente, 0.456) que el resto de criterios; le sigue la titulación con un peso relativo de 0.271. En esta simulación, el dominio de idiomas es lo menos valorado por el DM, pues la 3ª componente tiene el valor más bajo, correspondiente al peso atribuido al criterio tercero.

El proceso de agregación final, utilizando esos pesos (en lugar de 0.25 para todos igual),

$$0.193\mathbf{w}^{\mathbf{VL}} + 0.271\mathbf{w}^{\mathbf{Tit}} + 0.080\mathbf{w}^{\mathbf{Idi}} + 0.456\mathbf{w}^{\mathbf{Ent}},$$

se obtiene de manera compacta al multiplicar la matriz W por el vector $\mathbf{w}^{\mathbf{Crit}}$:

$$W \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{Crit}} = \begin{pmatrix} 0.320 & 0.625 & 0.627 & 0.309 \\ 0.558 & 0.280 & 0.280 & 0.109 \\ 0.122 & 0.093 & 0.093 & 0.582 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.193 \\ 0.271 \\ 0.080 \\ 0.456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.422} \\ 0.245 \\ 0.333 \end{pmatrix}.$$

Este vector final de prioridades agregadas proporciona el ranking u orden de preferencia final de los candidatos, siendo el A_1 el mejor posicionado globalmente, ya que la primera componente, **0.422**, es mayor que las correspondientes a los otros candidatos. Si el A_1 fallase, el DM tendría ya preparado el siguiente de la lista, y correspondería al A_3 que tiene una ponderación de 0.333, que es mayor que la del A_2.

Discusión y trabajo a desarrollar

En esta sección del documento hemos ido enfatizando en rojo, ciertas palabras clave que constituyen alguno de los elementos de la asignatura Matemáticas II, para la que el contenido del artículo se ha utilizado como Lección 0, motivadora de la asignatura. Utilizando un problema sencillo de entender (una toma de decisiones) y de implementar en un entorno multicriterio sencillo (el AHP), se han recordado elementos que el alumno ya conoce de cursos anteriores, al tiempo que se han introducido elementos nuevos que aparecen entre los contenidos de la asignatura a estudiar.

El trabajo a desarrollar está contenido en los diversos ejercicios propuestos en el artículo. En los lugares adecuados se han incluido notas para guiar convenientemente al alumno.

5 Cierre

En este artículo se presenta una clase inicial para un curso de Álgebra Matricial que permite atraer el interés del alumno, motivándole para la asignatura. A través de un problema sencillo, una toma de decisión utilizando AHP, la clase adelanta herramientas basadas en técnicas que se estudian en la asignatura, algunas conocidas por el alumno de cursos anteriores, lo que también permite dar cierta continuidad en la vida formativa del alumno. Los ejercicios propuestos constituyen una tarea para el alumno. Con su realización, acaba sumergiéndose mucho más motivado en la asignatura. Esta clase se ha impartido en la asignatura Matemáticas II del doble grado Telecomunicación+ADE de la Universitat Politècnica de València en el curso 2020/2021 con excelentes resultados, como muestra la calidad de las tareas presentadas y el interés despertado.

6 Bibliografía

Benítez, J., Izquierdo, J., Cómo tomar una decisión. Analytic Hierarchy Process: otro uso de las matrices. La Gaceta de la RSME, 22(1), 61-79, 2019.