



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

TRABAJO FINAL DE MÁSTER EN DIRECCIÓN FINANCIERA Y FISCAL

# El modelo estocástico Log-Normal con parámetros variables

---

Aplicación a la modelización del subyacente  
cotizado “Ferrovial”

CURSO 2018-2019

**Autora:**

**Belén Casas Morente**

**Directores:**

**Dr. Juan Carlos Cortés López**

**Dra. Ana Navarro Quiles**

## Contenido

RESUMEN DEL TRABAJO .....	6
OBJETIVOS DEL TRABAJO .....	8
ANTECEDENTES. SITUACIÓN ACTUAL.....	10
1 APROXIMACIÓN AL SISTEMA FINANCIERO .....	13
1.1 Los Mercados Financieros.....	15
1.2 La Bolsa, funcionamiento y características de las bolsas españolas .....	17
1.3 Índices Bursátiles, el IBEX-35 .....	21
1.4 Ferrovial S.A. ....	22
1.4.1 Modelo de Negocio .....	22
1.4.2 Principales riesgos asociados con la actividad de “Ferrovial” .....	25
1.4.3 “Ferrovial” en Bolsa .....	30
Evolución de las acciones .....	31
2 PRELIMINARES ESTOCÁSTICOS .....	34
2.1 Movimiento Browniano o proceso de Wiener .....	35
2.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano o proceso de Wiener .....	37
2.3 El cálculo de $It\hat{o}$ .....	38
3 MODELO ESTOCÁSTICO LOG-NORMAL.....	43
3.1 Motivación del Modelo Log-Normal.....	44
3.2 Solución del Modelo Log-Normal mediante el cálculo de $It\hat{o}$ .....	45
3.3 Modelo Log-Normal con parámetros constantes .....	48
3.4 Modelo Log-Normal con Parámetros Variables .....	50
3.5 Validación del Modelo Log-Normal con parámetros constantes .....	53
3.6 Validación del Modelo Log-Normal con parámetros variables .....	56
4 APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL CON PARÁMETROS VARIABLES.....	59
4.1 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal con parámetros constantes .....	61
4.2 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal de paso variable .....	63
4.3 Validación del Modelo Log-Normal .....	65
4.3.1 Validación del Modelo Log-Normal con parámetros constantes.....	66
4.3.2 Validación del Modelo Log-Normal de paso variable .....	72
4.4 Predicciones del Modelo Log-Normal y de paso variable .....	78
5 CONCLUSIONES FINALES .....	83
BIBLIOGRAFÍA.....	85



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1.1 Estructura actual de los Mercados Financieros.....	16
Figura 4.2.1 Obtención de las log-cotizaciones diarias de parámetros variables.....	63
Figura 4.2.2. Obtención de la estimación del parámetro $\hat{R}_n$ de parámetros variables.....	63
Figura 4.2.3 Obtención de la estimación del parámetro $\hat{V}_n$ de parámetros variables.....	64
Figura 4.3.1.1 Cálculo medidas de bondad de ajuste RSME y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros constantes.....	67
Figura 4.3.2.1 Obtención de la estimación puntual de la log-cotización $\hat{Y}_{n+1}$ en el modelo de parámetros variables .....	72
Figura 4.3.2.2 Obtención del intervalo de confianza de la predicción puntual en el modelo de parámetros variables.....	73
Figura 4.3.2.3 Obtención del MAPE y el RSME en el Modelo Log-Normal con parámetros variables.....	76
Figura 4.4.1 Cálculo de las predicciones mediante el Modelo Log-Normal con parámetros variables.....	79

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1.4.1 Evolución cotizaciones “Ferrovial” 06.05.1999-31.12.18.....	31
Gráfico 1.4.2 Gráfico de velas “Ferrovial” .....	32
Gráfico 4.1.1 Evolución de las cotizaciones de la acción “Ferrovial” .....	59
Gráfico 4.3.1.1 MAPE/ RSME de parámetros constantes.....	68
Gráfico 4.3.1.2 IC (95%) para la acción de “Ferrovial “en el modelo de parámetros constantes.....	71
Gráfico 4.3.2.1 Evolución de las log-cotizaciones diarias, las medias y los intervalos de confianza en el modelo de parámetros variables .....	74
Gráfico 4.3.2.2 Evolución de las log-cotizaciones diarias, las medias y los intervalos de confianza para una muestra de 41 datos en el modelo de parámetros variables .....	76
Gráfico 4.3.2.3. Evolución del MAPE con parámetros variables.....	66

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.4.1 Derivados financieros a valor razonable .....	26
Tabla 1.4.2 Activos financieros expuestos al riesgo de crédito .....	27
Tabla 2.3.1 Tipos de integrales con funciones deterministas y procesos estocásticos .....	38
Tabla 4.1 Cotizaciones acción "Ferrovial" período seleccionado 1-26 de noviembre de 2018..60	
Tabla 4.1.1 Log-cotizaciones durante el período objeto de modelización en el Modelo Log-Normal con parámetros constantes.....	61
Tabla 4.1.2 Media y varianza de los Log retornos de parámetros constantes.....	62
Tabla 4.3.1.1 Cálculo de la media y varianza de la acción de "Ferrovial" con parámetros constantes .....	66
Tabla 4.3.1.2 Cálculo de los intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza en el modelo de parámetros constantes.....	70
Tabla 4.3.2.1 Resultados MAPE Y RSME periodo seleccionado 1-26 de noviembre de 2018 en el modelo de parámetros variables.....	77
Tabla 4.4.1 Cálculo de predicciones puntuales y por IC de la acción "Ferrovial" mediante el Modelo Log-Normal de parámetros constantes.....	78
Tabla 4.4.2 Cálculo de predicciones puntuales y por IC de la acción "Ferrovial" mediante el Modelo Log-Normal con parámetros variables.....	79
Tabla 4.4.3 Cálculo del error relativo (en porcentaje).....	80

# RESUMEN DEL TRABAJO

En el presente Trabajo Final de Master se estudiará el Modelo Estocástico Log-Normal, basado en un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano Geométrico. En primer lugar, se explicará el Modelo Log-Normal con parámetros constantes para, con posterioridad, presentar un modelo al que llamaremos Modelo Log-Normal con parámetros variables que permitirá mejorar las predicciones. Ambos modelos se aplicarán para una acción de la Compañía Ferrovial en un periodo temporal de 231 días que comprende los valores que la acción tomo desde el 2 de enero de 2018 hasta el 26 de noviembre de 2018, ambos inclusive.

Se ha considerado aconsejable utilizar un modelo estocástico ya que el valor de una acción depende, no solo del valor de una empresa, sino de muchos otros factores macroeconómicos como los tipos de interés, la inflación, las expectativas, la inestabilidad política o la situación económica. Es por todo esto, que el valor de la acción responde más con una variable aleatoria que determinista y esto motiva a considerar la trayectoria temporal del valor de una acción como un proceso estocástico.

Previamente a desarrollar el Modelo Log-Normal, se ha explicado el movimiento Browniano ya que es uno de los procesos estocásticos más importantes y de gran utilidad para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo. Posteriormente, se ha introducido el cálculo de Itô, una teoría para la diferenciación e integración de procesos estocásticos que facilita la comprensión

matemática de sucesos aleatorios, siendo el más importante de sus resultados el Lema de Itô.

El siguiente paso ha sido calcular los parámetros primero, para el **Modelo Log-Normal con parámetros constantes** y posteriormente, para el **Modelo Log-Normal con parámetros variables**.

Una vez estimados los parámetros se ha llevado a cabo la validación de ambos modelos, el Modelo Log-Normal con parámetros constantes y variables. Esto se ha realizado mediante las medidas de bondad de ajuste tales como, el **Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)**, la **Raíz del error cuadrático medio (RMSE)** y la construcción de **intervalos de confianza del 95%**.

Finalmente, se muestran a través de gráficos y mediante valores numéricos los cálculos de las estimaciones puntuales y por intervalos de confianza al 95% que construyen las predicciones de ambos modelos para la acción de la compañía Ferrovial. Estas predicciones se realizarán para los días posteriores al periodo seleccionado, concretamente, desde el 27 de noviembre hasta el 3 de diciembre de 2018.



# OBJETIVOS DEL TRABAJO

Esta memoria tiene como objetivo principal el desarrollo del estudio de técnicas cuantitativas a través de un modelo matemático para poder realizar predicciones futuras sobre el valor de un activo financiero. Dichas técnicas se introdujeron en la asignatura Modelización para activos financieros del Master en Dirección Financiera y Fiscal.

El estudio se ha aplicado a un caso práctico con datos reales, en concreto para la estimación del valor futuro de una acción de la compañía Ferrovial, siendo una de las empresas con mayor capitalización bursátil del Ibex 35.

Para ello, se ha utilizado un modelo estocástico de predicción de activos financieros denominado Modelo Log-Normal considerando, en un primer momento los parámetros del Modelo constantes y posteriormente, variables, requiriendo en ambos casos del conocimiento y aplicación del Cálculo Estocástico de Itô.

Los **Objetivos** que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta memoria son:

- Estudiar el movimiento Browniano o proceso de Wiener y aplicar las herramientas estocásticas pertenecientes al Cálculo de Itô necesarias para poder aplicar el Modelo Log-Normal de subyacente financiero.
- Conocer el desarrollo del Modelo Log-Normal con parámetros constantes y parámetros variables y su solución.

- Calibrar los parámetros del modelo Log-Normal a partir de una muestra de datos reales, primero, considerando los parámetros constantes y posteriormente, los parámetros variables.
- Utilizar la calibración anterior para modelizar en, un horizonte temporal adecuado, la acción de la compañía Ferrovial sobre la base de un histórico de dicho subyacente.
- Validar la modelización realizada sobre el activo financiero seleccionado a través del modelo teórico Log-Normal a través de medidas de bondad de ajuste, en ambos modelos, con parámetros constantes y variables.
- Obtener las predicciones probabilísticas (puntuales y por intervalos de confianza) de la acción de la compañía Ferrovial, en el Modelo Log-Normal con parámetros constantes y variables.
- Evaluar los resultados de los modelos aplicados comparando cada una de predicciones resultantes con el correspondiente dato real de la acción.

# ANTECEDENTES. SITUACIÓN ACTUAL

Conocer el valor que pueda tener una acción en Bolsa es muy importante para la economía de un país, ya que interesará que las empresas tengan niveles de cotización altos, así como para los inversores, dado que de ello depende sus beneficios futuros.

El precio de las acciones que cotizan en Bolsa se determina mediante la ley de oferta y demanda, sin embargo, existen diferentes factores que son determinantes para analizar el comportamiento de un valor. Dichos factores son las causas que provocan movimientos en los precios, principalmente, las variables macroeconómicas o el grado de estabilidad económica y política de un país. Otros factores de importancia son, las expectativas de los inversores y del mercado sobre el crecimiento de beneficios, dividendos y resultados de la empresa <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>BBVA: El valor de las acciones:

[https://www.bbva.es/estaticos/mult/Ayudas\\_factores\\_acciones.pdf\\_tcm924-528182.pdf](https://www.bbva.es/estaticos/mult/Ayudas_factores_acciones.pdf_tcm924-528182.pdf)

No obstante, a través del estudio de técnicas cuantitativas se puede modelizar el comportamiento de las acciones en Bolsa con el objetivo de anticiparse a predecir su valor futuro.

Con esta motivación se ha enfocado este trabajo pese a que no es tarea fácil debido a la volatilidad de las acciones y a las distintas variables que influyen en su valor. Es por ello, que los primeros modelos continuos sobre el valor de una acción eran deterministas y la aleatoriedad no se contemplaba. El primer modelo de precios para acciones que contenía en su formulación aleatoriedad fue introducido por Louis Bachelier en 1900<sup>2</sup> en su tesis doctoral, pero no tuvo mucho éxito y no fue recuperado hasta que P. Samuelson<sup>3</sup> en 1965 recuperó el trabajo de Bachelier, el cual le sirvió de base para desarrollarlo y mejorarlo. Desde ese momento, los modelos de tipo estocástico han ido ganando popularidad y actualmente son muchos los modelos que explican la evolución de los precios de los activos financieros.

Los modelos continuos más conocidos son los que están basados en ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô y por ello utilizaremos el Modelo Log-Normal que modeliza la incertidumbre a través de un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener y lo resolveremos a través del Cálculo Estocástico de Itô. La justificación de su uso práctico está basada en el éxito de numerosos estudios empíricos, como los de Lambertson y Lapeyre<sup>4</sup> y Øksendahl<sup>5</sup> y es a su vez, una de las piedras angulares del modelo de Black-Scholes<sup>6</sup> y Merton<sup>7</sup> para poner precio a un tipo de activo financiero llamado opción europea, cuyo valor se basa en el de una acción. Este último modelo fue galardonado en el año 1997 con el Premio Nobel de Economía.

---

<sup>2</sup> BACHELIER, L. (1900): "Théorie de la spéculation". Annales du Science de L'École Normale Supérieure, 17, 21-86.

<sup>3</sup> SAMUELSON, P. (1965): "Rational theory of warrants prices". Industrial Management Review, 13-31

<sup>4</sup> LAMBERTSON, D., LAPEYRE, B. (1996): "Introduction to Stochastic Calculus to Finance". Chapman & Hall/CRC.

<sup>5</sup> ØKSEND AHL, B. (1998): "Stochastic Differential Equations". Springer, Berlin.

<sup>6</sup> BLACK, F., SCHOLE, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of Political Economy 81, 637-659.

<sup>7</sup> MERTON, R. (1976): "Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous", Journal of Financial Economics 4, 125-144.

No obstante, se presentará también una variación del Modelo Log-Normal con el objetivo de mejorar las predicciones puntuales y probabilísticas, diferenciándose en que los parámetros del Modelo serán variables en lugar de constantes.

Para cerrar este capítulo, consideramos que la modelización de activos subyacentes es de gran importancia para todos aquellos que estén interesados en el mundo de las finanzas y es por ello, que el desarrollo en los próximos capítulos, tanto de los fundamentos teóricos como prácticos del Modelo Log-Normal, puede servir de gran utilidad, especialmente a los inversores en Bolsa.

# 1 APROXIMACIÓN AL SISTEMA FINANCIERO

La misión del sistema financiero es servir de enlace entre los ahorradores e inversores, permitiendo así que los recursos fluyan y sea posible la producción de bienes y el crecimiento de la economía. Atendiendo exclusivamente a la definición, parece una tarea “sencilla”, pero si se profundiza un poco más y se entra a definir sus elementos y funcionamiento, se vuelve más complejo.

Son necesarios tres componentes para que el funcionamiento del sistema financiero sea posible, los instrumentos financieros, los intermediarios financieros y los inversores y ahorradores.

Los **instrumentos financieros** son “los títulos emitidos por las unidades económicas de gasto que constituyen un medio para mantener riqueza para quienes lo poseen y un

pasivo para quienes los generan”<sup>8</sup>. En la jerga financiera son más conocidos como **activos financieros**.

Sus funciones son permitir la transferencia de fondos y distribuir el riesgo entre los agentes proporcionalmente. El riesgo en finanzas puede ser asociado en un primer momento, exclusivamente, a la no recuperabilidad del valor completo de la inversión inicialmente realizada, pero en la realidad, existen también otro tipo de riesgos asociados a la inestabilidad de los mercados financieros, o del sector donde se ha realizado la inversión, que se deben tener en cuenta. Los riesgos se clasifican en riesgos de liquidez y de mercado, incluyendo en este último, el de los tipos de interés, el cambiario y el bursátil<sup>9</sup>.

El de **liquidez** se produce cuando una de las partes contractuales tiene activos, pero, no posee la liquidez suficiente con la que asumir sus obligaciones, mientras que en el de **mercado**, puede ser asociado con la fluctuación del tipo de cambio de una moneda frente a otra y a la alta volatilidad de los tipos de interés. El **bursátil**, hace referencia a las pérdidas que pueden sufrir las empresas, los particulares e instituciones, al ser la Bolsa de Valores el medio a través del cual pueden acceder a la financiación y a la inversión de sus ahorros.

Por último, el rendimiento de un activo financiero es la ganancia obtenida por haber realizado un préstamo de recursos. Dicho rendimiento varía en el mismo sentido que el riesgo y en sentido inverso a la liquidez<sup>10</sup>.

Los **intermediarios financieros** son el conjunto de instituciones especializadas en la mediación entre los ahorradores últimos y los prestatarios finales. Se encargan de emitir activos financieros, lo que implica operaciones de pasivo, pero también compran activos como acciones, bonos, obligaciones o letras del Tesoro, lo que supone, sus operaciones de activo. Entre los intermediarios más conocidos se encuentran, las entidades de

---

<sup>8</sup>Calvo Benardino. A, Parejo Gámir. J, Rodríguez Sáiz. L, Cuervo.García. A (2014): Manual del Sistema Financiero Español, vol 25, Ariel, pág. 2-13.

<sup>9</sup> Martínez Álvarez. J., Galvo González, J. (2009): Banca y Mercados Financieros, Tirant lo Blanch, pág 22-23

<sup>10</sup> <https://www.bbva.com/es/finanzas-para-todos-el-riesgo-financiero-y-sus-tipos/>

depósito, las instituciones de inversión colectiva y las instituciones de ahorro contractual<sup>11</sup>.

Este capítulo se centrará, en primer lugar, en mostrar una visión general de los mercados financieros para posteriormente, explicar la Bolsa, su funcionamiento y los índices bursátiles, en especial, el Ibex-35. Por último, se hablará de “Ferrovial”, la compañía objeto de este estudio, describiendo su modelo de negocio, los principales riesgos asociados a su actividad y su presencia en la Bolsa.

## 1.1 Los Mercados Financieros

En los mercados se producen los intercambios de activos financieros, tales como el dinero, las acciones u obligaciones y existen diferentes **clasificaciones** según los criterios que atendamos.

En función de los activos que se negocian están los **mercados monetarios**, entre otros, las Letras del Tesoro y se caracterizan por ser a corto plazo. En segundo lugar, los **mercados de capitales**, tales como las acciones, obligaciones y bonos, existiendo en España cuatro bolsas, la de Madrid, Barcelona, Valencia y Bilbao. En tercer lugar, el **mercado de renta fija** privada de la Asociación de Intermediarios de Activos Financieros (AIAF) de obligaciones o bonos privados o el de deuda pública prestada por el Banco de España. En cuarto lugar, el **mercado de productos derivados**, el de futuros y opciones, siendo en España el Mercado Español de Futuros Financieros (MEFF) y finalmente, el **mercado de divisas**, focalizado en la compraventa de divisas al contado y a plazos<sup>12</sup>.

Otros tipos de clasificaciones que se pueden realizar son, en función de su plazo de realización, diferenciándose los **mercados al contado o spot** y los **mercados de derivados y opciones**, siendo las operaciones en el primer caso a tiempo real y en el segundo, se concretan en el presente para ser realizadas en el futuro.

---

<sup>11</sup> Martínez Álvarez, J., Galvo González, J. (2008): Banca y Mercados Financieros, Tirant lo Blanch, pág 24-26

<sup>12</sup> Amat. O. (2010): La Bolsa, Funcionamiento y Técnicas para Invertir, vol. 8, Deusto.



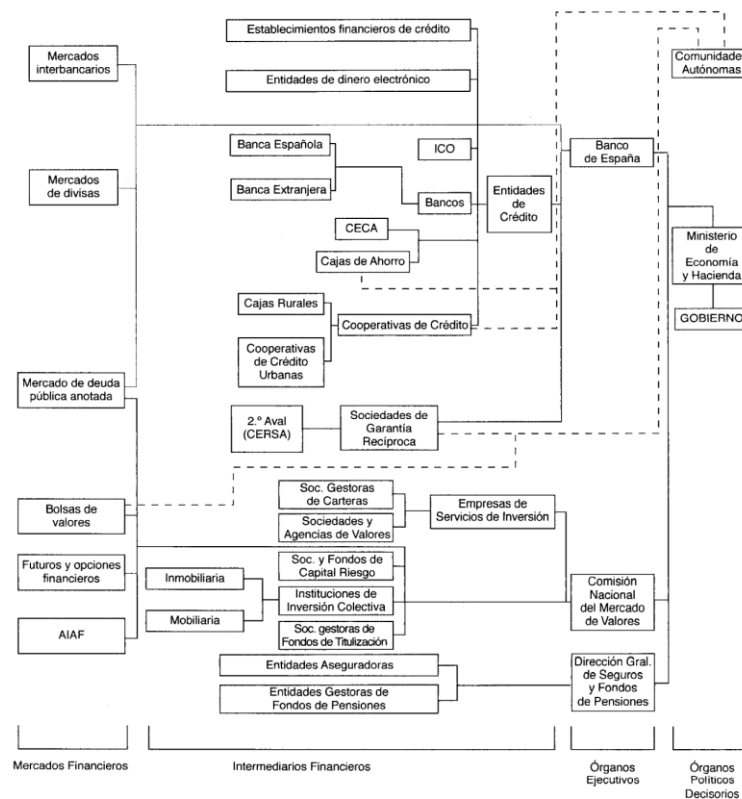
Según el grado de concentración, existen los **mercados centralizados**, aquellos en los que se negocia un gran volumen de títulos focalizados en grandes centros financieros y los **descentralizados**, que tienen una gama de servicios más pequeña.

En función de su grado de formalización están, por un lado, los **organizados**, mediante un organismo encargado de supervisar e inspeccionar los mercados de valores, en España, se encarga la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV) y supone estar bajo un conjunto específico de reglas. Por otro lado, los **no organizados**, en donde se intercambian activos directamente, sin someterse a una reglamentación tan estricta y sin necesidad de definir el espacio concreto para la transacción.

Finalmente, dependiendo de su funcionamiento los mercados pueden realizar transacciones intermediarias, directas o gestionadas y se diferencian principalmente en si participan o no entidades mediadoras y gestoras<sup>13</sup>. En la Figura 1.1.1 se muestra un mapa conceptual del sistema financiero con los diferentes tipos de mercados y sus funciones explicadas anteriormente.

---

<sup>13</sup> Martínez Álvarez, J., Galvo González, J. (2009): Banca y Mercados Financieros, Tirant lo Blanch, pág 26-29



Fuente: Universidad Carlos III de Madrid, 2012

Figura 1.1.1. Estructura actual de los Mercados Financieros

## 1.2 La Bolsa, funcionamiento y características de las bolsas españolas

La Bolsa, como se ha dicho anteriormente, es uno de los mercados de capitales, pero es además un mercado público, donde se contratan los títulos de aquellas entidades que han sido admitidas a cotización cuyas transacciones están aseguradas jurídica y económicamente como consecuencia de que nos encontramos en un mercado organizado y, por tanto, regulado.

En la bolsa intervienen distintas personalidades físicas y jurídicas. Estos son, los **demandantes** de capitales, instituciones públicas y las empresas privadas, siendo su objetivo primordial la obtención de parte de la financiación que necesitan. Los **oferentes**

de capitales, empresas o particulares que desean colocar sus ahorros con la finalidad de obtener rentabilidad y los **mediadores**, encargados de contactar demandantes y oferentes, desarrollando, principalmente, esta función, las sociedades de valores y las agencias de valores. Las sociedades de valores pueden actuar por cuenta ajena a cambio de una comisión, lo que se conoce como, los *brokers*, y por cuenta propia para obtener beneficios, los *dealers*. Por el contrario, las agencias de valores solo pueden actuar como *brokers* y no pueden ofrecer créditos para la compraventa de valores ni para asegurar emisiones de valores. Ambas tienen como accionistas a entidades de crédito y han de disponer de un determinado capital mínimo, así como de la aprobación de la CNMV y autorización del Ministerio de Economía y Hacienda<sup>14</sup>.

Dentro del campo de los mediadores nos encontramos también con las sociedades gestoras, las cuales, solo pueden ofrecer el servicio de gestión individualizada de carteras.

---

<sup>14</sup>Calvo Benardino. A., Parejo Gámir. J., Rodríguez Sáiz. L, Cuervo.García. A. (2014): Manual del Sistema Financiero Español, vol. 25, Ariel, pág. 17-24.

Los objetivos principales de la Bolsa son:

1. Facilitar el intercambio de fondos entre las entidades que precisan financiación y los inversores.
2. Proporcionar liquidez a los inversores en la bolsa.
3. Fijar el precio de los títulos a través de la ley de la oferta y la demanda.
4. Facilitar información a los inversores sobre las empresas que cotizan en bolsa.
5. Proporcionar confianza a los inversores a través de las garantías judiciales.
6. Publicar información de los títulos negociados.

Además, se puede considerar a la Bolsa como un barómetro de la economía, ya que, el mercado bursátil con sus oscilaciones suele utilizarse como indicador de la evolución que está siguiendo la economía, esto es, defendido principalmente por la teoría de los ciclos económicos elaborada por L.V. Mises y F. A. Hayek<sup>15</sup>

No obstante, la cotización en bolsa supone unas ventajas y desventajas para las empresas. Entre las **ventajas** destacan, la diversificación de las fuentes de financiación, la obtención de financiación a un menor coste, una emisión más líquida de los títulos de una empresa, al poder revender las acciones cuando se desea, así como conocer con exactitud el valor de mercado de las acciones que ha emitido.

Las **desventajas** son, básicamente, que las empresas que cotizan en bolsa han de someterse a auditoría externa obligatoriamente y utilizar las Normas Internacionales de Información Financiera, lo que supone una carga burocrática mayor en comparación con las pequeñas y medianas empresas.

Particularmente, en España, como se ha señalado anteriormente, existen cuatro Bolsas de valores (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia) y están reguladas por la CNMV, la cual es una entidad de derecho público con personalidad jurídica propia que se encarga de:

---

<sup>15</sup> Mises and Hayek Dehomogenized: [https://mises-media.s3.amazonaws.com/rae6\\_2\\_5\\_2.pdf](https://mises-media.s3.amazonaws.com/rae6_2_5_2.pdf)

1. Autorizar la admisión de nuevos valores.
2. Controlar y supervisar los mercados e instituciones que intervienen en ellos.
3. Inspeccionar los mercados y sancionar cuando lo crea oportuno velando por la transparencia y por la protección del inversor, por ejemplo, controlando el uso de información privilegiada<sup>16</sup>

La forma de contratación se realiza principalmente en el mercado continuo que funciona mediante la conexión informática de las cuatro Bolsas españolas y otro casi en extinción, el mercado de corros, donde la contratación se hace de viva voz, para valores tanto de renta fija como de renta variable<sup>17</sup>.

---

<sup>16</sup> Martínez Álvarez, J., Galvo González, J. (2012): Banca y Mercados Financieros, Tirant lo Blanch, pág 254-255

<sup>17</sup> Martínez Álvarez, J., Galvo González, J. (2012): Banca y Mercados Financieros, Tirant lo Blanch, pág 256-257

### 1.3 Índices Bursátiles, el IBEX-35

Los **índices bursátiles** sirven para analizar la evolución de un grupo de empresas, bien de un sector de la economía o de todas las empresas cotizadas en Bolsa y por tanto, pueden utilizarse también como indicador de la evolución de los precios de las acciones que cotizan en la Bolsa. Esta evolución se consigue a través de un parámetro calculado estadísticamente, seleccionando una serie de títulos o acciones representativos y siguiendo unos criterios que pueden ser:

1. La **capitalización bursátil** consiste en el número de acciones por cotización. Las compañías con mayor capitalización bursátil tienen más presencia en el índice.
2. La **frecuencia de cotización** es el número de días que cotiza un título dividido por el número de días hábiles. Nótese que, a mayor frecuencia, mayor fidelidad de lo que sucede en el mercado, considerando que el mercado tiene un total de 252 días hábiles.
3. El volumen de **contratación nominal**, o número de títulos contratados en un determinado período, **y en efectivo**, siendo este último el mejor indicador ya que cada título tiene un valor monetario por unidad diferente.
4. El **diferencial entre precios de compra y de venta**, el cual mide la liquidez, es decir, precio de venta-precio de compra dividido todo entre el precio de compra, del valor cotizado.

Los Índices se calculan utilizando una media ponderada de títulos seleccionados cuyo peso depende de la capitalización bursátil, variando su peso conforme varía su precio y por tanto, teniendo mayor ponderación aquellos valores más relevantes. A continuación, se selecciona una fecha base o día de comienzo de los cálculos teniendo en cuenta los factores externos tales como las decisiones políticas, atentados, desastres naturales o el pago de dividendos y ampliaciones de capital.

El IBEX-35 es el índice oficial del Mercado Continuo de la Bolsa Española, reúne los 35 valores y se caracteriza por utilizar como base 3000 puntos que corresponde al cierre del mercado a 29 de diciembre de 1989. Se somete a revisión cada seis meses realizándose ajustes a través del llamado "Gestor de Bolsas S.A" Dichos ajustes son

introducidos al cierre y apertura del mercado para garantizar que el valor del índice no se ve afectado por determinadas operaciones financieras y reflejar así únicamente la evolución de los precios. Estas operaciones son, entre otras, el pago de dividendos por alguna de las compañías, las ampliaciones de capital, la emisión de obligaciones convertibles, la variación del valor nominal de las acciones debido a que, con el paso del tiempo, algunas acciones se revalorizan y otras pierden valor o, las operaciones de fusiones y absorciones. Puede darse el caso de sociedades emergentes con suficiente liquidez para pertenecer al IBEX-35 pudiéndose incluir en el Sistema de Interconexión Bursátil Español<sup>18</sup>.

La empresa objeto de estudio en este trabajo es una de las pertenecientes al IBEX-35, en concreto, Ferrovial S.A.

#### 1.4 Ferrovial S.A.

La compañía Ferrovial S.A. fue fundada en 1952 por Rafael Del Pino y Moreno, pertenece al sector infraestructuras y servicios siendo uno de los operadores principales del mundo. La compañía tiene más de 95.978 empleados y forma parte de los principales índices bursátiles, el IBEX-35, Dow Jones y FTSE4Good.

Sus principales activos son las participaciones en *Heathrow Airport Holdings* y la Autopista 407 ETR en Toronto en un 25% y 43% respectivamente. Le pertenece también una cartera de cinco autopistas de peaje dinámico en EE.UU y divisiones de construcción y servicios que operan en España, Reino Unido, Polonia, EE.UU y Australia<sup>19</sup>.

##### 1.4.1 Modelo de Negocio

La tarea principal que desarrolla “Ferrovial” es la inversión en proyectos de infraestructuras de transporte, representando un 80% de sus activos, siendo su objetivo

---

<sup>18</sup> Es una plataforma electrónica multilateral y automática para la negociación de valores de renta variable admitidos a cotización en las bolsas españolas que ofrece, además, información en tiempo real sobre la actividad y tendencia de cada valor. Asimismo, facilita al operador los medios necesarios para que ejecute y gestione sus órdenes.

<sup>19</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 7.

principal ofrecer una solución al problema de congestión en las grandes áreas urbanas, en especial la congestión del tráfico a través de concesiones de autopistas con peajes, conocidos como *Managed Lanes*.

El propósito de “Ferrovial” es crear valor para la sociedad y los grupos de interés mediante un modelo de negocio basado en infraestructuras como autopistas y aeropuertos de larga duración, los principales generadores de dividendos y la construcción y servicios que garantizan la actividad futura y la generación de flujo de caja, a lo que ellos llaman ex-infraestructuras.

Los **grupos de interés** en los que se centra “Ferrovial” para llevar a cabo su modelo de negocio son<sup>20</sup>:

1. Los **accionistas**, buscando maximizar su retorno y una comunicación transparente.
2. Los **clientes y usuarios**, mejorando los problemas de congestión urbana a través de opciones más eficientes y favoreciendo su movilidad.
3. La **sociedad**, encontrando alternativas de movilidad sostenibles consiguiendo la eficiencia energética.
4. Los **empleados**, ofreciendo diversidad y formación para conseguir el compromiso profesional.

Los principales mercados donde opera son Reino Unido (ventas de 4310 millones/€), España (ventas de 2830 millones/€), Australia (ventas de 2045 millones/€), Polonia (ventas de 1060 millones/€) y Canadá (ventas de 502 millones/€).

El balance que presentó en 2018 muestra a grandes rasgos, una caja neta de 1226 millones/€ por los proyectos de ex-infraestructuras (servicios y construcción) y una deuda neta de 4885 millones/€ por las infraestructuras (autopistas, aeropuertos)<sup>21</sup>.

Actualmente, los retos a los que se enfrenta “Ferrovial” son, por un lado, los riesgos del propio sector de la construcción, cómo la inflación de costes o la tendencia a contratos con una mayor transferencia de riesgos. Y, por otro, aquellos que tienen que ver con las

---

<sup>20</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 10-11.

<sup>21</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 12-13.



tensiones comerciales, políticas, sociales y la regulación o seguridad jurídica, al invertir en nuevos países. En los últimos años, un nuevo reto, al que se enfrenta, es la construcción de infraestructuras que sean sostenibles a largo plazo teniendo en cuenta los avances de la tecnología y el aumento de la congestión urbana.

Teniendo en cuenta los retos comentados anteriormente, la estrategia de “ferrovial” se fundamenta en un **crecimiento rentable**, priorizando los grandes proyectos de infraestructuras, cómo autopistas o aeropuertos, y a través de la inversión en otros sectores como el de las energías, siendo sus mercados prioritarios Estados Unidos, Canadá y Australia.

La estrategia también busca conseguir la **excelencia operativa**, mejorando y optimizando la seguridad de los usuarios y empleados en el conjunto de todas las infraestructuras, y, la **innovación** a través de la generación de ventajas competitivas sostenibles de forma más eficiente.

Esta estrategia se puede llevar a cabo a través de una gran disciplina financiera, con un exhaustivo control de costes y de generación de caja, rotación de activos y siendo transparentes con los inversores, accionistas y agencias de calificación crediticias<sup>22</sup>.

Con relación a sus **resultados económicos consolidados**, en el 2018, destaca un aumento de las ventas de un 11.3% respecto al 2017, debido principalmente a nuevos proyectos de construcción en los Estados Unidos y en contraposición, un resultado bruto de explotación de 484 millones de euros suponiendo un descenso del 6,2% frente al 2017.

Dichos resultados se pueden dividir en cuatro grandes divisiones, las **autopistas** principalmente la 407 ETR donde se ha producido un incremento del tráfico en un 1,4% y la NTE 35W. Los **aeropuertos**, especialmente el de Heathrow, donde se ha producido un incremento de 80,1 millones de pasajeros, un 2,7% más que en 2017. El sector de la **construcción** con un aumento en las ventas de un 14,3% pero con una disminución de la rentabilidad debido al incremento de los costes en materiales y mano de obra,

---

<sup>22</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovia”, pág. 23.

situándose la cartera en 10965 millones de euros, un 1,6% menos respecto a diciembre del 2017. Por último, la división **servicios** reclasificada en 2018 como “disponibles para la venta” y convirtiéndose, por tanto, en una actividad discontinuada donde las ventas han producido un descenso del 4% debido a la reducción de la actividad en Reino Unido por la salida de contratos no rentables y en Australia por la finalización del contrato con el Departamento de Inmigración del Gobierno de Australia.<sup>23</sup>

#### 1.4.2 Principales riesgos asociados con la actividad de “Ferrovial”

Uno de los principales retos que presentan las grandes empresas es saber enfrentarse a los riesgos internos y externos que surgen diariamente. “Ferrovial” cuenta, actualmente, con una política de gestión de riesgos, aprobada por el Consejo de Administración, que contempla los siguientes riesgos: los **estratégicos**, surgidos por problemas contractuales, las tensiones competitivas, los factores políticos o más recientemente el Brexit debido a la incertidumbre y a las consecuencias económicas y políticas que pueden desembocarse tanto en Reino Unido como en la Unión Europea. Se prevé que los activos de “Ferrovial” en Reino Unido, que suponen un 14% del total de la compañía se verían afectados en su rentabilidad y su capacidad de creación de valor.

Los factores políticos también tienen que tenerse en consideración ya que, aunque “Ferrovial” opera en su gran mayoría en entornos estables y con seguridad jurídica, la inestabilidad política puede llevar a cambios regulatorios que impacten negativamente. En concreto, en España las perspectivas de crecimiento podrían verse afectadas por la inestabilidad política que puedan originar los próximos comicios.

Los riesgos **operativos** son muy diversos, entre ellos, destacan en estos últimos años, los ataques cibernéticos que afectan especialmente a “Ferrovial” en el ámbito de las infraestructuras aeroportuarias y viarias y la exposición al cambio climático que se ve repercutido en el coste de las materias primas y tecnológicas derivados de los cambios regulatorios en seguridad y salud. Otros riesgos operativos más comunes son, la conflictividad laboral en donde se puede ver afectada la capacidad productiva o la

---

<sup>23</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 38-39.

calidad del servicio que se puede romper no cumpliendo, por ejemplo, con los plazos de entrega a terceros.

Los riesgos de **cumplimiento**, cómo actuaciones que no cumplan con los principios de integridad, transparencia y respeto a la legalidad y los derechos humanos o el incumplimiento contractual con terceros que pueda ocasionar sanciones o poner en peligro la continuidad de proyectos de la compañía.

Finalmente, los riesgos **financieros**, los cuales son de más interés en este estudio. Por riesgos financieros se entiende los asociados a cambios en las magnitudes financieras y mercados o en la fiabilidad de la información. “Ferrovial” lleva a cabo un plan de control para poder evaluar activamente la exposición a este riesgo siendo las principales variables: el tipo de interés, el tipo de cambio, el precio de la acción, la liquidez y el crédito. “Ferrovial” en su informe anual<sup>24</sup> presenta dichas medidas y explica cómo se vería afectada la compañía por un cambio en dichas variables financieras.

La primera variable de importancia con la que se enfrenta “Ferrovial” es, el **tipo de interés** y la estrategia que sigue para poder controlar su impacto es la emisión de deuda a tipo fijo o la contratación de derivados financieros de cobertura con el objetivo de optimizar el gasto financiero. En la Tabla 1.4.1 se muestra que porcentaje de la deuda de “Ferrovial” fue cubierta en 2018 bien por deuda a tipo fijo o por derivados. Se observa, como “Ferrovial” tiene un volumen significativo de deuda estando cubierta frente a fluctuaciones de tipo de interés entorno a un 89,5% y un 100% según la división de la compañía de la que hablemos.

La última columna plantea que impacto tendría en la compañía un aumento lineal de 100 puntos básicos en las curvas de tipo de interés. En total, produciría un mayor gasto financiero de 4 millones de euros, de los cuales, un millón correspondería a proyectos de infraestructuras y 3 millones al conjunto de sociedades que tiene la compañía para la elaboración y ejecución de los proyectos.

---

<sup>24</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 88-92.

DEUDAS (Millones de euros)	2018			
	TOTAL DEUDA BRUTA	% DEUDA CUBIERTA	DEUDA EXPUESTA	IMPACTO RESULTADO +100 P.B.
<b>Sociedades Exproyectos</b>	<b>2.807</b>	<b>89,3%</b>	<b>299</b>	<b>3</b>
Autopistas	4.982	98%	99	1
Construcción	155	94%	9	0
Aeropuertos	247	100%	0	0
<b>Proyectos de Infraestructuras</b>	<b>5.385</b>	<b>98%</b>	<b>108</b>	<b>1</b>
<b>Deuda total</b>	<b>8.192</b>	<b>95%</b>	<b>407</b>	<b>4</b>

Fuente: Informe anual integrado "Ferrovial" (2018)

Tabla 1.4.1. Derivados financieros a valor razonable

La segunda variable financiera que hay que tener en cuenta, son las variaciones en el **tipo de cambio** de las distintas divisas donde "Ferrovial" mantiene inversiones. La compañía, tanto para las variaciones en el tipo de interés como en el tipo de cambio, utiliza instrumentos financieros de cobertura. En el caso particular de las fluctuaciones en el tipo de cambio, la estrategia principal que sigue "Ferrovial" es la constitución de depósitos en divisas o la contratación de derivados, lo que le permite a la compañía analizar la evolución de los tipos de cambio tanto a corto plazo como a largo plazo. Dichas variaciones en la cotización de las divisas, produce un impacto directo en los fondos propios de la compañía y esto se debe a la norma internacional de contabilidad 21 por la cual se tienen que regir las compañías que coticen en el IBEX-35. Dicha norma regula que las compañías que deban elaborar estados financieros consolidados en el extranjero, reconozcan inicialmente las diferencias surgidas en el tipo de cambio en el patrimonio neto y, posteriormente, transfieran al resultado del ejercicio cuando se enajene o se disponga por otra vía del negocio en el extranjero<sup>25</sup>.

<sup>25</sup> Norma Internacional de Contabilidad nº21(2006) pág. 7.

El tercer riesgo al que se enfrenta “Ferrovial” es la **exposición al crédito y contrapartida**.

Los activos donde se refleja el impacto se indican en la Tabla 1.4.2.

(Millones de euros)	2018	2017	VAR. 18/17
Inversiones en activos financieros <sup>(1)</sup>	693	886	-193
Activos financieros no corrientes	1.629	1.804	-174
Derivados Financieros (activo)	445	381	64
Clientes y otras cuentas a cobrar	1.090	2.635	-1.545

(1) Incluidos en Tesorería y Equivalentes

*Fuente: Informe anual integrado “Ferrovial” (2018)*

Tabla 1.4.2. Activos financieros expuestos al riesgo de crédito

Este riesgo se refiere tal como indica la CNMV al “Riesgo de que el emisor de un valor no atienda sus obligaciones de pago en la fecha de vencimiento”. Las medidas que toma “Ferrovial” frente a este riesgo es hacer un seguimiento exhaustivo de sus Entidades Financieras mediante análisis internos de calidad crediticia. Para cada una de las entidades financieras establece unos requisitos mínimos de riesgo aceptable para poder invertir excedentes de tesorería, así como límites de inversión según del riesgo de cada entidad.

Desde el departamento de riesgos se sigue también una evolución exhaustiva de los mercados en los que la compañía está presente, de sus mercados objetivos, y se proponen acciones para el caso en que se produzca alguna alteración del riesgo de los diferentes mercados. Junto con el análisis de las entidades y los mercados, se realiza un seguimiento del riesgo de crédito de los clientes a través de una metodología de asignación de rating<sup>26</sup>.

Otro riesgo muy importante en cualquier compañía es el de **liquidez**. “Ferrovial” tiene establecido un mecanismo para reservar el nivel de liquidez necesario con procedimientos que recogen las previsiones de generación y necesidades de caja de los diferentes cobros y pagos a corto plazo como de las obligaciones a largo plazo.

<sup>26</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 214.

“Ferrovial” también se ve afectado por el riesgo vinculado a la **evolución del precio de propia acción**. Esta exposición se materializa en contratos de *equity swap*<sup>27</sup>, los cuales se caracterizan por ser contratos donde dos partes, “Ferrovial” y las entidades financieras, principalmente, se intercambian los rendimientos de una cartera por unos tipos de interés. Dichos instrumentos no son considerados derivados de cobertura y su valor de mercado produce un impacto en la Cuenta de Resultados y por ello, un incremento o disminución de un euro en el valor de la acción de “Ferrovial”. Esto producirá un impacto de unos 2 millones de euros positivos o negativos respectivamente en el resultado neto de “Ferrovial”<sup>28</sup>.

Otro riesgo significativo es la **inflación** que se manifiesta a nivel de “Ferrovial” en la inversión de infraestructuras, concretamente en los ingresos por proyectos que van vinculados a tarifas que varían directamente en función de la inflación. Un ejemplo es las tarifas de los contratos de autopista y como consecuencia del aumento de inflación repercutiría en un aumento del flujo de caja proveniente de este tipo de activos.

Otra variable importante es el **nivel de deuda financiera** cuyo estudio sirve para mantener un bajo nivel de endeudamiento que permita sostener un grado de inversión aceptable. Para ello “Ferrovial” tiene establecida una política financiera que busca la relación entre deuda y capital, que permita, por un lado, optimizar el coste y gestionar sus actividades recurrentes y por otro lado, la capacidad de generar nuevos proyectos con el objetivo de crear valor para los accionistas.

Por último, “Ferrovial” ha incluido en su última memoria, un nuevo riesgo, **el Brexit**. “Ferrovial” está expuesto a este riesgo, como se ha mencionado en el Apartado 1.4, dado que la compañía presta servicios de sus diferentes áreas de negocios e invierte en infraestructuras en Reino Unido.

El impacto del Brexit se ha visto reflejado en la debilidad de la libra frente al Euro durante el 2018 y como consecuencia “Ferrovial” se ha visto obligada a contratar nuevas coberturas de tipo de cambio. No obstante, la depreciación de la libra puede tener un

---

<sup>27</sup> Banco Sabadell: <https://www.bancsabadell.com/cs/Satellite/SabAtl/Equity-Swap/1191332202981/es/>

<sup>28</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 215.

efecto positivo en los ingresos comerciales del aeropuerto de Heathrow, por parte de los clientes de la zona Euro.

Se prevé que la incertidumbre del Brexit durante el 2019 podría resultar en una subida de la inflación y en un aumento significativo del tipo de interés nominal y por tanto incrementando los costes de financiación. Respecto a dichas fluctuaciones la compañía ha incrementado también las coberturas. Un aumento de la inflación también tendría un impacto positivo en Heathrow ya que es un activo que varía conforme la inflación pudiendo generar también un efecto positivo de los ingresos comerciales<sup>29</sup>.

#### 1.4.3 “Ferrovial” en Bolsa

La compañía cerró el 2018 con una capitalización bursátil<sup>30</sup> de 130666,976 miles/€ siendo el precio de cierre del año, último nivel de cotización, 17,6950€/acción.

La estructura accionarial se conforma de un 59% de capital flotante<sup>31</sup>, un 20% de RIJN Capital BV, sociedad controlada por Rafael Pino, Menosmares S.L.U con un 8% controlada por María del Pino y Calvo-Sotelo, Siemprelara S.L.U con un 5% y Soziancor S.L.U con un 3% siendo sus accionistas principales Leopoldo del Pino y Calvo-Sotelo. La participación en “Ferrovial” se completa con los fondos de inversión Blackrock en un 2,8% y Fidelity International Limited en un 2%.

En cuanto a la calificación crediticia dada por las agencias de rating, las cual valoran principalmente el riesgo de impago y el deterioro de la solvencia del emisor, han dado una calificación de BBB. Esto significa, principalmente, que “Ferrovial” tiene la capacidad suficiente para cumplir con sus obligaciones, pero enfrenta más riesgo de solvencia que una emisión de calificación A y menos que una emisión de calificación BB si el negocio o la situación económica cambiara drásticamente. Dicha clasificación ha sido realizada por

---

<sup>29</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas “Ferrovial”, pág. 215-216.

<sup>30</sup> Media económica que indica el valor total de una empresa según el precio de mercado y que se utiliza para las empresas que cotizan en bolsa. La capitalización se calcula con acciones admitidas a cotización y no incluye acciones emitidas procedentes de ampliaciones que no han sido todavía admitidas a cotización.

<sup>31</sup> Acciones que se negocian habitualmente en bolsa y no están controladas por accionistas de forma estable.

Standard and poor's y Fitch Ratings. Actualmente, y después de la última crisis económica, las compañías del Ibex mantienen una calificación de BB y BBB<sup>32</sup>.

Otro punto importante es la **remuneración del accionista**. La compañía distribuyó 520 millones/€ en concepto de retribución al accionista a través de *scrip dividends*<sup>33</sup> o Dividendo Flexible, donde los accionistas pueden elegir entre vender los derechos de asignación gratuitos recibidos a un precio fijo garantizado, venderlos en el mercado o bien, recibir nuevas acciones de "Ferrovial" a cambio de un número estipulado de derechos de asignación gratuita. El valor total de los accionistas que se acogieron a esta forma de retribución fue de 240 millones/€. La otra forma prevista es la recompra de acciones propias para su posterior amortización. La última recompra finalizó el 27 de noviembre de 2018 con 8.930.617 acciones propias adquiridas por la sociedad. Posteriormente, se llevó a cabo la reducción de capital en la cuantía de 2.073.953€, mediante la amortización de 10.369.765 acciones propias, incluidas 1.439.148 acciones propias existentes previa fecha de formulación por parte del Consejo de Administración de la propuesta de acuerdo a la junta de reducción de capital. Como resultado, el capital social a fecha de 31 de diciembre de 2018 era de 147.691.167 euros encontrándose totalmente suscrito y desembolsado e integrado por 73.845.5837 acciones ordinarias, de una única clase y valor nominal de 20 céntimos de euro cada una de ellas<sup>34</sup>.

### Evolución de las acciones

La acción de "Ferrovial" (MSE) cotiza en el IBEX-35 desde 1999, durante todo este periodo su precio de cierre más bajo (2,97€) fue el 28 de enero del 2000 y el precio más alto (23,32€) fue el 26 de octubre del 2015 (véase Gráfico 1.4.1.). Entre el 6 de mayo de 1999 y el 31 de Diciembre de 2018 ha sufrido un ciclo constante; entre 2003 y 2007 estaba en una fase alcista y de expansión. Desde el 2008 tuvo una fase bajista

---

<sup>32</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas "Ferrovial", pág. 1.5

<sup>33</sup> Forma de retribución de los accionistas mediante la entrega gratuita de nuevas acciones de la misma entidad.

<sup>34</sup> Informe Anual Integrado, (2018): Informe de Gestión y Cuentas Consolidadas "Ferrovial", pág. 61.



coincidiendo con la crisis económica hasta 2013 donde el precio de la acción empezó a recuperarse llegando a sus máximos durante el 2015.<sup>35</sup>

El Gráfico 1.4.1. muestra las cotizaciones y el volumen de negociación de la acción objeto de estudio en los últimos años. En la presente memoria, vamos a tomar como referencia el valor de una acción del Banco Santander cotizada en la Bolsa española, siendo el periodo de análisis desde el 2 de enero al 27 de febrero de 2014, período durante el cual se ha realizado parte de esta memoria.

### Evolución Acción “Ferrovial” (MSE)



*Fuente: Elaboración propia.*

Gráfico 1.4.1 Evolución cotizaciones “Ferrovial” 06.05.1999 -31.12.18

Por último, en el Gráfico 1.4.2 se puede observar que si unimos los mínimos crecientes de octubre de 2014 y junio de 2016 podemos obtener una recta soporte, o recta de aceleración, que pasa justo por los mínimos. En términos de medio y de largo plazo los

<sup>35</sup> “Ferrovial” (2018): <https://www.ferrovial.com/es/accionistas-e-inversores/informacion-bursatil/cotizacion/cotizacion-historica/>

títulos de “Ferrovial” continúan desplazándose lateralmente desde hace tres años y dentro de una tendencia primaria (o de fondo) alcista<sup>36</sup>.

## Gráfico de velas “Ferrovial”



*Fuente: Página Web Bolsamanía*

Gráfico 1.4.2 Gráfico de velas “Ferrovial”

La elección de una acción de “Ferrovial” para llevar a cabo este trabajo está motivada por el interés en analizar la evolución de un subyacente financiero de una empresa que tenga peso específico en el IBEX-35, y como se ha explicado en los apartados anteriores de este capítulo, “Ferrovial” cumple con los requisitos.

<sup>36</sup> Bolsamanía (2018): <https://www.bolsamania.com/noticias/analisis-tecnico/ferrovial-alcanza-niveles-de-precio-que-favorecen-un-rebote--3131206.html>

# 2 PRELIMINARES

## ESTOCÁSTICOS

En este capítulo se presentan las herramientas estocásticas que se requerirán en el siguiente capítulo para calcular la solución del Modelo Log-Normal con parámetros constantes y variables así como sus principales propiedades estadísticas. En primer lugar, introduciremos el desarrollo teórico del Modelo Log-Normal, el proceso de Wiener o también denominado Movimiento Browniano. Partiremos de unos conceptos básicos y a continuación presentaremos su definición y enunciaremos únicamente las propiedades estadísticas que posee y que se requerirán posteriormente. Finalmente, se presentará el Modelo Log-Normal como una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô, su resolución mediante el manejo de integrales estocásticas de tipo Itô y de sus propiedades estadísticas.

## 2.1 Movimiento Browniano o proceso de Wiener

El movimiento Browniano o proceso de Wiener es uno de los procesos estocásticos más importantes siendo de gran utilidad para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo, entre otros, los precios de los activos subyacentes, la tasa de interés, los tipos de cambio o los índices bursátiles.

Un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para usar magnitudes aleatorias que varían en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables del proceso tienen su propia función de distribución de probabilidad y pueden o no estar correlacionadas entre sí.

No obstante, para entender bien un proceso estocástico hay que tener en cuenta una serie de conceptos que se expondrán a continuación.

Primero de todo, dos sucesos son **independientes** si  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$  y por tanto, dos variables  $X, Y$  definidas sobre el mismo espacio de probabilidad son independientes si la probabilidad de un suceso  $A$  a través de una variable aleatoria  $X$  no cambia la ley de probabilidad de  $Y$ , y viceversa.

En segundo lugar, un proceso estocástico  $T$  es una familia de **variables aleatorias** reales  $\{X_t, t \in T\}$ , todas ellas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. Normalmente,  $T$  es  $\mathbb{R} = [0, \infty[$  o  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  y se interpreta como el tiempo, en modo continuo o discreto, siendo de esta forma un proceso estocástico la herramienta apropiada para modelizar. Se supone a partir de ahora que  $T = [0, \infty[$ .

En tercer lugar, un proceso tiene **incrementos estacionarios** si la ley de la variable aleatoria  $X_t - X_s$  depende sólo de la diferencia  $t - s$  en  $T$ . Además, un proceso tiene **incrementos independientes** si para todos  $t, s \in T$ , tal que  $s < t$ , la variable  $X_t - X_s$  es independiente de la familia  $[X_r, r \in T, r \leq s]$ <sup>37</sup>.

---

<sup>37</sup> Alabert, Aureli (2004): Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma de Barcelona. Ed. UB.

Con estos conceptos claves ya se puede dar paso a explicar el proceso de Wiener o Movimiento browniano, que se denotará por:  $\{W(t): t \geq 0\}$  aunque en la literatura usualmente también es llamado  $\{B(t): t \geq 0\}$ .

A continuación, vamos a definir dicho proceso estocástico a través de una serie de propiedades estadísticas que lo diferencian.

El Movimiento Browniano,  $\{W(t): t \geq 0\}$  es un proceso estocástico que cumple:

1. Comienza en el origen con **probabilidad 1**:  $P[W(0) = 0] = 1$ .
2. Los incrementos del Browniano dados por,  $W(t) - W(s)$ , son **variables aleatorias independientes**:

$$W(t_1) - W(t_0); W(t_2) - W(t_1); \dots; W(t_{n+1}) - W(t_n),$$

$$\text{con } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty.$$

3. Tiene **incrementos estacionarios**

$$W(t + \Delta t) - W(t) \stackrel{d}{=} W(s + \Delta t) - W(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty,$$

donde el símbolo  $\stackrel{d}{=}$  denota que la igualdad anterior es en distribución.

4. Los incrementos del proceso son gaussianos de **media 0 y varianza  $t - s$** :

$$W(t) - W(s) \sim N[0; t - s], \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Teniendo en cuenta las propiedades 1 y 4 se deduce que el proceso de Wiener es un proceso estocástico que para cada instante de tiempo sigue una distribución normal

$$W(t) \sim N[0; t]$$

5.  $W(t)$  tiene **trayectorias continuas, pero no es diferenciable** en ningún punto.

## 2.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano o proceso de Wiener

En este apartado se numeramos las propiedades estadísticas del Movimiento Browniano o proceso de Wiener. Dichas propiedades son las siguientes<sup>38</sup>:

1. Teniendo en cuenta que los incrementos del proceso son gaussianos de media 0 y varianza  $t - s$  tal como se indica en el apartado anterior, propiedad P.4. Se puede afirmar que la **función media** del movimiento Browniano es:

$$\mu_{w(t)} = E[W(t)] = 0, \quad t \geq 0.$$

2. Existe una relación lineal entre las variables aleatorias  $W(s)$  y  $W(t)$ , que se obtienen al fijar dos instantes  $s$  y  $t$ , que denominamos **función covarianza**.

$$Cov [W(t), W(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

En efecto, si tomamos  $0 \leq s \leq t \leq +\infty$ , entonces utilizando la propiedad P.1 y las propiedades básicas del operador esperanza se tiene:

$$\begin{aligned} Cov [W(t), W(s)] &= E [W(t)W(s)] - E[W(t)]E[W(s)] \\ &= E [W(t)W(s) - (W(s))^2 + (W(s))^2] \\ &= E [(W(t) - W(s))W(s) + (W(s))^2] \\ &= E [(W(t) - W(s))W(s)] + E[(W(s))^2] \\ &= E[W(t) - W(s)](W(s) - W(0)) + E[(W(s))^2] \\ &= E[W(t) - W(s)] E[W(s) - W(0)] + E[(W(s))^2] \\ &= (E[W(t)] - E[W(s)])(E[W(s)] - E[W(0)]) + E[(W(s))^2] \\ &= E[(W(s))^2] \\ &= Var[W(s)] \\ &= s. \end{aligned}$$

3. Es un proceso 1/2 **autosemejante**. Esta propiedad se define como:

$$\stackrel{d}{=} W(T \cdot t) = \sqrt{T} \cdot W(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

Finalmente, para poder realizar predicciones de subyacentes será necesario poder realizar simulaciones del Movimiento Browniano presentado anteriormente. La realización de dichas simulaciones serán el objeto de los dos capítulos siguientes, donde

---

<sup>38</sup> Øksendal, B.K. (2003): Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlín, Springer.

se estudiará y se resolverá el Modelo Log Normal con parámetros variables, utilizando un activo subyacente. No obstante, se utilizará para modelizar la aleatoriedad o “ruido” del modelo su diferencial  $\{dW(t), \forall t \geq 0\}$ , siendo también un proceso estocástico y siguiendo una distribución normal o gaussiana en base al Teorema Central del Límite<sup>39</sup>.

## 2.3 El cálculo de Itô

En el Apartado 2.1 se ha indicado que las trayectorias del proceso de Wiener son continuas, pero no derivables. Por tanto, el paso de un proceso estocástico de tiempo discreto a otro de tiempo continuo no es inmediato y requiere la construcción de una nueva herramienta matemática: la integral estocástica<sup>40</sup>.

El cálculo de Itô, desarrollado por el matemático japonés Kiyoshi Itô, es una teoría para la diferenciación e integración de procesos estocásticos que facilita la comprensión matemática de sucesos aleatorios, siendo el más importante de sus resultados el Lema de Itô.

Este apartado se va a centrar en definir la integral de tipo Itô (2.3.1) pero, previamente, introduciremos los conceptos considerando funciones deterministas y luego procesos estocásticos. Posteriormente, se usaremos un proceso estocástico adaptado para poder construir la definición integral de Itô y finalmente, se aplicará el Lema de Itô.

En la Tabla 2.3.1 se muestran  $g(s)$  y  $f(s)$  como funciones deterministas respecto de la variable tiempo  $s$  y  $X(s)$  y  $W(s)$  como procesos estocásticos.

---

<sup>39</sup> Teoría estadística que establece que dada una muestra suficientemente grande de la población, la distribución de las medias muestrales seguirá una distribución normal.

<sup>40</sup> Procesos estocásticos, integral estocástica, ecuaciones diferenciales estocásticas, el lema de Itô (2018): [https://www.uv.es/olmos/mod\\_din\\_estocastico.pdf](https://www.uv.es/olmos/mod_din_estocastico.pdf)

Notación	Tipo de Integral	Datos
$\int_0^t g(s)f(s) ds$	Riemann	$g(s)$ función determinista $f(s)$ función determinista
$\int_0^t g(s)df(s)$	Riemann-Stieltjes	$g(s)$ función determinista $df(s)$ función determinista
$\int_0^t X(s)dW(s)$	Itô	$X(s)$ proceso estocástico $W(s)$ proceso estocástico de Wiener

Tabla 2.3.1. Tipos de integrales con funciones deterministas y procesos estocásticos

Si calculamos la derivada de  $f(s)$  en la integral,

$$\int_0^t g(s)f(s) ds,$$

se llega a:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s) ds,$$

siendo una integral Riemann-Stieltjes, siempre que  $f$  sea diferenciable. Se podrá utilizar la teoría determinista si  $f(s)$  es una función de variación acotada y comprobándolo mediante el cálculo del siguiente límite.

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$



Puesto que  $f(s)$  es de variación acotada,  $f(s_{i+1})$  está próximo a  $f(s_i)$ . A partir de esto es posible probar que el límite anterior existe siempre que  $g(s)$  no varíe demasiado. Por supuesto, si la función  $g(s)$  es extremadamente fluctuante en diferentes puntos en el tiempo, el límite puede ser divergente.

Las propiedades de la integral de Itô en funciones deterministas son las siguientes:

1. Media:  $E \left[ \int_0^t h(s) dW(s) \right] = 0$ .
2. Varianza:  $Var \left[ \int_0^t h(s) dW(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds$ .
3. Covarianza:  $Cov \left[ \int_0^t h_1(\tau) dW(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dW(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau$ ,  
siendo  $t \wedge s = \min(t, s)$ .
4. Sigue una distribución normal  $\int_0^t h(s) dW(s) \sim N \left[ 0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right]$ .

No obstante, en este estudio es más interesante definir la integral de tipo Itô:

$$\int_0^t X(s) dW(s). \quad (2.3.1)$$

Para ello, primeramente, se necesita introducir un proceso estocástico  $\mathcal{F}_s$  adaptado. Una variable aleatoria  $X$  es  $\mathcal{F}_s$ -adaptada si puede ser escrita como el límite de una sucesión de funciones de  $W(\tau)$  para uno o más valores de  $\tau \leq s$  pero no como función de cualquier  $W(u)$  con  $u > s$ .

Un proceso estocástico  $X(s)$  es adaptado si para cada tiempo  $s \in [0, t]$ , la variable aleatoria  $X(s)$  es  $\mathcal{F}_s$ -adaptada.

Remarcar, que no todos los procesos son adaptables, tales como  $X(s) = f(s, W(s))$  lo son, pero no  $X(s) = W(s + 1)$ .

Por tanto, la definición de la integral de tipo Itô se basará en un proceso estocástico  $X(s)$  integrable en el intervalo  $[0, t]$  en el sentido de Itô si<sup>41</sup>

1.  $X(s)$  es adaptado para  $s \in [0, t]$ , y

---

<sup>41</sup> Allen, E. (2007): Modelling with Itô Stochastic Differential Equations. Springer (Series Mathematical Modelling: Theory and Applications), New York.

$$2. \int_0^t E [(X(s))^2] ds < \infty.$$

Entonces para cada  $t > 0$  la Integral de Itô se define como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega) dW(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(s_i, \omega) (W(s_{i+1}, \omega) - W(s_i, \omega)), \quad (2.3.2)$$

donde el límite es considerado por cada  $\omega \in \Omega$ .

Una vez definida la integral de Itô (2.3.6) podemos denotar sus propiedades,

$$I(t) = \int_0^t X(s) dW(s) \quad (2.3.3),$$

donde se cumple:

1.  $I(t)$  es un proceso estocástico adaptado
2. Media:  $E \left[ \int_0^t X(s) dW(s) \right] = 0$
3. Varianza:  $V \left[ \int_0^t X(s) dW(s) \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds.$

Deduciéndose de las propiedades 2 y 3 anteriores:

$$E \left[ \left( \int_0^t X(s) dW(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E [(X(s))^2] ds,$$

llamada isometría de Itô.

Para poder resolver ecuaciones diferenciales estocásticas se necesita calcular la integral de Itô (2.3.3). Esto se puede hacer mediante el Lema o regla de Itô, el cual suele enunciarse en su versión integral pero también existe su versión diferencial. En este estudio se utilizará la primera versión.

El lema **de Itô en su versión integral** a partir de la ecuación (2.3.1). sea  $X(t)$  un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo Itô con condición inicial determinista  $x_0$ .

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned} \quad \dots(2.3.1.1),$$

y sea  $F(t, x)$  una función  $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas.

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

Tesis: Entonces para  $t > 0$  se cumple

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) - F(s, x_0) &= \int_s^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\} dr \\ &+ \int_s^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r)) dr \quad \dots(2.3.3) \\ &+ \int_s^t g(r, x(r)) F_2(r, x(r)) dW(r). \end{aligned}$$

No obstante, en la práctica, a la hora de aplicar el cálculo de Itô en activos subyacentes, como veremos en el Capítulo 3, conocemos los valores de las cotizaciones de las acciones durante ciertos instantes temporales (precio de cierre) y por tanto solo necesitamos estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

# 3 MODELO ESTOCÁSTICO

## LOG-NORMAL

El objetivo de este capítulo es presentar el Modelo Log-Normal, el fundamento matemático que se ha aplicado para construir las predicciones del activo subyacente de la compañía “Ferrovial”. En primer lugar, presentaremos una formulación general de dicho modelo, que es la que se suele aplicar en la modelización de activos subyacentes cotizados. Posteriormente, presentaremos una variación del Modelo Log-Normal que, como veremos, permite mejorar las predicciones puntuales y probabilísticas de “Ferrovial”.

En el Capítulo 2 se ha presentado el Modelo Log-Normal, el cual está formulado a través del siguiente Problema de Valor Inicial basado en una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.0.1)$$

donde:

- $W(t)$ , es el proceso estocástico de Wiener o Movimiento Browniano,
- $\mu \in \mathbb{R}$ , es la tasa “media” instantánea del rendimiento de la acción,
- $\sigma > 0$ , es la volatilidad de las fluctuaciones del mercado,

- $S(t)$ , es el valor del subyacente en el momento  $t$ ,
- $s_0$ , es el valor del subyacente en el instante 0, y se supone conocido y determinista, por eso se denota en minúsculas.

El capítulo está estructurado de la siguiente forma. En primer lugar, en el Apartado 3.1 se presenta una motivación del Modelo Log-Normal (3.0.1) a partir de un modelo determinista. En el Apartado 3.2, se resuelve el modelo Log-Normal mediante el cálculo de Itô y se calibran los parámetros. Posteriormente, en el Apartado 3.3, se presenta el Modelo Log-Normal por el método de momentos y en el Apartado 3.4 el Modelo Log-Normal con parámetros variables. Finalmente, en el Apartado 3.5 se explica cómo validar el Modelo Log-Normal por el método momentos y el Modelo Log-Normal con parámetros variables.

### 3.1 Motivación del Modelo Log-Normal

Este apartado tiene como finalidad motivar la aplicación del Modelo Log-Normal en la predicción del valor de cotización de acciones cotizadas. El modelo Log-Normal se basa en la ecuación diferencial estocástica presentada en el Capítulo 2 y formulada en la ecuación (3.0.1). En esta ecuación,  $dS(t)$  modeliza la tasa de cambio instantánea del precio de la acción o subyacente, y su valor se obtiene a través de dos términos, el primero  $\mu S(t)dt$  indica que la variación del subyacente en el instante  $t$  es proporcional al valor  $S(t)$  que tiene el subyacente al inicio del intervalo y al plazo transcurrido  $dt$ , siendo  $\mu$  la constante de proporcionalidad, la cual se denomina *drift* o deriva, y un segundo término,  $\sigma S(t)dW(t)$ , que contiene el ruido o incertidumbre y que pretende recoger los aspectos no deterministas del mercado (cambios políticos, incertidumbres climáticas o crisis en materia económica), que podrían influir en el valor de la cotización de la acción. La modelización de esta aleatoriedad está basada en la diferencial del proceso de Wiener,  $dW(t)$ , que es un nuevo proceso estocástico que también es gaussiano, y se denomina Ruido Blanco (véase Capítulo 2).

Tomando como punto de partida el siguiente modelo determinístico

$$\left. \begin{aligned} S'(t) &= \mu S(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

para la evolución del valor de una inversión en ambiente de certidumbre (como un bono) donde el parámetro  $\mu$  indica el rendimiento de dicha inversión, al estar interesados en un modelo para activos que cotizan en ambiente de incertidumbre (como la bolsa), mediante la perturbación estocástica (vía el Ruido Blanco) del parámetro  $\mu$  :

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma W'(t), \quad \sigma > 0,$$

donde  $\sigma > 0$  denota la intensidad de la perturbación o ruido aleatorio, se obtiene

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma W'(t))S(t),$$

y agrupando los diferentes términos y teniendo en cuenta la definición de diferencial de un proceso estocástico, se obtiene la ecuación diferencial estocástica (3.0.1).

### 3.2 Solución del Modelo Log-Normal mediante el cálculo de Itô

En este apartado vamos a resolver la ecuación diferencial estocástica (3.0.1). Para ello aplicaremos el Cálculo de Itô, siendo su principal herramienta el Lema de Itô enunciado en el Capítulo 2.

En primer lugar, expresamos la ecuación (3.0.1) en forma integral

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r) dr + \int_0^t \sigma S(r) dW(r),$$

o equivalentemente:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r) dr + \int_0^t \sigma S(r) dW(r). \dots(3.2.1)$$

A continuación, aplicamos el Lema de Itô con la siguiente notación:

$$X(t) = S(t); f(t, x(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t); g(t, x(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t),$$

Utilizando la función determinista que transforma el proceso de Itô de la siguiente forma,

$$F(t, x) = \ln(x).$$

Para la aplicación del Lema de Itô se necesitan calcular las siguientes derivadas parciales:

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0, \quad F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

$$F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) - \ln(s_0) &= \int_0^t \left( \mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left( \frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr \\ &+ \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dW(r). \end{aligned}$$

Simplificando, tenemos

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dW(r).$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma(W(t) - W(0)).$$

Observemos que por la definición del Movimiento Browniano,  $W(0) = 0$  con probabilidad 1, así:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t),$$

$$\frac{S(t)}{s_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W(t)},$$

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W(t)}, \quad (3.2.2)$$

que representa la solución del proceso estocástico, llamado Movimiento Browniano Geométrico o modelo Log-Normal, siendo  $S(t)$  la exponencial de una variable aleatoria Gaussiana  $W(t)$ .

La ecuación (3.2.2) se utilizará posteriormente para el cálculo de predicciones probabilísticas y para ello será necesario calcular sus funciones media y varianza.

La función media se calcula aplicando la propiedad vista en el Capítulo 2, Apartado 2.2, de autosemejanza. Recordemos dicha propiedad, teniendo en cuenta que  $t = T$ , resulta que

$$W(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot W(t), \quad t \geq 0, \quad T \geq 0,$$

y en el caso de  $t = 1$ ,

$$W(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot W(1), \quad (3.2.3)$$

donde por definición el Movimiento Browniano es,

$$W(1) \sim N[0; 1].$$

Por otra parte, también se utiliza la siguiente propiedad:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N[0; 1], \quad (3.2.4)$$

donde se calcula la siguiente integral:

$$E[e^{\lambda Z}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Y aplicado a (3.2.2) se tiene:



$$\begin{aligned}
E[S(T)] &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E[e^{\sigma W(T)}] \\
&= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E[e^{\sigma \sqrt{T} W(1)}] \\
&= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{(\sigma \sqrt{T})^2}{2}},
\end{aligned}$$

y simplificando se obtiene

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}. \quad (3.2.5)$$

La función varianza será de utilidad para conocer la evolución de la volatilidad del precio de la acción y su cálculo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
Var [S(T)] &= E \left[ (S(T))^2 \right] - (E[S(T)])^2 \\
&= E \left[ (S_0)^2 e^{2\sigma W(T) + 2(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \right] - (S_0)^2 e^{2\mu T} \quad (3.2.6) \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1).
\end{aligned}$$

En la expresión obtenida observamos como la varianza crece a medida que lo hace el horizonte temporal  $T$ .

### 3.3 Modelo Log-Normal con parámetros constantes

Una vez definidas la función media y varianza del proceso estocástico solución el objetivo ahora consiste en calibrar los parámetros del modelo  $\mu$  y  $\sigma$ . Para ello es necesario el uso de técnicas estadísticas para que nuestras estimaciones no dependan del modelo utilizado.

En primer lugar, aplicamos logaritmos a la solución del modelo (3.2.2), resultando

$$\ln(S(t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \quad (3.3.1),$$

donde la distribución estadística es gaussiana por ser una transformación lineal de  $W(t) \sim N[0; t]$ .

Por tanto, a partir de una serie cotizaciones  $K + 1$  a las que llamaremos  $S(0) = S_0$ ,  $S^{(1)} = S(\Delta t)$ ,  $S^{(2)} = S(2\Delta t)$ , ...,  $S^{(K)} = S(K\Delta t)$ , en los instantes  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t$  en el intervalo  $[0, t]$  y en cada subperiodo  $[(j-1)\Delta t, j\Delta t]$  con  $j = 1, 2, \dots, K$ , consideremos los  $K$  incrementos:

$$U_j = \ln S(j\Delta t) - \ln(S((j-1)\Delta t)), \quad 1 \leq j \leq K \quad (3.3.2)$$

Si introducimos (3.3.2) en (3.3.1) obtenemos,

$$\ln(S(j\Delta t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)j\Delta t + \sigma W(j\Delta t),$$

$$\ln(S((j-1)\Delta t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j-1)\Delta t + \sigma W((j-1)\Delta t),$$

restando ambas expresiones, resulta

$$U_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma (W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t)) \quad (3.3.3),$$

en donde:

$W(j\Delta t) - W((j-1)\Delta t)$ , siguen una distribución normal  $N[0; \Delta t]$  y son independientes.

El siguiente paso es calcular la media y la cuasivarianza muestral de la forma,

$$\bar{U} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j, \quad S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U})^2 \quad (3.3.4),$$

que son estimaciones de la media y las varianzas teóricas,

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t, \quad \sigma^2 \Delta t$$

lo que permite construir el siguiente sistema de ecuaciones (igualamos media y cuasivarianza muestral a las poblacionales o teóricas) para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ :

$$\bar{U} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t, \quad (3.3.5)$$

cuya solución nos da las estimaciones buscadas:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \widehat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (3.3.6)$$

### 3.4 Modelo Log-Normal con Parámetros Variables

A continuación, presentamos una versión del Modelo Log-Normal cuyos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , en lugar de asumirse constantes durante todo el período temporal donde se aplica el modelo, se van actualizando.

Para explicar esta reformulación del modelo partimos de la expresión (3.3.1). Para facilitar la lectura la volvemos a introducir

$$\ln(S(t)) = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t).$$

Por conveniencia introducimos la siguiente notación. Llamaremos a los instantes temporales

$$t_k = k, \quad Y_k = \ln(S_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Los parámetros del modelo se denotarán por:

$$V = \sigma^2, \quad R = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2. \quad (3.4.1)$$

lo que nos permite describir la expresión (3.3.1) de la siguiente forma:

$$Y_k = Y_0 + Rk + \sqrt{V} W_k, \quad (3.4.2)$$

y por tanto,

$$Y_{k-1} = Y_0 + R(k-1) + \sqrt{V} W_{k-1}. \quad (3.4.3)$$

Restando a (3.4.2) la igualdad (3.4.3), obtenemos

$$Y_k = Y_{k-1} + R + \sqrt{V}(W_k - W_{k-1}). \quad (3.4.4)$$

Donde, recordemos que la distribución del incremento del proceso de Wiener es Gaussiana

$$W_k - W_{k-1} \sim N[0; 1].$$

Esto nos permite deducir la siguiente distribución condicional:

$$Y_k \mid Y_{k-1} \sim N(Y_{k-1} + R; V), \quad (3.4.5)$$

representando  $Y_{k-1} + R$  la media y  $V$  la varianza.

Con esta nueva reformulación del modelo, es sencillo ver que los estimadores de los nuevos parámetros  $R$  y  $V$  son:

$$\hat{R}_n = \frac{Y_n - Y_0}{n}, \quad \hat{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_n)^2, \quad (3.4.6)$$

siendo  $Y_k = \ln(S_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n \leq N$ , las log-cotizaciones durante los instantes temporales  $t_k$ . Obsérvese que  $n$  denota un valor menor o igual que el tamaño de la muestra de cotizaciones y que por conveniencia hemos denotado con el subíndice  $n$  los estimadores  $\hat{R}_n$  y  $\hat{V}_n$  porque se calculan a partir de una submuestra  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , de la muestra total  $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots, S_N$ .

La estimación puntual de la log-cotización se obtiene mediante la esperanza condicional:

$$\hat{Y}_{n+1} = \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \dots, Y_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid Y_n], \quad (3.4.7)$$

ya que sabemos que la solución del Modelo Log-Normal,  $S(t)$ , es un proceso Markoviano, y por tanto también lo será su logaritmo,  $Y(t) = \ln S(t)$ . Para calcular (3.4.7), observamos que poniendo en (3.4.5),  $k = n$  resulta,

$$Y_{n+1} \mid Y_n \sim N(Y_n + R; V). \quad (3.4.8)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3.4.8) en (3.4.7), se deduce

$$\hat{Y}_{n+1} = Y_n + R. \quad (3.4.9)$$

Esta expresión permite obtener la estimación puntual de la log-cotización en el instante  $n + 1$  a partir de la muestra  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  y la estimación del parámetro  $R$  mediante la  $\hat{R}_n$  dada en (3.4.6):

$$\hat{Y}_{n+1} = Y_n + \hat{R}_n. \quad (3.4.10)$$

Para completar la estimación, necesitamos construir el intervalo de confianza, y para ello vamos a determinar la distribución del error  $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}$ . Con este objetivo poniendo  $k = n + 1$  en (3.4.4), y utilizando (3.4.10) se obtiene,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1} &= (Y_n + \hat{R}_n) - (Y_n + R + \sqrt{V}(W_{n+1} - W_n)) \\ &= \hat{R}_n - R - \sqrt{V}(W_{n+1} - W_n). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Por otra parte, poniendo  $k = n$  en (3.4.4) y en (3.4.6), se tiene:

$$\hat{R}_n - R = \frac{Y_n - Y_0}{n} - R = \frac{Rn + \sqrt{V}W_n}{n} - R = \frac{\sqrt{V}}{n}W_n. \quad (3.4.12)$$

Ahora sustituimos (3.4.12) en (3.4.11) y teniendo en cuenta que por definición del proceso de Wiener  $W_0 = 0$  con probabilidad 1, se deduce

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1} &= \frac{\sqrt{V}}{n}W_n - \sqrt{V}(W_{n+1} - W_n) \\ &= \frac{\sqrt{V}}{n}(W_n - W_0) + \sqrt{V}(W_{n+1} - W_n). \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que  $W_n - W_0 \sim N(0; n)$ ,  $W_{n+1} - W_n \sim N[0; 1]$  y que estos incrementos son independientes, de (3.4.13) deducimos

$$\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1} \sim N\left(0; V\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right), \quad (3.4.14)$$

ya que,

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\frac{\sqrt{V}}{n}(W_n - W_0) + \sqrt{V}(W_{n+1} - W_n)\right] &= \left(\frac{\sqrt{V}}{n}\right)^2 \text{Var}[W_n - W_0] + (\sqrt{V})^2 \text{Var}[W_{n+1} - W_n] \\ &= \frac{V}{n^2}n + V = V\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Utilizando en (3.4.14) la estimación  $\hat{V}_n$  de  $V$  dada en (3.4.6), obtenemos que el intervalo de confianza de la predicción puntual (3.4.10) está dado por

$$\hat{Y}_{n+1} \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}. \quad (3.4.15)$$

El proceso que acabamos de describir para obtener la estimación del subyacente en el instante  $t = n + 1 \leq N$ , puede repetirse en el instante  $t = n + 2 \leq N$ , en cuyo caso dado (3.4.10), para determinar  $\hat{R}_{n+1}$  y  $\hat{V}_{n+1}$  definidas en (3.4.6) y obtener así la estimación puntual

$$\hat{Y}_{n+2} = Y_{n+1} + \hat{R}_{n+1}, \quad (3.4.16)$$

donde  $Y_{n+1}$  es la log-cotización real en el instante  $t = n + 1 \leq N$  y

$$\hat{R}_{n+1} = \frac{Y_{n+1} - Y_0}{n+1}. \quad (3.4.17)$$

Mientras que, según (3.4.15) la estimación probabilística se completa con el intervalo de confianza,

$$\hat{Y}_{n+2} \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}, \quad (3.4.18)$$

siendo  $\hat{Y}_{n+2}$  el valor dado en (3.4.16) y

$$\hat{V}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_{n+1})^2. \quad (3.4.19)$$

Este proceso se repite para obtener estimaciones  $\hat{Y}_n$ ,  $n \leq N$ , todas ellas dentro de la muestra de log-cotizaciones y correspondientes a  $\{Y_n = \ln(S_n), Y_{n+1} = \ln(S_{n+1}), \dots, Y_0 = \ln(S_0)\}$ . Obsérvese que la construcción de las estimaciones  $\hat{Y}_n$ ,  $n \leq N$ , se ha realizado a partir de los valores reales de las log-cotizaciones  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ ,  $n \leq N$ .

### 3.5 Validación del Modelo Log-Normal con parámetros constantes

En este apartado vamos a proceder a validar el modelo Log-Normal por el método de momentos. Para ello utilizaremos las siguientes medidas de bondad de ajuste:

- MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) Error porcentual absoluto medio.
- RMSE (*Root Mean Squared Error*). Raíz del error cuadrático medio.
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.

Las medidas de bondad de ajuste tienen por objetivo medir el grado de adaptación del modelo, en este caso el Modelo Log-Normal a los datos reales, las cotizaciones de “Ferrovial”.

### Error porcentual absoluto medio (MAPE)

En primer lugar, el MAPE es el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados,  $\hat{S}_i$ , y los observados,  $S_i$ , dividido por las observaciones correspondientes y expresado en porcentaje. Es decir, si se pronostican  $k$  periodos y tenemos los valores reales de cada uno de ellos, el MAPE se calcula como:

$$MAPE = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}. \quad (3.5.1)$$

El MAPE se aplicará a las predicciones puntuales calculadas con el Modelo Log Normal y se considerará validado el modelo si se obtienen errores absolutos inferiores al 5 %.

### Error cuadrático medio (RMSE)

En segundo lugar, el RMSE mide la distancia por término medio entre los valores observados,  $S_i$ , y los estimados,  $\hat{S}_i$ . Cuanto menor sea el resultado del RMSE, menor será el error en el ajuste del modelo. Por tanto, su cálculo es el siguiente,

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (S_i - \hat{S}_i)^2}{k}} \quad (3.5.2)$$

Del mismo modo que en el caso del MAPE, el RMSE se aplicará a las predicciones puntuales de nuestra muestra.

### Validación por intervalos de confianza

En tercer lugar, vamos a construir y estudiar los intervalos de confianza (IC) del 95%. Para su cálculo se considera, por un lado, la amplitud del intervalo, el cual

dará la precisión de la estimación y deberá ser lo menor posible y por otro lado, la probabilidad de que el intervalo contenga el valor verdadero del parámetro a estimar, llamado nivel de confianza, que deberá ser lo mayor posible.

En este estudio se utilizará un nivel de confianza del 95%, A continuación se explica como se realiza el intervalo de confianza en el Modelo Log-Normal.

Si tenemos una muestra aleatoria simple  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\bar{x}$  es la media muestral. La variable aleatoria  $\bar{x}$  se distribuirá según una normal  $N\left[\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right]$  y si se supone que la población es  $N[\mu; \sigma^2]$  con  $\sigma$  conocida. Esta propiedad permite asegurar que la variable tipificada  $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  sigue una  $N[0; 1]$ , y por lo tanto, fijando un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , obtener el valor  $\lambda_{\alpha/2}$  tal que (siendo  $\lambda_{\alpha/2}$  es el valor de la abscisa de una Gaussiana que deja en cada una de sus colas una probabilidad de  $\alpha/2$  (siendo  $\alpha$  la probabilidad de “fallar”, es decir que el intervalo no contenga al valor)

$$P\left[\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_{\alpha/2}\right] \\ &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= P\left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= P\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional al nivel de confianza del  $(1 - \alpha)$  100% es:

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

En definitiva, se puede mejorar la precisión disminuyendo la confianza o aumentando el tamaño de la muestra  $n$ .



Por último, podemos calcular las predicciones puntuales mediante la aplicación de la solución del Modelo Log- Normal (3.2.2). Llamaremos a nuestra variable a estudiar  $Y$  y calcularemos su estimación, como se expresa:

$$\hat{Y} = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}, \quad W(t) \sim N[0; t]. \quad (3.5.3)$$

Para completar la predicción puntual utilizamos la varianza de la estimación, conociéndose así el error de la predicción puntual y obteniendo con ambos valores, el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel de significación  $\alpha = 0.05$  para la estimación de  $Y$  se muestra a continuación:

$$\hat{Y} \pm 1,96 \cdot S,$$

siendo  $S$  un estimador de la desviación típica de  $Y$ .

### 3.6 Validación del Modelo Log-Normal con parámetros variables

A continuación, procedemos a validar el Modelo Log-Normal de paso variable, calculando las medidas de bondad de ajuste RMSE Y MAPE como en el apartado anterior:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N-n} \sum_{i=n+1}^N \frac{|Y_i - \hat{Y}_i|}{Y_i}. \quad (3.6.1)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N-n} \sum_{i=n+1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2},$$

Obsérvese que  $Y_i - \hat{Y}_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ya que el proceso se inicia a partir de  $n + 1$ , tomando  $n = 1$  en la práctica.

Del mismo modo que para el caso del Modelo Log-Normal simple, El RMSE deberá ser cercano a cero y el MAPE menor del 5%. Es interesante representar ambos errores como una función de  $N$  desde  $n + 1, n + 2, \dots$ , hasta el tamaño de  $N$  de la muestra de cotización. De este modo se ve la evolución dinámica del RMSE y del MAPE.

Sí estas medidas son suficientemente pequeñas, se procederá a calcular las predicciones  $\hat{Y}_{N+1}, \hat{Y}_{N+2}, \dots$ . Específicamente, aplicando (3.4.15) la predicción probabilística estará dada por,

$$\hat{Y}_{N+1} \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_N \left(1 + \frac{1}{N}\right)}, \quad (3.6.2)$$

siendo, según (3.4.10) y (3.4.4),

$$\hat{Y}_{N+1} = Y_N + \hat{R}_N, \hat{R}_N = \frac{Y_N - Y_0}{N}, \hat{V}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_N)^2. \quad (3.6.3)$$

La predicción  $\hat{Y}_{N+2}$  se calcula de un modo similar, pero incorporando la predicción  $\hat{Y}_{N+1}$  a la información muestral, ya que,  $\hat{Y}_{N+1}$  no es conocida. De este modo se tiene

$$\hat{Y}_{N+2} \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_{N+1} \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)}, \quad (3.6.4)$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{N+2} &= \hat{Y}_{N+1} + \hat{R}_{N+1}, \hat{R}_{N+1} = \frac{\hat{Y}_{N+1} - Y_0}{N+1}, \\ \hat{V}_{N+1} &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_{N+1} - Y_N - \hat{R}_{N+1})^2 + \sum_{k=1}^N (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_N)^2. \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Se observa que  $\hat{V}_{N+1}$  corresponde a la misma expresión que (3.6.3) haciendo  $N = N + 1$ , ya que  $Y_{N+1}$  es desconocido.

Del mismo modo, se obtendría la predicción probabilística en el momento  $t = N + 3$ ,

$$\hat{Y}_{N+3} \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_{N+2} \left(1 + \frac{1}{N+2}\right)}, \quad (3.6.6)$$

siendo

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{N+3} &= \hat{Y}_{N+2} + \hat{R}_{N+2}, \hat{R}_{N+2} = \frac{\hat{Y}_{N+2} - Y_0}{N+2}, \\ \hat{V}_{N+2} &= \frac{1}{N+2} \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_{N+2} - \hat{Y}_{N+1} - \hat{R}_{N+2})^2 + (\hat{Y}_{N+1} - Y_N - \hat{R}_{N+1})^2 + \sum_{k=1}^N (Y_k - Y_{k-1} - \hat{R}_{N+2})^2, \end{aligned}$$

y este proceso se puede extender para construir predicciones en los sucesivos instantes  $t = N + 4, N + 5, \dots$

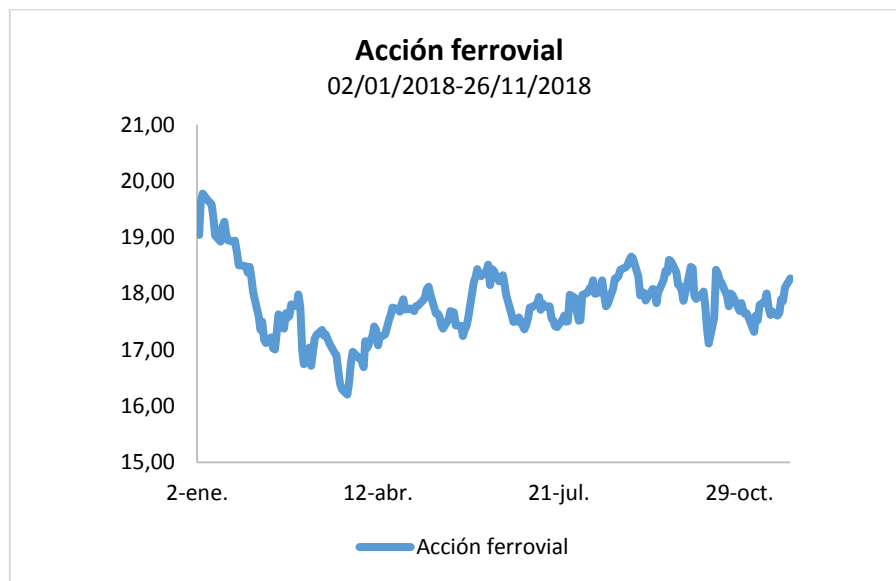


# 4 APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL CON PARÁMETROS VARIABLES

En este capítulo se aplicarán los conceptos y resultados teóricos expuestos en el Capítulo 3 sobre el Modelo Log-Normal con parámetros constantes y, la versión del Modelo Log-Normal con parámetros variables para la modelización de la acción de “Ferrovial” cotizada en el IBEX-35. Se ha puesto en práctica el Modelo Log-Normal escogiendo un horizonte temporal de 40 días para el Log-Normal con parámetros constantes y de 231 días para el Modelo Log-Normal con parámetros variables. En el Gráfico 4.1. se muestra la evolución de este subyacente desde el 2 de enero de 2018 hasta el 26 de noviembre de 2018. Dicho periodo se ha utilizado para la implementación del modelo durante la elaboración de este trabajo, pero puede adaptarse a cualquier período posterior.

La herramienta utilizada para la implementación del modelo ha sido la hoja de cálculo Excel®, mediante la cual hemos estimado los parámetros y validado el modelo. A continuación, procederemos a realizar predicciones y concluiremos mostrando los

resultados obtenidos y comparándolos con los valores reales que tomó la acción en el período estimado.



*Fuente: Elaboración propia.*

**Gráfico 4.1** Evolución de las cotizaciones de la acción "Ferrovial"

En la Tabla 4.1 se muestra esta información en un período seleccionado (el último mes 1-26 de noviembre de 2018) con fines ilustrativos, concretamente para describir el proceso de implementación del modelo con Excel®.

Fecha	Cotización
01/11/2018	17,64
02/11/2018	17,65
05/11/2018	17,40
06/11/2018	17,32
07/11/2018	17,61
08/11/2018	17,52
09/11/2018	17,80
12/11/2018	17,87
13/11/2018	18,00
14/11/2018	17,75
15/11/2018	17,62
16/11/2018	17,68
19/11/2018	17,61
20/11/2018	17,66
21/11/2018	17,90
22/11/2018	17,87
23/11/2018	18,11
26/11/2018	18,27

*Fuente: Elaboración propia.*

Tabla 4.1. Cotizaciones acción "Ferrovial". Período seleccionado: 1-26 de noviembre de 2018

#### 4.1 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal con parámetros constantes

La primera estimación de parámetros se va a realizar con el método de los momentos estadísticos, a partir de la aplicación de la solución del Modelo Log-Normal con parámetros constantes (véase Apartado 3.3) y a través de la implementación de la herramienta Excel®.

El horizonte temporal en el que vamos a realizar los cálculos es de 40 días, desde el 1 de octubre al 26 de noviembre de 2018, ya que se recomienda aplicar el modelo en un horizonte de entre 30 y 60 días para obtener mayor eficacia de las estimaciones probabilísticas aplicando el Modelo Log-Normal. Esta es una de las limitaciones del modelo con parámetros constantes, la cual motiva el estudio posterior de una formulación con parámetros variables.

En primer lugar, para aplicar el modelo es conveniente trabajar con los logaritmos de las cotizaciones diarias, también denominadas log-cotizaciones (véase Tabla 4.1.1).

$\Delta t$	FECHA	CIERRE	Log-retornos
0	01/10/2018	18,30	
1	02/10/2018	18,47	0,009246734
2	03/10/2018	18,45	-0,001083424
3	04/10/2018	17,96	-0,026917308
4	05/10/2018	17,91	-0,003067059
5	08/10/2018	17,99	0,004736045
6	09/10/2018	18,04	0,002498266
7	10/10/2018	17,80	-0,013396795
8	11/10/2018	17,36	-0,02503687
9	12/10/2018	17,11	-0,014217561
10	15/10/2018	17,56	0,0259605
11	16/10/2018	18,42	0,047813443
12	17/10/2018	18,35	-0,003807456
13	18/10/2018	18,24	-0,00628675
14	19/10/2018	18,19	-0,002470832
15	22/10/2018	17,96	-0,01272493
16	23/10/2018	17,78	-0,010354087
17	24/10/2018	18,00	0,012578782
18	25/10/2018	17,97	-0,001668057
19	26/10/2018	17,90	-0,003902988
20	29/10/2018	17,69	-0,01208389
21	30/10/2018	17,83	0,008165609
22	31/10/2018	17,70	-0,007317792
23	01/11/2018	17,64	-0,003679076
24	02/11/2018	17,65	0,00085022
25	05/11/2018	17,40	-0,014265577
26	06/11/2018	17,32	-0,004897028
27	07/11/2018	17,61	0,016893745
28	08/11/2018	17,52	-0,005123837
29	09/11/2018	17,80	0,015574433
30	12/11/2018	17,87	0,003925973
31	13/11/2018	18,00	0,007528266
32	14/11/2018	17,75	-0,013986242
33	15/11/2018	17,62	-0,007350895
34	16/11/2018	17,68	0,003399437
35	19/11/2018	17,61	-0,004251105
36	20/11/2018	17,66	0,003119243
37	21/11/2018	17,90	0,013219149
38	22/11/2018	17,87	-0,001677853
39	23/11/2018	18,11	0,013344652
40	26/11/2018	18,27	

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.1.1 Log- cotizaciones de la acción "Ferrovial" durante el período objeto de modelización en el Modelo Log-Normal con parámetros constantes

Posteriormente, procedemos a calcular las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  aplicando las fórmulas obtenidas en (3.3.6) (véase Capítulo 3):

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}},$$

donde  $\bar{U}$  y  $S^2$  son la media y la cuasivarianza muestral de las log-cotizaciones. El paso temporal que se ha tomado para aplicar el modelo es:  $\Delta t = 1/252$ , siendo 252 los días hábiles de cotización del IBEX-35. Los resultados de los parámetros  $\bar{U}$  y  $S^2$  se detallan en la Tabla 4.1.2

$\bar{U}$	$S^2$
-4,78599900E-05	0,00018409

*Fuente: Elaboración propia*

Tabla 4.1.2 Media y varianza de los Log- retornos. Modelo Log-Normal de parámetros constantes

Por tanto, la estimación de los parámetros de  $\mu$  y  $\sigma$  es la siguiente:

$$\mu = 0,02314775, \quad \sigma = 0,21538619.$$

## 4.2 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal de paso variable

El primer paso será llamar a los instantes temporales, las cotizaciones diarias,  $t_k = k$  siendo ,  $k = 0,1,2, \dots, 231$  y aplicar logaritmos a las respectivas cotizaciones, también denominadas log-cotizaciones  $Y_k = \ln(S_k)$  de la forma que se observa en la Figura 4.2.1 en la Celda D3.





=(1/CONTARA(SES3:E3)\*(H3-I3+A3\*I3))

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Indice	Fecha	Cotización	Log cotizaciones $Y_t$	R	$Y_t - Y_{t-1}$	$(Y_t - Y_{t-1})^2$	suma $(Y_t - Y_{t-1})^2$	$2R * \text{SUMA}(Y_t - Y_{t-1})$	$R^2$	V	$YN+1=YN+R$	IC SUPERIOR
0	02/01/2018	19.09	2,948902686									
1	03/01/2018	19.04	2,946542029	-0,00236066	-0,00236066	5,5727E-06	5,5727E-06	1,11454E-05	5,5727E-06	E3)*(H3-I3+A3*I3)	2,948902686	2,948902686
2	04/01/2018	19.63	2,976804264	0,01395079	0,03026223	0,0009158	0,000921376	0,00078498	0,00038925		2,944181373	3,042278515
3	05/01/2018	19.78	2,984418514	0,01183861	0,00761425	5,7977E-05	0,000979352	0,000840916	0,00042046		2,990755052	3,045144801
4	08/01/2018	19.65	2,978077338	0,00729366	-0,00634118	4,0211E-05	0,001019563	0,00042558	0,00021279		2,996257123	3,027023062
5	09/01/2018	19.63	2,976804264	0,00558032	-0,00127307	1,6207E-06	0,001021184	0,000311399	0,0001557		2,985371001	3,019427426
6	10/01/2018	19.59	2,975019232	0,00435276	-0,00178503	3,1863E-06	0,00102437	0,000227358	0,00011368		2,982384579	3,012611187
7	11/01/2018	19.33	2,961399594	0,00178527	-0,01361964	0,00018549	0,001209864	4,46208E-05	2,231E-05		2,97937199	2,991973621
8	12/01/2018	19.03	2,946016681	-0,00036075	-0,01538291	0,00023663	0,001446498	2,08226E-06	1,0411E-06		2,963184867	2,973670378
9	15/01/2018	18.92	2,940219564	-0,00096479	-0,00579712	3,3607E-05	0,001480105	1,67548E-05	8,3774E-06		2,945655931	2,966269285
10	16/01/2018	19.19	2,95438931	0,00054866	0,01416975	0,00020078	0,001680887	6,02061E-06	3,0103E-06		2,939254772	2,981779713
11	17/01/2018	19.28	2,958808919	0,00090057	0,00441961	1,9533E-05	0,00170042	1,78424E-05	8,9212E-06		2,954937972	2,985756065
12	18/01/2018	19.06	2,947591898	-0,00010923	-0,01121702	0,00012582	0,001826241	2,86361E-07	1,4318E-07		2,959709486	2,972659189
13	19/01/2018	18.95	2,941540044	-0,00056636	-0,00605185	3,6625E-05	0,001862866	8,33977E-06	4,1699E-06		2,947482666	2,965619863
14	22/01/2018	18.93	2,940483799	-0,00060135	-0,00105625	1,1157E-06	0,001863982	1,01254E-05	5,0627E-06		2,940973687	2,963670511
15	23/01/2018	18.94	2,941276088	-0,00050844	-0,00079229	6,2772E-07	0,00186461	7,75533E-06	3,8777E-06		2,93988245	2,963640029
16	24/01/2018	18.74	2,930393432	-0,00115683	-0,01088266	0,00011843	0,001983042	4,28241E-05	2,1412E-05		2,940767648	2,953368722
17	25/01/2018	18.50	2,917770732	-0,00183129	-0,0126227	0,00015933	0,002142374	0,000114023	5,7012E-05		2,929236604	2,942720428
18	26/01/2018	18.50	2,917770732	-0,00172955	0	0	0,002142374	0,000107689	5,3844E-05		2,915939441	2,942054869
19	29/01/2018	18.49	2,916959592	-0,00168122	-0,00081114	6,5795E-07	0,002143032	0,000107406	5,3703E-05		2,916041179	2,940781491
20	30/01/2018	18.37	2,910718899	-0,00190919	-0,00624069	3,8946E-05	0,002181978	0,0001458	7,29E-05		2,915278377	2,935356276
21	31/01/2018	18.48	2,916418467	-0,00154687	0,00569957	3,2485E-05	0,002214464	0,000100498	5,0249E-05		2,90880971	2,939516229
22	01/02/2018	18.29	2,906354462	-0,00193401	-0,010064	0,00010128	0,002315748	0,000164577	8,2289E-05		2,914871599	2,931312776
23	02/02/2018	18.02	2,891482252	-0,00249654	-0,01487221	0,00022118	0,00253693	0,000286705	0,00014335		2,904420452	2,920079664
24	05/02/2018	17.60	2,867614771	-0,003387	-0,02386748	0,00056966	0,003106587	0,000550644	0,00027532		2,888985712	2,903316321
25	06/02/2018	17.35	2,853592506	-0,00381241	-0,01402226	0,00019662	0,003303211	0,000726722	0,00036336		2,864227774	2,892498074
26	07/02/2018	17.50	2,862200881	-0,0033468	0,00860837	7,4104E-05	0,003377315	0,000578246	0,00028912		2,849780099	2,898651803
27	08/02/2018	17.18	2,843745917	-0,0038947	-0,01845496	0,00034059	0,003717901	0,000819107	0,00040955		2,858866196	2,885231098
28	09/02/2018	17.12	2,840247371	-0,00388055	-0,00349855	1,224E-05	0,003730141	0,000843284	0,00042164		2,839851221	2,88205984

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.2.3 Obtención de la estimación del parámetro  $\hat{V}_n$ . Modelo Log-Normal de parámetros variables

Un ejemplo del cálculo de los parámetros puede verse en el siguiente ejemplo para el periodo  $n = 2$  :

$$\hat{R}_2 = \frac{Y_2 - Y_0}{2}, \quad \hat{V}_2 = \frac{1}{2} \left[ (Y_1 - Y_0 - \hat{R}_2)^2 + (Y_2 - Y_1 - \hat{R}_2)^2 \right]. \quad (4.2.1)$$

### 4.3 Validación del Modelo Log-Normal

La validación del modelo se lleva a cabo con posterioridad a la estimación de los parámetros necesarios para la aplicación del Modelo Log-Normal de parámetros constantes y variables. Esta validación nos permitirá aceptar la solución del modelo para el caso concreto de una acción de la compañía “Ferrovial” siendo los criterios estadísticos empleados, por un lado, las medidas de bondad de ajuste y por otro lado, la construcción de intervalos de confianza. El principal objeto de este estudio es, en base a los resultados obtenidos, poder validar las predicciones para una acción de la compañía “Ferrovial” en el período estudiado, indicando que son fiables y que no dependen de los métodos estadísticos y datos empleados.

En este apartado, se procederá a calcular la función media (estimación puntual de la acción “Ferrovial”) y a construir los correspondientes intervalos de confianza (estimación por intervalos de la acción “Ferrovial” durante el período seleccionado). Se calcularán en primer lugar, para la validación del modelo Log-Normal con parámetros constantes y posteriormente para el Modelo Log-Normal con parámetros variables. Por último, se realizarán las predicciones para cada modelo y se representarán gráficamente los resultados obtenidos por ambas metodologías.

#### 4.3.1 Validación del Modelo Log-Normal con parámetros constantes

Una vez estimados los parámetros del Modelo Log-Normal de parámetros constantes (véase Apartado 4.1) procedemos a calcular la función media, o estimaciones puntuales de la acción “Ferrovial” y su correspondiente desviación típica teórica para la acción de “Ferrovial” durante el periodo de tiempo seleccionado. Para el cálculo, se ha utilizado la herramienta Excel y los resultados se presentan en la Tabla 4.3.1.1

$\Delta t$	FECHA	CIERRE	E [S(t)]	$\sigma$ [S(t)]
0	01/10/2018	18,30	18,30	0,000
1	02/10/2018	18,47	18,30	0,003
2	03/10/2018	18,45	18,30	0,007
3	04/10/2018	17,96	18,31	0,010
4	05/10/2018	17,91	18,31	0,013
5	08/10/2018	17,99	18,31	0,017
6	09/10/2018	18,04	18,31	0,020
7	10/10/2018	17,80	18,31	0,024
8	11/10/2018	17,36	18,31	0,027
9	12/10/2018	17,11	18,32	0,030
10	15/10/2018	17,56	18,32	0,034
11	16/10/2018	18,42	18,32	0,037
12	17/10/2018	18,35	18,32	0,041
13	18/10/2018	18,24	18,32	0,044
14	19/10/2018	18,19	18,32	0,047
15	22/10/2018	17,96	18,33	0,051
16	23/10/2018	17,78	18,33	0,054
17	24/10/2018	18,00	18,33	0,058
18	25/10/2018	17,97	18,33	0,061
19	26/10/2018	17,90	18,33	0,064
20	29/10/2018	17,69	18,33	0,068
21	30/10/2018	17,83	18,34	0,071
22	31/10/2018	17,70	18,34	0,075
23	01/11/2018	17,64	18,34	0,078
24	02/11/2018	17,65	18,34	0,081
25	05/11/2018	17,40	18,34	0,085
26	06/11/2018	17,32	18,34	0,088
27	07/11/2018	17,61	18,35	0,092
28	08/11/2018	17,52	18,35	0,095
29	09/11/2018	17,80	18,35	0,098
30	12/11/2018	17,87	18,35	0,102
31	13/11/2018	18,00	18,35	0,105
32	14/11/2018	17,75	18,35	0,109
33	15/11/2018	17,62	18,36	0,112
34	16/11/2018	17,68	18,36	0,116
35	19/11/2018	17,61	18,36	0,119
36	20/11/2018	17,66	18,36	0,122
37	21/11/2018	17,90	18,36	0,126
38	22/11/2018	17,87	18,36	0,129
39	23/11/2018	18,11	18,37	0,133
40	26/11/2018	18,27	18,37	0,136

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Tabla 4.3.1.1 Cálculo de la media y la desviación típica de la acción "Ferrovial" en el modelo Log-Normal con parámetros constantes

Para el cálculo de la media y la varianza se han utilizado las fórmulas explicadas en el Capítulo 3 (3.2.5) y (3.2.6) y el incremento temporal 1/252.

Una vez calculadas la media y la varianza teóricas de la acción “Ferrovial” durante el periodo seleccionado, puede validarse el modelo con medidas de bondad de ajuste y determinarse los intervalos de confianza.

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	DI	FECHA	CIERRE	E [St]	σ [St]	[PREDICCIÓN VALOR ACCIÓN] <sup>2</sup>	[PREDICCIÓN VALOR ACCIÓN]/VALOR ACCIÓN	MAPE			
2		01/10/2018	18,35	18,35	0,000	0,000	0,000	0,000%			
3		02/10/2018	18,47	18,36	0,003	0,028	0,009	0,000%			
4		03/10/2018	18,45	18,36	0,007	0,022	0,008	0,568%			
5		04/10/2018	17,96	18,31	0,010	0,119	0,019	0,907%			
6		05/10/2018	17,91	18,31	0,013	0,161	0,022	1,174%			
7		08/10/2018	17,99	18,31	0,017	0,101	0,018	1,273%			
8		09/10/2018	18,04	18,31	0,020	0,076	0,015	1,309%			
9		10/10/2018	17,80	18,31	0,024	0,267	0,029	1,509%			
10		11/10/2018	17,38	18,31	0,027	0,919	0,055	1,955%			
11		12/10/2018	17,11	18,32	0,030	1,452	0,070	2,464%	MAPE		2,8136%
12		15/10/2018	17,58	18,32	0,034	0,573	0,043	2,631%	RMSE		0,573342
13		16/10/2018	18,42	18,32	0,037	0,010	0,006	2,458%			
14		17/10/2018	18,35	18,32	0,041	0,001	0,002	2,282%			
15		18/10/2018	18,24	18,32	0,044	0,008	0,005	2,153%			
16		18/10/2018	18,19	18,32	0,047	0,018	0,007	2,058%			
17		22/10/2018	17,96	18,33	0,051	0,133	0,020	2,056%			
18		23/10/2018	17,78	18,33	0,054	0,305	0,031	2,118%			
19		24/10/2018	18,08	18,33	0,058	0,108	0,018	2,102%			
20		25/10/2018	17,97	18,33	0,061	0,130	0,020	2,097%			
21		26/10/2018	17,90	18,33	0,064	0,187	0,024	2,113%			
22		29/10/2018	17,69	18,33	0,068	0,421	0,037	2,187%			
23		30/10/2018	17,83	18,34	0,071	0,255	0,028	2,216%			
24		31/10/2018	17,70	18,34	0,075	0,406	0,036	2,276%			
25		01/11/2018	17,64	18,34	0,078	0,495	0,040	2,348%			
26		02/11/2018	17,65	18,34	0,081	0,477	0,039	2,410%			
27		05/11/2018	17,49	18,34	0,085	0,888	0,054	2,526%			
28		06/11/2018	17,32	18,34	0,088	1,058	0,059	2,652%			
29		07/11/2018	17,61	18,35	0,092	0,541	0,042	2,707%			
30		08/11/2018	17,52	18,35	0,095	0,684	0,047	2,766%			
31		09/11/2018	17,89	18,35	0,098	0,307	0,031	2,787%			
32		12/11/2018	17,87	18,35	0,102	0,236	0,027	2,785%			
33		13/11/2018	18,00	18,35	0,105	0,124	0,020	2,759%			
34		14/11/2018	17,75	18,35	0,109	0,365	0,034	2,779%			
35		15/11/2018	17,62	18,36	0,112	0,541	0,042	2,820%			
36		16/11/2018	17,68	18,36	0,116	0,459	0,038	2,849%			
37		19/11/2018	17,61	18,36	0,119	0,568	0,043	2,888%			
38		20/11/2018	17,66	18,36	0,122	0,491	0,040	2,918%			
39		21/11/2018	17,90	18,36	0,126	0,218	0,026	2,910%			
40		16/12/2018	17,87	18,36	0,129	0,249	0,028	2,907%			
41		19/12/2018	18,11	18,37	0,133	0,068	0,014	2,870%			
42		20/12/2018	18,27	18,37	0,136	0,010	0,006	2,814%			

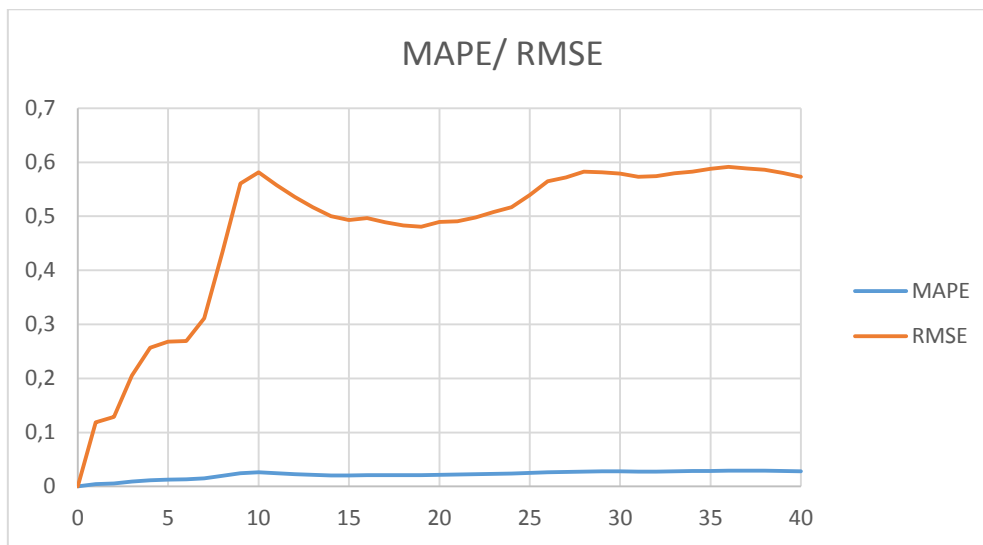
Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Figura 4.3.1.1 Cálculo medidas bondad de ajuste: RMSE y MAPE utilizando las estimaciones de los parámetros obtenidas por el método de los momentos para el Modelo Log-Normal de parámetros constantes

En la Figura 4.3.1.1 se muestran los resultados del MAPE y el RMSE. Tal como se indicó en el Capítulo 3, Apartado 5, el valor del MAPE no tiene que ser superior al 5% para que se considere un valor tolerable. En este caso, observamos que el valor es 2,8136% y por tanto nuestro modelo tiene un alto grado de aceptación.

Para su cálculo primero se obtiene las diferencias en términos absolutos entre el dato real y la estimación obtenida del mismo, para cada uno de los días de cotización y posteriormente, se divide entre el correspondiente valor observado de cada día de cotización en cuestión (véase columna G, Figura 4.3.1.1). Por último, se aplica la función promedio a cada uno de los datos calculados anteriormente para cada día de cotización

de nuestra muestra. La comparación entre el MAPE y el RMSE se observa en el Gráfico 4.3.1.1



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.3.1.1 MAPE/RMSE. Modelo Log-Normal de parámetros constantes

Tal como se indica también en el Capítulo 3, Apartado 5, cuanto menor sea el valor del RMSE, menor será el error en el modelo y su estimación. Para su cálculo utilizamos la diferencia entre el valor estimado y el valor real y lo elevamos al cuadrado (véase columna F) y por último aplicamos la función promedio. El valor obtenido es 0,573342, el cual es bastante bajo e indica que nuestro modelo tiene un alto grado de aceptación.

Para completar la validación del modelo construiremos los intervalos de confianza (I.C.) al 95%, según la metodología explicada en el Capítulo 4, Apartado 5. Por tanto, el intervalo de confianza a un nivel de significación  $\alpha = 5\%$  para la estimación de  $S(t)$  es:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \sigma[S(t)].$$

En la Tabla 4.3.1.2 se muestra el cálculo de los intervalos de confianza teóricos, que han sido construidos a partir del cálculo de la media y la varianza teóricas como se indicó previamente en la Tabla 4.3.1.1. Para obtener el extremo superior del I.C. se suma a la estimación puntual calculada con el modelo teórico Log-Normal, 1,96 veces el valor de la desviación típica obtenida, mientras que para hallar el extremo inferior del I.C., la operación a seguir es exactamente la misma, pero, sustituyendo la suma por una resta.

El objetivo de los intervalos de confianza es conocer entre qué valores fluctuará en el futuro el precio de la acción con una probabilidad del 95%, y así comprobar si las estimaciones proporcionadas por el modelo son correctas.

En el Gráfico 4.3.1.2 se observa cómo la evolución de los datos reales durante el período seleccionado y la predicción realizada vía el Modelo Log-Normal está dentro de los I.C. al 95%, y por tanto, podemos afirmar que el Modelo Log-Normal recoge las fluctuaciones de la acción de la compañía “Ferrovial” correctamente durante el periodo seleccionado.

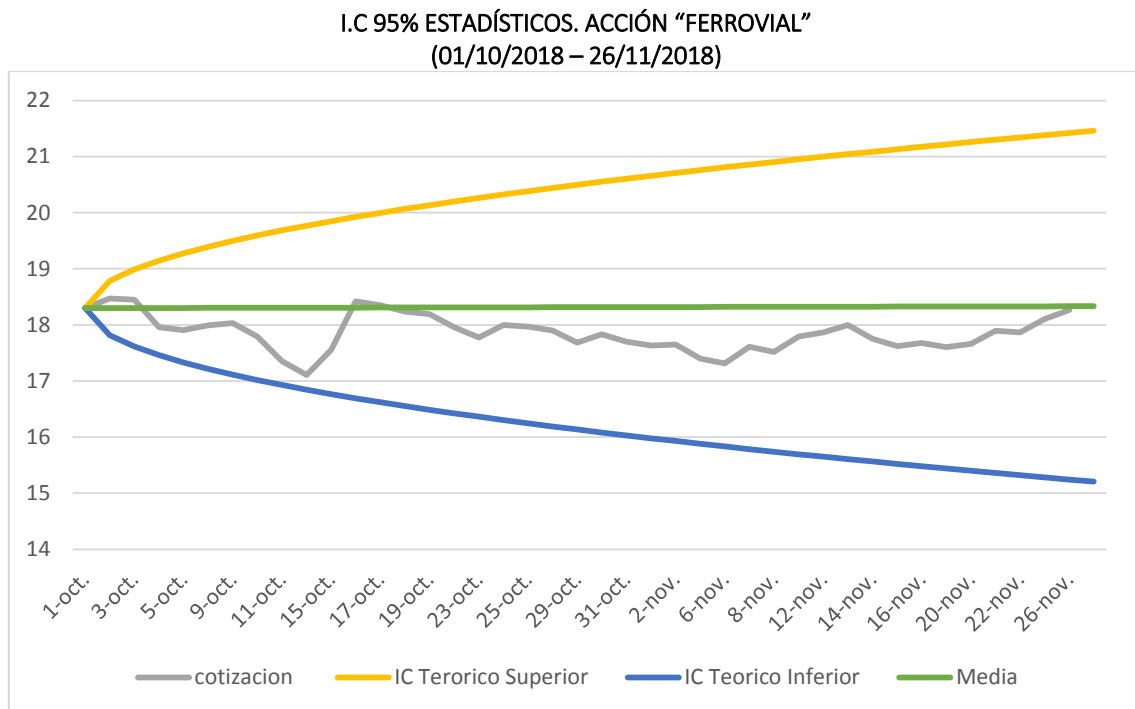
El cálculo de las medidas de bondad de ajuste utilizadas ha permitido validar el modelo Log-Normal para la muestra seleccionada.

E [St]	$\sigma$ [St]	I.C. Superior	I.C. Inferior
18,300	0,000	18,300	18,300
18,302	0,003	18,308	18,295
18,303	0,007	18,317	18,290
18,305	0,010	18,325	18,285
18,307	0,013	18,333	18,280
18,308	0,017	18,341	18,275
18,310	0,020	18,350	18,270
18,312	0,024	18,358	18,265
18,313	0,027	18,366	18,261
18,315	0,030	18,375	18,256
18,317	0,034	18,383	18,251
18,318	0,037	18,391	18,246
18,320	0,041	18,400	18,241
18,322	0,044	18,408	18,236
18,324	0,047	18,416	18,231
18,325	0,051	18,425	18,226
18,327	0,054	18,433	18,221
18,329	0,058	18,441	18,216
18,330	0,061	18,450	18,211
18,332	0,064	18,458	18,206
18,334	0,068	18,466	18,201
18,335	0,071	18,475	18,196
18,337	0,075	18,483	18,191
18,339	0,078	18,492	18,186
18,340	0,081	18,500	18,181
18,342	0,085	18,508	18,176
18,344	0,088	18,517	18,171
18,345	0,092	18,525	18,166
18,347	0,095	18,533	18,161
618,349	0,098	18,542	18,156
18,350	0,102	18,550	18,151
18,352	0,105	18,559	18,146
18,354	0,109	18,567	18,141
18,356	0,112	18,575	18,136
18,357	0,116	18,584	18,131
18,359	0,119	18,592	18,126
18,361	0,122	18,601	18,121
18,362	0,126	18,609	18,115
18,364	0,129	18,618	18,110
18,366	0,133	18,626	18,105
18,367	0,136	18,634	18,100

Fuente: Elaboración propia. (Excel®).

Tabla 4.3.1.2 Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza. Modelo Log-Normal de parámetros constantes





Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.3.1.2 I.C (95%) para la acción de "Ferrovial" para el método de parámetros constantes

### 4.3.2 Validación del Modelo Log-Normal de paso variable

Una vez calculados los parámetros (véase Apartado 4.2), el siguiente paso será obtener la estimación puntual de las log-cotizaciones diarias y la estimación de  $R$  de la forma que se indica en (3.4.10) mediante las  $\hat{R}_n$  calculadas en (3.4.6), respectivamente.

En la Figura 4.3.2.1 se detalla el cálculo de la estimación puntual  $Y_2$  la cual corresponde con la Celda L4, resultado de la suma de la Celda D3, que representa la log cotización en  $k = 1$ , y la Celda E3, que corresponde con la  $\hat{R}_1$  calculada anteriormente.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Indice	Fecha	Cotización	Log cotizaciones $Y_t$	R	$Y_t - Y_{t-1}$	$(Y_t - Y_{t-1})^2$	suma $(Y_t - Y_{t-1})^2$	$2R * SUMA(Y_t - Y_{t-1})$	R^2	V	$YN+1 = YN+R$	IC SUPERIOR
0	02/01/2018	19,09	2,948902686									
1	03/01/2018	19,04	2,946542029	-0,00236066	-0,00236066	5,5727E-06	5,5727E-06	1,11454E-05	5,5727E-06	0,0000000000	2,948902686	2,944181373
2	04/01/2018	19,63	2,976804264	0,01395079	0,03026223	0,0009158	0,0009158	0,000921376	0,000778498	0,00038925	0,00046608776	3,042278515
3	05/01/2018	19,78	2,984418514	0,01183861	0,00761425	5,7977E-05	0,00079352	0,000840916	0,00042046	0,00046660344	2,990755052	3,045144801
4	08/01/2018	19,65	2,978077338	0,00729366	-0,00634118	4,0211E-05	0,001019563	0,00042558	0,00021279	0,00036128575	2,996257123	3,027023062
5	09/01/2018	19,63	2,976804264	0,00558032	-0,00127307	1,6207E-06	0,001021184	0,000311399	0,0001557	0,00029765647	2,985371001	3,019427426
6	10/01/2018	19,59	2,975019232	0,00435276	-0,00178503	3,1863E-06	0,00102437	0,000227358	0,00011368	0,00024651431	2,982384579	3,012611187
7	11/01/2018	19,33	2,961399594	0,00178527	-0,01361964	0,00018549	0,001209864	4,46208E-05	2,231E-05	0,00018877377	2,97937199	2,991973621
8	12/01/2018	19,03	2,946016681	-0,00036075	-0,01538291	0,00023663	0,001446498	2,08226E-06	1,0411E-06	0,00018159315	2,963184867	2,973670378
9	15/01/2018	18,92	2,940219564	-0,00096479	-0,00579712	3,3607E-05	0,001480105	1,67548E-05	8,3774E-06	0,00017097187	2,945655931	2,966269285
10	16/01/2018	19,19	2,95438931	0,00054866	0,01416975	0,00020078	0,001680887	6,02061E-06	3,0103E-06	0,00017049692	2,939254772	2,981779713
11	17/01/2018	19,28	2,958808919	0,00090057	0,00441961	1,9533E-05	0,00170042	1,78424E-05	8,9212E-06	0,00016188279	2,954937972	2,985756065
12	18/01/2018	19,06	2,947591898	-0,0010923	-0,01121702	0,00012582	0,001826241	2,86361E-07	1,4318E-07	0,00015230609	2,959709486	2,972659189
13	19/01/2018	18,95	2,941540044	-0,00056636	-0,00605185	3,6625E-05	0,001862866	8,33977E-06	4,1699E-06	0,00014682576	2,947482666	2,965619863
14	22/01/2018	18,93	2,940483799	-0,00060135	-0,00105625	1,1157E-06	0,001863982	1,01254E-05	5,0627E-06	0,00013748101	2,940973687	2,963670511
15	23/01/2018	18,94	2,941276088	-0,00050844	0,00079229	6,2772E-07	0,00186461	7,75533E-06	3,8777E-06	0,00012766795	2,93988245	2,963640029
16	24/01/2018	18,74	2,930393432	-0,00115683	-0,01088266	0,00011843	0,001983042	4,28241E-05	2,1412E-05	0,00014267563	2,940767648	2,953368722
17	25/01/2018	18,50	2,917770732	-0,00183129	-0,0126227	0,00015933	0,002142374	0,000114023	5,7012E-05	0,00017632644	2,929236604	2,942720428
18	26/01/2018	18,50	2,917770732	-0,00172955	0	0	0	0,000107689	5,3844E-05	0,000107689	2,915939441	2,942054869
19	29/01/2018	18,49	2,916959592	-0,00168122	-0,00081114	6,5795E-07	0,002143032	0,000107406	5,3703E-05	0,00016084142	2,916041719	2,940781491
20	30/01/2018	18,37	2,910718899	-0,00190919	-0,00624069	3,8946E-05	0,002181978	0,0001458	7,29E-05	0,00017470900	2,915278377	2,93536276
21	31/01/2018	18,48	2,916418467	-0,00154687	0,00569957	3,2485E-05	0,002214464	0,000100498	5,0249E-05	0,00015091383	2,90880971	2,939516229
22	01/02/2018	18,29	2,906354462	-0,00193401	-0,010064	0,00010128	0,002315748	0,000164577	8,2289E-05	0,00018006917	2,914871599	2,931312776
23	02/02/2018	18,02	2,891482252	-0,00249654	-0,01487221	0,00022118	0,00253693	0,000286705	0,00014335	0,00024118834	2,904420452	2,920079664
24	05/02/2018	17,60	2,867614771	-0,003387	-0,02386748	0,00056966	0,003106587	0,000550644	0,00027532	0,00038181952	2,888985712	2,903316321
25	06/02/2018	17,35	2,853592506	-0,00381241	-0,01402226	0,00019662	0,003303211	0,000726722	0,00036336	0,00046642076	2,864227774	2,892948074
26	07/02/2018	17,50	2,862200881	-0,00333468	0,00860837	7,4104E-05	0,00377315	0,000578246	0,00028912	0,00039677968	2,849780099	2,89651803
27	08/02/2018	17,18	2,843745917	-0,0038947	-0,01845496	0,00034059	0,00371901	0,000819107	0,00040955	0,00051691629	2,858866196	2,885231098
28	09/02/2018	17,12	2,840247371	-0,00388055	-0,00349855	1,224E-05	0,003730141	0,000843284	0,00042164	0,00052474407	2,839851221	2,88205984

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.3.2.1 Obtención de la estimación puntual de la log-cotización  $\hat{Y}_{n+1}$  en el modelo de parámetros variables

Por tanto, aplicando la formula (3.4.10), vista en el Capítulo 3, el cálculo de la estimación para el periodo  $n = 2$  es de la siguiente forma:

$$\hat{Y}_2 = Y_1 + \hat{R}_1. \quad (4.3.2.1)$$

Como se observa en (4.3.2.1) para calcular  $\hat{Y}_2$  se ha utilizado la log-cotización  $Y_1$  y el parámetro  $\hat{R}_1$ , es decir, el procedimiento consiste en calcular la estimación a partir de los datos del día anterior.

Para completar la estimación es necesario construir el intervalo de confianza (I.C.) al 95% y por tanto, a un nivel  $\alpha = 5\%$  (véase Capítulo 3) aplicando a la formula (3.4.15). En la Figura 4.3.2.2 se muestra su cálculo en Excel®. El mismo proceso se repite en todas las cotizaciones. Por ejemplo, para  $n = 1$  se calcula a través de la siguiente fórmula

$$\hat{Y}_2 \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}. \quad (4.3.2.2)$$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
Indice	Fecha	Cotización	Log cotizaciones Y <sub>t</sub>	Y <sub>t-1</sub>	Y <sub>t-2</sub>	suma(Y <sub>t-1</sub> ) <sup>2</sup>	suma(Y <sub>t-2</sub> ) <sup>2</sup>	2R*SUMA(Y <sub>t-1</sub> )	R <sup>2</sup>	V	YN+1+TNH	IC SUPERIOR	IC INFERIOR 1,96	(valor acción-predicción)/valor accó	(valor acción-predicción) <sup>2</sup>	MAPE	
0	02/01/2018	15.09	2,94892688								0,0000000000	2,94892688	2,94892688				
1	03/01/2018	15.04	2,946542029	-0,0023607	-0,0023607	5,5727E-06	5,5727E-06	1,1154E-05	5,5727E-06	0,0000000000	2,946542029	2,946542029	2,946542029	0,000801162	5,5727E-06	0,00080	
2	04/01/2018	15.63	2,978804264	0,01195079	0,0026223	0,0009138	0,0009138	0,00077898	0,00038925	0,00046068776	2,944181373	3,042278515	2,93921359	0,000479316	0,000932127	0,000314	
3	05/01/2018	15.78	2,964418514	0,0118381	0,00761225	5,7977E-05	0,00079352	0,000840916	0,00042046	0,00046662044	2,990755622	3,043144801	2,94782944	0,00077756	1,3389E-05	0,00233	
4	06/01/2018	15.65	2,978077338	0,00729366	-0,0064812	4,0211E-05	0,001019563	0,00042558	0,00021279	0,00036128575	2,996257123	3,027023062	2,94371894	0,001510314	8,26261E-05	0,00213	
5	08/01/2018	15.63	2,978804264	0,00588032	-0,0012791	1,6207E-06	0,001022184	0,00031199	0,0001557	0,00029765641	2,982384579	3,019427426	2,94534173	0,000412622	1,46739E-05	0,00158	
6	09/01/2018	15.59	2,975019232	0,00435276	-0,001785	3,1863E-06	0,00102437	0,000227358	0,00011368	0,00029765641	2,982384579	3,019427426	2,94534173	0,000412622	1,46739E-05	0,00158	
7	11/01/2018	15.33	2,961395959	0,00178527	-0,0136196	0,00018549	0,001209864	4,46208E-05	2,31E-05	0,0001877377	2,97937199	2,991979621	2,93439611	0,000886984	4,61439E-05	0,00148	
8	13/01/2018	15.03	2,946016681	-0,003668	-0,0153829	0,00023663	0,00146498	2,08226E-06	1,9411E-06	0,0001819315	2,961184687	2,973670378	2,91760148	0,000718449	3,68431E-05	0,00139	
9	15/01/2018	15.92	2,940219564	-0,0009648	-0,0057971	3,3607E-05	0,001480105	1,67548E-05	8,3774E-06	0,00017097187	2,946559531	2,966269385	2,912240623	0,000205441	3,28379E-06	0,00126	
10	16/01/2018	15.19	2,95438933	0,00054866	0,01416975	0,00020078	0,001688087	6,02061E-06	3,0103E-06	0,00017049892	2,939254772	2,981779713	2,92898623	0,000512273	2,29054E-05	0,00118	
11	17/01/2018	15.28	2,958808919	0,00090057	0,00441961	1,9533E-05	0,00170042	1,78424E-05	8,9212E-06	0,0001688279	2,954937972	2,985756005	2,93366291	0,00018934	1,3622E-06	0,00108	
12	18/01/2018	15.06	2,947991898	-0,0001092	-0,011217	0,00012582	0,001826241	2,86361E-07	1,4318E-07	0,0001529069	2,959709486	2,972695189	2,92230614	0,000342894	1,22263E-05	0,00102	
13	19/01/2018	15.95	2,941500044	-0,0005664	-0,0060519	1,6625E-05	0,001862866	18,33977E-06	4,1899E-06	0,00014682378	2,947482666	2,965618863	2,91632751	0,00015463	2,7182E-06	0,00096	
14	22/01/2018	15.93	2,940483799	-0,0006013	-0,0010562	1,1157E-06	0,001863982	1,01254E-05	5,9627E-06	0,00013748101	2,940973687	2,963670511	2,91609439	1,19001E-05	1,71422E-06	0,00089	
15	23/01/2018	15.94	2,941276088	-0,0005084	-0,00079229	6,7272E-07	0,00186461	7,75333E-06	3,8777E-06	0,00012766795	2,94988245	2,963640029	2,91789527	3,1588E-05	1,29482E-06	0,00079	
16	24/01/2018	15.74	2,930393432	-0,0011568	-0,0010827	0,00011843	0,001983042	4,28241E-05	2,1412E-05	0,00014267563	2,940767648	2,953368722	2,90510449	0,000212163	6,7262E-06	0,00079	
17	25/01/2018	15.60	2,917770732	-0,0018313	-0,012627	0,00015933	0,002142374	0,00014023	5,7012E-05	0,00017832644	2,929236604	2,942702428	2,88915845	0,000211377	7,79313E-06	0,00076	
18	26/01/2018	15.60	2,917770732	-0,0017296	0	0	0,002142374	0,000107089	5,3844E-05	0,0001688245	2,915939441	2,942054889	2,89002749	3,4868E-05	1,86131E-07	0,00072	
19	29/01/2018	15.49	2,916959552	-0,0016812	-0,0008111	6,5795E-07	0,002143032	0,000107406	5,3703E-05	0,00016884142	2,916041179	2,940781491	2,88977526	1,65712E-05	4,43938E-06	0,00068	
20	30/01/2018	15.37	2,910718899	-0,0019092	-0,0062407	3,8946E-05	0,002181978	0,0001458	7,29E-05	0,0001747990	2,915218777	2,935356276	2,88228314	7,8322E-05	1,03946E-06	0,00063	
21	31/01/2018	15.48	2,918418467	-0,0015469	-0,0009957	3,2485E-05	0,00214464	0,000100498	5,0249E-05	0,00015091383	2,90880971	2,939516229	2,89022697	0,000124265	2,7562E-06	0,00054	
22	01/02/2018	15.29	2,906354462	-0,001934	-0,010064	0,00010128	0,00215748	0,000164577	8,2389E-05	0,00018009197	2,914871599	2,93132776	2,87752813	0,000132006	3,29735E-06	0,00061	
23	02/02/2018	15.02	2,891482252	-0,0024965	-0,0148722	0,00022118	0,00233693	0,000386705	0,00018335	0,00024118834	2,904420432	2,920079664	2,85789176	0,000145487	7,2781E-06	0,00059	
24	05/02/2018	15.60	2,867634771	-0,003387	-0,0218675	0,00059666	0,00106587	0,000550644	0,00027532	0,00038181952	2,888985712	2,903316321	2,82513923	0,000310521	1,90299E-05	0,00058	
25	06/02/2018	15.35	2,853392506	-0,0008124	-0,0140223	0,00019662	0,00303211	0,000726722	0,00036336	0,00046642076	2,86422774	2,892948074	2,80661122	0,00014979	4,52436E-06	0,00056	
26	07/02/2018	15.50	2,862208881	-0,0033347	-0,00860837	7,4104E-05	0,00337315	0,000578246	0,00028912	0,0003977968	2,84970099	2,898651803	2,81908059	0,00016907	5,9369E-06	0,00054	
27	08/02/2018	15.78	2,843749317	-0,0038947	-0,018455	0,00034039	0,003717901	0,000819107	0,00049955	0,00051691629	2,858866196	2,885231998	2,79447134	0,000169927	8,46751E-06	0,00053	
28	09/02/2018	15.72	2,840207371	-0,0038805	-0,0034985	1,244E-05	0,00370141	0,000843284	0,00042164	0,00052474407	2,83983221	2,88205984	2,79067811	4,58132E-06	5,6648E-09	0,00051	
29	12/02/2018	15.22	2,846071499	-0,0035459	-0,0082413	3,392E-05	0,003794061	0,000792929	0,00034683	0,0004692777	2,816366834	2,885710573	2,79934062	0,000117581	1,20299E-06	0,00050	
30	13/02/2018	15.03	2,84682852	-0,0038073	-0,0113886	0,0001297	0,003893762	0,000869745	0,00043487	0,00053567294	2,842525596	2,876988818	2,78478223	5,2226E-05	2,05029E-06	0,00048	
31	14/02/2018	15.01	2,833507418	-0,0037224	-0,0011754	1,3816E-06	0,003893144	0,000895101	0,00042955	0,00052748744	2,830875524	2,87552079	2,78404919	2,99628E-05	2,3447E-07	0,00047	
32	15/02/2018	15.28	2,84926037	-0,0031138	0,0157295	0,00024816	0,004143299	0,000620537	0,00031027	0,0004203480	2,82978499	2,86954618	2,80533848	0,000213601	1,18528E-05	0,00046	
33	16/02/2018	15.63	2,869601996	-0,0024031	0,0204163	0,00041378	0,00457081	0,00081127	0,00019056	0,0003170768	2,846146547	2,90263562	2,8117133	0,00034769	1,60735E-05	0,00046	
34	19/02/2018	15.38	2,85502391	-0,0027609	-0,0145696	0,00021227	0,004789355	0,000518311	0,00025917	0,00034841957	2,867198445	2,891250161	2,81329284	0,000125337	4,3568E-06	0,00045	
35	20/02/2018	15.65	2,870452457	-0,0022414	0,01542007	0,00023778	0,005007133	0,000351882	0,00017584	0,0003888398	2,8522715	2,903145149	2,83327689	0,000189667	9,44421E-06	0,00044	
36	21/02/2018	15.57	2,866192902	-0,0022975	-0,0042596	1,8144E-05	0,005025277	0,00038005	0,00019003	0,00031905930	2,868211022	2,8993883	2,82840252	1,95587E-05	1,13134E-07	0,00043	
37	22/02/2018	15.60	2,867898902	-0,0021893	-0,001706	2,9104E-06	0,005028187	0,000354682	0,00017734	0,00030365185	2,863895408	2,900322271	2,83109695	3,77289E-05	4,33188E-07	0,00042	

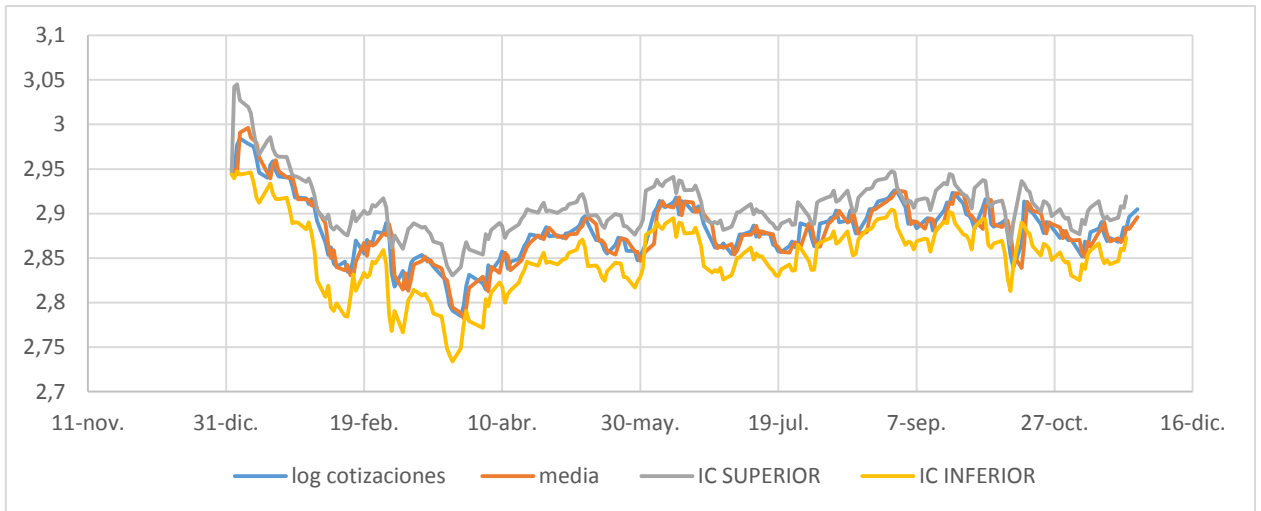
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.3.2.2 Obtención del intervalo de confianza de la predicción puntual en el modelo de parámetros variables

Se observa en la columna M de la Figura 4.3.2.2, el cálculo del extremo superior del I.C.

en donde se suma a la estimación puntual calculada  $\hat{Y}_2$ , 1,96 veces la raíz de  $\hat{V}_1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$  del periodo anterior. Para determinar el extremo inferior del IC, el procedimiento a seguir es exactamente el mismo, sustituyendo la suma por una resta.

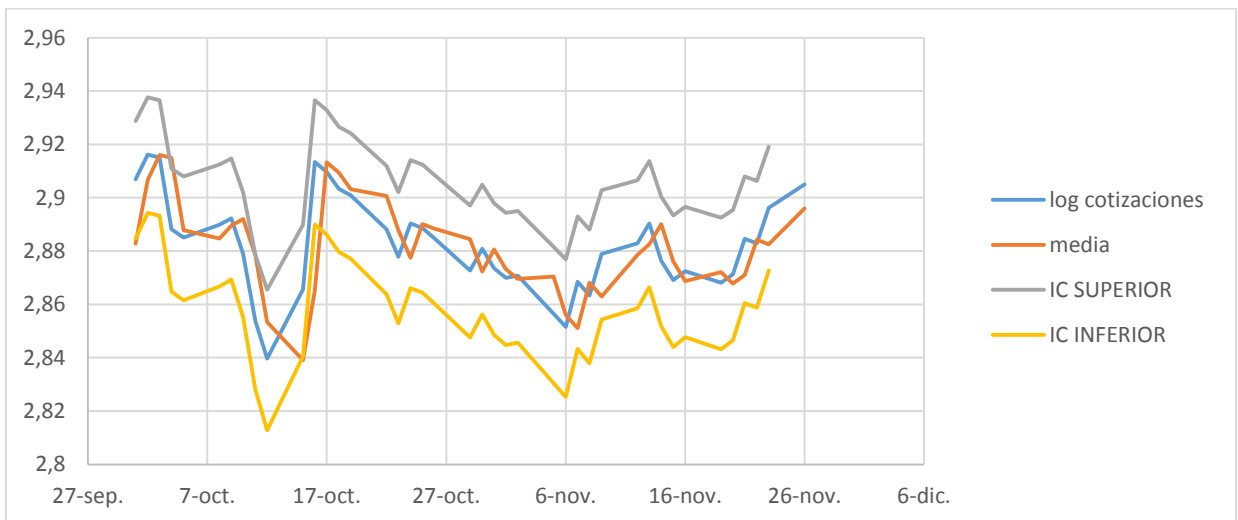
El resultado de calcular la estimación puntual de las log-cotizaciones diarias y los intervalos de confianza de la muestra objeto de estudio, pueden compararse fácilmente a través de su representación gráfica, como se observa en el Gráfico 4.3.2.1, donde se percibe como la media sigue la misma evolución de las log-cotizaciones reales y como todas ellas, están dentro de los intervalos de confianza.



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 4.3.2.1 Evolución de las log-cotizaciones diarias, las medias y los intervalos de confianza en el modelo de parámetros variables**

En el Gráfico 4.3.2.2 se ha escogido un intervalo de la muestra, desde el 27 de septiembre al 26 de noviembre para que se pueda ver con más claridad como la media sigue la evolución de las log-cotizaciones.



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 4.3.2.2 Evolución de las log-cotizaciones diarias, las medias y los intervalos de confianza para una muestra de 41 datos para el modelo de parámetros variables**

A través de la validación se va a aceptar la solución del modelo para el caso concreto de la acción de “Ferrovial”. Los criterios estadísticos que se emplearán serán las medidas de bondad de ajuste donde se pretende poder validar las predicciones para una acción de “Ferrovial” en el periodo estudiado, demostrando así su fiabilidad.

Las medidas de bondad de ajuste son, por un lado, el MAPE, el cual se calcula mediante el promedio de las diferencias absolutas entre las log-cotizaciones diarias reales y las estimaciones puntuales de las log-cotizaciones divididos por las cotizaciones diarias, considerándose un valor tolerable el que no sea superior al 5% (véase Apartado 3.5).

Por otro lado, se calcula el RSME que es la raíz del error cuadrático medio, el cual es, el promedio de los errores al cuadrado, es decir, la diferencia entre las log-cotizaciones diarias y las estimaciones puntuales. Cuanto más cerca de cero sea el valor del RSME, el error en el modelo será menor.

Tanto para el MAPE como para el RSME el cálculo se inicia a partir de  $n = 1$  y se representan ambos errores como una función de  $N$  desde  $n = 1, \dots, N$  (siendo este último valor el tamaño  $N$  de la muestra de cotización). De este modo se ve la evolución dinámica del RMSE y del MAPE.

En la Figura 4.3.2.3 se presenta un ejemplo de cómo se ha calculado el MAPE y el RSME en la hoja de cálculo Excel®



Para el cálculo del RSME primero hay que calcular el cuadrado de las diferencias entre las log-cotizaciones y las estimaciones en cada periodo y posteriormente, calcular el promedio con el factor  $\frac{1}{N+n}$ . Por último, calculamos la raíz cuadrada del valor obtenido. Se pueden observar dichos cálculos en Excel®, en las columnas Q y S de la Figura 4.3.2.3.

Todos los valores MAPE de la muestra son inferiores al 5% y los RSME calculados son cercanos a cero, lo que indica que nuestro modelo tiene un alto grado de aceptación y podemos proceder a calcular las predicciones. En la Tabla 4.3.2.1 se muestra un período seleccionado (el último mes 1-26 de noviembre de 2018) a modo ilustrativo.

MAPE	RSME
0,01%	0,0023166
0,01%	0,00231121
0,01%	0,00230676
0,01%	0,00230153
0,01%	0,00229762
0,01%	0,00229247
0,01%	0,00228841
0,01%	0,0022833
0,01%	0,00227843
0,01%	0,00227415
0,01%	0,00226928
0,01%	0,00226429
0,01%	0,00225935
0,01%	0,00225442
0,01%	0,00225025
0,01%	0,00224534
0,01%	0,00224124
0,01%	0,00223672

*Fuente: Elaboración propia.*

Tabla 4.3.2.1 Resultados MAPE Y RSME en el modelo con parámetros variables. Período seleccionado: 1-26 de noviembre de 2018

#### 4.4 Predicciones del Modelo Log-Normal y de paso variable

En este apartado se procederá a realizar las predicciones puntuales y por intervalos de confianza del 95%, para el Modelo Log-Normal y el Modelo Log-Normal

con parámetros variables. Estas predicciones atenderán al valor de la acción “Ferrovial” durante los cinco días posteriores al periodo estudiado, es decir, desde el 27 de noviembre hasta el 3 de diciembre de 2018. Las predicciones aplicando el Modelo Log-Normal así como el valor real de la cotización se recogen en la Tabla 4.4.1.

	27/11/2018	28/11/2018	29/11/2018	30/11/2018	03/12/2018
IC Superior	18,643	18,651	18,656	18,669	18,677
Cotización	18,250	18,065	18,090	18,170	18,330
Predicción	18,369	18,370	18,372	18,374	18,375
IC Inferior	18,095	18,090	18,085	18,080	18,075

Tabla 4.4.1 Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. de la acción “Ferrovial” mediante el Modelo Log-Normal con parámetros constantes

*Fuente: Elaboración propia.*

El  $S_0$  empleado para el cálculo de las predicciones se corresponde con el valor de la acción en  $t = 0$ , el dato inicial de la muestra observada. Para el cálculo de las predicciones también se han vuelto a emplear los parámetros que ya se estimaron anteriormente en el Apartado 4.1.1,

$$\mu = 0,023147746, \quad \sigma = 0,215386195.$$

El resultado obtenido en la predicción puntual es el que se muestra en la Tabla 4.4.1. Las predicciones por intervalos también se muestran en dicha tabla. En el Apartado 3.5 ya se hizo una descripción detallada de los pasos a seguir para el cálculo de las predicciones, y es el que se ha seguido en los cálculos anteriores.

En la Tabla 4.4.2 se presentan las predicciones para el Modelo Log-Normal con parámetros variables.



	27/11/2018	28/11/2018	29/11/2018	30/11/2018	03/12/2018
Log-cotización	2,9085	2,8998	2,8954	2,8940	2,9042
Predicción	2,9048	2,9046	2,9044	2,9042	2,9040
IC Superior	2,9277	2,9275	2,9272	2,9270	2,9268
IC Inferior	2,8819	2,8818	2,8816	2,8815	2,8813

Tabla 4.4.2 Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. de la acción "Ferrovia" mediante el Modelo Log-Normal con parámetros variables

El cálculo en Excel® para la predicción del 21/11/2018 puede verse en la Figura 4.4.1, Celda 232L siendo el resultado de la suma de la log-cotización conocida en el día 231,  $Y_{231}$  y  $\hat{R}_{231}$ .

Fuente: Elaboración propia

Figura 4.4.1. Cálculo de las predicciones mediante el Modelo Log-Normal con parámetros variables

Se observa cómo se han realizado predicciones para los días,  $\hat{Y}_{233}$ ,  $\hat{Y}_{234}$ ,  $\hat{Y}_{235}$ ,  $\hat{Y}_{236}$  siguiendo el mismo procedimiento que para  $\hat{Y}_{232}$ , pero en los sucesivos instantes las cotizaciones no son conocidos y se calculan incorporando la predicción del día anterior a la información muestral, es decir:

$$\hat{Y}_{233} = \hat{Y}_{232} + \hat{R}_{232}. \quad (4.4.1)$$

La predicción a través de los intervalos de confianza se realiza partiendo de la formula (3.6.2) vista en el Capítulo 3 y utilizando la misma aplicación en Excel® que para el cálculo

de los intervalos de la muestra visto en el Apartado 4.3.2 siendo, por ejemplo, para  $\hat{Y}_{232}$  los siguientes:

$$\hat{Y}_{232} \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}_{231} \left(1 + \frac{1}{231}\right)}. \quad (4.4.2)$$

En la Tabla 4.4.1 (modelo Log-Normal de parámetros constantes) y en la Tabla 4.4.2 (modelo Log-Normal de parámetros variables), como ya se ha comentado, se recogen las predicciones para la acción de “Ferrovial”, junto con la log-cotización del valor real que presentó la acción para cada uno de los instantes de tiempo, extraído de la página web de la Bolsa de Madrid<sup>42</sup>. A partir de los resultados mostrados, se observa cómo la predicción puntual de la log-cotización del valor de la acción en la mayoría de los casos se muestra muy cercano al dato real de la misma.

Para finalizar se realizará el cálculo del error relativo de las predicciones para los métodos descritos. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.4.3. El error relativo es una medida de cálculo de una magnitud respecto al valor real que dicha magnitud presente. La fórmula aplicada para su cálculo es la siguiente.

$$\text{Error relativo} = \frac{[\text{Predicción} - \text{Valor real}]}{\text{Valor real}}. \quad (4.4.3)$$

	27/11/2018	28/11/2018	29/11/2018	30/11/2018	03/12/2018
Método Log-Normal con parámetros constantes	0,652%	1,692%	1,561%	1,123%	0,250%
Método Log-Normal con parámetros variables	0,0217%	0,3673%	0,3128%	0,1536%	0,1548%

Tabla 4.4.3 Cálculo del error relativo (en porcentaje)

*Fuente: Elaboración propia.*

El valor del error relativo es muy próximo a cero en la mayoría de los días estudiados, lo que quiere decir que nuestra estimación tiene una elevada aproximación al valor real de

<sup>42</sup> [www.bolsamadrid.es](http://www.bolsamadrid.es)

la acción en el período objeto de estudio. Se observa también que aplicando el Método Log-Normal con parámetros variables, el error relativo es menor en todos los casos que con el Método Log-Normal de parámetros constantes.

Mediante este estudio se ha podido evidenciar que el Método Log-Normal con parámetros variables es más eficaz para el cálculo de predicciones de activos subyacentes, que el Método Log-Normal de parámetros constantes, como por otro lado cabía esperar.

# 5 CONCLUSIONES FINALES

Esta memoria se ha centrado desde el primer momento en el estudio y la mejora del Modelo Log-Normal de parámetros constantes, en el contexto de su aplicación, para modelizar la dinámica de activos subyacentes cotizados. El primer paso ha sido analizar los posibles activos subyacentes financieros y seleccionar uno que cotizará en el IBEX 35 y tuviera un peso importante. El modelo se ha aplicado a la modelización de una acción de la Compañía Ferrovial en el periodo desde el 2 de enero al 26 de noviembre del 2018.

Para realizar este trabajo se ha utilizado los conocimientos previos adquiridos en la asignatura Modelización y Valoración de Opciones Financieras, del Máster en Dirección Financiera y Fiscal, extendiendo el estudio de los modelos dinámicos para su aplicación en el valor de una acción. A su vez, ha servido de ayuda, principalmente, en el desarrollo del marco teórico, las asignaturas Banca y Operaciones Financieras y Mercados Financieros y Valoración de Activos Financieros.

El Capítulo 1 se ha centrado en hacer una aproximación del sistema financiero y en detallar los aspectos más importantes de la entidad. En el Capítulo 2, se ha explicado las herramientas estocásticas necesarias para el cálculo de la solución del Modelo Log-Normal de parámetros constantes y del Modelo Log-Normal de Parámetros variables. En el Capítulo 3 se ha desarrollado y validado los modelos desde un punto de vista teórico y en el Capítulo 4, se ha puesto en práctica para la acción de la Compañía Ferrovial, en el periodo seleccionado.

El objetivo de este trabajo ha sido, por un lado, extender los conocimientos del Master en el ámbito de las finanzas y, por otro lado, formular una versión del Modelo Log-Normal clásico (con parámetros constantes), proponiendo una variación de dicho modelo basada en hacer que sus parámetros sean variables. La motivación de esta reformulación ha sido aplicar el modelo clásico y el nuevo modelo a un activo subyacente cotizado y evidenciar las mejoras del modelo Log-Normal de parámetros variables frente al Modelo Log-Normal de parámetros constantes.

Como se ha podido ver a lo largo de la memoria con el activo de la empresa Ferrovia del IBEX 35, los objetivos se han conseguido, evidenciando que el error en la predicción con el Modelo Log-Normal de parámetros variables es menor que con el Modelo Log-Normal de parámetros constantes.

# BIBLIOGRAFÍA

## Libros:

- ALLEN, E. (2007). *"Modelling with Itô Stochastic Differential Equations"*. New York: Springer.
- AMAT, O. (2010). *"La Bolsa, Funcionamiento y Técnicas para Invertir"*. Deusto, vol 8.
- BACHELIER, L. (1900). *"Théorie de la spéculation"*. Annales du Science de L'École Normale Supérieure, 17.
- BLACK, F. S. (1973). *"The pricing of options and corporate liabilities"*. Journal of Political Economy, 81.
- CALVO BENARDINO, A. P. (2014). *Manual del Sistema Financiero Español*. Ariel, vol 25.
- LAMBERTON, D. L. (1996). *"Introduction to Stochastic Calculus to Finance"*. Chapman & Hall/CRC.
- MARTINEZ ÁLVAREZ, J. G. (2009). *"Banca y Mercados Financieros"*. Tirant lo Blanch.
- MERTON, R. (1976). *"Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous"*. Journal of Financial Economics, 4.
- ØKSENDAHL, B. (1998). *"Stochastic Differential Equations"*. Berlin: Springer.
- SAMUELSON, P. (1965). *"Rational theory of warrants prices"*. Industrial Management Review.

## Páginas webs:

- Mises and Hayek Dehomogenized. (20 de abril de 2019). Obtenido de [https://mises-media.s3.amazonaws.com/rae6\\_2\\_5\\_2.pdf](https://mises-media.s3.amazonaws.com/rae6_2_5_2.pdf)
- Norma Internacional de Contabilidad 21. (30 de abril de 2019). Obtenido de <http://www.normasinternacionalesdecontabilidad.es/nic/pdf/NIC21.pdf>
- Procesos Estocásticos, Integral Estocástica, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, El Lema de Itô. (2 de mayo de 2019). Obtenido de [https://www.uv.es/olmos/mod\\_din\\_estocastico.pdf](https://www.uv.es/olmos/mod_din_estocastico.pdf)

BBVA. (30 de marzo de 2019). Obtenido de

[https://www.bbva.es/estaticos/mult/Ayudas\\_factores\\_acciones.pdf\\_tcm924-528182.pdf](https://www.bbva.es/estaticos/mult/Ayudas_factores_acciones.pdf_tcm924-528182.pdf)

FERROVIAL. (30 de marzo de 2019). Obtenido de <https://www.ferrovial.com/es/accionistas-e-inversores/informacion-bursatil/cotizacion/cotizacion-historica/>

Informe Anual Integrado, Ferrovial. (2 de junio de 2019). Obtenido de <https://informeanualintegrado2018.ferrovial.com/wp-content/uploads/sites/4/2019/02/Cuentas-Anuales-Consolidadas-2018.pdf>

BOLSA DE MADRID. (2 de junio de 2019). Obtenido de [www.bolsamadrid.es](http://www.bolsamadrid.es)

BOLSAMANÍA. (15 de abril de 2019). Obtenido de

<https://www.bolsamania.com/noticias/analisis-tecnico/ferrovial-alcanza-niveles-de-precio-que-favorecen-un-rebote--3131206.html>

BANCO SABADELL. (15 de enero de 2019). Obtenido de

<https://www.bancsabadell.com/cs/Satellite/SabAtl/Equity-Swap/1191332202981/es/>

BBVA. (30 de marzo de 2019). Obtenido de

[https://www.bbva.es/estaticos/mult/Ayudas\\_factores\\_acciones.pdf\\_tcm924-528182.pdf](https://www.bbva.es/estaticos/mult/Ayudas_factores_acciones.pdf_tcm924-528182.pdf)

#### **Trabajos académicos:**

AURELI, A. (30 de marzo de 2019). "Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas". Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona. Obtenido de [http://gent.uab.cat/aureli\\_alabert/sites/gent.uab.cat/aureli\\_alabert/files/IntroSDE\(Cali\).pdf](http://gent.uab.cat/aureli_alabert/sites/gent.uab.cat/aureli_alabert/files/IntroSDE(Cali).pdf)

ALBIR HERRERO, L. (2015). "Modelización de Subyacentes Financieros con Ecuaciones Diferenciales Estocásticas". Universidad Politécnica de Valencia .