Reforzar la enseñanza de las matemáticas desde el primer curso de grado con proyectos

Francisco J. Boigues [a], Vicente D. Estruch [a], Anna Vidal [a] y Bernardino Roig [a]
[a]Instituto de Investigación para la Gestión Integrada de Zonas Costeras, fraboipl@mat.upv.es , vdestruc@mat.upv.es, avidal@mat.upv.es , broig@mat.upv.es

Abstract
The way to build mathematical knowledge of a scientist / engineer differs from that corresponding to the student who accesses a degree in mathematics or other sciences. Learning based on the process of establishing, analyze and validate mathematical models allows the effective acquisition of math skills. In addition, activities based on mathematical modeling can be motivating elements in the teaching / learning process, arousing student interest to cognitive basis on which fundamental mathematical concepts are developed in the mathematical training of future scientist or engineer.

Keywords: *Mathematical modeling, TSR, computer tool, projects, motivation.*

Resumen
La manera de construir el conocimiento matemático de un científico/ingeniero difiere de la que corresponde al estudiante que accede a un grado en matemáticas o en otras ciencias. El aprendizaje en base al proceso de establecer, analizar y validar modelos matemáticos permite la adquisición efectiva de competencias matemáticas. Pero además, las actividades basadas en la modelización matemática pueden constituir elementos motivadores en el proceso de enseñanza/aprendizaje, despertando el interés del alumno hacia bases cognitivas sobre las cuáles se desarrollan conceptos matemáticos fundamentales en la formación matemática del futuro científico o ingeniero.

Palabras clave: *Modelización matemática, REI, herramienta informática, proyectos, motivación.*

1. Introducción

Está fuera de toda duda que la formación del científico y la del ingeniero queda incompleta sin una formación de calidad en matemáticas. En ambos casos el elemento común es que, en general, la formación requerida ha de ir orientada hacia la práctica, hacia las aplicaciones, o lo que es lo mismo hacia los modelos. En general, un modelo científico no es más que una herramienta del pensamiento que establece una abstracción de la realidad. Se trata de representar elementos reales en el plano abstracto, a partir de los cuales el científico pretende aproximarse a la realidad para, sobre la base de la información que proporciona el modelo, dar solución a necesidades generales de conocimiento o más concretamente resolver problemas, es decir, satisfacer necesidades de carácter práctico. La manera de construir el conocimiento matemático en ciencia empírica o en ingeniería difiere de la que corresponde a las matemática, o a la física teórica. A grandes rasgos, por ejemplo, para el ingeniero la vertiente de resolver problemas técnicos es mucho más importante que la ~~de~~ del conocimiento básico por sí mismo.

Además el futuro científico o ingeniero espera de las matemáticas, ya desde primer curso, incluso a nivel emocional, una "utilidad" que le permita comprender mejor los diferentes problemas que se le plantean y poder encontrar soluciones adecuadas. Téngase en cuenta que, en muchas ocasiones, el rechazo cultural a las matemáticas, y por lo tanto a la racionalidad del pensamiento crítico, viene motivado por la poca eficiencia de los docentes a la hora de resaltar también el valor instrumental de las matemáticas. Se han realizado diversos estudios sobre la influencia de los factores emocionales en el rendimiento matemático de los estudiantes (Bhownik y Banerjee, 2013). Se podría destacar que la actitud esta relacionada significativamente con el rendimiento, resaltando en concreto la influencia que tiene el factor "utilidad de las matemáticas" en lograr una actitud más positiva hacia el quehacer matemático de los estudiantes (Zan y Di Martino, 2007).

Por lo tanto, es fundamental que en un diseño metodológico concreto del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en el contexto de estudios de grado de ciencias empíricas e ingeniería, se tenga en cuenta la necesidad de transmitir al alumno la potencia de la matemática como medio para representar eficazmente la realidad estática o cambiante.

Como concreción de las ideas expuestas anteriormente, presentamos una serie de trabajos prácticos que abordan problemas contextualizados, que llamamos proyectos, los cuales se han desarrollado, durante varios cursos, en la asignatura Matemáticas de primer curso del grado en Ciencias Ambientales, en la Escuela Politécnica Superior de Gandia de la Universidad Politécnica de Valencia.

2. Objetivos

Los objetivos fundamentales de los proyectos desarrollados es:

a) Afianzar determinadas nociones teóricas desarrolladas en clase.

b) Introducir conceptos matemáticos nuevos, no vistos en las clases teóricas.

c) Modificar la actitud del alumno ante el aprendizaje de las matemáticas, acentuando la utilidad del conocimiento matemático para modelar y resolver problemas.

Más adelante mostraremos algunos proyectos concretos desarrollados en la asignatura de Matemáticas: El papel de las matrices en modelos de transmisión de plagas, la integral en modelos para la gestión del territorio y la derivada en modelos para la planificación de recursos pesqueros sostenibles (Boigues *et al* 2011, 2011a, 2013). Estos proyectos se desarrollan en laboratorio informático, en sesiones prácticas de dos horas, siguiendo en algunos casos estrategias de trabajo colaborativo, aunque en todos los casos en la evaluación se otorga un peso significativo al trabajo individual.

3. Desarrollo de la innovación

3.1 Marco teórico

Las propuestas docentes descritas asumen, en línea con Artigue *et al.* (2007), Drijvers *et al.* (2010) y Camacho *et al.* (2008), que la construcción del conocimiento matemático, en un entorno práctico, debe apoyarse en una enseñanza contextualizada, en la modelización-simulación como recurso para la comprensión de conceptos, en la resolución de problemas y en el uso de Sistemas de Cálculo Simbólico (CAS).

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) constituye un marco teórico que contextualiza la actividad matemática en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales. La TAD introduce en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, que permiten superar la monumentalización de la matemática (la matemática como un todo totalmente terminado), tanto a nivel cognitivo como procedimental, mediante procesos que permiten analizar y resolver situaciones problemáticas cercanas a la realidad. Los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) son mecanismos didácticos, propuestos por la TAD, que se diseñan a partir de la búsqueda de respuestas a cuestiones que, para ser resueltas, requieren de la construcción de una secuencia más o menos compleja de praxeologías completas y articuladas (Serrano *et al.*, 2007).

La idea final es que los REI funcionen localmente como mecanismos didácticos capaces de superar la tradicional desarticulación o atomización de las matemáticas a nivel universitario. Estos mecanismos tendrían una función articuladora que se deriva en gran medida de su capacidad para permitir que la modelización matemática asuma un papel más importante en los procesos de enseñanza/aprendizaje (Boigues *et al.*, 2011), estableciendo el principio básico por el cual hacer matemáticas consiste esencialmente en un trabajo activo y continuo de modelización matemática.

Un REI se inicia con una cuestión generadora, que llamaremos C_0, la cual, tras establecer las correspondientes hipótesis de trabajo, actuará como germen para otras cuestiones derivadas. De esta forma, las matemáticas dejan de ser el motivo y el origen de los problemas planteados para convertirse fundamentalmente en el medio para poder resolverlos. Las diversas respuestas a las cuestiones derivadas constituyen la respuesta global a la cuestión generadora (figura 1).

Un REI puede abordar el estudio de un tema completo o partes de un tema, a partir de considerar cuestiones generadoras adecuadas en cada caso.

En el desarrollo de un REI, un elemento importante sería lo que que denominaremos el “nivel de acompañamiento del profesor” en el REI o lo que es lo mismo, el grado de intervención del profesor junto a los alumnos en el recorrido. Distinguiríamos entre el recorrido con total acompañamiento, en el que el profesor guía y sigue de cerca el trabajo de los alumnos, corrigiendo las posibles desviaciones de la senda más o menos marcada y el recorrido sin acompañamiento, donde el trabajo de los alumnos sería totalmente autónomo. Entre ambos extremos se pueden plantear múltiples estados intermedios.

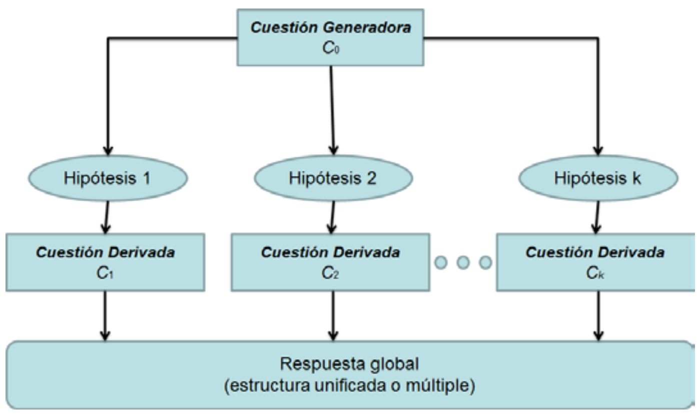

Figura 1.- *Esquema genérico de un REI*

En este trabajo se exponen tres proyectos desarrollados, desde la estructura REI, en la asignatura Fundamentos Matemáticos para el Estudio del Medio Ambiente, en la Escuela Politécnica Superior de Gandia.

3.2 Proyectos REI

3.2.1 Un modelo de expansión de plagas (Boigues et al, 2011)

Duración: 3 sesiones de 2 horas.

El problema real (C_0)

Supongamos cierta población de árboles de un bosque, formada por *N* individuos, valor que suponemos no varía en el periodo de tiempo considerado (sistema cerrado). Se detecta una plaga o enfermedad que, en principio, no produce mortalidad y que inmuniza contra la misma al árbol que la ha sufrido. Diariamente, un *m%* de los árboles sanos contraen la enfermedad quedando infectados, y un *c%* de los infectados sanan volviéndose inmunes a la enfermedad.

Se desea averiguar la evolución de la enfermedad a lo largo de los 21 días de un determinado mes, sabiendo que inicialmente el número de árboles es de 9000, de los cuales 1000 estaban infectados y ninguno es inmune todavía. Conocemos el índice de propagación de la plaga que es del 1% diario. Además, también diariamente, un 2% de los infectados sanan.

Cuestiones derivadas a resolver:

H_1: El sistema real se puede modelar considerando diversas variables que evolucionan con el tiempo
C_1 *¿Cuáles son las variables involucradas en el sistema?*

H_2: La evolución temporal de las variables admite una representación gráfica para representar su evolución con el paso de una etapa a otra
C_2 *¿Cómo podemos representar gráficamente la transición de estados (evolución de las variables del modelo) al pasar de un mes a otro?*

H_3: La evolución del sistema real se puede modelar mediante un sistema de ecuaciones en diferencias.
C_3 *¿Cuáles son las ecuaciones que describen la evolución del sistema?*

H_4: El sistema de ecuaciones en diferencias que representa el sistema real admite una representación matricial.
C_4 *¿La evolución del sistema (las ecuaciones que lo describen), admite una representación matricial?*

H_5: El modelo matemático puede ser resuelto numéricamente.
C_5 *¿Cómo podemos resolver numéricamente el sistema?*

H_6: La evolución temporal de las variables del sistema puede ser representada gráficamente.

I Jornadas IN-RED (2014): 1-3.

C_6 ¿Cómo podemos representar gráficamente la evolución del sistema?

Se plantea asumir mortalidad en el modelo. Consideremos una nueva variable, que representaría a los árboles infectados que mueren en el instante *t*, y $\mu \times 100\%$ es el porcentaje de la población enferma que muere en el transcurso de un día a otro.

H_7: Para considerar la mortalidad, hay que añadir una nueva variable al modelo. Reformulando las ecuaciones que lo describen podemos obtener un nueva representación matricial del sistema.
C_7 ¿Cómo podemos reformular el modelo para asumir la mortalidad?

La respuesta global al proyecto incluye los siguientes aspectos:

- Reconocer, como modelo que describe el proceso, una cadena de Markov explorando las características de la matriz de transición de estados.
- La descripción del comportamiento del sistema conociendo las características de la matriz de transición.
- Descubrimiento de la posibilidad de modelar situaciones más complejas incluyendo más variables en el modelo y, por lo tanto, incrementando el tamaño de la matriz de transición.
- La simulación numérica y gráfica permitirán visualizar la evolución de los estados del sistema en cierto interalo temporal discreto preestablecido.

Los conceptos matemáticos básicos sobre los que se trabajará a lo largo del proyecto son: Representación matricial de un sistema lineal discreto de primer orden y su resolución numérica y analítica. Operaciones con matrices. Cálculo de valores y vectores propios.

Para desarrollar el proyecto, se utiliza la técnica del trabajo en grupo. Para la evaluación del mismo se han ensayado dos experiencias. En la primera experiencia de evaluación, cada grupo tiene que que elaborar una memoria de la actividad y realizar una presentación en público de los principales resultados, en la que ha de participar todo el grupo. En la presentación los profesores realizaban diversas preguntas a los alumnos para obtener una idea del nivel de comprensión. Se otorga una nota a partir de la valoración de la memoria presentada (trabajo académico) y de la presentación realizada (observación).

Otra experiencia de evaluación ha sido la de valorar también la memoria de la actividad que se exige realizar, y e lugar de la presentación pública, se realiza una prueba objetiva de respuesta abierta donde se plantean al alumno cuestiones sobre pequeñas variaciones del modelo inicial.

3.2.2 Un modelo en la gestión del territorio (Boigues et al., 2011a)

Duración: 1 sesión de 2 horas.

El problema real (C_0)

Un problema de interés en gestión del territorio es la cuantificación de la superficie de un espacio geográfico así como la valoración de la evolución del mismo por el efecto de determinadas actividades humanas. Se plantea a los alumnos el problema de determinar la superficie que ocupa la zona inundada de un humedal. En base a imágenes aéreas o de satélite (figura 2), habrá que delimitar el contorno del lago que ha de ser estudiado (lago de Anna). Se ha de determinar la superficie del humedal y la longitud de un camino de acceso, que se observa en la imagen, el que va de A a B.

Figura 2.- *Vista aérea del lago y del camino de acceso*

Cuestiones derivadas a resolver:

H_1: Podemos aproximar el contorno del lago mediante puntos y segmentos, formando poligonales.

C_1 ¿Cómo podemos aproximarnos al contorno real del lago a partir de un conjunto discreto de puntos de su contorno?

H_2: Podemos aproximar el contorno del lago estableciendo puntos de referencia, y ajustando los mismos mediante polinomios.

C_2 ¿Cómo podemos aproximarnos al contorno real del lago a partir de dos funciones polinómicas que se ajusten a puntos de su contorno?

H_3: Podemos aproximarnos al camino de acceso mediante puntos y segmentos, formando poligonales.

C_3 ¿Cómo podemos aproximarnos mediante poligonales al camino de acceso, desde el punto A al punto B?

H_4: Podemos aproximarnos al camino de acceso estableciendo puntos de referencia, y ajustando los mismos mediante polinomios.
C_4 ¿Cómo podemos aproximarnos mediante una función polinómica al camino de acceso, desde el punto A al punto B?

H_5: Podemos aproximarnos al área del lago mediante el calculo del área limitada, superior e inferoromente, por gráficas de funciones polinomiales.
C_5 ¿Cómo obtener una aproximación al área del lago?

H_6: Podemos aproximar la longitud del camino de acceso mediante el calculo de la longitud de una parte de la gráfica de una función polinomial.
C_6 ¿Cómo obtener una aproximación a la longitud del camino desde el punto A al punto B?

La respuesta global del proyecto consiste en la descripción de alguna características morfométricas del lago (forma, superficie) mediante elementos de simulación (poligonales, gráficas de funciones polinómicas) así como la caracterización morfométrica de un camino de acceso (forma del trazado, área del lago y longitud del camino de acceso).

Los conceptos matemáticos básicos sobre los que se trabajará a lo largo del proyecto son el ajuste polinomial por mínimos cuadrados, y la aplicación de la integral definida al cálculo de superficies de figuras planas y al cálculo de longitudes de curvas planas.

La evaluación de este proyecto se realiza sobre la memoria que, individualmente, cada alumno presenta al finalizar el mismo (trabajo académico). La memoria se basa en un guión diseñado al efecto, donde se plantean las cuestiones que hay que resolver y que que cada alumno, de forma individual, cumplimentará al final de la sesión.

3.2.3 Un modelo de gestión sostenible de la pesca (Boigues et al., 2013)

Duración: 3 sesiones de 2 horas.

El problema real (C_0)

Una región basa su economía fundamentalmente en la pesca de bajura. Existiendo un peligro real de sobreexplotación para los recursos pesqueros de la región, se ha decidido una parada biológica para la pesca. El estudio de la evolución de la población durante la parada puede ayudar a tomar algunas decisiones, como por ejemplo calcular la duración aproximada necesaria de la parada biológica y estudiar la posibilidad de establecer una cuota sostenible de pesca en un futuro. La especie que se pesca es endémica de las aguas de la región, por lo que no hay que considerar movimientos migratorios. Se puede afrontar el estudio utilizando modelos en tiempo discreto con etapas mensuales. Para ello, mediante diversos métodos, se ha estimado la población de dichos peces en meses sucesivos. Se proporciona una tabla que muestra el número de peces estimados cada més durante nueve meses de parada biológica. Se quiere estudiar el comportamiento de la evolución del número de individuos con el tiempo para establecer tendencias y para, a continuación, estudiar qué ocurre al considerar la actividad pesquera y, en el caso de que sea posible, asegurar que la pesca constituye una actividad sostenible, es decir compatible con el crecimiento natural de la población de peces, asegurando una población estable.

Cuestiones derivadas a resolver:

H_1: Podemos representar el crecimiento mediante modelos sencillos basados en ecuaciones en diferencias
C_1. ¿Existen modelos discretos sencillos que se ajusten a los datos?

H_2: El modelo matemático permite hacer predicciones sobre la evolución a corto plazo de la población de peces.
C_2 ¿En su caso, cuanto tiempo se estima que puede pasar hasta llegar a cierto número de individuos (3.400.000)? (El valor indicado es fruto de un pacto y se supone que es una cantidad razonable para plantear la vuelta a la actividad pesquera)

H_3: El modelo matemático permite hacer predicciones sobre la evolución a largo plazo de la población de peces.
C_3 ¿Los modelo considerados indican lo que sucederá a largo plazo a largo plazo?
Los modelos considerados explican la evolución de la población en la situación de parada biológica (sin pesca).

H_4: Podemos introducir la actividad pesquera modificando levemente el modelo matemático inicial.
C_4 ¿Cómo podemos introducir la actividad pesquera en los modelos?

H_5: El modelo matemático permite hacer predicciones sobre la evolución de la población de peces cuando hay actividad pesquera.
C_5 ¿Cómo se comportan los modelos al considerar la pesca?

La respuesta global incluirá:

- La modelación de la evolución de la población de peces mediante distintos modelos no lineales en tiempo discreto.
- La valoración de la bondad del ajuste de los modelos a los valores de la población del periodo sin pesca.
- El estudio de los nuevos modelos obtenidos al considerar la actividad pesquera.

- La decisión final sobre una estrategia de pesca sostenible según un criterio biológico preestablecido.

Este proyecto se desarrolla en grupo y se evalua a partir de la valoración de la memoria del proyecto (trabajo académico) y de una prueba objetiva de respuesta abierta, que se desarrolla en la última, sesión, en la cual se plantean cuestiones en base a pequeñas variaciones sobre el modelo inicial obtenido.

4. Resultados

Destacamos algunos resultados obtenidos a lo largo de tres años de experiencia en los que se han desarrollado los proyectos, los cuales han contado con el respaldo de diversos programas institucionales de innovación docente de la U.P.V. En primer lugar destacamos que, con la puesta en práctica de los proyectos, se produce una mayor implicación de los estudiantes en su aprendizaje, lo cual se concreta en una mayor asistencia a las clases prácticas respecto de las clases teóricas (cerca del 80% sobre matriculados) y también en una mayor presencia en los controles de evaluación. Por otra parte, es destacable la valoración positiva que los propios estudiantes dan a aprender matemáticas en base a proyectos. No se pueden obviar determinadas dificultades, subsanables casi todas, que tienen su origen en la difícil sincronización de las prácticas con las clases teóricas y en la complicada distribución temporal de la asignatura a lo largo del curso. La técnica del trabajo en grupo también conlleva problemas a la hora de poder asegurar que todos los miembros del grupo han trabajado. El presentar una memoria del proyecto no resuelve este problema, pero la presentación pública, con la obligación de que todos los miembros del grupo participen en la misma, junto con las preguntas que se realizan al final de la presentación, permite valorar la implicación de cada miembro del grupo en el trabajo y el nivel de conocimiento al que ha llegado cada alumno. No obstante, es constatable que los alumnos de primer curso tienen muchas dificultades a la hora de preparar una correcta presentación pública de resultados. Es por esto que se ensayó la alternativa de evaluación mediante una prueba escrita de respuesta abierta en base a cuestiones planteadas sobre pequeñas variaciones sobre el modelo inicial. La experiencia indica que, para preparar la prueba escrita de respuesta abierta, los alumnos se esfuerzan en conocer bién todos los aspectos del proyecto desarrollado y se obtienen mejores resultados desde el punto de vista del nivel de conocimiento alcanzado. Por otra parte, no podemos afirmar que la metodología expuesta aporte una mejora significativa del número de aprobados sobre matriculados.

Es necesario remarcar que, debido a las limitaciones que impone el Plan de Ordenación Docente, se dispone de poco tiempo para facilitar que los alumnos lleguen a conocer suficientemente el CAS manejado, en nuestro caso MatLab©. Esto dificulta la utilización fluída del programa para resolver los problemas planteados en los proyectos, teniendo que dedicarse demasiado tiempo a resolver problemas técnicos relacionados con la sintaxis propia, y necesariamente estricta, del lenguaje de programación y con el manejo del programa.

5. Conclusiones

Las experiencias expuestas se pueden resumir como prácticas de introducción o refuerzo de conceptos matemáticos mediante el desarrollo de proyectos de modelización matemática, estructurados como REI, utilizando un asistente matemático (MatLab©) para la génesis instrumental de los modelos.

Una valoración reflexiva, desde un punto de vista cualitativo, de las experiencias expuestas, en su globalidad, nos lleva a constatar el hecho de que la introducción de la modelización en la enseñanza de la Matemática Aplicada acerca al alumno a la matemática, reforzando que los estudiantes puedan llegar a percibir que las matemáticas son importantes fuera de su ámbito propio, apreciando e interiorizando que las matemáticas son muy útiles para afrontar problemas ligados a diversas disciplinas.

6. Referencias

ARTIGUE, M., BATANERO C. & KENT, P. (2007), Mathematics thinking and learning at post secondary level. In Fr. Lester (ed.), *Second Handbook of research on Mathematiccs Teaching and learning*. NCTM-IAP; Charlotte, NC, 1011-1045.

BARQUERO, B., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2006). “Una nova organització del currículum de matemàtiques de primer curs universitari de ciències: els Recorreguts d’Estudi i Investigació”. Actes del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació, Barcelona. juliol 2006.

BHOWMIK, M.; BANERJEE, B. (2013). “Fuzzy measure of secondary students’ attitude towards Mathematics.” *International Journal of Research Studies in Educatión*, Vol. 2, nº 2, pp 21-30.

BOIGUES, F.J, ESTRUCH, V.D., ROIG, B., VIDAL, A. (2011). “Un modelo de transmisión de plagas para la enseñanza del álgebra lineal en el contexto de estudios en ciencias ambientales”. *Modelling in Science Education and Learning*, 4, Nº 8, pp. 105-117.

BOIGUES, F.J, ESTRUCH, V.D., PASTOR, J. (2011a) “*Prácticas y proyectos con Matlab. Matemáticas para el estudio del medio ambiente”*, Valencia. Editorial UPV.

BOIGUES, F.J, ESTRUCH, V.D., ROIG, B., ROPIG, B., VIDAL, A. (2013). “Una propuesta de Recorrido de Estudio e Investigación (REI): Diseño, simulación y decisión de una estrategia de pesca sostenible”. *Modelling in Science Education and Learning*, 6, Nº 2, pp. 5-19.

CAMACHO, M., DEPOOL, R. Y GARBIN, S. (2008). "Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos". *Educación Matemática*,. 20(3), pp. 33-57.

DRIJVERS, P., KIERAN C. Y MARIOTTI, M. (2010): "Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives." *In C. Hoyles y L.B. Lagrange (eds.), Mathematics Education*, pp.89-132. New York: Springer.

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2007). "Cómo hacer una previsión de ventas": propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas." *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico.* Francia. Noviembre 2007. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/25%20-%20Serrano_Bosch_Gascon_congres_TAD_2.pdf.

ZAN, R.; DI MARTINO P. (2007). "Attitude toward mathematics: overcoming the positive/negative dichotomy." *The Montana Council of Teachers of Mathematics, Monograph 3, pp. 157-168.*