UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Algunos resultados sobre B-matrices y matrices con inversa positiva.

Memoria que presenta para optar al título de
Doctor en Matemáticas

Manuel Francisco Abad Rodríguez

Dirigida por los doctores
Juan Ramón Torregrosa Sánchez
María Teresa Gassó Matoses

Valencia, Julio de 2012

Índice general

Dedicado a mis abuelos
***Manuel, Cruz, Francisco y Remedios**.*
Os echo muchísimo de menos.
Ojalá hubiérais podido estar aquí
*para poder celebrarlo **todos** juntos.*

AGRADECIMIENTOS

Quisiera en primer lugar comenzar por agradecer a mi núcleo familiar la paciencia que han demostrado conmigo y el apoyo incondicional que me han proporcionado. A mi hijo **Víctor**, ese pequeño gran hombre que al mismo tiempo tiene sentimientos de ángel. A mi hija **Laura**, esa pequeña gran mujer que tiene tanta energía que agota la nuestra, pero llena nuestros días de alegría. Y, muy especialmente, a mi mujer, **Cristina**, que es mi constante fuente de inspiración y serenidad. La palabra amor carecía de sentido hasta que la conocí. Os quiero y os necesito muchísimo a los tres.

A mis padres, **Manuel** y **Remedios**, que todo me han dado desde que nací y aún antes de nacer, sin pedir absolutamente nada a cambio.

A mi hermana, **Cristina**, con la que tantos buenos momentos he compartido cuando éramos pequeños y sigo compartiendo en la actualidad.

A mi familia política, con mención especial a mi suegra **Ana**, a quien considero mi segunda madre por lo bien que se ha portado siempre conmigo y con mis hijos.

A mis amigos **Moisés**, **Pablo**, y **José Luis**, por haberme permitido aprender junto a ellos tantas cosas de la vida.

A mi codirectora de tesis **Maite**, algo despistadilla aunque buena persona.

Y, por último pero no por ello menos importante, a mi director de tesis, **Juan Ramón**, por ser una de esas personas que, sin saber muy bien cómo ni por qué, la vida pone en tu camino para demostrarte que merece la pena ser vivida. Con unos valores éticos y morales que son bastante complicados de encontrar, es la prueba fehaciente de que a base de esfuerzo se pueden lograr gran parte de las metas que uno se proponga. Habiéndose comportado conmigo siempre como un guía excelente, con una paciencia admirable, es incluso simpático. Gracias **Juan Ramón** por ser como un padre para mí. Y disculpas porque sin duda me he quedado corto.

A tod@s, muchísimas gracias por ser l@s protagonistas de una parte tan importante de mi vida.

RESUMEN

El objetivo de esta memoria es analizar, desde diferentes puntos de vista, dos clases de matrices ampliamente utilizadas, las matrices con inversa positiva y las B-matrices. Vamos a generalizar, en unos casos, y completar en otros los resultados obtenidos por diferentes investigadores.

El problema de caracterizar matrices inversa-positiva ha sido extensamente tratado en la literatura. Diversos autores estudiaron el concepto para matrices inversa-positiva que además fuesen Z-matriz (es decir, M-matrices). Otros autores se ocuparon de caracterizar los patrones de signos que debe seguir una matriz inversa-positiva.

La inversa-positividad de matrices cuadradas reales juega un rol muy importante en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería y ha sido analizada en diferentes contextos. En nuestro trabajo presentamos nuevas caracterizaciones de matrices inversa-positiva. Analizamos también el concepto inversa-positiva para un tipo particular de patrón de signos: el patrón 'checkerboard'.

La suma sub-directa de matrices es una generalización de la suma habitual de matrices. Fue introducida por C. Johnson y S. Fallat y aparece de un modo natural en completación de matrices y subdominios solapados en métodos de descomposición de dominios, entre otros contextos. También aparece en diversas variantes de precondicionamiento aditivo de Schwartz, y cuando se analizan métodos aditivos de Schwartz para cadenas de Markov. En este trabajo aportamos nuevos resultados acerca de la suma sub-directa de matrices con inversa positiva y de la suma sub-directa de las distintas clases de B-matrices, planteándonos las preguntas de Fallat y Johnson y respondiéndolas para las clases de matrices mencionadas.

Johnson, estudió los posibles patrones de signos de una matriz compatibles con el hecho de que tenga su inversa positiva. Siguiendo sus resultados, analizamos el concepto inversa-positiva para un tipo particular de patrón: el patrón 'checkerboard'. Estudiamos también en esta memoria la condición de inversa-positiva de matrices triangulares inferiores (superiores) con patrón 'checkerboard'.

El producto Hadamard de matrices ha sido investigado por diversos autores. Nuestro propósito aquí es estudiar si el producto Hadamard de A y B y de A con la inversa de B cuando A y B son matrices inversa-positiva es también una matriz inversa-positiva. Respecto a los patrones de signos, nos centraremos especialmente en el patrón 'checkerboard'. Estudiamos también el producto Hadamard para las B-matrices y sus clases relacionadas (DB-matriz, B_0-matriz y $|B|$-matriz).

En este manuscrito se aportan también algunos nuevos resultados sobre la completación de B-matrices parciales. Introduciremos una serie de restricciones de los valores de las entradas de las matrices parciales, de los signos de las mismas o de sus grafos asociados con el fin de cerrar el problema en algunas direcciones.

SUMMARY

The purpose of this report is to analyze, from different points of view, two widely used classes of matrices, matrices with positive inverse and B-matrices. We will generalize, in some cases and in others complete the results obtained by different investigators.

Characterize the problem of inverse-positive matrices has been extensively discussed in the literature. Several authors studied the concept for inverse-positive matrices were also Z-matrix (i.e., M-matrices). Other authors took care to characterize the patterns of signs that have the inverse-positive matrices.

The inverse-positivity of real square matrices plays an important role in different areas of science and engineering and has been discussed in different contexts. In our work we present new characterizations of inverse-positive matrices. We also analyze the positive-inverse concept for a particular type of sign pattern: the checkerboard pattern.

The sub-direct sum of matrices is a generalization of the usual sum of matrices. It was introduced by C. Johnson and S. Fallat and appears naturally in matrix completion and overlapping subdomains in domain decomposition methods, among other contexts. Also appears in several variants of preconditioning additive Schwartz, and when analyzed by Schwartz additive methods for Markov chains. In this paper we provide new results on sub-direct sum of matrices with positive inverse and sub-direct sum of different classes of B-matrices, answering Fallat and Johnson questions for the classes of matrices mentioned.

Johnson studied the possible sign patterns consistent with a inverse-positive matrix. Following their findings, we discuss the concept of inverse-positive for a particular type of pattern: the checkerboard pattern. We study herein the inverse-positive status of lower (upper) triangular matrices with checkerboard pattern.

The Hadamard product of matrices has been investigated by several authors. Our purpose here is to study whether the Hadamard product of A and B and A with the inverse of B when A and B are inverse-positive matrices is also an inverse-positive. Regarding the patterns of signs, we will focus especially on the checkerboard pattern. Also studied Hadamard product for the B-matrices and its related classes (DB-matrix, B_0-matrix and $|B|$-matrix).

In this manuscript we also provide some new results on the completion of partial B-matrices. We introduce a series of restrictions on the values of the entries in the matrices, of their signs or its associated graphs in order to close the problem in some directions.

RESUM

L'objectiu d'aquesta memòria és analitzar, des de diferents punts de vista, dues classes de matrius àmpliament utilitzades, les matrius amb inversa positiva i les B-matrius. Anem a generalitzar, en uns casos, i completar en altres els resultats obtinguts per diferents investigadors.

El problema de caracteritzar matrius inversa-positiva ha estat extensament tractat en la literatura. Diversos autors van estudiar el concepte per a matrius inversa-positiva que a més fossin Z-matriu (és a dir, M-matrius). Altres autors es van ocupar de caracteritzar els patrons de signes que ha de seguir una matriu inversa-positiva.

La inversa-positivitat de matrius quadrades reals desenvolupa un rol molt important en diferents àrees de la ciència i l'enginyeria i ha estat analitzada en diferents contextos. En el nostre treball presentem noves caracteritzacions de matrius inversa-positiva. Analitzem també el concepte inversa-positiva per a un tipus particular de patró de signes: el patró 'checkerboard'.

La suma sub-directa de matrius és una generalització de la suma habitual de matrius. Va ser introduïda per C. Johnson i S. Fallat i apareix d'una manera natural en completació de matrius i subdominis solapats en mètodes de descomposició de dominis, entre d'altres contextos. També apareix en diverses variants de precondicionament additiu de Schwartz, i quan s'analitzen mètodes additius de Schwartz per a cadenes de Markov. En aquest treball aportem nous resultats sobre la suma sub-directa de matrius amb inversa positiva i de la suma sub-directa de les diferents classes de B-matrius, plantejant-nos les preguntes de Fallat i Johnson i responent-les per a les classes de matrius esmentades.

Johnson va estudiar els possibles patrons de signes d'una matriu compatibles amb el fet que tingui la seva inversa positiva. Seguint els seus resultats, analitzem el concepte inversa-positiva per a un tipus particular de patró: el patró 'checkerboard'. Estudiem també en aquesta memòria la condició d'inversa-positiva de matrius triangulars inferiors (superiors) amb patró 'checkerboard'.

El producte Hadamard de matrius ha estat investigat per diversos autors. El nostre propòsit aquí és estudiar si el producte Hadamard de A i B i de A amb la inversa de B quan A i B són matrius inversa-positiva és també una matriu inversa-positiva. Respecte als patrons de signes, ens centrarem especialment en el patró 'checkerboard'. Estudiem també el producte Hadamard per les B-matrius i les seves classes relacionades (DB-matriu, B_0-matriu i $|B|$-matriu).

En aquest manuscrit s'aporten també alguns nous resultats sobre la completació de B-matrius parcials. Introduirem una sèrie de restriccions dels valors de les entrades de les matrius parcials, dels signes d'aquestes o dels seus grafs associats per tal de tancar el problema en algunes direccions.

Capítulo 1

Introducción.

En esta memoria estudiamos temas relacionados con matrices no singulares con inversa no negativa y con algunas clases de B-matrices, todas ellas estrechamente relacionadas con las M-matrices, ampliamente estudiadas en la literatura y que aparecen de un modo natural en ciertas discretizaciones de operadores diferenciales, particularmente aquellos con principio máximo/mínimo, como por ejemplo el Laplaciano, así como en diferentes técnicas de computación numérica.

En el Capítulo 2 describiremos los conceptos básicos que hemos utilizado para realizar la memoria como, por ejemplo, la matriz inversa-positiva, la B-matriz y clases de matrices relacionadas con ésta definidas por nosotros, matriz con patrón de signos 'checkerboard' y otras clases de matrices que también aparecen en el trabajo. Asimismo, describimos las propiedades hereditarias de las clases de matrices mencionadas anteriormente así como las relaciones que existen entre las mismas. En ese mismo capítulo presentamos la Teoría de Completación de Matrices y la Teoría de Grafos que necesitamos para la última parte de la memoria.

En el Capítulo 3 hablaremos de los antecedentes de los problemas que vamos a abordar en el trabajo, esto es, qué podemos encontrar en la literatura, describiendo los resultados ya conocidos y nombrando brevemente los objetivos que vamos a abordar.

En los siguientes capítulos nos centraremos en los problemas concretos que planteamos en la tesis, enumerándolos y profundizando en los resultados obtenidos y en su validez. Concretamente, esta última parte la organizaremos de la siguiente manera: En el Capítulo 4 presentaremos en primer lugar caracterizaciones de matrices inversa-positiva. Veremos a continuación algunos ejemplos de matrices inversa-positiva que aparecen en problemas de discretización, de factorización de matrices, y, en general, en diferentes técnicas numéricas. Estudiaremos la suma sub-directa (concepto introducido por Fallat y Johnson en [8]) de matrices inversa-positiva. Estudiaremos las relaciones existentes entre las matrices inversa-positiva y otras clases de matrices como las P-matrices, las matrices totalmente no negativas, las matrices totalmente no positivas, las matrices totalmente positivas, las matrices totalmente negativas, la matriz A^* introducida por Gantmacher y Krein en [17], las matrices con patrón 'checkerboard' y las matrices monótonas. Todas estas matrices están estrechamente relacionadas con las matrices inversa-positiva, aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, diseño gráfico asistido por ordenador, etc. Continuaremos con el análisis de la clase inversa-positiva en matrices de modelos económicos, concretamente en un tipo particular de matrices cuadradas que, como podemos comprobar en [13], se usan en los modelos Input-Output de Leontief con un capital fijado. Es importante saber en estos modelos cuándo estas matrices son inversa-positiva. Profundizaremos en el concepto de matriz inversa-positiva para un tipo particular de patrón: el patrón 'checkerboard'. Además, estudiaremos el producto Hadamard de ciertas clases de matrices inversa-positiva cuyas entradas presentan un patrón de signos particular.

En el Capítulo 5 presentaremos algunos nuevos resultados sobre B-matrices, en cuanto a propiedades, suma sub-directa y producto Hadamard.

En el Capítulo 6 generalizamos la clase de B-matrices introduciendo los conceptos de DB-matriz, B_0-matriz y $|B|$-matriz. Concretamente, de esta última clase de matrices estudiamos su relación con las ampliamente abundantes en la literatura M-matrices. De estas clases de B-matrices presentamos resultados sobre el producto Hadamard y la suma sub-directa.

La última parte de esta memoria corresponde al Capítulo 7 y está dedicada a problemas de completación de B-matrices parciales. Nos centramos en los problemas concretos que planteamos, enumerándolos y profundizando en los resultados obtenidos y en su validez.

Para finalizar, haremos un compendio de los resultados obtenidos en la tesis y propondremos una serie de problemas abiertos de investigación sobre temas relacionados con el mismo, problemas que constituirán futuras líneas de trabajo.

Capítulo 2

Conceptos básicos.

En esta memoria utilizaremos la siguiente notación.

Notación. *Dados* k,$n \in \mathbb{N}$, *1* $\leq k \leq n$, $Q_{k,n}$ *denotará el conjunto de todas las secuencias incrementales de* k *números naturales menores o iguales que* n.

Notación. *Dado* $\alpha \in Q_{k,n}$, *el complemento* $\alpha' \in Q_{n-k,n}$ *será* $\{1, 2, \ldots, n\} \sim \alpha$.

La *submatriz* de una matriz A de tamaño $n \times n$, formada por las filas α y las columnas β, donde $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, se denota por $A[\alpha|\beta]$, y la *submatriz principal* $A[\alpha|\alpha]$ se abrevia como $A[\alpha]$. Por otra parte, $A(\alpha|\beta)$ es la submatriz que se obtiene de A eliminando las filas indicadas por α y las columnas indicadas por β.

$(A)_{ij}$ denota la entrada (i, j) de la matriz A. El símbolo $(A)_j$ significa la j-ésima columna de A, y $\det(A(i|j))$ es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

Sea x un vector en $\mathbb{R}^n$. En este trabajo denotaremos por $x \geq 0$ cuando todas las componentes de x son no negativas, $x > 0$ cuando todas las componentes de x son no negativas pero no todas cero simultáneamente, y $x >> 0$ cuando todas las componentes de x son positivas.

Definimos en este capítulo los diferentes tipos de matrices con los que vamos a trabajar en esta memoria y sus aplicaciones.

2.1. Clases de matrices.

En primer lugar definiremos las matrices ya existentes en la literatura de las que hemos obtenido nuevos resultados, concretamente las matrices inversa-positiva, que podemos encontrar en [2] y en el artículo de J. E. Peris [45], y las B-matrices que fueron introducidas por J. M. Peña en [46]. El resto de matrices con las que trabajamos en la tesis se derivan de éstas y han sido introducidas por nosotros.

2.1.1. Matriz inversa-positiva.

Definición 2.1.1 *Una matriz real, no singular, $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es* **inversa-positiva** *si todos los elementos de su inversa son no negativos.*

Definición 2.1.2 *Una matriz real de tamaño $n \times n$ cuyas entradas de fuera de la diagonal son menores o iguales que cero recibe el nombre de* Z**-matriz**.

Definición 2.1.3 *Una Z-matriz recibe el nombre de* M**-matriz** *si sus menores principales son positivos.*

Estas matrices juegan un papel importante en Economía y en otras ciencias. Además, una matriz inversa-positiva que sea también Z-matriz, es una M-matriz no singular, de manera que la clase de las matrices inversa-positiva contiene a las M-matrices no singulares, ampliamente estudiadas en multitud de artículos de investigación y por una gran cantidad de autores, destacando entre otros a Johnson, Berman, Plemmons, etc. (véase [2]). Sus aplicaciones, por ejemplo, en métodos iterativos, en sistemas dinámicos, en Economía, en programación matemática, etc, son sobradamente conocidas. Véase, por ejemplo, [26].

Por supuesto, no toda matriz inversa-positiva es una M-matriz. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz inversa-positiva que no es M-matriz.

2.1.2. B-matriz.

Las B-matrices fueron introducidas por J.M. Peña en [46]. Su interés radica en ser un subconjunto de la clase de P-matrices (podemos encontrar la definición de P-matriz en el apartado 2.1.5 de esta memoria). Las propiedades de las B-matrices pueden ser utilizadas para localizar los valores propios reales de una matriz real y las partes reales de todos los valores propios de una matriz real.

Definición 2.1.4 *Una $n \times n$ matriz real $A = (a_{ij})$ se dice que es una* B**-matriz** *si para todo $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0 \qquad y \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right) > a_{ij}, \ \forall j \neq i. \tag{2.1}$$

Ejemplos de B-matrices podrían ser los siguientes.

Ejemplo 2.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -4 & 8 \\ -2 & 10 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.2

$$B = \begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1+\epsilon & 1 \\ 1 & 1 & 1+\epsilon \end{pmatrix},$$

siendo $\epsilon > 0$ arbitrario.

Es sencillo comprobar que los ejemplos anteriores cumplen las condiciones (2.1).

Además de la caracterización principal de una B-matriz, presentamos caracterizaciones alternativas equivalentes de B-matriz. Fueron ya introducidas por Peña en [46], y nos resultarán útiles para los nuevos resultados que se muestran en este escrito.

Previo a las caracterizaciones, introducimos un concepto que necesitamos para las mismas, y que también aparece definido en [46].

Definición 2.1.5 *Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$,*

$$r_{i+}^{A} = \text{máx}\{0, a_{ij} \mid j \neq i\}. \tag{2.2}$$

Con ese concepto podemos caracterizar las B-matrices de cualquiera de las dos formas siguientes.

Proposición 2.1.1 *Una matriz real $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es una B-matriz si y sólo si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > n r_{i+}^{A}. \tag{2.3}$$

Proposición 2.1.2 *Una matriz real $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es una B-matriz si y sólo si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$a_{ii} - r_{i+}^{A} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (r_{i+}^{A} - a_{ij}). \tag{2.4}$$

La demostración de estas dos proposiciones se puede encontrar en [46].

2.1.3. Otras clases de B-matrices.

Estas matrices son conceptos nuevos definidos por nosotros derivados del concepto de B-matriz.

DB-matriz.

Definición 2.1.6 *Una $n \times n$ matriz real $A = (a_{ij})$ se dice que es una DB-**matriz** si para todo $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0 \qquad y \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right) > a_{ij}, \ \forall j \neq i, \tag{2.5}$$

y, simultáneamente, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} > 0 \qquad y \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\right) > a_{ij}, \ \forall i \neq j. \tag{2.6}$$

Un ejemplo de esta clase de matrices sería el siguiente:

Ejemplo 2.1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que la matriz A satisface las condiciones (2.5) y (2.6).

Obviamente, toda DB-matriz es B-matriz, pero el recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.1.4 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

es una B-matriz pero no una DB-matriz.

De la definición de DB-matriz se deduce sin dificultad lo siguiente.

Proposición 2.1.3 *Sea A una matriz simétrica. A es B-matriz si y sólo si A es DB-matriz.*

B_0-matriz.

Las B_0-matrices cumplen las condiciones de las B-matrices con las desigualdades no estrictas y de ese modo obtenemos una clase de matrices más amplia que incluye estrictamente a las B-matrices. Como veremos más adelante, gran parte de las propiedades de las B-matrices son comunes a las de las B_0-matrices.

Definición 2.1.7 *Una matriz real, de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se dice que es una* B_0**-matriz** *si para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, se cumple*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq 0 \qquad y \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right) \geq a_{ij}, \ \forall j \neq i. \tag{2.7}$$

Un ejemplo de esta clase de matrices podría ser el siguiente.

Ejemplo 2.1.5 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

es una B_0-matriz.

Es sencillo comprobar que la clase de las B_0-matrices contiene estrictamente a la de las B-matrices.

Un ejemplo de B_0-matriz que no es B-matriz podría ser el siguiente.

Ejemplo 2.1.6 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -4 & 8 \\ -2 & 10 & -8 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

es B_0-matriz pero la segunda fila incumple las condiciones de B-matriz.

Definición 2.1.8 *Sea la matriz $A = (a_{ij})$. Se define la matriz $|A|$ como aquélla cuyas entradas son los valores absolutos de las entradas de A, es decir, $|A| = (|a_{ij}|)$.*

$|B|$-matriz.

En esta ocasión son las B-matrices las que contienen estrictamente a esta clase de matrices, cuya definición presentamos a continuación.

Definición 2.1.9 *Sea $A = (a_{ij})$ una B-matriz. Decimos que A es una* **$|B|$-matriz** *si y sólo si la matriz $|A| = (|a_{ij}|)$ es una B-matriz.*

De la definición anterior y de (2.1) se puede deducir una definición alternativa de $|B|$-matriz.

Definición 2.1.10 *Una $n \times n$ matriz real $A = (a_{ij})$ se dice que es una $|B|$-matriz si para todo $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0, \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right) > a_{ij} \qquad y \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\right) > |a_{ij}|, \ \forall j \neq i. \tag{2.8}$$

Nótese que si A es una B-matriz no negativa, entonces el concepto de $|B|$-matriz coincide con el de B-matriz.

Ejemplo 2.1.7 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

es una B-matriz no negativa, luego es $|B|$-matriz, satisface las condiciones (2.8).

No toda B-matriz es $|B|$-matriz.

Ejemplo 2.1.8 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es B-matriz pero no es $|B|$-matriz.

2.1.4. Matriz con patrón de signos 'checkerboard'.

Definición 2.1.11 *Una matriz real de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se dice que tiene patrón de signos* **'checkerboard'** *si $sign(a_{ij}) = (-1)^{i+j}$, o bien $a_{ij} = 0$, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ejemplo 2.1.9 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & -9 & 16 \end{pmatrix}$$

tiene un patrón de signos 'checkerboard'.

2.1.5. Otras clases de matrices.

Además de las mencionadas con anterioridad, trabajamos con otras clases de matrices que aparecen con frecuencia en la bibliografía (véase por ejemplo [2], [5], [6] y [26]) como son las siguientes.

Definición 2.1.12 *Una matriz real de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se dice que es una* **P-matriz** *si todos sus menores principales son positivos.*

Definición 2.1.13 *Una matriz real de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se dice que es una* **P_0-matriz** *si todos sus menores principales son no negativos.*

Definición 2.1.14 *Una matriz real de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se dice que es una matriz* **totalmente positiva (negativa)** *si todos sus menores son positivos (negativos).*

Definición 2.1.15 *Una matriz real de tamaño $n \times n$, $A = (a_{ij})$ se dice que es una matriz* **totalmente no positiva (no negativa)** *si todos sus menores son no positivos (no negativos).*

Definición 2.1.16 *Una matriz real $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es* **diagonal dominante por filas** *('Row diagonally dominant', RDD) si*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Definición 2.1.17 *Una matriz real $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es* **diagonal dominante por columnas** ('*Column Diagonally Dominant*', *CDD*) si

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{kj}|, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Si en las dos definiciones previas las desigualdades son estrictas, hablaremos de matriz **estrictamente diagonal dominante por filas** ('Strictly row diagonally dominant', SRDD) y matriz **estrictamente diagonal dominante por columnas** ('Strictly column diagonally dominant', SCDD), respectivamente.

El Ejemplo 2.1.2 pone de manifiesto que no es necesario que una matriz sea diagonal dominante para que sea B-matriz.

2.2. Propiedades de las clases de matrices.

Estudiamos en esta sección las propiedades hereditarias que poseen las diferentes clases de matrices de la memoria y presentamos contraejemplos que demuestran el incumplimiento de algunas otras.

2.2.1. Propiedades de las matrices inversa-positiva.

El concepto de matriz inversa-positiva tiene, en general, peores propiedades hereditarias que el concepto de M-matriz. Veremos a continuación algunas de esas propiedades.

Proposición 2.2.1 *Sea A una matriz inversa-positiva.*

a) Si $\alpha \in R^+$ entonces αA es una matriz inversa-positiva.

b) Si B es una matriz inversa-positiva, entonces AB es una matriz inversa-positiva.

c) Si P es una matriz permutación entonces PAP^T es una matriz inversa-positiva.

d) Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA, AD, y DAD^{-1} son matrices inversa-positiva.

Demostración.

a) Como $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, entonces αA es una matriz inversa-positiva.

b) Dado que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ entonces AB es una matriz inversa-positiva puesto que el producto de matrices no negativas es una matriz no negativa.

c) La matriz inversa de PAP^T es $(P^T)^{-1}A^{-1}P^{-1}$, y habida cuenta que la inversa de una matriz permutación coincide con su traspuesta, la inversa de PAP^T es $PA^{-1}P^T$. Esta última matriz tiene todos sus elementos no negativos, de modo que PAP^T es una matriz inversa-positiva.

d) Sea la matriz diagonal $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, con $d_i > 0$. Su inversa es $D^{-1} = diag(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n})$, y sus elementos son estrictamente positivos. De modo que DA, AD, y DAD^{-1} son matrices inversa-positiva.

$\square$

En el otro extremo, mostramos a continuación una serie de contraejemplos de propiedades que no cumplen las matrices inversa-positiva.

1. Las submatrices (principales o no) de una matriz inversa-positiva no son, en general, matrices inversa-positiva.

   Ejemplo 2.2.1 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

   es inversa-positiva, pero la submatriz principal $A[\{1,2\}]$ no lo es.

2. La inversa de una matriz inversa-positiva no es en general una matriz inversa-positiva.

   Ejemplo 2.2.2 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

   es inversa-positiva. No obstante, su inversa, A^{-1}, no es inversa-positiva.

3. Sean A y B matrices inversa-positiva, entonces $A+B$ no necesariamente es inversa-positiva.

   Ejemplo 2.2.3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & 4.66 & -2.66 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.25 & -2 & 1.25 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0.25 & 0.66 & -0.416 \end{pmatrix}.$$

   Se puede comprobar que ambas son inversa-positiva. Sin embargo, $A+B$ no lo es.

2.2.2. Propiedades de las B-matrices.

A continuación presentamos una serie de propiedades de la clase de B-matrices. Algunas de ellas fueron ya obtenidas en [46].

De (2.1) y (2.3) podemos caracterizar a las B-matrices de tamaño $n \times n$ con $n > 2$ por medio de la siguiente propiedad que localiza cada media de fila en un intervalo abierto. La demostración de esta propiedad se puede consultar en [46],

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}}{n} \in (r_{i+}^{A}, a_{ii}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Proposición 2.2.2 *Sea $A = (a_{ij})$ una B-matriz real de tamaño $n \times n$, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

(i)

$$a_{ii} > \sum_{h \in H} |a_{ih}| \quad \text{donde } H = \{h \mid 1 \le h \le n \text{ y } a_{ih} < 0\}. \tag{2.12}$$

(ii)

$$a_{ii} > |a_{ij}|, \quad \forall j \neq i. \tag{2.13}$$

La demostración de esta proposición podemos encontrarla también en [46].

Proposición 2.2.3 *Sea A una B-matriz de tamaño $n \times n$.*

a) A es una P-matriz.

b) Los elementos de la diagonal de A cumplen

$$a_{ii} > \max\{0, a_{ij} \mid j \neq i\}. \tag{2.14}$$

c) La media de cada fila de A tiene como límite inferior cualquier elemento de fuera de la diagonal de la fila y como límite superior el elemento de la fila perteneciente a la diagonal.

d) Si B es una B-matriz de tamaño $n \times n$ entonces $A + B$ es una B-matriz.

e) Si $\alpha \in R^+$ entonces αA es una B-matriz.

f) Las submatrices principales de A son B-matrices.

g) Si A es simétrica, entonces es definida positiva.

h) Sea A una Z-matriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) A es B-matriz.

(ii) La suma de cada fila de A es positiva.

(iii) A es SRDD con entradas de la diagonal positivas.

*(**Nota:** De esta propiedad se deduce que si A es B-matriz, entonces A es Z-matriz si y sólo si A es M-matriz.)*

i) Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA es B-matriz.

j) Si P es una matriz permutación, entonces PAP^T es una B-matriz.

Demostración.
Las pruebas desde el apartado a) hasta el h) las podemos encontrar en [46].

i) Sea la matriz diagonal $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, con $d_i > 0$. Realizar la operación DA equivale a multiplicar la fila i-esima de A por d_i para todo i. De manera que se siguen cumpliendo las condiciones (2.1), y en consecuencia DA es una B-matriz.

j) Al realizar a la matriz A la operación PAP^T las filas de A aparecen reordenadas, así como las columnas. Los elementos de la diagonal principal siguen siendo los mismos, reordenados acorde a las filas y columnas, de modo que se siguen cumpliendo las condiciones (2.1), y en consecuencia PAP^T es una B-matriz.

□

En el extremo opuesto, presentamos por medio de contraejemplos una serie de propiedades que las B-matrices no cumplen.

1. El producto de B-matrices no es en general B-matriz.

Ejemplo 2.2.4 Sean las B-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0.1 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix},$$

el producto de ambas es

$$AB = \begin{pmatrix} 29 & 50.5 & 74.5 \\ 10.1 & 15.05 & 10.05 \\ 20.1 & 45.05 & 80.05 \end{pmatrix},$$

que claramente no es B-matriz.

2. La matriz transpuesta de una B-matriz no es en general una B-matriz.

   Ejemplo 2.2.5 La transpuesta de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -4 & 8 \\ -2 & 10 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad A^T = \begin{pmatrix} 21 & -2 & 4 \\ -4 & 10 & 9 \\ 8 & 2 & 16 \end{pmatrix},$$

   que claramente no es B-matriz.

3. La inversa de una B-matriz no es en general una B-matriz.

   Ejemplo 2.2.6 La inversa de la B-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix},$$

   no es B-matriz.

4. Sea A una Z-matriz. Como hemos visto en el apartado h) de la Proposición 2.2.3, si además es B-matriz implica que es M-matriz. Pero si A es una M-matriz en general no es una B-matriz.

   Ejemplo 2.2.7 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.2 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

   es M-matriz, pero no es B-matriz.

5. Sea $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$, $d_i > 0$ *para* $i = 1, \ldots, n.$, entonces DAD^{-1} no es B-matriz.

   Ejemplo 2.2.8 Sea A la B-matriz y D la matriz diagonal positiva siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Es sencillo comprobar que DAD^{-1} no es una B-matriz.

2.2.3. Propiedades de otras clases de B-matrices.

En general las diferentes clases de B-matrices presentan entre sí unas propiedades hereditarias bastante similares, pasamos a continuación a describirlas.

Propiedades de las B_0-matrices.

Las propiedades de las B_0-matrices son similares a las de las B-matrices con alguna salvedad.

De la definición podemos deducir que los elementos de la diagonal de una B_0-matriz satisfacen para todo $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$a_{ii} \geq \text{máx}\{0, a_{ij} | j \neq i\} \tag{2.15}$$

y por lo tanto la media de cada fila de una B_0-matriz está limitada inferiormente por cualquier elemento de fuera de la diagonal de la fila y superiormente por el elemento de la diagonal de la fila.

El siguiente resultado proporciona una caracterización de las B_0-matrices que se puede derivar de la definición, donde para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, r_{i+}^A es el número definido anteriormente.

Proposición 2.2.4 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real de tamaño $n \times n$, entonces A es una B_0-matriz si y sólo si para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq n r_{i+}^A.$$

Demostración. Sea A una B_0-matriz, entonces cumple las condiciones (2.7). Concretamente, de la segunda condición,

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right) \geq a_{ij}, \ \forall j \neq i.$$

Como

$$r_{i+}^A = \text{máx}\{0, a_{ij} | j \neq i\},$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq n r_{i+}^A.$$

Recíprocamente, supongamos que la matriz A cumple

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq n r_{i+}^A.$$

Si es mayor o igual que n veces el máximo, será mayor o igual que n multiplicado por cualquier a_{ij} para $j \neq i$, de modo que A es B_0-matriz. $\square$

A partir de (2.15) y del resultado anterior podemos caracterizar las B_0-matrices de tamaño $n \times n$ con $n > 2$ por la siguiente propiedad, que localiza la media de cada fila en un intervalo cerrado.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \in [r_{i+}^{A}, a_{ii}], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Reordenando los términos de $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq n r_{i+}^{A}$, la proposición anterior también proporciona la siguiente caracterización de las B_0-matrices.

Proposición 2.2.5 *Sea $A = (a_{ik})$ una matriz real, de tamaño $n \times n$, entonces A es una B_0-matriz si y sólo si para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*

$$a_{ii} - r_{i+}^{A} \geq \sum_{j \neq i} (r_{i+}^{A} - a_{ij}). \tag{2.16}$$

Establecemos a continuación algunas propiedades de las B_0-matrices.

Proposición 2.2.6 *Sea $A = (a_{ij})$ una B_0-matriz real de tamaño $n \times n$, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

(i)

$$a_{ii} \geq \sum_{h \in H} |a_{ih}| \quad \text{donde } H = \{h \mid 1 \leq h \leq n \ \text{ y } \ a_{ih} < 0\}. \tag{2.17}$$

(ii)

$$a_{ii} \geq |a_{ij}|, \ \ \forall j \neq i. \tag{2.18}$$

Demostración. (i) se obtiene de (2.16), teniendo en cuenta que $a_{ii} \geq a_{ii} - r_{i+}^{A}$, $r_{i+}^{A} - a_{ij} \geq 0$ para todo $j \neq i$ y $r_{i+}^{A} - a_{ij} \geq |a_{ij}|$ si $a_{ij} < 0$. (ii) es consecuencia de (i) y de (2.15). □

Proposición 2.2.7 *Sea A una B_0-matriz.*

a) Si B es una B_0-matriz entonces $A + B$ es una B_0-matriz.

b) Si $\alpha \in R^{+}$ entonces αA es una B_0-matriz.

c) Las submatrices principales de A son B_0-matrices.

d) Si D es una matriz diagonal entonces DA es una B_0-matriz.

e) Si P es una matriz permutación entonces PAP^{T} es una B_0-matriz.

Demostración. De la definición es sencillo comprobar que la suma de B_0-matrices es B_0-matriz y que la multiplicación de un número real no negativo por una B_0-matriz es una B_0-matriz. La demostración de d) y e) es análoga al caso de B-matrices. Respecto a c), sea $A[\alpha]$, con $\alpha \in Q_{k,n}$, cualquier submatriz principal de una B_0-matriz de tamaño $n \times n$. Por la Proposición 2.2.6 (i), $A[\alpha]$ tiene las sumas de sus filas no negativas. Es suficiente asumir que, para dos índices diferentes $i, j \in \alpha$, $ka_{ij} > \sum_{s\in\alpha} a_{is}$, derivando en una contradicción. Sea α' el complemento de α. Si a_{il} es el elemento mayor de fuera de la diagonal de la i-ésima fila de A (esto es, $l \neq i$ y $a_{il} \geq a_{it}$ para cualquier $t \neq i$, $1 \leq t \leq n$) entonces $ka_{il} \geq ka_{ij}$ y así

$$na_{il} \geq ka_{il} + \sum_{r\in\alpha'} a_{ir} > \sum_{s\in\alpha} a_{is} + \sum_{r\in\alpha'} a_{ir} \geq \sum_{p=1}^{n} a_{ip}, \tag{2.19}$$

derivando en una contradicción con el hecho de que A es una B_0-matriz. □

En el extremo opuesto, presentamos por medio de contraejemplos una serie de propiedades que no cumplen las B_0-matrices.

1. El producto de dos B_0-matrices no es en general B_0-matriz.

   Ejemplo 2.2.9 Sean las B_0-matrices

   $$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 21 & -4 & 8 \\ -2 & 10 & -8 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

   El producto de ambas matrices es

   $$AB = \begin{pmatrix} 103 & -68 & 32 \\ -58 & 30 & -80 \\ -28 & 25 & 40 \end{pmatrix},$$

   que no es B_0-matriz.

2. Si A es B_0-matriz y D una matriz diagonal el producto DAD^{-1}, no es en general B_0-matriz.

   Ejemplo 2.2.10 Sea la matriz diagonal positiva

   $$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Se puede comprobar tomando la matriz A del ejemplo anterior que la matriz DAD^{-1} no es una B_0-matriz.

Utilizando la técnica empleada por T. Ando en [1], con la cual demuestra que el conjunto de las matrices totalmente positivas es denso en el conjunto de las totalmente no negativas (es decir, dada una matriz totalmente no negativa podemos encontrar una matriz totalmente positiva tan cercana a ella como queramos) demostramos los siguientes resultados que nos llevan a la conclusión de que toda B_0-matriz es P_0-matriz.

Teorema 2.2.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una B_0-matriz de tamaño $n \times n$, entonces podemos aproximar A por una B-matriz A_m tan cercana a A como queramos.*

Demostración. Para demostrar este teorema probemos que, si A es una B_0-matriz, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una B-matriz a la que llamaremos A_m tal que $\|A - A_m\| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

Sea la matriz $A_m = A + \frac{1}{m} I_n$ donde I_n es la matriz identidad de orden n, entonces la matriz A_m tendrá el siguiente aspecto.

$$A_m = \begin{pmatrix} a_{11} + \frac{1}{m} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \frac{1}{m} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Veamos si se cumplen para la matriz A_m las condiciones (2.1) de B-matriz. En el caso de la primera condición aplicada a A_m, para $i = 1, 2, \dots, n$, se debe cumplir que

$$\frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0,$$

lo cual es cierto porque el segundo sumando es mayor o igual que cero por ser A B_0-matriz, y además $\frac{1}{m} > 0$. En el caso de la segunda condición, se debe cumplir que

$$\frac{1}{mn} + \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}}{n} > a_{ij}, \quad \forall j \neq i,$$

lo cual es cierto porque el segundo sumando es mayor o igual que a_{ij} por ser A B_0-matriz, y además $\frac{1}{mn} > 0$. De manera que A_m es B-matriz y $\|A - A_m\| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$, es decir, se cumple que

$$\lim_{m \to \infty} A_m = A.$$

□

Teorema 2.2.2 *Si A es una B_0-matriz, entonces* $\det(A) \geq 0$.

Demostración. Como hemos visto en el teorema anterior, al poder aproximar una B_0-matriz A por una B-matriz A_m, se cumple que

$$\lim_{m \to \infty} A_m = A.$$

La función determinante es una función multilineal, de modo que aplicando ésto, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \det(A_m) = \det(A).$$

Sabemos que $\det(A_m) > 0$ por ser A_m B-matriz, de modo que tomando límites, $\det(A) \geq 0$. □

Teorema 2.2.3 *Sea A una B_0-matriz, entonces A es una P_0-matriz.*

Demostración. Las submatrices principales de una B_0-matriz son B_0-matrices, de manera que, por el teorema anterior, sus determinantes son mayores o iguales que cero. Por tanto A es una P_0-matriz. □

En el siguiente resultado ponemos de manifiesto la relación entre las B_0-matrices y las M-matrices.

Proposición 2.2.8 *Sea $A = (a_{ij})$ una Z-matriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) A es B_0-matriz.

(ii) Las sumas de las filas de A son no negativas.

(iii) A es RDD con entradas no negativas en la diagonal.

Demostración. Por definición, (i) implica (ii). Teniendo en cuenta que los elementos de fuera de la diagonal de A son no positivos, (ii) implica (iii). Demostraremos ahora que (iii) implica (i). Por ser RDD la matriz A,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Como por hipótesis las entradas de la diagonal de A son no negativas,

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

o lo que es lo mismo,

$$a_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \geq 0,$$

es decir, que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geq 0 \ \ para \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

con lo cual la primera de las dos condiciones de la definición de B_0-matriz se cumple. Veamos ahora si se cumple la segunda.

$$\frac{1}{n}|a_{ii}| \geq \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,$$

esto es,

$$\frac{1}{n}a_{ii} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij} \geq \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij},$$

de modo que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik} \geq \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij} \geq a_{ij}, \quad \forall j \neq i.$$

□

Deducimos de la equivalencia de (i) y (iii) en la proposición anterior y de la condición ($M37$) de [2] que una B_0-matriz no singular es una Z-matriz si y sólo si es una M-matriz. Sin embargo, no toda B_0-matriz es M-matriz.

Ejemplo 2.2.11 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

es B_0-matriz pero no es M-matriz.

Proposición 2.2.9 *Sea A una B_0-matriz no singular con patrón de signos 'checkerboard', entonces A es una P-matriz.*

Demostración. Si A es una B_0-matriz no singular, su determinante es positivo, luego es una P-matriz. □

Propiedades de las DB-matrices.

En general las propiedades de las DB-matrices también son muy similares a las de las B-matrices al ser una subclase de éstas, pero poseen alguna más que las B-matrices no poseen, teniendo en cuenta que las columnas de la matriz adquieren un papel relevante.

Presentamos a continuación algunas propiedades que poseen las DB-matrices. Definimos un concepto que será necesario para este apartado.

Definición 2.2.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real de tamaño $n \times n$. Para cada $j = 1, \ldots, n$,*

$$c^A_{j+} = \text{máx}\{0, a_{ij} | i \neq j\}. \tag{2.20}$$

Además de la Definición 2.1.4, alternativamente podemos caracterizar una DB-matriz de la manera siguiente.

Proposición 2.2.10 *Una $n \times n$ matriz real $A = (a_{ij})$ se dice que es una DB-matriz si y sólo si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > n r^A_{i+}, \tag{2.21}$$

y, simultáneamente, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} > n c^A_{j+}. \tag{2.22}$$

También las podemos caracterizar de la siguiente manera.

Proposición 2.2.11 *Una $n \times n$ matriz real $A = (a_{ij})$ se dice que es una DB-matriz si y sólo si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$a_{ii} - r^A_{i+} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (r^A_{i+} - a_{ij}), \tag{2.23}$$

y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$a_{jj} - c^A_{j+} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (c^A_{j+} - a_{ij}). \tag{2.24}$$

Estas caracterizaciones alternativas, cuya demostración es similar a la razonada en [46] pero aplicándolo también a las columnas, nos resultan útiles para los resultados que presentamos a continuación.

Proposición 2.2.12 *Sea $A = (a_{ij})$ una DB-matriz real de tamaño $n \times n$, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

(i)

$$a_{ii} > \sum_{h \in H} |a_{ih}| \quad H = \{h \mid 1 \leq h \leq n \ \ y \ \ a_{ih} < 0\}. \tag{2.25}$$

(ii)

$$a_{ii} > |a_{ij}|, \ \ \forall j \neq i. \tag{2.26}$$

Y simultáneamente para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$,

(iii)

$$a_{jj} > \sum_{h \in H} |a_{hj}| \quad H = \{h \mid 1 \leq h \leq n \ \ y \ \ a_{hj} < 0\}. \tag{2.27}$$

(iv)

$$a_{jj} > |a_{ji}|, \ \ \forall i \neq j. \tag{2.28}$$

La demostración de esta proposición es análoga a la de la Proposición 2.2.6. Además, las DB-matrices presentan también las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.13 *Sea $A = (a_{ij})$ una DB-matriz de tamaño $n \times n$.*

a) Si B es una DB-matriz entonces $A + B$ es una DB-matriz.

b) Si $\alpha \in R^+$ entonces αA es una DB-matriz.

c) A^T es una DB-matriz.

d) Las submatrices principales de A son DB-matriz.

e) Si D es una matriz diagonal, entonces DA es una DB-matriz.

f) Si P es una matriz permutación, entonces PAP^T es una DB-matriz.

g) A es P-matriz.

h) A es no singular y su determinante es positivo.

i) Se cumple lo siguiente para los elementos de la diagonal de una DB-matriz.

$$a_{ii} > \text{máx}\{0, a_{ij} \mid \forall j, j \neq i\}, \quad a_{jj} > \text{máx}\{0, a_{ij} \mid \forall i, i \neq j\} \tag{2.29}$$

j) Cada media de cada fila (columna) tiene como límite inferior cualquier elemento de fuera de la diagonal de la fila (columna) y como límite superior el elemento de la fila (columna) perteneciente a la diagonal.

k) Si A es simétrica, entonces es definida positiva.

l) Sea A una Z-matriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.
(i) A es una DB-matriz.
(ii) La suma de las filas de A y la suma de las columnas de A es positiva.
(iii) A es $SRDD$ y $SCDD$ con entradas positivas en la diagonal.
*(**Nota:** De esta propiedad se deduce que siendo A DB-matriz, es Z-matriz si y sólo si es M-matriz.)*

Demostración. Prácticamente todos los items se demuestran de un modo análogo al de las propiedades de las B-matrices, teniendo en cuenta también las columnas. La principal novedad en el caso de las DB-matrices viene dada por la propiedad c), siendo su comprobación sencilla pues transponer es intercambiar filas por columnas, de modo que se siguen cumpliendo las condiciones de DB-matriz. $\square$

En el extremo opuesto, presentamos por medio de contraejemplos una serie de propiedades que no cumplen las DB-matrices.

1. El producto de DB-matrices no es en general DB-matriz.

   Ejemplo 2.2.12 Si multiplicamos la DB-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

   por sí misma obtenemos la matriz

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1.23 & 1.42 & 0.75 \\ 0.88 & 4.17 & -0.18 \\ 0.34 & -0.5 & 1.1 \end{pmatrix}$$

   que claramente (obsérvese la entrada $(1,2)$) no es DB-matriz.

2. Sea $D = diag(d_1, \ldots, d_n),\ \ d_i > 0\ \ para\ \ i = 1, \ldots, n.$, entonces DAD^{-1} no es DB-matriz.

   Ejemplo 2.2.13 Sea la DB-matriz del ejemplo anterior, y sea la matriz diagonal positiva

$$D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Es sencillo comprobar que DAD^{-1} no es una DB-matriz.

Propiedades de las $|B|$-matrices.

En este apartado estudiamos las propiedades hereditarias de las $|B|$-matrices.

Proposición 2.2.14 *Sea A una $|B|$-matriz.*

a) A es una P-matriz.

b) Si B es una $|B|$-matriz entonces $A + B$ es una $|B|$-matriz.

c) Los elementos de la diagonal de A cumplen

$$a_{ii} > |a_{ij}|, \quad (j \neq i). \tag{2.30}$$

d) La media de cada fila de A tiene como límite inferior cualquier elemento de fuera de la diagonal de la fila y como límite superior el elemento de la fila perteneciente a la diagonal.

e) Si $\alpha \in R^+$, entonces αA es una $|B|$-matriz.

f) Las submatrices principales de A son $|B|$-matrices.

g) Si A es simétrica, entonces es definida positiva.

h) Si A es una Z-matriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) A es $|B|$-matriz.

(ii) La suma de cada fila de A es positiva.

(iii) A es SRDD con entradas de la diagonal positivas.

*(**Nota:** De esta propiedad se deduce que siendo A $|B|$-matriz, es Z-matriz si y sólo si es M-matriz.)*

i) Si D es una matriz diagonal positiva entonces DA es $|B|$-matriz.

j) Si P es una matriz permutación, entonces PAP^T es una $|B|$-matriz.

Demostración.

a) Como A es B-matriz, entonces A es P-matriz.

b) Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$. Por ser A y B B-matrices, la suma de ambas como ya hemos visto anteriormente cumple las dos primeras condiciones de (2.8). Veamos qué sucede con la tercera. Tomemos una fila i cualquiera. Utilizando la desigualdad triangular tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik} + b_{ik}| \geq |\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})| = |\sum_{k=1}^{n} a_{ik} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}|.$$

Según la segunda condición de (2.8), tenemos que

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}| > |na_{ij} + nb_{ij}| = n|a_{ij} + b_{ij}|, \;\; \forall j \neq i,$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik} + b_{ik}| > n|a_{ij} + b_{ij}|, \;\; \forall j \neq i.$$

c) Como que A es una B-matriz, según podemos encontrar en [46] se cumple que

$$a_{ii} > \text{máx}\{0, a_{ij} \mid j \neq i\},$$

y también que

$$a_{ii} > \sum_{h \in H} |a_{ih}| \quad \text{donde } H = \{h \mid 1 \leq h \leq n \text{ y } a_{ih} < 0\}.$$

Combinando ambas propiedades no es complicado concluir que

$$a_{ii} > |a_{ij}|, \ \ (j \neq i).$$

d) Por ser A una B-matriz.

e) Si substituimos a_{ik} por αa_{ik} y a_{ij} por αa_{ij} en (2.8), con $\alpha \in R^+$, las desigualdades se siguen cumpliendo, de manera que αA es una $|B|$-matriz.

f) Sea $A[\alpha]$, con $\alpha \in Q_{k,n}$, cualquier submatriz principal de una $|B|$-matriz de tamaño $n \times n$. Sabemos que $A[\alpha]$ es B-matriz. Es suficiente asumir que, para dos índices diferentes $i, j \in \alpha$, $k|a_{ij}| > \sum_{s\in\alpha} |a_{is}|$, derivando en una contradicción. Sea α' el complemento de α. Si a_{il} es el elemento mayor de fuera de la diagonal de la i-ésima fila de A (esto es, $l \neq i$ y $a_{il} \geq a_{it}$ para cualquier $t \neq i$, $1 \leq t \leq n$) entonces $ka_{il} \geq ka_{ij}$ y así

$$n|a_{il}| \geq k|a_{il}| + \sum_{r\in\alpha'} |a_{ir}| \geq \sum_{s\in\alpha} |a_{is}| + \sum_{r\in\alpha'} |a_{ir}| \geq \sum_{p=1}^{n} |a_{ip}|, \tag{2.31}$$

derivando en una contradicción con el hecho de que A es una $|B|$-matriz.

g) Como las $|B|$-matrices son B-matrices, entonces son P-matrices, de modo que si consultamos [2], Capítulo 10, Sección 2, encontraremos la demostración de esta propiedad.

h) Por definición, (i) implica (ii). Teniendo en cuenta que los elementos de A son no positivos, (ii) implica (iii) y (iii) implica (i). Con respecto a que siendo A Z-matriz es $|B|$-matriz si y sólo si es M-matriz, de la equivalencia entre (i) y (iii) y la propiedad (M_{35}) que podemos encontrar en el Teorema 2.3 del Capítulo 6 de [2], podemos deducir esta condición necesaria y suficiente.

i) Sea la matriz diagonal $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, con $d_i > 0$. Realizar la operación DA equivale a multiplicar la fila i-esima de A por d_i para todo i. De manera que se siguen cumpliendo las condiciones (2.8), y en consecuencia DA es una $|B|$-matriz.

j) Al realizar a la matriz A la operación PAP^T las filas de A aparecen reordenadas, así como las columnas. Los elementos de la diagonal principal siguen siendo los mismos, reordenados acorde a las filas y columnas, de modo que se siguen cumpliendo las condiciones (2.8), y en consecuencia PAP^T es una $|B|$-matriz.

$\square$

En el extremo opuesto, presentamos a continuación por medio de contraejemplos una serie de propiedades que no cumplen las $|B|$-matrices.

1. El producto de $|B|$-matrices no es en general $|B|$-matriz.

   Ejemplo 2.2.14 Sean las $|B|$-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0.1 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix},$$

   el producto de ambas es

$$AB = \begin{pmatrix} 29 & 50.5 & 74.5 \\ 10.1 & 15.05 & 10.05 \\ 20.1 & 45.05 & 80.05 \end{pmatrix},$$

   que claramente no es $|B|$-matriz, ni tan siquiera es B-matriz.

2. La matriz transpuesta de una $|B|$-matriz no es, en general, una $|B|$-matriz, por ejemplo la transpuesta de la matriz B del ejemplo anterior no es $|B|$-matriz.

3. La inversa de una $|B|$-matriz no es, en general, una $|B|$-matriz.

   Ejemplo 2.2.15 La inversa de la $|B|$-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix},$$

   no es $|B|$-matriz.

4. Sea A una Z-matriz. Como hemos visto anteriormente, si además es $|B|$-matriz implica que es M-matriz. Pero si A es M-matriz no tiene por qué ser $|B|$-matriz.

Ejemplo 2.2.16 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.2 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

es M-matriz, pero no es $|B|$-matriz.

No obstante, y como podremos comprobar en la sección 6.3.2, hemos obtenido una serie de resultados que relacionan las $|B|$-matrices con las M-matrices.

5. Sea $D = diag(d_1, \ldots, d_n),\ \ d_i > 0\ \ para\ \ i = 1, \ldots, n.$, entonces DAD^{-1} no es necesariamente $|B|$-matriz.

Ejemplo 2.2.17 Sea la $|B|$-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix},$$

y sea la matriz diagonal positiva

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que DAD^{-1} no es una $|B|$-matriz.

2.3. Relaciones entre distintas clases de matrices.

En esta sección mostramos cómo están relacionadas las clases de matrices con las que se trabaja en esta memoria.

Representando por $\mathcal{B}$ la clase de las B-matrices y análogamente por $|\mathcal{B}|$ a las $|B|$-matrices, $\mathcal{B}_0$ a las B_0-matrices, $\mathcal{DB}$ a las DB-matrices, $\mathcal{Z}$ a las Z-matrices, $\mathcal{M}$ a las M-matrices, $i\mathcal{P}$ a las matrices inversa-positiva, $\mathcal{P}$ a las P-matrices, y $\mathcal{P}_0$ a las P_0-matrices en el siguiente diagrama recogemos algunas de las relaciones existentes entre estas clases de matrices.

$$
\begin{array}{ccccccc}
i\mathcal{P} & & & & & & \\
\uparrow & \nwarrow & & & & & \\
i\mathcal{P}+\mathcal{Z} & \longleftrightarrow & \mathcal{M} & & & & \\
 & \searrow & \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P}_0 & & \\
 & & \uparrow & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 & & \mathcal{DB} & \rightarrow & \mathcal{B} & \rightarrow & \mathcal{B}_0 \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & |\mathcal{B}| & &
\end{array}
$$

2.4. Completación de matrices parciales.

En esta sección vamos a introducir los conceptos básicos de lo que se conoce con el nombre de *Teoría de Completación de Matrices Parciales*. Es una teoría relativamente joven con numerosas aplicaciones, tanto en Matemáticas: resolución de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros, clasificación de los puntos críticos de una función de varias variables dependiente de uno o varios parámetros, precondicionamiento de matrices mal condicionadas, etc.; como en otras disciplinas: Economía, Estadística, Teoría de Control, etc.

La forma, a nuestro entender, más intuitiva de representar una matriz parcial es mediante un grafo dirigido o no dirigido. Por ello, introducimos las nociones de grafos que vamos a utilizar a lo largo del trabajo, procurando relacionar en cada momento los distintos tipos de grafos con la estructura de la matriz parcial correspondiente.

2.4.1. Teoría de Completación

En numerosos problemas de Matemáticas, Economía, Estadística, Biología y Ciencias Sociales, modelizados mediante técnicas matriciales, la resolución del problema consiste en determinar algunas entradas de una determinada matriz, de manera que la matriz obtenida verifique ciertas propiedades previamente establecidas. La rama de las Matemáticas que engloba este tipo de problemas recibe el nombre de **Teoría de Completación.** Aunque este nombre aparece en la historia en la segunda mitad del siglo XX, en esta teoría podemos incluir problemas clásicos tales como:

$\triangleright$ *La clasificación de un sistema de ecuaciones lineales con parámetros.* La resolución del sencillo sistema de ecuaciones lineales con parámetros

$$\begin{bmatrix} \alpha & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 4 & \beta & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es un problema que podemos incluir dentro de la Teoría de Completación, ya que en realidad estamos buscando valores de las entradas $(1,1)$ y $(3,2)$ de la matriz de coeficientes, de manera que el sistema tenga solución única, infinitas soluciones o sea incompatible.

$\triangleright$ *El cálculo de los valores propios de una matriz cuadrada A.* En este caso estamos buscando valores de λ para los que la matriz $B = \lambda I - A$ tenga determinante nulo.

$\triangleright$ *La clasificación de los puntos críticos de una función de varias variables, dependiente de un parámetro.* En estos problemas necesitamos determinar algunas entradas de la matriz Hessiana, evaluada en cada punto crítico, para que la forma cuadrática que esta matriz define sea definida positiva, definida negativa o indefinida.

$\triangleright$ *Problema de distribución del presupuesto.* Una empresa multinacional, con sucursales $S1$, $S2$ y $S3$ en tres países europeos distintos, tiene el presupuesto para el próximo año fiscal, el cual debe ser distribuido entre tres categorías distintas: investigación, administración y técnicos. El consejo de administración fija la cantidad total que debe ser distribuida entre esas tres categorías. Conocida la distribución del presente año para cada una de las sucursales de la empresa en las tres categorías, el problema consiste en cómo modificar la actual distribución del presupuesto para obtener la nueva distribución de manera que cumpla con las estipulaciones que marca el consejo de administración. Por ejemplo, supongamos que en la matriz A tenemos la distribución actual en millones de euros:

Matriz A

	Técnicos	Administración	Investigación
S1	200	75	15
S2	135	165	12
S3	175	160	25

El objetivo es fijar las entradas de la siguiente matriz B, de manera que sean no negativas y verifiquen las restricciones fijadas respecto de la distribución del presupuesto:

Matriz B

	Técnicos	Administración	Investigación	Presupuesto
S1	$\star$	$\star$	$\star$	400
S2	$\star$	$\star$	$\star$	350
S3	$\star$	$\star$	$\star$	370
	$---$	$---$	$---$	$----$
Total	700	320	100	1120

Evidentemente, podemos encontrar matrices que verifiquen las restricciones impuestas (suma de las filas y columnas fijada), pero muchas de ellas están bastante alejadas de la matriz original A. Por ejemplo, la siguiente matriz C:

Matriz C

	Técnicos	Administración	Investigación
S1	0	320	80
S2	330	0	20
S3	370	0	0

satisface las restricciones, pero una decisión de este tipo daría lugar a serios problemas, incluyendo el que se crearía por la necesaria reubicación del personal. Por tanto, necesitamos encontrar una matriz que no sólo verifique las restricciones dadas para la suma de las filas y columnas, sino que además esté cercana a la matriz original para algún tipo apropiado de medida de proximidad, que vendrá fijada en función de los resultados económicos del presente ejercicio.

Podemos observar que todos estos problemas tienen en común que hay que determinar las entradas, o parte de ellas, de una o varias matrices, con el objetivo de conseguir una matriz que verifique alguna propiedad establecida previamente. Como ya hemos comentado, la Teoría de Completación es la encargada de estudiar esta clase de problemas, es decir problemas concernientes a matrices parciales.

Definición 2.4.1 *Una matriz real A, de tamaño $m \times n$, se dice que es una* **matriz parcial** *si parte de sus entradas son conocidas y el resto están por especificar, pudiendo considerarse como variables independientes. Se llama* **patrón** *de una matriz parcial A, de tamaño $m \times n$, y se representa por Γ_A, al conjunto de pares $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que el elemento que ocupa la posición (i, j) de la matriz A es especificado.*

Ejemplo 2.4.1 La matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \star & 2 & -\frac{1}{2} \\ \star & \star & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \star & \star \end{bmatrix}$$

donde $\star$ representa entradas no especificadas, tiene como patrón el siguiente conjunto de pares

$$\Gamma_A = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2)\}$$

La matriz A_c obtenida al dar valores a las entradas no especificadas de la matriz parcial A, recibe el nombre de **completación** de la matriz A.

Ejemplo 2.4.2 La matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & \pi & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

es una completación de la matriz parcial A del ejemplo anterior.

Cuando todas las entradas no especificadas de la matriz parcial son reemplazadas por ceros se obtiene la denominada **completación nula** y se representa por A_0.

En los **problemas de completación** se estudia la existencia de completaciones de una matriz parcial verificando determinadas propiedades previamente establecidas. El planteamiento general de un problema de completación es el siguiente:

Sea A una matriz parcial. Si $\mathcal{P}$ representa una determinada propiedad, ¿existe una completación A_c de la matriz A verificando la propiedad $\mathcal{P}$?

Se trata, por tanto, de un tipo de problema muy amplio ya que depende de:

▷ El patrón de la matriz parcial, es decir las posiciones que ocupan sus entradas especificadas. Por ejemplo, una fila, una banda, la parte triangular superior, la diagonal principal, etc.
▷ El concepto prescrito que se desea obtener. Por ejemplo, la no singularidad, el rango mínimo, una determinada estructura de Jordan, el tener inversa no positiva, el tener menores principales positivos, etc.

En numerosos problemas de completación es habitual introducir restricciones sobre las entradas especificadas de la matriz parcial, entre las que cabe destacar:

▷ *Positividad* de la matriz parcial, es decir todas las entradas especificadas son positivas.

▷ *Simetría de signo*, es decir las entradas especificadas de una matriz parcial cuadrada situadas en posiciones simétricas tienen el mismo signo.

O restricciones de tipo simétrico sobre el patrón:

▷ Diremos que una matriz parcial cuadrada $A = (a_{ij})$ es **posicionalmente simétrica** si la entrada a_{ij} es especificada si y sólo si la entrada a_{ji} lo es.

La motivación histórica de los problemas de completación aparece en determinadas ramas de la Economía, Estadística, Biología, Química, etc, ya que para obtener conclusiones sobre un determinado modelo no siempre es necesario disponer de información cuantitativa, sino que es suficiente con conocer su comportamiento.

A continuación presentamos una breve descripción de algunos de los problemas de completación en los que numerosos investigadores están trabajando actualmente.

$\diamondsuit$ **El problema de completación de valores propios**, en el que se desea obtener una completación de una matriz parcial cuadrada con un determinado espectro. Este ha sido uno de los primeros problemas de completación estudiados, siendo Mirsky, en 1958, quien obtuvo el primer resultado para matrices con todos sus elementos situados fuera de la diagonal principal no especificados, como se puede comprobar en [43].

Otros autores han abordado este problema para matrices parciales cuyo patrón constituye una submatriz principal o un bloque diagonal. En el primer caso la solución del problema fue dada por Thompson y Sà, y en el segundo por De Oliveira y Silva. Cuando el patrón de la matriz parcial es un número de filas o columnas completas el problema ha sido resuelto por Zaballa. Todos estos resultados, incluyendo conexiones con la Teoría de Sistemas, aparecen descritos de forma sistemática.

En la actualidad, investigadores como Gohberg, Rodman, Shalom, Krupnik, etc., están estudiando el problema de completación de valores propios para distintos patrones de la matriz parcial.

$\diamondsuit$ **El problema de completación de matrices parciales con forma de Jordan prefijada**, en el que el objetivo es encontrar una completación de la matriz parcial con una estructura de Jordan preestablecida.

Este problema ha sido estudiado por Rodman y Shalom, para matrices parciales triangulares superiores, es decir matrices parciales cuya parte triangular superior es especificada y todas las entradas por debajo de la diagonal no especificadas. En este trabajo los autores plantean como conjetura condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una completación con forma de Jordan prescrita, demostrándola para matrices de tamaño $n \times n$, con $n \leq 4$.

Jordán, Torregrosa y Urbano demuestran que dicha conjetura es cierta para matrices de tamaño 5×5 y falsa cuando $n \geq 6$. Por otra parte, Krupnik y Rodman y Jordán, Torregrosa y Urbano en [41], [40] analizan este problema para matrices parciales Jordan y parciales Hessemberg, caracterizando la existencia de la completación deseada a partir del concepto de mayorización.

$\diamondsuit$ **El problema de completación de P-matrices parciales**, en el que el objetivo es obtener una completación P-matriz, es decir una matriz cuyos menores principales son positivos, de una P-matriz parcial.

El estudio de este problema se inició en 1996 por Johnson y Kroschel (ver [31]), quienes cerraron el problema en el caso de matrices parciales posicionalmente simétricas. Hogben y De Alba en [25] continuan el estudio de este problema para el caso de matrices parciales no posicionalmente simétricas, obteniendo resultados parciales para matrices de pequeño tamaño. Posteriormente, Fallat, Johnson, Torregrosa y Urbano en [12] iniciaron el análisis de este problema añadiendo condiciones sobre las entradas especificadas de la P-matriz parcial, tales como positividad, simetría de signo, etc., o sobre el patrón de dicha matriz. Este problema tiene todavía numerosas cuestiones abiertas.

$\Diamond$ **El problema de completación de M-matrices parciales**. En este caso se pretende obtener una completación M-matriz, es decir una matriz que es P-matriz y todas sus entradas fuera de la diagonal principal son no positivas, de una M-matriz parcial. Este tipo de matrices aparece con frecuencia en el estudio de la convergencia de los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, en modelos de crecimiento económico, etc.

En 1996, Johnson y Smith, en [35], estudiaron este problema dando una caracterización implícita del mismo, independiente de la estructura de la matriz. Posteriormente Hogben en [22], analiza el caso no posicionalmente simétrico, para determinados tipos de patrones. Este problema de completación tiene aún muchas cuestiones abiertas.

$\Diamond$ **El problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas**. Al igual que en los casos precedentes, en este problema se analiza bajo qué condiciones una matriz parcial totalmente no negativa, admite una completación que sea una matriz totalmente no negativa, es decir que tenga todos sus menores no negativos. Estas matrices están teniendo una importancia creciente en Teoría de Aproximación, Estadística, Economía, Diseño geométrico asistido por ordenador, etc., lo cual explica la atención que se les está prestando en la actualidad dentro del Álgebra Lineal.

El problema es analizado por primera vez por Johnson, Kroschel y Lundquist, en [32], para matrices parciales posicionalmente simétricas. Los autores demuestran que existe la completación deseada cuando el grafo asociado a la matriz parcial es un grafo 1-cordal, monótonamente etiquetado (en la siguiente sección definiremos con detalle este concepto). Para otros tipos de grafo asociado, la matriz parcial no admite, en general, una completación totalmente no negativa, y para estos casos se están estudiando condiciones necesarias y suficientes que garanticen la existencia de la completación deseada.

Recientemente, Fallat, Johnson y Smith han abordado este problema, en [11], para matrices no posicionalmente simétricas, obteniendo resultados parciales para matrices con pocas entradas no especificadas.

Quedan numerosas cuestiones abiertas, tanto en el caso posicional como no posicionalmente simétrico, asi como la extensión del problema a matrices totalmente positivas, es decir matrices con todos sus menores positivos, matrices totalmente negativas, etc.

2.4.2. Teoría de Grafos.

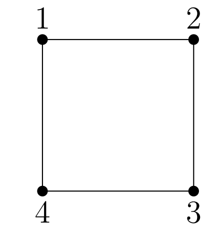
En el estudio de la mayor parte de los problemas comentados juega un papel fundamental la Teoría de Grafos, ya que una de las formas más sencillas de representar una matriz parcial es mediante un grafo. Consultando por ejemplo las referencias [23], [36] y [37] podemos constatar la anterior afirmación.

El **grafo asociado** a las entradas especificadas de una matriz parcial $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, es el grafo $G_A = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de vértices y existe un arco del vértice i al vértice j, con $(i \neq j)$, si la entrada a_{ij} de la matriz A es especificada. Teniendo en cuenta que, en general, vamos a trabajar con matrices parciales cuya diagonal principal es especificada, omitiremos los bucles de su grafo asociado.

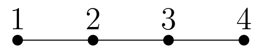
Si la matriz parcial A es posicionalmente simétrica, su grafo asociado G_A es **no dirigido** y hablaremos de arista entre los vértices i y j. En caso contrario su grafo asociado es **dirigido**.

Ejemplo 2.4.3 (a) Matrices parciales posicionalmente simétricas y grafos asociados no dirigidos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \star & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \star \\ \star & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \star & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

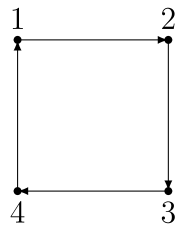


$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \star & \star \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \star \\ \star & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ \star & \star & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

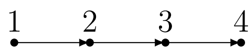


(b) Matrices parciales no posicionalmente simétricas y grafos asociados dirigidos

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \star & \star \\ \star & c_{22} & c_{23} & \star \\ \star & \star & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & \star & \star & c_{44} \end{bmatrix},$$



$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \star & \star \\ \star & d_{22} & d_{23} & \star \\ \star & \star & d_{33} & d_{34} \\ \star & \star & \star & d_{44} \end{bmatrix},$$



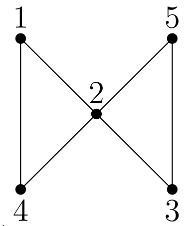
Una secuencia finita de vértices $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}$, tal que cada vértice aparece sólo una vez y la arista $\{i_{j-1}, i_j\} \in E$, $j = 2, 3, \ldots, k$, recibe el nombre de **camino**. Si el primer y último vértice coinciden recibe el nombre de **ciclo**. En el apartado

(a) del ejemplo anterior los grafos asociados a las matrices A y B son un ciclo y un camino no dirigido, respectivamente, y en el apartado (b) las matrices C y D tienen como grafos asociados un ciclo y un camino dirigido, respectivamente.

Los grafos no dirigidos se dividen en cordales y no cordales. Un grafo no dirigido se dice que es **cordal** si no tiene ciclos minimales de longitud mayor o igual que 4. En la literatura especializada, este tipo de grafos ha recibido también el nombre de **grafos triangularizados**, **grafos monótono-transitivos** y **grafos de eliminación perfecta**.

Ejemplo 2.4.4 El grafo asociado a la siguiente matriz parcial es un grafo cordal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \star & a_{14} & \star \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \star & a_{32} & a_{33} & \star & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \star & a_{44} & \star \\ \star & a_{52} & a_{53} & \star & a_{55} \end{bmatrix},$$



Un **clique**, en un grafo dirigido o no dirigido $G = (V, E)$, es simplemente un subgrafo completo, es decir, un grafo cuyo conjunto de vértices es un subconjunto S de V y cuyo conjunto de aristas son todas las posibles aristas entre los vértices de S. Representamos por K_p un clique con p vértices.

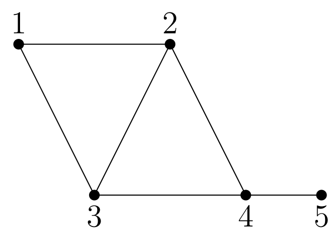
Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ el clique K_r y $G_2 = (V_2, E_2)$ el clique K_q. Supongamos que el subgrafo inducido por el conjunto de vértices $V_1 \cap V_2$ es el clique K_p y que no existen aristas entre los vértices $V_1 \sim \{V_1 \cap V_2\}$ y $V_2 \sim \{V_1 \cap V_2\}$. El grafo $G = (V, E)$, donde $V = V_1 \cup V_2$ y $E = E_1 \cup E_2$, recibe el nombre de **clique suma** de los cliques K_r y K_q, y al clique K_p se le llama **vértice separador**. Todo grafo de este tipo admite, salvo semejanza por permutación, una representación matricial con bloques diagonales cuadrados, de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & X \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ Y & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \longleftarrow & r-p \\ \longleftarrow & p \\ \longleftarrow & q-p \end{array}$$

Un grafo cordal diremos que es **p-cordal** si es una secuencia de cliques suma y el cardinal del mayor vértice separador es p. Un grafo p-cordal se dice que está **monótonamente etiquetado** si está etiquetado de forma natural y cada vértice de un vértice separador pertenece sólo a dos cliques. Este concepto se puede extender a caminos, ciclos y, en general, a cualquier tipo de grafo dirigido o no.

Ejemplo 2.4.5 El grafo asociado a la siguiente matriz parcial

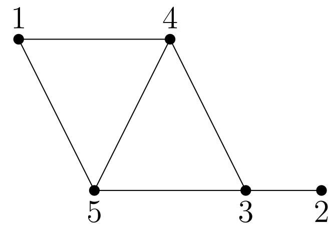
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \star & \star \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \star \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \star \\ \star & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ \star & \star & \star & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix},$$



es un grafo 2-cordal monótonamente etiquetado.

Ejemplo 2.4.6 El grafo asociado a la siguiente matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \star & \star & a_{14} & a_{15} \\ \star & a_{22} & a_{23} & \star & \star \\ \star & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & \star & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & \star & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix},$$

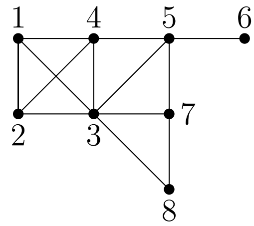


es un grafo 2-cordal no monótonamente etiquetado. Si realizamos la permutación de filas y columnas $P = [1\ 4\ 5\ 3\ 2]$, la matriz $A' = PAP^T$ tiene una estructura análoga a la del ejemplo anterior y su grafo asociado es 2-cordal monótonamente etiquetado.

No toda matriz cuyo grafo asociado es un p-cordal, no monótonamente etiquetado, admite una semejanza por permutación tal que el grafo asociado a la nueva matriz es monótonamente etiquetado, como se muestra en el siguiente ejemplo.

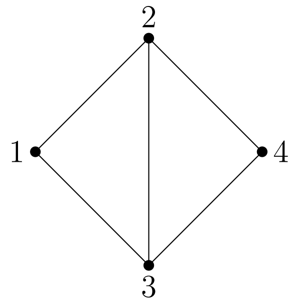
Ejemplo 2.4.7 La siguiente matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \star & \star & \star & \star \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \star & \star & \star & \star \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \star & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \star & \star & \star \\ \star & \star & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & a_{65} & a_{66} & \star & \star \\ \star & \star & a_{73} & \star & \star & \star & a_{77} & a_{78} \\ \star & \star & a_{83} & \star & \star & \star & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix},$$



cuyo grafo es un 2-cordal no monótonamente etiquetado, no admite una semejanza por permutación de manera que el grafo asociado a la nueva matriz sea monótonamente etiquetado, ya que el vértice $\{3\}$ pertenece a tres vértices separadores.

Es fácil observar que todo grafo cordal es un grafo p-cordal, con $p \geq 1$ y ambos conceptos se mantienen por isomorfismo. Por otra parte, todo grafo p-cordal, con $p \geq 2$, admite como subgrafo un doble triángulo:

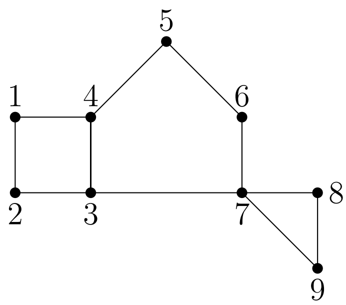


Dentro de los grafos no cordales tienen un papel predominante los ciclos. Combinando ciclos de distintas longitudes podemos generar nuevos tipos de grafos que van a ser importantes en los problemas de completación que analizaremos en los próximos capítulos.

Un grafo no dirigido se dice que es un **block-ciclo** si es una sucesión de ciclos $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ tal que, para cualesquiera i, j, $i \neq j$, los ciclos C_i y C_j tienen un vértice en común, p aristas en común, $p \geq 1$, o tienen intersección vacía.

Ejemplo 2.4.8 El grafo asociado a la siguiente matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \star & a_{14} & \star & \star & \star & \star & \star \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \star & \star & a_{37} & \star & \star \\ a_{41} & \star & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & a_{65} & a_{66} & a_{67} & \star & \star \\ \star & \star & a_{73} & \star & \star & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix},$$



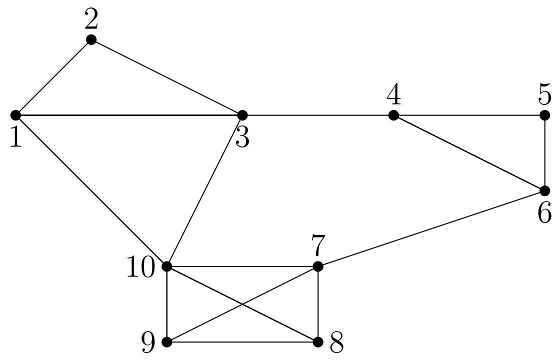
es un block-ciclo formado por tres ciclos.

Por otra parte, un grafo no dirigido se dice que es un **pseudociclo** si es un ciclo cuyos vértices son cliques.

Ejemplo 2.4.9 El grafo asociado a la matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & a_{110} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \star & \star & \star & \star & \star & a_{310} \\ \star & \star & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} & a_{710} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & a_{87} & a_{88} & a_{89} & a_{810} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & a_{97} & a_{98} & a_{99} & a_{910} \\ a_{101} & \star & a_{103} & \star & \star & \star & a_{107} & a_{108} & a_{109} & a_{1010} \end{bmatrix},$$

es el siguiente pseudociclo formado por tres cliques.



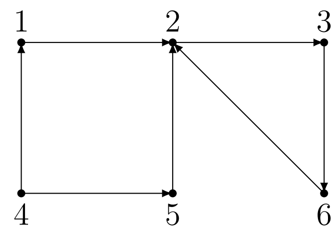
Para los dos tipos de grafos que acabamos de introducir es posible extender de forma natural el concepto de monótonamente etiquetado.

Respecto a los grafos dirigidos podemos dividirlos en dos grupos, los **acíclicos** que son aquéllos que no tienen ciclos y los **no acíclicos**. Dentro de este segundo grupo podemos incluir lo que llamaríamos **block-ciclo dirigido** y **pseudociclo dirigido**. En ambos casos la definición es análoga a la que hemos dado para grafos no dirigidos.

Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$ diremos que el camino $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ es **un camino completamente especificado** si el arco $\{i_1, i_p\}$ pertenece a E.

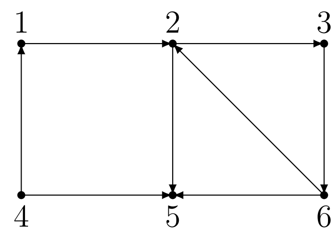
Ejemplo 2.4.10 El grafo asociado a la siguiente matriz parcial no tiene caminos completamente especificados

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \star & \star & \star & \star \\ \star & a_{22} & a_{23} & \star & \star & \star \\ \star & \star & a_{33} & \star & \star & a_{36} \\ a_{41} & \star & \star & a_{44} & a_{45} & \star \\ \star & a_{52} & \star & \star & a_{55} & \star \\ \star & a_{62} & \star & \star & \star & a_{66} \end{bmatrix},$$



mientras que en el grafo asociado a la matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \star & \star & \star & \star \\ \star & a_{22} & a_{23} & \star & a_{25} & \star \\ \star & \star & a_{33} & \star & \star & a_{36} \\ a_{41} & \star & \star & a_{44} & a_{45} & \star \\ \star & \star & \star & \star & a_{55} & \star \\ \star & a_{62} & \star & \star & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix},$$



por ejemplo, el camino $\{4, 1, 2, 5\}$ es un camino completamente especificado.

La siguiente tabla describe la clasificación de grafos que utilizaremos a lo largo de la memoria.

$$\text{Grafo} \begin{cases} \text{No dirigido} \begin{cases} \text{Cordal} & \begin{cases} 1 - \text{cordal} \\ k - \text{cordal},\ k \geq 2 \end{cases} \\ \text{No cordal} & \begin{cases} \text{Ciclo} \\ \text{Block-ciclo} \\ \text{Pseudociclo} \\ \text{Otros} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Dirigido} \begin{cases} \text{Acíclico} & \begin{cases} \text{Sin caminos completamente especificados} \\ \text{Con caminos completamente especificados} \end{cases} \\ \text{No acíclico} & \begin{cases} \text{Ciclo} \\ \text{Block-ciclo} \\ \text{Pseudociclo} \\ \text{Otros} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Capítulo 3

Antecedentes.

El problema de caracterizar matrices inversa-positiva ha sido extensamente tratado en la literatura. Por ejemplo, Berman y Plemmons, en [2], estudiaron el concepto para matrices inversa-positiva que además fuesen Z-matriz (es decir, M-matrices). Proporcionaron 50 caracterizaciones equivalentes a la afirmación "A es una M-matriz no singular". De las 50 caracterizaciones, 9 están relacionadas con la condición de matriz inversa-positiva. Pero fueron Johnson en [27] y [28], y M. Fiedler en [7] quienes se ocuparon por primera vez de caracterizar los patrones de signos que debe seguir una matriz inversa-positiva. En [28] se caracterizaron los patrones de signos +, - que presentan las matrices cuyas inversas tienen todas sus componentes positivas. En [7] ésto se extendió para identificar aquellos patrones +, -, 0 de las matrices cuyas inversas tienen todas sus entradas positivas. En [27] se completó la secuencia y se identificaron aquellos patrones de signos +, -, 0 que aparecen en matrices no singulares cuya inversa tiene todas sus componentes no negativas. A la caracterización de matrices inversa-positiva se dedicó también J. E. Peris en [45], donde se proporcionó una nueva caracterización de matrices con inversa positiva utilizando *splittings* positivos. Concretamente, se muestra que una matriz M es inversa-positiva si y sólo si el radio espectral de todos los *splittings* positivos es menor que uno.

Más tarde, T. Fujimoto et al. presentaron en [15] una caracterización de matrices inversa-positiva en relación con la condición Hawkins-Simon, conocida con ese nombre en economía, y el principio Le Chatelier-Braun de termodinámica (véase [19]).

La inversa-positividad de matrices cuadradas reales juega un rol muy importante en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería y ha sido analizada en diferentes contextos. Por ejemplo, en [18] podemos ver la descripción de métodos iterativos particulares para la resolución de sistemas lineales cuando la matriz es inversa-positiva. R. Precup [49] obtiene soluciones no triviales positivas para una clase concreta de sistemas variacionales utilizando la técnica de matrices inversa-positiva. En la relación de recurrencia de los polinomios de Chebyshev de segundo orden aparecen varias matrices inversa-positiva que han sido estudiadas por C.M. da Fonseca en [14].

Como podemos comprobar en [13], Fujimoto y Silva, trabajan con un tipo particular de matrices cuadradas, que se usa en los modelos económicos Input-Output de Leontief con un capital fijado. Es importante saber en estos modelos cuándo estas matrices son inversa-positiva. Presentaremos algunos nuevos resultados al respecto. Por ejemplo, una matriz de ese tipo de tamaño 5×5 tiene el siguiente aspecto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & -a & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro real con interpretación económica.

Cuando A es una matriz real de tamaño $n \times n$ que pertenece a este caso especial con n impar, $n = 2k+1$, no es difícil comprobar que A es una matriz inversa-positiva si y sólo si $1 \leq a < (1 + \frac{1}{k})$.

Y, por último y más reciente, Linzhang Lu en [42] estudia las matrices inversa-positiva, donde se considera una clase de matrices inversa-positiva denominada "matrices con inversa positiva máxima", *Maximum inverse positive matrices* (MIP).

En nuestro trabajo presentamos nuevas caracterizaciones de matrices inversa-positiva. Analizamos también el concepto inversa-positiva para un tipo particular de patrón de signos: el patrón 'checkerboard'.

La suma sub-directa de matrices es una generalización de la suma habitual de matrices. Fue introducida por C. Johnson y S. Fallat en [8] y aparece de un modo natural en completación de matrices y subdominios solapados en métodos de descomposición de dominios, entre otros contextos. También aparece en diversas variantes de precondicionamiento aditivo de Schwartz, y cuando se analizan métodos aditivos de Schwartz para cadenas de Markov. Los métodos de descomposición de dominio son ampliamente usados para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (véase, por ejemplo [50]). En [44] los autores analizan la convergencia y las propiedades de varias variantes de estos métodos para matrices inversa-positiva.

Definición 3.0.2 *Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n_1 y n_2, respectivamente, y sea k un entero tal que $1 \leq k \leq \min(n_1, n_2)$. Particionamos A y B en bloques de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{22} y B_{11} son matrices cuadradas de orden k. Se llama **suma sub-directa de orden k** *de las matrices A y B, y se denota por $C = A \oplus_k B$, a la matriz de* *orden* $n_1 + n_2 - k$

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Concretamente, para cada una de las siguientes clases de matrices: Definida positiva, semidefinida positiva, M-matrices (entradas de fuera de la diagonal no positivas y menores principales positivos), totalmente no negativas (todos los menores no negativos), P-matrices (menores principales positivos), P_0-matrices (menores principales no negativos), completamente positivas (matrices de la forma BB^T con todas las entradas de B no negativas), doblemente no negativas (semidefinida positiva y con todas las entradas no negativas), y M-matrices simétricas, Fallat y Johnson responden a las cuatro preguntas siguientes: (I) Si A y B son de una clase, ¿permanece $C = A \oplus_1 B$ en la misma clase? ; (II) Si la matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

pertenece a una clase, ¿se puede escribir C como $C = A \oplus_1 B$ con A y B perteneciendo a la misma clase que C?; y (III) y (IV) las mismas preguntas reemplazando $k = 1$ por $k > 1$.

En este trabajo aportamos nuevos resultados acerca de la suma sub-directa de matrices con inversa positiva y de la suma sub-directa de las distintas clases de B-matrices, planteándonos las preguntas de Fallat y Johnson y respondiéndolas para las clases de matrices mencionadas.

Johnson, en [27] y [28], estudió los posibles patrones de signos de una matriz compatibles con el hecho de que tenga su inversa positiva. Siguiendo sus resultados, analizamos el concepto inversa-positiva para un tipo particular de patrón: el patrón 'checkerboard'.

A continuación, definimos matriz 'sign regular'. Estas matrices están relacionadas con las inversa-positiva, y han sido ampliamente estudiadas por J.M. Peña (véase [48]).

Definición 3.0.3 *Una matriz A de tamaño $m \times n$ es 'sign regular' si, para cada k, con $1 \leq k \leq min\{m, n\}$, todas las submatrices $k \times k$ de A tienen el determinante no positivo o no negativo.*

Es conocido que la inversa de una matriz 'sign regular' no singular es, o bien una matriz A con patrón 'checkerboard', o bien $-A$ (siendo A una matriz con patrón 'checkerboard', ver [48]). En particular, la inversa de una matriz no singular totalmente no negativa tiene patrón 'checkerboard'. Utilizando este resultado, estudiamos en esta memoria la condición de inversa-positiva de matrices triangulares inferiores (superiores) con patrón 'checkerboard'.

Definición 3.0.4 *El producto Hadamard (o producto componente a componente) de dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de tamaño $n \times n$ es la matriz $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$.*

El producto Hadamard de matrices ha sido investigado por varios autores. Por ejemplo, recientemente Fallat y Johnson consideraron en [8] las potencias Hadamard de matrices totalmente positivas. Fan en [6] hizo notar que si el patrón de signos está convenientemente ajustado el producto Hadamard de dos M-matrices es de nuevo una M-matriz. En [2] podemos encontrar el teorema de Schur que indica que si A y B son matrices del mismo tamaño semidefinidas positivas (definidas no negativas), entonces también lo es el producto Hadamard $A \circ B$. Respecto a las M-matrices, y a pesar de que tienen muchas analogías con las matrices definidas positivas, es un hecho conocido que el producto Hadamard de dos M-matrices no es M-matriz. Johnson, en [29] demostró que para cualquier par A, B de $n \times n$ M-matrices, el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ es una M-matriz. Este resultado no se sostiene en general para matrices inversa-positiva. En 2011 Johnson en [30] ha profundizado en el tema. Recientemente, varios autores han investigado el producto Hadamard de inversas de M-matrices. Por ejemplo, Wang en [51], probó que la clase inversa de M-matriz es cerrada respecto al producto Hadamard si y sólo si $n \leq 3$.

Por otra parte, recientemente Fallat y Johnson consideraron en [9] y [10] las potencias Hadamard de matrices totalmente positivas y como se ha comentado anteriormente Johnson, en [27] y [28] estudió los posibles patrones de signos de una matriz compatibles con la cualidad inversa-positiva.

Nuestro propósito aquí es estudiar si el producto Hadamard $A \circ B$ y $A \circ B^{-1}$ cuando A y B son matrices inversa-positiva es también una matriz inversa-positiva. Respecto a los patrones de signos, nos centraremos especialmente en el patrón 'checkerboard'.

Estudiamos también el producto Hadamard para las B-matrices y sus clases relacionadas (DB-matriz, B_0-matriz y $|B|$-matriz).

A continuación presentamos un breve resumen de algunos de los problemas de completación de matrices parciales con inversa positiva y completación de matrices parciales relacionadas con la clase de B-matrices que se pueden encontrar en la literatura.

En [33], Johnson se ocupa de la completación de inversas de M-matrices parciales (recordemos que la clase de matrices inversa-positiva contiene a la clase de M-matrices). Concretamente, en ese trabajo se proporcionan entre otros resultados condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los datos para la completabilidad de una inversa M-matriz parcial simétrica, cuyo grafo asociado a las entradas especificadas es un ciclo. En [34] se discuten los problemas de completación de M-matrices e inversa M-matrices. Para las M-matrices se obtiene completación basada en teoría de grafos y para las inversa M-matrices completación de ceros en la inversa en cada posición en la que la matriz parcial tiene una entrada no especificada.

El problema de completación de P-matrices parciales (recordemos que toda B-matriz es P-matriz) es un problema en el que han trabajado también varios autores, destacando, por ejemplo, a S.M. Fallat, J.R. Torregrosa, A.M. Urbano, C. Jordán y L. Hogben. Ver, por ejemplo, las referencias [12] y [38].

Con respecto a [12], se prueba que una P-matriz parcial positiva posicionalmente simétrica tiene una completación P-matriz positiva si el grafo de sus entradas especificadas es un n-ciclo o es un grafo 1-cordal.

Y por su parte en [38] se analiza el problema de completación de P-matriz positiva (signo-simétrica) cuando el patrón de la matriz parcial es no simétrico. Se prueba que toda P-matriz parcial A positiva (signo-simétrica) tiene una completación P-matriz positiva (signo-simétrica) cuando el grafo asociado de las entradas especificas de A, G_A, es acíclico y se estudian los casos particulares cuando no es acíclico.

En este trabajo se aportan nuevos resultados sobre la completación de B-matrices parciales, quedando como problema abierto el problema de completación de matrices parciales a matrices inversa-positiva.

Introduciremos una serie de restricciones de los valores de las entradas de las B-matrices parciales, de los signos de las mismas o de sus grafos asociados con el fin de cerrar el problema en algunas direcciones.

Capítulo 4

Matrices inversa-positiva.

En este capítulo presentamos en primer lugar caracterizaciones de matrices inversa-positiva. Veremos a continuación algunos ejemplos de matrices inversa-positiva que aparecen en problemas de discretización, de factorización de matrices, y, en general, en diferentes técnicas numéricas.

Estudiamos también en profundidad la suma sub-directa de matrices inversa-positiva, tanto el problema directo como el inverso, separando convenientemente los casos $k = 1$ y $k > 1$ relativos al orden de la suma sub-directa.

Estudiamos las relaciones existentes entre las matrices inversa-positiva y otras clases de matrices como las P-matrices, las matrices totalmente no negativas, las matrices totalmente no positivas, las matrices totalmente positivas, las matrices totalmente negativas, la matriz A^* introducida por Gantmacher y Krein en [17], las matrices con patrón 'checkerboard' y las matrices monótonas. Todas estas matrices están estrechamente relacionadas con las matrices inversa-positiva, aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, diseño gráfico asistido por ordenador, etc.

Continuaremos con el análisis de la clase inversa-positiva en matrices de modelos económicos, concretamente en un tipo particular de matrices cuadradas que, como podemos comprobar en [13], se usan en los modelos Input-Output de Leontief con un capital fijado. Es importante saber en estos modelos cuándo estas matrices son inversa-positiva.

Profundizaremos en el concepto de matriz inversa-positiva para un tipo particular de patrón: el patrón 'checkerboard'. Además, estudiaremos el producto Hadamard de ciertas clases de matrices inversa-positiva cuyas entradas presentan un patrón de signos particular.

4.1. Caracterización de matrices inversa-positiva.

El problema de caracterizar matrices inversa-positiva ha sido extensamente tratado en la literatura. Por ejemplo, Berman y Plemmons, en [2], estudiaron el concepto para matrices inversa-positiva que además fuesen Z-matriz (es decir, M-matrices). Pero fueron Johnson en [27] y [28], y M. Fiedler en [7] quienes se ocuparon por primera vez de caracterizar los patrones de signos que debe seguir una matriz inversa-positiva. A la caracterización de matrices inversa-positiva se dedicó también J. E. Peris en [45], donde se proporcionó una nueva caracterización de matrices con inversa positiva utilizando *splittings* positivos.

Más tarde, T. Fujimoto et al. presentaron en [15] una caracterización de matrices inversa-positiva en relación con la condición Hawkins-Simon, conocida con ese nombre en economía, y el principio Le Chatelier-Braun de termodinámica (véase [19]).

La inversa-positividad de matrices cuadradas reales juega un rol muy importante en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería y ha sido analizada en diferentes contextos. Por ejemplo, en [18] podemos ver la descripción de métodos iterativos particulares para la resolución de sistemas lineales cuando la matriz es inversa-positiva. R. Precup [49] obtiene soluciones no triviales positivas para una clase concreta de sistemas variacionales utilizando la técnica de matrices inversa-positiva. En la relación de recurrencia de los polinomios de Chebyshev de segundo orden aparecen varias matrices inversa-positiva que han sido estudiadas por C.M. da Fonseca en [14].

Y, por último y más reciente, Linzhang Lu en [42] estudia las matrices inversa-positiva, donde se considera una clase de matrices inversa-positiva denominada "matrices con inversa positiva máxima", *Maximum inverse positive matrices* (MIP).

En nuestro trabajo presentamos nuevas caracterizaciones de matrices inversa-positiva. Analizamos también el concepto inversa-positiva para un tipo particular de patrón de signos: el patrón 'checkerboard'.

Sea A una matriz real $n \times n$. Consideremos el subconjunto no vacío S de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $T = S^c$, el complemento de S con respecto a N. Ahora, consideremos la siguiente propiedad

Propiedad

Dado $x \geq 0$, y S un subconjunto no vacío de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\text{Si } (Ax)_j > 0, \forall j \in S \text{ y } (Ax)_j = 0, \forall j \in T, \text{ entonces } x >> 0. \tag{4.1}$$

Sea $\mathcal{C}$ la clase de matrices reales $n \times n$ que satisfacen (4.1). Podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.1.1 *Sea A una matriz real no singular de tamaño $n \times n$, entonces $A \in \mathcal{C}$ si y sólo si $(A^{-1})_j > 0$, $\forall j \in S$ y dado $i \in N$, $\exists\ j \in S$ tal que $(A^{-1})_{ij} > 0$.*

Demostración. Sea A un elemento de $\mathcal{C}$ con $A^{-1} = (c_{ij})$ y $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ un subconjunto de N. Supongamos que existe un índice $i_p \in S$ tal que $(A^{-1})_{i_p}$ tiene una componente negativa (no puede ser el vector nulo porque la matriz A es no singular).

Consideremos la solución del sistema $Ax = b$, donde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ es un vector tal que $b_i = 0$ para $i \in T$ y $b_i > 0$ para $i \in S$, entonces, cuando b_{i_p} es suficientemente grande, la solución mencionada contradice (4.1).

Además, supongamos que existe un índice $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_{i_0 j} = 0$, $\forall j \in S$. Tomamos un vector $x \geq 0$ tal que $Ax = (0, \ldots, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}, \ldots, 0)^T$, con b_{i_1}, …, b_{i_k} positivos, entonces el vector $x = A^{-1}b$ tiene al menos su i_0-ésima componente igual a cero, lo cual es una contradicción con (4.1).

Recíprocamente, supongamos que existe $x \geq 0$ que satisface (4.1) con alguna componente igual a cero, por ejemplo $x_p = 0$. Consideremos el sistema $Ax = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$, con $b_i > 0$ para $i \in S$ y $b_i = 0$ para $i \in T$. La p-ésima componente de la solución de este sistema es $x_p = c_{p_1}b_1 + c_{p_2}b_2 + \ldots + c_{p_n}b_n = c_{p,i_1}b_{i_1} + \ldots + c_{p,i_k}b_{i_k} = 0$. Pero x_p sólo puede ser cero si $c_{p,i_j} = 0$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, lo cual es una contradicción con el hecho de que dado $i \in N$, $\exists\ j \in S$ tal que $(A^{-1})_{ij} > 0$. $\square$

Nótese que cuando $S = N$, la Proposición 4.1 es una caracterización de las matrices inversa-positiva.

Ejemplo 4.1.1 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

está en $\mathcal{C}$ con $S = \{1, 2\}$, $T = \{3\}$, pero no es una matriz inversa-positiva.

La siguiente caracterización de matrices inversa-positiva está relacionada con la existencia de una solución positiva de un sistema lineal con término independiente positivo.

Teorema 4.1.1 *Una matriz real A de tamaño $n \times n$ es inversa-positiva si y sólo si para todo $b >> 0$, existe $x >> 0$ tal que $Ax = b$.*

Demostración. Si A es inversa-positiva, dado un vector $b >> 0$, entonces $x = A^{-1}b >> 0$. Recíprocamente, en primer lugar vamos a probar, por medio de reducción al absurdo, que la matriz A es no singular. Supongamos que rango$(A) = n - 1$ y podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que las primeras $n-1$ columnas de A, c_1, c_2 , … , c_{n-1}, son linealmente independientes.

Sea b un vector tal que $b >> 0$ y c_1, c_2 , … , c_{n-1}, b son vectores linealmente independientes. Así que el sistema $Ax = b$ no tiene solución, lo cual es una contradicción.

Ahora, vamos a probar que $A^{-1} = (c_{ij})$ es no negativa. Consideremos un vector $b \in \mathbb{R}^n$, $b >> 0$, y supongamos que existe un par (i_0, j_0) tal que $c_{i_0,j_0} < 0$. Como $x = A^{-1}b$,

$$x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} c_{i_0,j} b_j = c_{i_0,1} b_1 + c_{i_0,2} b_2 + \ldots + c_{i_0,n} b_n.$$

Supongamos que escogemos un vector $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ que satisface

$$|c_{i_0,j_0} b_{j_0}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} c_{i_0,j} b_j.$$

Por lo tanto x_{i_0} es negativo, lo cual es una contradicción, de manera que la matriz A es inversa-positiva. □

En la próxima caracterización obtenemos una relación entre las matrices inversa-positiva y las matrices monótonas.

Definición 4.1.1 *Una matriz real A de tamaño $n \times n$ se dice que es* **monótona** *si*

$$Ax \geq 0 \to x \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 4.1.2 *Sea A una matriz real $n \times n$, entonces A es inversa-positiva si y sólo si A es monótona.*

Demostración. Si A es inversa-positiva, entonces es obviamente monótona.

Recíprocamente, en primer lugar vamos a probar que A es invertible. Como A es monótona, de $Ax = 0$ y $A(-x) = 0$ obtenemos $x \geq 0$ y $x \leq 0$, respectivamente, esto es, $x = 0$. Así que el sistema $Ax = 0$ tiene sólo la solución trivial y por lo tanto A no es singular.

Por otra parte, sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica en $\mathbb{R}^n$. Como $A(A^{-1}e_i) \geq 0$, tenemos $(A^{-1}e_i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, así que $A^{-1} \geq 0$. □

4.2. Ejemplos de matrices inversa-positiva.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de matrices inversa-positiva, que aparecen en diferentes técnicas numéricas. En concreto, en discretización de problemas de frontera, discretización de ecuaciones en derivadas parciales, etc...

Ejemplo 4.2.1 Sea A la siguiente matriz tridiagonal de tamaño $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1+1/p \end{pmatrix},$$

con $p > 1$, $p \geq n-1$.

Podemos comprobar que la inversa de la matriz A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} p-n+1 & p-n+2 & p-n+3 & \dots & p-1 & p \\ p-n+2 & p-n+2 & p-n+3 & \dots & p-1 & p \\ p-n+3 & p-n+3 & p-n+3 & \dots & p-1 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p-1 & p-1 & p-1 & \dots & p-1 & p \\ p & p & p & \dots & p & p \end{pmatrix}$$

por lo que A es una matriz inversa-positiva.

En el caso particular de $p = n$, se puede demostrar que

$$A^{-1} = (b_{ij}) \ \text{ con } \ b_{ij} = \text{máx}\{i, j\}, \ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo 4.2.2 Consideremos la matriz tridiagonal

$$T = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{a}{a-b} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $a > 0$ y $a > b$. Se comprueba que T es inversa-positiva, ya que $T^{-1} = (1/a)C$ con $C = (c_{ij})$ siendo

$$c_{ij} = \text{mín}\{ai - b, aj - b\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo 4.2.3 Consideremos el vector $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n_+$, y la matriz bidiagonal inferior siguiente.

$$P(x, n) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{x_1} & \dfrac{1}{x_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{x_2} & \dfrac{1}{x_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{-1}{x_{n-2}} & \dfrac{1}{x_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{-1}{x_{n-1}} & \dfrac{1}{x_n} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que la inversa de la matriz P es

$$P(x,n)^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & x_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & x_n \end{pmatrix},$$

Por lo que P es una matriz inversa-positiva.

Ejemplo 4.2.4 Cualquier matriz permutación es inversa-positiva.

4.3. Suma sub-directa de matrices inversa-positiva.

La suma sub-directa de matrices es una generalización de la suma habitual de matrices. Fue introducida por C. Johnson y S. Fallat en [8] y aparece de un modo natural en completación de matrices y subdominios solapados en métodos de descomposición de dominios, entre otros contextos. También aparece en diversas variantes de precondicionamiento aditivo de Schwartz, y cuando se analizan métodos aditivos de Schwartz para cadenas de Markov. Los métodos de descomposición de dominio son ampliamente usados para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (véase, por ejemplo [50]). En [44] los autores analizan la convergencia y las propiedades de varias variantes de estos métodos para matrices inversa-positiva.

En este capítulo aportamos nuevos resultados acerca de la suma sub-directa de matrices inversa-positiva, planteándonos las preguntas de Fallat y Johnson y respondiéndolas para esta clase de matrices.

La suma sub-directa de dos matrices inversa-positiva no es en general una matriz inversa-positiva.

Ejemplo 4.3.1 Consideremos las matrices inversa-positiva

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{rr|rr} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

No es difícil comprobar que la matriz

$$C = A \oplus_2 B = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

no es inversa-positiva.

En esta sección estudiamos las condiciones para que la suma sub-directa de matrices inversa-positiva permanezca en la clase, y es apropiado considerar $k = 1$ y $k > 1$ por separado.

Estudiamos también la siguiente cuestión.

Si C es la matriz inversa-positiva

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

¿puede C escribirse como $C = A \oplus_k B$, tal que A y B sean matrices inversa-positiva? Analizamos este problema cuando C_{22} es un número real o cuando es una matriz de tamaño $k \times k$ con $k > 1$.

En primer lugar, consideramos $k = 1$. En este caso, obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 4.3.1 *Sean A, B las matrices inversa-positiva*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ a_{21}^T & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz $C = A \oplus_1 B$ es inversa-positiva.

Demostración. Las expresiones de las inversas de A y B son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -\frac{a_{21}^T A_{11}^{-1}}{a_{22}} & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & 0 \\ -\frac{B_{22}^{-1} b_{21}}{b_{11}} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como A y B son matrices inversa-positiva, los bloques A_{11} y B_{22} son también matrices inversa-positiva, y los números reales a_{22} y b_{11} son estrictamente positivos.

La expresión de la inversa de $C = A \oplus_1 B$ es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{21}^T A_{11}^{-1}}{a_{22}+b_{11}} & \dfrac{1}{a_{22}+b_{11}} & 0 \\ \dfrac{B_{22}^{-1} b_{21} a_{21}^T A_{11}^{-1}}{a_{22}+b_{11}} & -\dfrac{B_{22}^{-1} b_{21}}{a_{22}+b_{11}} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

No es difícil ver que todos los bloques de C^{-1} son mayores o iguales que cero, de modo que la matriz C es inversa-positiva. □

Proposición 4.3.2 *Sea C la matriz inversa-positiva*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces C puede ser expresada como $C = A \oplus_1 B$ donde A y B son matrices inversa-positiva.

Demostración. La expresión de la inversa de C es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -\frac{c_{21}^T C_{11}^{-1}}{c_{22}} & \frac{1}{c_{22}} & 0 \\ \frac{C_{33}^{-1} c_{32} c_{21}^T C_{11}^{-1}}{c_{22}} & -\frac{C_{33}^{-1} c_{32}}{c_{22}} & C_{33}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Consideremos las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ c_{21}^T & x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Como c_{22} es un número positivo, puede ser expresado siempre como la suma de dos números positivos, así que se debe cumplir que $x + y = c_{22}$ siendo x e y números positivos. Consideremos, por ejemplo, $x = y = \frac{c_{22}}{2}$.

Las matrices A y B son no singulares y la expresión de su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 \\ -2\frac{c_{21}^T C_{11}^{-1}}{c_{22}} & \frac{2}{c_{22}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{c_{22}} & 0 \\ -2\frac{C_{33}^{-1} c_{32}}{c_{22}} & C_{33}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Si tenemos en cuenta que todos los bloques de C^{-1} son mayores o iguales que cero, no es difícil darse cuenta que todos los bloques de las matrices A^{-1} y B^{-1} son también no negativos, de modo que las matrices A y B son inversa-positiva. □

Proposición 4.3.3 *Consideremos las matrices inversa-positiva*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21}^T & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}^T \\ b_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

donde a_{22} y b_{11} son números reales. Si A_{11} y B_{22} son matrices inversa-positiva, entonces $C = A \oplus_1 B$ es una matriz inversa-positiva.

Demostración. Después de algunas operaciones algebraicas, obtenemos las siguientes expresiones de las inversas de las matrices A y B.

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12}} \begin{pmatrix} (a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12}) A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} a_{12} a_{21}^T A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} a_{12} \\ \\ -a_{21}^T A_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -b_{12}^T B_{22}^{-1} \\ \\ -B_{22}^{-1} b_{21} & (b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}) B_{22}^{-1} + B_{22}^{-1} b_{21} b_{12}^T B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Empleando el método de Gauss no es difícil obtener que los determinantes de las matrices A y B son

$$\det(A) = (a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12}) \det(A_{11}) \quad \text{y} \quad \det(B) = (b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}) \det(B_{22}),$$

respectivamente.

Como $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A_{11})$ y $\det(B_{22})$ no son cero, los números reales $a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12}$ y $b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}$ son distintos de cero. Además, si miramos las entradas $(2,2)$ de A^{-1} y $(1,1)$ de B^{-1} podemos concluir que dichos números reales son estrictamente positivos.

Calculando ahora la inversa de C, resolviendo la ecuación

$$CC^{-1} = I,$$

obtenemos

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} X & x_{12} & Z \\ x_{21}^T & \alpha & x_{23}^T \\ W & x_{32} & Y \end{pmatrix},$$

donde

$$X = A_{11}^{-1}(I - a_{12} x_{21}^T), \qquad x_{12} = -\alpha A_{11}^{-1} a_{12},$$

$$Z = -A_{11}^{-1} a_{12} x_{23}^T, \qquad W = -B_{22}^{-1} b_{21} x_{21}^T,$$

$$x_{32} = -\alpha B_{22}^{-1} b_{21}, \qquad Y = B_{22}^{-1}(I - b_{21} x_{23}^T),$$

$$x_{21}^T = \frac{-a_{21}^T A_{11}^{-1}}{a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12} + b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12} + b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}},$$

$$x_{23}^T = \frac{-b_{12}^T B_{22}^{-1}}{a_{22} - a_{21}^T A_{11}^{-1} a_{12} + b_{11} - b_{12}^T B_{22}^{-1} b_{21}}.$$

Como todos los bloques de A^{-1} y B^{-1} son no negativos podemos concluir que todos los bloques de C^{-1} son mayores o iguales que cero, así que C es una matriz inversa-positiva. □

Cuando A_{11} ó B_{22} no son matrices inversa-positiva, la condición de inversa-positividad de C=$A\oplus_1 B$ no está garantizada.

Ejemplo 4.3.2 Sea una matriz inversa-positiva, y la dividimos en bloques del modo siguiente.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

El bloque A_{11} de la matriz A no es una matriz inversa-positiva, y no es complicado comprobar que la matriz $C = A\oplus_1 B$ no es inversa-positiva.

Proposición 4.3.4 *Consideremos la matriz inversa-positiva*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & c_{23}^T \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

donde C_{11} y C_{33} son matrices inversa-positiva, entonces, C puede expresarse siempre como $C = A\oplus_1 B$, donde A y B son matrices inversa-positiva.

Demostración. La expresión de C^{-1} es

$$C^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha C_{11}^{-1} + C_{11}^{-1} c_{12} c_{21}^T C_{11}^{-1} & -C_{11}^{-1} c_{12} & C_{11}^{-1} c_{12} c_{23}^T C_{33}^{-1} \\ -c_{21}^T C_{11}^{-1} & 1 & -c_{23}^T C_{33}^{-1} \\ C_{33}^{-1} c_{32} c_{21}^T C_{11}^{-1} & -C_{33}^{-1} c_{32} & \alpha C_{33}^{-1} + C_{33}^{-1} c_{32} c_{23}^T C_{33}^{-1} \end{pmatrix},$$

donde

$$\alpha = c_{22} - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12} - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32}.$$

Empleando el método de Gauss concluimos que el determinante de la matriz C es

$$\det(C) = \det(C_{11}) \det(C_{33})\alpha.$$

Como este determinante no puede ser cero, y sabemos que $\det(C_{11})$ y $\det(C_{33})$ son distintos de cero, entonces α no es cero. Además, la posición $(2,2)$ de la matriz C^{-1} nos asegura que α es un número real positivo.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha - \varepsilon > 0$, y consideremos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & c_{12} \\ c_{21}^T & x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} y & c_{23}^T \\ c_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

donde $x = c_{22} - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32} - \varepsilon$ e $y = c_{22} - x$, entonces, $x + y = c_{22}$ de modo que $C = A \oplus_1 B$.

Los determinantes de las matrices A y B, también obtenidos por el método de Gauss, son

$$\det(A) = (x - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12}) \det(C_{11}) \quad \text{y} \quad \det(B) = (y - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32}) \det(C_{33}),$$

respectivamente.

Por tanto las expresiones $x - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12}$ e $y - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32}$ son distintas de cero.

Además,

$$x - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12} = c_{22} - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12} - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32} - \varepsilon = \alpha - \varepsilon > 0$$

y

$$y - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32} = c_{22} - (c_{22} - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32} - \varepsilon) - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32} = \varepsilon > 0,$$

así que ambas expresiones son números reales positivos. Como los determinantes de las matrices A y B son distintos de cero, podemos asegurar que las matrices A y B son no singulares.

Las expresiones de las inversas de A y B son

$$A^{-1} = \frac{1}{x - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12}} \begin{pmatrix} (x - c_{21}^T C_{11}^{-1} c_{12}) C_{11}^{-1} + C_{11}^{-1} c_{12} c_{21}^T C_{11}^{-1} & -C_{11}^{-1} c_{12} \\ -c_{21}^T C_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{y - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32}} \begin{pmatrix} 1 & -c_{23}^T C_{33}^{-1} \\ -C_{33}^{-1} c_{32} & (y - c_{23}^T C_{33}^{-1} c_{32}) C_{33}^{-1} + C_{33}^{-1} c_{32} c_{23}^T C_{33}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como C es una matriz inversa-positiva, a partir de las posiciones $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$ y $(3,2)$ de la inversa de C se deduce que las entradas $(1,2)$ y $(2,1)$ de A^{-1} y B^{-1} son no negativas. Multiplicando las entradas no negativas $(1,2)$ y $(2,1)$ de la matriz C obtenemos $C_{11}^{-1} c_{12} c_{21}^T C_{11}^{-1}$, que debe ser también no negativa. Además, C_{11} es una matriz inversa-positiva, de modo que la matriz A es inversa-positiva.

De un modo similar, multiplicando las entradas no negativas $(3,2)$ y $(2,3)$ de la matriz C obtenemos $C_{33}^{-1} c_{32} c_{23}^T C_{33}^{-1}$, que debe ser también no negativa. Además, C_{33} es una matriz inversa-positiva, así que la matriz B también es inversa-positiva. $\square$

De aquí en adelante consideramos $k > 1$. En este caso, obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 4.3.5 *Consideremos las matrices inversa-positiva A y B de tamaños $n_1 \times n_1$ y $n_2 \times n_2$ respectivamente,*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Si la matriz $H = A_{22}^{-1} + B_{11}^{-1}$ es inversa-positiva, entonces la matriz $C = A \oplus_k B$, de tamaño $n = n_1 + n_2 - k$, es inversa-positiva.

Demostración. Las expresiones de las inversas de las matrices A y B son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ \\ -B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Para obtener la expresión de la inversa de C utilizamos el siguiente producto de matrices.

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I_{n-n_2} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-n_2} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} + B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-n_2} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} + B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-n_2} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Y su inversa es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-n_2} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-n_2} & 0 & 0 \\ 0 & H^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-n_1} \end{pmatrix},$$

expresión que puede ser reescrita de la forma

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ \\ -B_{11}^{-1}H^{-1}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B_{11}^{-1}H^{-1}A_{22}^{-1} & 0 \\ \\ B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1}H^{-1}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1}H^{-1}A_{22}^{-1} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

De la expresión de A^{-1} se deduce que A_{11} y A_{22} son matrices inversa-positiva, y que el bloque $-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$ es no negativo.

De un modo similar, de la expresión de B^{-1} se deduce que B_{11} y B_{22} son matrices inversa-positiva, y que el bloque $-B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1}$ es mayor o igual que cero.

Por lo tanto, si H es una matriz inversa-positiva, entonces C es una matriz inversa-positiva. □

El recíproco no es en general cierto.

Ejemplo 4.3.3 Las matrices

$$A = \left(\begin{array}{r|rr} 8 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 6 \end{array}\right),$$

son inversa-positiva, y la matriz

$$C = A \oplus_2 B = \left(\begin{array}{r|rr|r} 8 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right),$$

es también inversa-positiva, pero la matriz $H{=}A_{22}^{-1}{+}B_{11}^{-1}$ no es inversa-positiva.

Consideremos ahora de nuevo las matrices particionadas como en la Proposición 4.3.5. Denotemos $H'{=}A_{22}{+}B_{11}$.

Proposición 4.3.6 *Consideremos las matrices inversa-positiva*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $A_{21} \leq 0$, $B_{21} \leq 0$ y la matriz $H'{=}A_{22}{+}B_{11}$ es inversa-positiva, entonces $C = A{\oplus_k}B$ es inversa-positiva.

Demostración. Las expresiones de las inversas de A y B son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ & \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ & \\ -B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

y la expresión de la inversa de C es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ & & \\ -H'^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & H'^{-1} & 0 \\ & & \\ B_{22}^{-1}B_{21}H'^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -B_{22}^{-1}B_{21}H'^{-1} & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Se deduce que si $A_{21} \leq 0$, $B_{21} \leq 0$ y H' es inversa-positiva, entonces la matriz C es inversa-positiva. □

Proposición 4.3.7 *Consideremos la matriz inversa-positiva*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces C se puede expresar como $C = A{\oplus_k}B$, donde A y B son matrices inversa-positiva.

Demostración. Supongamos que las matrices A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

donde $A_{22} = B_{11} = \frac{C_{22}}{2}$. Obviamente, $A_{22} + B_{11} = C_{22}$, así que $C = A \oplus_k B$.

Los determinantes de las matrices A y B son

$$\det(A) = (\frac{1}{2})^k \det(C_{11}) \det(C_{22}) \quad \text{y} \quad \det(B) = (\frac{1}{2})^k \det(C_{22}) \det(C_{33}),$$

respectivamente, y son distintos de cero porque el determinante de la matriz C es

$$\det(C) = \det(C_{11}) \det(C_{22}) \det(C_{33})$$

y es distinto de cero, así que las matrices A y B son no singulares y la expresión de sus inversas es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 \\ \\ -2C_{22}^{-1}C_{21}C_{11}^{-1} & 2C_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2C_{22}^{-1} & 0 \\ \\ -2C_{33}^{-1}C_{32}C_{22}^{-1} & C_{33}^{-1} \end{pmatrix},$$

mientras que la expresión de la inversa de C es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ \\ -C_{22}^{-1}C_{21}C_{11}^{-1} & C_{22}^{-1} & 0 \\ \\ C_{33}^{-1}C_{32}C_{22}^{-1}C_{21}C_{11}^{-1} & -C_{33}^{-1}C_{32}C_{22}^{-1} & C_{33}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como todos los bloques de C^{-1} son no negativos, comparándolos con los de las matrices A^{-1} y B^{-1}, se deduce que A y B son matrices inversa-positiva. □

Proposición 4.3.8 *Consideremos las matrices inversa-positiva*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $A_{21} \leq 0$, $B_{12} \leq 0$ y $A_{22} + B_{11}$ es inversa-positiva, entonces $C = A \oplus_k B$ es inversa-positiva.

Demostración. Las expresiones de las inversas de A y B son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}B_{22}^{-1} \\ \\ 0 & B_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

y la expresión de la inversa de C, obtenida como en la demostración de la Proposición 4.3.5, es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -(A_{22}+B_{11})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}+B_{11})^{-1} & -(A_{22}+B_{11})^{-1}B_{12}B_{22}^{-1} \\ 0 & 0 & B_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Se deduce que si $A_{21} \leq 0$, $B_{12} \leq 0$ y $A_{22} + B_{11}$ es inversa-positiva, entonces la matriz C es inversa-positiva. $\square$

Proposición 4.3.9 *Consideremos la matriz inversa-positiva*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces C puede ser expresada como $C = A \oplus_k B$, donde A y B son matrices inversa-positiva.

Demostración. La expresión de la inversa de C es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ -C_{22}^{-1}C_{21}C_{11}^{-1} & C_{22}^{-1} & -C_{22}^{-1}C_{23}C_{33}^{-1} \\ 0 & 0 & C_{33}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Consideremos las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & C_{23} \\ 0 & C_{33} \end{pmatrix},$$

donde $A_{22} = B_{11} = \frac{C_{22}}{2}$. Así, $A_{22} + B_{11} = C_{22}$ y $C = A \oplus_k B$.

Los determinantes de las matrices A y B son

$$\det(A) = (\frac{1}{2})^k \det(C_{11}) \det(C_{22}) \quad \text{y} \quad \det(B) = (\frac{1}{2})^k \det(C_{22}) \det(C_{33}),$$

respectivamente, y son distintos de cero porque el determinante de la matriz C es

$$\det(C) = \det(C_{11}) \det(C_{22}) \det(C_{33})$$

y es distinto de cero, así que las matrices A y B son no singulares y la expresión de sus inversas es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{-1} & 0 \\ -2C_{22}^{-1}C_{21}C_{11}^{-1} & 2C_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2C_{22}^{-1} & -2C_{22}^{-1}C_{23}C_{33}^{-1} \\ 0 & C_{33}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Se observa sin dificultad que las matrices A y B son inversa-positiva. □

Para terminar esta sección nos gustaría poner de manifiesto que, desafortunadamente, la suma sub-directa no conserva en el caso general la inversa-positividad y, hasta donde sabemos, el problema está abierto.

Cuando A y B son matrices inversa-positiva de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

en general la suma sub-directa $C{=}A{\oplus_k}B$ con $k > 1$ no es inversa-positiva, como se puso de manifiesto en el Ejemplo 4.3.1.

Recíprocamente, dada la matriz inversa-positiva

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

en general no puede expresarse como $C = A \oplus_k B$ con $k > 1$, tal que A y B sean matrices inversa-positiva, como se puede comprobar en el Ejemplo 4.3.4.

Ejemplo 4.3.4 La matriz

$$C = \left(\begin{array}{r|rr|r} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

es inversa-positiva, pero no se puede expresar como $A{\oplus_2}B$ para cualesquiera matrices cuadradas A y B de tamaño 3×3, puesto que el aspecto de la matriz A sería

$$A = \left(\begin{array}{r|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & b \\ -1 & c & d \end{array}\right),$$

que claramente no es invertible para cualquier combinación de valores de a, b, c y d.

De aquí en adelante vamos a ocuparnos de la relación de las matrices inversa-positiva con otras clases de matrices.

Antes de proseguir, conviene recordar alguna notación y definición que utilizaremos posteriormente.

Denotamos por S la matriz diagonal $S = diag(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$ y por S_n el siguiente subconjunto de las matrices de tamaño $n \times n$,

$$S_n = \{A = (a_{ij}) \ : \ sign(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \ \text{ ó } \ a_{ij} = 0\}.$$

Definición 4.3.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real, de tamaño $n \times n$. Se define la matriz $A^* = (a^*_{ij})$ como aquélla en la cual $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$.*

Nota: Habitualmente la notación A^* denota el conjugado de la matriz A. Como en esta memoria todas las matrices con las que trabajamos son reales, utilizaremos A^* para referirnos a la matriz presentada por Gantmacher y Krein en [17].

4.4. Relaciones entre otras clases de matrices con las matrices inversa-positiva.

En los siguientes resultados establecemos relaciones entre las matrices totalmente no negativas, totalmente positivas, etc., y las matrices inversa-positiva.

Proposición 4.4.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real, de tamaño $n \times n$, totalmente no negativa, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *A es inversa-positiva.*
2. *$\det(A(j|i)) = 0$, si $i + j$ es impar.*
3. *A^{-1} es una matriz diagonal, totalmente no negativa.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$. Supongamos que la matriz A es inversa-positiva. Sea entonces su inversa $A^{-1} = (b_{ij})$ siendo
$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(A(j|i)).$$
Como A es totalmente no negativa, $\det(A) > 0$, de modo que para $i + j$ impar el elemento b_{ij} de la inversa sólo será no negativo si $\det(A(j|i)) = 0$.
$2 \Rightarrow 3$. Descomponemos la demostración a su vez en dos casos.

- $i + j$ impar. En este caso, por hipótesis, $b_{ij} = 0$.
- $i + j$ par. Dividimos este caso a su vez también en dos.
    - $i = j$. En este caso, *T. Ando* nos indica en [1] que $b_{ii} > 0 \ \forall i$.
    - $i \neq j$. *T. Ando* nos indica también en [1] que A^{-1} es totalmente no negativa y por tanto todos sus menores serán mayores o iguales que cero. Tomemos un menor cualquiera tal que contenga algún elemento de la diagonal principal.
    $$0 \leq \begin{vmatrix} b_{i-1i} & b_{i-1i+1} \\ b_{ii} & b_{ii+1} \end{vmatrix} = -b_{ii} b_{i-1i+1}.$$
    Como sabemos que $b_{ii} > 0 \ \forall i$, entonces $b_{i-1i+1} = 0$.

Tomemos ahora un menor cualquiera,

$$0 \leq \begin{vmatrix} b_{i-1j} & b_{i-1j+1} \\ b_{ij} & b_{ij+1} \end{vmatrix} = -b_{ij}^2.$$

Esto es así porque, por lo visto anteriormente, $b_{i-1j} = b_{ij+1} = 0$.

De modo que $b_{ij} = 0$, y por lo tanto A^{-1} es una matriz diagonal, totalmente no negativa.

$3 \Rightarrow 1$. Obviamente, si A^{-1} es una matriz diagonal, totalmente no negativa, entonces A es una matriz inversa-positiva. □

Necesitamos en este momento un lema previo a la obtención del siguiente resultado que relaciona las matrices A^* con las matrices inversa-positiva.

Lema 4.4.1 *Sea A una matriz real no singular de tamaño $n \times n$, entonces* $\det(A[\alpha]) = \det(A^*[\alpha])$ *para cualquier $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demostración. Sea $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha = \{1, 2, \ldots k\}$.

Si desarrollamos los determinantes por ejemplo por la primera fila obtenemos

$$\det(A[\alpha]) = a_{11} \det(A(1|1)) - a_{12} \det(A(1|2)) + \ldots + (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A(1|k)),$$

y

$$\det(A^*[\alpha]) = a_{11}^* \det(A^*(1|1)) - a_{12}^* \det(A^*(1|2)) + \ldots + (-1)^{k+1} a_{1k}^* \det(A^*(1|k)).$$

Utilizando la relación que existe en los determinantes entre el adjunto y el menor complementario y teniendo en cuenta que $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} a_{ij}$, no es complicado demostrar que $\det(A(i|j)) = (-1)^{i+j} \det(A^*(i|j))$, y en consecuencia $\det(A[\alpha]) = \det(A^*[\alpha])$. □

Proposición 4.4.2 *Dada una matriz real no singular A, de tamaño $n \times n$, si A^* es totalmente no negativa, entonces A es inversa-positiva.*

Demostración. Sea $A^{-1} = (k_{ij})$, con $k_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(A(j|i))$, y sea $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Como la matriz A^* es totalmente no negativa, entonces $\det(A^*[\alpha]) \geq 0$. Utilizando el lema previo, tenemos que $\det(A^*[\alpha]) = \det(A[\alpha]) \geq 0$. Como A es no singular entonces $\det(A) > 0$ y como que para $i+j$ par, $\det(A(j|i)) = \det(A^*(j|i))$, y para $i+j$ impar, $\det(A(j|i)) = -\det(A^*(j|i))$, obtenemos que $k_{ij} \geq 0$, esto es, A es inversa-positiva. □

El recíproco, en general, no es cierto.

Ejemplo 4.4.1 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

es inversa-positiva, sin embargo la matriz A^* no es totalmente no negativa.

Proposición 4.4.3 *Consideremos las siguientes afirmaciones para una matriz A de tamaño $n \times n$.*

(1) A^* es totalmente no negativa.

(2) A es tridiagonal.

(3) A es inversa-positiva y $A \in S_n$.

Entonces $(1) + (2) \Rightarrow (3)$, $(2) + (3) \Rightarrow (1)$, *pero* $(1) + (3) \not\Rightarrow (2)$.

Demostración. $(1) + (2) \Rightarrow (3)$. Como A^* es totalmente no negativa, por la proposición anterior A es inversa-positiva. Además, en la matriz A, por ser tridiagonal, *T. Ando* nos indica en [1] que si $i = j$ se cumple que $a_{ii} > 0$, y si $i \neq j$ se cumple que $a_{ij} = (-1)^{i+j} a^*_{ij}$. Como $a^*_{ij} \geq 0$ entonces $A \in S_n$.

$(2) + (3) \Rightarrow (1)$. Es sencillo comprobar en este caso que todos los elementos de A^* son positivos o cero, de modo que A^* es totalmente no negativa. $\square$

La última afirmación ($(1) + (3) \not\Rightarrow (2)$) queda reflejada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.2 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1.0535 & -0.2739 & 0.1264 \\ -0.2739 & 1.4045 & -0.6995 \\ 0.1264 & -0.6995 & 1.3485 \end{pmatrix},$$

cumple las condiciones (1) y (3) anteriores, pero no es tridiagonal.

Proposición 4.4.4 *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ tridiagonal. Si A es una P-matriz no negativa, entonces SAS es inversa-positiva.*

Demostración. Como A es una P-matriz, entonces es no singular y $\det(A) > 0$. La inversa de SAS es $SA^{-1}S$. Si demostramos que A^{-1} tiene un patrón 'checkerboard', es sencillo comprobar que $SA^{-1}S$ es positiva. Sea $A^{-1} = (b_{ij})$, donde

$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(A(j|i)).$$

En el caso de que $i+j$ sea par, o bien nos encontramos con que $\det(A(j|i))$ es un menor principal de A o bien se calcula como producto de una diagonal formada por elementos no negativos al ser A no negativa, luego $b_{ij} \geq 0$. En el caso de que $i+j$ sea impar, tenemos el caso anterior pero multiplicado por -1, así que $b_{ij} \leq 0$, luego A^{-1} tiene patrón 'checkerboard', i.e., SAS es inversa-positiva. $\square$

En los dos siguientes resultados vamos a suponer que la matriz A tiene un patrón 'checkerboard'.

Proposición 4.4.5 *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ totalmente negativa (totalmente positiva), con un patrón 'checkerboard', entonces SAS es inversa-positiva.*

Demostración. Supongamos que A es totalmente negativa, el caso de totalmente positiva es análogo. Como A es no singular y totalmente negativa, entonces $\det(A) < 0$. La inversa de SAS es $SA^{-1}S$. Si demostramos que A^{-1} tiene un patrón 'checkerboard', no es complicado comprobar que $SA^{-1}S$ es positiva. Sea $A^{-1} = (b_{ij})$, donde

$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A(j|i)).$$

En el caso de que $i+j$ sea par, y teniendo en cuenta que todos los menores de A son negativos, $b_{ij} > 0$. En el caso de que $i+j$ sea impar, entonces $b_{ij} < 0$, luego A^{-1} tiene patrón 'checkerboard', i.e., SAS es inversa-positiva. $\square$

Proposición 4.4.6 *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, no singular, totalmente no negativa (totalmente no positiva), con un patrón 'checkerboard', entonces SAS es inversa-positiva.*

Demostración. Supongamos que A es totalmente no negativa, el caso de totalmente no positiva es análogo. Como A es no singular y totalmente no negativa, entonces $\det(A) > 0$. La inversa de SAS es $SA^{-1}S$. Si demostramos que A^{-1} tiene un patrón 'checkerboard', es fácil comprobar que $SA^{-1}S$ es positiva. Sea $A^{-1} = (b_{ij})$, donde

$$b_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A(j|i)).$$

En el caso de que $i+j$ sea par, y teniendo en cuenta que todos los menores de A son no negativos, $b_{ij} \geq 0$. En el caso de que $i+j$ sea impar, entonces $b_{ij} \leq 0$, luego A^{-1} tiene patrón 'checkerboard', i.e., SAS es inversa-positiva. $\square$

4.5. Matrices de modelos económicos con inversa positiva.

En esta sección vamos a analizar la clase inversa-positiva en un tipo particular de matrices cuadradas. Como podemos comprobar en [13], estas matrices se usan en los modelos Input-Output de Leontief con un capital fijado. Es importante saber en estos modelos cuándo estas matrices son inversa-positiva.

Por ejemplo, para el caso particular 3×3, esta clase especial de matrices tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde a es un parámetro real con interpretación económica.

Es sencillo comprobar que la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{-a^2+a+2} & \dfrac{1}{-a^2+a+2} & \dfrac{a-1}{-a^2+a+2} \\[2ex] \dfrac{a-1}{-a^2+a+2} & \dfrac{1}{-a^2+a+2} & \dfrac{1}{-a^2+a+2} \\[2ex] \dfrac{1}{-a^2+a+2} & \dfrac{a-1}{-a^2+a+2} & \dfrac{1}{-a^2+a+2} \end{pmatrix},$$

con $a \neq -1$ y $a \neq 2$. Esta inversa es no negativa si y sólo si $1 \leq a < 2$.

Podemos generalizar el ejemplo previo a matrices cuadradas reales con un tamaño arbitrario.

Definición 4.5.1 *Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$. Decimos que A es una* **matriz de modelo económico de Leontief** *si sus elementos de la diagonal son iguales a 1, y en cada fila, empezando desde el elemento de la diagonal hacia la derecha, $-a$ y 1 aparecen alternativamente (retrocediendo al primer elemento cuando llegamos al situado más a la derecha).*

Ejemplo 4.5.1 En este ejemplo, A_1 y A_2 son matrices de esta clase con tamaño par e impar, respectivamente.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ 1 & -a & 1 & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & -a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es importante darse cuenta que si el número de columnas y de filas de A es par, entonces A es singular para cualquier valor del parámetro a, de modo que no es una matriz inversa-positiva, pues no tiene inversa.

Cuando el tamaño de la matriz es $n \times n$ con n impar podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.5.1 *Sea A una matriz real $n \times n$ con n impar, $n = 2k+1$, entonces A es una matriz inversa-positiva si y sólo si* $1 \leq a < (1 + \frac{1}{k})$.

Demostración. Cada elemento de la inversa de A es un cociente cuyo denominador es $(-ka^2 + a + (k+1))$, mientras que su numerador es o bien $(-(k-1)a + k)$ ó $(a-1)$. Primero, analizamos cuándo el denominador es mayor que cero.

$-ka^2 + a + (k+1) = 0$ es una parábola cuyo corte con el eje de abscisas se produce en $a = -1$ y $a = 1 + \frac{1}{k}$, de modo que

$$-ka^2 + a + (k+1) > 0 \leftrightarrow -1 < a < 1 + \frac{1}{k}.$$

Por último, analizamos cuándo el numerador es mayor o igual que cero,

$$k - (k-1)a \geq 0 \leftrightarrow a \leq 1 + \frac{1}{k-1},$$

y simultáneamente

$$a - 1 \geq 0 \leftrightarrow a \geq 1.$$

Entonces, A es una matriz inversa-positiva si y sólo si $1 \leq a < (1 + \frac{1}{k})$. □

4.6. Matrices inversa-positiva con patrón 'checkerboard'.

Johnson, en [27] y [28], estudió los posibles patrones de signos de una matriz compatibles con el hecho de que tenga su inversa positiva. Siguiendo sus resultados, analizamos el concepto inversa-positiva para un tipo particular de patrón: el patrón 'checkerboard'.

Es conocido que la inversa de una matriz 'sign regular' no singular es, o bien una matriz A con patrón 'checkerboard', o bien $-A$ (siendo A una matriz con patrón 'checkerboard', ver [48]). En particular, la inversa de una matriz no singular totalmente no negativa tiene patrón 'checkerboard'. Utilizando este resultado, estudiamos en esta memoria la condición de inversa-positiva de matrices triangulares inferiores (superiores) con patrón 'checkerboard'.

En apartados anteriores (véanse las Proposiciones 4.4.5 y 4.4.6) ya hemos trabajado con el patrón de signos 'checkerboard'. Estudiaremos ahora la relación de matrices con ese patrón de signos y las matrices inversa-positiva.

Según la definición de matriz con patrón de signos 'checkerboard' los elementos de la diagonal podrían ser todos nulos y ese caso no lo vamos a contemplar. Como se vio en la sección correspondiente, el concepto de matriz inversa-positiva se preserva por multiplicación, multiplicación por diagonal positiva por la derecha o por la izquierda, semejanza por diagonal positiva y semejanza por permutación, de modo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que todas las entradas de la diagonal distintas de cero son iguales a 1, lo cual utilizaremos para los próximos resultados.

En general, las matrices con patrón de signos 'checkerboard' no son inversa-positiva.

Ejemplo 4.6.1 Sea A la matriz con patrón 'checkerboard'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz no es inversa-positiva.

Para matrices de tamaño 2×2, es sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 4.6.1 *Sea A una matriz no singular de tamaño 2×2. A es una matriz inversa-positiva si y sólo si,*

a) A tiene patrón 'checkerboard' y $\det(A) > 0$,

ó

b) $-A$ tiene patrón 'checkerboard' y $\det(A) < 0$.

Demostración. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Por ser la matriz A inversa-positiva, todas las entradas de A^{-1} son mayores o iguales que cero, y observando su aspecto ésto sólo es posible si

a) A tiene patrón 'checkerboard' y $\det(A) > 0$,

ó

b) $-A$ tiene patrón 'checkerboard' y $\det(A) < 0$.

Recíprocamente, es sencillo comprobar que si se cumple cualquiera de las dos condiciones anteriores entonces todas las entradas de A^{-1} son no negativas, y en consecuencia A es inversa-positiva. $\square$

En general, este resultado no se cumple para matrices no singulares de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$.

Ejemplo 4.6.2 La matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene determinante positivo y patrón 'checkerboard', pero no es una matriz inversa-positiva.

Ahora, analizaremos la condición de inversa-positiva de matrices 'checkerboard' bidiagonales, tridiagonales y triangulares de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$.

Si A es una matriz bidiagonal con patrón 'checkerboard', entonces A es una M-matriz, de modo que podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.6.2 *Si A es una matriz no singular bidiagonal de tamaño $n \times n$ con patrón 'checkerboard', entonces A es una matriz inversa-positiva.*

Sin embargo, podemos observar que si A es una matriz bidiagonal y $-A$ tiene patrón 'checkerboard', entonces A nunca puede ser una matriz inversa-positiva. Esto se debe a que $-A$ es M-matriz y en consecuencia $(-A)^{-1} \geq 0$, de modo que $A^{-1} \leq 0$.

Ejemplo 4.6.3 La matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cumple que $-A$ tiene patrón de signos 'checkerboard', pero A no es una matriz inversa-positiva.

Nótese que, en general, una matriz tridiagonal con patrón 'checkerboard' no es una matriz inversa-positiva.

Ejemplo 4.6.4 La matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

es no singular con patrón 'checkerboard', pero no es una matriz inversa-positiva.

En los siguientes resultados presentamos condiciones necesarias y suficientes para que una matriz tridiagonal sea inversa-positiva.

Teorema 4.6.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz no singular tridiagonal, de tamaño $n \times n$ con patrón 'checkerboard', entonces, A es una matriz inversa-positiva si y sólo si*

$$\det(A[\alpha]) \geq 0, \quad \alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |\alpha| \geq 2. \tag{4.2}$$

Demostración. Vamos a probar la suficiencia de la condición (4.2). Por hipótesis tenemos que todas las entradas de la diagonal son mayores o iguales que cero. Aunque el resultado se cumple igualmente si todos los elementos de la diagonal principal son cero podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que la matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A^{-1} = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \dfrac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A(j|i))$. Utilizando la condición (4.2) es sencillo comprobar que $b_{ij} \geq 0$, para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

La necesidad de la condición (4.2) se obtiene a través de un razonamiento similar puesto que si A es una matriz tridiagonal inversa-positiva, con patrón 'checkerboard', entonces $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. □

Cuando $-A$ tiene un patrón 'checkerboard', podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.6.3 *Sea A una matriz no singular tridiagonal de tamaño 3×3 tal que $-A$ tiene patrón 'checkerboard', entonces, A es una matriz inversa-positiva si y sólo si* $\det(A) > 0$, $\det(A[\{1, 2\}]) \geq 0$ *y* $\det(A[\{2, 3\}]) \geq 0$.

Demostración. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sea $A^{-1} = (b_{ij})$ la inversa de A, donde $b_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A(j|i))$.

Por ser la matriz A inversa-positiva, $b_{ij} \geq 0$, y ésto sólo es posible si simultáneamente $\det(A) > 0$, $\det(A[\{1, 2\}]) \geq 0$ y $\det(A[\{2, 3\}]) \geq 0$.

Recíprocamente, es sencillo comprobar que si se cumplen dichas condiciones entonces $b_{ij} \geq 0$, y en consecuencia A es inversa-positiva. □

Finalmente, cuando A es una matriz no singular triangular con patrón 'checkerboard', la no negatividad de su inversa no está garantizada.

Ejemplo 4.6.5 Consideremos la matriz triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que A no es inversa-positiva.

Introducimos una condición que se inspira en la PP-condición introducida por Johnson y Smith en [35] para matrices no negativas, y que definimos como P-condición.

Definición 4.6.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz triangular superior (inferior) de tamaño $n \times n$. Diremos que A satisface la P-condición si*

$$a_{ij} \leq a_{ik}a_{kj}, \quad i < k < j \ \ (j < k < i).$$

Necesitamos el lema que presentamos a continuación para obtener nuestro resultado principal relacionado con la condición de inversa-positiva de matrices no singulares triangulares con patrón 'checkerboard'. Lo estudiamos para matrices con patrón de signos 'checkerboard' triangulares superiores, siendo los resultados para matrices con patrón de signos 'checkerboard' triangulares inferiores totalmente análogos.

Lema 4.6.1 *Sea A una matriz no singular triangular superior de tamaño $n \times n$, con patrón checkerboard, que satisface la P-condición, entonces o bien*

$$\det\left(A[\{i-1, i, \ldots, n-1\}|\{i, i+1, \ldots, n\}]\right) = 0$$

o bien

$$sign(\det\left(A[\{i-1, i, \ldots, n-1\}|\{i, i+1, \ldots, n\}]\right)) = (-1)^{n+i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. Para $n = 3$, la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $i = 3$, $\det\left(A[\{2\}|\{3\}]\right) = -a_{23} \leq 0$, y para $i = 2$, $\det\left(A[\{1, 2\}|\{2, 3\}]\right) = a_{12}a_{23} - a_{13} \geq 0$, por la P-condición.

Supongamos que el resultado se cumple para matrices $(n-1) \times (n-1)$ y vamos a probarlo para matrices de tamaño $n \times n$. Asumimos que n es impar (para n par procederemos de un modo análogo). La matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & a_{13} & \cdots & -a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & -a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $i = n$, $\det\left(A[\{n-1\}|\{n\}]\right) = -a_{n-1,n} \leq 0$. Para $i = n-1, n-2, \ldots, 3$, aplicamos la hipótesis de inducción para la submatriz $A[\{2, 3, \ldots, n\}]$. Finalmente, para $i = 2$,

$$\begin{aligned}&\det(A[\{1,2,\ldots,n-1\}|\{2,3,\ldots,n\}]) =\\ &\quad = -a_{12}\det(A[\{2,3,\ldots,n-1\}|\{3,4,\ldots,n\}]) -\\ &\quad - \det(A[\{1,3,\ldots,n-1\}|\{3,4,\ldots,n\}]).\end{aligned}$$

Aplicando la P-condición podemos probar que

$$\det(A[\{1,3,\ldots,n-1\}|\{3,4,\ldots,n\}]) \leq 0,$$

y por hipótesis de inducción aplicada a la submatriz $A[\{2,3,\ldots,n\}]$ tenemos

$$\det(A[\{2,3,\ldots,n-1\}|\{3,4,\ldots,n\}]) \leq 0.$$

Así,

$$\det(A[\{1,2,\ldots,n-1\}|\{2,3,\ldots,n\}]) = 0,$$

o bien

$$sign(\det(A[\{1,2,\ldots,n-1\}|\{2,3,\ldots,n\}])) = (-1)^{n+1}.$$

□

El siguiente teorema se apoya en el Lema 4.6.1.

Teorema 4.6.2 *Sea A una matriz no singular, de tamaño $n\times n$, triangular superior con patrón 'checkerboard', que satisface la P-condición, entonces, A es una matriz inversa-positiva.*

Demostración. La demostración la haremos por inducción en n. Para $n = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} - a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

utilizando la P-condición.

Una matriz de tamaño $n \times n$ se puede particionar como

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde A_{n-1} es la submatriz triangular superior $A[\{1,2,\ldots,n-1\}]$ y v_{n-1} es la submatriz $A[\{1,2,\ldots,n-1\}|\{n\}]$. Podemos observar que

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1}v_{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}&-A_{n-1}^{-1}v_{n-1} =\\ &[(-1)^{n+1}\det(A[\{1,\ldots,n-1\}|\{2,\ldots,n\}]),\ldots,(-1)^{2n-1}\det(A[\{n-1\}|\{n\}])]^T.\end{aligned}$$

La hipótesis de inducción y el Lema 4.6.1 nos permiten asegurar que $A_n^{-1} \geq 0$.□

En general, el recíproco no es cierto.

Ejemplo 4.6.6 Consideremos la matriz triangular superior con patrón 'checkerboard'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que A es inversa-positiva, pero $a_{14} > a_{12}a_{24}$.

En cualquier caso, podemos establecer el siguiente resultado como consecuencia inmediata de la demostración del teorema anterior.

Teorema 4.6.3 *Sea A una matriz no singular, de tamaño 3×3, triangular superior con patrón 'checkerboard', entonces A satisface la P-condición si y sólo si A es una matriz inversa-positiva.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la matriz A tiene el siguiente aspecto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{12}a_{23} - a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que si A satisface la P-condición entonces es inversa positiva. Recíprocamente, si A es inversa-positiva entonces satisface la P-condición. $\square$

Para obtener una condición necesaria en el caso general, introducimos la siguiente notación (ver [51]). Dada una matriz A de tamaño $n \times n$ y los enteros positivos i y k, denotamos

$$a_{i,i+1,\dots,i+k} = (-1)^{k+1} \det\left(A[\{i, i+1, \dots, i+(k-1)\}|\{i+1, i+2, \dots, i+k\}]\right). \tag{4.3}$$

Establecemos el siguiente resultado preliminar.

Lema 4.6.2 *Sea A una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$ con patrón 'checkerboard'. Si $A^{-1} = (b_{ij})$ entonces,*

$$b_{ij} = -a_{i,i+1,\dots,j}.$$

Demostración. Por definición,

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A[\{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}|\{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}]\right),$$

y teniendo en cuenta que A es triangular superior, tenemos

$$\begin{aligned}&\det\left(A[\{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}|\{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}]\right)=\\&=\det\left(A[\{i,i+1,\ldots,j-1\}|\{i+1,i+2,\ldots,j\}]\right),\end{aligned}$$

y

$$\det\left(A[\{i,i+1,\ldots,j-1\}|\{i+1,i+2,\ldots,j\}]\right)=(-1)^{i+j+1}a_{i,i+1,\ldots,j}.$$

Entonces,

$$b_{ij}=(-1)^{i+j}(-1)^{i+j+1}a_{i,i+1,\ldots,j}=-a_{i,i+1,\ldots,j}.$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de este lema.

Teorema 4.6.4 *Sea A una matriz no singular triangular superior de tamaño $n\times n$ con patrón 'checkerboard', entonces, A es una matriz inversa-positiva si y sólo si para cualesquiera enteros positivos i y k se cumple que*

$$a_{i,i+1,\ldots,i+k}\leq 0. \tag{4.4}$$

Demostración. Sea $A^{-1}=(b_{ij})$. Si A es inversa-positiva entonces por el lema previo

$$b_{ij}=-a_{i,i+1,\ldots,j},\quad \forall i,j=1,2,\ldots,n,$$

lo cual implica que para cualesquiera enteros positivos i y k se cumple que

$$a_{i,i+1,\ldots,i+k}\leq 0.$$

Recíprocamente, si para cualesquiera enteros positivos i y k se cumple que

$$a_{i,i+1,\ldots,i+k}\leq 0,$$

entonces según el lema previo la matriz A es inversa-positiva. □

Podemos extender la P-condición para matrices genéricas de la siguiente manera. Dada una matriz $A=(p_{ij})$, donde por p_{ij} denotamos la posición (i,j) de la matriz, de tamaño $n\times n$, A satisface la P-condición si

$$p_{ij}\leq p_{ik}p_{kj},\quad i\neq j\neq k.$$

Si A es una P-matriz, de tamaño $n\times n$, con patrón 'checkerboard', y además satisface la P-condición, A no es necesariamente una matriz inversa-positiva.

Ejemplo 4.6.7 Consideremos la siguiente P-matriz con patrón de signos 'checkerboard' que satisface la P-condición,

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-1&3&-1\\1&-2&5\end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que A no es inversa-positiva.

Conviene recordar en este punto que los resultados que hemos obtenido para matrices triangulares superiores se extienden sin mayor dificultad a las matrices triangulares inferiores con el mismo patrón.

4.7. El producto Hadamard de matrices inversa-positiva.

El producto Hadamard de matrices ha sido investigado por varios autores. Por ejemplo, recientemente Fallat y Johnson consideraron en [8] las potencias Hadamard de matrices totalmente positivas. Fan en [6] hizo notar que si el patrón de signos está convenientemente ajustado el producto Hadamard de dos M-matrices es de nuevo una M-matriz. En [2] podemos encontrar el teorema de Schur que indica que si A y B son matrices del mismo tamaño semidefinidas positivas (definidas no negativas), entonces también lo es el producto Hadamard $A \circ B$. Respecto a las M-matrices, y a pesar de que tienen muchas analogías con las matrices definidas positivas, es un hecho conocido que el producto Hadamard de dos M-matrices no es M-matriz. Johnson, en [29] demostró que para cualquier par A, B de $n \times n$ M-matrices, el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ es una M-matriz. Este resultado no se sostiene en general para matrices inversa-positiva. En el año 2011 Johnson en [30] ha profundizado en el tema. Recientemente, varios autores han investigado el producto Hadamard de inversas de M-matrices. Por ejemplo, Wang en [51], probó que la clase inversa de M-matriz es cerrada respecto al producto Hadamard si y sólo si $n \leq 3$.

Por otra parte, recientemente Fallat y Johnson consideraron en [9] y [10] las potencias Hadamard de matrices totalmente positivas y como se ha comentado anteriormente Johnson, en [27] y [28] estudió los posibles patrones de signos de una matriz compatibles con la cualidad inversa-positiva.

Nuestro propósito aquí es estudiar si el producto Hadamard $A \circ B$ y $A \circ B^{-1}$ cuando A y B son matrices inversa-positiva es también una matriz inversa-positiva. Respecto a los patrones de signos, nos centraremos especialmente en el patrón 'checkerboard'.

Si A y B son matrices reales, de tamaño $n \times n$, con inversa positiva, en general su producto Hadamard no es inversa-positiva, así como tampoco lo es el producto Hadamard de una de ellas por la inversa de la otra.

Ejemplo 4.7.1 Sean las matrices A y B, ambas inversa-positiva,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que el producto Hadamard $A \circ B$ no es inversa-positiva, así como tampoco lo es el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$.

En el ejemplo previo, los productos Hadamard $A \circ A^{-1}$ y $B \circ B^{-1}$ sí tienen positiva su inversa.

En el caso particular de las matrices de modelos económicos que vimos en la sección 4.5, siendo A una matriz inversa-positiva de tamaño 3×3, $\det(A \circ A^{-1}) = 0$ de modo que $A \circ A^{-1}$ no es inversa-positiva.

En general, para matrices de tamaño 2×2, utilizando la Proposición 4.6.1 es sencillo probar que

Proposición 4.7.1 *Sea A una matriz inversa-positiva de tamaño 2×2, entonces $A \circ A^{-1}$ es una matriz inversa-positiva.*

Además, utilizando el mismo razonamiento de la Proposición 4.6.1 se cumple lo siguiente.

Proposición 4.7.2 *Si A y B son matrices inversa-positiva de tamaño 2×2 y $sign(\det(A)) = sign(\det(B))$, entonces $A \circ B^{-1}$ es una matriz inversa-positiva.*

En general, este resultado no es extensible a matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$. Ésto se pone de manifiesto posteriormente en el Ejemplo 4.7.4.

Retomamos ahora algunos de los ejemplos de matrices inversa-positiva que vimos en la sección 4.2 y que resultan en este momento interesantes por sus resultados relativos al producto Hadamard.

Ejemplo 4.7.2 Consideremos la matriz tridiagonal

$$T = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{a}{a-b} & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $a > 0$ y $a > b$. Se comprueba que T es inversa-positiva, ya que $T^{-1} = (1/a)C$ con $C = (c_{ij})$ siendo

$$c_{ij} = \text{mín}\{ai - b, aj - b\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Es sencillo comprobar que el producto Hadamard $T \circ T^{-1}$ es inversa-positiva.

Ejemplo 4.7.3 Consideremos el vector $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in R^n_+$, y la matriz bidiagonal inferior siguiente.

$$P(x,n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{-1}{x_{n-2}} & \frac{1}{x_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{-1}{x_{n-1}} & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que la inversa de la matriz P es

$$P(x,n)^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & \ldots & x_n & x_n \end{pmatrix},$$

por lo que P es una matriz inversa-positiva.

Además,

$$P(x,n) \circ P(x,n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{-x_2}{x_1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-x_3}{x_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{-x_{n-1}}{x_{n-2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{-x_n}{x_{n-1}} & 1 \end{pmatrix},$$

es una matriz bidiagonal con patrón 'checkerboard', de modo que es inversa-positiva.

Nótese que las matrices de los dos ejemplos anteriores son M-matrices, luego son cerradas respecto al producto Hadamard $A \circ B^{-1}$.

4.7.1. Producto Hadamard de matrices triangulares inversa-positiva con patrón 'checkerboard'.

Como vimos en la Proposición 4.7.2, si A y B son matrices inversa-positiva de tamaño 2×2 con $\operatorname{sign}(\det(A)) = \operatorname{sign}(\det(B))$ entonces $A \circ B^{-1}$ es una matriz inversa-positiva.

Desafortunadamente, en general este resultado no se cumple para matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$.

Ejemplo 4.7.4 La siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -0.5 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

es inversa-positiva, pero $A \circ A^{-1}$ no es una matriz inversa-positiva.

El siguiente ejemplo muestra que la cualidad de inversa-positiva no se preserva por el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ ó $A \circ A^{-1}$, para matrices inversa-positiva con patrón 'checkerboard'.

Ejemplo 4.7.5 (1) Las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

son inversa-positiva, con patrón 'checkerboard', pero $C = A \circ B^{-1}$ no es una matriz inversa-positiva.

(2) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

es inversa-positiva, con patrón 'checkerboard', pero $C = A \circ A^{-1}$ no es una matriz inversa-positiva.

Poniendo las anteriores matrices A ó B como una submatriz principal y colocando 1's en la diagonal principal y ceros en las posiciones restantes, esto es, construyendo la siguiente matriz

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad, generamos matrices inversa-positiva, de tamaño $n \times n$, $n > 3$, con patrón 'checkerboard', para las cuales $A \circ B^{-1}$ o $A \circ A^{-1}$ no son matrices inversa-positiva.

En cualquier caso, para matrices de tamaño 3×3 podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.7.3 *Sean A y B matrices inversa-positiva de tamaño 3×3 con patrón 'checkerboard' y $\det(A) > 0$, $\det(B) > 0$, entonces, $A \circ B^{-1}$ es una matriz inversa-positiva.*

Demostración. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & b_{22} & -b_{23} \\ b_{31} & -b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\det(A) = 1$ y $\det(B) = 1$. Denotamos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \geq 0, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{21} & B_{31} \\ -B_{12} & B_{22} & -B_{32} \\ B_{13} & -B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} \geq 0$$

donde A_{ij} y B_{ij}, $i,j=1,2,3$, son los determinantes de las submatrices $A(\{i\}|\{j\})$ y $B(\{i\}|\{j\})$, respectivamente, y

$$C = A \circ B^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}B_{11} & a_{12}B_{21} & a_{13}B_{31} \\ a_{21}B_{12} & a_{22}B_{22} & a_{23}B_{32} \\ a_{31}B_{13} & a_{32}B_{23} & a_{33}B_{33} \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $a_{11} \geq 0$, pero además debe cumplirse que $a_{11} \neq 0$, puesto que en otro caso obtendríamos una contradicción con $\det(A) \neq 0$. Con este razonamiento es sencillo deducir que $a_{ii}, b_{ii}, A_{ii}, B_{ii}$ son mayores que cero, para $i=1,2,3$.

Ahora, si denotamos por C_{ij} el determinante de la submatriz $C(\{i\}|\{j\})$, $i,j=1,2,3$, vamos a probar que $C_{33}>0$. Como $b_{33}=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}$, tenemos

$$\begin{aligned} C_{33} &= a_{11}B_{11}a_{22}B_{22} - a_{12}B_{21}a_{21}B_{12} = \\ &= a_{11}a_{22}b_{33} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})B_{12}B_{21} = \\ &= a_{11}a_{22}b_{33} + A_{33}B_{12}B_{21} > 0. \end{aligned}$$

Una prueba análoga nos permite asegurar que $C_{ii}>0$, $i=1,2,3$. De modo que, aplicando la eliminación de Gauss tenemos

$$\det(C) = \frac{1}{a_{11}B_{11}}(C_{22}C_{33} + C_{32}C_{23}).$$

Para probar que $\det(C)>0$ necesitamos analizar el signo de C_{32} y C_{23}. Como $-b_{23} = -(-B_{11}B_{32} + B_{12}B_{31})$, tenemos

$$\begin{aligned} C_{32} &= a_{11}B_{11}a_{23}B_{32} - a_{13}B_{31}a_{21}B_{12} = \\ &= -a_{11}a_{23}b_{23} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})B_{31}B_{12} = \\ &= -a_{11}a_{23}b_{23} - A_{32}B_{31}B_{12} \leq 0. \end{aligned}$$

Análogamente, $C_{23} \leq 0$. Por lo tanto, $\det(C) > 0$.

Sea $C^{-1}=(d_{ij})$ la inversa de C. Vamos a probar que $d_{ij} \geq 0$, $i,j=1,2,3$. Sabemos que d_{11}, d_{22}, d_{33} son mayores que cero. Teniendo en cuenta que $\det(C)>0$, para probar que $d_{12} \geq 0$ solamente necesitamos que $-(a_{12}B_{21}a_{33}B_{33} - a_{13}B_{31}a_{32}B_{23}) \geq 0$. Como $-b_{12} = B_{21}B_{33} - B_{31}B_{23}$, tenemos

$$\begin{aligned} a_{13}B_{31}a_{32}B_{23} &- a_{12}B_{21}a_{33}B_{33} = \\ &= a_{13}b_{32}b_{12} + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})B_{21}B_{33} = \\ &= a_{13}b_{32}b_{12} + A_{21}B_{21}B_{33} \geq 0. \end{aligned}$$

Siguiendo un razonamiento similar podemos probar que $d_{ij} \geq 0$, $i,j=1,2,3$. □

Para demostrar el resultado principal de esta sección, referido a matrices triangulares superiores, necesitamos la siguiente proposición técnica que se deduce del Lema 4.6.2.

Proposición 4.7.4 *Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices no singulares triangulares superiores. Si $(B)^{-1}_{ij}$ denota la entrada (i, j) de B^{-1}, tenemos que*

$$(B)^{-1}_{ij} = -b_{i,i+1,\dots,j}, \qquad (B)^{-1}_{i,i+1} = -b_{i,i+1}, \tag{4.5}$$

y, siendo $C = A \circ B^{-1} = (c_{ij})$,

$$c_{ij} = -a_{ij} b_{i,i+1,\dots,j}, \quad \text{para todo } i < j. \tag{4.6}$$

Teorema 4.7.1 *Sean A, B matrices no singulares triangulares superiores de tamaño $n \times n$, con patrón 'checkerboard', que satisfacen la P-condición, entonces $A \circ B^{-1}$ es una matriz inversa-positiva.*

Demostración. La demostración se realiza por inducción sobre n. Para $n = 2$, A y B son M-matrices y el resultado es conocido. Para $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & -b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{12}b_{23} - b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Observamos que

$$C = A \circ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}b_{12} & a_{13} \det(B[\{1,2\}|\{2,3\}]) \\ 0 & 1 & -a_{23}b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$C^{-1} = (A \circ B^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}b_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & a_{23}b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde, por (4.6), $r_{13} = (C)^{-1}_{13} = -c_{123}$.

Pero,

$$\begin{aligned} r_{13} &= -c_{123} = \det(C[\{1,2\}|\{2,3\}]) = c_{12}c_{23} - c_{13} \\ &= (-a_{12}b_{12})(-a_{23}b_{23}) - (-a_{13}b_{123}) \\ &= (a_{12}a_{23} - a_{13})(b_{12}b_{23}) + a_{13}b_{13} \geq 0, \end{aligned}$$

pues A verifica la P-condición. Así, C es una matriz inversa-positiva.

Ahora, sean A, B matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$, $n > 3$. Estas matrices se pueden particionar como,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \bar{a}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \bar{b}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que A_{11} y B_{11} son matrices no singulares triangulares superiores de tamaño $(n-1)\times(n-1)$, con patrón 'checkerboard' y 1's en la diagonal principal, que satisfacen la P-condición.

$$C = A\circ B^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}\circ B_{11}^{-1} & -\bar{a}_{12}\circ B_{11}^{-1}\bar{b}_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{11}\circ B_{11}^{-1})^{-1} & [r_{1n}, r_{2n}\ldots, r_{n-1,n}]^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde, por (4.5), $r_{jn} = (C)^{-1}_{jn} = -c_{j,j+1,\ldots,n}$, $j = 1,2,\ldots,n-1$.

Utilizando la hipótesis de inducción, para asegurar que C es inversa-positiva sólamente necesitamos probar que $r_{jn}\geq 0$, $j=1,2,\ldots,n-1$.

Para $j=n-1$, por (4.6) tenemos

$$r_{n-1,n} = -c_{n-1,n} = -a_{n-1,n}(-b_{n-1,n})\geq 0.$$

Ahora bien,

$$r_{n-2,n} = -c_{n-2,n-1,n} = \det\left(C[\{n-2,n-1\}|\{n-1,n\}]\right) = c_{n-2,n-1}c_{n-1,n} - c_{n-2,n}$$

y por (4.6)

$$r_{n-2,n} = (-a_{n-2,n-1}b_{n-2,n-1})(-a_{n-1,n}b_{n-1,n}) - (-a_{n-2,n}b_{n-2,n-1,n}).$$

Reordenando de forma adecuada, y teniendo en cuenta que A y B tienen patrón 'checkerboard' y satisfacen la P-condición, obtenemos

$$r_{n-2,n} = (a_{n-2,n-1}a_{n-1,n} - a_{n-2,n})(b_{n-2,n-1}b_{n-1,n}) + a_{n-2,n}b_{n-2,n}\geq 0.$$

De un modo similar,

$$\begin{aligned} r_{n-3,n} &= -c_{n-3,n-2,n-1,n} = -\det\left(C[\{n-3,n-2,n-1\}|\{n-2,n-1,n\}]\right) = \\ &= -c_{n-3,n-2}r_{n-2,n} + c_{n-3,n-1}c_{n-1,n} - c_{n-3,n}. \end{aligned}$$

Como C tiene patrón 'checkerboard', tenemos

$$-c_{n-3,n-2}r_{n-2,n}\geq 0,$$

y, utilizando la P-condición y el patrón 'checkerboard' de A y B, obtenemos

$$\begin{aligned} c_{n-3,n-1}c_{n-1,n} - c_{n-3,n} &= (a_{n-3,n-1}a_{n-1,n} - a_{n-3,n})(b_{n-3,n-2,n-1}b_{n-1,n}) + \\ &\quad + a_{n-3,n}(-b_{n-3,n-2}b_{n-2,n} + b_{n-3,n})\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_{n-3,n} \geq 0$. De un modo similar, probamos que $r_{jn} \geq 0$, para $j = n-4, n-5, \ldots, 2$. Finalmente, vamos a demostrar que $r_{1n} \geq 0$.

$$\begin{aligned} r_{1n} &= (C)^{-1}_{1n} = (-1)^{n+1} \det(C[\{1,2,\ldots,n-1\}|\{2,3,\ldots,n\}]) = \\ &= (-1)^{n+1} \left[c_{12} \det(C[\{2,3,\ldots,n-1\}|\{3,4,\ldots,n\}]) \right. \\ &\quad -c_{13} \det(C[\{3,4,\ldots,n-1\}|\{4,5,\ldots,n\}]) + \\ &\quad + c_{14} \det(C[\{4,\ldots,n-1\}|\{5,\ldots,n\}]) + \cdots + \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} c_{1,n-1} c_{n-1,n} + (-1)^n c_{1n} \right]. \end{aligned}$$

Utilizando un razonamiento similar al de $r_{n-3,n}$, si n es par, tenemos

$$\begin{aligned} r_{1n} &= -c_{12} r_{2n} + (c_{13} \det(C[\{3,4,\ldots,n-1\}|\{4,5,\ldots,n\}]) - \\ &\quad -c_{14} \det(C[\{4,\ldots,n-1\}|\{5,\ldots,n\}]) + \\ &\quad + \cdots + (c_{1,n-1} c_{n-1,n} - c_{1n}) \geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando un razonamiento similar al de $r_{n-2,n}$, si n es impar, tenemos

$$\begin{aligned} r_{1n} &= (c_{12} r_{2n} - c_{13} \det(C[\{3,4,\ldots,n-1\}|\{4,5,\ldots,n\}])) + \\ &\quad +(c_{14} \det(C[\{4,\ldots,n-1\}|\{5,\ldots,n\}]) - \\ &\quad -c_{15} \det(C[\{5,\ldots,n-1\}|\{6,\ldots,n\}])) + \\ &\quad + \cdots + (c_{1,n-1} c_{n-1,n} - c_{1,n}) \geq 0. \end{aligned}$$

Del mismo modo que en los resultados anteriores, el patrón 'checkerboard' de C nos asegura que si el sumando $c_{1,n-1}c_{n-1,n} - c_{1,n} > 0$, entonces $r_{1n} > 0$. Sólamente necesitamos probar entonces que dicho sumando es mayor o igual que cero para todo n.

Nótese que

$$\begin{aligned} c_{1,n-1}c_{n-1,n} - c_{1,n} &= (-a_{1,n-1} b_{1,2,\ldots,n-1})(-a_{n-1,n} b_{n-1,n}) + (a_{1,n} b_{1,2,\ldots,n}) = \\ &= (a_{1,n-1} a_{n-1,n} b_{1,2,\ldots,n-1} b_{n-1,n}) + \\ &\quad +(a_{1,n})(-1)^n \det(B[\{1,2,\ldots,n-1\}|\{2,3,\ldots,n\}]) = \\ &= (a_{1,n-1} a_{n-1,n} - a_{1,n})(b_{n-1,n} b_{1,2,\ldots,n-1}) + \\ &\quad +(a_{1,n})(-1)^{2n+2} b_{1,2,\ldots,n-2,n} = \\ &= (a_{1,n-1} a_{n-1,n} - a_{1,n})(b_{n-1,n} b_{1,2,\ldots,n-1}) + \ldots + a_{1,n} b_{1,n} \geq 0, \end{aligned}$$

utilizando la P-condición y el patrón 'checkerboard' de las matrices A y B.

Por lo tanto, $C = A \circ B^{-1}$ es una matriz inversa-positiva. □

Análogamente, se pueden establecer resultados similares para matrices triangulares inferiores.

Capítulo 5

B-matrices.

En este capítulo estudiamos la suma sub-directa y el producto Hadamard de B-matrices. Respecto a la suma sub-directa en general se obtienen peores resultados que en el caso de las matrices inversa-positiva, quedando multitud de problemas abiertos.

En el caso del producto Hadamard obtenemos resultados interesantes cuando trabajamos con el producto Hadamard de B-matrices no negativas.

5.1. Suma sub-directa de B-matrices

En general, la suma sub-directa de B-matrices no es B-matriz.

Ejemplo 5.1.1 Sean las B-matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 9 & 16 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 4 & 4 \\ \hline 0.1 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_1 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 21 & 4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

que claramente no es B-matriz pues la tercera fila no cumple la segunda condición de B-matrices.

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n_1 y n_2, respectivamente, para realizar la suma sub-directa tomamos k un entero tal que $1 \leq k \leq \text{mín}(n_1, n_2)$. En el ejemplo anterior hemos seleccionado $k = 1$. Sin embargo, estudiamos también qué sucede en el caso más favorable (pues es el que proporciona un menor tamaño de la matriz C, que recordemos que es de orden $n_1 + n_2 - k$), que es aquél en el que $k = \text{mín}(n_1, n_2)$.

Para este caso, la suma sub-directa de B-matrices tampoco es en general B-matriz.

Ejemplo 5.1.2 Sean A y B las B-matrices de tamaños 3×3 y 4×4, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0.1 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 16 & 9 \\ \hline 0.1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_3 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4.5 & 4.5 & 0.5 \\ 2.1 & 8 & 2 & 2 \\ 4.1 & 9 & 21 & 9 \\ \hline 0.1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

que no es B-matriz pues la primera fila no cumple la segunda condición de B-matriz.

Estamos trabajando en la actualidad en el problema de, siendo $k = 1$, qué se le debe exigir a las B-matrices para que su suma sub-directa sea también B-matriz.

Estudiamos también la siguiente cuestión.

Si C es la B-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

¿puede C escribirse como $C = A \oplus_k B$, tal que A y B sean B-matrices? Analizamos este problema cuando C_{22} es un número real o cuando es una matriz de tamaño $k \times k$ con $k > 1$.

En primer lugar, consideramos $k = 1$. En este caso, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.1 *Sea C la B-matriz*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces C puede ser expresada como $C = A \oplus_1 B$ donde A y B son B-matrices.

Demostración. Consideremos las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ c_{21}^T & x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Como c_{22} es un número positivo, puede ser expresado siempre como la suma de dos números positivos, así que se debe cumplir que $x+y=c_{22}$ siendo x e y números positivos. Como que C_{11} y C_{33} son B-matrices por ser submatrices principales de una B-matriz, basta con tomar, dado $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, $x = c_{22} - \varepsilon$ e $y = \varepsilon$ para que las matrices A y B cumplan las condiciones de B-matriz, (2.1). □

Cuando, también para $k=1$, probamos con otros patrones de C, en general no es posible la descomposición de C siendo ésta B-matriz en $C = A \oplus_1 B$ tal que A y B sean B-matrices. En el siguiente ejemplo, que utiliza el patrón de C

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & c_{23}^T \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

se pone de manifiesto lo que acabamos de comentar.

Ejemplo 5.1.3 Sea C la siguiente B-matriz.

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 21 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 19.1 & 9 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 10 & 1.9 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 41 \end{array}\right).$$

No es posible expresar C como $C = A \oplus_1 B$ siendo A y B B-matrices, puesto que cualquier descomposición del número 19,1 en la suma de dos números positivos hace que A ó B dejen de ser B-matriz.

Para $k > 1$, la suma sub-directa de B-matrices no conserva en general la condición de B-matriz y, hasta donde sabemos, el problema está abierto.

Cuando A y B son B-matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

en general la suma sub-directa $C{=}A{\oplus_k}B$ con $k > 1$ no es B-matriz, como se puso de manifiesto en el Ejemplo 5.1.2.

Recíprocamente, dada la B-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

en general no puede expresarse como $C = A \oplus_k B$ con $k > 1$, tal que A y B sean B-matrices, como se puede comprobar en el Ejemplo 5.1.4.

Ejemplo 5.1.4 La matriz

$$C = \left(\begin{array}{r|rr|r} 21 & -4 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 2.1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 10 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right),$$

es B-matriz, pero no se puede expresar como la suma sub-directa de B-matrices $A \oplus_2 B$ para cualesquiera matrices cuadradas A y B de tamaño 3×3, pues la segunda fila de C impide dicha descomposición.

5.2. Producto Hadamard de B-Matrices.

Sean A, B B-matrices de tamaño $n \times n$. En general, el producto Hadamard $A \circ B$ no es una B-matriz.

Ejemplo 5.2.1 Sea A la B-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que el producto Hadamard $A \circ A$ no es una B-matriz.

Además, si A es la B-matriz del ejemplo anterior, el producto Hadamard $A \circ A^{-1}$ no es una B-matriz.

Sean A, B B-matrices de tamaño $n \times n$. En general, el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ no es una B-matriz.

Ejemplo 5.2.2 Sean A, B las B-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 21 & -4 & 8 \\ -2 & 10 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

No es complicado comprobar que el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ no es una B-matriz.

En el caso de B-matrices no negativas, esto es, aquellas matrices $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ que son B-matriz con $a_{ij} \geq 0$, podemos demostrar los siguientes resultados. Estudiamos el caso $A \circ A$ y el caso $A \circ B$ por separado porque las demostraciones son substancialmente diferentes.

Teorema 5.2.1 *Sea A una B-matriz no negativa de tamaño $n \times n$, entonces el producto Hadamard $A \circ A$ es una B-matriz.*

Demostración.
Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, es sencillo demostrar que

$$r_{i+}^{A \circ A} = (r_{i+}^{A})^2.$$

A partir de este hecho y de que $a_{ii} > a_{ij}, \ \ \forall j \neq i$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_{ii}^2 - r_{i+}^{A\circ A} &= a_{ii}^2 - (r_{i+}^{A})^2 = (a_{ii} - r_{i+}^{A})(a_{ii} + r_{i+}^{A}) > \\ &> \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (r_{i+}^{A} - a_{ij})(a_{ii} + r_{i+}^{A}) > \\ &> \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (r_{i+}^{A} - a_{ij})(a_{ij} + r_{i+}^{A}) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (r_{i+}^{A\circ A} - a_{ij}^2). \end{aligned}$$

Utilizando la caracterización (2.4) podemos concluir que $A \circ A$ es B-matriz. □

Teorema 5.2.2 *Sean A, B B-matrices no negativas de tamaño $n \times n$, entonces el producto Hadamard $A \circ B$ es una B-matriz.*

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vamos a distinguir en la demostración los casos:

(i) $r_{i+}^{A\circ B} = r_{i+}^{A} r_{i+}^{B}$,

(ii) $r_{i+}^{A\circ B} < r_{i+}^{A} r_{i+}^{B}$.

(i) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r_{i+}^{A} = a_{in}$ y $r_{i+}^{B} = b_{in}$, de modo que $r_{i+}^{A\circ B} = a_{in} b_{in}$.

Como A es B-matriz, la caracterización (2.3) nos permite afirmar

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > n r_{i+}^{A} = n a_{in},$$

es decir,

$$a_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik} > n a_{in},$$

o lo que es lo mismo,

$$a_{ii} > (n-1)a_{in} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} a_{ik} > 0.$$

Análogamente, como B es B-matriz,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} > nr_{i+}^{B} = nb_{in},$$

es decir,

$$b_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} b_{ik} > nb_{in},$$

o lo que es lo mismo,

$$b_{ii} > (n-1)b_{in} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} b_{ik} > 0.$$

La cuestión a responder entonces es si se cumple la caracterización (2.3) para que $A \circ B$ sea B-matriz,

$$a_{ii}b_{ii} > (n-1)a_{in}b_{in} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} a_{ik}b_{ik}.$$

Para comprobarlo multiplicamos las dos expresiones derivadas del hecho de que tanto A como B son B-matrices. Esta multiplicación sigue cumpliendo la desigualdad porque ambas expresiones son positivas. Obtenemos, tras una serie de operaciones algebraicas, la siguiente expresión.

$$a_{ii}b_{ii} > (n-1)a_{in}b_{in} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} a_{ik}b_{ik} + 2\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1}(a_{in}-a_{ik})(b_{in}-b_{ik}) + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k\neq i, j\neq i, k\neq j}}^{n-1}(a_{in}-a_{ik})(b_{in}-b_{ij}).$$

Los dos últimos sumandos son estrictamente positivos puesto que $a_{in} = r_{i+}^{A}$ y $b_{in} = r_{i+}^{B}$, luego en efecto, se cumple que

$$a_{ii}b_{ii} > (n-1)a_{in}b_{in} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} a_{ik}b_{ik}.$$

(ii) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r_{i+}^A = a_{ij}$, $r_{i+}^B = b_{ik}$ con $j \neq k$, y $r_{i+}^{A \circ B} = a_{il} b_{il}$.

Como A es B-matriz, la caracterización (2.3) nos permite afirmar

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir} > n r_{i+}^A = n a_{ij},$$

es decir,

$$a_{ii} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} a_{ir} > n a_{ij},$$

o lo que es lo mismo,

$$a_{ii} > (n-1) a_{ij} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i \\ r \neq j}}^{n} a_{ir} > 0.$$

Análogamente, como B es B-matriz, la caracterización (2.3) nos permite afirmar

$$\sum_{r=1}^{n} b_{ir} > n r_{i+}^B = n b_{ik},$$

es decir,

$$b_{ii} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{n} b_{ir} > n b_{ik},$$

o lo que es lo mismo,

$$b_{ii} > (n-1) b_{ik} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i \\ r \neq k}}^{n} b_{ir} > 0.$$

La cuestión a responder entonces es si se cumple la caracterización (2.3) para que $A \circ B$ sea B-matriz,

$$a_{ii} b_{ii} > (n-1) a_{il} b_{il} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i \\ r \neq l}}^{n} a_{ir} b_{ir}.$$

Para comprobarlo multiplicamos las dos expresiones derivadas del hecho de que tanto A como B son B-matrices. Esta multiplicación sigue cumpliendo la desigualdad porque ambas expresiones son positivas. Obtenemos, tras una serie de operaciones algebraicas, la siguiente expresión.

$$a_{ii}b_{ii} > (n-1)a_{il}b_{il} - \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i, r\neq l}}^{n} a_{ir}b_{ir} + na_{ij}b_{ik} - na_{il}b_{il} +$$

$$+2 \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i, r\neq j, r\neq k}}^{n} (a_{ij}-a_{ir})(b_{ik}-b_{ir}) + \sum_{\substack{r,s=1\\ r,s\neq i, r\neq j, s\neq k, r\neq s}}^{n} (a_{ij}-a_{ir})(b_{ik}-b_{is}).$$

Como

$$na_{ij}b_{ik} - na_{il}b_{il} = n(r_{i+}^{A} r_{i+}^{B} - r_{i+}^{A\circ B}),$$

y $r_{i+}^{A\circ B} < r_{i+}^{A} r_{i+}^{B}$, entonces

$$na_{ij}b_{ik} - na_{il}b_{il} > 0.$$

Como además los dos últimos sumandos son estrictamente positivos puesto que $a_{ij} = r_{i+}^{A}$ y $b_{ik} = r_{i+}^{B}$, entonces se cumple que

$$a_{ii}b_{ii} > (n-1)a_{il}b_{il} - \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i\\ r\neq l}}^{n} a_{ir}b_{ir}.$$

□

Si trabajamos en el contexto de las Z-matrices es sencillo demostrar que toda B-matriz es M-matriz. El recíproco en general no es cierto.

Ejemplo 5.2.3 *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

es M-matriz pero no es B-matriz.

El Ejemplo 5.2.1 nos permite afirmar que si A tiene un patrón Z y es B-matriz, el producto Hadamard $A \circ A$ no necesariamente es B-matriz.

Sin embargo, si denotamos por A^p el producto Hadamard de A 'p' veces, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 5.2.3 *Sea $A = (a_{ij})$ una B-matriz de tamaño $n \times n$ con patrón Z, entonces A^{2k+1} es B-matriz, $\forall k \geq 0$.*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad, podemos representar los elementos de fuera de la diagonal de A como $-a_{ij}$, con $a_{ij} \geq 0 \ \forall j \neq i$.

En el contexto de las Z-matrices, A es B-matriz si y sólo si

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ya que la segunda condición de B-matriz se cumple trivialmente.

En el caso de A^{2k+1} los elementos de fuera de la diagonal serán $-a_{ij}^{2k+1}$.

De modo que

$$a_{ii}^{2k+1} > (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij})^{2k+1} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}^{2k+1},$$

con lo cual A^{2k+1} es una B-matriz. □

Como consecuencia de este resultado podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 5.2.1 *Sean A, B y C B-matrices de tamaño $n \times n$ con patrón Z, entonces $A \circ B \circ C$ es B-matriz.*

También se puede demostrar lo siguiente.

Proposición 5.2.1 *Sea A una B-matriz con patrón Z, y C una B-matriz no negativa, entonces el producto Hadamard $A \circ C$ es B-matriz.*

Cuando trabajamos con potencias pares se pierde el patrón Z, lo que hace que el producto Hadamard no conserve el concepto de B-matriz. Para evitar ésto introducimos una nueva clase de matrices, las $|B|$-matrices. Estudiaremos el producto Hadamard de $|B|$-matrices en un apartado posterior.

Capítulo 6

Otras clases de B-matriz.

Para las clases relacionadas con las B-matrices que hemos introducido en este trabajo estudiamos también la suma sub-directa y el producto Hadamard, encontrándonos en general con resultados y dificultades similares a los que encontrábamos en el capítulo de las B-matrices. En cualquier caso, creemos conveniente presentar en este capítulo los resultados que hemos obtenido al respecto, así como los problemas abiertos.

6.1. B_0-matrices.

6.1.1. Suma sub-directa de B_0-matrices.

Respecto a la suma sub-directa de B_0-matrices se obtienen resultados análogos a la suma sub-directa de B-matrices.

En general, la suma sub-directa de B_0-matrices no es B_0-matriz.

Ejemplo 6.1.1 Sean las B_0-matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 9 & 16 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 4 & 4 \\ \hline 0.1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_1 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 21 & 4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0.1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

que claramente no es B_0-matriz pues la tercera fila incumple la segunda condición de B_0-matrices.

Tal y como hicimos en el caso del producto Hadamard de B-matrices, en el ejemplo anterior hemos seleccionado $k = 1$. Sin embargo, estudiamos también qué sucede en el caso más favorable, que para nuestros fines es el que proporciona un menor tamaño de la matriz C, y que se obtiene para $k = \text{mín}(n_1, n_2)$.

Para este caso, la suma sub-directa de B_0-matrices no es en general B_0-matriz.

Ejemplo 6.1.2 Sean A y B las B_0-matrices de tamaños 3×3 y 4×4, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 2.1 & 5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 16 & 9 \\ \hline 0.1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_3 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4.5 & -1.5 & 0 \\ 4.1 & 8 & 2 & 2 \\ 4.1 & 9 & 21 & 9 \\ \hline 0.1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

que no es B_0-matriz pues la segunda fila incumple las condiciones de B_0-matriz.

Estamos trabajando en la actualidad en el problema de, siendo $k = 1$, qué se le debe exigir a las B_0-matrices para que su suma sub-directa sea también B_0-matriz.

Estudiamos también la siguiente cuestión.

Si C es la B_0-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

¿puede C escribirse como $C = A \oplus_k B$, tal que A y B sean B_0-matrices? Analizamos este problema cuando C_{22} es un número real o cuando es una matriz de tamaño $k \times k$ con $k > 1$.

En primer lugar, consideramos $k = 1$. En este caso, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.1.1 *Sea C la B_0-matriz*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces C puede ser expresada como $C = A \oplus_1 B$ donde A y B son B_0-matrices.

Demostración. Consideremos las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ c_{21}^T & x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Como c_{22} es un número positivo, puede ser expresado siempre como la suma de dos números positivos, así que se debe cumplir que $x+y=c_{22}$ siendo x e y números positivos. Como que C_{11} y C_{33} son B_0-matrices por ser submatrices principales de una B_0-matriz, basta con tomar, dado $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, $x = c_{22} - \varepsilon$ e $y = \varepsilon$ para que las matrices A y B cumplan las condiciones de B_0-matriz, (2.7). □

Cuando, también para $k = 1$, probamos con otros patrones de C, en general no es posible la descomposición de C siendo ésta B_0-matriz en $C = A \oplus_1 B$ tal que A y B sean B_0-matrices. En el siguiente ejemplo, que utiliza el patrón de C

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & c_{23}^T \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

se pone de manifiesto lo que acabamos de comentar.

Ejemplo 6.1.3 Sea C la siguiente B_0-matriz.

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 21 & -20 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -8 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 19.1 & 9 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 41 \end{array}\right).$$

No es posible expresar C como $C = A \oplus_1 B$ siendo A y B B_0-matrices, puesto que cualquier descomposición del número 19,1 en la suma de dos números positivos hace que A ó B dejen de ser B_0-matriz.

Para $k > 1$, la suma sub-directa de B_0-matrices no conserva en general la condición de B_0-matriz y, hasta donde sabemos, el problema está abierto.

Cuando A y B son B_0-matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

en general la suma sub-directa $C{=}A{\oplus_k}B$ con $k > 1$ no es B_0-matriz, como se puso de manifiesto en el Ejemplo 6.1.2.

Recíprocamente, dada la B_0-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

en general no puede expresarse como $C = A \oplus_k B$ con $k > 1$, tal que A y B sean B_0-matrices, como se puede comprobar en el Ejemplo 6.1.4.

Ejemplo 6.1.4 La matriz

$$C = \left(\begin{array}{r|rr|r} 21 & -4 & -17 & 0 \\ \hline 2 & 2.1 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 10 & -2 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right),$$

es B_0-matriz, pero no se puede expresar como la suma sub-directa de B_0-matrices $A \oplus_2 B$ para cualesquiera matrices cuadradas A y B de tamaño 3×3, pues la segunda fila de C impide dicha descomposición.

6.1.2. Producto Hadamard de B_0-matrices.

Sean A, B B_0-matrices de tamaño $n \times n$. En general, el producto Hadamard $A \circ B$ no es una B_0-matriz.

Ejemplo 6.1.5 Sea A la B_0-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que el producto Hadamard $A \circ A$ no es una B_0-matriz.

Además, si A es la B_0-matriz del ejemplo anterior, el producto Hadamard $A \circ A^{-1}$ no es una B_0-matriz.

Sean A, B B_0-matrices de tamaño $n \times n$. En general, el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ no es una B_0-matriz.

Ejemplo 6.1.6 Sean A, B las B_0-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es complicado comprobar que el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ no es una B_0-matriz.

Sin embargo, en el caso de matrices no negativas, esto es, matrices $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$, podemos demostrar la heredabilidad del concepto de B_0-matriz por el producto Hadamard. De un modo similar a como se demostró en el caso de B-matrices, básicamente relajando las desigualdades podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 6.1.1 *Sean A, B B_0-matrices no negativas de tamaño $n \times n$, entonces el producto Hadamard $A \circ B$ es una B_0-matriz.*

6.2. DB-matrices.

6.2.1. Suma sub-directa de DB-matrices.

Respecto a la suma sub-directa de DB-matrices se obtienen resultados análogos a la suma sub-directa de B-matrices.

En general, la suma sub-directa de DB-matrices no es DB-matriz.

Ejemplo 6.2.1 Sea la DB-matriz

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & -0.1 \\ \hline 0.2 & -0.2 & 1 \end{array}\right).$$

La suma sub-directa $C = A \oplus_1 A$ es

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 2 & -0.1 & 0 & 0 \\ \hline 0.2 & -0.2 & 2 & 0.5 & 0.4 \\ \hline 0 & 0 & 0.3 & 2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & 2 \end{array}\right),$$

que claramente no es DB-matriz, la primera columna incumple la segunda condición para las columnas de las DB-matrices.

En el ejemplo anterior hemos seleccionado suma sub-directa con $k = 1$. Sin embargo, estudiamos también qué sucede en el caso más favorable (pues es el que proporciona un menor tamaño de la matriz C, que recordemos que será de orden $n_1 + n_2 - k$), que es aquél en el que $k = \text{mín}(n_1, n_2)$.

Para este caso, la suma sub-directa de DB-matrices no es en general DB-matriz.

Ejemplo 6.2.2 Sean A y B las DB-matrices de tamaños 3×3 y 4×4, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 2 & -0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_3 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 4 & -0.2 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

que no es DB-matriz porque la primera y tercera filas y la tercera columna no cumplen la segunda condición de DB-matriz.

Estamos trabajando en la actualidad en el problema de, siendo $k = 1$, qué se le debe exigir a las DB-matrices para que su suma sub-directa sea también DB-matriz.

Estudiamos también la siguiente cuestión.

Si C es la DB-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

¿puede C escribirse como $C = A \oplus_k B$, tal que A y B sean DB-matrices? Analizamos este problema cuando C_{22} es un número real o cuando es una matriz de tamaño $k \times k$ con $k > 1$.

En primer lugar, consideramos $k = 1$. En este caso, a diferencia del caso de las B-matrices y de las B_0-matrices, el proceso falla con el sencillo patrón

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Esto es debido a que entran en juego también las columnas.

Ejemplo 6.2.3 Sea C la siguiente DB-matriz.

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 21 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 32.5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 10 & 1.9 \\ 0 & 0 & 7.6 & 9 & 41 \end{array} \right).$$

No es posible expresar C como $C = A \oplus_1 B$ siendo A y B DB-matrices, puesto que cualquier descomposición del número 32,5 en la suma de dos números positivos hace que o bien la tercera fila de A o bien la primera columna de B no cumplan las condiciones de DB-matriz (2.5) y (2.6).

Para $k > 1$, la suma sub-directa de DB-matrices no conserva en general la condición de DB-matriz y, hasta donde sabemos, el problema está abierto.

Cuando A y B son DB-matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

en general la suma sub-directa $C{=}A{\oplus_k}B$ con $k > 1$ no es DB-matriz, como se puso de manifiesto en el Ejemplo 6.2.2.

Recíprocamente, dada la DB-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

en general no puede expresarse como $C = A \oplus_k B$ con $k > 1$, tal que A y B sean DB-matrices, como se puede comprobar en el Ejemplo 6.2.4.

Ejemplo 6.2.4 La matriz

$$C = \left(\begin{array}{r|rr|r} 21 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 2.1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 10 \end{array} \right),$$

es DB-matriz, pero no se puede expresar como la suma sub-directa de DB-matrices $A \oplus_2 B$ para cualesquiera matrices cuadradas A y B de tamaño 3×3, pues la segunda fila de C impide dicha descomposición.

6.2.2. Producto Hadamard de DB-matrices.

Sean A, B DB-matrices de tamaño $n \times n$. En general, el producto Hadamard $A \circ B$ no es una DB-matriz.

Ejemplo 6.2.5 Sea A la DB-matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que el producto Hadamard $A \circ A$ no es una DB-matriz.

Además, si A es la DB-matriz del ejemplo anterior, el producto Hadamard $A \circ A^{-1}$ no es una DB-matriz.

Sean A, B DB-matrices de tamaño $n \times n$. En general, el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ no es una DB-matriz.

Ejemplo 6.2.6 Sean A, B las DB-matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es complicado comprobar que el producto Hadamard $A \circ B^{-1}$ no es una DB-matriz.

Sin embargo, en el caso de matrices no negativas, esto es, matrices $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$, podemos demostrar la heredabilidad del concepto de DB-matriz por el producto Hadamard. De un modo similar a como se demostró en el caso de B-matrices, realizando las pruebas también para las columnas podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 6.2.1 *Sean A, B DB-matrices no negativas de tamaño $n \times n$, entonces el producto Hadamard $A \circ B$ es una DB-matriz.*

6.3. $|B|$-matrices.

Introducimos en este trabajo una nueva clase de matrices, las $|B|$-matrices. Estudiaremos en esta sección la suma sub-directa de esta clase de matrices. También abordaremos el problema surgido en la sección 5.2, consistente en que cuando trabajamos con potencias Hadamard pares de B-matrices con patrón Z, se pierde dicho patrón, lo que hace que el producto Hadamard no conserve el concepto de B-matriz. Ésto se soluciona con las $|B|$-matrices, lo cual justifica el trabajar con esta clase de matrices, y además aporta el valor añadido de encontrar una relación entre la clase de las B-matrices y la de las M-matrices.

6.3.1. Suma sub-directa de $|B|$-matrices.

Respecto a la suma sub-directa de $|B|$-matrices se obtienen unos resultados análogos a los de la suma sub-directa de B-matrices.

En general, la suma sub-directa de $|B|$-matrices no es $|B|$-matriz.

Ejemplo 6.3.1 Sean las $|B|$-matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 9 & 16 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & -0.5 \\ \hline -1 & 2 & -0.5 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_1 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 18 & -1 & -0.5 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right),$$

que claramente no es $|B|$-matriz, ni siquiera B-matriz.

En el ejemplo anterior hemos seleccionado $k = 1$. Sin embargo, estudiamos también qué sucede en el caso más favorable, que es aquél en el que $k = \text{mín}(n_1, n_2)$.

Para este caso, la suma sub-directa de $|B|$-matrices no es en general $|B|$-matriz.

Ejemplo 6.3.2 Sean A y B las $|B|$-matrices de tamaños 3×3 y 4×4, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

la suma sub-directa $C = A \oplus_3 B$ de ambas es

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2.5 & -2.5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 17 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

que no es $|B|$-matriz, ni tan siquiera B-matriz.

Estamos trabajando en la actualidad en el problema de, siendo $k = 1$, qué se le debe exigir a las $|B|$-matrices para que su suma sub-directa sea también $|B|$-matriz.

Estudiamos también la siguiente cuestión.

Si C es la $|B|$-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

¿puede C escribirse como $C = A \oplus_k B$, tal que A y B sean $|B|$-matrices? Analizamos este problema cuando C_{22} es un número real o cuando es una matriz de tamaño $k \times k$ con $k > 1$.

En primer lugar, consideramos $k = 1$. En este caso, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.3.1 *Sea C la $|B|$-matriz*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces C puede ser expresada como $C = A \oplus_1 B$ donde A y B son $|B|$-matrices.

Demostración. Consideremos las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ c_{21}^T & x \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ c_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Como c_{22} es un número positivo, puede ser expresado siempre como la suma de dos números positivos, así que se debe cumplir que $x + y = c_{22}$ siendo x e y números positivos. Como que C_{11} y C_{33} son $|B|$-matrices por ser submatrices principales de una $|B|$-matriz, basta con tomar, dado $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, $x = c_{22} - \varepsilon$ e $y = \varepsilon$ para que las matrices A y B cumplan las condiciones de $|B|$-matriz, (2.8). □

Cuando, también para $k = 1$, probamos con otros patrones de C, en general no es posible la descomposición de C siendo ésta $|B|$-matriz en $C = A \oplus_1 B$ tal que A y B sean $|B|$-matrices. En el siguiente ejemplo, que utiliza el patrón de C

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21}^T & c_{22} & c_{23}^T \\ 0 & c_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

se pone de manifiesto lo que acabamos de comentar.

Ejemplo 6.3.3 Sea C la siguiente $|B|$-matriz.

$$C = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 21 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 19.1 & 9 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 41 \end{array}\right).$$

No es posible expresar C como $C = A \oplus_1 B$ siendo A y B $|B|$-matrices, puesto que cualquier descomposición del número 19,1 en la suma de dos números positivos hace que A ó B dejen de ser $|B|$-matriz.

Para $k > 1$, la suma sub-directa de $|B|$-matrices no conserva en general la condición de $|B|$-matriz y, hasta donde sabemos, el problema está abierto.

Cuando A y B son $|B|$-matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

en general la suma sub-directa $C{=}A{\oplus_k}B$ con $k > 1$ no es $|B|$-matriz, como se puso de manifiesto en el Ejemplo 6.3.2.

Recíprocamente, dada la $|B|$-matriz

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

en general no puede expresarse como $C = A \oplus_k B$ con $k > 1$, tal que A y B sean $|B|$-matrices, como se puede comprobar en el Ejemplo 6.3.4.

Ejemplo 6.3.4 La matriz

$$C = \left(\begin{array}{r|rr|r} 21 & -4 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 2.1 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 10 & 1 \\ \hline 0 & -2 & -2 & 10 \end{array}\right),$$

es $|B|$-matriz, pero no se puede expresar como la suma sub-directa de $|B|$-matrices $A{\oplus_2}B$ para cualesquiera matrices cuadradas A y B de tamaño 3×3, pues la segunda fila de C impide dicha descomposición.

6.3.2. Producto Hadamard de $|B|$-matrices.

Abordamos en este punto el problema surgido en la sección 5.2, consistente en que cuando trabajamos con potencias Hadamard pares de B-matrices con patrón Z, se pierde dicho patrón, lo que hace que el producto Hadamard no conserve el concepto de B-matriz. Con esta nueva clase de matrices que introducimos en esta memoria superamos este inconveniente y además logramos establecer una relación entre la familia de las B-matrices y las ampliamente estudiadas M-matrices.

A lo largo de toda esta sección denotaremos nuevamente por A^p el producto Hadamard de A 'p' veces.

Teorema 6.3.1 *Sea A una $|B|$-matriz, entonces A^k es $|B|$-matriz $\forall k \geq 0$.*

Demostración. Si k es par, el producto Hadamard tiene todos sus elementos no negativos y por lo tanto $A^k = |A|^k$. Según la Definición 2.1.9, el hecho de que una matriz sea una $|B|$-matriz es equivalente a que la matriz cuyas entradas son los módulos de las de la matriz originaria es B-matriz, de modo que A^k es una B-matriz no negativa y en consecuencia una $|B|$-matriz. Si k es impar, $k-1$ es par y A^{k-1} es una $|B|$-matriz con todas sus entradas no negativas (ya que como hemos visto se trata de una B-matriz no negativa), entonces el producto Hadamard $A^{k-1} \circ A$ multiplica en sentido Hadamard una B-matriz no negativa por una $|B|$-matriz, obteniéndose como resultado una $|B|$-matriz. $\square$

Y, en general,

Teorema 6.3.2 *Sean A, B, $|B|$-matrices con el mismo patrón de signos, entonces $A \circ B$ es una $|B|$-matriz.*

Demostración. Como A y B tienen el mismo patrón de signos, el producto Hadamard $A \circ B$ tiene todos sus elementos no negativos, por lo tanto $A \circ B = |A| \circ |B|$. Según la Definición 2.1.6, el hecho de que una matriz sea una $|B|$-matriz es equivalente a que la matriz cuyas entradas son los módulos de las de la matriz originaria es B-matriz, por lo tanto el producto Hadamard $A \circ B$ es una B-matriz no negativa, esto es, una $|B|$-matriz. $\square$

En el contexto de M-matrices podemos establecer los siguientes resultados.

Teorema 6.3.3 *Sean A, B y C M-matrices y $|B|$-matrices de tamaño $n \times n$, entonces el producto Hadamard $A \circ B \circ C$ es una B-matriz con patrón Z, esto es, una M-matriz.*

Demostración. En primer lugar vamos a probar que el producto Hadamard $A \circ B$ es una $|B|$-matriz. Como A y B son $|B|$-matrices, entonces $|A| = (|a_{ij}|)$ y $|B| = (|b_{ij}|)$ son B-matrices no negativas. Como A y B son M-matrices entonces $A \circ B$ es una matriz no negativa. Además $A \circ B = |A| \circ |B|$, entonces el producto Hadamard $A \circ B$ es una B-matriz y en consecuencia una $|B|$-matriz.

Ahora probaremos que el producto Hadamard $A \circ B \circ C$ es una M-matriz.

Si A, B y C son M-matrices entonces podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que tienen el siguiente aspecto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \ C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & \dots & -c_{1n} \\ -c_{21} & c_{22} & \dots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sea D la matriz $D = A \circ B \circ C$. Obviamente D es una Z-matriz, tenemos que probar que D cumple las condiciones (2.1) para ser una B-matriz y consecuentemente una M-matriz.

Como A, B y C son $|B|$-matrices, entonces para todo $i = 1, 2, \dots n$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0$, $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} > 0$ y $\sum_{k=1}^{n} c_{ik} > 0$.

Hacemos la prueba para la primera fila, siendo el procedimiento de demostración totalmente análogo para el resto de filas.

Para la primera fila tenemos

$$\begin{aligned} a_{11} - a_{12} - \dots - a_{1n} > 0 \rightarrow a_{11} > a_{12} + \dots + a_{1n}, \\ b_{11} - b_{12} - \dots - b_{1n} > 0 \rightarrow b_{11} > b_{12} + \dots + b_{1n}, \\ c_{11} - c_{12} - \dots - c_{1n} > 0 \rightarrow c_{11} > c_{12} + \dots + c_{1n}, \end{aligned}$$

de modo que

$$a_{11}b_{11}c_{11} > (a_{12} + \dots + a_{1n})(b_{12} + \dots + b_{1n})(c_{12} + \dots c_{1n}) > a_{12}b_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}b_{1n}c_{1n}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} d_{1k} = a_{11}b_{11}c_{11} - a_{12}b_{12}c_{12} - \dots - a_{1n}b_{1n}c_{1n} > 0.$$

Por otra parte,

$$d_{1j} = (-a_{1j})(-b_{1j})(-c_{1j}) \ \ \forall j \neq 1 \rightarrow d_{1j} < 0, \ \ \forall j \neq 1.$$

Sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} d_{1k} > 0,$$

así que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d_{1k}}{n} > 0,$$

y en consecuencia

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d_{1k}}{n} > d_{1j}, \quad \forall j \neq 1.$$

Entonces, el producto Hadamard $D = A \circ B \circ C$ es una B-matriz y una Z-matriz y en consecuencia una M-matriz. $\square$

Como consecuencia de estos resultados en el contexto de M-matrices podemos establecer los siguientes corolarios.

Corolario 6.3.1 *Sea A una B-matriz con patrón Z, entonces A^{2k+1} es una M-matriz.*

Corolario 6.3.2 *Sea A una M-matriz que también es $|B|$-matriz, entonces A^k es $|B|$-matriz $\forall k$.*

Capítulo 7

Completación de matrices parciales.

A continuación presentamos un breve resumen de algunos de los problemas de completación de matrices parciales con inversa positiva y completación de matrices parciales relacionadas con la clase de B-matrices que se pueden encontrar en la literatura.

En [33], Johnson se ocupa de la completación de inversas de M-matrices parciales (recordemos que la clase de matrices inversa-positiva contiene a la clase de M-matrices). Concretamente, en ese trabajo se proporcionan entre otros resultados condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los datos para la completabilidad de una inversa M-matriz parcial simétrica, cuyo grafo asociado a las entradas especificadas es un ciclo. En [34] se discuten los problemas de completación de M-matrices e inversa M-matrices. Para las M-matrices se obtiene completación basada en teoría de grafos y para las inversa M-matrices completación de ceros en la inversa en cada posición en la que la matriz parcial tiene una entrada no especificada.

Desafortunadamente, y principalmente debido al hecho de que las submatrices principales de una matriz inversa-positiva no son en general inversa-positiva, el trabajo que hemos realizado respecto de la completación de matrices parciales a matriz inversa-positiva no ha producido resultados de interés, de modo que queda planteado como un problema abierto el hecho de averiguar las restricciones que se deben imponer a la matriz parcial para su completación a matriz inversa-positiva.

El problema de completación de P-matrices parciales (recordemos que toda B-matriz es P-matriz) es un problema en el que han trabajado diversos autores destacando, por ejemplo, a S.M. Fallat, J.R. Torregrosa, A.M. Urbano, C. Jordán y L. Hogben. Ver, por ejemplo, las referencias [12] y [38]. Con respecto a [12], se prueba que una P-matriz parcial positiva posicionalmente simétrica tiene una completación P-matriz positiva si el grafo de sus entradas especificadas es un n-ciclo o es un grafo 1-cordal. Y por su parte en [38] se analiza el problema de completación de P-matriz positiva (signo-simétrica) cuando el patrón de la matriz parcial es no simétrico.

Se prueba que toda P-matriz parcial A positiva (signo-simétrica) tiene una completación P-matriz positiva (signo-simétrica) cuando el grafo asociado de las entradas especificas de A, G_A, es acíclico y se estudian los casos particulares cuando no es acíclico.

En este trabajo se aportan nuevos resultados sobre la completación de B-matrices parciales. Introducimos una serie de restricciones de los valores de las entradas de las B-matrices parciales, y de sus grafos asociados con el fin de cerrar el problema en algunas direcciones.

7.1. Completación de B-matrices parciales.

El hecho de que las submatrices principales de una B-matriz sean también B-matrices permite extender el concepto de B-matriz al contexto de matrices parciales de la siguiente forma.

Definición 7.1.1 *Sea A una matriz parcial de tamaño $n \times n$. Se dice que A es una B-matriz parcial si toda submatriz principal totalmente especificada es B-matriz y todas las filas totalmente especificadas satisfacen las condiciones de B-matriz.*

Ejemplo 7.1.1 Sea A la B-matriz parcial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & x \\ 0.5 & 1 & y \\ z & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que la submatriz principal totalmente especificada $A[\{1,2\}]$ es B-matriz. Una posible completación a B-matriz de A sería

$$A_C = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.1.2 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & x \\ 0.5 & 1 & y \\ z & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

no es una B-matriz parcial, pues no se ajusta a la definición, la submatriz principal totalmente especificada $A[\{1,2\}]$ no es B-matriz.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la diagonal principal de una B-matriz parcial está siempre especificada. Por otra parte, el hecho de que el concepto de B-matriz se herede por diagonales positivas permite suponer que todos los elementos de la diagonal de las B-matrices parciales son unos.

Siendo A una B-matriz parcial de tamaño $n\times n$, nos preguntamos bajo qué condiciones existe una completación A_c que sea B-matriz.

Estudiamos, en primer lugar, el **caso no posicionalmente simétrico**, esto es, aquél en el que las incógnitas aparecen en posiciones no simétricas de la matriz parcial.

Comenzamos con B-matrices parciales donde sólo existe un elemento no especificado. Por semejanza de permutación podemos suponerlo en la posición $(1,n)$.

Proposición 7.1.1 *La B-matriz parcial*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

siempre admite una completación A_C, B-matriz.

Demostración. Aplicando las condiciones de B-matriz a la primera fila, existirá la completación A_C siempre que encontremos al menos un valor para x_{1n} tal que

$$\begin{gathered} 1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}+x_{1n}>0 \\ \frac{1}{n}(1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}+x_{1n})>a_{1j}, \quad j=2,\ldots,n-1. \\ \frac{1}{n}(1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}+x_{1n})>x_{1n}. \end{gathered} \tag{7.1}$$

De la primera y última condiciones, debemos elegir x_{1n} tal que

$$-1-a_{12}-\ldots-a_{1,n-1}<x_{1n}<\frac{1}{n-1}(1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}),$$

lo cual será posible siempre que

$$-1-a_{12}-\ldots-a_{1,n-1}<\frac{1}{n-1}(1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}),$$

o, equivalentemente,

$$0<n(1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}),$$

lo que es cierto debido a que $A[\{1,2,\ldots,n-1\}]$ es B-matriz. Combinando cada una de las condiciones de (7.1) con la última, debemos elegir x_{1n} tal que, para $j=2,\ldots,n-1$,

$$-1-a_{12}-\ldots+(n-1)a_{1j}-a_{1,j+1}-\ldots-a_{1,n-1}<x_{1n}<\frac{1}{n-1}(1+a_{12}+\ldots+a_{1,n-1}).$$

Veamos que ésto es posible para $j = 2$, siendo análoga la comprobación para el resto de casos. Para $j = 2$ se deberá cumplir:

$$-1 + (n-1)a_{12} - a_{13} - \ldots - a_{1,n-1} < \frac{1}{n-1}(1 + a_{12} + \ldots + a_{1,n-1}),$$

es decir,

$$-(n-1) + (n-1)^2 a_{12} - (n-1)a_{13} - \ldots - (n-1)a_{1,n-1} < 1 + a_{12} + \ldots + a_{1,n-1},$$

lo cual es equivalente a

$$n(n-1)a_{12} < n(1 + a_{12} + \ldots + a_{1,n-1}),$$

es decir

$$(n-1)a_{12} < 1 + a_{12} + \ldots + a_{1,n-1},$$

lo que es cierto dado que $A[\{1, 2, \ldots, n-1\}]$ es B-matriz. □

Cuando hay más de un elemento no especificado, en general no existe completación B-matriz.

Ejemplo 7.1.3 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.8 & x_{13} & -0.7 \\ 0.1 & 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.7 & x_{42} & 0.2 & 1 \end{pmatrix},$$

es una B-matriz parcial que no admite una completación B-matriz.

La x_{13} debería cumplir simultáneamente que

$$x_{13} > -1 + 0.8 + 0.7 = 0.5$$

y

$$x_{13} < \frac{1 - 0.8 - 0.7}{3} = -0.16,$$

lo cual es imposible.

Observemos en el ejemplo previo que si la submatriz $A[\{1, 2, 4\}]$ hubiese estado especificada, entonces para que se pudiese completar a B-matriz se debería haber cumplido que $1 + a_{12} + a_{14} > 0$, desigualdad que en el ejemplo anterior no se cumple y por consiguiente no existe completación.

De acuerdo con esta observación podemos establecer de un modo inmediato el siguiente resultado.

Proposición 7.1.2 *Sea A una B-matriz parcial con incógnitas no posicionalmente simétricas tal que todas ellas están en una misma fila o columna, entonces existe A_C completación B-matriz.*

Demostración. Supongamos que la B-matriz parcial A tiene incógnitas en una única fila (columna), podemos suponer por semejanza de permutación que A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1k} & x_{1,k+1} & x_{1,k+2} & \dots & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & 1 & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & 1 & a_{k+1,k+2} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{n,k+1} & a_{n,k+2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Aplicando el resultado anterior, el proceso de completación sería el siguiente.

1. Completar $A[\{1, 2, \dots, k, k+1\}]$.
2. Substituir la submatriz completada en A. Seguimos denominando A a la matriz resultante.
3. Completar $A[\{1, 2, \dots, k+2\}]$.
4. Substituir la submatriz completada en A, y así sucesivamente.

□

Analicemos a continuación el caso de una B-matriz parcial A con incógnitas no posicionalmente simétricas, que no estén todas en la misma fila/columna y tal que en cada fila exista como máximo un elemento no especificado. Sea la fila i_0 de una matriz de dichas características. Si (i_0, j_0) es la posición no especificada de esa fila, analizamos dos casos.

(a) Submatriz $A[\{1, 2, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, n\}]$ especificada.

(b) Submatriz $A[\{1, 2, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, n\}]$ no especificada.

En general, en este último caso no existe completación B-matriz.

Ejemplo 7.1.4 Sea A la siguiente B-matriz parcial con incógnitas no posicionalmente simétricas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 & x \\ 0.1 & 1 & 0.2 & y \\ t & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respecto a la primera fila, la posición de la incógnita nos llevaría al caso (b) anterior, pues la submatriz $A[\{1, 2, 3\}]$ no está completamente especificada.

Aplicando las condiciones (2.1), para que exista completación B-matriz se debe cumplir que

$$0.3 + 1 + 0.7 + x > 0 \to x > -2,$$

y además que

$$\frac{1}{4}(0.3+1+0.7+x) > 0.3 \to x > -0.8,$$

$$\frac{1}{4}(0.3+1+0.7+x) > 0.7 \to x > 0.8,$$

y

$$\frac{1}{4}(0.3+1+0.7+x) > x \to x < 0.66.$$

Las dos últimas condiciones son excluyentes, de modo que no existe completación B-matriz.

Así que hemos de restringir con alguna condición más el caso de una B-matriz parcial A con incógnitas no posicionalmente simétricas que no estén todas en la misma fila (columna) y tal que en cada fila exista como máximo un elemento no especificado, cuando la submatriz no está completamente especificada, para que pueda existir completación B-matriz.

Seguimos en el caso 4×4, analizamos el caso general de una fila como la anterior, $1+a+b+x$, donde a y b están especificadas y la x es incógnita. Exigimos que las posiciones conocidas cumplan las condiciones (2.1) de B-matriz parcial, esto es, se debe cumplir que

$$1+a+b > 0, \;\; \frac{1}{3}(1+a+b) > a, \;\; \frac{1}{3}(1+a+b) > b.$$

Aplicando las condiciones (2.1) de B-matriz incluyendo ahora la incógnita, se debería cumplir entonces que

$$1+a+b+x > 0,$$

y que

$$\frac{1}{4}(1+a+b+x) > a, \;\; \frac{1}{4}(1+a+b+x) > b, \;\; \frac{1}{4}(1+a+b+x) > x.$$

Estas condiciones implican que, para que exista completación B-matriz, la incógnita x debe cumplir que

$$\text{máx}\{-1-a-b, 3a-1-b, 3b-1-a\} < x < \frac{1}{3}(1+a+b).$$

Esto es posible si y sólo si $\frac{1}{3}(1+a+b) > \text{máx}\{-1-a-b, 3a-1-b, 3b-1-a\}$, pero ésto se cumple gracias a las condiciones que hemos exigido a las posiciones conocidas.

Para el caso 5×5, el aspecto de una fila de una B-matriz parcial de las características mencionadas puede ser $(1 \;\; a \;\; b \;\; c \;\; y)$ siendo a, b, c conocidas y la incógnita la y.

De un modo análogo al caso 4×4, imponemos a las entradas conocidas el cumplimiento de las condiciones de B-matriz parcial, esto es

$$1+a+b+c>0,\ \frac{1}{4}(1+a+b+c)>a,\ \frac{1}{4}(1+a+b+c)>b,\ \frac{1}{4}(1+a+b+c)>c.$$

Nótese que este proceso es equivalente a haber tenido más de una incógnita en la fila $(1\ \ a\ \ b\ \ x\ \ y)$ y haber obtenido $x=c$ con las condiciones impuestas en el caso 4×4, pues con $x=c$ se cumplirían las anteriores desigualdades. Es importante notar ésto, pues este algoritmo de completación lo emplearemos más adelante también en filas donde exista más de una incógnita.

Retomando el caso 5×5, aplicando ahora a la fila las condiciones (2.1) de B-matriz incluyendo la incógnita, se debería cumplir entonces que

$$1+a+b+c+y>0,$$

y que

$$\frac{1}{5}(1+a+b+c+y)>a,\ \frac{1}{5}(1+a+b+c+y)>b,$$
$$\frac{1}{5}(1+a+b+c+y)>c,\ \frac{1}{5}(1+a+b+c+y)>y.$$

Estas condiciones implican que, para que exista completación B-matriz, la incógnita y debe cumplir que

$$\text{máx}\{-1-a-b-c, 4a-1-b-c, 4b-1-a-c, 4c-1-a-b\}<y<\frac{1}{4}(1+a+b+c).$$

Esto es posible si y sólo si $\frac{1}{4}(1+a+b+c)>\text{máx}\{-1-a-b-c, 4a-1-b-c, 4b-1-a-c, 4c-1-a-b\}$, pero ésto se cumple gracias de nuevo a las condiciones que hemos exigido a las posiciones conocidas.

De manera que con este algoritmo estamos en condiciones de enunciar la siguiente proposición.

Proposición 7.1.3 *Sea A una B-matriz parcial con incógnitas no posicionalmente simétricas tal que en cada fila hay como máximo un elemento no especificado, entonces si (i_0, j_0) es la posición no especificada de la fila i_0,*

(a) Si la submatriz $A[\{1,2,\ldots,j_0-1,j_0+1,\ldots,n\}]$ está especificada, entonces existe A_C completación B-matriz.

(b) Si la submatriz $A[\{1,2,\ldots,j_0-1,j_0+1,\ldots,n\}]$ no está especificada, existe A_C completación B-matriz si y sólo si

$$1+a_{i_0,1}+\ldots+a_{i_0,j_0-1}+a_{i_0,j_0+1}+\ldots+a_{i_0,n}>0,$$

$$\frac{1}{n-1}(1+a_{i_0,1}+\ldots+a_{i_0,j_0-1}+a_{i_0,j_0+1}+\ldots+a_{i_0,n})>a_{i_0,1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n-1}(1 + a_{i_0,1} + \ldots + a_{i_0,j_0-1} + a_{i_0,j_0+1} + \ldots + a_{i_0,n}) > a_{i_0,j_0-1},$$

$$\frac{1}{n-1}(1 + a_{i_0,1} + \ldots + a_{i_0,j_0-1} + a_{i_0,j_0+1} + \ldots + a_{i_0,n}) > a_{i_0,j_0+1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n-1}(1 + a_{i_0,1} + \ldots + a_{i_0,j_0-1} + a_{i_0,j_0+1} + \ldots + a_{i_0,n}) > a_{i_0,n}.$$

Ésto se repite para cada elemento no especificado de cada fila.

Demostración

(a) Si la submatriz $A[\{1, 2, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots, n\}]$ está especificada, siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 7.1.1 existe A_C completación B-matriz.

(b) Si la submatriz $A[\{1, 2, \ldots, j_0 - 1, j_0 + 1, \ldots, n\}]$ no está especificada, siguiendo el algoritmo empleado para el caso 4×4 y 5×5, completaremos la fila i_0 con $c_{i_0 j_0}$ si y sólo si este elemento cumple que

$$\begin{gathered} \max\{-1 - a_{i_0,1} - \ldots - a_{i_0,j_0-1} - a_{i_0,j_0+1} - \ldots - a_{i_0,n}, \\ , (n-1)a_{i_0,1} - 1 - \ldots - a_{i_0,j_0-1} - a_{i_0,j_0+1} - \ldots - a_{i_0,n}, \ldots, \\ , (n-1)a_{i_0,j_0-1} - 1 - \ldots - a_{i_0,1} - a_{i_0,j_0+1} - \ldots - a_{i_0,n}, \\ , (n-1)a_{i_0,j_0+1} - 1 - \ldots - a_{i_0,1} - a_{i_0,j_0-1} - \ldots - a_{i_0,n}, \ldots, \\ , (n-1)a_{i_0,n} - 1 - \ldots - a_{i_0,j_0-1} - a_{i_0,j_0+1} - \ldots - a_{i_0,1}\} < c_{i_0 j_0} \end{gathered}$$

y, simultáneamente,

$$c_{i_0 j_0} < \frac{1 + a_{i_0,1} + \ldots + a_{i_0,j_0-1} + a_{i_0,j_0+1} + \ldots + a_{i_0,n}}{n-1}.$$

Como hemos visto anteriormente, sabemos que esos límites entre los que se mueve $c_{i_0 j_0}$ son correctos por las condiciones exigidas a los elementos especificados de cada fila. Repetiremos este proceso de completación para cada elemento no especificado de cada fila. □

Un tipo de matriz parcial, no posicionalmente simétrica, que queda recogido en la proposición anterior, corresponde a aquel en el que la matriz tiene como entradas no especificadas las posiciones $(i, i + k)$, $i = 1, 2, \ldots, n - k + 1$, es decir, la k-ésima superdiagonal para $k = 2, 3, \ldots, n$ (alternativamente la k-ésima subdiagonal).

Este patrón ha sido estudiado por numerosos autores en el contexto de otros tipos de problemas de completación. Podemos deducir, a partir de la Proposición 7.1.3, el siguiente resultado.

Corolario 7.1.1 *Sea A una B-matriz parcial con incógnitas no posicionalmente simétricas situadas en una superdiagonal o una subdiagonal, entonces existe completación A_C, B-matriz.*

Otro patrón interesante de matriz parcial es aquel que tiene toda una columna de la matriz no especificada. También a partir de la Proposición 7.1.3 podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 7.1.2 *Sea A una B-matriz parcial con incógnitas no posicionalmente simétricas situadas en una misma columna, entonces existe completación A_C, B-matriz.*

No obstante, el Corolario 7.1.2 queda ya recogido en la Proposición 7.1.2, pero es interesante observar cómo se llega a la misma conclusión por vías distintas.

Continuando con el problema de completación de B-matrices parciales no posicionalmente simétricas, estudiamos a continuación el patrón de las B-matrices parciales triangulares superiores. Comencemos por el caso 2×2.

Sea A la siguiente B-matriz parcial triangular superior de tamaño 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ x_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Basta con tomar $x_{21} \in (-1, 1)$ para obtener una completación A_C de A, B-matriz.

Sea ahora A la B-matriz parcial triangular superior de tamaño 3×3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si resolvemos las incógnitas de la matriz comenzando por la submatriz $A[\{2,3\}]$ estamos en el caso 2×2 de manera que tendríamos resuelta la incógnita $x_{32} = c_{32}$.

Aumentamos el tamaño de la submatriz a analizar, veamos qué ocurre ahora con las filas de la submatriz $A[\{1,2,3\}]$, que coincide con la matriz A.

Exigimos a la segunda fila de A que $1 + a_{23} > 0$ y que $\frac{1}{2}(1 + a_{23}) > a_{23}$.

Con respecto a dicha fila, aplicando las condiciones (2.1) no es complicado obtener que

$$\text{máx}\{-1 - a_{23}, 2a_{23} - 1\} < x_{21} < \frac{1 + a_{23}}{2}.$$

Ésto es posible si y sólo si se cumple que

$$\text{máx}\{-1 - a_{23}, 2a_{23} - 1\} < \frac{1 + a_{23}}{2},$$

condición que vamos a comprobar que se cumple gracias a las condiciones que le hemos exigido a la segunda fila.

Supongamos que el máximo es $-1-a_{23}$, entonces se debe cumplir que $-1-a_{23} < \frac{1+a_{23}}{2}$. Multiplicando la condición exigida $1+a_{23} > 0$ por menos tres tenemos $-3-3a_{23} < 0$, ó, lo que es lo mismo, $-2-2a_{23} < 1+a_{23}$, es decir, $-1-a_{23} < \frac{1+a_{23}}{2}$.
Supongamos ahora que el máximo es $2a_{23}-1$, entonces se debe cumplir que $2a_{23}-1 < \frac{1+a_{23}}{2}$. Como exigimos que se cumpla $\frac{1}{2}(1+a_{23}) > a_{23}$, operando $1-a_{23} > 0$. Multiplicando por menos tres, $3a_{23}-3 < 0$, reordenando $4a_{23}-2 < 1+a_{23}$, y dividiendo entre dos $2a_{23}-1 < \frac{1+a_{23}}{2}$.
De manera que completamos $x_{21} = c_{21}$.

Respecto a la tercera fila de A, estando ya resuelta la incógnita c_{32} por lo comentado anteriormente, aplicando las condiciones de B-matriz (2.1) a dicha fila no es complicado obtener la siguiente condición para la incógnita x_{31},

$$\text{máx}\{-1-c_{32}, 2x_{32}-1\} < x_{31} < \frac{1+c_{32}}{2}.$$

Ésto es posible si y sólo si

$$\text{máx}\{-1-c_{32}, 2c_{32}-1\} < \frac{1+c_{32}}{2}.$$

Supongamos que el máximo es $-1-c_{32}$, entonces se debe cumplir que $-1-c_{32} < \frac{1+c_{32}}{2}$. Si aplicamos a la submatriz $A[\{2,3\}]$ (que es B-matriz) las condiciones (2.1) de B-matriz tenemos que $1+c_{32} > 0$. Multiplicando por menos uno tenemos que $-1-c_{32} < 0$, multiplicando ahora por menos tres tenemos $-3-3c_{32} < 0$, o, lo que es lo mismo, $-2-2c_{32} < 1+c_{32}$, es decir, $-1-c_{32} < \frac{1+c_{32}}{2}$.

Supongamos ahora que el máximo es $2c_{32}-1$, entonces se debe cumplir que $2c_{32}-1 < \frac{1+c_{32}}{2}$. Si aplicamos a la submatriz $A[\{2,3\}]$ las condiciones (2.1) de B-matriz tenemos que $1+c_{32} > 2c_{32}$, o lo que es lo mismo, operando $1-c_{32} > 0$. Multiplicando por menos uno, $-1+c_{32} < 0$, multiplicando por tres $3c_{32}-3 < 0$, reordenando $4c_{32}-2 < 1+c_{32}$, y dividiendo entre dos $2c_{32}-1 < \frac{1+c_{32}}{2}$.

De manera que completamos $x_{31} = c_{31}$.

En general, el aspecto de una fila cualquiera excepto la primera de una B-matriz parcial triangular superior de tamaño $n \times n$ será

$$(x_{i1}\ \ x_{i2}\ \ \ldots\ \ x_{i,i-1}\ \ 1\ \ a_{i,i+1}\ \ a_{i,i+2}\ \ \ldots\ \ a_{in}),\ \ i = 2, 3, \ldots n.$$

Y lo que le vamos a exigir a dicha fila es que cumpla las siguientes condiciones

$$1 + a_{i,i+1} + \ldots + a_{in} > 0,$$

$$\frac{1}{n-i+1}(1 + a_{i,i+1} + \ldots + a_{in}) > a_{ij},\ \ j = i+1, \ldots, n.$$

Sea ahora A una B-matriz parcial triangular superior de tamaño 4×4, matriz a la cual le aplicamos de nuevo las exigencias anteriores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & a_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

Comenzamos a completarla siguiendo las diagonales más cercanas a la diagonal principal. Comenzamos a completarla desde la esquina inferior derecha, esto es, comenzando por la la submatriz principal $A[\{3,4\}]$, de modo que completamos la incógnita $x_{43} = c_{43}$. Seguimos completando por la submatriz principal $A[\{2,3,4\}]$, estamos en el caso anterior de modo que tendríamos completada la incógnita $x_{32} = c_{32}$. Analizamos la segunda fila de A con el fin de obtener x_{21}. Aplicando a la mencionada fila las condiciones de B-matriz (2.1), no es complicado obtener la siguiente restricción para dicha incógnita.

$$\text{máx}\{-1 - a_{23} - a_{24}, -1 + 3a_{23} - a_{24}, -1 + 3a_{24} - a_{23}\} < x_{21} < \frac{1 + a_{23} + a_{24}}{3}.$$

Ésta restricción es posible si y sólo si

$$\text{máx}\{-1 - a_{23} - a_{24}, -1 + 3a_{23} - a_{24}, -1 + 3a_{24} - a_{23}\} < \frac{1 + a_{23} + a_{24}}{3},$$

pero, al igual que hemos visto en el caso 3×3, ésta desigualdad se cumple debido a las exigencias que se ha impuesto a las filas de A. De modo que completamos $x_{21} = c_{21}$.

La incógnita x_{42} la completamos a c_{42} de un modo análogo al caso 3×3, y a partir de este momento la submatriz principal $A[\{2,3,4\}]$ es B-matriz.

Veamos ahora qué ocurre con la tercera fila de A, teniendo en cuenta que ya tenemos completada la incógnita $x_{32} = c_{32}$.

En este caso, operando de la misma manera que anteriormente, obtenemos que

$$\text{máx}\{-1 - a_{34} - c_{32}, -1 + 3a_{34} - c_{32}, -1 + 3c_{32} - a_{34}\} < x_{31} < \frac{1 + a_{34} + c_{32}}{3}.$$

Ésto se cumple si y sólo si

$$\text{máx}\{-1 - a_{34} - c_{32}, -1 + 3a_{34} - c_{32}, -1 + 3c_{32} - a_{34}\} < \frac{1 + a_{34} + c_{32}}{3},$$

condición que es sencillo comprobar que se cumple como consecuencia de las exigencias impuestas. De manera que completamos $x_{31} = c_{31}$.

Análogamente, para la cuarta fila de A obtenemos, teniendo en cuenta que $x_{42} = c_{42}$ y $x_{43} = c_{43}$ ya están completadas, que

$$\text{máx}\{-1 - c_{42} - c_{43}, -1 + 3c_{42} - c_{43}, -1 + 3c_{43} - c_{42}\} < x_{41} < \frac{1 + c_{42} + c_{43}}{3}.$$

Ésto se cumple si y sólo si

$$\text{máx}\{-1 - c_{42} - c_{43}, -1 + 3c_{42} - c_{43}, -1 + 3c_{43} - c_{42}\} < \frac{1 + c_{42} + c_{43}}{3},$$

condición que es sencillo comprobar que se cumple como consecuencia de las exigencias impuestas. De manera que completamos $x_{41} = c_{41}$.

Estos resultados pueden extenderse a B-matrices parciales triangulares superiores de cualquier tamaño, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 7.1.1 *Sea A una B-matriz parcial triangular superior de tamaño $n \times n$. Si exigimos a la fila i con $i = 2, 3, \ldots, n$, que cumpla las siguientes condiciones,*

$$1 + a_{i,i+1} + \ldots + a_{in} > 0,$$

$$\frac{1}{n-i+1}(1 + a_{i,i+1} + \ldots + a_{in}) > a_{ij}, \;\; j = i+1, \ldots, n,$$

entonces existe completación A_C B-matriz.

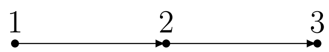
Demostración. Comenzamos a completar desde la esquina inferior derecha de la B-matriz parcial A las submatrices principales de tamaños 2×2, 3×3, 4×4... $n-1 \times n-1$, del modo visto anteriormente hasta que sólo resten por completar las incógnitas x_{i1} para $i = 2, 3, \ldots, n$, las cuales completamos según el algoritmo anteriormente empleado y obtenemos A_C B-matriz. □

Se obtienen resultados análogos a los anteriores para el caso de las B-matrices parciales triangulares inferiores.

Desde el punto de vista del **grafo asociado** a la matriz parcial, algunos patrones no posicionalmente simétricos pueden resultar interesantes.

(i) Camino dirigido. Una B-matriz parcial de tamaño 3×3 cuyo grafo asociado G_A sea un camino dirigido responde al siguiente aspecto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$



En general, en este caso no existe completación B-matriz.

Ejemplo 7.1.5 Sea A la B-matriz parcial de tamaño 3×3 cuyo grafo asociado es un camino dirigido.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1.1 & x_{13} \\ x_{21} & 1 & 0.1 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si trabajamos con la primera fila, para que x_{13} cumpla las condiciones de B-matriz (2.1), se debería cumplir que

$$1 - 1.1 + x_{13} > 0 \to x_{13} > 0.1$$

y, simultáneamente, que

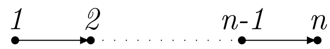
$$\frac{1}{3}(1 - 1.1 + x_{13}) > x_{13} \to x_{13} < -0.05,$$

derivando en una contradicción.

En este caso no es difícil comprobar que existe completación B-matriz si y sólo si exigimos que $|a_{i,i+1}| < 1$.

Proposición 7.1.4 *Sea A una B-matriz parcial de tamaño $n \times n$ cuyo grafo asociado G_A es un camino dirigido.*

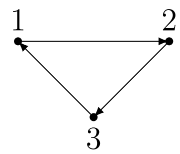
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$



Existe completación A_C B-matriz si y sólo si $|a_{i,i+1}| < 1$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

(ii) Ciclo dirigido. Una B-matriz parcial de tamaño 3×3 cuyo grafo asociado G_A sea un ciclo dirigido responde al siguiente aspecto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$



En general, no existe completación B-matriz.

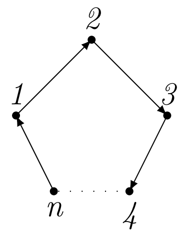
Ejemplo 7.1.6 Sea A la B-matriz parcial de tamaño 3×3 cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1.1 & x_{13} \\ x_{21} & 1 & 0.1 \\ 0.5 & x_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

No existe completación B-matriz por la misma razón que en el ejemplo anterior.

Proposición 7.1.5 *Sea A una B-matriz parcial de tamaño $n \times n$ cuyo grafo asociado G_A es un ciclo dirigido.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & a_{23} & \dots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & \dots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$



Existe completación A_C B-matriz si y sólo si $|a_{i,i+1}| < 1$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ y además $|a_{n1}| < 1$.

En cuanto al **caso posicionalmente simétrico** (incógnitas en posiciones simétricas de la matriz parcial), podemos establecer un resultado afirmativo para matrices de tamaño 3×3.

Teorema 7.1.2 *Sea A una B-matriz parcial, posicionalmente simétrica, de tamaño 3×3, entonces A admite una completación B-matriz.*

Demostración. Podemos suponer, por semejanza de permutación, que la matriz A tiene la forma

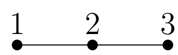
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ x_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $A[\{1,2\}]$ es B-matriz, entonces $a_{12} \in]-1,1[$, y como $A[\{2,3\}]$ es B-matriz, entonces $a_{32} \in]-1,1[$, de modo que realizando un razonamiento análogo al que hemos visto para el Teorema 7.1.1 es necesario y suficiente tomar

$$\text{máx}\{-1-a_{12}, 2a_{12}-1\} < x_{13} < \frac{1+a_{12}}{2} \quad \text{y} \quad \text{máx}\{-1-a_{32}, 2a_{32}-1\} < x_{31} < \frac{1+a_{32}}{2},$$

para completar a B-matriz. □

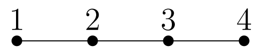
Observemos que el grafo asociado a la matriz parcial del resultado anterior es un camino no dirigido.



Desafortunadamente, este resultado no se puede extender a matrices de tamaño superior a 3. De hecho, si la B-matriz parcial es de tamaño $n \times n$, con $n \geq 4$, y su grafo asociado es un camino no dirigido, en general no podemos garantizar la existencia de una completación B-matriz.

Ejemplo 7.1.7 La B-matriz parcial, posicionalmente simétrica, cuyo grafo asociado G_A es un camino

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & x_{13} & x_{14} \\ -0.7 & 1 & -0.8 & x_{24} \\ x_{31} & -0.8 & 1 & -0.7 \\ x_{41} & x_{42} & 0.1 & 1 \end{pmatrix},$$



no admite completación B-matriz ya que

$$-0.7 + 1 - 0.8 + x_{24} > 0 \Rightarrow x_{24} > 0.5$$

y simultáneamente

$$x_{24} < \frac{1 - 0.8 - 0.7}{3} = -0.16$$

lo cual no es viable.

Se deben restringir las entradas conocidas de la B-matriz parcial para que con la estructura anterior (camino) exista completación B-matriz.

En el caso 4×4 la B-matriz parcial tendría, salvo permutación, el siguiente aspecto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso exigimos las siguientes condiciones

$$a_{21} + 1 + a_{23} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{21} + 1 + a_{23}) > a_{21}, \;\; \frac{1}{3}(a_{21} + 1 + a_{23}) > a_{23},$$

$$a_{32} + 1 + a_{34} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{32} + 1 + a_{34}) > a_{32}, \text{ y } \frac{1}{3}(a_{32} + 1 + a_{34}) > a_{34}.$$

En primer lugar, nos centramos en la submatriz $A[\{1,2,3\}]$ y completamos del modo habitual $x_{13} = c_{13}$ y $x_{31} = c_{31}$ utilizando el hecho de que las submatrices principales $A[\{1,2\}]$ y $A[\{2,3\}]$ son B-matrices.

Después trabajamos con la submatriz $A[\{2,3,4\}]$ y completamos $x_{24} = c_{24}$, y $x_{42} = c_{42}$, utilizando el hecho de que las submatrices principales $A[\{2,3\}]$ y $A[\{3,4\}]$ son B-matrices.

Finalmente, trabajamos con la matriz A y como tenemos que

$$1 + a_{12} + c_{13} > 0, \;\; 1 + a_{12} + c_{13} > 3a_{12}, \;\; 1 + a_{12} + c_{13} > 3c_{13}$$

$$1 + a_{43} + c_{42} > 0, \;\; 1 + a_{43} + c_{42} > 3a_{43} \text{ y } 1 + a_{43} + c_{42} > 3c_{42},$$

con estas restricciones y con las que imponemos completamos, utilizando el procedimiento habitual, $x_{14} = c_{14}$ y $x_{41} = c_{41}$.

En el caso 5×5 la B-matriz parcial tendría, salvo permutación, el siguiente aspecto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 & a_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & a_{54} & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso exigimos las siguientes condiciones

$$a_{21} + 1 + a_{23} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{21} + 1 + a_{23}) > a_{21}, \;\; \frac{1}{3}(a_{21} + 1 + a_{23}) > a_{23},$$

$$a_{32} + 1 + a_{34} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{32} + 1 + a_{34}) > a_{32}, \;\; \frac{1}{3}(a_{32} + 1 + a_{34}) > a_{34},$$

$$a_{43} + 1 + a_{45} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{43} + 1 + a_{45}) > a_{43} \text{ y } \frac{1}{3}(a_{43} + 1 + a_{45}) > a_{45}.$$

Suponemos completadas las submatrices $A[\{1, 2, 3, 4\}]$ y $A[\{2, 3, 4, 5\}]$ utilizando el procedimiento empleado en el caso 4×4, de manera que trabajamos por último con la matriz A y completamos de un modo análogo a como lo hicimos en el caso 4×4, $x_{15} = c_{15}$ y $x_{51} = c_{51}$.

En el caso 6×6 la B-matriz parcial tendría, salvo permutación, el siguiente aspecto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 & a_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & a_{54} & 1 & a_{56} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & a_{65} & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso exigimos las siguientes condiciones

$$a_{21} + 1 + a_{23} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{21} + 1 + a_{23}) > a_{21}, \;\; \frac{1}{3}(a_{21} + 1 + a_{23}) > a_{23},$$

$$a_{32} + 1 + a_{34} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{32} + 1 + a_{34}) > a_{32}, \;\; \frac{1}{3}(a_{32} + 1 + a_{34}) > a_{34},$$

$$a_{43} + 1 + a_{45} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{43} + 1 + a_{45}) > a_{43}, \;\; \frac{1}{3}(a_{43} + 1 + a_{45}) > a_{45}$$

$$a_{54} + 1 + a_{56} > 0, \;\; \frac{1}{3}(a_{54} + 1 + a_{56}) > a_{54}, \text{ y } \frac{1}{3}(a_{54} + 1 + a_{56}) > a_{56}.$$

Suponemos completadas las submatrices $A[\{1,2,3,4,5\}]$ y $A[\{2,3,4,5,6\}]$ utilizando el procedimiento empleado en el caso 5×5, de manera que trabajamos por último con la matriz A y completamos acorde al algoritmo ya conocido y teniendo en cuenta las desigualdades exigidas, $x_{16} = c_{16}$ y $x_{61} = c_{61}$.

Y, en general, para una B-matriz parcial posicionalmente simétrica de tamaño $n \times n$ cuyo grafo asociado sea un camino no dirigido,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} & \dots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & \dots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & x_{n-1,4} & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

exigiendo a las posiciones conocidas las siguientes condiciones para $i = 2, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} + 1 + a_{i,i+1} &> 0 \\ \frac{1}{3}(a_{i,i-1} + 1 + a_{i,i+1}) &> a_{i,i-1} \\ \frac{1}{3}(a_{i,i-1} + 1 + a_{i,i+1}) &> a_{i,i+1}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

vamos completando comenzando por las submatrices principales de tamaño 3×3, después las 4×4, y así sucesivamente hasta las submatrices principales de tamaño $n-1 \times n-1$. Finalmente, completamos $x_{1n} = c_{1n}$ y $x_{n1} = c_{n1}$.

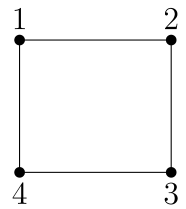
De manera que podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 7.1.6 *Sea A una B-matriz parcial, con incógnitas posicionalmente simétricas, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un camino no dirigido. A admite una completación A_C, B-matriz, si y sólo si las posiciones conocidas de A satisfacen las condiciones (7.2) para $i = 2, \dots, n-1$.*

Cuando el grafo asociado a la B-matriz parcial es un ciclo, en general la respuesta al problema posicionalmente simétrico también es negativa.

Ejemplo 7.1.8 La B-matriz parcial posicionalmente simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0.8 & x_{13} & -0.7 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & x_{24} \\ x_{31} & 0.1 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & x_{42} & 0.3 & 1 \end{pmatrix},$$



no admite completación B-matriz por el mismo motivo que en el ejemplo anterior aplicado a x_{13} en este caso. Nótese que el grafo asociado a la matriz A es un ciclo no dirigido.

Se deben restringir las entradas conocidas de la B-matriz parcial para que con la estructura anterior (ciclo) exista completación B-matriz. Al respecto, presentamos el siguiente resultado, que se demostraría utilizando el algoritmo de la Proposición 7.1.7, ya que para un tamaño de matriz $n = 4$ cada fila tiene un único elemento no especificado, es decir, es de la forma, salvo permutación, $(1,\ a,\ b,\ x)$, siendo a y b conocidas y x la incógnita, para $n = 5$ la fila sería, salvo permutación, de la forma $(1,\ a,\ b,\ x,\ y)$, con a y b conocidas y x e y las incógnitas, completamos como ya sabemos, es decir, primero completamos x y luego y, para $n = 6$ la fila sería, salvo permutación, de la forma $(1,\ a,\ b,\ x,\ y,\ z)$, con a y b conocidas y x, y y z las incógnitas, completamos de nuevo como ya sabemos (primero x, después y y después z), y así sucesivamente, en general, para una matriz de tamaño $n \times n$, una fila cualquiera tendría el siguiente aspecto

$$(1\ \ a\ \ b\ \ x_1\ \ x_2 \ldots\ \ x_{n-3}).$$

Proposición 7.1.7 *Sea A una B-matriz parcial, con incógnitas posicionalmente simétricas, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo sea un ciclo, y tal que las entradas conocidas a, b, de una fila cualquiera cumplan*

$$1 + a + b > 0$$

$$\frac{1}{3}(1 + a + b) > a$$

$$\frac{1}{3}(1 + a + b) > b.$$

Entonces A admite una completación B-matriz.

Demostración. Utilizando el hecho de que las posiciones conocidas de cada fila cumplen las condiciones anteriores, vamos completando incógnitas desde el interior hacia el exterior de la fila del modo descrito varias veces en procedimientos anteriores, por cada una de las filas. □

Al analizar qué otros tipos de grafo asociado además de camino y ciclo debe tener la matriz parcial A con incógnitas posicionalmente simétricas para que exista completación B-matriz, obtenemos algunos resultados interesantes.

Si la matriz es de tamaño 4×4 y su grafo asociado es 1-cordal obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.1.8 *Sea A una B-matriz parcial, con incógnitas posicionalmente simétricas, de tamaño 4×4 cuyo grafo asociado G_A es 1-cordal, entonces existe completación A_C B-matriz.*

Demostración. La forma de la matriz parcial será, salvo permutación, la siguiente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ x_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix},$$

con grafo asociado G_A 1 - cordal.

Aplicando el resultado obtenido para las matrices tamaño 3×3 completamos $A[\{1,2,3\}]$ y obtenemos una nueva matriz parcial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & c_{13} & x_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ c_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ x_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $1+a_{12}+c_{13} > 0$, $1+a_{12}+c_{13} > 3a_{12}$ y $1+a_{12}+c_{13} > 3c_{13}$, podemos elegir un valor para x_{14} tal que

$$\frac{1+a_{12}+c_{13}}{3} > x_{14} > \text{máx}\{-1-a_{12}-c_{13}, -1-a_{12}+3c_{13}, -1-c_{13}+3a_{12}\}.$$

Esta desigualdad se cumple si y sólo si

$$\frac{1+a_{12}+c_{13}}{3} > \text{máx}\{-1-a_{12}-c_{13}, -1-a_{12}+3c_{13}, -1-c_{13}+3a_{12}\},$$

pero ésto es cierto porque las submatrices principales de A son B-matrices.

Análogamente para la incógnita x_{41}. □

De manera que podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 7.1.9 *Sea A una B-matriz parcial con incógnitas posicionalmente simétricas de tamaño $n \times n$ con grafo G_A 1-cordal con un clique maximal 2×2, entonces existe A_C completación B-matriz.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ x_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ x_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir del resultado obtenido para matrices 3×3 completamos $A[\{1,2,3\}]$. Así sucesivamente, supongamos completada $A[\{1,2,\ldots,n-1\}]$.

Teniendo en cuenta que $1+a_{12}+c_{13}+\ldots+c_{1,n-1} > 0$, $1+a_{12}+c_{13}+\ldots+c_{1,n-1} > (n-1)a_{12}$, $1+a_{12}+c_{13}+\ldots+c_{1,n-1} > (n-1)c_{13}$, ..., $1+a_{12}+c_{13}+\ldots+c_{1n-1} > (n-1)c_{1,n-1}$ podemos elegir x_{1n} tal que

$$\frac{1+a_{12}+c_{13}+\ldots+c_{1n-1}}{n-1} > x_{1n} > \text{máx}\{-1-a_{12}-c_{13}-\ldots-c_{1n-1},$$

$$,-1+3a_{12}-c_{13}-\ldots-c_{1n-1}, -1-a_{12}+3c_{13}-\ldots-c_{1n-1}, \ldots, -1-a_{12}-c_{13}-\ldots+3c_{1n-1}\}$$

ésto será posible si y sólo si

$$\frac{1+a_{12}+c_{13}+\ldots+c_{1n-1}}{n-1} > \text{máx}\{-1-a_{12}-c_{13}-\ldots-c_{1n-1},$$

$$,-1+3a_{12}-c_{13}-\ldots-c_{1n-1}, -1-a_{12}+3c_{13}-\ldots-c_{1n-1}, \ldots, -1-a_{12}-c_{13}-\ldots+3c_{1n-1}\},$$

desigualdad que se cumple debido a que las submatrices principales de A son B-matrices.

Análogamente para x_{n1}. □

Estudiemos ahora lo que sucede en el caso de grafo asociado G_A 1-cordal cuando el clique es de tamaño $k \times k$ con $k \geq 3$.

Por ejemplo, para una matriz posicionalmente simétrica de tamaño 5×5,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & x_{14} & x_{15} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} & x_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ x_{41} & x_{42} & a_{43} & 1 & a_{45} \\ x_{51} & x_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 \end{pmatrix}.$$

A la matriz $A[\{1,2,3,4\}]$ le podemos aplicar el resultado anterior y obtener $A_C[\{1,2,3,4\}]$, que llevada a A nos proporciona una nueva matriz parcial A' en la que completamos x_{15}, x_{25} y finalmente la última fila empezando con x_{52} y después con x_{51}.

Para poder demostrar los teoremas que proponemos a continuación, necesitamos hacer uso del siguiente resultado técnico.

Lema 7.1.1 *Sea A una B-matriz parcial, con incógnitas posicionalmente simétricas, de tamaño $n \times n$ tal que sus posiciones no especificadas son $(1,k+1),\ldots,(1,n)$ y sus simétricas $k > 1$, entonces existe A_c B-matriz.*

Demostración. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1k} & x_{1,k+1} & \dots & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & 1 & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ x_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & 1 & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Completamos, en este orden, las variables $x_{k+1,1}, x_{k+2,1}, \dots, x_{n1}$ y así obtenemos otra matriz parcial con incógnitas no posicionalmente simétricas en una misma fila a la cual le aplicamos el algoritmo de completación que ya se vió en el apartado correspondiente. □

A partir de este lema podemos establecer los siguientes resultados.

Teorema 7.1.3 *Sea A una B-matriz parcial, con incógnitas posicionalmente simétricas, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es 1-cordal, con k vértice separador y con 2 cliques maximales, entonces existe una completación A_c de A que es B-matriz.*

Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{12}^T & X \\ a_{21}^T & 1 & a_{23}^T \\ Y & a_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el Lema 7.1.1 a la matriz $A[\{k-1, k, k+1, \dots, n\}]$. Seguimos denominando A a la B-matriz parcial obtenida al reemplazar la submatriz anterior por su completación $A_C[\{k-1, k, \dots, n\}]$.

Aplicamos el mismo lema a la matriz $A[\{k-2, k-1, \dots, n\}]$. Así sucesivamente hasta obtener la completación A_C buscada. □

Nótese que si hay más de dos cliques, el resultado en general no es cierto, como se puede comprobar en el Ejemplo 7.1.7.

Y, en general, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 7.1.4 *Sea A una B-matriz parcial, con incógnitas posicionalmente simétricas, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es k-cordal, con $k \geq 1$ y tiene 2 cliques maximales, entonces existe una completación A_c de A que es B-matriz.*

Demostración.

a) Supongamos que hay un clique de tamaño $n-1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & x_{1,k+2} & \dots & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & 1 & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & 1 & a_{k+1,k+2} & \dots & a_{k+1,n} \\ x_{k+2,1} & a_{k+2,2} & & \dots & & 1 & \dots & a_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & a_{n2} & \dots & & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el lema previo para obtener A_C, B-matriz.

b) En general,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & X \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ Y & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

con A_{22} matriz $k \times k$.

Vamos completando fila a fila hasta obtener una B-matriz parcial con la forma de la matriz del apartado (a).

□

Existen más patrones con incógnitas posicionalmente simétricas, como puede ser el añadir al final una fila y una columna incógnitas a una B-matriz, estudiemos este patrón para concluir el capítulo.

Teorema 7.1.5 *Sea A la B-matriz parcial, posicionalmente simétrica,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & x_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2,n-1} & x_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 1 & x_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces existe completación A_C B-matriz.

Demostración. Como la submatriz principal $A[\{1, 2, 3, \dots, n-1\}]$ es B-matriz, completamos x_{1n}, x_{2n}, …, $x_{n-1,n}$ y la última fila la completamos utilizando la Proposición 7.1.2. □

Capítulo 8

Conclusiones y líneas futuras de trabajo.

En esta memoria se han introducido nuevas caracterizaciones y propiedades de las matrices inversa-positiva, de las B-matrices y de otras clases de matrices relacionadas con estas últimas, proporcionando ejemplos de todas ellas.

Hemos visto las relaciones que existen entre las distintas clases de matrices de la memoria y también sus relaciones con algunas otras clases de matrices ampliamente estudiadas en la literatura (por ejemplo, las M-matrices y las P-matrices).

Se ha estudiado en profundidad el concepto de suma sub-directa de matrices inversa-positiva, así como la relación existente entre matrices con patrón de signos 'checkerboard' y las matrices inversa-positiva.

Se ha profundizado también en el producto Hadamard de todas las clases de matrices con las que se ha trabajado.

Hemos visto que, en general, la suma sub-directa de las clases relacionadas con B-matrices no es cerrada, de modo que una línea de investigación abierta es estudiar bajo qué condiciones la suma sub-directa es cerrada respecto a las B-matrices y sus clases relacionadas. Estamos trabajando actualmente en el problema de qué se le debe exigir a las B-matrices para que su suma sub-directa sea también B-matriz, y también en el problema inverso, esto es, siendo C una B-matriz, descomponerla en la suma subdirecta de B-matrices, quedando planteados ambos como problemas abiertos.

Por otra parte, una nueva línea de investigación abierta es el estudio de qué sucede con las diferentes clases de B-matrices cuando presentan un patrón de signos 'checkerboard'.

Si A es una B-matriz, con patrón 'checkerboard', entonces nos preguntamos si A es inversa-positiva. La respuesta no es en general afirmativa.

Ejemplo 8.0.9 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

es una B-matriz con patrón 'checkerboard' pero no es inversa-positiva.

Estamos trabajando en los requisitos que debemos exigirles a las B-matrices para encontrar relaciones con las matrices inversa-positiva.

Asimismo, en [46] se muestran aplicaciones de las B-matrices a la localización de valores propios reales de una matriz real, así como a la localización de las partes reales de todos los valores propios (reales o complejos) de una matriz. Una línea interesante de investigación sería comprobar qué sucede en el caso de las restantes clases de B-matrices.

Definición 8.0.2 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n$, entonces decimos que A es una H-matriz si su matriz de comparación*

$$\mathcal{M}(A) = \begin{cases} -|a_{ij}| & si\ i \neq j, \\ |a_{ii}|. \end{cases}$$

es M-matriz.

Dada la relación que existe entre las M-matrices y las H-matrices y teniendo en cuenta que al imponer la condición de B-matriz a una Z-matriz la convertimos en M-matriz, nos planteamos también la relación que pueda existir entre las B-matrices o las $|B|$-matrices y las H-matrices.

Respecto de la completación de B-matrices parciales, se ha logrado cerrar tanto el problema no posicionalmente simétrico como el posicionalmente simétrico. Sin embargo, en el caso de la completación de matrices parciales a matriz inversa-positiva todavía quedan una serie de problemas abiertos.

Referencias

[1] T. Ando, *Totally positive matrices.* Linear Algebra and its Applications, 90 (1987), 165-219.

[2] A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences.* Siam, 1994.

[3] J.M. Carnicer, T.N.T. Goodman, J.M. Peña, *Linear conditions for positive determinants.* Linear Algebra and its Applications 292 (1999) 39-59.

[4] Charles R. Johnson, *Matrix Completion Problems: A Survey.* Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Volume 40, 1990.

[5] C.W. Cryer. *Some properties of totally positive matrices.* Linear Algebra and its Applications, 15, 1-25. 1976.

[6] K. Fan, *Inequalities for M-matrices*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A67 (1964) 602-610.

[7] M. Fiedler and R. Grone, *Characterizations of sign patterns of inverse-positive matrices.* Linear Algebra and Appl., 40:237-245 (1981).

[8] S. Fallat, C. Johnson, *Sub-direct sums and positivity classes of matrices.* Linear Algebra and its Applications, 288 (1999), 149-173.

[9] S.M. Fallat, C.R. Johnson, *Hadamard powers and totally positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, 423 (2007) 420-427.

[10] S.M. Fallat, C.R. Johnson, *Totally nonnegative matrices*, Princeton University Press. 2011.

[11] S.M. Fallat, C.R. Johnson and R.L. Smith. *The general totally positive matrix completion problem with few unspecified entries.* The Electronic Journal of Linear Algebra, 7, 1-20. 2000.

[12] S.M. Fallat, C.R. Johnson, J.R. Torregrosa and A.M. Urbano. *P-matrix completion under weak symmetry assumptions.* Linear Algebra and its Applications, 312, 73-91. 2000.

[13] T. Fujimoto, J.A. Silva and A. Villar. *Nonlinear generalizations of theorems on Inverse-Positive Matrices.* Advances in Mathematical Economics, 5 (2003) 55-63.

[14] C.M. da Fonseca. *On the eigenvalues of some tridiagonal matrices.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 200 (2007) 283-286.

[15] T. Fujimoto, R.R. Ranade. *Two characterizations on inverse-positive matrices: The Hawkins-Simon condition and the Chatelier-Braun principle.* Electronic Linear Algebra 11 (2004) 59-65.

[16] S.M. Fallat and P. Van Den Driessche. *On matrices with all minors negative.* The Electronic Journal of Linear Algebra, 7, 92-99. 2000.

[17] F.R. Gantmacher and M.G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems.* AMS, Providence, 2002. *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen Mechanister Systeme*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

[18] A. Greenbaum. *Iterative methods for solving nonlinear systems.* SIAM, Philadelphia, 1997.

[19] D. Hawkins, H.A. Simon. *Some conditions of Macroeconomic stability.* Econometrica, 17 (1949) 245-248.

[20] A. J. Hoffmann. *On the nonsingularity of real matrices.* Math. Comp., 19, 56-61. 1965.

[21] L. Hogben. *Completions of inverse M-matrix patterns.* Linear Algebra and its Applications, 282, 145-160. 1998.

[22] L. Hogben. *Completions of M-matrix patterns.* Linear Algebra and its Applications, 285, 143-152. 1998.

[23] L. Hogben. *Inverse M-matrix completions of patterns omitting some diagonal positions.* Linear Algebra and its Applications, 313, 173-192. 2000.

[24] L. Hogben. *Graph theoretic methods for matrix completion problems.* Linear Algebra and its Applications, 328, 161-202. 2001.

[25] L. Hogben and L. De Alba. *Completions of P-matrix patterns.* Linear Algebra and its Applications, 319, 83-102. 2000.

[26] R. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge. 1991.

[27] Johnson, C.R., *Sign patterns of inverse nonnegative matrices.* Linear Algebra and its Applications 55, 69–80 (1983)

[28] C.R. Johnson, F.T. Leighton and H.A. Robinson, *Sign patterns of inverse-positive matrices.* Linear Algebra and Appl., 24:75-83 (1979).

[29] C.R. Johnson, *A Hadamard Product Involving M-matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 4 (1977) 261-264.

[30] C.R. Johnson, R. Smith, *Inverse M-matrices, II.* Linear Algebra and its Applications, 435 (2011) 953-983.

[31] C.R. Johnson and B.K. Kroschel. *The combinatorially symmetric P-matrix completion problem.* Electronic Journal Linear Algebra, 1, 59-63. 1996.

[32] C.R. Johnson, B.K. Kroschel and M. Lundquist. *The totally nonnegative completion problem.* Fields Institute Communications, 18, 97-107. 1998.

[33] C. R. Johnson and R. L. Smith. *The symmetric inverse M-matrix completion problem.* Linear Algebra Appl. 290 (1999), 193-212.

[34] C.R. Johnson and R. Smith. *The completion problem for M-matrices and inverse M-matrices.* Linear Algebra and its Applications, 241/243, 655-667. 1996.

[35] C.R. Johnson, R.L. Smith. *Path Product matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 46 (1999) 177-191.

[36] C. Jordán, J.R. Torregrosa and A.M. Urbano. *Controllability completion problems of partial upper triangular matrices.* Linear and Multilinear Algebra, 47, 57-75. 2000.

[37] C. Jordán, J.R. Torregrosa and A.M. Urbano. *Graphs and Controllability completion problems.* Linear Algebra and its Applications, 332/334, 355-370. 2001.

[38] C. Jordán, J.R. Torregrosa and A.M. Urbano. *Completions of partial P-matrices with acyclic or non-acyclic associated graph.* Linear Algebra and its Applications, 368, 25-51. 2003.

[39] C. Jordán, J.R. Torregrosa and A.M. Urbano. *Inverse M-matrix completion problem with zeros in the inverse completion.* Applied Mathematics Letters, 15-6, 677-684. 2002.

[40] C. Jordán, J.R. Torregrosa and A.M. Urbano. On the Rodman-Shalom conjeture regarding the Jordan form of completions of partial upper triangular matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 3, 103-118. 1998.

[41] M. Krupnik and L. Rodman. Completions of partial Jordan and Hessenberg matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 212/213, 267-287. 1994.

[42] Linzhang Lu, Michael K. Ng. *Maximum inverse-positive matrices.* Applied Mathematics Letters, 20, 1, 65-69. (2007).

[43] L. Mirsky. *Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements. Journal London Math. Soc.*, 33, 14-21. 1958.

[44] R. Nabben, D.B. Szyld. *Convergence theory of restricted multiplicative Schwarz methods SIAM Journal Numerical Analysis*, 40 (2003) 2318-2336.

[45] J.E. Peris, *A new characterization of inverse-positive matrices.* Linear algebra and its applications 154, 45-58, 1991.

[46] J. M. Peña, *A class of P-Matrices with applications to the localization of the eigenvalues of a real matrix*, Siam J. Matrix Anal. Appl. Vol. 22, No. 4, pp. 1027-1037, 2001.

[47] J. M. Peña, *M-Matrices whose inverse are totally positive.*, Linear algebra and its applications 221, 189-193, 1995.

[48] J.M. Peña, *On nonsingular sign regular matrices.* Linear Algebra and its Applications 359 91–100 (2003)

[49] R. Precup. *Two positive nontrivial solutions for a class of semilinear elliptic variational systems.*

[50] A. Toselli, O. Widlund. *Domain decomposition methods: Algorithms and Theory.* Series in Computational Mathematics, Vol. 34,

[51] Wang, B.Y., Zhang, X., Zhang, F, *On the Hadamard Product of Inverse M-matrices.* Linear Algebra and its Applications 305 23–31 (2000).