# Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda.

# Parte II: Cuando el ajuste del precio depende del inventario y existe especulación



| | |
|---|---|
| **Apellidos, nombre** | Cortés López, Juan Carlos;<br>Romero Bauset, José Vicente;<br>Roselló Ferragud, María Dolores;<br>Villanueva Micó, Rafael jacinto<br>(jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es;<br>drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es) |
| **Departamento** | Matemática Aplicada<br>Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar |
| **Centro** | Facultad de Administración<br>y Dirección de Empresas |

# 1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se estudia una variación del modelo dinámico clásico de oferta y demanda con inventario que considera en su formulación la posibilidad de que los demandantes sean especuladores. El modelo está basado en la formulación de una ecuación diferencial ordinaria que describe la trayectoria temporal del precio a partir de una función de oferta estándar y una función de demanda que considera la posible existencia de compradores que actúen con fines especulativos. En la primera parte del trabajo se interpreta económicamente el modelo, se obtiene su solución y analiza su comportamiento a largo plazo. Posteriormente, se relaciona la solución del modelo con la proporcionada por el modelo clásico sin especulación. El trabajo permite transitar de forma natural desde el modelo dinámico clásico de oferta y demanda con inventario a una versión más compleja del mismo que permite interpretar la existencia de especuladores, lo cual creemos resulta desde el punto de vista formativo, muy instructivo.

# 2 Introducción

En una primera parte de este trabajo se ha estudiado un modelo dinámico continuo de oferta y demanda de un bien basado en la formulación de una ecuación diferencial ordinaria (edo) (véase la referencia [1]). En esa aportación se muestran dos versiones del modelo expresadas en términos del ajuste instantáneo del precio. La primera versión se basaba en la dinámica del excedente de la demanda. Después de analizar dicho modelo, se mostró que contenía ciertas carencias explicativas sobre el comportamiento económico de los agentes del mercado (representados por los consumidores y los productores). Esto motivó el estudio de un segundo modelo que consideraba en su formulación la existencia de un inventario o stock, el cual superaba ciertas limitaciones del primer modelo. Esta segunda versión del modelo se basaba en la misma e.d.o., pero el punto de vista del planteamiento del modelo cubría las lagunas explicativas que obviaba el primer modelo. En ambos casos, se asumían funciones lineales estándar, tanto para la oferta como para la demanda, es decir, en el primer caso la cantidad ofertada se suponía creciente con el precio, mientras que en el segundo caso, se asumía que la cantidad demandada decrecía con el precio. Sin embargo, en aras de generalizar el escenario así descrito, cabría contemplar la posibilidad de que actores “no estándar” intervinieran en el mercado. En este trabajo, consideramos la existencia de compradores especuladores y analizaremos la dinámica del precio, estudiando la relación entre las soluciones proporcionadas por ambos modelos a largo plazo.

Como una consecuencia de nuestro estudio también veremos que podemos analizar nuevos comportamientos de demandantes estándar que no se habían contemplado en el modelo clásico y que añaden una visión más completa de los modelos oferta y demanda para mercados donde se comercializa un único bien.

# 3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer las limitaciones de los modelos dinámicos clásicos de oferta y demanda y comprender la necesidad de estudiar modelos alternativos, que contemplen en su formulación, las carencias que contienen los modelos clásicos.
- Establecer la relación entre ambos tipos de modelos de forma que el tránsito de uno a otro quede motivado desde un punto de vista económico.
- Resolver modelos dinámicos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias y estudiar su comportamiento asintótico.

## 3.1 Un modelo dinámico de oferta y demanda con espectativas

Como hemos señalado en la Introducción, en un primer trabajo (véase la referencia [1], estudiamos un modelo dinámico continuo de oferta y demanda basado en el ajuste instantáneo del precio en función del exceso de demanda y del inventario. El estudio estaba basado en el modelo presentado en la Ecuación 1, donde se asumen funciones de oferta y demanda estándar. Concretamente, para la función de oferta se supone que la cantidad ofertada crece (a la tasa $d$) cuando el precio aumenta y para la función de demanda, se asume que a medida que el precio aumenta los compradores demandan menos cantidad (a la tasa $b$). Por tanto, este tipo de modelos no contemplan comportamientos "*no estándar*" que sí pueden producirse en determinados mercados -como por ejemplo, el observado en el sector inmobiliario en la década 1997-2007 en España-, donde algunos de los agentes actúan con roles especuladores. Nos plantearemos aquí la forma de introducir este tipo de comportamientos a partir del modelo estándar dado en la Ecuación 1.

$$\left.\begin{array}{rcll} q^D(t) & = & a-bp(t) & , \quad a,b>0, \\ q^S(t) & = & -c+dp(t) & , \quad c,d>0, \\ p'(t) & = & \alpha\left(q^D(t)-q^S(t)\right) & , \quad \alpha>0. \end{array}\right\}$$

*Ecuación 1. Modelo dinámico estándar de ajuste del precio dependiendo del exceso de demanda.*

Para centrar nuestro objetivo, pretendemos introducir en ese modelo la posibilidad de que, por ejemplo, los demandantes puedan ser especuladores. Éstos se caracterizan por demandar mayor cantidad cuando observan que los precios aumentan. Al tratarse de un modelo continuo parece natural modelizar este comportamiento a través de la derivada, ya que, esta es la herramienta adecuada para modelizar cambios instantáneos de magnitudes (en este caso el precio). Por tanto, una forma natural de introducir en el modelo estándar el comportamiento especulativo en los compradores es incluir en la función de demanda un término *corrector* (con respecto al comportamiento del demandante estándar) que contenga la derivada del precio, $p'(t)$. Sin embargo, dado que esta corrección no tiene porque se exactamente la velocidad a la que varía el precio, podemos modular esta corrección a través de un coeficiente, e incluir en su lugar el término $ep'(t)$. Llegado este punto, obsérvese que para reflejar el comportamiento especulativo debe especificarse el signo del coeficiente $e$, ya que, los especuladores corrigen el comportamiento estándar (reflejado a través del término $a-bp(t)$ de la función de demanda) comprando más cuando el precio aumenta (con ello los especuladores pretenden adquirir un bien a un determinado precio para inmediatamente después deshacerse del mismo a un precio mayor, ya que, asumen que el precio subirá, consiguiendo así una ganancia inmediata).

Por ello, para modelizar apropiadamente la especulación asumiremos que $e>0$. De esta forma, tomaremos como nueva función de demanda $q^D(t)=a-bp(t)+ep'(t)$ siendo $a,b,e>0$.

Pero entonces, ¿qué significaría que el coeficiente $e<0$? Obsérvese que en ese caso, un razonamiento análogo nos indicaría que el demandante tiene un perfil estándar que reduce el consumo del bien considerado en este modelo de mercado teniendo en cuenta no sólo el precio, sino la velocidad a la que varía el precio (dada por $p'(t)$).

Toda la exposición anterior nos permite establecer de forma natural y a partir del modelo estándar, un modelo dinámico continuo de ajuste del precio dependiendo de la demanda y del inventario, pero que considera la existencia de agentes demandantes especuladores (véase la Ecuación 2).

$$\left.\begin{array}{rcl} q^D(t) & = & a-bp(t)+ep'(t) \quad , \quad a,b>0, e\in IR \\ q^S(t) & = & -c+dp(t) \quad , \quad c,d>0, \\ p'(t) & = & \alpha\left(q^D(t)-q^S(t)\right) \quad , \quad \alpha>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e>0 \;\Rightarrow\; \text{hay especulación} \\ e<0 \;\Rightarrow\; \text{no hay especulación} \end{array}$$

*Ecuación 2. Modelo dinámico de ajuste del precio con especulación en la demanda.*

Para calcular la trayectoria temporal del precio sustituimos las funciones de demanda y oferta en la tercera ecuación del modelo. A continuación, ordenamos los términos de la expresión resultante de modo que siga el patrón de una e.d.o. lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden (véase la Ecuación 4). Esto nos conduce al modelo expresado en la Ecuación 3.

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) & = & -\dfrac{\alpha\left(b+d\right)}{1-\alpha e}p(t)+\dfrac{\alpha(a+c)}{1-\alpha e}, \\ p(0) & = & p_0. \end{array}\right\}$$

*Ecuación 3. Ecuación diferencial para la dinámica del precio.*

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & ax(t)+b \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} e^{at}\left(x_0+\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{b}{a} & \text{si } \; a\neq 0, \\ bt+x_0 & \text{si } \; a=0. \end{cases}$$

*Ecuación 4. Solución de un* p.v.i. basado en una e.d.o. lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden.

Ahora identificamos los datos del modelo con los del patrón (véase la Ecuación 5) y obtenemos la trayectoria temporal del precio (véase la Ecuación 6).

$$a = -\frac{\alpha\left(b+d\right)}{1-\alpha e} \neq 0, \quad b = \frac{\alpha(a+c)}{1-\alpha e} \quad ; \quad x(t) = p(t), \quad x_0 = p_0.$$

*Ecuación 5. Identificación de los datos del modelo con los del patrón que proporciona la solución.*

$$p(t) = e^{-\frac{\alpha(b+d)}{1-\alpha e}t}\left(p_0 - \frac{a+c}{b+d}\right) + \frac{a+c}{b+d}.$$

*Ecuación 6. Trayectoria temporal del precio.*

Como $b, d, \alpha > 0$, obsérvese que para que la exponencial tenga exponente negativo, y haya equilibrio del precio a largo plazo, se tiene que cumplir la condición dada en la Ecuación 7. En esta ecuación también se especifica el precio $p^*$ y la cantidad de equilibrio $q^*$ resultante. Obsérvese que como en el equilibrio la cantidad demanda y ofertada coinciden, para el cálculo de la cantidad de equilibrio basta sustituir el precio de equilibrio en la función de oferta (que es más sencilla). Si elegimos la función de demanda para realizar este cálculo basta observar que el término $ep'(t)$ es, en este caso nulo, ya que, el precio de equilibrio $p^*$ es una constante: $ep'(t) = e(p^*)' = e \times 0 = 0$.

$$1-\alpha e > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha e \Leftrightarrow e < \frac{1}{\alpha}; \quad p^* = \frac{a+c}{b+d} > 0, \quad q^* = \frac{ad-bc}{b+d} > 0 \Leftrightarrow ad > bc.$$

*Ecuación 7. Condición de equilibrio asintótico del precio. Precio y cantidad de equilibrio.*

En caso de existencia de especulación ($e > 0$) se presentará equilibrio asintótico únicamente si el coeficiente $e$ del término de especulación no supera al inverso del coeficiente $\alpha$ del ajuste instantáneo del precio.

## 3.2 Cuando no hay especulación, los consumidores son estándar y consideran la velocidad de los precios

Aunque nuestro análisis se ha centrado hasta ahora en la interpretación del modelo desde el punto vista de la existencia de especulación, es decir, cuando $e > 0$, ya hemos señalado que existe una segunda interpretación del modelo que pasamos a analizar. Es interesante observar que en el caso en que no hay especulación ($e < 0$) estará asegurado que a largo plazo se presente el equilibrio, ya que, $\alpha > 0$. Además en ese caso el precio y la cantidad de equilibrio coinciden con las obtenidas a través del modelo estudiado en el trabajo [1], lo cual permite relacionar ambos modelos en el largo plazo. Para tiempos finitos podemos también establecer una relación entre los precios y las cantidades de ambos modelos. Para ello basta recordar la expresión del precio del modelo clásico obtenida en el trabajo [1] en términos del precio de equilibrio (recuérdese que en el escenario actual, está garantizada la existencia de equilibrio).

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

| precio del modelo clásico | precio del modelo nuevo sin especulación |
|---|---|
| $p(t)=p^*+\left(p_0-p^*\right)\,e^{-\alpha(b+d)t}$ | $p(t)=p^*+\left(p_0-p^*\right)\,e^{-\frac{\alpha(b+d)}{1-\alpha e}t}$ |

*Ecuación 8. Relación entre los precios en tiempos finitos del modelo clásico y del nuevo modelo asumiendo que no hay especulación* ($e<0$).

Como $b,d,\alpha>0$ y $e<0$ (y por tanto $1-\alpha e>1$), $e^{-\alpha(b+d)t}<e^{-\frac{\alpha(b+d)}{1-\alpha e}t}$ para $t>0$, se deduce de la Ecuación 8 que si $p_0>p^*$ ($p_0<p^*$), ambos modelos tenderán a largo plazo hacia el equilibrio, de modo que el precio del nuevo modelo sin especulación será siempre mayor (menor) que el precio del modelo clásico. En otras palabras, en este contexto la convergencia del precio hacia el equilibrio del modelo nuevo sin especulación es más lenta independientemente de la relación de magnitud entre el precio inicial y el de equilibrio. Esto se refleja de la propia función de demanda dada en la Ecuación 2: Si partimos de un precio superior al de equilibrio, $p_0>p^*$ ($p_0<p^*$), esperaremos que el precio tienda a decrecer (crecer), es decir, $p'(t)<0$ ($p'(t)>0$) -lo cual también se ve derivando la expresión del precio de la Ecuación 8-, y por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión de la función de demanda del nuevo modelo, los consumidores “corrigen” la demanda respecto del comportamiento estándar demandando más (menos) cantidad, concretamente $ep'(t)>0$ ($ep'(t)<0$); esto provocará que el productor oferte una mayor (menor) cantidad respecto al modelo estándar. Este comportamiento “corrector” del consumidor retardará la convergencia a largo plazo del precio.

Este análisis sobre el comportamiento del precio en tiempos finitos se puede extender a las cantidades ofertadas y demandadas. Aquí presentaremos el caso de la oferta, ya que, resulta menos engorroso desde el punto de vista de los cálculos involucrados, y por tanto más esclarecedor pedagógicamente. En primer lugar, calculamos en la Ecuación 9 las expresiones de las cantidades ofertadas en ambos modelos.

| cantidad ofertada del modelo clásico | cantidad ofertada del modelo nuevo sin especulación |
|---|---|
| $q^S(t)=q^*+d\left(p_0-p^*\right)\,e^{-\alpha(b+d)t}$ | $q^S(t)=q^*+d\left(p_0-p^*\right)\,e^{-\frac{\alpha(b+d)}{1-\alpha e}t}$ |

*Ecuación 9. Relación entre las cantidades ofertadas en tiempos finitos del modelo clásico y del nuevo modelo asumiendo que no hay especulación* ($e<0$).

Por un razonamiento análogo al presentado anteriormente, se deduce que si $p_0>p^*$ ($p_0<p^*$), ambos modelos tenderán a largo plazo hacia la cantidad de equilibrio $q^*$, de modo que la cantidad ofertada del nuevo modelo sin especulación será siempre mayor (menor) que la cantidad ofertada en el modelo clásico. También para el caso de las cantidades ofertadas en este contexto, la convergencia hacia el equilibrio del modelo nuevo sin especulación es más lenta.

# 4 Cierre

En este trabajo hemos considerado una generalización del modelo dinámico continuo clásico de oferta y demanda de un bien con ajuste del precio dependiendo del exceso de demanda o del inventario. Esta generalización se ha realizado incluyendo la posibilidad de que agentes especuladores entren en el mercado mediante el rol de compradores. La inclusión de este nuevo escenario se ha hecho introduciendo un nuevo término en la función de demanda que es proporcional a la velocidad a la que crece el precio. El análisis del nuevo modelo nos ha permitido también incluir nuevos roles de compradores estándar que demandan considerando no sólo el precio sino también la velocidad a la que varía. Hemos estudiado la relación entre las soluciones proporcionadas por el nuevo modelo y por el modelo clásico, tanto en tiempos finitos como a largo plazo.

El nuevo enfoque estudiado en este trabajo nos ha hecho replantear la posibilidad de generar nuevos modelos a partir de otros más sencillos. Así por ejemplo, cabría introducir un término similar al considerado en la función de demanda, pero sobre la función de oferta y realizar el estudio correspondiente. También es posible plantear otras modificaciones del modelo estudiado en este trabajo y que también adquieren sentido económico, tales como considerar no solo la velocidad del precio, sino su aceleración a través de la segunda derivada y que conducirían a e.d.o.'s lineales no homogéneas a coeficientes constantes de segundo orden. Este tipo de modelos serán analizados con detenimiento en futuros artículos docentes.

# 5 Bibliografía

[1] Cortés, J.C., Romero J.V. y Roselló Mª.D.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte I: Cuando el ajuste del precio depende únicamente del exceso de demanda y del inventario". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia.

[2] Shone, R.: "Economic Dynamics", 2nd edition, Ed. Cambridge, 2002.

Este excelente texto presenta el estudio de diferentes modelos económicos que aparecen en Microeconomía y en Macroeconomía con el denominador común de ser todos ellos de tipo de dinámico. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.

[3] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.