



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y
DIRECCIÓN DE EMPRESAS. UPV

Construcción de una cartera de inversión de mínimo riesgo con cinco activos internacionales

Realizado por:

Víctor Adrián Ceausu Soler

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Tutorizado por:

Rafael Jacinto Villanueva Micó

Cotutorizado por:

Juan Carlos Cortés López

Curso 2020/2021

Índice

1.- Introducción	4
1.1.- Contenido del TFG	4
1.2.- Relación con asignaturas de la carrera.....	5
2.- Empresas Seleccionadas.....	6
2.1.- BBVA.....	6
2.2.- Apple.....	8
2.3.- American Airlines	10
2.4.- Renault.....	12
2.5.- AstraZeneca.....	14
3.- Modelización Matemática de Subyacentes Cotizados	16
3.1. Movimiento Browniano o Proceso de Wiener.....	16
3.2.1. Propiedades estadísticas del proceso de Wiener.....	17
3.2. Modelo Log-Normal: Un modelo estocástico para subyacentes.....	18
3.3. El Lema de Itô.....	19
3.3.1. Hipótesis del lema de Itô.....	20
3.4. Solución del modelo Log-Normal aplicando el MBG.....	20
3.5. Funciones Estadísticas y Simulación del Movimiento Browniano Geométrico	22
3.5.1. Función Media del Movimiento Browniano Geométrico.....	22
3.5.2. Función Varianza del Movimiento Browniano Geométrico.....	23
3.6.- Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$	24
3.6.1 Método de Momentos Estadísticos.....	24
3.6.2. Método de Máxima Verosimilitud.....	27
3.6.3. Método de Momentos No Paramétrico.....	30
4.- Aplicación del modelo para activos cotizados.....	32
4.1.- Obtención de la Matriz de Varianza-Covarianza.....	32
4.2.- Estimación de parámetros	32

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

4.2.1.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de Apple.....	33
4.2.2.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de AstraZeneca.....	33
4.2.3.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de Renault.....	34
4.2.4.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de American Airlines.....	34
4.2.5.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de BBVA.....	35
4.3.- Validación del modelo.....	35
4.3.1.- Validación de los modelos de Apple.....	36
4.3.2.- Validación de los modelos de AstraZeneca.....	37
4.3.3.- Validación de los modelos de Renault.....	37
4.3.4.- Validación de los modelos de American Airlines.....	37
4.3.5.- Validación de los modelos de BBVA.....	38
4.4.- Predicciones a cinco días de los activos.....	38
4.4.1.- Predicciones para Apple.....	38
4.4.2.- Predicciones para AstraZeneca.....	40
4.4.3.- Predicciones para Renault.....	41
4.4.4.- Predicciones para American Airlines.....	42
4.4.5.- Predicciones para BBVA.....	43
5.- Construcción de una cartera de inversión.....	45
5.1.1.- Conceptos básicos.....	45
5.1.3.- Otros aspectos relevantes.....	46
5.2.- Cálculo de pesos de una cartera de mínimo riesgo.....	47
5.2.1.- Estimación de la cartera.....	47
5.3.- Evaluación errores cartera.....	49
6.- Conclusiones.....	51
7.- Bibliografía.....	52
8.- Anexo.....	54

1.- Introducción

En el sector de las finanzas existen numerosas estrategias de inversión y construcción de carteras. Desde la selección del tipo de activos hasta la metodología empleada. Todo esto para elaborar la mejor estrategia que optimice el binomio rentabilidad-riesgo de la cartera. En el desarrollo de este trabajo fin de grado se elaborará una estrategia propia de las finanzas cuantitativas tomando como base en la construcción de la cartera modelos matemáticos y conceptos estadísticos. Si bien es cierto que es complicado estimar el valor exacto del rendimiento de los activos, por el alto número de variables que influyen en el precio de los mismos, se puede estimar con estas técnicas con cierto grado de confianza su comportamiento en el futuro más próximo, y un error tolerable.

Las empresas que van a ser seleccionadas para componer la cartera pertenecen a diferentes sectores y a bolsas internacionales, dotando a la cartera un mayor grado de diversificación y por tanto cabe esperar menor riesgo. Las empresas son: BBVA, American Airlines, Renault, Apple y AstraZeneca. Con este planteamiento inicial se espera no tener correlación entre los activos y así poder aplicar el modelo matemático de manera independiente y obtener predicciones fiables.

Se elaborará un estudio de las empresas seleccionadas acerca de su contexto económico y análisis de la evolución bursátil. Posteriormente, se tomarán 30 días de cotización, a partir de los cuales se aplicará el modelo matemático de los cuales se obtendrán las predicciones. El modelo empleado en este proyecto es el Movimiento Browniano Geométrico, el cual interpreta las cotizaciones de las acciones como variables aleatorias. Por tanto, dicho modelo considera el entorno de incertidumbre característico de la inversión en Bolsa. Para estimar los parámetros del modelo se emplearán 3 métodos estadísticos para determinar aquel que se ajuste mejor al modelo, y por tanto proporcione menor error.

Después de estimar los parámetros se realizan las predicciones para todos los activos. Finalmente, con técnicas de optimización se obtendrán los pesos que garanticen el mínimo riesgo en la cartera. Cabe destacar que dicha metodología de inversión a corto plazo y tomando como referencia modelos matemáticos es propia de los fondos de cobertura (*Hedge Funds*) de carácter cuantitativo. Algunos ejemplos que siguen esta estrategia son: *Two Sigma*, *Renaissance Technologies* y *AQR Capital*.

1.1.- Contenido del TFG

El trabajo se estructurará en 6 apartados los cuales se desarrollarán todos los contenidos especificados en el apartado anterior.

En primer lugar, en este capítulo se plantean brevemente una introducción la cual va a consistir el trabajo en concreto y las asignaturas que guardan relación con el mismo, las cuales se han utilizado sus contenidos para su elaboración.

Seguidamente, en el segundo capítulo del trabajo se realizará una descripción contextual de las empresas seleccionadas para el estudio y así dar una visión global de las mismas, como su estrategia y el sector en el que operan. Posteriormente, se realizará un análisis de las cotizaciones durante los últimos 5 años, identificando los principales acontecimientos que han tenido un impacto significativo en el precio y comparando su desempeño con el índice de referencia.

En los capítulos 3 y 4 se describirán las bases matemáticas para la estimación de los parámetros de tendencia y volatilidad además de la formulación de las predicciones para los activos cotizados.

Posteriormente, dicho modelo se aplicará a los mismos y así obtener los resultados que servirán para elaborar la cartera de inversión.

En el último capítulo del trabajo se elaborará la cartera siguiendo un modelo de optimización de mínimo riesgo, donde primero se describirá la teoría sobre las carteras financieras, definiendo conceptos como riesgo, retorno, y pesos óptimos en la cartera. Seguidamente, se obtendrán los resultados para cada activo que supondrán el punto óptimo para garantizar el mínimo riesgo en la cartera. Finalmente se hará una evaluación de la misma con los datos reales, a posteriori, para comprobar el ajuste del modelo matemático con el rendimiento y riesgo actual.

1.2.- Relación con asignaturas de la carrera

Para el desarrollo de este trabajo de final de grado se han empleado conocimientos y conceptos de diferentes asignaturas a lo largo del grado de Administración y Dirección de empresas. Algunos ejemplos son:

- **Matemáticas financieras:** Se describen nociones del cálculo de funciones financieras de diferentes clases de activos.
- **Introducción a la Estadística:** Mediante el estudio de esta asignatura, se aprenden los conceptos elementales de la estadística, así como su aplicación en el cálculo.
- **Modelos Matemáticos para ADE:** Sobre esta asignatura se describen las bases teóricas y los modelos matemáticos los cuales sustentan este trabajo.
- **Econometría:** Se desarrollan conceptos relevantes al trabajo como las series temporales, directamente relacionadas con las cotizaciones de los activos en la Bolsa.
- **Economía Financiera:** A partir de esta asignatura se toman conceptos clave acerca de la elaboración de una cartera de inversión además del desarrollo de otros conocimientos financieros relevantes.
- **Investigación Operativa:** Se introducen las técnicas de optimización que son aplicables para el cálculo de los pesos de la cartera financiera.
- **Análisis del Riesgo Financiero:** Por último, a partir de esta asignatura se toman la mayoría de los conocimientos y técnicas para el estudio y elaboración del trabajo. Se ponen en práctica las bases teóricas acerca de los modelos matemáticos aprendidos, así como el uso del programa Mathematica para la elaboración de los cálculos.

2.- Empresas Seleccionadas

Para el estudio de este trabajo es fundamental conocer la descripción de las empresas seleccionadas. Para ello, se realizará un análisis de la actividad económica de cada una de ellas además de una descripción breve de su historia y evolución. También se evaluará el cambio en la cotización bursátil a lo largo de los últimos años, así como identificará los eventos más relevantes que han implicado mayores cambios en ésta.

Más concretamente, hemos seleccionado para el estudio 5 compañías de diferentes sectores y que cotizan en bolsas internacionales. De esta manera, se garantizará una baja correlación de los activos y se podrá aplicar el modelo Log-Normal independientemente a cada empresa. Gracias a esta elección de empresas se conseguirá diversificar el riesgo de una manera más eficiente ya que no dependerán de las variables de un único sector o mercado.

2.1.-BBVA

El Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA) es un banco español con sede en Bilbao (Vizcaya, País Vasco). Se trata de una de las mayores entidades financieras del mundo y sus mercados principales se encuentran en España, Latinoamérica, Estados Unidos y Turquía.

La empresa comenzó con la fundación del Banco de Bilbao en 1857, donde hoy sigue manteniendo su sede. En 1988 se fusiona con el Banco de Vizcaya pasando a formar lo que se denominó BBV. Posteriormente, el gobierno creó en 1991 el banco público Argentaria, donde entre 1993 y 1998 pasó a ser privada. En el año 1999, se fusionaron el banco BBV y Argentaria pasando a ser lo que hoy se conoce como BBVA.

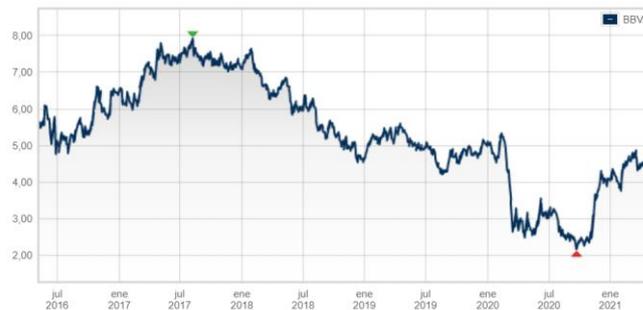
En los últimos años, BBVA ha definido 6 prioridades estratégicas que van alineadas con su propósito: “Poner al alcance de todas las oportunidades de la nueva era”. En primer lugar, pretenden mejorar la salud financiera de sus clientes, mediante un asesoramiento más personalizado en la toma de decisiones y gestión de sus finanzas. Así como, ayudarlos en la transición hacia un futuro más sostenible (de acuerdo con los Objetivos de Desarrollo Sostenible, París). Además, BBVA fija una de sus estrategias en crecer en número de clientes mediante nuevos canales digitales y de terceros. También, buscan la excelencia en su operativa y así proporcionar la mejor experiencia de cliente, con procesos sencillos y automatizados. Otra de sus estrategias es apostar por un equipo más especializado y comprometido apostando así por el talento, que al largo plazo proporcionará un crecimiento para la empresa y clientes. Por último, BBVA apuesta por introducir nuevas tecnologías de análisis de datos en su operativa, con una tecnología más fiable y segura.

Como hechos relevantes en el último periodo y por los cambios tecnológicos y estructurales que está atravesando el sector bancario, BBVA realizará un ERE de más de 3.400 trabajadores en toda España en 2021, lo que supondrá una reestructuración del 14% de su plantilla. Esto no afectará a las filiales de otros países. Esta medida se centrará en ajustar la red de sucursales y servicios centrales del Banco de España. Según BBVA y su presidente Onur Genç, mantiene que el ajuste del personal y la reducción de oficinas es necesario para asegurar la viabilidad del negocio. Cabe destacar que durante el ejercicio 2020 ya se hicieron otros ajustes laborales que afectaron principalmente a las jubilaciones.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Por otra parte, el BBVA se encuentra posicionado como el segundo banco español según su valor de marca en 2020, sólo por detrás del Santander. Actualmente ocupa el puesto 250 en las 500 marcas más valoradas del mundo según el Brand Global 500 Ranking. Y se sitúa como la marca más sólida de España con una calificación de fortaleza de marca de 85,2 sobre 100. El acuerdo de BBVA Seguros con Allianz y la venta de la filial estadounidense han impactado muy positivamente en esta puntuación.

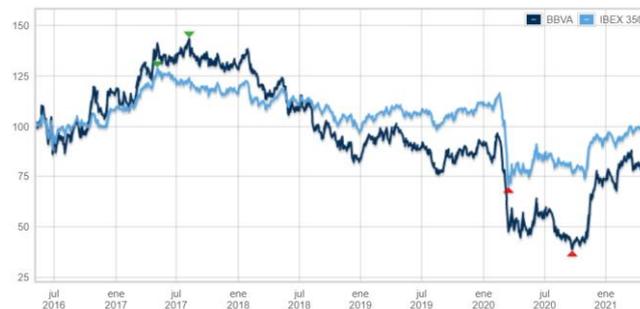
Gráfico 1. Evolución histórica cotización BBVA últimos 5 años.



Fuente: Bolsa de Madrid (2021)

El Gráfico 1 muestra la evolución histórica de la cotización del BBVA de los últimos 5 años. En este periodo el precio de la acción pasó de ser 5,63€ el 10 de mayo de 2016 a 4,80€ el 6 de mayo de 2021, como se puede ver en la gráfica. El acontecimiento principal del desplome de las acciones durante finales del ejercicio de 2017 se debió al conocerse las relaciones comerciales entre BBVA y el comisario Villarejo, en las que se dieron a conocer más tarde las conversaciones ilegales, con el objetivo de la entrada accionarial de la constructora Sacyr en el banco junto con el apoyo del gobierno. Seguidamente a este hecho, se restringieron las comisiones bancarias en México, lo que hizo que el precio de la acción cayera. El segundo gran acontecimiento ocurre en marzo de 2020 con la aparición de la pandemia producida por el Covid19 provocando una caída en mínimos históricos de los últimos 10 años.

Gráfico 2. Evolución histórica cotización BBVA e IBEX 35 últimos 5 años.



Fuente: Bolsa de Madrid (2021)

Realizando un análisis de la evolución de la empresa con el IBEX-35, se puede apreciar que BBVA mantiene una tendencia bastante pareja con este índice. Se produce un descenso significativo en los 2 gráficos a partir de 2017. En el gráfico de BBVA se puede apreciar una caída durante ese año y el siguiente más notable que la del IBEX-35.

El capital social de BBVA está representado por 6.667.887 acciones, con valor nominal de 1 euro cada una de ellas (Bolsa de Madrid, 2021) y una capitalización bursátil total de 32.049.197 a 06/05/2021. El grupo ha repartido en los últimos tres años dividendos entre 0,10 y 0,16 euros. Sin haberse reducido notablemente por la crisis referente al sector bancario del IBEX-35 en 2019. La rentabilidad del último dividendo pagado ronda los 6,5% (tratándose de un dividendo complementario) y en torno al 4% el anterior pago (dividendo ordinario).

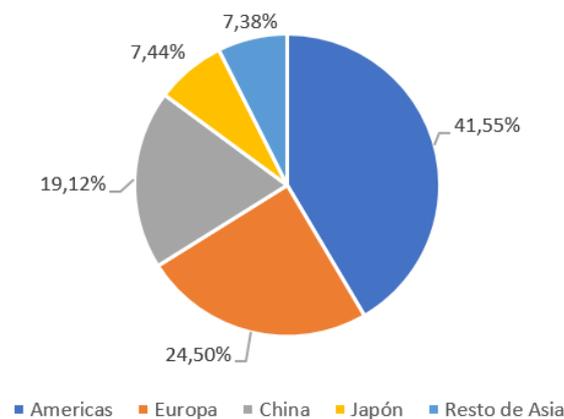
2.2.- Apple

Apple es una empresa estadounidense con sede en Cupertino, California que diseña y produce equipos electrónicos, *software* y servicios en línea. En 2015 se convirtió en la empresa más valiosa del mundo al alcanzar los 247 mil millones de dólares. En 2018, fue la primera empresa en alcanzar el billón de dólares en capitalización bursátil. Actualmente cotiza en el Nasdaq de Nueva York y se encuentra dentro del índice de las 500 empresas más grandes de EEUU, el S&P 500. La empresa comenzó su actividad en el año 1976 fundada por Steve Jobs, Steve Wozniak y Ronald Wayne. El primer producto de la empresa fue el ordenador personal Apple I, que combinaba por primera vez un microprocesador con una conexión para un teclado y ratón. Posteriormente, la empresa creció y se consolidó lentamente en el sector en las próximas décadas con sus modelos del Apple II y III y el primer Macintosh, lanzado en 1984.

En cuanto a su línea de productos y servicios, los productos de *hardware* más relevantes en cuanto a su número de ventas son el Iphone (con 79,942 millones de unidades venidas en el 4T de 2020), el MacBook, los AirPods y el Ipad. Y crea su propio *software* en el que se encuentran los sistemas operativos de iOS, iPadOS, macOS así como otras plataformas como el iTunes, Final Cut Pro X y el navegador web Safari.

La empresa lidera la cuota de mercado de los dispositivos telefónicos con el iPhone por más de 6 años consecutivos. En el 4T de 2020 Apple registro un 23,4%, a nivel mundial, teniendo en cuenta a su competidor directo Samsung con un 19,1% y otras compañías como Huawei (8,4%) y Xiaomi (11,2%). Apple opera en más de 150 países alrededor del mundo y sus ventas se distribuyen como se puede ver en el gráfico 3 por área geográfica en el primer trimestre de 2021.

Gráfico 3. % Ventas totales Apple por área geográfica 1T 2021.



Fuente: Elaboración propia. Statista.

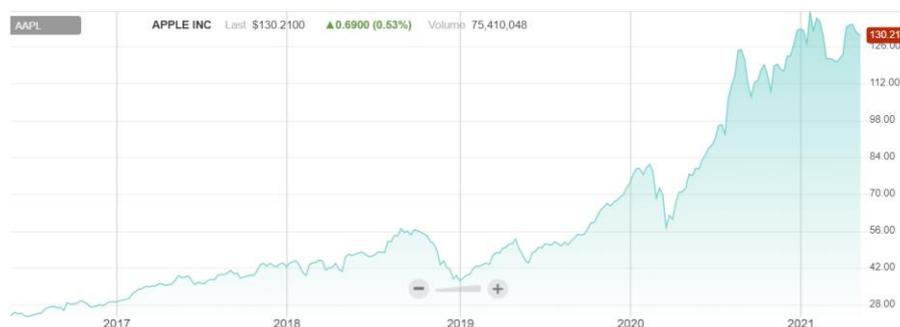
Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Apple tuvo durante el pasado ejercicio de 2020 unos ingresos totales de 274,52 mil millones de dólares con un crecimiento del 5,5% con respecto al año anterior, lo que se refleja en su cotización bursátil. Esto supuso unos beneficios totales que ascendieron a 57,41 mil millones de dólares. La empresa emplea a 147 mil personas alrededor del mundo entre sus fábricas, sede central y tiendas.

La estrategia de Apple se basa principalmente en una diferenciación de sus productos apostando por un diseño innovador y una gran funcionalidad de sus productos. Ha adaptado las características y capacidades avanzadas de sus productos y servicios como base de su ventaja competitiva. Aunque para la empresa, es un desafío mantener esa ventaja competitiva a largo plazo y estar a la vanguardia de las características y capacidades innovadoras en las nuevas versiones de sus productos. Además, Apple se centra en mejorar la experiencia del cliente. Esto ocurre porque la empresa ha conseguido crear una experiencia de cliente que va más allá del proceso de compra de un producto. Estos son fáciles de usar y de fácil interacción con el usuario. También, más de 500 Apple Store en 25 países y regiones, donde la gente puede probar los productos y hacer preguntas al personal de forma eficaz, también contribuyen a la experiencia del cliente. Otra característica que define la estrategia de la empresa es el fortalecimiento del ecosistema. Esta puede caracterizarse como una integración vertical, de manera que la empresa cuenta con conocimientos avanzados en software, hardware y servicios al mismo tiempo. La integración vertical de Apple es uno de los principales factores que la diferencian de la competencia. Los dispositivos y el software de Apple se sincronizan fácilmente y funcionan bien entre sí. Sin embargo, los mismos elementos no se emparejan con productos de otras empresas, lo que crea un ecosistema cerrado. Generando así un elevado coste de cambio de sus clientes a la competencia. Por último, Apple se centra en la disminución de la dependencia del negocio de las ventas de iPhone. La estrategia empresarial de Apple está pasando de depender de las ventas de iPhone a priorizar su negocio de servicios y otras divisiones. En concreto, la división de negocio de servicios de Apple generó unos ingresos récord de 53.770 millones de dólares en 2020, lo que supone un aumento del 16% en comparación con el año anterior.

Cabe destacar, que Apple se encuentra como la marca más valorada del mundo según el Global Brand 500 Ranking.

Gráfico 4. Evolución histórica cotización Apple últimos 5 años.



Fuente: Nasdaq (2021)

El gráfico 4 muestra la cotización bursátil de Apple de los últimos 5 años, desde mayo de 2016 hasta mayo de 2021. Se puede observar una clara tendencia alcista, con un crecimiento regular y continuado a lo largo de los años. Pasó de valer \$23,80 durante 2016 a \$130,21 la acción hoy en día suponiendo un crecimiento del 447%. En cuanto a los hechos relevantes que han afectado este periodo, la primera corrección del precio se dio en septiembre de 2018, con el lanzamiento de los iPhone XS, XS Max y XR, que no estaban a la altura de las expectativas creadas al no introducir

mejoras significativas con respecto a los anteriores modelos. El aumento continuado del precio de la acción durante el ejercicio 2019 se debe a un cambio radical de la estrategia de la compañía enfocada a la diversificación de sus productos y ventas, apostando más por los servicios informáticos y los complementos. Lo que se tradujo en un aumento de las ventas durante ese año.

El siguiente hecho relevante es causado por el Covid19 durante marzo de 2020, que hizo caer en picado el precio de la acción. Pero como sucedió con gran parte de las tecnológicas, este hecho no supuso un cambio significativo de sus ventas, por lo que el precio se corrigió en los próximos meses.

Gráfico 5. Evolución histórica cotización Apple y el S&P500 últimos 5 años.



Fuente: Nasdaq (2021)

Además, se puede observar que la empresa presenta una tendencia de crecimiento muy superior al índice de referencia (el S&P 500) que se debe al buen rendimiento de las tecnológicas durante los últimos 5 años, ya que este presenta sectores muy diversos y que han sido también más afectados por la pandemia.

El capital social de Apple está representado por 78,973 millones de acciones y una capitalización bursátil total de 2,257 billones de dólares a 06/05/2021 (Nasdaq, 2021). El grupo ha repartido en los últimos tres años dividendos entre 0,205 y 0,82 dólares. La rentabilidad de los dividendos pagados en 2020 ronda el 0,63%.

2.3.- American Airlines

American Airlines es una aerolínea estadounidense con sede en Fort Worth, Dallas. Es la mayor aerolínea del mundo si se mide por el tamaño de la flota, los pasajeros transportados y los ingresos por pasajero-milla. American, junto con sus socios regionales, opera una amplia red internacional y nacional con casi 6.800 vuelos diarios a casi 350 destinos en más de 50 países. Actualmente cotiza en el Nasdaq de Nueva York y se encuentra dentro del índice de las 500 empresas más grandes de EEUU, el S&P 500.

La empresa se fundó en 1930 mediante la unión de más de ochenta pequeñas compañías aéreas. Dónde a través de varias fusiones y adquisiciones durante el siglo XX, surgió finalmente lo que se conoce hoy en día como American Airlines. En 2011, debido a la caída de la industria aérea, la empresa matriz se declaró en quiebra. Posteriormente, en 2013, se fusionó con US Airways, pero mantuvo el nombre de American Airlines, ya que era la marca más reconocida internacionalmente. La combinación de las dos aerolíneas dio lugar a la creación de la mayor aerolínea de Estados Unidos y del mundo.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

American Airlines tuvo durante el pasado ejercicio de 2020 unos ingresos totales de 17,337 mil millones de dólares con una caída del 62,11% con respecto al año anterior. Esto se debió principalmente a la pandemia y las restricciones de entrada en los países, que ha afectado gravemente al sector de las aerolíneas. Esto supuso unas pérdidas totales que ascendieron a 8,885 mil millones de dólares previo al Covid-19, la aerolínea manejaba más de 200 millones de pasajeros al año, con una media de más de 500.000 pasajeros diarios y empleaba a casi 130.000 personas. El sector de las aerolíneas pasó de facturar 828 mil millones de dólares en 2019 casi la mitad con 464 mil millones de dólares en 2020, por el efecto de la pandemia. Se trata de un sector bastante fragmentado con un 5,4% de cuota de mercado mundial para American (en 2019), liderando con Delta con el mismo porcentaje, seguido por United con un 5,1%.

American Airlines diferencia sus servicios de los de sus competidores mediante estrategias que garantizan ventajas, la facilidad de reserva y una experiencia satisfactoria. Su preferencia por un gran número de pasajeros le ha hecho ocupar una posición de liderazgo en el sector. Además de tener un mayor número de destinos que sus competidores, lo que le reporta mayores ingresos. Para diferenciar sus servicios y competir con éxito, American Airlines ha iniciado sus operaciones en cinco *hubs* situados en las metrópolis más concurridas de Estados Unidos. La empresa posee un plan de fidelización denominado *AAdvantage* donde obtienen ventajas como alquileres de vehículos a bajo precio, canjes de viajes y estancias en hoteles sin coste alguno. Este programa ha tenido un gran éxito y ha logrado registrar más de 70 millones de miembros.

Debido a los cambios del sector y la pandemia, los viajes por negocios han caído en picado, lo que ha llevado a la compañía a buscar nuevos clientes y cambiar su estrategia comercial. Como afirma el CEO de la compañía Vasu Raja, es generar confianza de nuevo en los viajes en avión y graduar a los clientes a niveles más altos de lealtad. En el próximo periodo de incertidumbre, se pretende estudiar las necesidades del cliente además de ofrecer precios más competitivos y mejores ventajas a aquellos que viajan por ocio.

Cabe destacar que en octubre de 2020, el expresidente de Estados Unidos, Donald Trump, otorgó un plan de ayuda o rescate a las aerolíneas en forma de préstamos por valor de 25.000 millones de dólares. Esto se hizo con el objetivo de salvar decenas de miles de trabajadores en el trabajo durante los próximos seis meses. Debido a las fuertes pérdidas que había experimentado el sector.

Gráfico 6. Evolución histórica cotización American Airlines últimos 5 años



Fuente: Nasdaq (2021)

El gráfico 6 muestra la evolución histórica de la cotización del American Airlines de los últimos 5 años. En este periodo el precio de la acción pasó de ser \$31,33 el 12 de mayo de 2016 a \$22,00 el 6 de mayo de 2021, como se puede ver en la gráfica. El acontecimiento principal de la caída de las acciones continuada durante 2018 se debe primero a la crisis del petróleo que amenazaba a los márgenes de la compañía y posteriormente continuó bajando por los indicios de una posible

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

recesión en el sector y caída de la demanda. La caída durante 2020 estuvo provocada por la pandemia del Covid-19.

Gráfico 7. Evolución histórica cotización American Airlines y el S&P500 últimos 5 años



Fuente: Nasdaq (2021)

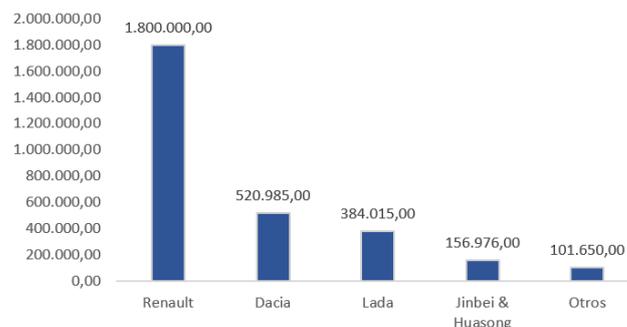
Además, se puede observar que la empresa presenta una tendencia de crecimiento bastante pareja con el índice de referencia S&P 500, hasta inicios de 2018 donde comienzan las coyunturas económicas negativas que afectaron el sector de la empresa. El índice, al incluir empresas de muchos sectores, sigue la tendencia alcista durante ese periodo.

El capital social de American Airlines está representado por 32,022 millones de acciones y una capitalización bursátil total de 14,110 mil millones de dólares a 06/05/2021 (Nasdaq, 2021). El grupo ha repartido en los últimos tres años dividendos de \$0,10. La rentabilidad del último dividendo pagado ronda los 4,12%.

2.4.-Renault

Renault es un fabricante de automóviles multinacional francés con sede en Boulogne-Billancourt, cerca de París. La empresa produce principalmente una amplia gama de coches, furgonetas y autobuses. En las empresas del grupo Renault, también se encuentra Lada, Dacia, Jinbei & Husasong, AvtoVAZ (Rusia) entre otras. Es conocido por su papel en el deporte del motor, especialmente en los rallies, la Fórmula 1 y la Fórmula E. Actualmente, Renault y Nissan forman una alianza manteniendo su independencia, donde Renault posee el 44,4% de participación en Nissan y a su vez Nissan un 15% de Renault. La alianza se sitúa en el tercer puesto en cuanto a nivel de ventas con 6,83 millones de unidades vendidas en 2020. La empresa cotiza en el Euronext de París y se encuentra dentro del índice de las 40 empresas más grandes de Francia, el CAC 40.

Gráfico 8. Unidades vendidas en 2020 por cada empresa del grupo Renault.



Fuente: Euronext. Elaboración propia.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

La empresa fue fundada en 1899 como *Société Renault Frères* por Louis Renault. Posteriormente, durante el siglo XX se consolidó como la mayor empresa automovilística de Francia y una de las más grandes de Europa. Cabe destacar que actualmente se trata de una empresa Mixta ya que un 15% de su accionariado pertenece al gobierno francés.

Renault tuvo durante el pasado ejercicio de 2020 unos ingresos totales de 43,474 mil millones de euros con una caída del 21,72 % con respecto al año anterior. Esto se debió principalmente a la pandemia y la incertidumbre del panorama económico, que ha afectado gravemente al sector del automóvil. Las pérdidas totales del ejercicio ascendieron a 8 mil millones de euros (Euronext, 2021). A finales de 2020, el grupo contaba con 38 centros industriales y 14.261 puntos de venta en todo el mundo. Las ventas netas se desglosan geográficamente de la siguiente manera: Francia (27,6%), Europa (39,9%), Eurasia (15,9%), África/Oriente Medio/Asia/Pacífico (10,9%) y América (5,7%). Por tanto, las ventas se concentran en su mayoría en Europa, y especialmente, en Francia.

La estrategia competitiva de Renault se basa en ofrecer coches con prestaciones acorde a la media del mercado a precios muy competitivos para toda su gama de productos. Centrándose así en el volumen de ventas. Aunque debido a los cambios en el sector, a principios de 2021 la firma anunció la estrategia de los próximos años, basada en los vehículos eléctricos y un cambio de estrategia de volumen a valor. Para ello se centrará en 3 fases, la primera hasta 2023, su objetivo es recuperar los márgenes y generar flujos de caja. La segunda, hasta 2025, renovará y añadirá atributos a las líneas existentes, aumentando así la rentabilidad de la marca. Finalmente, la tercera fase (de 2025 en adelante) buscará pivotar el modelo de negocio hacia la tecnología, la energía y la movilidad. Todo ello con el objetivo de que al menos 1/5 de sus ventas sean producidas por sus vehículos eléctricos. De acuerdo con esta organización orientada al valor, la empresa ya no medirá sus resultados en cuotas de mercado y ventas, sino en la rentabilidad, la generación de efectivo y la eficacia de las inversiones.

Gráfico 9. Evolución histórica cotización Renault últimos 5 años



Fuente: Euronext (2021)

El gráfico 9 muestra la evolución histórica de la cotización de Renault de los últimos 5 años. En este periodo el precio de la acción pasó de ser 80,63€ el 10 de mayo de 2016 a 34,47€ el 6 de mayo de 2021, como se puede ver en la gráfica. El acontecimiento principal de la caída de las acciones continuada a mediados de 2018 se debe a la caída de beneficios de su socio Nissan durante el ejercicio a la mitad, además también se vio afectada por la salida de la compañía del mercado iraní y la crisis de los motores diésel. Posteriormente la situación durante el 2019 estuvo agravada por una caída de los resultados durante ese año y una nota de prensa a finales de 2018 previendo estos hechos. La caída durante 2020 estuvo provocada por la pandemia del Covid-19.

Gráfico 10. Evolución histórica cotización Renault y CAC 40 últimos 5 años



Fuente: Euronext (2021)

Además, se puede observar que la empresa presenta una tendencia de crecimiento bastante pareja con el índice de referencia CAC 40, hasta mitades de 2018 donde comienza la bajada de resultados que afectaron a la compañía.

El capital social de Renault está representado por 295.722.284 acciones, con valor nominal de 3,81 euro cada una de ellas (Euronext, 2021) y una capitalización bursátil total de 10,34 mil millones de euros a 06/05/2021. El grupo ha repartido en los últimos tres años dividendos entre 1,1 y 3,55 euros. La rentabilidad del último dividendo pagado ronda los 5,98%.

2.5.- AstraZeneca

AstraZeneca es una empresa farmacéutica y biotecnológica multinacional con sede en Cambridge, Inglaterra. En cuanto a su gama de productos que incluyen curas para la mayoría de las enfermedades, se encuentran productos para oncología, cardiovasculares, enfermedades infecciosas, respiratorias y neurológicas, entre otras. Aunque actualmente son conocidos por desarrollar una de las vacunas frente al Covid-19. Es por esto que es de gran interés incluir dicha empresa en el estudio, por su potencial de crecimiento a corto y largo plazo por este avance. Así como unos buenos datos sectoriales durante el último ejercicio. La empresa cotiza en el *London Stock Exchange* y se encuentra en el índice de las 100 empresas más grandes de Reino Unido, el FTSE 100.

En cuanto a su fundación, en primer lugar la compañía Astra fue fundada en 1910 por 400 farmacéuticos y médicos en Suecia. Por otra parte, Zeneca fue fundada en 1993 a partir del *Imperial Chemical Industries* (Reino Unido) que dividió su negocio y se especializó principalmente en química agrícola y otras especialidades. Posteriormente, ambas empresas se fusionaron en 1999 para formar lo que hoy en día se conoce como AstraZeneca.

La empresa tuvo durante el pasado ejercicio de 2020 unos ingresos totales de 26.617 mil millones de euros con un aumento del 9,15 % con respecto al año anterior. Esto se debió principalmente a la producción y distribución masiva de vacunas contra el Covid-19.

La estrategia de AstraZeneca se centra en prestar soluciones farmacéuticas en 3 principales áreas con alto potencial de crecimiento y con escasa competencia: oncología, enfermedades cardiovasculares y del área respiratoria. Recientemente debido a las necesidades de la creación de la vacuna, se han especializado también en enfermedades infecciosas, la cual ocupa el principal segmento de actividad actualmente. La empresa centra sus esfuerzos en una alta inversión en I+D,

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

suponiendo el gasto en el anterior ejercicio de 7 mil millones de dólares, un 36% más que en 2019. Además, la empresa cuenta con una estrategia de expansión en China y otros mercados emergentes.

Gráfico 11. Evolución histórica cotización AstraZeneca últimos 5 años



Fuente: London Stock Exchange (2021)

El gráfico 11 muestra la evolución histórica de la cotización de AstraZeneca de los últimos 5 años. En este periodo el precio de la acción pasó de ser 4.502\$ el 10 de mayo de 2016 a 8.779\$ el 6 de mayo de 2021, como se puede ver en la gráfica. Como acontecimientos principales a destacar que han afectado positivamente en el precio de las acciones son, en primer lugar, la creación de una nueva empresa del grupo centrada en biotecnología valorada en 250 millones de dólares en febrero de 2018. Y en marzo de 2019 el anuncio de la colaboración Daiichi Sankyo Co en el desarrollo de un tratamiento experimental contra el cáncer de mama. Posteriormente, la fuerte bajada en 2020 por el Covid-19 seguidamente se ve rectificada por las altas expectativas del sector a un crecimiento en el corto-medio plazo. Finalmente, el crecimiento en el precio en febrero de 2021 se debe a la publicación de los resultados de la empresa durante el ejercicio de 2020.

Gráfico 12. Evolución histórica cotización AstraZeneca y FTSE 100 últimos 5 años



Fuente: London Stock Exchange (2021)

Además, se puede observar que la empresa presenta una tendencia de crecimiento bastante pareja con el índice de referencia FTSE 100, hasta mitades de 2018 donde se introducen los nuevos planes estratégicos y desarrollo de nuevos proyectos por parte de la empresa.

El capital social de AstraZeneca está representado por 1.356.766 acciones y una capitalización bursátil total de 114,76 mil millones de euros a 15/05/2021. El grupo ha repartido en los últimos tres años dividendos entre 215,2 y 218,7 dólares. La rentabilidad del último dividendo pagado ronda el 3,5%.

3.- Modelización Matemática de Subyacentes Cotizados

En ese apartado del TFG se definirán las bases teóricas y matemáticas las cuales se sustentarán los cálculos de la cartera a partir de la solución del Movimiento Browniano Geométrico. En este, se detallará en modelo determinista y estocástico, para en los próximos apartados realizar las predicciones de las cotizaciones. Finalmente, se obtendrá la solución del modelo, donde se aplicarán las integrales estocásticas de tipo Itô, además de la varianza y la media.

3.1. Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

El Movimiento Browniano consiste en un proceso estocástico de tipo gaussiano. Este argumenta los cambios temporales de una variable aleatoria, que toma valores continuos y tiene como variable el tiempo.

Se utilizará el proceso estocástico de Wiener para modelizar la incertidumbre asociada a un subyacente financiero. Dicho proceso tiene la expresión $\{W(t) : t \geq 0\}$ y es definido por las siguientes características:

- **W1:** Empieza en el origen con probabilidad 1.

$$P[W(0) = 0] = 1.$$

- **W2:** Tiene incrementos estacionarios¹.

$$W(t) - W(s) \stackrel{d}{=} W(t+h) - W(s+h), \quad \forall h: s, t, s+h, t+h \in [0, +\infty[$$

- **W3:** Tiene incrementos independientes:

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}).$$

Son variables aleatorias independientes, para todo

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n < +\infty, \quad n \geq 1.$$

- **W4:** Los incrementos son de tipo gaussiano con media 0 y varianza en proporción al incremento temporal.

$$W(t) - W(s) \sim N(0; \sigma^2(t-s)), \quad \sigma > 0.$$

¹ En W2 el símbolo $\stackrel{d}{=}$ significa que ambos lados de la igualdad son variables aleatorias con la misma distribución.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Si se considera $\sigma^2 = 1$, entonces $\{W(t): t \geq 0\}$ se denomina Movimiento Browniano (MB) y se denota por $\{B(t): t \geq 0\}$. Por lo tanto, se puede decir que:

$$\{W(t) \equiv B(t)\}.$$

Si se toma $\sigma^2 = 1$ y $s = 0$ en **W4** y aplicamos **W1**, se obtiene que:

$$W(t) \sim N(0; t) \quad (2)$$

Esto nos indica que en cada instante $t > 0$, el proceso estocástico de Wiener es una variable aleatoria siguiendo una distribución gaussiana o normal con media 0 y varianza t . Esto implica que la variabilidad se incrementa a medida que se aleje del origen.

Las trayectorias del proceso estocástico de Wiener son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto.

3.2.1. Propiedades estadísticas del proceso de Wiener

El proceso estocástico de Wiener posee las propiedades estadísticas mostradas a continuación:

- **Media:** $\mathbb{E}[W(t)] = 0$.
- **Varianza:** $\mathbb{V}[W(t)] = t$.
- **Covarianza:** $Cov[W(t), W(s)] = \min(s, t)$.

Las primeras dos propiedades se deducen de la cuarta definición del Movimiento Browniano (**W4**). A continuación, la propiedad de la covarianza se obtiene de la siguiente manera

Tomando como referencia la siguiente condición, $0 < s < t$, por lo que

$$Cov[W(t), W(s)] = \mathbb{E}[W(t)W(s)] - \mathbb{E}[W(t)]\mathbb{E}[W(s)].$$

Es necesario conocer técnicas para simular las trayectorias muestrales del Movimiento Browniano, la forma más sencilla es la siguiente:

$$W(t) \equiv B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z \quad Z \sim N(0; 1). \quad (3)$$

Esta igualdad en la distribución (d) se explica en la siguiente tabla:

Tabla 1. Igualdad en la distribución del Movimiento Browniano.

	$W(t) \equiv B(t)$	$\sqrt{t}Z, Z \sim N(0; 1)$
Distribución	Gaussiana	Gaussiana ²
Media	0 (W4)	$\mathbb{E}[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t}\mathbb{E}[Z] = \sqrt{t} \cdot 0 = 0$
Varianza	t (W4)	$\mathbb{V}[\sqrt{t}Z] = (\sqrt{t})^2\mathbb{V}[Z] = t \cdot 1 = t$

Fuente: Elaboración propia. Temario asignatura Análisis de Riesgos Financieros.

La relación (3) es un caso propio de la propiedad del Movimiento Browniano conocida como $\frac{1}{2}$ autosemejante, que se expresa como:

$$B(t \cdot s) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}B(s), \quad t > 0, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Si tomamos como valor $s = 1$ en (4) se tiene que:

$$B(s) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}B(1).$$

Si se recuerda que en la ecuación (2) se sabe que $B(1) \sim N(0; 1)$, donde se obtiene la expresión (3) si se hace $Z = B(1)$.

3.2. Modelo Log-Normal: Un modelo estocástico para subyacentes

En este apartado se formulará el modelo estocástico para la dinámica de un subyacente a partir del modelo determinista introducido anteriormente. Debido a que las acciones cotizan en un ambiente de incertidumbre, en este caso, la bolsa, y los factores que establecen la tasa de crecimiento relativo μ son dependientes de una cantidad de elementos desconocidos e independientes. Es por esto, al utilizar el Teorema Central del Límite de Estadística, se puede modelizar μ a partir de un valor nominal determinístico más una perturbación que sigue una distribución normal. Debido a esto se toma:

$$\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu + \sigma W'(t), \quad \sigma > 0. \quad (5)$$

Siendo:

- μ = Valor nominal
- σ = Intensidad de la perturbación / volatilidad
- $W'(t)$ = Ruido

² La transformación lineal de una variable aleatoria gaussiana es una distribución de tipo gaussiana.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

La parte de la ecuación $\{W'(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico denominado Ruido Blanco (*white noise* en inglés), que se obtiene de considerar la derivada a partir del proceso estocástico de Wiener, siendo $\sigma > 0$ la intensidad de la perturbación alrededor del valor nominal.

A partir del modelo determinístico, se planteará el modelo estocástico que se utilizará posteriormente para describir la evolución a lo largo del tiempo del valor de un subyacente cotizado.

$$S'(t) = \mu S(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t) \quad \Longrightarrow \quad dS(t) = \mu S(t) dt,$$

A continuación, se sustituye la ecuación (5) en la anterior expresión y se obtiene lo siguiente:

$$dS(t) = (\mu + \sigma W'(t))S(t)dt,$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma W'(t)S(t)dt. \quad (6)$$

Teniendo en cuenta el concepto de diferencial en términos de la derivada

$$dW(t) = W'(t)dt$$

La ecuación (6) puede escribirse como:

$$\boxed{\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(0) = S_0. \end{cases}} \quad (7)$$

Como se puede observar, la condición inicial se ha añadido en la última expresión. Por tanto, a raíz de la ecuación (7), se ha obtenido el denominado modelo Log-Normal para subyacentes cotizados, siendo ésta una Ecuación Diferencial Estocástica.

3.3. El Lema de Itô

El instrumento más importante del cálculo estocástico para las matemáticas y el análisis financiero es el Lema de Itô. Consiste en una regla para diferenciar procesos estocásticos a partir de una ecuación diferencial estocástica (EDE) de la siguiente forma:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Se puede afirmar que el Lema de Itô es una versión estocástica de la llamada “regla de la cadena” para diferenciar o derivar funciones.

3.3.1. Hipótesis del lema de Itô

- Partiendo de la función $f(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$, es decir, a partir de f se pueden obtener las siguientes derivadas parciales:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

- $\chi = \{X(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico de tipo Itô que cumple la EDE reflejada en la expresión (8), indicada anteriormente.
- Se formula el proceso estocástico $Y(t) = \{Y(t) : t \geq 0\}$ de la siguiente manera:

$$Y(t) = f(X(t), t).$$

Después de exponer las hipótesis del lema Itô, se puede concluir que el proceso estocástico $Y(t)$ cumple la siguiente EDE de tipo Itô, se refleja de la siguiente manera:

$$dY(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + \mu(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) + \frac{1}{2} \sigma^2(X(t), t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t) \right) dt \\ + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) dW(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

De una manera más breve, se puede expresar como:

$$dY = (f_t + \mu f_x + \frac{1}{2} f_{xx}) dt + \sigma f_x dW.$$

3.4. Solución del modelo Log-Normal aplicando el Movimiento Browniano Geométrico (MBG).

El objetivo de este apartado es obtener la solución de la EDE (7) que se ha indicado anteriormente, en otras palabras, el modelo Log-Normal. Se indica de nuevo dicha ecuación a continuación:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \\ S(0) = S_0. \end{cases} \quad (9)$$

Para ello se aplicará el Lema de Itô. Hay que aplicarlo a una función determinística e identificar los datos de la EDE anterior con los del patrón de la EDE general del Lema de Itô:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t).$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

De esta manera:

$$X(t) = S(t) \equiv x = S,$$

$$\mu(X(t) = \mu(S(t), t) = \mu S(t) \equiv \mu(x, t) = \mu S,$$

$$\sigma(X(t), t) = \sigma(S(t), t) = \sigma S(t) \equiv \sigma(x, t) = \sigma S.$$

Se toma $f(x, t) = \ln(x)$ que cumple las condiciones que se indican seguidamente y todas son funciones continuas:

$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{x}, \\ f_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \\ f_t = 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, empleando el Lema de Itô se concluye que el proceso estocástico

$$Y(t) = \ln(S(t)).$$

Cumple la siguiente EDE de tipo Itô:

$$d(\ln(S(t))) = \left(0 + \mu S(t) \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \cdot \left(\frac{-1}{(S(t))^2} \right) \right) dt + \sigma S(t) \cdot \frac{1}{S(t)} dW(t)$$

que se puede simplificar como:

$$d(\ln(S(t))) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t).$$

Como último paso, se integrará para obtener la solución del Movimiento Browniano. Se integra desde la condición inicial hasta un momento temporal final (T) donde se produce la inversión en la acción:

$$\int_0^T d(\ln(S(t))) = \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^T \sigma dW(t),$$

$$\ln(S(T)) - \ln(S(0)) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma(W(T) - W(0)),$$

$$\ln\left(\frac{S(T)}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W(T),$$

$$\frac{S(T)}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) T + \sigma W(T)}.$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Por tanto, la solución del MBG se puede reducir a la siguiente expresión:

$$S(T) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)}. \quad (10)$$

3.5. Funciones Estadísticas y Simulación del Movimiento Browniano Geométrico

Con la expresión anterior (10) se obtendrá una solución para conocer la evolución de variables aleatorias (por conveniencia se sustituirá T por t):

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}. \quad (11)$$

También, se debe considerar que $S(t) \geq 0$, lo que indica que todas sus realizaciones serán números positivos ($S(t, \omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$). Asimismo, a través de las simulaciones del proceso de Wiener estándar ($\sigma^2 = 1$) entonces por la ecuación (3) se entiende que:

$$W(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1).$$

Además, es sencillo obtener simulaciones del Movimiento Browniano Geométrico a partir de:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (12)$$

A partir de la anterior ecuación procederemos a calcular las funciones de la media y desviación típica, que componen el comportamiento medio y la volatilidad del MBG. En el siguiente apartado se estudiará la composición de dichos momentos estadísticos.

3.5.1. Función Media del Movimiento Browniano Geométrico

Se describe de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}\left[S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}\right] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{t}Z}]$$

Se procede con el cálculo de la media sustituyendo $\lambda = \sigma\sqrt{t}$ para obtener los cálculos de una manera más sencilla

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\frac{\lambda^2}{2}},$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, Z \sim N(0; 1). \quad (13)$$

Tomando como referencia la solución obtenida en la ecuación (12), se simplifica la expresión inicial para lograr la función media del MBG:

$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{(\sigma\sqrt{t})^2}{2}} = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = S_0 e^{\mu t}.$$

$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{\mu t}.$$

(14)

Al llegar a esta solución, se puede observar que la resolución del modelo LogNormal para subyacentes cotizados se comporta en media como el modelo determinístico descrito en la ecuación (1).

3.5.2. Función Varianza del Movimiento Browniano Geométrico

Se describe de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}[S(t)] = \mathbb{E}[(S(t))^2] - (\mathbb{E}[S(t)])^2.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (13), se expresa:

$$\mathbb{E}[(S(t))^2] = \mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}\right)^2\right] = (S_0)^2 e^{(2\mu - \sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{2\sigma\sqrt{t}Z}].$$

Se calcula la siguiente esperanza matemática utilizando la ecuación (12) descrita anteriormente, con la sustitución $\lambda = 2\sigma\sqrt{t}$:

$$\mathbb{E}[(S(t))^2] = (S_0)^2 e^{(2\mu - \sigma^2)t} e^{2\sigma^2 t} = (S_0)^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t}. \quad (15)$$

Para finalizar, se obtiene la varianza sustituyendo las ecuaciones (13) y (15) en la expresión (14):

$$\mathbb{V}[S(t)] = (S_0)^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t} - S_0^2 e^{2\mu t} = (S_0)^2 e^{(2\mu - \sigma^2)t} - (S_0)^2 e^{2\mu t},$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

$$\mathbb{V}[S(t)] = (S_0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) > 0. \quad (16)$$

3.6.- Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$

Después de obtener la solución del Movimiento Browniano Geométrico, es decir, la función de la media y la varianza. Por ello, a partir de la cotización histórica de los activos (serie temporal) podemos realizar una estimación de los parámetros μ y σ .

Para conseguir esto, se utilizarán las siguientes técnicas estadísticas:

- Método de Momentos Estadísticos.
- Método de Máxima Verosimilitud.
- Método de Momentos No Paramétrico.

Es adecuado utilizar al menos dos de los anteriores métodos para comprobar que las estimaciones de los parámetros con los diferentes métodos son bastante similares. Con lo que se podría afirmar que se trata de una estimación robusta. Para validar los parámetros, se aplicarán las medidas de “Error Cuadrático Medio” (ECM) y “Error Porcentual Absoluto Medio” (MAPE).

Por lo que se refiere a este Trabajo Final de Grado, se utilizarán los tres métodos para obtener los parámetros. Por otra parte, se realizarán cambios en las siguientes notaciones para los posteriores cálculos:

$$\mu \iff \hat{\mu} \quad \sigma \iff \hat{\sigma}$$

μ y σ se utilizarán para nombrar la media y la varianza. Mientras que, $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ denotarán las estimaciones de los parámetros.

3.6.1 Método de Momentos Estadísticos (MME)

Con este método se pretende encontrar aquellos primeros momentos estadísticos como la varianza que sean iguales tanto en la muestra como en la población. Se parte del Movimiento Browniano Geométrico, expresión 10:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}.$$

$$\frac{S(t)}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}.$$

Posteriormente, se toman logaritmos neperianos:

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \ln(S(t)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t; \sigma^2 t\right) \quad (17)$$

Una vez ya se conocen las cotizaciones de los activos, evaluamos la expresión anterior en los instantes temporales t_i y t_{i+1} :

$$t_{i+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_{i+1} + \sigma W(t_{i+1}),$$

$$t_i \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(S(t_i)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i + \sigma W(t_i).$$

Sustrayendo estas dos expresiones quedaría:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) &= \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)) = \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(W(t_{i+1}) - W(t_i)). \end{aligned} \quad (18)$$

Se tiene en cuenta que:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad \Longleftrightarrow \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t,$$

$$W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0; \Delta t),$$

Se puede deducir de la ecuación (18) lo siguiente:

$$U_i = \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t; \sigma^2\Delta t\right), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (19)$$

Esto es:

$$\mathbb{E}[U_i] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \quad \mathbb{V}[U_i] = \sigma^2\Delta t, \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (20)$$

Se deberá cumplir la siguiente condición si el modelo Log-Normal que se va a desarrollar es correcto, a partir de los valores de cotización que proporciona la muestra:

$$S(t_i) \approx S_i, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (21)$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

En definitiva, a partir de la expresión (19) se sabe la distribución del incremento del logaritmo del valor teórico de la cotización de la acción, que viene explicado a partir del modelo Log-Normal. Por tanto, de la siguiente diferencia:

$$\ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)). \quad (22)$$

El resultado de la anterior expresión, según (21), debe ser similar al incremento del logaritmo de las cotizaciones:

$$\ln(S_{i+1}) - \ln(S_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (23)$$

A partir del MME se pretende establecer una igualdad entre los primeros momentos estadísticos poblacionales a los momentos estadísticos muestrales correspondientes, para así elaborar un sistema de ecuaciones que permita realizar una estimación de los parámetros del modelo. Para determinar los parámetros, se aplicará el MME para la media y la varianza. Por ello se igualarán de la información de la muestra dada en (23) a los valores teóricos de (22).

Paso 1: Tomando la muestra o histórico de $N+1$ cotizaciones S_i , se componen los N valores facilitados en (23):

$$u_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (24)$$

Paso 2: Se calcula la media y quasi-varianza muestrales de los valores u_i , previamente calculados en el anterior paso:

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_i, \quad s = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (u_i - \bar{u})^2. \quad (25)$$

Paso 3: Se iguala la media y la varianza que se definieron anteriormente en las ecuaciones (20) y (25):

$$\begin{cases} \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t = \bar{u} \\ \sigma^2\Delta t = s^2 \end{cases} \quad (26)$$

Paso 4: Por último, se resuelve el sistema de ecuaciones anterior, se obtienen los valores de los parámetros $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ a partir de la resolución del sistema de ecuaciones anterior.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

$$\hat{\mu}_{MME} = \frac{\bar{u} + \frac{s^2}{2}}{\Delta t}, \quad \hat{\sigma}_{MME} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (27)$$

3.6.2. Método de Máxima Verosimilitud (MMV)

El Método de Máxima Verosimilitud consiste en obtener los valores de los parámetros μ y σ que sean más verosímiles o compatibles a partir de la muestra de valores del subyacente. Por ello se establece la siguiente función:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma).$$

La función consta de dos variables (μ y σ), dónde a partir de técnicas de optimización se busca obtener su máximo, pretendiendo que este sea global.

Si una muestra de cotizaciones $\{S_i: 0 \leq i \leq N\}$ procedente de una población la cual se describe a partir de una variable aleatoria continua X , la cual su función de densidad de probabilidad (f.d.p.) $f(s; \theta^*)$ y es $\theta^* \in \mathbb{R}$ el vector de parámetros cuya variable aleatoria X depende. Por tanto, la probabilidad de que suceda la muestra (S_0, S_1, \dots, S_N) para un determinado valor del vector de parámetros $\theta^* = (\mu, \sigma)$ se describe por la función de densidad de probabilidad conjunta siguiente:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) = f(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma). \quad (28)$$

En el MMV la muestra ya es conocida y los parámetros μ y σ son valores desconocidos que se pretenden estimar. Es por esto que se asumirá que los activos subyacentes cotizados siguen el modelo Log-Normal. De esta manera se puede obtener la información a partir de la ecuación anterior.

$$\left\{ \begin{array}{l} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ S(0) = S_0. \end{array} \right. \quad (29)$$

El proceso estocástico solución, $S(t)$ de la anterior EDE de tipo Itô, es markoviano, en otras palabras, en el caso de una partición temporal $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_N\}$ se cumple:

$$\mathbb{P}[S(t_{i+1}) = S_{i+1} | S(t_0) = S_0, S(t_1) = S_1, \dots, S(t_i) = S_i] = \mathbb{P}[S(t_{i+1}) = S_{i+1} | S(t_i) = S_i],$$

$$0 \leq i \leq N - 1.$$

Se puede reescribir en términos de f.d.p.:

$$f(S_{i+1} | S_0, S_1, \dots, S_i) = f(S_{i+1} | S_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (30)$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Obtenemos la siguiente función de verosimilitud utilizando la propiedad “en cadena” de las probabilidades condicionadas, que se expresa en términos de fdp:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) = f(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma)$$

$$= f(S_0) f(S_1|S_0) f(S_2|S_0, S_1) \dots f(S_{i+1}|S_0, S_1, \dots, S_i) \dots f(S_N|S_0, S_1, \dots, S_{N-1}).$$

Se determina que $f(S_0) = 1$ ya que la cotización inicial es determinista (conocida):

$$f(S_0)f(S_1|S_0)f(S_2|S_1) \dots f(S_{i+1}|S_i) \dots f(S_N|S_{N-1}) =$$

$$= \prod_{i=0}^{N-1} f(S_{i+1}|S_i). \quad (31)$$

En este punto se aplicará el esquema numérico de Euler-Maruyama para aproximar la solución de la EDE que define el modelo Log-Normal. Donde se asignará una distribución a la FDP condicional. Por ello se considera que:

$$t_{i+1} = (i + 1)\Delta t, \quad 0 \leq i \leq N - 1.$$

Se aproxima a cada punto el valor del modelo Log-Normal por la siguiente expresión:

$$S(t_{i+1}) \approx S^{(i+1)}. \quad (32)$$

Por tanto, el esquema de Euler-Maruyama se expresa como:

$$\begin{cases} S^{(i+1)} = S^{(i)} + \mu S^{(i)} \Delta t + \sigma S^{(i)} \{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}, & i = 0, 1, \dots, N - 1 \\ S^{(0)} = S_0. \end{cases} \quad (33)$$

Como vista anteriormente, la 4ª propiedad del Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener (se definió como W4) se determina que:

$$W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0; t_{i+1} - t_i = \Delta t),$$

$$W(t_{i+1}) - W(t_i) = \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad Z_i \sim N(0; 1), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (34)$$

Se obtiene la siguiente expresión sustituyendo (34) en la ecuación (33):

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} + \mu S^{(i)} \Delta t + \sigma S^{(i)} \sqrt{\Delta t} Z_i \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Esta ecuación permite deducir la posterior distribución condicional:

$$S^{(i+1)}|S^{(i)} \sim N\left((1 + \mu\Delta t)S^{(i)}; \sigma^2(S^{(i)})^2 \cdot \Delta t\right), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Sabiendo que $S_i \approx S^{(i)}$ por tanto:

$$f(S_{(i+1)}|S_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad (35)$$

donde:

$$\begin{cases} \mu_i = (1 + \mu\Delta t)S_i, \\ \sigma_i = \sigma S_i \sqrt{\Delta t}, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Procedemos a obtener la función de verosimilitud que se desea maximizar, para ello se sustituye de la ecuación anterior en la expresión (31) quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma) &= L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu, \sigma) = \prod_{i=0}^{N-1} f(S_{i+1}|S_i) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \\ L(\mu, \sigma) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \\ L(\mu, \sigma) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}-(1+\mu\Delta t)S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Se maximizará el logaritmo neperiano en toda la función con el fin de simplificar las operaciones. Así pues, se trabajará con la función de log-verosimilitud:

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \tilde{L}(\mu, \sigma) = \max \ln(L(\mu, \sigma)),$$

donde:

$$\ln(L(\mu, \sigma)) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\Delta t) - N \ln(\sigma) - \sum_{i=0}^{N-1} \ln(S_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - (1 + \mu\Delta t)S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}}\right)^2$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Ya que $\max(f(x)) \equiv \min(-f(x))$, el programa de maximización de antes es equivalente a:

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \tilde{L}(\mu, \sigma) = \min_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \tilde{L}(\mu, \sigma),$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\mu, \sigma) = & \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{i=0}^{N-1} \ln(S_i) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - (1 + \mu\Delta t)S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}} \right)^2. \end{aligned}$$

Por último, empleando técnicas de optimización para funciones de dos variables, se demuestran los estimadores de máxima verosimilitud del modelo Log-Normal (los parámetros μ y σ):

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 \right), \quad \hat{\sigma}_{MMV} = \sqrt{\frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \hat{\mu}_{MMV} \Delta t \right)^2}. \quad (36)$$

3.6.3. Método de Momentos No Paramétrico (MMNP)

A partir del modelo Log-Normal que cumple la siguiente EDE

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= f(X(t), t; \vec{\theta})dt + g(X(t), t; \vec{\theta})dW(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

donde:

$$\begin{aligned} X(t) &= S(t), \quad X_0 = S_0, \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma), \\ f(X(t), t) &= f(S(t), t) = \mu S(t), \quad g(X(t), t) = g(S(t), t) \sigma S(t). \end{aligned} \quad (38)$$

A partir del proceso de discretización de Euler-Maruyama, (37) se puede aproximar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + f(X_i, t_i; \vec{\theta})\Delta t + g(X_i, t_i; \vec{\theta})\sqrt{\Delta t}Z_i, & Z_i \sim N(0, 1), \quad 0 \leq i \leq N, \\ X_0 = X_0. \end{cases}$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

El Método de Momentos No Paramétrico se basa en aplicar la siguiente propiedad de los momentos:

$$\mathbb{E} \left[\begin{array}{l} \frac{X_{i+1}-X_i}{\Delta t} - f(X_i, t_i; \vec{\theta}) \\ \frac{(X_{i+1}-X_i)^2}{\Delta t} - g(X_i, t_i; \vec{\theta}) \end{array} \right] = \mathcal{O}(\Delta t), \quad \left. \vphantom{\mathbb{E}} \right\}$$

Expresado de otra manera:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (X_{i+1}-X_i)}{\Delta t} = \sum_{i=0}^{N-1} f(X_i, t_i; \vec{\theta}), \\ \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (X_{i+1}-X_i)^2}{\Delta t} = \sum_{i=0}^{N-1} g(X_i, t_i; \vec{\theta}). \end{array} \right\} \quad (39)$$

Usando la notación para el subyacente, introducida en (38), El sistema de ecuaciones algebraicas (38) es la siguiente, empleando la notación para el subyacente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1}-S_i)}{\Delta t} = \mu \sum_{i=0}^{N-1} S_i, \\ \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1}-S_i)^2}{\Delta t} = \sigma \sum_{i=0}^{N-1} S_i, \end{array} \right\}$$

A partir de la solución de la anterior ecuación se obtienen las estimaciones de los parámetros del Modelo Log-Normal:

$$\boxed{\hat{\mu}_{\text{MMNP}} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} S_i}, \quad \hat{\sigma}_{\text{MMNP}} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} S_i^2}.} \quad (40)$$

4.- Aplicación del modelo para activos cotizados

En esta sección del trabajo, se aplicará el modelo Log-Normal a las 5 empresas descritas anteriormente: Apple, AstraZeneca, Renault, American Airlines y BBVA. Para ello, se tomarán como referencia 30 días de cotización (Anexos 1-5) y a partir de esto se obtendrá la media y la varianza que serán de vital importancia para realizar predicciones a 5 días. Se emplearán los 3 métodos explicados para estimar los parámetros: Método de Momentos Estadísticos, Método de Máxima Verosimilitud y Método de Momentos No Paramétrico. De esta manera se garantizará robustez al modelo y se reducirá el error a través de la validación de los parámetros. Para todo el proceso se empleará el programa Mathematica. Los datos de las cotizaciones se encuentran en los Anexos 1-10.

4.1.- Obtención de la Matriz de Varianza-Covarianza

El primer paso que hay que comprobar para aplicar el modelo independientemente a cada uno de los activos, es que los log-retornos de las cotizaciones no estén correlacionados. Por ello, se obtienen los logaritmos de cada precio a cierre de los activos cotizados y a partir de esto obtenemos la matriz de varianza-covarianza. En el que se reflejan las correlaciones entre los activos en los elementos no diagonales de la matriz y las varianzas de cada activo en los elementos diagonales de la misma.

Como se puede observar, las correlaciones entre los activos son muy pequeñas, así como las varianzas, de esta manera, las correlaciones entre los activos se pueden obviar. Por tanto, se puede aplicar el modelo Log-Normal independientemente y obtener predicciones para todos los activos seleccionados. En otras palabras, se aplica el modelo a cada uno de los activos en lugar de un modelo para todos ellos, lo que sería mucho más complejo y con mayor cantidad de parámetros. Esto es gracias a realizar el estudio con activos de distintas bolsas y sectores de actividad, por tanto, con alto grado de independencia entre ellos.

Gráfico 13. Matriz de Varianza-Covarianza.

$$\begin{pmatrix} 0.00041806 & 0.0000403203 & 0.000119664 & -0.0000955669 & 0.0000109631 \\ 0.0000403203 & 0.00016636 & -0.000137609 & -0.0000941215 & -0.0000432322 \\ 0.000119664 & -0.000137609 & 0.000654804 & 0.0000662402 & 0.000104643 \\ -0.0000955669 & -0.0000941215 & 0.0000662402 & 0.0011239 & 0.000163616 \\ 0.0000109631 & -0.0000432322 & 0.000104643 & 0.000163616 & 0.000709738 \end{pmatrix}$$

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

4.2.- Estimación de parámetros

A partir del modelo matemático anterior se han fundamentado las bases para obtener las estimaciones de los parámetros media y varianza. Esta sección se enfocará en la estimación de los parámetros para cada activo seleccionado para el trabajo. Para ello se han cogido los precios a cierre desde el 7 de enero 2021 al 19 de febrero 2021, es decir, un total de 30 cotizaciones. Hay que tener en cuenta las siguientes notaciones para los próximos apartados, siendo t= 1 la primera cotización o el primer día y t= 30 el último.

4.2.1.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de Apple

Como se ha mencionado anteriormente, se obtienen las 30 cotizaciones de Apple en los días especificados. La tabla con los valores históricos a precio de cierre se puede encontrar en el Anexo 1. Cabe destacar que cada intervalo de tiempo entre las cotizaciones es de un día, por tanto, $\Delta t = 1$.

A raíz de estos datos se obtienen las diferencias de los logaritmos de las cotizaciones, con el uso del programa Mathematica. Posteriormente, se calculan los parámetros para los siguientes métodos definidos en el capítulo 3: Método de Momentos Estadísticos, Método de Máxima Verosimilitud y Método de Momentos No Paramétrico. Así pues, los parámetros de tendencia ($\hat{\mu}$) y volatilidad ($\hat{\sigma}$) obtenidos a partir de cada método para Apple son los siguientes:

Tabla 2. Estimación parámetros de Apple.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
Tendencia	0,000570728	0,000544776	0,000363437
Volatilidad	0,0204465	0,0197482	0,0200218

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Como se puede observar, los resultados que ofrecen los 3 modelos son bastante similares, lo que indica robustez en la estimación de los parámetros. Esto quiere decir, que independientemente del método que se utilice, los valores de las predicciones que se calcularán en la próxima sección no presentarán diferencias significativas.

Además, la tendencia para los 3 métodos toma valores positivos, por tanto, será creciente. Lo que quiere decir que desde el primer valor ($t=1$) se van incrementando los valores a lo largo de la muestra en la cantidad de ese parámetro. Por otra parte, el parámetro de volatilidad toma valores reducidos, indicando una alta estabilidad de las cotizaciones para Apple.

4.2.2.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de AstraZeneca

Realizando el mismo proceso que el anterior activo, a partir de las cotizaciones de los últimos 30 días (especificadas en el Anexo 2) se obtienen los logaritmos de las cotizaciones. Aplicando las ecuaciones de las soluciones de los 3 métodos antes mencionadas, se obtienen los parámetros de tendencia ($\hat{\mu}$) y volatilidad ($\hat{\sigma}$) para AstraZeneca:

Tabla 3. Estimación parámetros de AstraZeneca.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
Tendencia	0,000310087	0,000297034	0,000224767
Volatilidad	0,0128981	0,0124674	0,0127217

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Como se puede observar, tampoco surgen diferencias significativas entre los 3 modelos de estimación de parámetros. Lo que indica que la predicción de los valores para este activo va a ser bastante robusta y con un error bajo, que posteriormente se evaluará. Además, el parámetro de la volatilidad indica una estabilidad adecuada (la más baja entre los 5 activos) para el histórico de las cotizaciones tomadas como muestra y el parámetro de la tendencia muestra una evolución creciente del activo, pero a su vez, la menor entre los activos.

4.2.3.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de Renault

Mediante el histórico de cotizaciones para Renault mostrado en el Anexo 3 se sacan los logaritmos de las cotizaciones mediante el programa Mathematica. Aplicando las ecuaciones de las soluciones del Método de Momentos Estadísticos, Método de Máxima Verosimilitud y Método de Momentos No paramétrico, se obtienen los parámetros de tendencia ($\hat{\mu}$) y volatilidad ($\hat{\sigma}$) para Renault que posteriormente servirán para realizar las predicciones.

Tabla 4. Estimación parámetros de Renault.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
Tendencia	0,00361747	0,00349216	0,00339765
Volatilidad	0,0255891	0,0247998	0,0253228

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

De nuevo, los parámetros toman unos valores bastante parecidos entre sí, indicando robustez o fiabilidad en la estimación. Como los anteriores activos, presenta una tendencia positiva, lo que indica un crecimiento a lo largo del periodo de la muestra (el mayor entre todos los activos) y de las predicciones que se obtendrán. La volatilidad del activo es bastante reducida, indicando así una alta estabilidad.

4.2.4.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de American Airlines

A partir del histórico de cotizaciones de American Airlines de los últimos 30 días, los comprendidos entre 7 de enero 2021 y 19 de febrero 2021, donde se muestran en el anexo 4. Aplicando las ecuaciones de las soluciones de los 3 métodos antes mencionadas, se obtienen los parámetros de tendencia ($\hat{\mu}$) y volatilidad ($\hat{\sigma}$) para American Airlines:

Tabla 5. Estimación parámetros de American Airlines.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
Tendencia	0,0023104	0,00222214	0,00178177
Volatilidad	0,0335247	0,0329283	0,0337685

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Al realizar una estimación con 3 métodos, aporta mayor seguridad al modelo que posteriormente se validará. Además de no tener diferencias significativas entre los 3, lo que aporta una buena fiabilidad. Presenta una tendencia creciente y una baja volatilidad, aunque es la más alta entre todos los activos.

4.2.5.- Estimación de los valores de los parámetros del modelo para las cotizaciones de BBVA

Por último, para BBVA, se sigue el mismo proceso que en los anteriores activos. Partiendo de las cotizaciones de los últimos 30 días, mostradas en el anexo 5 se obtienen las diferencias de los logaritmos de las cotizaciones con el uso del programa Mathematica. Posteriormente, aplicando las ecuaciones de las soluciones del Método de Momentos Estadísticos, Método de Máxima Verosimilitud y Método de Momentos No paramétrico, se obtienen los parámetros de tendencia ($\hat{\mu}$) y volatilidad ($\hat{\sigma}$) para Renault que posteriormente servirán para realizar las predicciones.

Tabla 6. Estimación parámetros de BBVA.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
Tendencia	0,00256735	0,00247519	0,00227226
Volatilidad	0,0266409	0,0260515	0,0257399

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Nuevamente, el parámetro de tendencia muestra una evolución creciente y la volatilidad es reducida, ambos valores posicionándose en un punto intermedio con respecto a los otros activos. No se muestran diferencias significativas, por lo que se puede concluir que el modelo que se va a tomar posteriormente va a tener alto grado de robustez.

4.3.- Validación del modelo

Después de obtener los parámetros de tendencia y volatilidad, se debe proceder a validar los modelos empleados. De esta manera, se asegura tener unos valores de para las predicciones que sean útiles. Para ello se empleará dos métodos de bondad del ajuste. El primero Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) y el Error Cuadrático Medio (ECM).

Las fórmulas que describen la bondad del ajuste son:

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \tilde{v}_i^{ex})^2} \quad (41)$$

$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|v_i - \tilde{v}_i^{ex}|}{v_i} \quad (42)$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Siendo:

v_i valor de la cotización en el instante de tiempo i .
 \tilde{v}_i^{ex} valor estimado de la media a partir del MBG en i .

Por tanto, para validar el modelo a partir del MAPE se tomará como referencia un valor adecuado si es menor o igual al 5%. Se trata de un primer filtro para evaluar la bondad del ajuste, por lo que se escogerá aquel método con menor error. Por el contrario, el ECM no tiene un valor estándar de referencia por lo que se considerará adecuado aquel método con menor valor. Para este estudio, como criterio común para todos los activos, se escogerá aquel método de estimación de parámetros con menor MAPE. Hay que tener en consideración ya que normalmente el método con menor MAPE también presentará el ECM más bajo, por tanto, se validaría mediante ambos modelos, pero puede darse el caso de que no sea así. Se empleará el programa Mathematica para obtener los resultados.

4.3.1.- Validación de los modelos de Apple

De acuerdo con la función de la media del Movimiento Browniano se trabajará con las log-cotizaciones para llevar a cabo la validación de los modelos. Por tanto:

$$\tilde{v}_i^{ex} = \mathbb{E}[\ln(S(t_i))] = \ln(S_0) + \left(\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right) i \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (43)$$

Por tanto, tomando en consideración en la expresión anterior los parámetros de tendencia y volatilidad son los obtenidos mediante los 3 métodos de estimación. Por tanto, a partir de las ecuaciones (41) y (42), se calcula el MAPE y ECM para todos los métodos. Se pueden comprobar los resultados en la siguiente tabla:

Tabla 7. Validación modelo de Apple.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
ECM	0,0315161	0,0315162	0,0316865
MAPE	0,515796%	0,51518%	0,515891%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Los 3 métodos presentan resultados bastante parecidos y aceptables ya que el MAPE se encuentra por debajo del 5%. Por lo que tomando como referencia el menor valor del MAPE para seleccionar el mejor método (como mencionado anteriormente), el más adecuado sería el método de Máxima Verosimilitud. En este caso no tendría el ECM más bajo ya que sería el de Momentos, pero no habría error en la validación y elección del método ya que los resultados son muy similares.

4.3.2.- Validación de los modelos de AstraZeneca

Del mismo modo que se ha descrito anteriormente, se procede a validar los métodos de obtención de parámetros para AstraZeneca. Entonces a partir de las ecuaciones (41) y (42), se obtienen los siguientes resultados para los dos métodos de bondad del ajuste:

Tabla 8. Validación modelo de AstraZeneca.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
ECM	0,0266709	0,0266801	0,0267643
MAPE	0,241032%	0,2407%	0,238906%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Los 3 métodos serían válidos desde el punto de vista del MAPE, y como se puede observar, el método de Momentos No Paramétrico presenta un error más bajo. Por el contrario, el método de Momentos nuevamente presenta un ECM menor, pero como se ha comentado, se tomará como referencia principalmente el MAPE y por tanto el método elegido será el MNP.

4.3.3.- Validación de los modelos de Renault

Nuevamente, mediante el mismo procedimiento se validan los métodos para Renault. Por tanto, los resultados presentados para este activo son:

Tabla 9. Validación modelo de Renault.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
ECM	0,0609785	0,0598618	0,0590558
MAPE	1,34619%	1,3165%	1,2999%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

En este caso, el MAPE de los 3 métodos es más elevado que los 2 activos anteriores, pero se sitúa por debajo del 5% especificado. El método elegido será el de Momentos No paramétricos ya que contiene el menor error según el MAPE y además el valor más bajo de ECM. Por lo que estaría validado teniendo en cuenta los 2 métodos de bondad del ajuste.

4.3.4.- Validación de los modelos de American Airlines

Para la validación del siguiente activo, se emplean de nuevo las ecuaciones 41 y 42 para obtener los resultados de ambos métodos, por tanto:

Tabla 10. Validación modelo de American Airlines.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
ECM	0,0482478	0,0479324	0,0470377
MAPE	1,46069%	1,45468%	1,43513%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Por lo referente a American Airlines, el método de Momentos, el MMV y el MNP presentan un MAPE adecuado. Tanto por medio del MAPE como del ECM, se puede observar que el método de Momentos No Paramétrico presenta el menor de los errores, por lo que sería el método seleccionado para estimar los parámetros de tendencia y volatilidad para las predicciones.

4.3.5.- Validación de los modelos de BBVA

Por último, para BBVA se empleará el mismo método que en los anteriores activos. Por tanto, el MAPE y el ECM para los 3 métodos de estimación de parámetros para este activo son:

Tabla 11. Validación modelo de BBVA.

	Momentos	Max. Verosim.	Mom. No Param.
ECM	0,060444	0,0594817	0,0574548
MAPE	2,85701%	2,79912%	2,68597%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Como se puede observar, el modelo estaría validado desde el punto de vista de los tres métodos. Aunque, de nuevo el método elegido es el de Momentos No Paramétrico ya que presenta el menor error según el MAPE. El MNP contiene tanto el ECM como el MAPE más bajo. Cabe añadir que los MAPE reflejados son los más altos de todos los activos del estudio, pero se sitúa por debajo del valor de referencia especificado (5%).

4.4.- Predicciones a cinco días de los activos

Tras haber validado los modelos para cada activo, se procede a realizar una predicción del precio de los mismos a cinco días. A priori, parece una estimación razonable, teniendo en cuenta el elevado número de datos obtenidos para la muestra (30 días). No obstante, en la última sección del trabajo se estudiarán los errores y si el modelo es adecuado para estimar en los 5 días posteriores. Se utilizarán las funciones de varianza y media del MBG, del cual se obtendrán los precios medios de las acciones teniendo en cuenta su variabilidad. Además, se establecerá un intervalo de confianza del 95%, por tanto, determinando con este nivel de seguridad los valores entre los que estará comprendido las cotizaciones reales en ese intervalo de tiempo.

Cabe añadir que se emplearán las Log-cotizaciones para construir el modelo, ya que de esta manera se cumplirán las propiedades del Movimiento Browniano Geométrico (definidas en el capítulo 3). Por tanto, los resultados que se obtendrán en Mathematica se corresponderán con las Log-predicciones. Se adjuntarán las tablas con los resultados de estos y posteriormente con las predicciones tomando los valores sin aplicar los Logaritmos, es decir aplicando la exponencial a las Log-predicciones obtenidas de Mathematica.

4.4.1.- Predicciones para Apple

Como se ha mencionado anteriormente, las funciones de la media y la varianza del MBG se utilizarán para la determinación de las predicciones de Apple en este caso. Los intervalos de

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

tiempo correspondientes a las predicciones que se van a realizar son $t=31$, $t=32$, $t=33$, $t=34$ y $t=35$, ya que $t=30$ se corresponde con el valor de la cotización del último día elegido para la muestra.

Además de las anteriores funciones, a partir del MBG, se deberá calcular las desviaciones típicas empleando la siguiente ecuación:

$$\sigma_i^{ex} = +\sqrt{V[S(t)]} = \sigma\sqrt{i\Delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (44)$$

La anterior expresión se emplea para obtener los intervalos de confianza (IC), reflejados como:

$$IC_{95\%} = \mathbb{E}[S(t)] \pm 1,96\sqrt{V[S(t)]}. \quad (45)$$

Como se ha visto en la sección anterior, el método elegido de obtención de parámetros para Apple es el Método de Máxima Verosimilitud, donde se utilizará la tendencia y volatilidad para determinar las predicciones a 5 días. Se recuerdan los siguientes parámetros:

$$\hat{\mu}_{MMV} = 0,000544776 \quad \hat{\sigma}_{MMV} = 0,0197482$$

Por esto, las predicciones para Apple en los próximos 5 días se reflejan en la siguiente tabla:

Tabla 12. Log-predicciones a 5 días para Apple.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	4,67304	4,91209	5,10488
S(32)	4,66908	4,91264	5,10834
S(33)	4,66518	4,91318	5,11174
S(34)	4,66132	4,91373	5,11509
S(35)	4,65751	4,91427	5,11839

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Tabla 13. Predicciones a 5 días para Apple.

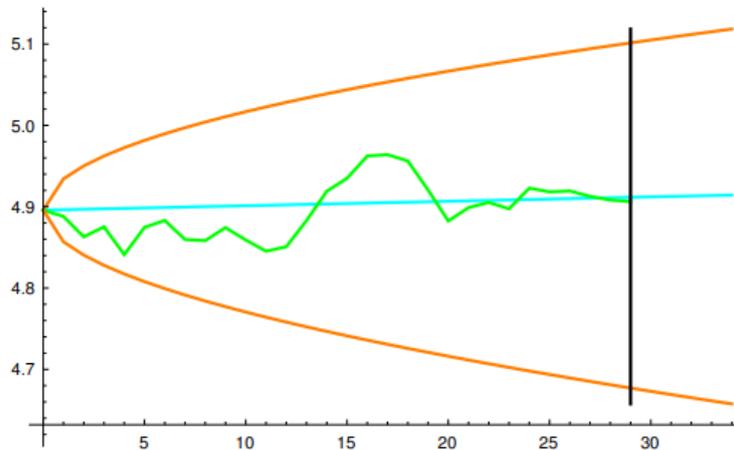
S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	107,0226	135,9232	164,8243
S(32)	106,5996	135,9980	165,3956
S(33)	106,1847	136,0714	165,9589
S(34)	105,7756	136,1463	166,5158
S(35)	105,3734	136,2198	167,0662

Fuente: Elaboración propia.

De una manera más clara, los anteriores datos se muestran en una gráfica:

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Gráfico 14. Representación gráfica de las Log-predicciones a 5 días para Apple.



Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

4.4.2.- Predicciones para AstraZeneca

Como mencionado anteriormente, el método elegido para la estimación de parámetros de AstraZeneca es el Método de Momentos No paramétrico. Con este, los parámetros obtenidos fueron los siguientes:

$$\hat{\mu}_{MNP} = 0,000224767 \quad \hat{\sigma}_{MNP} = 0,0127217$$

A partir de estos, se muestran las siguientes predicciones para AstraZeneca:

Tabla 14. Log-predicciones a 5 días para AstraZeneca.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	8,77191	8,91895	9,04711
S(32)	8,76951	8,91917	9,04933
S(33)	8,76714	8,91940	9,05151
S(34)	8,76480	8,91962	9,05365
S(35)	8,76250	8,91985	9,05577

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Tabla 15. Predicciones a 5 días para AstraZeneca.

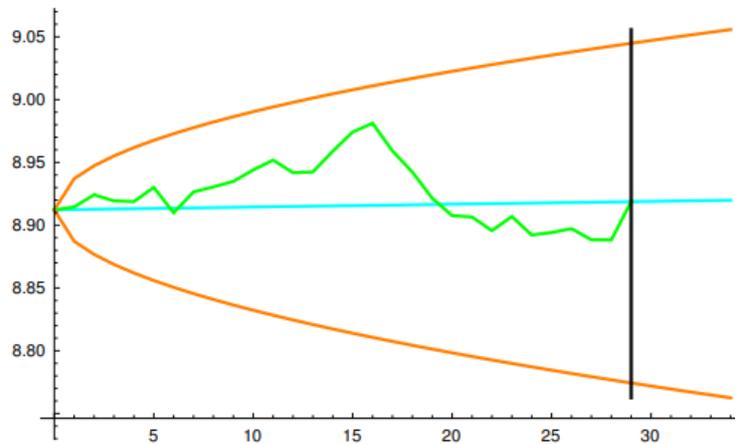
S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	6.450,4811	7.472,2393	8.493,9549
S(32)	6.435,0185	7.473,8833	8.512,8324
S(33)	6.419,7856	7.475,6025	8.531,4106
S(34)	6.404,7809	7.477,2473	8.549,6874
S(35)	6.390,0668	7.478,9673	8.567,8320

Fuente: Elaboración propia.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

De manera gráfica, los datos se representan de la siguiente manera:

Gráfico 15. Representación gráfica de las predicciones a 5 días para AstraZeneca.



Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

4.4.3.- Predicciones para Renault

Las predicciones para este activo se realizarán con el método de Momentos No paramétrico, ya que ha sido el método que otorgó un menor error en la estimación de los parámetros. Por tanto, se obtuvieron los siguientes parámetros:

$$\hat{\mu}_{MNP} = 0,00339765 \quad \hat{\sigma}_{MNP} = 0,0253228$$

A partir de estos, las predicciones para los próximos 5 días en Renault se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 16. Log-predicciones a 5 días para Renault.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	3,35971	3,67876	3,92026
S(32)	3,35681	3,68216	3,92724
S(33)	3,35397	3,68555	3,93414
S(34)	3,35119	3,68895	3,94098
S(35)	3,34846	3,69235	3,94776

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

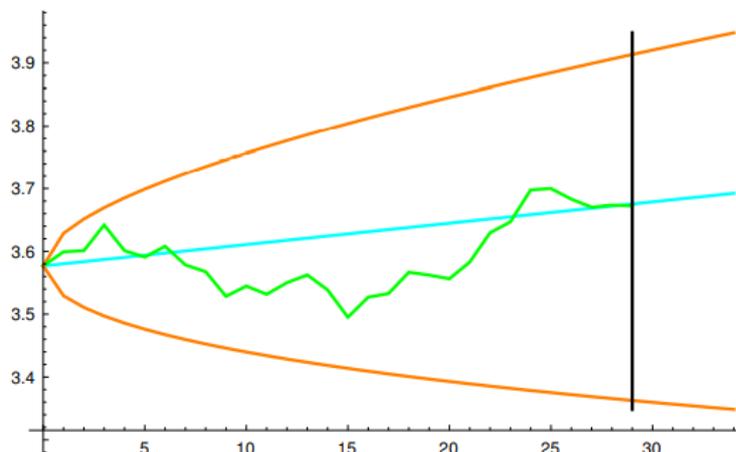
Tabla 17. Predicciones a 5 días para Renault.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	28,7808	39,5973	50,4136
S(32)	28,6975	39,7321	50,7667
S(33)	28,6161	39,8670	51,1182
S(34)	28,5367	40,0028	51,4690
S(35)	28,4589	40,1391	51,8192

Fuente: Elaboración propia.

Que, de manera gráfica se muestran:

Gráfico 16. Representación gráfica de las predicciones a 5 días para Renault.



Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

4.4.4.- Predicciones para American Airlines

Como se ha visto en el anterior apartado, el mejor método de estimación de parámetros para American Airlines es de nuevo el método de Momentos No Paramétrico. Se recuerdan los parámetros de tendencia y volatilidad obtenidos con el mismo:

$$\hat{\mu}_{MNP} = 0,00178177 \quad \hat{\sigma}_{MNP} = 0,0337685$$

Mediante los anteriores parámetros se obtienen mediante el programa Mathematica las predicciones para los próximos 5 días del activo:

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Tabla 18. Log-predicciones a 5 días para American Airlines.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	2,38024	2,83537	3,14700
S(32)	2,37227	2,83716	3,15327
S(33)	2,36437	2,83894	3,15946
S(34)	2,35651	2,84072	3,16556
S(35)	2,34870	2,84250	3,17159

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

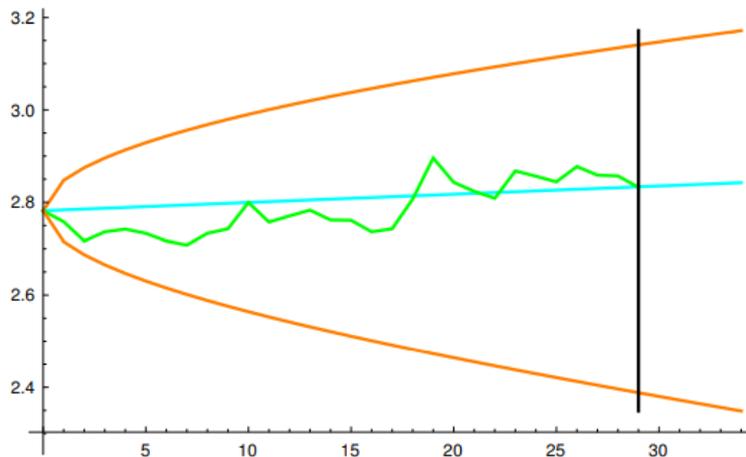
Tabla 19. Predicciones a 5 días para American Airlines.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	10,8075	17,0367	23,2662
S(32)	10,7217	17,0672	23,4125
S(33)	10,6373	17,0976	23,5579
S(34)	10,5541	17,1281	23,7020
S(35)	10,4719	17,1586	23,8454

Fuente: Elaboración propia.

De una manera gráfica más clara se puede observar:

Gráfico 17. Representación gráfica de las predicciones a 5 días para American Airlines.



Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

4.4.5.- Predicciones para BBVA

Nuevamente, mediante el método de Momentos No Paramétrico, el más adecuado para este activo, se obtienen los siguientes parámetros:

$$\hat{\mu}_{MNP} = 0,00227226 \quad \hat{\sigma}_{MNP} = 0,0257399$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

A partir de los cuales se obtienen las predicciones para los siguientes 5 días:

Tabla 20. Log-predicciones a 5 días para BBVA.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	1,34827	1,67360	1,91866
S(32)	1,34411	1,67587	1,92456
S(33)	1,34000	1,67814	1,93039
S(34)	1,33594	1,68041	1,93615
S(35)	1,33194	1,68269	1,94184

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

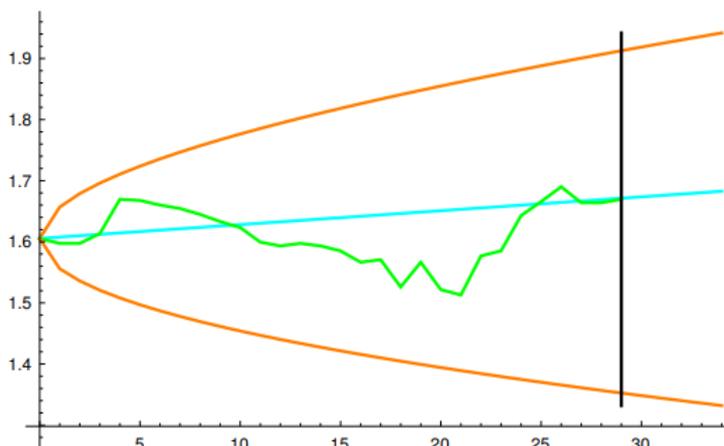
Tabla 21. Predicciones a 5 días para BBVA.

S(t)	IC 95% Inferior	Media	IC 95% Superior
S(31)	3,8508	5,3313	6,8118
S(32)	3,8348	5,3434	6,8521
S(33)	3,8190	5,3556	6,8922
S(34)	3,8036	5,3678	6,9320
S(35)	3,7884	5,3800	6,9716

Fuente: Elaboración propia.

De manera gráfica se reflejan los datos de la anterior tabla para una interpretación más clara:

Gráfico 18. Representación gráfica de las predicciones a 5 días para BBVA.



Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos de Mathematica.

5.- Construcción de una cartera de inversión

El objetivo principal de toda cartera de inversión es maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo de la inversión que se va a llevar a cabo. Por tanto, es importante definir las bases teóricas acerca de estos conceptos, así como el procedimiento que se llevará a cabo para la construcción de la misma.

Una cartera de inversión se basa en el principio de la diversificación, es decir invertir en activos diferentes entre sí con el objetivo de reducir el riesgo. Este dependerá de lo correlacionados que estén los activos, el riesgo de mercado y el riesgo propio de las empresas, entre otros. Por tanto, este estará influenciado por los pesos que sean asignados a cada activo de la cartera.

5.1.1.- Conceptos básicos

Como punto inicial de este apartado, se parte de la base de que la cartera financiera está compuesta por n activos, siendo el vector de activos en la cartera $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, y θ_i $1 \leq i \leq n$ el número de unidades del activo i en la cartera. Los valores para θ_i que se toman son:

$$\begin{cases} \theta_i < 0 & \Leftrightarrow & \text{Posición corta del activo } i \\ \theta_i > 0 & \Leftrightarrow & \text{Posición larga del activo } i \end{cases}$$

Esto quiere decir que en una posición larga, el inversor está en posesión del activo en concreto con la esperanza de que este aumente de valor en el futuro. Por el contrario, una posición corta o *short selling* es una práctica comúnmente utilizada por los fondos de cobertura o *Hedge Funds* en los que el inversor no es poseedor del activo y se espera que este disminuya de valor a lo largo del tiempo. Esto es posible ya que se presta el activo de otra institución o inversor para primero venderlo y posteriormente comprarlo en el futuro.

En el estudio de este proyecto, se construirá una *cartera pura en riesgo*, es decir, formada únicamente por activos de renta variable o que cotizan en bolsa, o en otras palabras, activos con riesgo.

Por medio de vectores se definirán los pesos de cada activo en la cartera, a través de porcentajes. Por tanto, la cuantía de la inversión no será relevante para el estudio, simplemente se calcula la parte proporcional de cada peso a la inversión total para asignarlo a los diferentes activos. De esta manera, la notación ω_i representa el peso del activo i en la composición total de la cartera.

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

El rendimiento esperado de la cartera es el resultado de los rendimientos individuales de cada activo ponderados a su peso asignado en la misma. Se tiene como supuesto para el cálculo que no se reparten dividendos en las empresas.

$$\mu = \mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}[R_i] = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i.$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Siendo R_i la rentabilidad esperada del activo i y una variable aleatoria. Por tanto, se debe introducir el siguiente concepto: el riesgo de una cartera se define como la varianza del rendimiento esperado de la misma y se establece como:

$$\sigma^2 = \mathbb{V}[R] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \text{Cov}[R_i, R_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

La notación ρ_{ij} representa el coeficiente de correlación entre los activos i y j siendo $1 \leq i, j \leq n$.

El riesgo de los activos se divide en dos tipos: el riesgo sistemático y el riesgo no sistemático. Ambos presentan una gran importancia en la construcción de la cartera ya que pueden impactar en el precio de los activos. En primer lugar, el riesgo sistemático se ve afectado por las variables macroeconómicas del mercado, no a activos en concreto. Dichas variables pueden ser de componente social, político y económico, por ejemplo, una subida de tipos de interés o un cambio de gobierno. Afectan en mayor o menor medida a todas las empresas en su conjunto. Por otra parte, el riesgo no sistemático es aquel referente a una empresa o activo en concreto. A diferencia del otro tipo de riesgo, este se puede contrarrestar por medio de la diversificación en la cartera, reduciendo así el riesgo concreto de la actividad de la empresa.

5.1.2.- Otros aspectos relevantes

En primer lugar, se debe introducir la notación utilizada posteriormente para el cálculo de la cartera de inversión. En el cual se utilizarán matrices y vectores. Siendo el vector traspuesto que compone los pesos de la cartera:

$$\vec{\omega}^T = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Por otra parte, el retorno estimado de la cartera (μ) se define de la siguiente manera:

$$\mu = \vec{m} \vec{\omega}^T = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = \vec{\omega} \vec{m}^T.$$

El riesgo de la cartera se expresa:

$$\sigma^2(\vec{\omega}) = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \omega_i \omega_j = \vec{\omega} C \vec{\omega}^T \geq 0. \quad (46)$$

La matriz de varianza-covarianza se define como:

$$C_{ij} = \begin{cases} \mathbb{V}[R_i] = \sigma_i^2, & \text{si } i = j \\ \text{Cov}[R_i R_j] = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (47)$$

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

La construcción de esta matriz de Varianzas-Covarianzas es necesario para calcular el riesgo de la cartera (46) y su posterior optimización del mismo. La minimización del riesgo de la cartera se consigue mediante la siguiente función objetivo:

$$\text{Min. } \sigma^2 = \sigma^2(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \omega_i \omega_j = \vec{\omega} C \vec{\omega}^T. \quad n \geq 2.$$

sujeta a las siguientes restricciones:

$$\mu = \vec{m} \vec{\omega}^T = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = \vec{\omega} \vec{m}^T.$$

$$\vec{1} \vec{\omega}^T = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

La primera restricción indica que se consigue el rendimiento esperado, por otra parte, la segunda define que la suma de los pesos de la cartera es igual a 1. Esto da como resultado el vector de pesos óptimos de la cartera de mínimo riesgo, dando como solución:

$$\vec{\omega}^* = \frac{\begin{vmatrix} \mu & \vec{1}C^{-1}\vec{m}^T \\ 1 & \vec{1}C^{-1}\vec{1}^T \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{m}C^{-1}\vec{m}^T & \vec{1}C^{-1}\vec{m}^T \\ \vec{m}C^{-1}\vec{1}^T & \vec{1}C^{-1}\vec{1}^T \end{vmatrix}} \vec{m}C^{-1} + \frac{\begin{vmatrix} \vec{m}C^{-1}\vec{m}^T & \mu \\ \vec{m}C^{-1}\vec{1}^T & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{m}C^{-1}\vec{m}^T & \vec{1}C^{-1}\vec{m}^T \\ \vec{m}C^{-1}\vec{1}^T & \vec{1}C^{-1}\vec{1}^T \end{vmatrix}} \quad (48)$$

5.2.- Cálculo de pesos de una cartera de mínimo riesgo

Después de explicar los fundamentos teóricos sobre la obtención de una cartera financiera, se aplicará dicha metodología a las empresas seleccionadas para el estudio: Apple, AstraZeneca, Renault, American Airlines y BBVA. Donde se establecerán los pesos para cada día, así como una asignación del riesgo y el rendimiento de la misma.

El método que se empleará para realizar los cálculos de los pesos de la cartera de mínimo riesgo será el método de optimización de multiplicadores de Lagrange a través del programa Mathematica, y así llegar a la solución de la cartera, ecuación (48). En este se pretende encontrar una serie de máximos y mínimos de una función de múltiples variables que se encuentran sujetas a restricciones. Por esto, se buscará encontrar a partir de este método los puntos (en este caso los pesos) que harán óptimo el riesgo para la cartera de inversión.

5.2.1.- Estimación de la cartera

Las estimaciones de la cartera se establecerán aplicando la ecuación (11), para el periodo de tiempo definido como t=31, 32, 33, 34, 35. Se realizarán estimaciones de los pesos de la cartera para cada uno de estos días, al igual que se hizo con las predicciones del precio de las cotizaciones. Por tanto, se obtendrán las matrices de varianza-covarianza para cada instante temporal descrito aplicando la expresión (46) anteriormente desarrollada.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Las matrices obtenidas con el programa Mathematica presentan valores muy similares a la matriz inicial (gráfico 13). Esto se debe a que la muestra de datos es muy extensa (30 días) y al introducir un valor más a la muestra (las predicciones) no presentará diferencias muy significativas. Al presentar valores de correlación muy pequeños, quiere decir que no existe casi relación entre los activos y por tanto se conseguirá un riesgo total de la cartera adecuado.

Los valores de dichas matrices se introducen en la ecuación (47), para así obtener los pesos de cada día, descritos en la siguiente tabla:

Tabla 22. Composición cartera de inversión en los instantes de tiempo $t= 31, 32, 33, 34, 35$.

Instante	Apple	AstraZeneca	Renault	Am. Airlines	BBVA	Riesgo	Rendimiento
t= 31	5,746%	59,022%	18,854%	8,821%	7,558%	0,5467%	0,1096%
t= 32	5,746%	59,022%	18,854%	8,821%	7,558%	0,5422%	0,1096%
t= 33	5,746%	59,022%	18,854%	8,821%	7,558%	0,5377%	0,1096%
t= 34	5,746%	59,022%	18,854%	8,821%	7,558%	0,5334%	0,1096%
t= 35	5,746%	59,022%	18,854%	8,821%	7,558%	0,5291%	0,1096%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos a partir de Mathematica.

Como se puede observar en la anterior tabla, no existe una notable diferencia entre los pesos asignados a cada activo de la cartera. No obstante, cabe destacar que se asigna de manera óptima al menos un 5% en cada activo sin necesidad de imponer restricciones. El activo con más porcentaje asignado con casi un 60% es AstraZeneca. Esto es razonable con las matrices de varianza-covarianza y los parámetros estimados ya que se trata del activo con menor riesgo de todos, explicado por su correlación y volatilidad, la más baja de todas las empresas. Ya que el criterio principal para asignar los pesos es establecer el mínimo riesgo, este es el principal activo elegido. Los demás también presentan un peso considerable en la cartera, pero menor a este.

La variabilidad de los pesos entre los días no es significativa, como cabría esperar, ya que solo se está añadiendo una predicción más a la muestra de 30 cotizaciones. Si se obtuvieran más decimales para los pesos se podrían observar las diferencias entre los días. Bien es cierto que el riesgo varía entre los días y oscila entre 0,52% y 0,54%, por tanto, no parece que sean diferencias muy significativas.

Por último, se puede observar que el rendimiento de la cartera es positivo. Los activos seleccionados presentan una tendencia positiva a lo largo del periodo seleccionado y por tanto se traduce en un incremento esperado del precio de la cotización en los próximos días para todos los activos. Bien es cierto que al tratarse de periodos muy cortos de tiempo (próximos 5 días), el rendimiento esperado no es muy elevado (en torno a 0,1%), especialmente si se construye una cartera con el objetivo de minimizar el riesgo.

5.3.- Evaluación errores cartera

Por último, para concluir el análisis y construcción de una cartera de mínimo riesgo, se evaluará el riesgo y rendimiento esperado de la misma con los datos reales. Para así comprobar las desviaciones de las mismas y concluir si el modelo predice de una manera certera los parámetros descritos anteriormente. Este último paso es de gran importancia en la construcción de una cartera ya que se conocerá con mayor exactitud la validez del modelo en una aplicación práctica y se minimizará la incertidumbre de los posibles elementos que puedan afectar los precios de las cotizaciones.

Para llevar a cabo esta metodología de evaluación, se tomarán los datos previstos tanto para el riesgo como el rendimiento para cada día. Posteriormente, se creará otra cartera financiera con Mathematica, introduciendo los datos de las cotizaciones reales para los instantes de tiempo de $t=31, 32, 33, 34, 35$; (en lugar de las predicciones de las cotizaciones). De esta, se obtendrán los pesos óptimos de la cartera y los valores del riesgo y rendimiento acordes con la realidad de las cotizaciones de los activos. Seguidamente, una vez obtenidos estos valores, se procede a calcular tanto las diferencias absolutas como relativas entre lo real y lo previsto. En otras palabras, se aplicarán las siguientes fórmulas para obtener las diferencias:

$$e_{absoluto} = |\text{valor real} - \text{valor estimado}|$$

$$e_{relativo} = \frac{e_{absoluto}}{\text{valor real}} * 100$$

En la siguiente tabla se muestra la evaluación del rendimiento de la cartera:

Tabla 23. Evaluación del Rendimiento de la cartera financiera.

Instante	Estimado	Real	Diferencia	
			Absoluta	Relativa
t= 31	0,00109646	0,00100593	-0,00009053	-9,00%
t= 32	0,00109646	0,00094587	-0,00015059	-15,92%
t= 33	0,00109646	0,00103627	-0,00006019	-5,81%
t= 34	0,00109646	0,00106634	-0,00003012	-2,82%
t= 35	0,00109646	0,00052474	-0,00057172	-108,95%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos en Mathematica.

Como se puede observar, el modelo ajusta de una manera bastante acertada el rendimiento real de la cartera financiera. Con unas desviaciones relativas entre el 2,82% y el 15,92% durante los primeros 4 días. No obstante, aparentemente al 5º día el rendimiento real es la mitad al esperado, esto se debe a que ha habido caída en el precio de la cotización significativa de ese día para AstraZeneca, Renault y American Airlines.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Tabla 24. Evaluación del Riesgo de la cartera financiera.

Instante	Estimado	Real	Diferencia	
			Absoluta	Relativa
t= 31	0,00546742	0,00781191	0,00234449	30,01%
t= 32	0,00542166	0,00769086	0,00226920	29,51%
t= 33	0,00537704	0,00758230	0,00220526	29,08%
t= 34	0,00533350	0,00746506	0,00213156	28,55%
t= 35	0,00529100	0,00798894	0,00269794	33,77%

Fuente: Elaboración propia. Resultados obtenidos en Mathematica.

En cuanto a la evaluación del riesgo de la cartera, este comprende valores absolutos muy reducidos, por lo que aparentemente pequeñas variaciones con los valores reales pueden arrojar diferencias relativas elevadas, en este caso en torno al 30%. Debido a que las diferencias absolutas son cifras muy reducidas, no parece que estas diferencias sean significativas. Por tanto, se puede concluir que es modelo ajusta también el riesgo de una manera adecuada.

6.- Conclusiones

En primer lugar, haber realizado un análisis previo de las empresas que van a componer la cartera financiera es el primer paso a la hora de construir la misma. Resulta fundamental conocer el sector de actividad en el que operan las sociedades, así como su situación actual y el análisis bursátil para reconocer si es una buena oportunidad de inversión.

En el caso del proyecto, al investigar sobre las empresas y su índice de cotización se puede concluir que todas resultan ser líderes en su sector con una ventaja competitiva y con gran actividad bursátil. Además, con expectativas de rendimiento positivo de las sociedades a corto plazo. Por tanto, resulta necesario desarrollar un modelo para la toma de decisiones de una manera cuantitativa y objetiva.

La exposición de las bases teóricas del modelo matemático utilizado en el desarrollo de la cartera ha servido para conocer el origen y el procedimiento para llegar a los resultados. El Movimiento Browniano Geométrico ha sido determinante para modelizar la cartera financiera y las predicciones de los activos bajo un entorno de incertidumbre, como es la Bolsa.

Como se ha visto en las anteriores secciones todas las empresas presentaban una tendencia positiva en el periodo seleccionado para el estudio, lo que ha hecho que el rendimiento total de la cartera también lo sea. Además, el ajuste del modelo y la estimación de parámetros han resultado ser adecuados para todos los activos, lo que ha dado robustez a las predicciones de los precios de cotización.

Por otra parte, en cuanto a la construcción de la cartera financiera, se ha comprobado que la selección de activos que operan en bolsas internacionales y en diferentes sectores minimiza la correlación entre los mismos, como se ha visto en la matriz de varianza-covarianza, y por tanto reduce el riesgo total de la cartera. La empresa con mayor peso en la cartera con un 60% ha resultado ser AstraZeneca, debido principalmente a tener la volatilidad más baja y la menor correlación con respecto a las otras empresas. De todas maneras, el resto de los activos también presentan un peso relativamente considerable en la cartera. Esto es debido a la preferencia en minimizar el riesgo sobre maximizar el rendimiento, lo que hace que los activos que tienen mejor rendimiento no necesariamente han sido los que mayor porcentaje tienen.

Por último, se ha evaluado el riesgo y el rendimiento de la cartera de inversión para los próximos 5 días, mostrando solidez en el modelo matemático utilizado, con un error tolerable y por tanto seguridad de obtener retornos positivos con el mínimo riesgo.

En definitiva, se podría concluir que se han cumplido los objetivos propuestos para el Trabajo Fin de Grado y el modelo expuesto podría ayudar junto con otras técnicas y modelos matemáticos en el análisis cuantitativo de las carteras de inversión.

7.- Bibliografía

Allen, E. (2007). *Modelling with Itô stochastic differential equations* (Vol. 22). Springer Science & Business Media.

Baxter, M., & Rennie, A. (1999). *Financial calculus: an introduction to derivative pricing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hull, J. (1946). *Risk management and financial institutions*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, cop. 2018.

Itô, K., & Rao, K. M. (1961). *Lectures on stochastic processes* (Vol. 24). Bombay: Tata Institute of Fundamental Research.

Klebaner, F. C. (2005). *Introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing Company.

Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*. Springer, Berlin, Heidelberg.

Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1998). *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge: Cambridge university press.

Bolsas y Mercados Españoles. (s.f.). *BME Renta Variable*.

<https://www.bolsasymercados.es/esp/Home> (Consulta: 12 marzo 2020)

Bolsa de Madrid (s.f.). *Ficha de BBVA*.

<https://www.bolsamadrid.es/esp/asp/Mercados/Graficos.aspx?tipo=VALORES&cod=ES0113211835> (Consulta: 23 abril 2021).

Nasdaq (s.f.). *Ficha de Apple*.

<https://www.nasdaq.com/es/market-activity/stocks/aapl/advanced-charting>
(Consulta: 24 abril 2021).

Nasdaq (s.f.). *Ficha de American Airlines*.

<https://www.nasdaq.com/es/market-activity/stocks/aal/advanced-charting>
(Consulta: 27 abril 2021).

Euronext (s.f.). *Ficha Renault*.

<https://live.euronext.com/en/product/equities/FR0000131906-XPAR>
(Consulta: 2 mayo 2021).

London Stock Exchange (s.f.). *Ficha AstraZeneca*.

<https://www.londonstockexchange.com/stock/AZN/astrazeneca-plc/company-page>
(Consulta: 5 mayo 2021).

Yahoo! Finanzas (s.f.). *Cotizaciones Apple, AstraZeneca, Renault, American Airlines, BBVA*.

<https://finance.yahoo.com/>
(Consulta: 10 marzo)

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Garrigo, M. (2021). *Este es el gráfico que utiliza BBVA para explicar su ERE de 3.450 trabajadores: las transacciones en oficina se reducen a la mitad en España.* en Business Insider, 6 de mayo.

<https://www.businessinsider.es/grafico-utiliza-bbva-explicar-ere-3450-trabajadores-859219> (Consulta: 12 de mayo)

Statista (2021). *Apple Inc. Datos estadísticos.*

<https://es.statista.com/temas/3564/apple-inc/#dossierSummary> (Consulta: 15 abril)

Dudovski, J. (2021). *Apple Business Strategy: a brief overview.* en Business Research Methodology, 1 de febrero.

<https://research-methodology.net/apple-business-strategy/> (Consulta: 20 marzo)

Singh, J. (2020). *What Is American Airlines' Customer Strategy?* en Simple Flying, 10 de septiembre.

<https://simpleflying.com/american-airlines-customer-strategy/> (Consulta: 11 abril)

Renault (s.f.). *GROUPE RENAULT "RENAULTION" STRATEGIC PLAN.*

<https://en.media.renaultgroup.com/news/groupe-renault-renaultion-strategic-plan-ddc1-989c5.html> (Consulta: 12 abril)

AstraZeneca (s.f.). *Our business strategy.*

<https://www.astrazeneca.es/nuestracompania/estrategia.html> (Consulta: 16 abril)

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

8.- Anexo

Anexo 1. Cotizaciones Apple del 30/12/20 al 11/02/21.

30/12/2020	31/12/2020	04/01/2021	05/01/2021	06/01/2021	07/01/2021	08/01/2021	11/01/2021	12/01/2021	13/01/2021
133,720	132,690	129,410	131,010	126,600	130,920	132,050	128,980	128,800	130,890
14/01/2021	15/01/2021	19/01/2021	20/01/2021	21/01/2021	22/01/2021	25/01/2021	26/01/2021	27/01/2021	28/01/2021
128,910	127,140	127,830	132,030	136,870	139,070	142,920	143,160	142,060	137,090
29/01/2021	01/02/2021	02/02/2021	03/02/2021	04/02/2021	05/02/2021	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021
131,960	134,140	134,990	133,940	137,390	136,760	136,910	136,010	135,390	135,130

Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 2. Cotizaciones AstraZeneca del 04/01/21 al 12/02/21.

04/01/2021	05/01/2021	06/01/2021	07/01/2021	08/01/2021	11/01/2021	12/01/2021	13/01/2021	14/01/2021	15/01/2021
7.422,00	7.439,00	7.512,00	7.475,00	7.471,00	7.556,00	7.405,00	7.529,00	7.559,00	7.592,00
18/01/2021	19/01/2021	20/01/2021	21/01/2021	22/01/2021	25/01/2021	26/01/2021	27/01/2021	28/01/2021	29/01/2021
7.662,00	7.722,00	7.645,00	7.650,00	7.777,00	7.897,00	7.952,00	7.779,00	7.649,00	7.491,00
01/02/2021	02/02/2021	03/02/2021	04/02/2021	05/02/2021	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021	12/02/2021
7.388,00	7.380,00	7.300,00	7.383,00	7.275,00	7.289,00	7.312,00	7.247,00	7.246,00	7.471,00

Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 3. Cotizaciones Renault del 04/01/21 al 12/02/21.

04/01/2021	05/01/2021	06/01/2021	07/01/2021	08/01/2021	11/01/2021	12/01/2021	13/01/2021	14/01/2021	15/01/2021
35,760	36,570	36,640	38,165	36,640	36,265	36,895	35,815	35,430	34,070
18/01/2021	19/01/2021	20/01/2021	21/01/2021	22/01/2021	25/01/2021	26/01/2021	27/01/2021	28/01/2021	29/01/2021
34,630	34,180	34,815	35,250	34,420	32,955	34,025	34,220	35,400	35,240
01/02/2021	02/02/2021	03/02/2021	04/02/2021	05/02/2021	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021	12/02/2021
35,035	35,980	37,695	38,355	40,360	40,440	39,770	39,260	39,390	39,340

Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 4. Cotizaciones American Airlines del 30/12/20 al 11/02/21.

30/12/2020	31/12/2020	04/01/2021	05/01/2021	06/01/2021	07/01/2021	08/01/2021	11/01/2021	12/01/2021	13/01/2021
16,15	15,77	15,13	15,43	15,52	15,38	15,13	15,00	15,38	15,53
14/01/2021	15/01/2021	19/01/2021	20/01/2021	21/01/2021	22/01/2021	25/01/2021	26/01/2021	27/01/2021	28/01/2021
16,44	15,76	15,97	16,17	15,83	15,82	15,43	15,53	16,56	18,10
29/01/2021	01/02/2021	02/02/2021	03/02/2021	04/02/2021	05/02/2021	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021
17,17	16,84	16,59	17,60	17,40	17,19	17,77	17,44	17,41	16,99

Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 5. Cotizaciones BBVA del 30/12/20 al 11/02/21.

30/12/2020	31/12/2020	04/01/2021	05/01/2021	06/01/2021	07/01/2021	08/01/2021	11/01/2021	12/01/2021	13/01/2021
4,98	4,94	4,94	5,02	5,31	5,30	5,26	5,23	5,18	5,12
14/01/2021	15/01/2021	19/01/2021	20/01/2021	21/01/2021	22/01/2021	25/01/2021	26/01/2021	27/01/2021	28/01/2021
5,07	4,95	4,92	4,94	4,92	4,88	4,79	4,81	4,60	4,79
29/01/2021	01/02/2021	02/02/2021	03/02/2021	04/02/2021	05/02/2021	08/02/2021	09/02/2021	10/02/2021	11/02/2021
4,58	4,54	4,84	4,88	5,17	5,29	5,42	5,28	5,28	5,31

Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Construcción de una cartera de mínimo riesgo

Anexo 6. Gráfico cotizaciones Apple del 30/12/20 al 11/02/21.



Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 7. Cotizaciones AstraZeneca del 04/01/21 al 12/02/21.



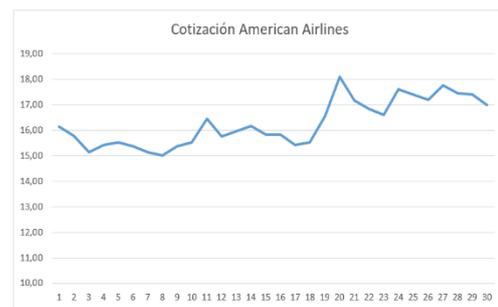
Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 8. Cotizaciones Renault del 04/01/21 al 12/02/21.



Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 9. Cotizaciones American Airlines del 30/12/20 al 11/02/21.



Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

Anexo 10. Cotizaciones BBVA del 30/12/20 al 11/02/21.



Fuente: Elaboración propia. Yahoo Finanzas.

ANEXO

OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE



Reflexión sobre la relación del TFG con los ODS en general y con el/los ODS más relacionados.

Hoy en día los Objetivos de Desarrollo Sostenible son las metas hacia las que todas las personas, instituciones y gobiernos debemos enfocar conjuntamente para crear un futuro mejor, con mayor sostenibilidad y reducción de las desigualdades. Es por esto que este Trabajo Fin de Grado, puede contribuir en cierta medida a determinados objetivos de la Agenda 2030 propuesta por las Naciones Unidas.

En primer lugar, al tratarse de un proyecto académico, contribuye a la comunidad científica y al desarrollo de conocimiento, por lo que podría relacionarse con el Objetivo de Desarrollo Sostenible número 4: **Educación de Calidad**. Aportando una visión diferente acerca del área de las finanzas y al estar relacionada con la parte matemática, se desarrolla un tema que puede servir para futuros estudios al estar en constantes vías de desarrollo y cambio. Además, al realizarse el trabajo de manera electrónica, se transfiere el conocimiento de una manera mucho más accesible a todo el mundo, de la que cualquier persona interesada en el tema tratado puede investigar y ampliar el conocimiento sobre el área, a su vez contribuyendo a generar más conocimiento. Por otra parte, el formato electrónico permite ahorrar papel en la elaboración del trabajo lo que reduce la huella medioambiental.

En cuanto al tema tratado en el Trabajo Fin de Grado, este explica una metodología de inversión propia de las finanzas cuantitativas, que empleado junto con otras técnicas y modelos matemáticos puede servir a los fondos de inversión e inversores particulares a generar capital. Por tanto, el trabajo aporta conocimiento para contribuir al octavo Objetivo de Desarrollo Sostenible: **Crecimiento Económico**. Actualmente, este objetivo es de vital importancia teniendo en cuenta el escenario económico, político y social generado por la pandemia. De la misma manera, el contenido del trabajo se relaciona estrechamente con el Objetivo de Desarrollo Sostenible número 10: **Reducción de las Desigualdades**. Como bien se ha mencionado anteriormente, la metodología empleada puede ser una herramienta de gran utilidad para generar potenciales retornos positivos en cualquier entidad o persona que desee invertir. Con el acceso a esta y a diferentes metodologías de inversión, los inversores particulares pueden generar riqueza además de las rentas generadas por su trabajo, lo que aumentaría el número de clase media en la sociedad. Por otra parte, los fondos de pensiones privados son un vehículo más por los que la mayoría de la población decanta una gran parte de sus ahorros hacia los mismos con la esperanza de obtener una paga que satisfaga sus necesidades durante la jubilación. Aunque esto es mucho más común en los países anglosajones. Dicho fondo de pensiones funciona como cualquier otro fondo de inversión, el cual se aplica un interés compuesto al capital para generar rentas muy superiores a las iniciales, aunque este actúa en un horizonte temporal elevado. Es por esto que la ampliación del conocimiento en el mundo de las finanzas y las inversiones puede ser utilizado por diversas entidades tanto institucionales como particulares, y el uso de estrategias eficientes de inversión puede suponer un beneficio para el crecimiento económico de un país, ya que se generan más ahorros y por tanto, se reducen las desigualdades.