



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA  
APLICADAS Y CALIDAD

*Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos Mejora de Procesos y  
Toma de Decisiones*

Trabajo fin de máster:

**Gráficos de control CEWMA no paramétricos para la dispersión**

Autor:

*Risso, Matías*

Tutor:

*Giner Bosch, Vicent*

*Castagliola, Philippe*

**Valencia, Julio 2021**

## Resumen

La monitorización estadística de procesos es una herramienta fundamental para todo tipo de productos y servicios. Permite medir, detectar y eventualmente mejorar un proceso productivo. Son de gran conocimiento los tipos de gráficos más utilizados, como Shewhart y EWMA, pero para el ideal funcionamiento las distribuciones subyacentes deben cumplir la hipótesis de tener un comportamiento normal (gaussiano).

En este trabajo se busca proponer una alternativa para aquellos casos en los que se sabe que dicha hipótesis no se cumple o simplemente no se sabe de antemano. Más específicamente se busca un gráfico para la monitorización de la dispersión, proponiendo una herramienta que se puede utilizar para cualquier distribución y esta no tendrá impacto en su desempeño.

Apoyándose en el conocimiento previo de gráficos no paramétricos y del uso de memoria para la monitorización, se desarrolla el gráfico CEWMA para la dispersión. Adicionalmente, los parámetros que definen al CEWMA se encuentran de forma óptima. Este gráfico es una versión discreta del EWMA, empleando también medias ponderadas.

Para esto se emplean distintos métodos matemáticos que en conjunto con eficiencia computacional proveen la posibilidad de evaluar la herramienta con distintas distribuciones, tamaños de muestra y cambios en la dispersión a detectar. Los resultados son luego contrastados con un gráfico Shewhart para identificar en que situaciones conviene uno u otro y cuáles son los factores que determinan esto.

Los resultados muestran que el gráfico CEWMA tiene un mejor desempeño en la detección de cambios en la dispersión, especialmente para cambios menores y tamaños de muestra más pequeños.

## Resum

El monitoratge estadístic de processos és una eina fonamental per a tota classe de productes i servicis. Permet mesurar, detectar i eventualment millorar un procés productiu. Són molt coneguts els tipus de gràfics més utilitzats, com el Shewhart i l'EWMA, però per al seu funcionament ideal les distribucions subjacents han de complir la hipòtesi de tindre un comportament normal (gaussià).

En este treball es busca proposar una alternativa per a aquells casos en els quals se sap que esta hipòtesi no es complix o simplement no se sap per endavant. Més específicament es busca un gràfic per al monitoratge de la dispersió, tot proposant-hi una eina que es pot utilitzar per a qualsevol distribució i esta no tindrà impacte en el seu rendiment.

A partir del coneixement previ de gràfics no paramètrics i de l'ús de memòria per al monitoratge, es desenvolupa el gràfic CEWMA per a la dispersió. Addicionalment, els paràmetres que defineixen el CEWMA es troben de manera òptima. Este gràfic és una versió discreta de l'EWMA; empra també mitjanes ponderades.

Per a això s'empren diferents mètodes matemàtics que en conjunt amb eficiència computacional proveïxen la possibilitat d'avaluar l'eina amb diferents distribucions, grandàries mostrals i canvis en la dispersió a detectar. Els resultats són després contrastats amb un gràfic Shewhart per a identificar en què situacions convé l'un o l'altre i quins són els factors que determinen això.

Els resultats mostren que el gràfic CEWMA té un millor rendiment en la detecció de canvis en la dispersió, especialment per a canvis menors i grandàries de mostra més xicotets.

## Abstract

Statistical process monitoring is a major tool for all types of products and services. It allows measurement, detection and eventually improvement in a production process. The most widely used types of charts, such as Shewhart and EWMA, are well known, but for their ideal performance the underlying distributions must meet the hypothesis of having a normal (Gaussian) behaviour.

In this paper, our goal is to propose an alternative for those cases in which it is known that this hypothesis is not fulfilled or simply not known in advance. More specifically, a chart to monitor dispersion is formulated, proposing a tool that can be used for any distribution without any impact on its performance.

Relying on the previous knowledge of nonparametric charts and the use of memory for monitoring, the CEWMA chart for dispersion is developed. Additionally, the parameters defining the CEWMA are optimally determined. This chart is a discrete version of the EWMA, also using weighted averages.

To this aim, different mathematical methods are used which, together with computational efficiency, provide the possibility to evaluate the tool for different distributions, sample sizes and changes in the dispersion to be detected. The results are then compared against a Shewhart chart to identify in which situations one or the other is suitable and what are the factors that determine this.

The results show that the CEWMA chart most often performs better in detecting changes in dispersion, especially for smaller changes and smaller sample sizes.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido inspirado en la investigación llevada por Vicent Giner Bosch y Philippe Castagliola. Primeramente, quiero agradecerles por su confianza en mí para llevar a cabo este trabajo, su apoyo y tutelaje a lo largo de su realización.

A todos los profesores de la UPV que han sido parte del *Máster en ingeniería de análisis de datos mejora de procesos y toma de decisiones*. Por inspirarme a embarcarme en una nueva especialidad que ha traído gran interés para dedicarse en la misma a largo plazo. Así como a todos mis compañeros de clase que han hecho del ciclo lectivo una experiencia amigable y entretenida.

A mi familia que me ha apoyado en todos mis proyectos por más sacrificio que haya requerido de parte de todos. Con mis padres, hermanos y primos que, al haberme tenido que mudar a un nuevo país, han ayudado a que no se sienta la distancia.

Especialmente a mi mujer e hijo que transforman cualquier lugar y momento en un hogar, me inspiran a ser mejor por ellos y me dan fuerzas para darles el futuro que se merecen.

## Índice

Resumen .....	- 2 -
Resum .....	- 3 -
Abstract .....	- 4 -
Agradecimientos .....	- 5 -
Índice.....	- 6 -
1. Introducción.....	- 8 -
1.1. Contexto .....	- 8 -
1.2. Alcance .....	- 10 -
1.3. Objetivos .....	- 10 -
1.4. Estructura del trabajo.....	- 10 -
2. MARCO TEÓRICO/HERRAMIENTAS.....	- 11 -
2.1. Gráficos de control.....	- 11 -
2.2. Gráficos de control no paramétricos .....	- 12 -
2.3. Estadístico de signo .....	- 13 -
2.4. Gráfico Shewhart para el estadístico de signo .....	- 14 -
2.5. Optimización del gráfico Shewhart .....	- 16 -
Algoritmo 1.....	- 18 -
2.6. EWMA.....	- 19 -
2.7. CEWMA .....	- 21 -
Algoritmo 2 .....	- 22 -
2.8. Distribuciones de Johnson .....	- 23 -
3. PROPUESTA/METODOLOGÍA .....	- 27 -
3.1. ARL del CEWMA .....	- 27 -
3.2. Probabilidades transitorias .....	- 28 -
Algoritmo 3 .....	- 29 -
3.3. Cálculo del ARL .....	- 29 -
3.4. Búsqueda de Fibonacci .....	- 30 -
3.5. Algoritmos para la optimización .....	- 31 -
Algoritmo 4 .....	- 32 -
Algoritmo 5 .....	- 33 -
Algoritmo 6 .....	- 35 -
3.6. ANOVA.....	- 37 -
4. RESULTADOS/EJECUCIÓN .....	- 39 -

4.1.	Construcción del código .....	- 39 -
4.2.	Mejora de eficiencia computacional.....	- 39 -
4.3.	Estructura del código.....	- 41 -
4.4.	Resultados de las pruebas .....	- 42 -
4.5.	Estudio ANOVA .....	- 42 -
5.	CONCLUSIONES.....	- 48 -
6.	BIBLIOGRAFÍA .....	- 49 -
7.	ANEXO.....	- 52 -
7.1.	Electrónico .....	- 52 -
7.2.	GRÁFICOS.....	- 52 -
7.2.1.	Interacciones.....	- 52 -
7.2.2.	Residuos .....	- 54 -
7.3.	TABLAS.....	- 55 -
7.3.1.	Medias por factor .....	- 55 -
7.3.2.	Intervalos HSD.....	- 56 -
7.3.3.	Resultados de las pruebas.....	- 60 -

# 1. Introducción

## 1.1. Contexto

*“El control de calidad es aplicable a cualquier tipo de empresa. De hecho, debe aplicarse en todas las empresas.”*

*Kaoru Ishikawa*

La calidad es, según las normas ISO, un conjunto de propiedades y características de un producto o servicio que le confieren su aptitud para satisfacer unas necesidades expresadas o implícitas. Alcanzar consistentemente esas aptitudes es crucial a la hora de cumplir con los requisitos del cliente. Es por eso que se emplean un conjunto de herramientas, acciones y mecanismos para preservar dicha calidad.

*“Lo que no se mide, no se controla, y lo que no se controla, no se puede mejorar.”*

*Peter Drucker*

En este trabajo se explora una de las herramientas, que son los gráficos de control. Han sido fundamentales para llevar a cabo la monitorización estadística de procesos (SPM) y se pueden utilizar para reducir la variabilidad de un proceso. Es usual la medición de estadísticos, así como es de común práctica asumir que las observaciones tienen una distribución normal. Esto último brinda ciertas facilidades, ya que la distribución es simétrica y puede ser definida con los dos estadísticos. Normalmente, se elige un estadístico de ubicación como la media o la mediana, ya que el interés suele estar en mantener bajo control la posición del proceso. En otras ocasiones, sin embargo, la atención se centra en el seguimiento de la dispersión (ya sea adicionalmente o en lugar de la posición). Hay muchas situaciones reales en las que la calidad del proceso está relacionada con la variabilidad que no se ve afectada por ninguna causa especial.

Fundamentalmente, en estos gráficos se realizan muestras periódicas de ciertas características del producto o proceso para luego proyectarlas y ver su comportamiento en el tiempo. A su vez se calculan límites de control y mientras el proceso se mantenga dentro de los límites, se considera bajo control. Si nuestra medición los supera significa que puede haber un fallo en nuestro proceso, por lo que la calidad se verá afectada. No obstante, algunas de estas alarmas tienen la posibilidad de ser falsas, según qué tan estrictos sean los límites de control. El problema que conlleva en ciertos casos una falsa alarma es para toda la producción o tener que controlar en mayor volumen y rigurosidad nuestro producto, sin ser necesario ya que verdaderamente se mantiene bajo control, implicando un coste superior, retrabajo y reducción de la productividad.



*“Cuando haces alguna suposición, estás preparando espacio para el error.”*

### *Toba Beta*

Si se asume que una distribución es normal cuando no lo es, muchas falsas alarmas pueden ocurrir. Es por eso que se requiere de otro tipo de los gráficos de control, que son los no paramétricos. El beneficio es que se consideran “libres de distribución” y por lo tanto no se debe conocer con exactitud la misma para poder controlar un proceso. El primer trabajo que utilizó un gráfico de control no paramétrico fue en 1975 por McGilchrist y Woodyer. Midieron la suma acumulada de lluvias por período de tiempo.

A pesar de la ventaja de tener una distribución libre, para la implementación del control no paramétrico los gráficos generalmente requieren tamaños de muestra más grandes que sus contrapartes paramétricas. Otro tema importante que los profesionales deben tener en cuenta cuando decidir sobre la implementación de un gráfico de control no paramétrico es que su sensibilidad a un cambio de proceso es ligeramente más débil que sus contrapartes paramétricas. Por estos motivos, se recomienda su implementación sólo cuando la distribución de las observaciones es desconocida.

Desde luego que más allá de la certeza en la detección de un fallo, siempre se busca hacerlo de forma veloz, ya que, si se sigue produciendo de forma defectuosa y se tarda en detectar el cambio de calidad, todos los esfuerzos y recursos durante ese período habrán sido en vano. Para incrementar la celeridad en las detecciones no es raro agregar memoria a cualquier tipo de gráfico de control mencionado. Esto implica que los valores anteriores del estadístico tendrán influencia en la medición actual. Como consecuencia hay una inercia que en ciertas condiciones puede ayudar a detectar cambios de manera más rápida.

Más precisamente, los gráficos EWMA incluyen información de observaciones pasadas  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{t-1}$  en cada nuevo valor muestreado,  $Y_t$ , calculando un promedio ponderado de ellos, expresado de forma recursiva como:

$Z_t = \lambda Y_t + (1 - \lambda) Z_{t-1}$ , que es el valor real que se va a trazar y monitorear.

En este proyecto se emplea para el control no paramétrico el estadístico de signo, que mide si nuestras observaciones caen dentro de un rango definido previamente o no. Se define tal que:

$$U_j = \begin{cases} 1, & \text{if } X_j < I_L \text{ or } X_j > I_U \\ 0, & \text{if } X_j = I_L \text{ or } X_j = I_U \\ -1, & \text{if } I_L < X_j < I_U \end{cases}$$

## 1.2. Alcance

La utilidad de las herramientas desarrolladas en este proyecto será para casos donde que haya interés de monitorizar la dispersión y no hay seguridad de la distribución.

## 1.3. Objetivos

Objetivo principal:

***Diseño e implementación de un gráfico de control no paramétrico con memoria para la monitorización de la dispersión basado en el estadístico de signo.***

Objetivos específicos:

- Diseño e implementación de una metodología para la determinación óptima de los parámetros de un gráfico CEWMA para la dispersión basado en el estadístico de signo.
- Evaluación del desempeño del gráfico desarrollado frente a las alternativas existentes.

## 1.4. Estructura del trabajo

El resto de la memoria se estructura como sigue. En el capítulo 2, se presentan los contenidos teóricos que es necesario conocer y a los que nos referiremos para poder abordar los objetivos que se han planteado en este trabajo. Posteriormente, el capítulo 3 recoge y detalla las herramientas estadísticas que se utilizarán. En el capítulo 4 se detalla la metodología empleada. Los resultados se muestran en el capítulo 5. Finalmente, el capítulo 6 recoge las principales conclusiones que se derivan del trabajo realizado.

## 2. MARCO TEÓRICO/HERRAMIENTAS

### 2.1. Gráficos de control

Representan la evolución temporal de uno o más estadísticos obtenidos a partir de muestras de tamaño  $n$  de un determinado proceso, tomadas periódicamente. Se tiene una línea central que representa la media cuando el proceso está bajo control y dos líneas paralelas a esta que representan el límite de control superior  $UCL$  y límite de control inferior  $LCL$ . Estos límites son elegidos tales que si el proceso se encuentra bajo control la proporción de puntos que se ubican fuera de ellos tiene un valor específico  $\alpha$ .

Al elegir los límites de control se define la región crítica para el test de hipótesis para el parámetro  $\theta$  objeto de interés.

$$\begin{aligned} H_0: \theta &= \theta_0 \\ H_1: \theta &\neq \theta_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Por lo tanto,  $\alpha$  representa la probabilidad del error de tipo 1, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta. A partir de esto se define el  $ARL_0$  (Average run length) como la cantidad promedio de observaciones hasta obtener una fuera de los límites de control:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (2)$$

En cambio, si un proceso está fuera de control, significa que se ha producido un cambio  $\tau$  en la dispersión, que es el objeto de estudio de este trabajo. Con una dispersión inicial  $\sigma_0$ , la nueva dispersión es  $\sigma_1 = \tau\sigma_0$ . Valores  $\tau$  inferiores a 1 indican reducción en la dispersión y superiores indican aumento en la misma.

$\beta$  será la probabilidad del error de tipo II, esto es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. Con este valor se determina la cantidad media de observaciones hasta detectar el fallo como  $ARL_1$  y se calcula:

$$ARL_1(\tau) = \frac{1}{1 - \beta(\tau)} \quad (3)$$

La potencia o probabilidad de detección es  $1 - \beta(\tau)$ . En el uso práctico es que se desea que el  $ARL_0$  sea lo mayor posible y así tener una proporción reducida de falsas alarmas, pero se desea que el  $ARL_1$  sea pequeño para detectar el cambio en el proceso lo antes posible.

## 2.2. Gráficos de control no paramétricos

El contenido de esta sección está basado en la revisión realizada por Chakraborti et al. (2001).

Tal como se menciona en la sección anterior, en un gráfico de control se estudia una distribución probabilística. Es muy común tanto en la literatura como en la práctica asumir que la distribución es normal o gaussiana. Desde luego que las propiedades de los gráficos son exactas solo si se cumple esto, pero esto no siempre ocurre en una variedad de aplicaciones. Como resultado se ven afectadas todas las propiedades sobre las que se está considerando a la hora de utilizar la herramienta.

Para más detalles y ejemplos de los casos que la normalidad no se cumple se puede ver: Shewhart (1939; p. 12,54), Ferrell (1953), Tukey (1960; p. 458), Langenberg and Iglewicz (1986), Jacobs (1990), Alloway and Raghavachari (1991), Woodall (2000).

Estos autores y otros más proveen argumentos y justificaciones para el desarrollo de gráficos de control que no dependan de la hipótesis de normalidad o cualquier otro caso de distribución paramétrica. Por lo tanto, los gráficos no paramétricos se pueden llamar también “libres de distribución”.

Desde luego que para respaldar la sustitución de una herramienta muy establecida y con amplia funcionalidad, debe contar con fundamentos teóricos y con resultados convenientes. Suelen demandar mayor complejidad que los gráficos tradicionales y esto ha sido un limitante en la carga computacional. En estos tiempos ya no es un factor determinante ya que se poseen procesadores y librerías de código, algunas de las cuales serán exploradas en este trabajo, suficientemente capaces para lidiar con esa carga. Tal vez más crucial es el argumento que los no paramétricos no tienen tan buen desempeño como los paramétricos, pero se pueden encontrar múltiples casos que se da justamente lo contrario. Más destacable aún, en situaciones en las que la distribución es normal, los gráficos no paramétricos pueden lograr una eficiencia muy similar (ver Gibbons y Chakraborti 1992, p.177).

Como definición se puede llamar a un gráfico como no paramétrico si en su estado bajo control, la distribución de  $RL$  (run length) es siempre la misma para toda distribución continua. Allí está la ventaja, de no tener que asumir o estimar parámetros que caractericen a la distribución del proceso a controlar. Esto puede ser de gran conveniencia para un proceso recién establecido y del que no se conoce suficientemente su pasado para asumir su distribución. A estas ventajas se le puede agregar una mayor robustez y resistencia a datos anómalos (outliers).

### 2.3. Estadístico de signo

Se presenta al estadístico de signo para la dispersión de forma general de acuerdo a *Pawar et al* (2018). A partir de una muestra aleatoria de tamaño  $n$   $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de una variable continua, unidimensional y aleatoria  $X$ , se define cómo:

$$U_j = \begin{cases} 1, & \text{si } X_j < I_L \text{ or } X_j > I_U \\ 0, & \text{si } X_j = I_L \text{ or } X_j = I_U \\ -1, & \text{si } I_L < X_j < I_U \end{cases} \quad (4)$$

dónde  $I_L$  e  $I_U$  son los percentiles de  $X$ , tales que:

$$I_L = 100 \frac{p_0}{2} \quad (5)$$

$$I_U = 100 \left(1 - \frac{p_0}{2}\right) \quad (6)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} P(X \leq I_L) &= \frac{p_0}{2} \\ P(X > I_U) &= \frac{p_0}{2} \end{aligned} \quad (7) \text{ y } (8)$$

Teniendo  $0 < p_0 < 1$  y  $I_L < I_U$ .

Calculando finalmente su valor:

$$U = \sum_{j=1}^n U_j \quad (9)$$

Esta definición depende del valor de  $p_0$ , que se puede modificar correctamente para cumplir las necesidades del usuario final. Además, para calcular  $U$ , es necesaria una forma de calcular o estimar  $I_L$  e  $I_U$  dado  $p_0$  (ver (7) y (8)). Está claro que  $U$  puede tomar  $n + 1$  diferentes valores posibles y que su distribución muestral está relacionada con un patrón binomial. Más precisamente, con  $p = p_0$ :

$$V = \frac{U + n}{2} \sim \text{Bi}(n, p) \quad (10)$$

A partir de esto se deduce que:

$$\begin{aligned} E[U] &= n(2p_0 - 1) \\ \sqrt{\text{Var}[U]} &= 2\sqrt{np_0(1 - p_0)} \end{aligned} \quad (11) \text{ y } (12)$$

Si se mantiene (6).

El estadístico  $\frac{V}{n}$  será la proporción de observaciones que caen fuera del intervalo  $[I_L, I_U]$ . Por lo tanto, tiene sentido considerar  $U$  como un estadístico de dispersión.

## 2.4. Gráfico Shewhart para el estadístico de signo

Se considera una característica de calidad univariante continua  $X$  siguiendo una distribución de probabilidad desconocida, no necesariamente simétrica, y un esquema de monitorización en el que se obtienen sucesivas muestras aleatorias de  $n$  unidades de  $X$ , en intervalos de tiempo iguales. En cada muestra  $t$ , el estadístico de signo  $U_t$ , definido como en (9), se calculará con el objetivo de monitorear la dispersión.

Nos referiremos a las situaciones bajo control y fuera de control en términos de la desviación típica o estándar de  $X$ , expresada como  $\sigma$ . De hecho, llamemos a  $\sigma_0$  el valor de  $\sigma$  cuando  $X$  está bajo control. Se supone que las ecuaciones (7) y (8) representan el estado de control, es decir,  $P(X \notin [I_L, I_U] \mid \sigma = \sigma_0) = p_0$

Se proponen dos gráficos de control unilaterales para  $U_t$ . Por lo tanto, el gráfico con límite inferior (descendente) emitirá una señal fuera de control cuando  $U_t < LCL$ , lo que significa una disminución en dispersión; alternativamente, el llamado gráfico con límite superior (ascendente) generará una señal cuando  $U_t > UCL$ , lo que significa un aumento de la dispersión. Deben determinarse valores los límites de control respectivos  $LCL$  y  $UCL$ . Podemos asumir que  $LCL, UCL \in \{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\}$ , que son todos los valores posibles para  $U_t$ .

Esta configuración se puede adaptar fácilmente para tener un gráfico de bilateral (con límite superior e inferior), si es necesario, siendo la única restricción adicional  $LCL \leq UCL$ . En realidad, los gráficos unilaterales que acabamos de describir pueden verse como casos particulares del caso bilateral, en el que a  $UCL$  se le asigna un valor de  $n$  (o superior) para tener un gráfico para las disminuciones de la dispersión o, alternativamente,  $LCL$  se fija en  $-n$  (o menor) si el gráfico está destinado a detectar solo aumentos en la dispersión. Para evitar repetición de contenido, de aquí en adelante se hace referencia únicamente al caso unilateral.

Debe recordarse que la única información que se necesita sobre la distribución de  $X$  para ser capaz de calcular el gráfico de control son los percentiles bajo control  $I_L$  e  $I_U$ , que deben conocerse o estimarse de alguna manera. Como se mencionó, cada uno de los dos gráficos de un solo límite implica

dos parámetros,  $p_0$  y  $UCL$  (o  $LCL$ ), que se determinará según las necesidades del usuario.

Considerando todo lo anterior, la probabilidad de falsa alarma  $\alpha$  (error de tipo I) para un límite inferior y superior, puede ser calculada respectivamente como

$$\alpha = P(U_t < LCL \mid \sigma = \sigma_0) = \sum_{i=0}^{\frac{LCL+n}{2}-1} P(V_t = i \mid p = p_0) \quad (13)$$

$$\alpha = P(U_t > UCL \mid \sigma = \sigma_0) = \sum_{i=0}^{\frac{LCL+n}{2}-1} P(V_t = i \mid p = p_0) \quad (14)$$

A su vez, la probabilidad  $\beta$  (error de tipo II) de no detectar un cambio  $\tau$  en la dispersión de  $X$ , tal que  $\tau > 0$ ,  $\tau \neq 1$ , según el cambio será

$$\beta(\tau) = P(U_t \leq LCL \mid \sigma = \sigma_1) = \sum_{i=\frac{LCL+n}{2}}^n P(V_t = i \mid p = p_1) \quad (15)$$

$$\beta(\tau) = P(U_t \geq UCL \mid \sigma = \sigma_1) = \sum_{i=0}^{\frac{UCL+n}{2}} \Pr(V_t = i \mid p = p_1), \quad (16)$$

para un límite inferior y superior respectivamente. Dónde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau \sigma_0 \\ p_0 &= P(X \notin [I_L, I_U] \mid \sigma = \sigma_0) \\ p_1 &= P(X \notin [I_L, I_U] \mid \sigma = \sigma_1) \\ V_t &\sim \text{Bi}(n, p) \end{aligned} \quad (17)$$

El desempeño de los gráficos va a depender del valor elegido para  $p_0$ ,  $LCL$  y  $UCL$ . Se destaca que, para poder calcular el  $ARL_1$ , se necesita saber o estimar el valor de  $p_1$ . Para una distribución de probabilidad dada y un valor de  $\tau$ , el valor de  $p_1$  depende solo del valor de  $p_0$  (y no en el límite de control  $LCL$  o  $UCL$ ); de hecho, vale la pena señalar que una misma elección de los valores de  $\tau$  y  $p_0$  pueden conducir a diferentes valores de  $p_1$  para diferentes distribuciones.

Considerando que las muestras son independientes entre sí, el  $ARL_0$  y  $ARL_1$  se calcularán tal como se indica, respectivamente, en (2) y (3).

## 2.5. Optimización del gráfico Shewhart

La optimización de este gráfico no es el objetivo de este trabajo pero se detalla ya que luego se describe la optimización del gráfico CEWMA y los resultados de ambos son contrastados. Los parámetros  $p_0$  y  $LCL$  (o  $UCL$ ) se encuentran resolviendo el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Min} & \beta(p_0, L | n, \tau) \\ \text{s.t.} & \alpha(p_0, L | n) \leq \alpha_0 \\ & 0 < p_0 < 1 \\ & L \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (18)$$

en el que  $L$  representa  $LCL$  (gráfico con límite inferior) o  $UCL$  (gráfico con límite superior),  $\alpha_0$  representa la tasa máxima de falsas alarmas permitida, con  $0 < \alpha_0 \leq 1$ ,  $\tau$  representa un desplazamiento de dispersión a detectar, con  $\tau > 0$ ,  $\tau \neq 1$ ,  $\mathcal{S} = \{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\}$ , y las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  se calculan como en (13) y (15), o (14) y (16), para el caso que corresponda.

El modelo (18) se puede simplificar dejando que  $p_0$  tome solo un conjunto discreto de valores; digamos que  $p_0 \in \{0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9, 0.95\}$ . Esta discretización está justificada por el hecho de que, en la práctica, solo los valores de  $p_0$  fáciles de manejar son utilizados. Más precisamente, solo los valores de  $p_0$  para los que se pueden obtener  $I_L$  e  $I_U$  usando (5) y (6) son elegibles. Por tanto, el problema que finalmente se propone a resolver para encontrar los valores óptimos de  $p_0$  y  $LCL$  (o  $UCL$ ) dados  $n, \alpha_0, \tau$  pueden expresarse como sigue:

$$\begin{cases} \text{Min} & \beta(p_0, L | n, \tau) \\ \text{s.t.} & \alpha(p_0, L | n) \leq \alpha_0 \\ & p_0 \in \mathcal{R}, L \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (19)$$

donde  $\mathcal{R} \subset ]0,1[$ , denota un conjunto finito de valores admisibles para  $p_0$ , por ejemplo,  $\mathcal{R} = \{0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9, 0.95\}$ . El resto de los símbolos mantienen su significado del modelo (18). Debe considerarse que, a diferencia de (18), el modelo (19) representa un problema no lineal discreto puro, es decir que no es mixto.

Se tiene que considerar también que el modelo propuesto incluye la restricción a  $\alpha \leq \alpha_0$  en su lugar del más habitual  $\alpha = \alpha_0$ . Claramente, debido a la presencia de variables de decisión discretas, puede que no sea posible lograr la igualdad en la mayoría de los casos. A veces, se suele abordar este problema tratando de encontrar una solución con un valor de lo más cerca posible de  $\alpha_0$ , ya sea mayor o menor. Por el contrario, el enfoque del trabajo implica asegurarse de que el límite superior  $\alpha_0$  para la tasa de falsas alarmas nunca sea superado por cualquier solución, nuestro modelo puede obtener cuando se resuelva.

Dada su naturaleza puramente discreta, el modelo puede resolverse fácilmente a un óptimo mediante el uso de una estrategia de enumeración, que se



describe en el **algoritmo 1** para el caso de límite inferior (y que se puede adaptar fácilmente al caso de límite superior). Hay que tener en cuenta que, para ser aplicado, el **algoritmo 1** necesita cierta información sobre la distribución de  $X$ . Más precisamente, para cada valor candidato de  $p_0$ ,

$$\begin{aligned} I_L &= F_X^{-1}\left(\frac{p_0}{2} \mid \sigma = \sigma_0\right) \text{ y} \\ I_U &= F_X^{-1}\left(1 - \frac{p_0}{2} \mid \sigma = \sigma_0\right) \end{aligned} \quad (20) \text{ y } (21)$$

deben ser calculados o estimado (ver líneas 1 y 2 del algoritmo), así como

$$p_1 = P(X \notin [I_L, I_U] \mid \sigma = \sigma_1) \quad (22)$$

(línea 3). Aquí,  $F_X^{-1}$  representa la inversa de la función de distribución acumulativa (CDF) de  $X$ , y  $\sigma_1$  representa el desplazamiento valor de  $\sigma$  a detectar. Esto limita los valores de  $p_0$  a considerar, y respalda el enfoque de discretización de esta variable.

Este algoritmo ha sido desarrollado por Porcel Marí (2021) a partir de una idea no publicada de V. Giner y P. Castagliola.

---

### Algoritmo 1

Determinar los valores óptimos de los parámetros  $p_0$  y  $LCL$  para la dispersión del estadístico de signo de un gráfico Shewhart de una cola y límite de control inferior.

---

**Input:**  $n, \alpha_0, \tau$

**Output:**  $p_0$  y  $LCL$  óptimos para el modelo.

//  $F_X^{-1}$ : función inversa del CDF de  $X$ .

//  $U_t$ : estadístico de signo.

//  $V \sim \text{Bi}(n, p)$ .

// Inicialización

$p_0^*, LCL^* \leftarrow \text{nulo}$

$\alpha^* \leftarrow +\infty$

$\alpha^* \leftarrow \text{nulo}$

$\sigma_1 \leftarrow \tau\sigma_0$

**para**  $p_0 \in \mathcal{R}$ :

1  $I_L \leftarrow F_X^{-1}\left(\frac{p_0}{2} \mid \sigma = \sigma_0\right)$

2  $I_U \leftarrow F_X^{-1}\left(1 - \frac{p_0}{2} \mid \sigma = \sigma_0\right)$

3  $p_1 \leftarrow \Pr(X \notin [I_L, I_U] \mid \sigma = \sigma_1)$

**para**  $LCL \leftarrow -n$  **a**  $n$  **paso**  $+ 2$ :

**si**  $LCL = -n$ :

$\alpha \leftarrow 0$

$\beta \leftarrow 1$

**si no**:

$\alpha \leftarrow \alpha + \Pr\left(V_t = \frac{(LCL-2)+n}{2} \mid p = p_0\right)$

**si**  $\alpha > \alpha_0$ : **saltar**

$\beta \leftarrow \beta - \Pr\left(V_t = \frac{(LCL-2)+n}{2} \mid p = p_0\right)$

**si**  $\beta < \beta^*$ :

$\beta^* \leftarrow \beta$

$p_0^* \leftarrow p_0$

$LCL^* \leftarrow LCL$

$\alpha^* \leftarrow \alpha$

**devolver** Solución óptima:  $p_0^*, LCL^*$ .  $\beta$  Óptimo:  $\beta^*$ .  $\alpha$  Real:  $\alpha^*$ .

---

## 2.6. EWMA

El gráfico EWMA (Roberts, 1959; Hunter, 1986; Crowder, 1987, 1989; Lucas y Saccucci, 1990) es una alternativa a los gráficos de control de tipo Shewhart y es más útil para detectar pequeños cambios en la media del proceso. Utiliza un promedio móvil ponderado de valores anteriores para suavizar los datos entrantes, minimizando el efecto del ruido aleatorio en el proceso. Pesa los valores actuales y más recientes más fuertemente que los valores más antiguos, lo que permite que la línea de control reaccione más rápido que un simple gráfico de promedio móvil a los cambios en el proceso.

Al igual que los gráficos de Shewhart, si el valor de EWMA excede los límites de control calculados, el proceso se considera fuera de control. Si bien generalmente se usa cuando el proceso usa una inspección al 100% y el tamaño del subgrupo de la muestra es 1, también se puede usar cuando los tamaños de los subgrupos de la muestra son mayores.

En lugar de comparar el valor real de la muestra  $X_t$  de cada intervalo con los límites de control actuales, el gráfico EWMA calcula para la instancia  $t$  un valor sustituto  $Z_t$  que es una suma ponderada de los valores actuales y pasados. La fórmula para este cálculo es:

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda) Z_{t-1} \quad (23)$$

El valor que se utiliza como estadístico de control para un intervalo de muestra dado  $Z_t$ , es  $\lambda$  multiplicado por el valor actual  $X_t$ , y  $(1 - \lambda)$  el valor calculado previamente  $Z_{t-1}$ . El valor  $\lambda$  es el factor de suavizado para el cálculo y tiene un rango permisible de 0 a 1. Cuanto más cerca esté  $\lambda$  de 0, más se promediará el efecto de los valores anteriores en el valor actual. Por el contrario, cuanto más cerca esté  $\lambda$  de 1, menor será el efecto de suavizado.

Al calcular el primer intervalo de muestra en  $Z_t$ , no hay ningún valor para  $Z_{t-1}$ . Por lo tanto, normalmente para el primer intervalo de muestra, a este valor (generalmente denominado  $\mu_0$ ) se le asigna un valor medio de proceso conocido o el valor de la media para el conjunto actual de valores de muestra reales. Lo que use dependerá de lo que tenga disponible.

La configuración inicial del gráfico generalmente implica el establecimiento de valores de control estandarizados  $UCL$ ,  $LCL$  y la línea central, para el gráfico EWMA. Estos límites se calculan en función del muestreo del proceso cuando se está ejecutando mientras está bajo control. Cada intervalo de muestra tiene un solo valor, para un tamaño de muestra de subgrupo de uno. Entonces, todo lo que necesita considerar es el valor de reemplazo promedio ponderado,  $Z_t$ , para ese intervalo de muestra. Calcule el valor  $\mu_0$  como la media de los valores de datos reales. Sean  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  los valores de medición de los  $N$  intervalos de muestra.

$$\mu_0 = \bar{X} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N X_i = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_N)}{N} \quad (24)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N X_i - \bar{x}}{N - 1}} \quad (25)$$

El valor  $\mu_0$  es la media del proceso. El valor  $\sigma$  es la desviación estándar del proceso. La constante  $\lambda$  es el valor de suavizado especificado por el usuario (generalmente en el rango de 0.05 a 0.30). El ancho de los límites de control está controlado por la constante  $L$ , donde el valor típico de  $L$  está en el rango de 2.7 a 3.0 (correspondiente a los límites de control habituales de tres sigma).

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L \sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \\ LC &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L \sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \end{aligned} \quad (26), (27) \text{ y } (28)$$

Hay que tener en cuenta que el término  $1 - (1 - \lambda)^{2t}$  se acerca a la unidad a medida que  $t$  aumenta. Esto implica que los límites de control de un gráfico EWMA alcanzarán valores de estado estacionario aproximados definidos por:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L \sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \\ LCL &= \mu_0 - L \sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \end{aligned} \quad (29) \text{ y } (30)$$

Es mejor si se utiliza las ecuaciones exactas que tienen en cuenta el período de muestra, de modo que un proceso fuera de control pueda detectarse utilizando los límites de control más estrictos que se calculan para  $t$  pequeña. Si la gráfica EWMA se usa con tamaños de muestra de subgrupos mayores que 1, el valor de  $X_t$  se reemplaza por la media del subgrupo de muestra correspondiente, y el valor de  $\sigma$  se reemplaza por el valor  $\sigma\sqrt{M}$ , donde  $M$  es el tamaño del subgrupo de muestra.

Normalmente este gráfico se utiliza para poder detectar rápidamente cambios pequeños. Sin embargo, en muchas ocasiones, la elección de los parámetros  $\lambda$  y  $L$  se hace siguiendo unas tablas que no proporcionan los valores más adecuados para este gráfico. Un uso óptimo del gráfico EWMA permite obtener un gráfico que puede casi ser imbatible para detectar algunos tipos de cambios.

## 2.7. CEWMA

En este trabajo, se introduce un nuevo gráfico de control no paramétrico para la dispersión. Este nuevo gráfico se basa en una adaptación de la media móvil ponderada exponencial (EWMA; Roberts, 1959) para el caso discreto, llamado count EWMA (CEWMA; Rakitzis et al., 2015). Así como el EWMA tradicional hace en el caso continuo, el enfoque CEWMA proporciona para cualquier procedimiento de monitoreo en una variable discreta una estructura de memoria que, en la práctica, se espera que mejore la capacidad de detectar pequeños cambios en el proceso. Por lo tanto, se aplicará este enfoque EWMA discreto para el estadístico de signo descrito en la sección 2.4.

Cuando se trata de monitorizar una característica de calidad discreta, el conjunto (aún discreto) de posibles valores para el estadístico EWMA graficado  $Z_t$  cambia en cada momento  $t$  y esto, en al final, arruina la forma tradicional de calcular el *ARL* basado en cadenas de Markov (Brook y Evans, 1972; Lucas y Saccucci, 1990). De hecho, el método EWMA es usado para proporcionar una aproximación del *ARL* tan precisa como sea necesario en un caso continuo, pero en la configuración discreta, el método puede que ni siquiera converja al valor real del *ARL* (Weiß, 2009; Castagliola et al., 2019). El patrón CEWMA supera este problema manteniendo la esencia de una estrategia de EWMA. De hecho, permite cálculos exactos del *ARL* usando cadenas de Markov.

Sea  $X$  una característica de calidad univariante continua, de los cuales se toman muestras aleatorias de  $n$  unidades en tiempos igualmente espaciados, y sea  $U_t$  el estadístico de signo de dispersión (9) calculado en el tiempo  $t$ . En analogía con el patrón EWMA clásico, la estrategia CEWMA consiste en monitorizar un estadístico  $Y_t$  siendo número entero que representa un promedio ponderado redondeado de la  $U_t$  actual y pasado  $U_0, \dots, U_{t-1}$ , que se puede expresar de forma recursiva como:

$$Y_t = \frac{\gamma_U}{\gamma_U + \gamma_Y} U_t + \frac{\gamma_Y}{\gamma_U + \gamma_Y} Y_{t-1} + \frac{R_{t-1} - R_t}{\gamma_U + \gamma_Y}, t \geq 1 \quad (31)$$

donde  $\gamma_U, \gamma_Y \in \{0, 1, 2, \dots\}$  son dos parámetros por determinar (cabe destacar que  $\gamma_U/(\gamma_U + \gamma_Y)$  and  $\gamma_Y/(\gamma_U + \gamma_Y)$  son de alguna manera equivalentes a los coeficientes  $\lambda$  y  $(1 - \lambda)$ , respectivamente, de un esquema EWMA clásico) y  $(R_{t-1} - R_t)/(\gamma_U + \gamma_Y)$  actúa como una especie de término de redondeo. De hecho,

$$Y_t = \left\lfloor \frac{\gamma_U U_t + B_{t-1}}{\gamma_U + \gamma_Y} \right\rfloor, \quad t \geq 1 \quad (32)$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa la operación de redondeo hacia cero (truncar sin decimales) y  $B_t$  es un término auxiliar definido como

$$B_t = \gamma_Y Y_t + R_t, \quad t \geq 1 \quad (33)$$

de la ecuación anterior está claro que  $B_{t-1}$  de alguna manera resume en un solo número entero toda la información de la muestra anterior  $t - 1$  que es pasado a

la muestra actual  $t$ . Finalmente,  $R_t$  puede obtenerse y considerarse como el resto de la división en (32), es decir,

$$R_t = (\gamma_U U_t + B_{t-1}) - (\gamma_U + \gamma_Y) Y_t, \quad t \geq 1 \quad (34)$$

Como consecuencia directa de su definición, todos los términos y los parámetros ( $\gamma_U, \gamma_Y, Y_t, R_t$  y  $B_t$ ) toman valores enteros, además de  $U_t$ . Como en el gráfico similar al Shewhart definido en la sección 2.5, aquí también proponemos un ajuste bilateral. Por lo tanto, el procedimiento de creación de gráficos EWMA discreto consisten en monitorear  $Y_t$  a lo largo del tiempo y aumentar una señal fuera de control cuando  $Y_t < LCL_Y$  (gráfico con límite inferior, destinado a detectar disminuciones en la dispersión) o  $Y_t > UCL_Y$  (gráfico con límite superior, para detectar aumentos de dispersión), donde  $LCL_Y$  y  $UCL_Y$  son los límites de control respectivos de los dos gráficos unilaterales, que deben ser correctamente determinados. Se puede asumir que estos límites pertenecen al conjunto  $\{-n, \dots, n\}$ , que contiene todos los valores posibles de  $Y_t$ .

Por lo tanto, este gráfico de control basado en el patrón CEWMA es unívocamente determinado cuando los valores de  $\gamma_U, \gamma_Y$  y  $LCL_Y$  (o  $UCL_Y$ ) son fijados. El **algoritmo 2** muestra cómo aplicar este gráfico en la práctica, una vez que estos parámetros están determinados.

---

### Algoritmo 2

Gráfico CEWMA para la dispersión, basado en el estadístico de signo. Versión con límite de control inferior (diferencias con límite superior marcadas).

---

**Input:**  $n, p_0, \gamma_U, \gamma_Y, LCL_Y$  (o  $UCL_Y$ )

//  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa la operación de redondeo hacia cero

// Inicialización

$Y_0 \leftarrow \lfloor E[U_t \mid p = p_0] \rfloor = \lfloor n(2p_0 - 1) \rfloor$

$R_0 \leftarrow 0$

$B_0 \leftarrow \gamma_Y Y_0 + R_0$

**para**  $t \leftarrow 1$  **a**  $\infty$ :

*Extraer una nueva muestra aleatoria  $\{X_{t,1}, \dots, X_{t,n}\}$ .*

*Calcular  $U_t$*

*Calcular  $Y_t$*

**si**  $Y_t < LCL_Y$  (o  $Y_t > UCL_Y$ ):

*Dar alarma por fuera de control.*

**fin**

*Calcular  $R_t$  // según (34)*

*Calcular  $B_t$  // según (33)*

---

En el **algoritmo 2**, el estadístico  $Y_0$  se inicializa con un valor predeterminado, asumiendo que el proceso está inicialmente bajo control, lo que se conoce como inicio cero o estado cero. De lo contrario, a  $Y_0$  se le puede dar cualquier otro valor basado en el conocimiento sobre la situación del proceso al momento de iniciar el seguimiento procedimiento, que se conoce como inicio anticipado o estado estable.

## 2.8. Distribuciones de Johnson

En esta sección se describe el tipo de distribuciones que se utilizarán en las pruebas computacionales que se llevan a cabo en el capítulo 5. Cuando se trata de métodos no paramétricos, es especialmente importante estudiar su desempeño para diferentes distribuciones de probabilidad. Se ha decidido utilizar la distribución de Johnson (Johnson, 1949) para este fin.

La distribución de Johnson es, en realidad, un sistema flexible de tres familias de distribuciones diseñado para adaptarse a una amplia gama de conjuntos de datos en situaciones reales, con aplicación a muchos campos de investigación diferentes, como la hidrología (Carsel y Parrish, 1988), epidemiología (Flynn, 2006), finanzas (Brooks et al., 2005) y modelado de expresión genética (George y Ramachandran, 2008; Parrish et al., 2009), por mencionar solo unos ejemplos.

En particular, el sistema Johnson se puede utilizar para alcanzar cualquier valor objetivo de asimetría y curtosis. Además, las distribuciones en el sistema Johnson se puede transformar a o desde una distribución normal, lo que lo hace muy atractivo en la práctica, en términos de facilidad de cálculo, cuando se trata de probabilidad y determinación de cuantiles. De hecho, se consideran como una herramienta útil dentro del control de calidad estadístico cuando se trata de datos no normales o gaussianos (Farnum, 1996; Chou et al., 1998; Lagos y Vargas, 2003; Castagliola y García Castellanos, 2008; Aichouni et al., 2014; Goedhart et al., 2019).

Se dice que una variable aleatoria  $X$  sigue una distribución de Johnson con los parámetros  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\xi$  y  $\lambda$  si se puede reducir a una variable normal estándar  $Z \sim N(0, 1)$  a través de la siguiente transformación:

$$Z = \gamma + \delta f\left(\frac{X - \xi}{\lambda}\right) \quad (35)$$

en el que  $f$  es una de las tres siguientes funciones no decrecientes:

$$(i) \quad f(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right), \quad 0 < y < 1, \quad (36)$$

que define la llamada familia acotada ( $S_B$ ), adecuada para variables aleatorias acotadas como  $\xi < X < \xi + \lambda$ ;

$$(ii) \quad f(y) = \sinh^{-1}(y), \quad -\infty < y < +\infty \quad (37)$$

para la familia no acotada ( $S_U$ ), con  $-\infty < X < +\infty$ ; y

$$(iii) \quad f(y) = \ln(y), \quad 0 < y < +\infty, \text{ con } \lambda = 1, \quad (38)$$

para la familia lognormal o semiacotada ( $S_L$ ), con  $\xi < X < +\infty$ , y que en realidad es la distribución logarítmica normal. Un cuarto  $S_N$  de la familia suele ser incluido, con  $f(y) = y$ , que corresponde al caso en el que  $X$  ya es normal.

Los cuatro parámetros del sistema son valores reales, con  $\lambda > 0$ . Es una convención tradicional que también  $\delta > 0$ , lo que lleva a distribuciones con sesgos no negativos ( $\delta < 0$  daría como resultado un sesgo no positivo, en cambio). Los parámetros  $\xi$  y  $\lambda$  están relacionados con la ubicación y la dispersión de  $X$ , respectivamente, mientras que  $\gamma$  y  $\delta$  pueden entenderse como parámetros de forma.

La CDF  $F_X$  y la CDF inversa  $F_X^{-1}$  del sistema Johnson son fácilmente derivables. De (35) y (36) se puede deducir

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{x - \xi}{\xi + \lambda - x}\right)\right), & \xi < x < \xi + \lambda \\ 0, & x \leq \xi \\ 1, & x \geq \xi + \lambda \end{cases} \quad (39)$$

$$F_X^{-1}(u) = \xi + \frac{\lambda}{1 + e^{\frac{\gamma - \Phi^{-1}(u)}{\delta}}}, \quad 0 < u < 1 \quad (40)$$

para el caso acotado. Aquí,  $\Phi$  representa la CDF de la distribución normal estándar. Para el caso no acotado se tiene

$$F_X(x) = \Phi\left(\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{x - \xi}{\xi + \lambda - x}\right)\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

$$F_X^{-1}(u) = \xi + \lambda \sinh\left(\frac{\Phi^{-1}(u) - \gamma}{\delta}\right), \quad 0 < u < 1 \quad (41) \text{ y } (42)$$

usando (35) y (37). Finalmente, para el caso logarítmico normal, de (35) y (38), y suponiendo que  $\lambda = 1$ , se obtiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi(\gamma + \delta \ln(x - \xi)), & x > \xi \\ 0, & x \leq \xi \end{cases} \quad (43)$$

$$F_X^{-1}(u) = \xi + e^{\frac{\Phi^{-1}(u) - \gamma}{\delta}}, \quad 0 < u < 1 \quad (44)$$



Como se mencionó anteriormente, el sistema Johnson se adapta a una amplia variedad de sistemas de distribución. De hecho, si fijamos el valor de una posición y una dispersión con parámetros como la mediana y la desviación estándar, y denotamos respectivamente los coeficientes estandarizados de asimetría y curtosis de una distribución de probabilidad por  $\sqrt{\beta_1}$  y  $\beta_2$ , entonces para cada combinación posible de  $(\sqrt{\beta_1}, \beta_2)$ , solo hay una combinación coincidente de los cuatro parámetros de distribución ( $\gamma, \delta, \xi$  y  $\lambda$ ) en sólo una de las tres familias descritas,  $S_B, S_U$  y  $S_L$ .

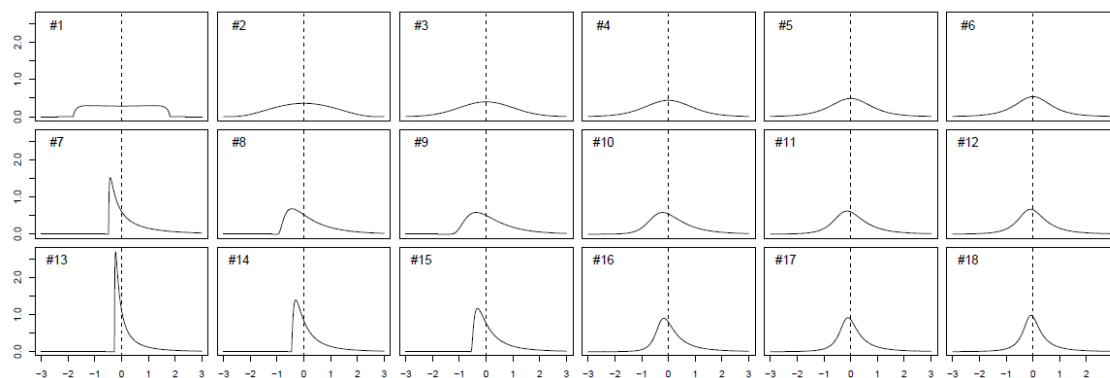
Hay que tener en cuenta que el caso  $\beta_2 < \beta_1 + 1$  es imposible para cualquier distribución (Balakrishnan y Lai, 2009). Estos y otros detalles generales se pueden encontrar en Johnson et al. (1994) y Bowman y Shenton (2006). Slifker y Shapiro (1980), Wheeler (1980), Storer (1987), Siekierski (1992), Kudus et al. (1999), Brooks et al. (2005) y George y Ramachandran (2011), entre otros, investigan diferentes técnicas de selección de familias y estimación de parámetros para el sistema de Johnson.

En este artículo, se propone un conjunto de 18 distribuciones del sistema Johnson, todas ellas con mediana = 0 y desviación estándar = 1, como una forma de probar el efecto de la asimetría y la curtosis en los valores óptimos del gráfico propuesto. Esta selección de distribuciones de Johnson, cuyos detalles se dan en la **tabla 1** y cuyas funciones de densidad de probabilidad se muestran en la **figura 1**, está destinada a cubrir una amplia gama de situaciones.

Dado que se va a explorar la capacidad de nuestro gráfico para detectar un cambio de dispersión de  $\tau = \sigma_1/\sigma_0$  en cada una de estas 18 distribuciones, se menciona la siguiente propiedad: si  $X$  sigue una distribución de Johnson con parámetros  $(\gamma, \delta, \xi, \lambda)$  y su mediana es igual a 0, entonces la distribución de Johnson  $X'$  con parámetros  $(\gamma, \delta, \tau\xi, \tau\lambda)$  y con  $\tau > 0$ , tiene la misma mediana y los mismos coeficientes estandarizados de asimetría y curtosis  $\sqrt{\beta_1}$  y  $\beta_2$  que  $X$ , mientras que su desviación estándar verifica  $\sigma[X'] = \tau\sigma[X]$ .

**TABLA 1**

#	$\sqrt{\beta_1}$	$\beta_2 - 3$	Family	$\gamma$	$\delta$	$\xi$	$\lambda$
1	0	-1.2	$S_B$	0	0.64646	-1.8153	3.6306
2	0	-0.6	$S_B$	0	1.3983	-3.1097	6.2195
3	0	0	$S_U$	0	100.00	0	100.00
4	0	1	$S_U$	0	2.3212	0	2.1094
5	0	3	$S_U$	0	1.6104	0	1.3118
6	0	6	$S_U$	0	1.3493	0	1.0000
7	2	4.3	$S_B$	1.7464	0.69076	-0.48932	6.6213
8	2	6.1	$S_B$	3.3279	1.2270	-1.0016	16.088
9	2	7.9	$S_U$	-4.8560	1.8044	-1.4190	0.19332
10	2	10.8	$S_U$	-1.0444	1.4320	-0.65538	0.82361
11	2	16.7	$S_U$	-0.52977	1.2093	-0.33154	0.73314
12	2	25.5	$S_U$	-0.34371	1.0892	-0.2023	0.63054
13	5	39.9	$S_B$	3.3715	0.74593	-0.27094	25.150
14	5	52.6	$S_B$	5.2193	0.98134	-0.47316	97.043
15	5	65.3	$S_U$	-4.0187	1.0864	-0.56652	0.028059
16	5	86.4	$S_U$	-0.75701	0.98744	-0.32033	0.37954
17	5	128.7	$S_U$	-0.43187	0.90797	-0.18538	0.37543
18	5	192.1	$S_U$	-0.29868	0.85558	-0.12122	0.34029



**ILUSTRACIÓN 1**

En términos de asimetría y curtosis, los casos 1 a 6 (sin ser exactamente idénticos) a ciertas distribuciones simétricas destacables:

- Caso 1 a una distribución uniforme.
- Caso 2 a una distribución triangular.
- Caso 3 a una distribución normal.
- Casos 4 a 6 a distribuciones t de Student con grados de libertad 10, 6, 5 respectivamente.

### 3. PROPUESTA/METODOLOGÍA

#### 3.1. ARL del CEWMA

El rendimiento del gráfico CEWMA que se definió depende de la elección de los parámetros del gráfico  $\gamma_U, \gamma_Y$  y  $LCL_Y$  (o  $UCL_Y$ ). Debido a el hecho de que el valor de cada  $Y_t$  no es independiente de los valores pasados, el ARL debe calcularse utilizando cálculos recursivos mediante Cadenas de Markov con tiempo e instantes discretos. Este método fue ideado por primera vez por Brook y Evans (1972). A continuación, se detalla cómo calcular el ARL de nuestra propuesta gráfico aplicando un enfoque de cadenas de Markov de acuerdo con Rakitzis et al. (2015) y Castagliola et al. (2019). Cabe señalar que este cálculo es exacto en el sentido que, a la inversa de lo que sucede en los cálculos ARL de un patrón EWMA clásico, nuestro gráfico CEWMA presenta un número finito de posibles diferentes estados.

A pesar de que este método ya es descrito y aplicado en Castagliola et al. (2019) para un problema similar, ha sido necesario realizar algunas adaptaciones en el momento de implementarlo. Es por este motivo que incluimos el cálculo del ARL de nuestro gráfico CEWMA como parte de la propuesta metodológica.

Desde el punto de vista de la teoría de las cadenas de Markov, una vez que el procedimiento de monitorización ha comenzado, nuestra gráfico CEWMA solo puede estar en uno de estos estados en cada instante  $t$ :

- La situación fuera de control en la que  $Y_t < LCL_Y$  (alt.  $Y_t > UCL_Y$ ). Esta situación terminal (de la cual no es posible salir una vez llegado sin reiniciar el procedimiento de monitoreo) se llama estado de absorción, en terminología de cadena de Markov.
- Uno de los diferentes estados transitorios (es decir, no absorbente) definido por todas las posibles situaciones de control.

Hay tantos estados transitorios diferentes como los diferentes resultados obtenidos al combinar los valores en control para  $Y_t$  con los valores posibles para  $R_t$ . En realidad, el término  $B_t$  (33) reúne y combina todos los valores posibles de  $Y_t$  y  $R_t$ . Dado que  $B_{t-1}$  contiene toda la información de la muestra  $t - 1$  que se usa para calcular  $Y_t$  (ver ecuación (32)), tiene perfecto sentido considerar cada posible valor bajo control para  $B_t$  como un estado transitorio diferente de nuestro gráfico CEMWA. Hay que tener en cuenta que diferentes pares  $(Y_t, R_t)$  pueden resultar en el mismo valor de  $B_t$ . Cuando está bajo control,  $Y_t$  varía de  $LCL_Y$  a  $UCL_Y$ , con  $UCL_Y = n$  en el gráfico descendente y  $LCL_Y = -n$  en el ascendente; en cuanto a  $R_t$  (34), varía de  $-(\gamma_U + \gamma_Y) + 1$  a  $(\gamma_U + \gamma_Y) - 1$ , como se deduce de su definición. Como resultado de esto, los valores bajo control de  $B_t$  pertenecerán al conjunto  $\{b_{min}, \dots, b_{max}\}$  con

$$\begin{aligned} b_{min} &= -\gamma_U - \gamma_Y(-LCL + 1) + 1 \\ b_{max} &= \gamma_U + \gamma_Y(UCL + 1) - 1, \end{aligned} \quad (45) \text{ y } (46)$$

lo que significa que hay un total de  $b_{max} - b_{min} + 1 = 2(\gamma_U + \gamma_Y) + \gamma_Y(UCL_Y - LCL_Y) - 1$  de diferentes estados transitorios. Dependiendo de los valores de  $\gamma_U, \gamma_Y$  y  $LCL_Y$  (o  $UCL_Y$ ), este número puede ser bastante grande, y también que algunos de estos estados (por ejemplo, valores bajo control de  $B_t$ ) pueden no ser directamente alcanzables desde algunos otros estados (por ejemplo, valores de  $B_{t-1}$ ).

### 3.2. Probabilidades transitorias

Las llamadas probabilidades transitorias  $q_{i,j}$  de pasar de un estado en control  $B_{t-1} = i$  a un estado en control  $B_t = j$ , con  $i, j \in \{b_{min}, \dots, b_{max}\}$ , puede ser calculado utilizando el **algoritmo 3**, que está adaptado de Castagliola et al. (2019). Estas probabilidades dependen de los valores de los parámetros  $\gamma_U, \gamma_Y$  y  $LCL_Y$  (o  $UCL_Y$ ), y el valor de la probabilidad  $p$  asociada a la dispersión actual del proceso. El algoritmo se describe de tal manera que se puede utilizar para ya sea el caso descendente o ascendente (incluso para un escenario hipotético bilateral).

Las líneas 1 a 4 del **algoritmo 3**, se basan en que para un valor de  $B_{t-1} = i$ , cada valor diferente posible del estadístico de signo  $U_t$  conduce a un valor distinto del par  $(Y_t, R_t)$  (ver ecuaciones (32) y (34)) pero algunos de ellos pueden llevar al mismo valor de  $B_t$ .

Por lo tanto,  $q_{i,j} = P(B_t = j \mid B_{t-1} = i) = \sum_{u \in \mathcal{U}(j)} P(U_t = u)$ , donde

$$\mathcal{U}(j) = \{u \in \{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\} \mid \gamma_Y y(u) + r(u) = j \text{ y } LCL_Y \leq y(u) \leq UCL_Y\}.$$

Todo esto con  $y(u) = \lfloor (\gamma_U u + i) / (\gamma_U + \gamma_Y) \rfloor$  (ver ecuación (32)) y  $r(u) = (\gamma_U u + i) - (\gamma_U + \gamma_Y)y(u)$  (ver ecuación (34)). Estas probabilidades transitorias  $q_{i,j}$ ,  $i, j \in \{b_{min}, \dots, b_{max}\}$ , son necesarias para cálculo del ARL de nuestro gráfico CEWMA.

---

### Algoritmo 3

Cálculo de probabilidades transitorias para el gráfico CEWMA. Válido para ambos tipos de límites.

---

**Input:**  $n, p, \gamma_U, \gamma_Y, LCL_Y$  ( $\leftarrow -n$  si no se provee),  $UCL_Y$  ( $\leftarrow n$  si no se provee).

// Al menos uno de  $LCL_Y$  y  $UCL_Y$  debe ser provisto.

**Output:** Matriz de probabilidades transitorias  $Q$ .

//  $p$  representa la probabilidad asociada al valor actual de  $\sigma$ . Es decir,  $p = Pr(X \notin [I_L, I_U] | \sigma)$ .

//  $\lceil \cdot \rceil$  representa la operación de redondeo hacia cero

//  $V \sim Bi(n, p)$ .

// Inicialización

$b_{min} \leftarrow -\gamma_U + \gamma_Y(LCL_Y - 1) + 1$

$b_{max} \leftarrow \gamma_U + \gamma_Y(UCL_Y + 1) - 1$

$q_{i,j} \leftarrow 0, \forall i, j \in \{b_{min}, \dots, b_{max}\}$

// Dos bucles para calcular todos los  $q_{i,j}$

**para**  $i \leftarrow b_{min}$  **a**  $b_{max}$ :

**para**  $u \leftarrow -n$  **a**  $n$  **paso**  $+ 2$ :

1             $y \leftarrow \left\lceil \frac{\gamma_U u + i}{\gamma_U + \gamma_Y} \right\rceil$

**si**  $LCL_Y \leq y \leq UCL_Y$ :

2                       $r \leftarrow (\gamma_U u + i) - (\gamma_U + \gamma_Y)y$

3                       $j \leftarrow \gamma_Y y + r$

4                       $q_{i,j} \leftarrow q_{i,j} + Pr\left(V = \frac{u+n}{2}\right)$

**devolver**  $Q = [q_{i,j}]_{i,j=b_{min}, \dots, b_{max}}$

---

### 3.3. Cálculo del ARL

Según Rakitzis et al. (2015), el ARL del gráfico CEWMA que se ha presentado se puede calcular de la siguiente manera:

$$ARL = q^T (I - Q)^{-1} \mathbf{1} \quad (47)$$

donde  $Q = [q_{i,j}]_{i,j=b_{min}, \dots, b_{max}}$  es la matriz cuadrada de probabilidades transitorias,  $q$  es el vector de probabilidades iniciales,  $I$  es la matriz identidad y  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ . El vector de probabilidades iniciales  $q$  tiene todas sus componentes iguales a cero excepto para el valor de  $B_0 = \gamma_Y Y_0 + R_0$  (ver ecuación

(33)), que se le asignará un 1 (es decir, 100% de probabilidad de que el gráfico comience en ese estado). Entonces, en el caso particular de un inicio cero, la componente de  $q$  con un 1 es la asociada a  $B_0 = \gamma_Y |n(2p_0 - 1)| + 0$  (ver **algoritmo 2**); al resto de a los componentes se les asignará un cero. Además, la desviación estándar del  $ARL$  ( $SDRL$ ) también se puede obtener como:

$$SDRL = \sqrt{q^T(I - Q)^{-2}Q1 + ARL(1 - ARL)} \quad (48)$$

Hay que destacar que las ecuaciones (47) y (48) se pueden utilizar para calcular  $ARL$  y  $SDRL$  tanto bajo control como fuera de control. Si la dimensión de  $Q$  es grande, como suele suceder, estos cálculos llevan mucho tiempo desde un punto de vista computacional. Para lograr suficientes pruebas se buscó mejorar la eficiencia computacional considerando esta matriz que lleva una carga significativa del algoritmo.

### 3.4. Búsqueda de Fibonacci

Una forma estándar de buscar en una lista ordenada consiste en situarse en el valor con índice en el medio y comparar el argumento contra este. Luego se decide si se debe trabajar con la parte inferior de la lista o superior y pasará a ser la nueva lista y se busca el valor medio de esta, iterativamente hasta encontrar el argumento buscado. Claramente, el número de ensayos necesarios (también se podría considerar como la eficiencia del algoritmo) es del orden de  $\log_2 n$  y, en consecuencia, se denomina búsqueda "binaria".

Por lo general, herramientas de búsqueda pueden ahorrar tiempo o espacio a la hora de llevar a cabo las computaciones, pero idealmente se busca tener ambos beneficios. Uno de los métodos utiliza a los números de la serie de Fibonacci. En vez de segmentar a la lista ordenada en mitades como en la búsqueda binaria, los índices de los intervalos están definidos por los dichos números. La eficiencia esperada también es del orden de  $\log_2 n$  iteraciones, pero con la gran distinción que solo se deben ejecutar operaciones matemáticas de sumas y restas en vez de hacer multiplicaciones y divisiones que llevan más carga computacional. Adicionalmente, los subgrupos definidos por dos números de Fibonacci subsiguientes en la serie son más pequeños y demandan menos cache de CPU o incluso RAM.

Para encontrar los parámetros óptimos del gráfico CEWMA se debe buscar el valor  $L_Y$ . El **algoritmo 5** utiliza la búsqueda de Fibonacci para  $L_Y$  cuando el resto de los parámetros están fijados ( $p_0, \gamma_U, \gamma_Y$ ), se basa en el trabajo de Ferguson (1960). Esta búsqueda es el equivalente o adaptación al caso discreto de la conocida búsqueda de la sección áurea de Kiefer (1953).

Para nuestro trabajo el código del algoritmo está basado en:

<https://www.geeksforgeeks.org/fibonacci-search/>

### 3.5. Algoritmos para la optimización

El objetivo general de la optimización es encontrar el mínimo  $ARL_1$  para detectar un cambio en la dispersión de la forma más rápida. Hay restricciones fundamentales como una cota mínima para el  $ARL_0$  ya que no se quiere tener una probabilidad de falsas alarmas baja. A su vez, ya que se tiene un estadístico entero, los límites de control también deben ser enteros.

Los primeros dos que se plantean en esta sección (**algoritmos 5 y 6**) se utilizan en el **algoritmo 6**, es el que finalmente genera los parámetros óptimos para el gráfico de control CEWMA según las condiciones iniciales de  $n, \tau, ARL_0min$  y para la distribución que se estudia.

A continuación, se dejan espacios y se dividen las páginas por algoritmo para más facilidad en su lectura.

---

#### Algoritmo 4

Cálculo de del ARL y SDRL para el gráfico CEWMA para una configuración concreta, asumiendo inicio desde cero (entonces se debe saber  $p_0$ ).

---

**Input:**  $n, p_0, p, \gamma_U, \gamma_Y, LCL_Y$  ( $\leftarrow$  nulo si no se provee),  $UCL_Y$  ( $\leftarrow$  nulo si no se provee).

// Al menos uno de  $LCL_Y$  y  $UCL_Y$  debe ser provisto.

**Output:** ARL y SDRL.

**si**  $LCL_Y = \text{nulo}$ :

$$LCL_Y \leftarrow -n$$

**si**  $UCL_Y = \text{nulo}$ :

$$UCL_Y \leftarrow n$$

**si**  $LCL_Y = -n$  y  $UCL_Y = n$ :

$$ARL \leftarrow +\infty$$

$$SDRL \leftarrow 0$$

**devolver** ARL, SDRL

$$b_{min} \leftarrow -\gamma_U + \gamma_Y (LCL_Y - 1) + 1$$

$$b_{max} \leftarrow \gamma_U + \gamma_Y (UCL_Y + 1) - 1$$

$$\text{dimension} \leftarrow b_{max} - b_{min} + 1 \quad // \text{ de la matrices cuadradas y vectores}$$

$$B_0 \leftarrow \gamma_Y [n(2p_0 - 1)] + 0 \quad // [\cdot] \text{ es la operación de redondeo hacia cero}$$

**si**  $B_0 < b_{min}$  o  $B_0 > b_{max}$ :

$$ARL \leftarrow 0$$

$$SDRL \leftarrow 0$$

**devolver** ARL, SDRL

$$\text{inicial}_i \leftarrow \text{initial\_value} - b_{min} \quad // \text{ posición del valor inicial en el vector}$$

$$q \leftarrow \text{zeros}(\text{dimension}, 1) \quad // \text{ vector de probabilidades iniciales}$$

$$q[\text{inicial}_i, 1] \leftarrow 1 \quad // \text{ única posición con probabilidad que no es cero}$$

$$Q \leftarrow \text{algoritmo 3} \quad // \text{ matriz de probabilidades transitorias}$$

$$I \leftarrow \text{identity}[\text{dimension}, \text{dimension}] \quad // \text{ matriz identidad}$$

$$\mathbf{1} \leftarrow \text{ones}[\text{dimension}, 1] \quad // \text{ vector de unos}$$

$$ARL \leftarrow q^T (I - Q)^{-1} \mathbf{1}$$

$$SDRL \leftarrow \sqrt{q^T (I - Q)^{-2} Q \mathbf{1} + ARL (1 - ARL)}$$

**devolver** ARL, SDRL

---



---

### Algoritmo 5

Búsqueda de Fibonacci para encontrar el valor  $L$  que debe ser utilizado para obtener el gráfico CEWMA óptimo.

---

**Input:**  $n, p_0, \gamma_U, \gamma_Y, ARL_0min, \tau$ .

**Output:**  $L$  y  $ARL_0$ .

$N \leftarrow 2n + 1$

//Valores candidatos

$L_{cand} \leftarrow None$

$ARL_{0\ cand} \leftarrow None$

$SDRL_{0\ cand} \leftarrow None$

$ARL_{0\ for\ n} \leftarrow None$

$SDRL_{0\ for\ n} \leftarrow None$

$current_{pos} \leftarrow None$

//Inicialización

$f_1 \leftarrow 0$

$f_2 \leftarrow 1$

$f_3 \leftarrow f_1 + f_2$

**mientras**  $f_3 < N$ :

$f_1 \leftarrow f_2$

$f_2 \leftarrow f_3$

$f_3 \leftarrow f_1 + f_2$

$pos_{start} \leftarrow 0$

**si**  $\tau < 1$ :

$ARL_{0\ for\ n}, SDRL_{0\ for\ n} \leftarrow \text{algoritmo 4}(LCL_Y = -n)$

**sino:**

$ARL_{0\ for\ n}, SDRL_{0\ for\ n} \leftarrow \text{algoritmo 4}(UCL_Y = n)$

$cont \leftarrow ARL_{0\ for\ n} \geq ARL_0min$                       //continuar o no, booleana

---

---

**mientras**  $cont$ :

```
si  $\min(pos_{start} + f_3, N) - (pos_{start} + 1) \leq 0$ :  
     $cont \leftarrow \mathbf{Falso}$  //última iteración  
si  $f_1 \neq 0$ :  
     $current_{pos} \leftarrow \min(pos_{start} + f_1, N)$   
sino:  
     $current_{pos} \leftarrow \min(pos_{start} + 1, N)$   
 $L_{cand} \leftarrow current_{pos} - n - 1$   
si  $L_{cand} = n$ :  
     $ARL_{0\ cand} \leftarrow ARL_{0\ for\ n}$   
     $SDRL_{0\ cand} \leftarrow SDRL_{0\ for\ n}$   
sino  $tau < 1$ :  
     $ARL_{0\ cand}, SDRL_{0\ cand} \leftarrow \mathbf{algoritmo\ 4}(LCL\_Y = -L_{cand})$   
sino:  
     $ARL_{0\ cand}, SDRL_{0\ cand} \leftarrow \mathbf{algoritmo\ 4}(UCL\_Y = L_{cand})$   
si  $ARL_{0\ cand} < ARL_{0\ min}$ :  
     $f_3 = f_2$   
     $f_2 = f_1$   
     $f_1 = f_3 - f_2$   
     $pos_{start} \leftarrow current_{pos}$   
sino:  
     $f_3 \leftarrow f_1$   
     $f_2 \leftarrow f_2 - f_1$   
     $f_1 \leftarrow f_3 - f_2$ 
```

**devolver**  $L_{cand}, ARL_{0\ cand}$

---

---

### Algoritmo 6

Obtiene los parámetros del gráfico CEWMA óptimo, caso unilateral.

---

**Input:**  $n, \tau, ARL_0min$ , distribución de  $X$ .

**Output:**  $p_0, \gamma_U, \gamma_Y, L_Y, ARL_1, ARL_0real, p_1real$ .

//  $F_X^{-1}$ : función inversa del CDF de  $X$

//  $F_{X'}$ : función CDF de  $X'$ , luego de ocurrido el cambio

$\gamma_{max} \leftarrow 25$

$L_{max} \leftarrow 2n + 1$

//Inicialización

$ARL_0 \leftarrow 0$

$SDRL_0 \leftarrow 0$

$ARL_1 \leftarrow 0$

$SDRL_1 \leftarrow 0$

$ARL_1best \leftarrow \infty$

$p_0best \leftarrow nulo$

$L_Ybest \leftarrow nulo$

$ARL_0real \leftarrow nulo$

$p_1real \leftarrow nulo$

//Se considera un número limitado de opciones para  $p_0$

$p_0test \leftarrow [0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95]$

---

---

**para**  $p_0$  **en**  $p_0$  **test**:

$$I_L \leftarrow F_X^{-1}\left(\frac{p_0}{2} \mid \sigma = \sigma_0\right)$$

$$I_U \leftarrow F_X^{-1}\left(1 - \frac{p_0}{2} \mid \sigma = \sigma_0\right)$$

$$p_1 \leftarrow 1 - F_{X'}(I_U) + F_{X'}(I_L)$$

**para**  $\gamma_U \leftarrow 1$  **a**  $\gamma_{max}$ :

**para**  $\gamma_U \leftarrow 1$  **a**  $\gamma_{max}$ :

$L_{cand}, ARL_{0\ cand} \leftarrow$  **algoritmo 5**

**si**  $L_{cand} \neq$  *nulo*:

**si**  $\tau < 1$ :

$ARL_1, SDRL_1 \leftarrow$  **algoritmo 4**( $LCL_Y = -L_{cand}$ )

**sino**:

$ARL_1, SDRL_1 \leftarrow$  **algoritmo 4**( $UCL_Y = L_{cand}$ )

**si**  $ARL_1 < ARL_1$  *best*:

$ARL_1$  *best*  $\leftarrow ARL_1$

$p_0$  *best*  $\leftarrow p_0$

$\gamma_U$  *best*  $\leftarrow \gamma_U$

$\gamma_Y$  *best*  $\leftarrow \gamma_Y$

**si**  $\tau < 1$ :

$L_Y$  *best*  $\leftarrow -L_{cand}$

**sino**:

$L_Y$  *best*  $\leftarrow L_{cand}$

$ARL_{0\ real} \leftarrow ARL_{0\ cand}$

$p_1$  *real*  $\leftarrow p_1$

**devolver**  $p_0$  *best*,  $\gamma_U$  *best*,  $\gamma_Y$  *best*,  $L_Y$  *best*,  $ARL_1$  *best*,  $ARL_{0\ real}$ ,  $p_1$  *real*

---

### 3.6. ANOVA

Se busca realizar una cantidad variada de pruebas, cambiando los parámetros iniciales que son:

- $n$ : número de observaciones en cada muestra.
- $\tau$ : cambio en la dispersión
- $J_{id}$ : número que indica la distribución de Jonhson que se utiliza.

En la terminología de diseño de experimentos, estamos considerando lo que se conoce como un diseño factorial completo.

Posteriormente, se realiza un estudio ANOVA para determinar y cuantificar cuanto contribuyen los factores y sus interacciones sobre la variabilidad y por lo tanto comportamiento de una variable aleatoria o también variable dependiente.

Vinculando esto con los objetivos del trabajo se busca ver si hay diferencias en el  $ARL_1$  del gráfico Shewhart y el CEWMA. En caso de haberlos en qué casos conviene utilizar uno u el otro método y finalmente de qué forma los factores influyen en la diferencia. La variable resultado es:

$$DifARL_1 = \frac{ARL_{1\ CEWMA} - ARL_{1\ Shewhart}}{ARL_{1\ Shewhart}} \quad (49)$$

Estudios relativamente recientes demuestran que el ANOVA paramétrico es bastante robusto ante el incumplimiento de hipótesis de normalidad (véanse por ejemplo Rasch y Guiard, 2004 y Basso et al., 2007). Por estos motivos, se ha elegido utilizar la técnica clásica paramétrica de ANOVA para analizar los datos producidos.

A partir del estadístico F se evaluará si cada factor y las interacciones entre ellos son significativos. Adicionalmente, se mostrarán en gráficos los Box Plots de las diferencias de  $ARL_1$  según los parámetros iniciales  $n$ ,  $\tau$  y  $J_{id}$  y los gráficos de las interacciones con su posterior análisis. Con el método de la diferencia honestamente significativa de Tukey Tukey (1949) (honestly significant difference; intervalos HSD) se hace el contraste entre los distintos niveles de los Box Plots anteriores y se determina entre cuáles hay diferencias relevantes.

En todos los casos se trabaja con un nivel de confianza del 95%. También se realizan test para verificar la normalidad de los datos y se estudia la existencia de heterocedasticidad.

Se repite todo lo anterior para otra variable resultado que es la diferencia en la mejora relativa del  $ARL_1$ . La mejora relativa es la relación entre el  $ARL_1$  y  $ARL_0$ :

$$MR = \frac{ARL_1 - ARL_0}{ARL_0} \quad (50)$$

Luego la diferencia entre el CEWMA y Shewhart será:

$$DifMR = \frac{MR_{CEWMA} - MR_{Shewhart}}{MR_{Shewhart}} \quad (51)$$

Para este caso todos los resultados del estudio ANOVA se encuentran en el ANEXO.

## 4. RESULTADOS/EJECUCIÓN

### 4.1. Construcción del código

Para ejecutar el algoritmo formulado en el capítulo anterior, se procede a escribir el código que realice las mismas operaciones. Para ello se necesita una herramienta que provea celeridad en los cálculos, pero a su vez ya que se desea la facilidad de redacción ya que no va a ser un producto a gran escala ni ser utilizado múltiples veces.

Se procede a escribir todo en Python, ya que cuenta con una gran cantidad de librerías para matemáticas, operaciones matriciales y estadística. Adicionalmente, es un código legible y se puede lograr el objetivo en significativamente menos líneas de código que en otros idiomas de más bajo nivel (por bajo nivel se refiere al nivel de detalle más cercano al hardware).

Se deja  $\alpha = 0.0027$  constante ya que en la práctica no es un parámetro que se busca modificar y ese valor es de común uso.

Los valores empleados para los otros parámetros mencionados son:

- $n$ : 10, 15, 20, 25, 30.
- $\tau$ : 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 2, 4.
- $J_{id}$ : *identificación de las distribuciones del 0 al 17.*

Cómo se menciona previamente se recomienda utilizar al menos 10 observaciones por muestra, es por eso este es el menor valor de  $n$ . Siento  $\tau = 1$  la situación en que la dispersión no cambia, se buscan valores para aumento y disminución de esta con grandes y pequeñas diferencias. Todo esto para evaluar si se producen resultados similares a los gráficos paramétricos en los que el EWMA tiene un mejor desempeño sobre todo en casos de cambios menores.

Finalmente, se tiene un total de 540 iteraciones que a su vez se realizan de forma ortogonal, beneficiando el análisis ANOVA posterior. Esto se lleva a cabo tanto para el Shewhart como para el CEWMA y a partir de allí las comparaciones correspondientes.

### 4.2. Mejora de eficiencia computacional

El gran obstáculo para obtener los resultados ha sido el tiempo que demora cada iteración. Inicialmente tardaba cerca de media hora cada una en un procesador Intel i5 de 8va generación. Considerando el gran número de iteraciones, llevaría aproximadamente 270 horas o 12 días de carga computacional continua.

Para mejorar el tiempo de ejecución se buscó primero las líneas de código que tomaban la mayor parte de la iteración. Éstas eran las operaciones matemáticas, la inversión matricial y la búsqueda repetida de probabilidades binomiales.

La solución para cada una de ellas fue:

- Utilizar Cython para las partes que realizaban gran cantidad de cálculos matemáticos. Cython es una herramienta que permite ejecutar código de lenguajes C dentro de Python. Se pueden definir funciones que ejecuten en uno de los dos idiomas o en ambos, a su vez es recomendable declarar las variables tal como se hace en C y ahorrar operaciones. Jupyter Notebook además ofrece la practicidad que una celda puede ser definida en Cython, siendo compilada y luego esa función puede ser utilizada en otras celdas. Cabe advertir al lector que no siempre es conveniente traducir todo el código a Cython ya que puede haber problemas de incompatibilidad con ciertas librerías o funciones de Python, conviene priorizar solo el código que lleva más tiempo.
- No invertir la matriz de forma tradicional, sino emplear la función *solve* de la librería de Numpy para algebra lineal (*numpy.linalg*). Es de amplio conocimiento que, en matrices grandes y dispersas, la inversión puede ser costosa computacionalmente. La función utilizada busca resolver el sistema con iteraciones, en vez de invertir la matriz.
- Almacenar en un vector todas las probabilidades binomiales, ya que son discretas se puede hacer una vez y luego simplemente acceder a la posición indicada cuando se necesita el valor.

Todas estas acciones en conjunto han reducido el tiempo de ejecución en aproximadamente un orden de magnitud. Llevando cada iteración entre 3 y 6 minutos, según el parámetro  $n$ , cuanto más grande lleva mayor tiempo. Esto no se deja en un tiempo total aproximado de 40 horas con el procesador anterior, que de forma continua no es conveniente realizarlo en un computador personal.

Por lo que se recurre a ejecutar el algoritmo en la nube, más específicamente en Microsoft Azure/Machine Learning/Compute Instance. Utilizando un procesador [GPU - 1 x NVIDIA Tesla K80](#) de 6 núcleos y no siendo el RAM un limitante, ha llevado cerca de 50 horas.



### 4.3. Estructura del código

Todo el código se puede encontrar en el Anexo pero se provee en esta sección un mapa o resumen del mismo describiendo respectivamente cada celda del archivo en Jupyter Notebook.

#### *Importar*

**Cargar las librerías utilizadas: numpy, pandas, scipy.stats, maths, cython.**

#### *Funciones de Johnson*

**Definición de la función CDF y su inversa para las distribuciones de Johnson.**

#### *J.ID*

**Vectores con los parámetros de las 18 distribuciones a utilizar.**

#### *Matrix Q*

**Función para el cálculo de la matriz Q con el vector de probabilidades binomiales.**

#### *Loop Matrix Q*

**Dentro de la función anterior, iteración general separado para poder ejecutarla en Cython.**

#### *ARL y SDRL del CEWMA*

**Función para calcular lo que se indica, tanto para una como dos colas.**

#### *ARL y SDRL Cython*

**Las operaciones matriciales en Cython para mejorar el tiempo de ejecución.**

#### *Fibonacci search*

**Utilizada para buscar candidatos de L y  $ARL_0$ .**

#### *Optimal CEWMA*

**Función que engloba todo y encuentra los parámetros óptimos del CEWMA según las condiciones iniciales.**

#### *Tests*

**Definición de todas las condiciones iniciales a utilizar en las pruebas, ejecución iterativa de la función anterior y se guardan todos los resultados en un archivo CSV.**

#### 4.4. Resultados de las pruebas

Los resultados detallados de las pruebas del CEWMA para cada escenario se encuentran en la **tabla 7** del anexo. Las dos comparaciones con el gráfico Shewhart están en la **tabla 8**.

#### 4.5. Estudio ANOVA

Como se menciona previamente, el estudio ANOVA se realiza con tres factores  $n$ ,  $\tau$  y  $J_{id}$  y sus interacciones. Considerando todo esto los resultados son:

**TABLA 2**

	<i>sum_sq</i>	<i>df</i>	<i>F</i>	<i>PR(&gt;F)</i>
<i>C(n, Sum)</i>	2.100297	4	108.6796	1.52E-59
<i>C(tau, Sum)</i>	48.08271	5	1990.427	2.69E-249
<i>C(J_id, Sum)</i>	3.074025	17	37.42706	2.53E-67
<i>C(n, Sum):C(tau, Sum)</i>	2.758351	20	28.5461	1.13E-60
<i>C(n, Sum):C(J_id, Sum)</i>	0.140347	68	0.427191	1.00E+00
<i>C(J_id, Sum):C(tau, Sum)</i>	2.248479	85	5.475164	7.01E-30
<i>Residual</i>	1.642675	340	NaN	NaN

Con un nivel de significación del 95% se descarta la interacción entre  $n$ , y  $J_{id}$  obteniendo los siguientes valores:

**TABLA 3**

	<i>sum_sq</i>	<i>df</i>	<i>F</i>	<i>PR(&gt;F)</i>
<i>C(n, Sum)</i>	2.100297	4.0	120.150117	1.216651e-67
<i>C(tau, Sum)</i>	48.082711	5.0	2200.505127	1.605115e-292
<i>C(J_id, Sum)</i>	3.074025	17.0	41.377274	9.491721e-78
<i>C(n, Sum):C(tau, Sum)</i>	2.758351	20.0	31.558980	3.586455e-70
<i>C(J_id, Sum):C(tau, Sum)</i>	2.248479	85.0	6.053037	3.532649e-36
<i>Residual</i>	1.783022	408.0	NaN	NaN

Por lo tanto, se consideran significativos los tres factores, así como las interacciones  $\tau$  con  $n$  y  $\tau$  con  $J_{id}$ .

Para un entendimiento inicial de los factores individuales se muestran los Box Plots de los  $ARL_1$  de Shewhart y CEWMA, además de las diferencias relativas entre los dos.

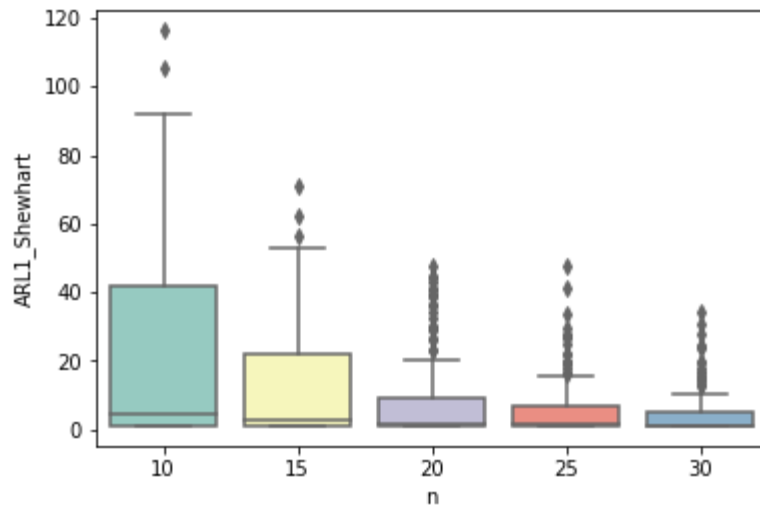


ILUSTRACIÓN 2

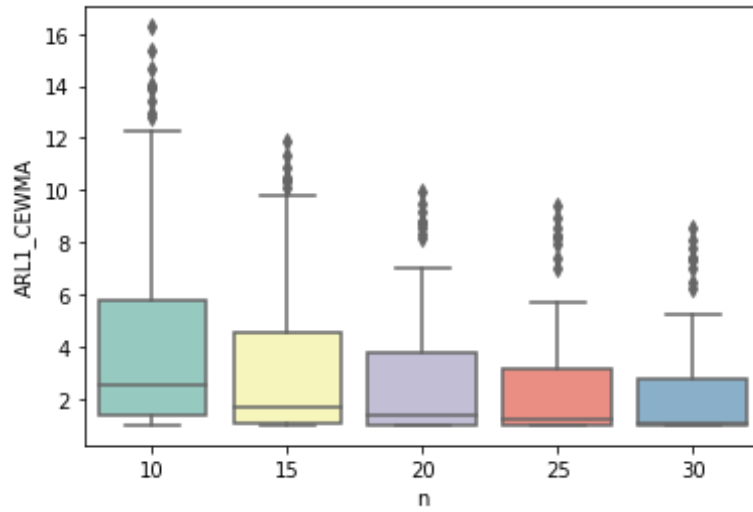


ILUSTRACIÓN 3

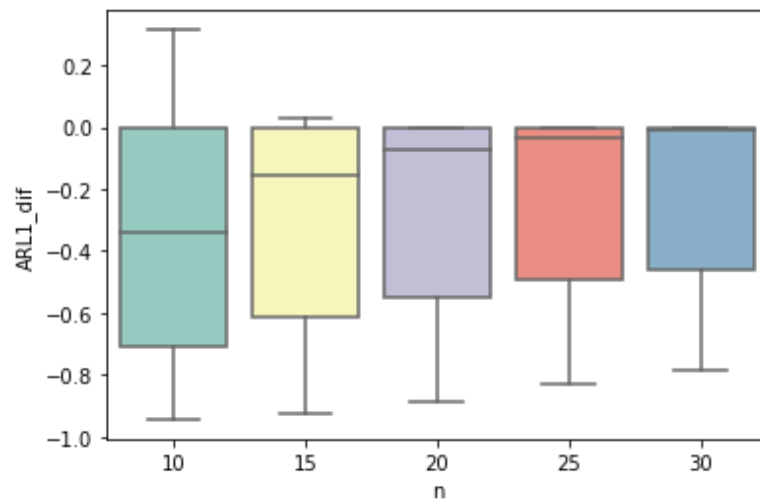


ILUSTRACIÓN 4

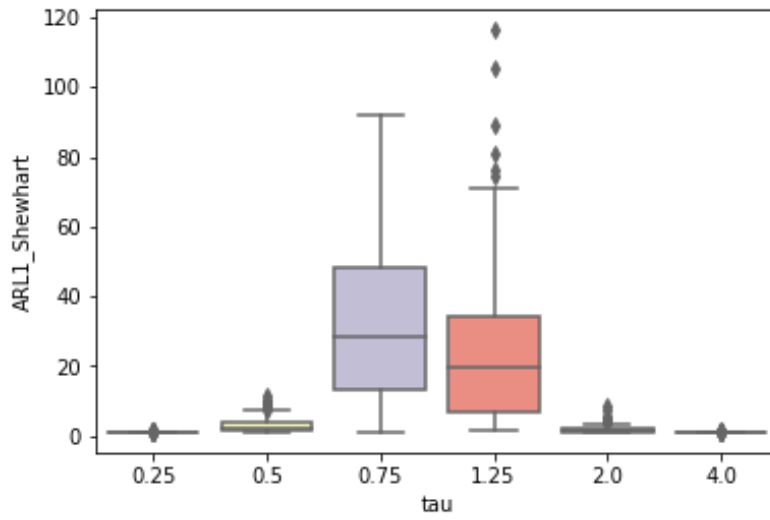


ILUSTRACIÓN 5

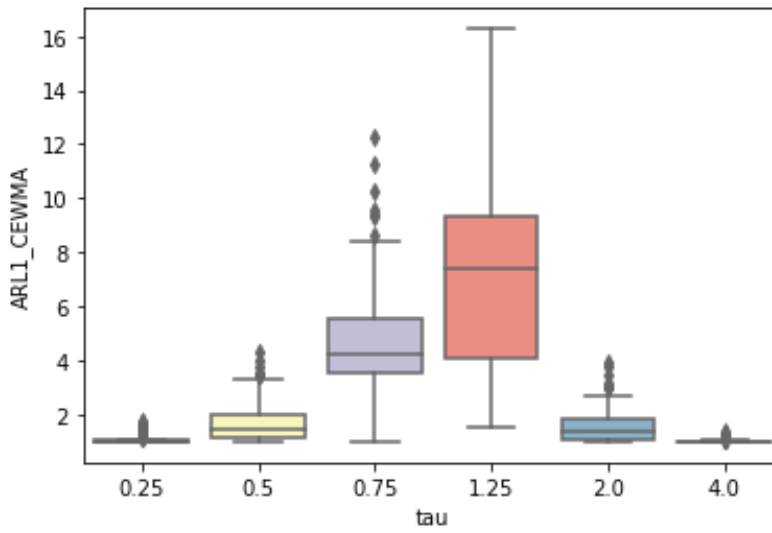


ILUSTRACIÓN 6

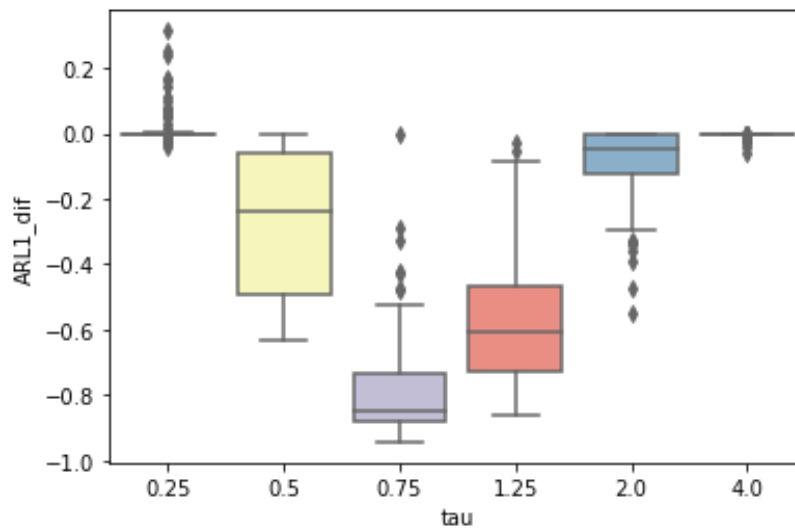


ILUSTRACIÓN 7

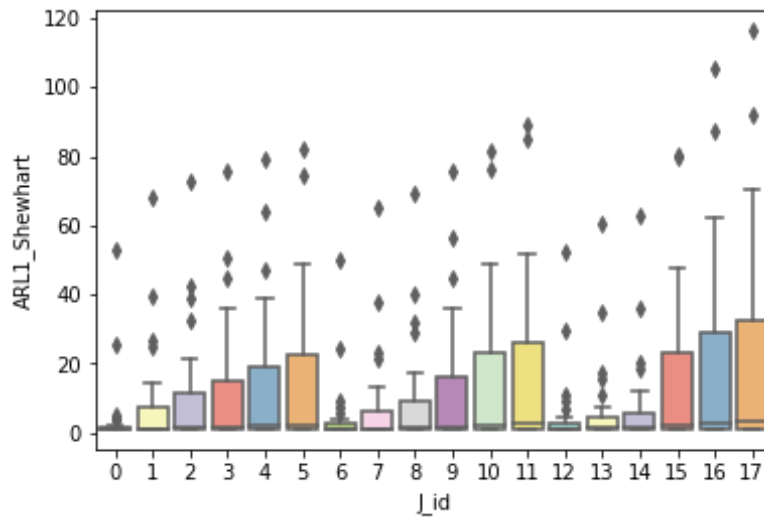


ILUSTRACIÓN 8

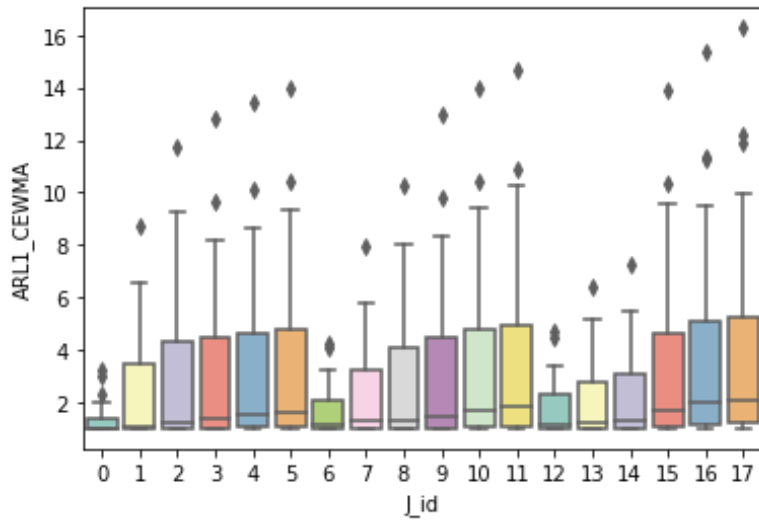


ILUSTRACIÓN 9

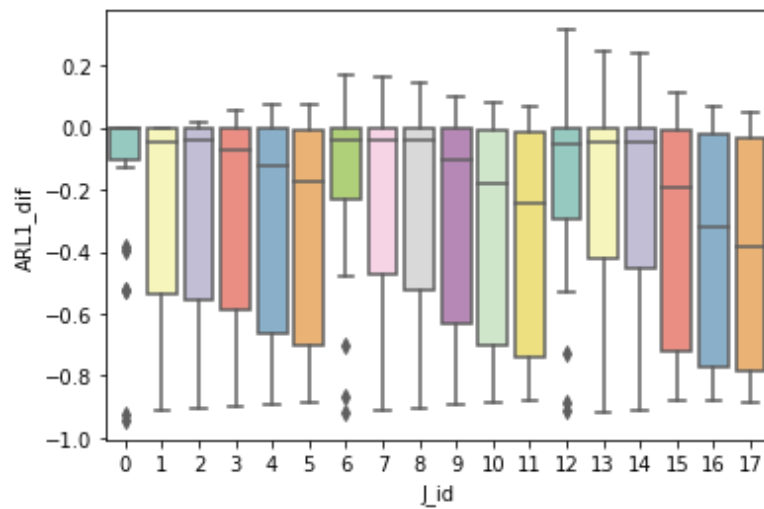
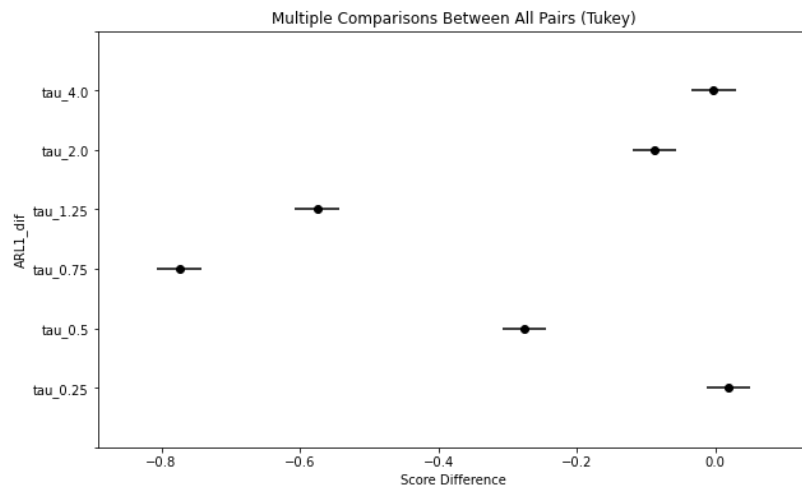
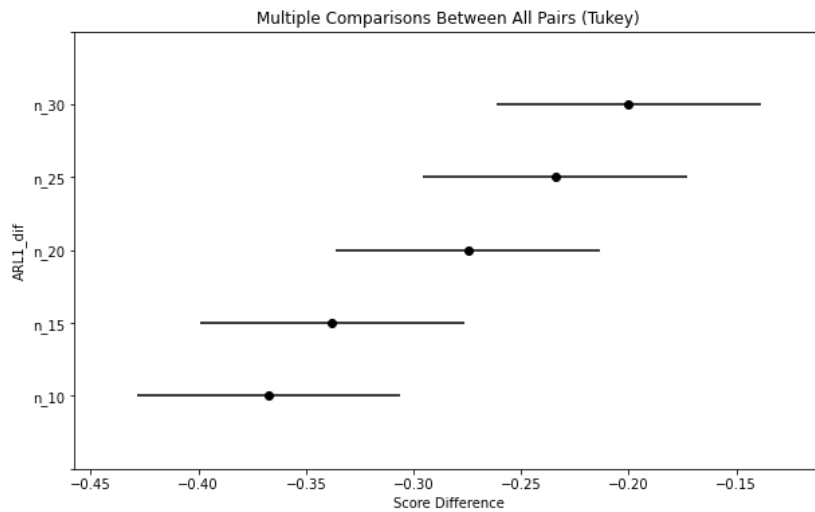


ILUSTRACIÓN 10

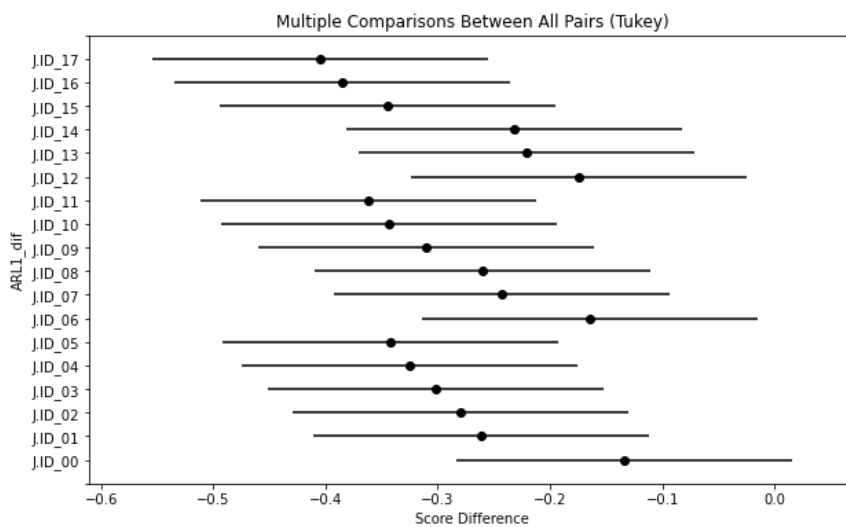
Estudiando las diferencias significativas para los tres factores se comparan los intervalos HSD obteniendo.



**ILUSTRACIÓN 11**



**ILUSTRACIÓN 12**



**ILUSTRACIÓN 13**

Respecto al tamaño de muestra se observa que a medida que se incrementa, la variabilidad y mediana del  $ARL_1$  del gráfico Shewhart (**ilustración 2**) y CEWMA (**ilustración 3**) disminuyen, lo cual es esperable ya se tiene más representatividad. Más importante aún, es notar que disminuye la diferencia relativa entre estos dos gráficos (**ilustración 4**), llegando a tener una mediana de prácticamente 0. También se observa que para cualquier tipo de muestra el CEWMA tiene una diferencia relativa favorable, significando que detecta los cambios en promedio con menos muestras ( $ARL_1$  menor).

Según los cambios de dispersión  $\tau$ , los  $ARL_1$  de ambos gráficos de control aumentan (**ilustraciones 5 y 6**) para valores cercanos a 1, es decir cambios pequeños. La diferencia relativa se hace considerable también cuanto más cercano a 1 sea  $\tau$  (**ilustración 7**), llegando a ser superior al 80% la reducción en  $ARL_1$  en favor del CEWMA. A su vez, para casi todos los cambios excepto algunos valores extremos ( $\tau = 0.25$  o  $4$ ), el CEWMA tiene un  $ARL_1$  menor que el gráfico Shewhart.

El impacto del tipo de distribución de Johnson en los  $ARL_1$  de ambos casos se puede ver si se recuerda que se dividen a las 18 distribuciones en 3 grupos de 6 según la asimetría (**ilustraciones 8 y 9**). Es decir que tienen la misma asimetría los  $J_{id}$  entre  $0 - 5$ ,  $6 - 11$  y  $12 - 17$ . Dentro de cada grupo la curtosis aumenta a medida que aumenta  $J_{id}$ . A partir de esto, se observa como con una misma asimetría aumenta el  $ARL_1$  con el incremento de la curtosis. Siendo la diferencia relativa favorable al CEWMA a medida que se incrementa dicha curtosis (**ilustración 10**). Cabe destacar que la asimetría tiene un impacto menor en  $ARL_1$  y a medida que aumenta muestra algunos casos en que el gráfico Shewhart tiene el menor  $ARL_1$ .

En referencia a los intervalos HSD, se notan diferencias significativas en la comparación relativa del  $ARL_1$  entre el gráfico Shewhart y CEWMA para casi todos los tipos de cambios llevados en las pruebas (**ilustración 11**), excepto para los dos extremos ( $\tau = 0.25$  o  $4$ ). El tamaño de muestra solo ofrece diferencias significativas entre los menores y mayores valores utilizados (**ilustración 12**). Las distribuciones de Johnson no muestran diferencias significativas en sus intervalos (**ilustración 13**).

Nuevamente se nota que el mismo análisis para la mejora relativa (51) ofrece relaciones muy similares, por lo que sus resultados se adjuntan en el anexo electrónico para no repetir la información.

## 5. CONCLUSIONES

En el trabajo se han aplicado técnicas y herramientas de monitorización estadística de la calidad, optimización, cálculo computacional y otras más, para mejorar el poder de detección de cambios en la dispersión utilizando el estadístico de signo.

En el caso de distribuciones normales y los gráficos “clásicos” es de común conocimiento que el EWMA tiene mejor desempeño que un gráfico Shewhart a medida que los cambios se disminuyen. Por lo tanto, era una hipótesis esperable que esto mismo ocurriera para la comparación con gráficos no paramétricos. Los resultados lo confirman, adicionando que no necesariamente es simétrica esta mejoría, ya que, se observa cómo para ligeros decrementos ( $\tau = 1.25$ ) en la dispersión tienen un  $ARL_1$  menor que para ligeros incrementos ( $\tau = 0.75$ ). Asimismo, cabe destacar los diferentes resultados de desempeño obtenidos para distribuciones con igual asimetría y diferente curtosis. Esto destaca la necesidad por parte del usuario de conocer dichas características de la distribución a monitorizar.

Para el uso de esta herramienta en la práctica se recomienda solo en casos en que no se conozca la distribución subyacente del proceso o se sepa de antemano que no es normal. Desde luego, que también el objetivo del control debe ser sobre la dispersión. Si se presentan estas condiciones, es recomendable el uso del CEWMA frente a un gráfico Shewhart para cambios menores y moderados, sobre todo para distribuciones con elevada curtosis y debido a su conveniencia en que puede tener un mejor desempeño con bajo número de observaciones por muestra. Esto último, además de su desempeño detectando cambios más rápido, puede incurrir en ahorros relevantes de costos para el control de la producción.

La limitación del trabajo han sido principalmente el tiempo que conlleva realizar cada prueba, limitando la variedad valores en los factores empleados. Por lo tanto, es una mejora potencial la disminución en carga computacional del código o su implementación en lenguajes tales como C. Adicionalmente, se podría profundizar el estudio ampliando la línea de comparación, contrastando el CEWMA contra un método paramétrico EWMA para distintas distribuciones. Reforzando de esta forma la utilidad de los métodos no paramétricos.



## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Aichouni, M., Messaoudene, N.A., Al-Ghonamy, A., (2014). On the Use of Johnson's Distribution in Quality and Process Improvement. *International Journal of Economics and Statistics* 2, 362–367.
- Balakrishnan, N., Lai, C.D., 2009. *Continuous Bivariate Distributions*. Springer, Dordrecht, 2<sup>nd</sup> ed.
- Behnel, S., Bradshaw, R., Citro, C., Dalcin, L., Seljebotn, D. S., & Smith, K. (2011). Cython: The best of both worlds. *Computing in Science & Engineering*, 13(2), 31–39.
- Bowman, K.O., Shenton, L.R., (2006). Johnson's System of Distributions. In: S. Kotz, C.B. Read, *Journal of Chemical Physics* 116, 4426.
- Brook, D., Evans, D.A., (1972). An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length. *Biometrika* 59 (3), 539–549.
- Brooks, C., Clare, A., Dalle Molle, J., Persaud, G., (2005). A comparison of extreme value theory approaches for determining value at risk. *Journal of Empirical Finance* 12 (2), 339–352.
- Carsel, R.F., Parrish, R.S., (1988). Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water Resources Research* 24 (5), 755–769.
- Castagliola, P., García Castellanos, J.V., (2008). Process capability indices dedicated to bivariate non normal distributions. *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 14 (1), 87–101.
- Castagliola, P., Tran, K.P., Celano, G., Rakitzis, A.C., Maravelakis, P.E., (2019). An EWMA-type sign chart with exact run length properties. *Journal of Quality Technology* 51 (1), 51–63.
- Chakraborti, S., Van Der Laan, P., Bakir, S.T., (2001). Nonparametric Control Charts: An Overview and Some Results. *Journal of Quality Technology* 33 (3), 304–315.
- Chou, Y.M., Polansky, A.M., Mason, R.L., (1998). Transforming Non-Normal Data to Normality in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology* 30 (2), 133–141.
- Farnum, N.R., (1996). Using Johnson curves to describe non-normal process data. *Quality Engineering* 9 (2), 329–336.
- Ferguson DE (1960). Fibonacci searching. *Communications of the ACM*. 3(12), 648.
- Flynn, M.R., (2006). Fitting human exposure data with the Johnson SB distribution. *Journal of Exposure Science and Environmental Epidemiology* 16 (1), 56–62.
- George, F., Ramachandran, K.M., (2008). A mixture model approach for gene selection using Johnson's System and Bayes Formula. *Neural, Parallel and Scientific Computations* 16 (1), 45–58.
- George, F., Ramachandran, K.M., (2011). Estimation of Parameters of Johnson's System of Distributions. *Journal of Modern Applied Statistical Methods* 10 (2), 494–504.
- Goedhart, R., Schoonhoven, M., Does, R.J., (2019). Nonparametric control of the conditional performance in statistical process monitoring. *Journal of Quality Technology* pp. 1–15.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., ... Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585, 357–362.
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95.
- Johnson, N.L., (1949). Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika* 36 (1/2), 149–176.

- Johnson, N.L., Kemp, A.W., Kotz, S., (2005). *Univariate Discrete Distributions*. Wiley and Sons, 3<sup>rd</sup> ed.
- Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N., (1994). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 1. Wiley and Sons, New York, NY, 2nd ed.
- Kiefer J. (1953). Sequential minimax search for a maximum. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 4(3),502–506.
- Kudus, K.A., Ahmad, M.I., Lapongan, J., (1999). Nonlinear regression approach to estimating Johnson S B parameters for diameter data. *Canadian Journal of Forest Research* 29 (3), 310–314.
- Lagos, I.J., Vargas, J.A., (2003). Sistema de familias de distribuciones de Johnson, una alternativa para el manejo de datos no normales en cartas de control. *Revista Colombiana de Estadística* 26 (1), 25–40.
- Lucas, J.M., Saccucci, M.S., (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics* 32 (1), 1–12.
- McKinney, W., & others. (2010). Data structures for statistical computing in python. In *Proceedings of the 9th Python in Science Conference* (Vol. 445, pp. 51–56).
- Parrish, R.S., Spencer, H.J., Xu, P., (2009). Distribution modeling and simulation of gene expression data. *Computational Statistics and Data Analysis* 53 (5), 1650–1660.
- Pawar, V.Y., Shirke, D.T., Khilare, S.K., (2018). A Nonparametric Control Chart for Process Variability Based on Quantiles. *International Journal of Statistics and Economics* 19 (3).
- Porcel Marí J (2021). *Diseño óptimo de gráficos de control no paramétricos para la dispersión basados en el estadístico de signo en presencia de errores de redondeo*. Trabajo Final de Máster. Universitat Politècnica de València.
- Rakitzis, A.C., Castagliola, P., Maravelakis, P.E., (2015). A new memory-type monitoring technique for count data. *Computers and Industrial Engineering* 85, 235–247.
- Roberts, S.W., (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics* 1 (3), 239–250.
- Seabold, S., & Perktold, J. (2010). statsmodels: Econometric and statistical modeling with python. In *9th Python in Science Conference*.
- Shewhart, W.A., (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. Van Nostrand, New York.
- Siekierski, K., (1992). Comparison and Evaluation of Three Methods of Estimation of the Johnson Sb Distribution. *Biometrical Journal* 34 (7), 879–895.
- Slifker, J.F., Shapiro, S.S., (1980). The Johnson System: Selection and Parameter Estimation. *Technometrics* 22 (2), 239–246.
- Storer, R.H., (1987). *Adaptive estimation by maximum likelihood fitting of Johnson distributions*. Phd, Georgia Institute of Technology.
- Tukey, J.W., (1949). Comparing Individual Means in the Analysis of Variance. *Biometrics* 5 (2), 99–114.
- Tukey, J.W. (1960) A Survey of Sampling from Contaminated Distributions. In: Oklin, I., Ed., *Contributions to Probability and Statistics*, Stanford University Press, Redwood City, CA.
- Van Rossum, G., & Drake, F. L. (2009). *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA: CreateSpace.

- Van Rossum, G. (2020). *The Python Library Reference*, release 3.8.2. Python Software Foundation.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., ... SciPy 1.0 Contributors. (2020). SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261–272.
- Waskom, M., Botvinnik, Olga, O;Kane, Drew, Hobson, Paul, Lukauskas, Saulius, Gemperline, David C, Qalieh, Adel. (2017). mwaskom/seaborn, v0.8.1 (September 2017). *Zenodo*.
- Weiß, C.H., 2009. EWMA Monitoring of Correlated Processes of Poisson Counts. *Quality Technology and Quantitative Management* 6 (2), 137–153.
- Wheeler, R.E., 1980. Quantile Estimators of Johnson Curve Parameters. *Biometrika* 67 (3), 725.

## 7. ANEXO

### 7.1. Electrónico

Todo el código empleado, las tablas de resultados y ambos estudios ANOVA se encuentran en:

[https://github.com/matiasrisso/TFM\\_CEWMA](https://github.com/matiasrisso/TFM_CEWMA)

### 7.2. Gráficos

#### 7.2.1. Interacciones

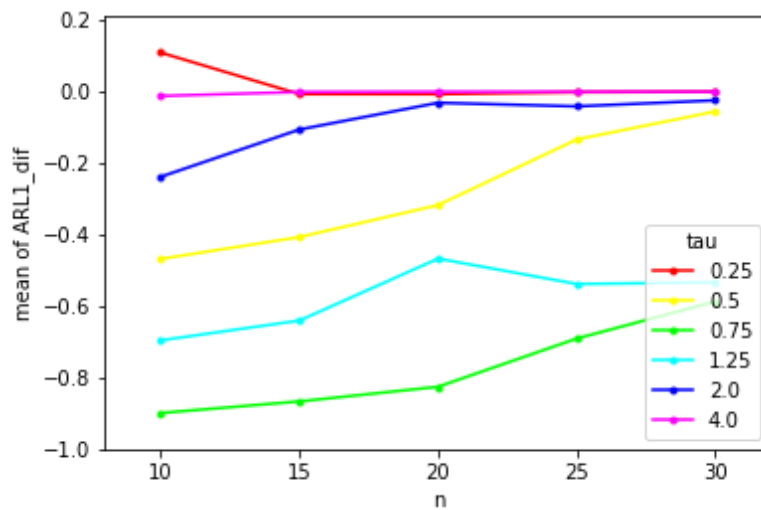


ILUSTRACIÓN 14

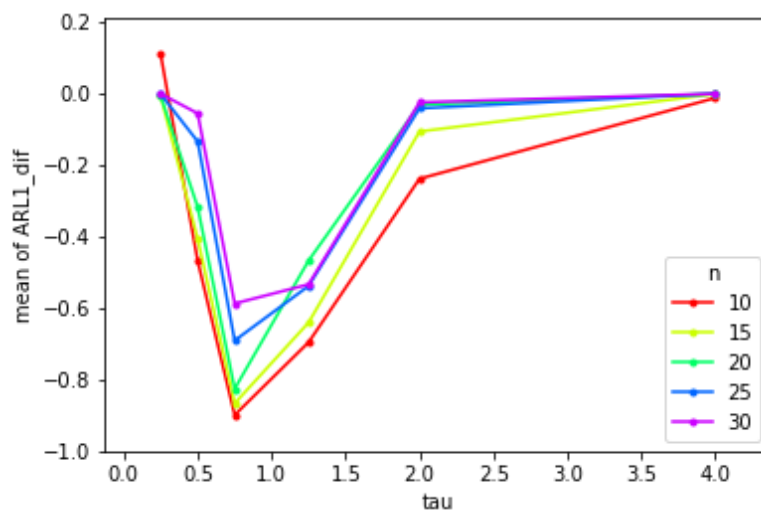


ILUSTRACIÓN 15

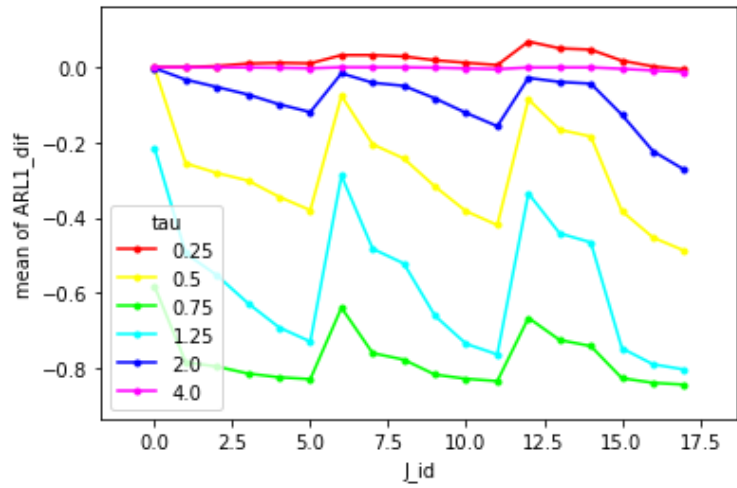


ILUSTRACIÓN 16

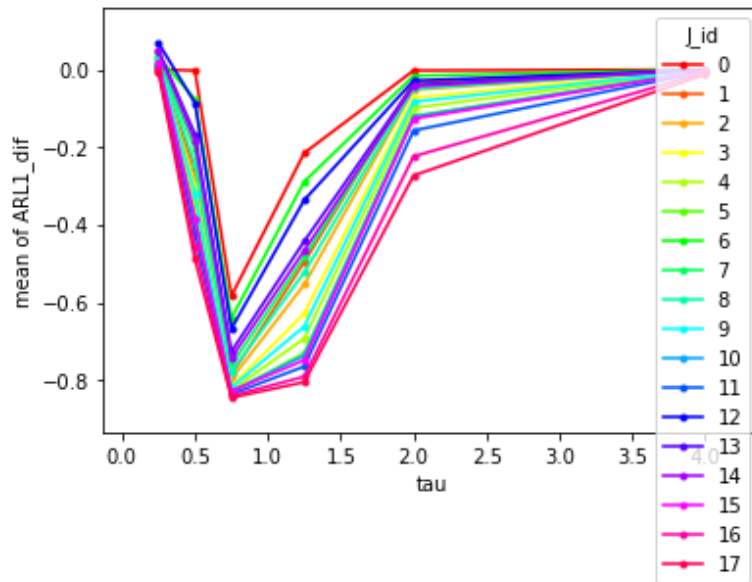


ILUSTRACIÓN 17

### 7.2.2. Residuos

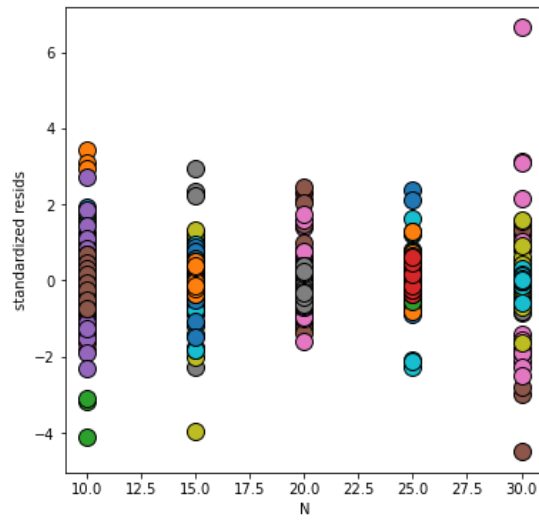


ILUSTRACIÓN 18

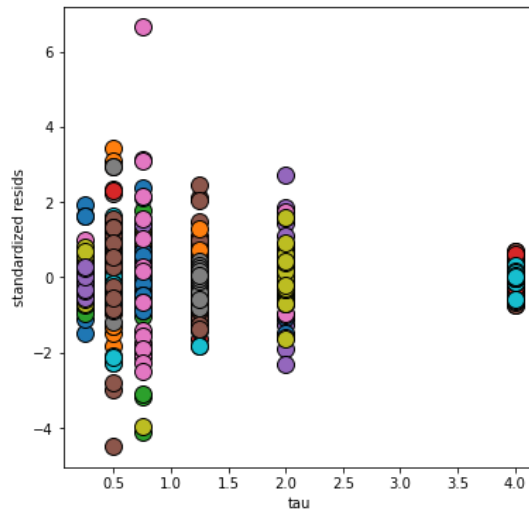


ILUSTRACIÓN 19

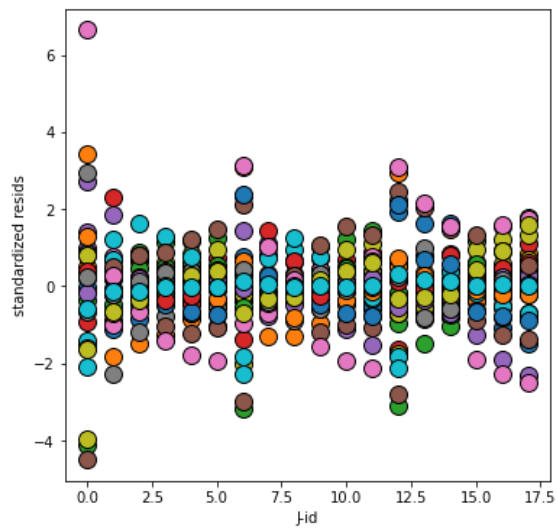


ILUSTRACIÓN 20

## 7.3. Tablas

### 7.3.1. Medias por factor

**TABLA 4**

N	AVERAGE OF ARL1 CEWMA	AVERAGE OF ARL1 SHEWHART	AVERAGE OF DIF ARL1
10	4.31	22.21	-36.73%
15	3.21	13.01	-33.79%
20	2.59	9.02	-27.47%
25	2.31	6.09	-23.42%
30	2.14	4.93	-20.00%
<b>GRAND TOTAL</b>	<b>2.91</b>	<b>11.05</b>	<b>-28.28%</b>

**TABLA 5**

TAU	AVERAGE OF ARL1 CEWMA	AVERAGE OF ARL1 SHEWHART	AVERAGE OF DIF ARL1
0.25	1.09	1.06	1.89%
0.5	1.70	2.94	-27.62%
0.75	4.83	33.60	-77.40%
1.25	7.21	25.73	-57.50%
2	1.61	1.93	-8.80%
4	1.03	1.03	-0.25%
<b>GRAND TOTAL</b>	<b>2.91</b>	<b>11.05</b>	<b>-28.28%</b>

**TABLA 6**

J_ID	AVERAGE OF ARL1 CEWMA	AVERAGE OF ARL1 SHEWHART	AVERAGE OF DIF ARL1
0	1.33	4.02	-13.38%
1	2.35	7.99	-26.15%
2	2.94	9.93	-28.01%
3	3.24	11.62	-30.13%
4	3.47	13.44	-32.50%
5	3.64	14.87	-34.19%
6	1.68	4.48	-16.48%
7	2.30	7.42	-24.30%
8	2.68	8.78	-26.07%
9	3.33	12.26	-31.03%
10	3.64	14.96	-34.34%
11	3.83	16.69	-36.25%
12	1.79	4.99	-17.49%
13	2.07	6.35	-22.05%
14	2.20	6.89	-23.16%
15	3.63	15.13	-34.52%
16	4.02	18.63	-38.54%
17	4.24	20.48	-40.46%
<b>GRAND TOTAL</b>	<b>2.91</b>	<b>11.05</b>	<b>-28.28%</b>

### 7.3.2. Intervalos HSD

**TABLA 7**

<b>group1</b>	<b>group2</b>	<b>meandiff</b>	<b>p-adj</b>	<b>lower</b>	<b>upper</b>	<b>reject</b>
tau_0.25	tau_0.5	-0.295	0.001	-0.3589	-0.2312	True
tau_0.25	tau_0.75	-0.7929	0.001	-0.8567	-0.7291	True
tau_0.25	tau_1.25	-0.5939	0.001	-0.6577	-0.5301	True
tau_0.25	tau_2.0	-0.1068	0.001	-0.1706	-0.043	True
tau_0.25	tau_4.0	-0.0214	0.9	-0.0852	0.0425	False
tau_0.5	tau_0.75	-0.4978	0.001	-0.5617	-0.434	True
tau_0.5	tau_1.25	-0.2989	0.001	-0.3627	-0.235	True
tau_0.5	tau_2.0	0.1882	0.001	0.1244	0.252	True
tau_0.5	tau_4.0	0.2737	0.001	0.2099	0.3375	True
tau_0.75	tau_1.25	0.199	0.001	0.1352	0.2628	True
tau_0.75	tau_2.0	0.686	0.001	0.6222	0.7499	True
tau_0.75	tau_4.0	0.7715	0.001	0.7077	0.8353	True
tau_1.25	tau_2.0	0.4871	0.001	0.4232	0.5509	True
tau_1.25	tau_4.0	0.5725	0.001	0.5087	0.6363	True
tau_2.0	tau_4.0	0.0855	0.002	0.0216	0.1493	True

**TABLA 8**

<b>group1</b>	<b>group2</b>	<b>meandiff</b>	<b>p-adj</b>	<b>lower</b>	<b>upper</b>	<b>reject</b>
n_10	n_15	0.0294	0.9	-0.0932	0.152	False
n_10	n_20	0.0926	0.236	-0.03	0.2152	False
n_10	n_25	0.1331	0.0256	0.0105	0.2557	True
n_10	n_30	0.1672	0.0019	0.0446	0.2898	True
n_15	n_20	0.0632	0.6047	-0.0594	0.1858	False
n_15	n_25	0.1037	0.1412	-0.0189	0.2263	False
n_15	n_30	0.1378	0.0186	0.0153	0.2604	True
n_20	n_25	0.0405	0.8917	-0.0821	0.1631	False
n_20	n_30	0.0746	0.4573	-0.048	0.1972	False
n_25	n_30	0.0341	0.9	-0.0885	0.1567	False

**TABLA 9**

<b>group1</b>	<b>group2</b>	<b>meandiff</b>	<b>p-adj</b>	<b>lower</b>	<b>upper</b>	<b>reject</b>
J.ID_0	J.ID_1	-0.1277	0.9	-0.4268	0.1714	False
J.ID_0	J.ID_10	-0.2097	0.5543	-0.5088	0.0895	False
J.ID_0	J.ID_11	-0.2287	0.401	-0.5278	0.0704	False
J.ID_0	J.ID_12	-0.0411	0.9	-0.3403	0.258	False
J.ID_0	J.ID_13	-0.0868	0.9	-0.3859	0.2124	False
J.ID_0	J.ID_14	-0.0978	0.9	-0.3969	0.2013	False
J.ID_0	J.ID_15	-0.2114	0.5409	-0.5105	0.0877	False
J.ID_0	J.ID_16	-0.2516	0.2296	-0.5507	0.0475	False
J.ID_0	J.ID_17	-0.2708	0.1307	-0.57	0.0283	False
J.ID_0	J.ID_2	-0.1463	0.9	-0.4454	0.1528	False
J.ID_0	J.ID_3	-0.1675	0.875	-0.4666	0.1316	False



J.ID_0	J.ID_4	-0.1913	0.6941	-0.4904	0.1078	False
J.ID_0	J.ID_5	-0.2081	0.5658	-0.5073	0.091	False
J.ID_0	J.ID_6	-0.031	0.9	-0.3302	0.2681	False
J.ID_0	J.ID_7	-0.1092	0.9	-0.4083	0.1899	False
J.ID_0	J.ID_8	-0.1269	0.9	-0.426	0.1722	False
J.ID_0	J.ID_9	-0.1765	0.8063	-0.4756	0.1226	False
J.ID_1	J.ID_10	-0.082	0.9	-0.3811	0.2172	False
J.ID_1	J.ID_11	-0.101	0.9	-0.4001	0.1981	False
J.ID_1	J.ID_12	0.0866	0.9	-0.2126	0.3857	False
J.ID_1	J.ID_13	0.0409	0.9	-0.2582	0.34	False
J.ID_1	J.ID_14	0.0299	0.9	-0.2692	0.329	False
J.ID_1	J.ID_15	-0.0837	0.9	-0.3828	0.2154	False
J.ID_1	J.ID_16	-0.1239	0.9	-0.423	0.1752	False
J.ID_1	J.ID_17	-0.1432	0.9	-0.4423	0.156	False
J.ID_1	J.ID_2	-0.0186	0.9	-0.3177	0.2805	False
J.ID_1	J.ID_3	-0.0398	0.9	-0.3389	0.2593	False
J.ID_1	J.ID_4	-0.0636	0.9	-0.3627	0.2355	False
J.ID_1	J.ID_5	-0.0805	0.9	-0.3796	0.2187	False
J.ID_1	J.ID_6	0.0966	0.9	-0.2025	0.3958	False
J.ID_1	J.ID_7	0.0185	0.9	-0.2806	0.3176	False
J.ID_1	J.ID_8	0.0008	0.9	-0.2983	0.2999	False
J.ID_1	J.ID_9	-0.0488	0.9	-0.3479	0.2503	False
J.ID_10	J.ID_11	-0.019	0.9	-0.3181	0.2801	False
J.ID_10	J.ID_12	0.1685	0.8672	-0.1306	0.4676	False
J.ID_10	J.ID_13	0.1229	0.9	-0.1762	0.422	False
J.ID_10	J.ID_14	0.1119	0.9	-0.1872	0.411	False
J.ID_10	J.ID_15	-0.0018	0.9	-0.3009	0.2974	False
J.ID_10	J.ID_16	-0.042	0.9	-0.3411	0.2572	False
J.ID_10	J.ID_17	-0.0612	0.9	-0.3603	0.2379	False
J.ID_10	J.ID_2	0.0633	0.9	-0.2358	0.3625	False
J.ID_10	J.ID_3	0.0422	0.9	-0.257	0.3413	False
J.ID_10	J.ID_4	0.0184	0.9	-0.2807	0.3175	False
J.ID_10	J.ID_5	0.0015	0.9	-0.2976	0.3006	False
J.ID_10	J.ID_6	0.1786	0.7904	-0.1205	0.4777	False
J.ID_10	J.ID_7	0.1005	0.9	-0.1987	0.3996	False
J.ID_10	J.ID_8	0.0828	0.9	-0.2163	0.3819	False
J.ID_10	J.ID_9	0.0331	0.9	-0.266	0.3323	False
J.ID_11	J.ID_12	0.1875	0.7225	-0.1116	0.4867	False
J.ID_11	J.ID_13	0.1419	0.9	-0.1572	0.441	False
J.ID_11	J.ID_14	0.1309	0.9	-0.1682	0.43	False
J.ID_11	J.ID_15	0.0173	0.9	-0.2819	0.3164	False
J.ID_11	J.ID_16	-0.0229	0.9	-0.3221	0.2762	False
J.ID_11	J.ID_17	-0.0422	0.9	-0.3413	0.2569	False
J.ID_11	J.ID_2	0.0824	0.9	-0.2167	0.3815	False
J.ID_11	J.ID_3	0.0612	0.9	-0.2379	0.3603	False
J.ID_11	J.ID_4	0.0374	0.9	-0.2617	0.3365	False
J.ID_11	J.ID_5	0.0205	0.9	-0.2786	0.3196	False
J.ID_11	J.ID_6	0.1976	0.6457	-0.1015	0.4968	False

J.ID_11	J.ID_7	0.1195	0.9	-0.1796	0.4186	False
J.ID_11	J.ID_8	0.1018	0.9	-0.1973	0.4009	False
J.ID_11	J.ID_9	0.0522	0.9	-0.247	0.3513	False
J.ID_12	J.ID_13	-0.0456	0.9	-0.3447	0.2535	False
J.ID_12	J.ID_14	-0.0566	0.9	-0.3558	0.2425	False
J.ID_12	J.ID_15	-0.1703	0.8538	-0.4694	0.1288	False
J.ID_12	J.ID_16	-0.2105	0.548	-0.5096	0.0886	False
J.ID_12	J.ID_17	-0.2297	0.392	-0.5288	0.0694	False
J.ID_12	J.ID_2	-0.1052	0.9	-0.4043	0.1939	False
J.ID_12	J.ID_3	-0.1264	0.9	-0.4255	0.1728	False
J.ID_12	J.ID_4	-0.1501	0.9	-0.4493	0.149	False
J.ID_12	J.ID_5	-0.167	0.8786	-0.4661	0.1321	False
J.ID_12	J.ID_6	0.0101	0.9	-0.289	0.3092	False
J.ID_12	J.ID_7	-0.0681	0.9	-0.3672	0.2311	False
J.ID_12	J.ID_8	-0.0857	0.9	-0.3849	0.2134	False
J.ID_12	J.ID_9	-0.1354	0.9	-0.4345	0.1637	False
J.ID_13	J.ID_14	-0.011	0.9	-0.3101	0.2881	False
J.ID_13	J.ID_15	-0.1247	0.9	-0.4238	0.1745	False
J.ID_13	J.ID_16	-0.1649	0.895	-0.464	0.1343	False
J.ID_13	J.ID_17	-0.1841	0.7487	-0.4832	0.115	False
J.ID_13	J.ID_2	-0.0595	0.9	-0.3587	0.2396	False
J.ID_13	J.ID_3	-0.0807	0.9	-0.3798	0.2184	False
J.ID_13	J.ID_4	-0.1045	0.9	-0.4036	0.1946	False
J.ID_13	J.ID_5	-0.1214	0.9	-0.4205	0.1777	False
J.ID_13	J.ID_6	0.0557	0.9	-0.2434	0.3548	False
J.ID_13	J.ID_7	-0.0224	0.9	-0.3216	0.2767	False
J.ID_13	J.ID_8	-0.0401	0.9	-0.3392	0.259	False
J.ID_13	J.ID_9	-0.0898	0.9	-0.3889	0.2094	False
J.ID_14	J.ID_15	-0.1136	0.9	-0.4128	0.1855	False
J.ID_14	J.ID_16	-0.1538	0.9	-0.453	0.1453	False
J.ID_14	J.ID_17	-0.1731	0.8325	-0.4722	0.126	False
J.ID_14	J.ID_2	-0.0485	0.9	-0.3476	0.2506	False
J.ID_14	J.ID_3	-0.0697	0.9	-0.3688	0.2294	False
J.ID_14	J.ID_4	-0.0935	0.9	-0.3926	0.2056	False
J.ID_14	J.ID_5	-0.1104	0.9	-0.4095	0.1888	False
J.ID_14	J.ID_6	0.0667	0.9	-0.2324	0.3659	False
J.ID_14	J.ID_7	-0.0114	0.9	-0.3105	0.2877	False
J.ID_14	J.ID_8	-0.0291	0.9	-0.3282	0.27	False
J.ID_14	J.ID_9	-0.0787	0.9	-0.3779	0.2204	False
J.ID_15	J.ID_16	-0.0402	0.9	-0.3393	0.2589	False
J.ID_15	J.ID_17	-0.0594	0.9	-0.3586	0.2397	False
J.ID_15	J.ID_2	0.0651	0.9	-0.234	0.3642	False
J.ID_15	J.ID_3	0.0439	0.9	-0.2552	0.343	False
J.ID_15	J.ID_4	0.0201	0.9	-0.279	0.3193	False
J.ID_15	J.ID_5	0.0033	0.9	-0.2958	0.3024	False
J.ID_15	J.ID_6	0.1804	0.777	-0.1187	0.4795	False
J.ID_15	J.ID_7	0.1022	0.9	-0.1969	0.4013	False
J.ID_15	J.ID_8	0.0845	0.9	-0.2146	0.3837	False

J.ID_15	J.ID_9	0.0349	0.9	-0.2642	0.334	False
J.ID_16	J.ID_17	-0.0192	0.9	-0.3183	0.2799	False
J.ID_16	J.ID_2	0.1053	0.9	-0.1938	0.4044	False
J.ID_16	J.ID_3	0.0841	0.9	-0.215	0.3832	False
J.ID_16	J.ID_4	0.0603	0.9	-0.2388	0.3595	False
J.ID_16	J.ID_5	0.0435	0.9	-0.2556	0.3426	False
J.ID_16	J.ID_6	0.2206	0.47	-0.0785	0.5197	False
J.ID_16	J.ID_7	0.1424	0.9	-0.1567	0.4415	False
J.ID_16	J.ID_8	0.1247	0.9	-0.1744	0.4239	False
J.ID_16	J.ID_9	0.0751	0.9	-0.224	0.3742	False
J.ID_17	J.ID_2	0.1245	0.9	-0.1746	0.4237	False
J.ID_17	J.ID_3	0.1034	0.9	-0.1958	0.4025	False
J.ID_17	J.ID_4	0.0796	0.9	-0.2195	0.3787	False
J.ID_17	J.ID_5	0.0627	0.9	-0.2364	0.3618	False
J.ID_17	J.ID_6	0.2398	0.3096	-0.0593	0.5389	False
J.ID_17	J.ID_7	0.1617	0.9	-0.1375	0.4608	False
J.ID_17	J.ID_8	0.144	0.9	-0.1551	0.4431	False
J.ID_17	J.ID_9	0.0943	0.9	-0.2048	0.3935	False
J.ID_2	J.ID_3	-0.0212	0.9	-0.3203	0.2779	False
J.ID_2	J.ID_4	-0.045	0.9	-0.3441	0.2542	False
J.ID_2	J.ID_5	-0.0618	0.9	-0.361	0.2373	False
J.ID_2	J.ID_6	0.1153	0.9	-0.1839	0.4144	False
J.ID_2	J.ID_7	0.0371	0.9	-0.262	0.3362	False
J.ID_2	J.ID_8	0.0194	0.9	-0.2797	0.3186	False
J.ID_2	J.ID_9	-0.0302	0.9	-0.3293	0.2689	False
J.ID_3	J.ID_4	-0.0238	0.9	-0.3229	0.2753	False
J.ID_3	J.ID_5	-0.0407	0.9	-0.3398	0.2585	False
J.ID_3	J.ID_6	0.1364	0.9	-0.1627	0.4356	False
J.ID_3	J.ID_7	0.0583	0.9	-0.2408	0.3574	False
J.ID_3	J.ID_8	0.0406	0.9	-0.2585	0.3397	False
J.ID_3	J.ID_9	-0.009	0.9	-0.3081	0.2901	False
J.ID_4	J.ID_5	-0.0169	0.9	-0.316	0.2822	False
J.ID_4	J.ID_6	0.1602	0.9	-0.1389	0.4593	False
J.ID_4	J.ID_7	0.0821	0.9	-0.217	0.3812	False
J.ID_4	J.ID_8	0.0644	0.9	-0.2347	0.3635	False
J.ID_4	J.ID_9	0.0148	0.9	-0.2844	0.3139	False
J.ID_5	J.ID_6	0.1771	0.8019	-0.122	0.4762	False
J.ID_5	J.ID_7	0.0989	0.9	-0.2002	0.3981	False
J.ID_5	J.ID_8	0.0813	0.9	-0.2178	0.3804	False
J.ID_5	J.ID_9	0.0316	0.9	-0.2675	0.3308	False
J.ID_6	J.ID_7	-0.0782	0.9	-0.3773	0.221	False
J.ID_6	J.ID_8	-0.0958	0.9	-0.395	0.2033	False
J.ID_6	J.ID_9	-0.1455	0.9	-0.4446	0.1536	False
J.ID_7	J.ID_8	-0.0177	0.9	-0.3168	0.2814	False
J.ID_7	J.ID_9	-0.0673	0.9	-0.3664	0.2318	False
J.ID_8	J.ID_9	-0.0496	0.9	-0.3488	0.2495	False

### 7.3.3. Resultados de las pruebas

**TABLA 10**

n	tau	J.id	p.0	G.U	G.Y	L.Y	alpha	ARL.0	p.1	beta	ARL.1	MR
10	0.25	0	0.5	2	1	-6	0.0018	550.77	0.0000	0.0000	1.00	-0.9982
10	0.25	1	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.0000	0.0000	1.00	-0.9979
10	0.25	2	0.5	20	18	-5	0.0021	467.69	0.0070	0.0635	1.07	-0.9977
10	0.25	3	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.0200	0.1568	1.19	-0.9975
10	0.25	4	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.0344	0.2366	1.31	-0.9972
10	0.25	5	0.5	11	9	-5	0.0021	467.67	0.0458	0.2883	1.41	-0.9970
10	0.25	6	0.5	18	16	-5	0.0021	467.69	0.0460	0.2896	1.41	-0.9970
10	0.25	7	0.5	17	16	-5	0.0021	467.69	0.0346	0.2376	1.31	-0.9972
10	0.25	8	0.5	6	5	-5	0.0021	467.67	0.0309	0.2187	1.28	-0.9973
10	0.25	9	0.5	10	8	-5	0.0021	466.75	0.0380	0.2537	1.34	-0.9971
10	0.25	10	0.5	14	13	-5	0.0021	467.69	0.0516	0.3122	1.45	-0.9969
10	0.25	11	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.0624	0.3532	1.55	-0.9967
10	0.25	12	0.5	15	12	-5	0.0021	466.75	0.0708	0.3825	1.62	-0.9965
10	0.25	13	0.5	12	10	-5	0.0021	467.67	0.0569	0.3329	1.50	-0.9968
10	0.25	14	0.5	15	13	-5	0.0021	467.69	0.0526	0.3164	1.46	-0.9969
10	0.25	15	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.0640	0.3591	1.56	-0.9967
10	0.25	16	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.0793	0.4101	1.70	-0.9964
10	0.25	17	0.5	10	8	-5	0.0021	466.75	0.0894	0.4412	1.79	-0.9962
10	0.5	0	0.5	12	10	-5	0.0021	467.67	0.0130	0.1100	1.12	-0.9976
10	0.5	1	0.3	18	6	-9	0.0025	398.88	0.0133	0.5369	2.16	-0.9946
10	0.5	2	0.3	18	6	-9	0.0025	398.88	0.0382	0.6178	2.62	-0.9934
10	0.5	3	0.3	2	7	-6	0.0022	448.81	0.0552	0.6630	2.97	-0.9934
10	0.5	4	0.3	4	14	-6	0.0022	448.81	0.0700	0.6948	3.28	-0.9927
10	0.5	5	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.2191	0.7128	3.48	-0.9911
10	0.5	6	0.5	15	12	-5	0.0021	466.75	0.1402	0.5768	2.36	-0.9949
10	0.5	7	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.1433	0.5844	2.41	-0.9948
10	0.5	8	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.1623	0.6197	2.63	-0.9933
10	0.5	9	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.1991	0.6792	3.12	-0.9920
10	0.5	10	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.2194	0.7133	3.49	-0.9911
10	0.5	11	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.2309	0.7329	3.74	-0.9904
10	0.5	12	0.5	6	10	-4	0.0026	390.29	0.1511	0.6029	2.52	-0.9935
10	0.5	13	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.1415	0.5800	2.38	-0.9949
10	0.5	14	0.5	5	4	-5	0.0021	466.75	0.1415	0.5801	2.38	-0.9949
10	0.5	15	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.2203	0.7149	3.51	-0.9910
10	0.5	16	0.5	3	5	-4	0.0026	390.29	0.2418	0.7513	4.02	-0.9897
10	0.5	17	0.5	3	8	-3	0.0024	423.44	0.2521	0.7669	4.29	-0.9899
10	0.75	0	0.2	1	1	-9	0.0008	1268.35	0.0000	0.6667	3.00	-0.9976
10	0.75	1	0.2	2	16	-7	0.0022	464.41	0.0692	0.8296	5.87	-0.9874
10	0.75	2	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1670	0.8575	7.02	-0.9814
10	0.75	3	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1768	0.8720	7.81	-0.9793
10	0.75	4	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1853	0.8845	8.66	-0.9770
10	0.75	5	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1911	0.8930	9.34	-0.9752
10	0.75	6	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1062	0.7665	4.28	-0.9886

10	0.75	7	0.3	2	20	-5	0.0027	376.91	0.1455	0.8252	5.72	-0.9848
10	0.75	8	0.3	2	20	-5	0.0027	376.91	0.1582	0.8443	6.42	-0.9830
10	0.75	9	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1802	0.8770	8.13	-0.9784
10	0.75	10	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1915	0.8936	9.40	-0.9751
10	0.75	11	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1977	0.9025	10.25	-0.9728
10	0.75	12	0.3	2	20	-5	0.0027	376.91	0.1132	0.7769	4.48	-0.9881
10	0.75	13	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1322	0.8053	5.14	-0.9864
10	0.75	14	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1396	0.8165	5.45	-0.9855
10	0.75	15	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.1927	0.8953	9.55	-0.9747
10	0.75	16	0.3	1	10	-5	0.0027	376.91	0.2037	0.9111	11.25	-0.9701
10	0.75	17	0.3	2	20	-5	0.0027	376.91	0.2088	0.9182	12.23	-0.9676
10	1.25	0	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.2337	0.6897	3.22	-0.9926
10	1.25	1	0.05	2	8	-8	0.0019	525.31	0.1397	0.8857	8.75	-0.9833
10	1.25	2	0.1	4	23	-7	0.0027	372.85	0.1882	0.9148	11.74	-0.9685
10	1.25	3	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4975	0.9219	12.80	-0.9658
10	1.25	4	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4942	0.9257	13.46	-0.9641
10	1.25	5	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4917	0.9286	14.01	-0.9626
10	1.25	6	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.2059	0.7565	4.11	-0.9905
10	1.25	7	0.05	2	8	-8	0.0019	525.31	0.1466	0.8741	7.94	-0.9849
10	1.25	8	0.05	2	8	-8	0.0019	525.31	0.1296	0.9028	10.29	-0.9804
10	1.25	9	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4965	0.9230	12.99	-0.9653
10	1.25	10	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4918	0.9285	13.98	-0.9627
10	1.25	11	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4888	0.9319	14.69	-0.9608
10	1.25	12	0.05	14	23	-7	0.0020	509.27	0.1918	0.7865	4.68	-0.9908
10	1.25	13	0.05	5	8	-7	0.0020	509.27	0.1624	0.8445	6.43	-0.9874
10	1.25	14	0.05	12	19	-7	0.0020	509.27	0.1536	0.8618	7.24	-0.9858
10	1.25	15	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4923	0.9279	13.86	-0.9630
10	1.25	16	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4862	0.9349	15.36	-0.9590
10	1.25	17	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.4829	0.9385	16.26	-0.9566
10	2	0	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5266	0.1210	1.14	-0.9974
10	2	1	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.3826	0.3550	1.55	-0.9964
10	2	2	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.3271	0.4721	1.89	-0.9956
10	2	3	0.05	22	16	-6	0.0023	432.78	0.2877	0.5614	2.28	-0.9947
10	2	4	0.1	4	2	-4	0.0026	388.97	0.3566	0.6270	2.68	-0.9931
10	2	5	0.1	6	3	-4	0.0026	388.97	0.3376	0.6699	3.03	-0.9922
10	2	6	0.05	14	10	-6	0.0023	432.78	0.4291	0.2669	1.36	-0.9968
10	2	7	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.3663	0.3882	1.63	-0.9962
10	2	8	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.3408	0.4420	1.79	-0.9959
10	2	9	0.1	6	3	-4	0.0026	388.97	0.3702	0.5964	2.48	-0.9936
10	2	10	0.1	4	2	-4	0.0026	388.97	0.3357	0.6741	3.07	-0.9921
10	2	11	0.2	14	14	-2	0.0026	387.04	0.4639	0.7086	3.43	-0.9911
10	2	12	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.3931	0.3343	1.50	-0.9965
10	2	13	0.05	5	3	-6	0.0023	432.78	0.3706	0.3793	1.61	-0.9963
10	2	14	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.3627	0.3956	1.65	-0.9962
10	2	15	0.1	4	2	-4	0.0026	388.97	0.3315	0.6834	3.16	-0.9919
10	2	16	0.2	10	10	-2	0.0026	387.04	0.4500	0.7328	3.74	-0.9903

10	2	17	0.4	2	24	-1	0.0027	374.89	0.6431	0.7458	3.93	-0.9895
10	4	0	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.7652	0.0024	1.00	-0.9977
10	4	1	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.6700	0.0183	1.02	-0.9976
10	4	2	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.6241	0.0378	1.04	-0.9976
10	4	3	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5855	0.0632	1.07	-0.9975
10	4	4	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5446	0.1008	1.11	-0.9974
10	4	5	0.1	9	4	-4	0.0026	388.97	0.6109	0.1357	1.16	-0.9970
10	4	6	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.6375	0.0310	1.03	-0.9976
10	4	7	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.6167	0.0419	1.04	-0.9976
10	4	8	0.05	4	3	-6	0.0023	432.78	0.6067	0.0481	1.05	-0.9976
10	4	9	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5541	0.0911	1.10	-0.9975
10	4	10	0.1	4	2	-4	0.0026	388.97	0.6051	0.1435	1.17	-0.9970
10	4	11	0.1	20	9	-4	0.0026	388.97	0.5820	0.1770	1.22	-0.9969
10	4	12	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5759	0.0710	1.08	-0.9975
10	4	13	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5838	0.0646	1.07	-0.9975
10	4	14	0.05	3	2	-6	0.0023	432.78	0.5860	0.0629	1.07	-0.9975
10	4	15	0.1	4	2	-4	0.0026	388.97	0.5927	0.1611	1.19	-0.9969
10	4	16	0.1	6	3	-4	0.0026	388.97	0.5525	0.2245	1.29	-0.9967
10	4	17	0.1	20	9	-4	0.0026	388.97	0.5275	0.2683	1.37	-0.9965
15	0.25	0	0.3	3	1	-12	0.0026	384.47	0.0000	0.0000	1.00	-0.9974
15	0.25	1	0.3	3	1	-12	0.0026	384.47	0.0000	0.0000	1.00	-0.9974
15	0.25	2	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0070	0.0001	1.00	-0.9975
15	0.25	3	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0200	0.0030	1.00	-0.9974
15	0.25	4	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0344	0.0135	1.01	-0.9974
15	0.25	5	0.5	18	8	-7	0.0025	393.56	0.0458	0.0281	1.03	-0.9974
15	0.25	6	0.5	16	7	-7	0.0025	393.56	0.0460	0.0286	1.03	-0.9974
15	0.25	7	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0346	0.0137	1.01	-0.9974
15	0.25	8	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0309	0.0100	1.01	-0.9974
15	0.25	9	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0380	0.0174	1.02	-0.9974
15	0.25	10	0.5	14	6	-7	0.0025	392.71	0.0516	0.0379	1.04	-0.9974
15	0.25	11	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0624	0.0598	1.06	-0.9973
15	0.25	12	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.1089	0.0672	1.07	-0.9978
15	0.25	13	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.0927	0.0420	1.04	-0.9978
15	0.25	14	0.6	2	16	1	0.0021	478.30	0.0876	0.0354	1.04	-0.9978
15	0.25	15	0.5	11	5	-7	0.0025	393.61	0.0640	0.0636	1.07	-0.9973
15	0.25	16	0.5	14	6	-7	0.0025	392.71	0.0793	0.1023	1.11	-0.9972
15	0.25	17	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.0894	0.1316	1.15	-0.9971
15	0.5	0	0.3	3	1	-12	0.0026	384.47	0.0000	0.0000	1.00	-0.9974
15	0.5	1	0.3	12	4	-12	0.0026	384.47	0.0133	0.1778	1.22	-0.9968
15	0.5	2	0.3	3	1	-12	0.0026	384.47	0.0382	0.4095	1.69	-0.9956
15	0.5	3	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.3057	0.4806	1.93	-0.9960
15	0.5	4	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.3165	0.5016	2.01	-0.9958
15	0.5	5	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.3244	0.5169	2.07	-0.9957
15	0.5	6	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.1944	0.2528	1.34	-0.9972
15	0.5	7	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.1433	0.3104	1.45	-0.9963
15	0.5	8	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.1623	0.3765	1.60	-0.9959

15	0.5	9	0.6	3	24	1	0.0021	478.30	0.3071	0.4832	1.94	-0.9960
15	0.5	10	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.3234	0.5150	2.06	-0.9957
15	0.5	11	0.6	3	24	1	0.0021	478.30	0.3328	0.5334	2.14	-0.9955
15	0.5	12	0.6	2	16	1	0.0021	478.30	0.2019	0.2695	1.37	-0.9971
15	0.5	13	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.1415	0.3041	1.44	-0.9963
15	0.5	14	0.5	7	3	-7	0.0025	392.71	0.1415	0.3042	1.44	-0.9963
15	0.5	15	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.3208	0.5099	2.04	-0.9957
15	0.5	16	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.3403	0.5480	2.21	-0.9954
15	0.5	17	0.6	2	16	1	0.0021	478.30	0.3495	0.5664	2.31	-0.9952
15	0.75	0	0.2	1	1	-13	0.0012	816.94	0.0000	0.5000	2.00	-0.9976
15	0.75	1	0.2	2	22	-10	0.0026	381.74	0.0692	0.7826	4.60	-0.9879
15	0.75	2	0.2	1	11	-10	0.0026	381.74	0.0875	0.8197	5.55	-0.9855
15	0.75	3	0.2	1	11	-10	0.0026	381.74	0.0982	0.8417	6.32	-0.9834
15	0.75	4	0.3	1	14	-7	0.0025	392.68	0.1853	0.8555	6.92	-0.9824
15	0.75	5	0.3	1	14	-7	0.0025	392.68	0.1911	0.8648	7.39	-0.9812
15	0.75	6	0.3	3	8	-9	0.0027	374.78	0.1062	0.6885	3.21	-0.9914
15	0.75	7	0.3	6	16	-9	0.0027	374.78	0.1455	0.7822	4.59	-0.9877
15	0.75	8	0.2	1	11	-10	0.0026	381.74	0.0802	0.8048	5.12	-0.9866
15	0.75	9	0.3	1	14	-7	0.0025	392.68	0.1802	0.8474	6.55	-0.9833
15	0.75	10	0.3	1	14	-7	0.0025	392.68	0.1915	0.8655	7.43	-0.9811
15	0.75	11	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.4944	0.8715	7.78	-0.9837
15	0.75	12	0.3	6	16	-9	0.0027	374.78	0.1132	0.7053	3.39	-0.9909
15	0.75	13	0.3	3	8	-9	0.0027	374.78	0.1322	0.7508	4.01	-0.9893
15	0.75	14	0.3	3	8	-9	0.0027	374.78	0.1396	0.7685	4.32	-0.9885
15	0.75	15	0.6	2	16	1	0.0021	478.30	0.4904	0.8630	7.30	-0.9847
15	0.75	16	0.6	1	8	1	0.0021	478.30	0.4963	0.8753	8.02	-0.9832
15	0.75	17	0.6	3	24	1	0.0021	478.30	0.4993	0.8815	8.44	-0.9824
15	1.25	0	0.05	22	16	-10	0.0024	423.18	0.2337	0.5744	2.35	-0.9944
15	1.25	1	0.05	23	17	-10	0.0024	423.18	0.1397	0.8469	6.53	-0.9846
15	1.25	2	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.5008	0.8921	9.27	-0.9751
15	1.25	3	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4975	0.8965	9.66	-0.9740
15	1.25	4	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4942	0.9009	10.10	-0.9728
15	1.25	5	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4917	0.9043	10.45	-0.9719
15	1.25	6	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.2059	0.6532	2.88	-0.9932
15	1.25	7	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.1466	0.8273	5.79	-0.9863
15	1.25	8	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.1296	0.8749	7.99	-0.9811
15	1.25	9	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4965	0.8978	9.79	-0.9737
15	1.25	10	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4918	0.9042	10.44	-0.9719
15	1.25	11	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4888	0.9083	10.90	-0.9707
15	1.25	12	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.1918	0.6942	3.27	-0.9923
15	1.25	13	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.1624	0.7812	4.57	-0.9892
15	1.25	14	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.1536	0.8070	5.18	-0.9878
15	1.25	15	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4923	0.9034	10.36	-0.9721
15	1.25	16	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4862	0.9118	11.33	-0.9695
15	1.25	17	0.4	1	17	-2	0.0027	371.70	0.4829	0.9161	11.92	-0.9679
15	2	0	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.5266	0.0372	1.04	-0.9975

15	2	1	0.05	20	14	-10	0.0024	423.18	0.3826	0.2193	1.28	-0.9970
15	2	2	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.3271	0.3369	1.51	-0.9964
15	2	3	0.1	8	2	-6	0.0026	390.36	0.3830	0.4143	1.71	-0.9956
15	2	4	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.3566	0.4917	1.97	-0.9950
15	2	5	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.3376	0.5489	2.22	-0.9943
15	2	6	0.05	14	10	-10	0.0024	423.18	0.4291	0.1392	1.16	-0.9973
15	2	7	0.05	17	12	-10	0.0024	423.18	0.3663	0.2517	1.34	-0.9968
15	2	8	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.3408	0.3059	1.44	-0.9966
15	2	9	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.3702	0.4515	1.82	-0.9953
15	2	10	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.3357	0.5546	2.25	-0.9942
15	2	11	0.2	10	9	-4	0.0025	397.20	0.4639	0.6026	2.52	-0.9937
15	2	12	0.05	12	9	-10	0.0024	423.18	0.3931	0.1996	1.25	-0.9970
15	2	13	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.3706	0.2429	1.32	-0.9969
15	2	14	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.3627	0.2590	1.35	-0.9968
15	2	15	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.3315	0.5672	2.31	-0.9941
15	2	16	0.2	8	7	-4	0.0025	397.20	0.4500	0.6329	2.72	-0.9931
15	2	17	0.2	21	18	-4	0.0025	397.20	0.4362	0.6629	2.97	-0.9925
15	4	0	0.05	3	2	-10	0.0021	476.53	0.7652	0.0001	1.00	-0.9979
15	4	1	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.6700	0.0016	1.00	-0.9976
15	4	2	0.05	7	5	-10	0.0024	423.18	0.6241	0.0054	1.01	-0.9976
15	4	3	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.6572	0.0105	1.01	-0.9974
15	4	4	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.6316	0.0182	1.02	-0.9974
15	4	5	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.6109	0.0272	1.03	-0.9974
15	4	6	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.6375	0.0039	1.00	-0.9976
15	4	7	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.6167	0.0064	1.01	-0.9976
15	4	8	0.05	17	12	-10	0.0024	423.18	0.6067	0.0080	1.01	-0.9976
15	4	9	0.1	8	2	-6	0.0026	390.36	0.6364	0.0165	1.02	-0.9974
15	4	10	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.6051	0.0303	1.03	-0.9974
15	4	11	0.1	8	2	-6	0.0026	390.36	0.5820	0.0453	1.05	-0.9973
15	4	12	0.05	4	3	-10	0.0024	423.18	0.5759	0.0153	1.02	-0.9976
15	4	13	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.6492	0.0126	1.01	-0.9974
15	4	14	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.6520	0.0118	1.01	-0.9974
15	4	15	0.1	8	2	-6	0.0026	390.36	0.5927	0.0378	1.04	-0.9973
15	4	16	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.5525	0.0717	1.08	-0.9972
15	4	17	0.1	4	1	-6	0.0026	390.36	0.5275	0.1014	1.11	-0.9971
20	0.25	0	0.3	2	1	-15	0.0026	383.50	0.0000	0.0000	1.00	-0.9974
20	0.25	1	0.3	2	1	-15	0.0026	383.50	0.0000	0.0000	1.00	-0.9974
20	0.25	2	0.4	12	3	-13	0.0027	377.18	0.0008	0.0000	1.00	-0.9973
20	0.25	3	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0578	0.0001	1.00	-0.9975
20	0.25	4	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0781	0.0006	1.00	-0.9975
20	0.25	5	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0928	0.0015	1.00	-0.9975
20	0.25	6	0.7	2	19	6	0.0026	386.83	0.1466	0.0011	1.00	-0.9974
20	0.25	7	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0681	0.0002	1.00	-0.9975
20	0.25	8	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0615	0.0001	1.00	-0.9975
20	0.25	9	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0773	0.0005	1.00	-0.9975
20	0.25	10	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.0979	0.0021	1.00	-0.9975



20	0.25	11	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.1121	0.0046	1.00	-0.9975
20	0.25	12	0.7	2	19	6	0.0026	386.83	0.1613	0.0022	1.00	-0.9974
20	0.25	13	0.7	2	19	6	0.0026	386.83	0.1452	0.0010	1.00	-0.9974
20	0.25	14	0.7	2	19	6	0.0026	386.83	0.1400	0.0008	1.00	-0.9974
20	0.25	15	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.1095	0.0040	1.00	-0.9975
20	0.25	16	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.1308	0.0106	1.01	-0.9975
20	0.25	17	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.1435	0.0172	1.02	-0.9975
20	0.5	0	0.3	2	1	-15	0.0026	383.50	0.0000	0.0000	1.00	-0.9974
20	0.5	1	0.4	8	2	-13	0.0027	377.18	0.0613	0.1132	1.13	-0.9970
20	0.5	2	0.4	4	1	-13	0.0027	377.18	0.0923	0.2514	1.34	-0.9965
20	0.5	3	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3057	0.3121	1.45	-0.9964
20	0.5	4	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3165	0.3384	1.51	-0.9963
20	0.5	5	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3244	0.3577	1.56	-0.9962
20	0.5	6	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.1944	0.0712	1.08	-0.9974
20	0.5	7	0.4	8	2	-13	0.0027	377.18	0.0826	0.2051	1.26	-0.9967
20	0.5	8	0.4	8	2	-13	0.0027	377.18	0.0865	0.2235	1.29	-0.9966
20	0.5	9	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3071	0.3153	1.46	-0.9964
20	0.5	10	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3234	0.3553	1.55	-0.9962
20	0.5	11	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3328	0.3784	1.61	-0.9960
20	0.5	12	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.2019	0.0832	1.09	-0.9973
20	0.5	13	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.2361	0.1489	1.17	-0.9971
20	0.5	14	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.2484	0.1759	1.21	-0.9970
20	0.5	15	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3208	0.3488	1.54	-0.9962
20	0.5	16	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3403	0.3967	1.66	-0.9959
20	0.5	17	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.3495	0.4196	1.72	-0.9958
20	0.75	0	0.2	1	1	-17	0.0009	1155.73	0.0000	0.5000	2.00	-0.9983
20	0.75	1	0.2	8	10	-16	0.0025	404.19	0.0692	0.7402	3.85	-0.9905
20	0.75	2	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4844	0.7766	4.48	-0.9890
20	0.75	3	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4872	0.7843	4.64	-0.9886
20	0.75	4	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4900	0.7921	4.81	-0.9882
20	0.75	5	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4922	0.7980	4.95	-0.9878
20	0.75	6	0.3	9	21	-12	0.0022	455.05	0.1062	0.6477	2.84	-0.9938
20	0.75	7	0.2	8	10	-16	0.0025	404.19	0.0693	0.7406	3.85	-0.9905
20	0.75	8	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4814	0.7680	4.31	-0.9894
20	0.75	9	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4874	0.7847	4.65	-0.9886
20	0.75	10	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4917	0.7968	4.92	-0.9879
20	0.75	11	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4944	0.8043	5.11	-0.9875
20	0.75	12	0.3	3	7	-12	0.0022	455.05	0.1132	0.6654	2.99	-0.9934
20	0.75	13	0.3	9	21	-12	0.0022	455.05	0.1322	0.7144	3.50	-0.9923
20	0.75	14	0.3	3	7	-12	0.0022	455.05	0.1396	0.7338	3.76	-0.9917
20	0.75	15	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4904	0.7930	4.83	-0.9881
20	0.75	16	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4963	0.8095	5.25	-0.9871
20	0.75	17	0.6	2	19	2	0.0025	407.13	0.4993	0.8177	5.49	-0.9865
20	1.25	0	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.2337	0.4672	1.88	-0.9950
20	1.25	1	0.05	4	10	-16	0.0025	399.78	0.1397	0.7935	4.84	-0.9879
20	1.25	2	0.1	3	13	-14	0.0026	383.24	0.1882	0.8573	7.01	-0.9817

20	1.25	3	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4975	0.8781	8.20	-0.9784
20	1.25	4	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4942	0.8830	8.54	-0.9775
20	1.25	5	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4917	0.8867	8.83	-0.9767
20	1.25	6	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.2059	0.5825	2.40	-0.9937
20	1.25	7	0.05	6	15	-16	0.0025	399.78	0.1466	0.7736	4.42	-0.9890
20	1.25	8	0.05	4	10	-16	0.0025	399.78	0.1296	0.8232	5.66	-0.9859
20	1.25	9	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4965	0.8795	8.30	-0.9781
20	1.25	10	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4918	0.8865	8.81	-0.9768
20	1.25	11	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4888	0.8911	9.18	-0.9758
20	1.25	12	0.05	2	3	-15	0.0019	519.54	0.1918	0.6350	2.74	-0.9947
20	1.25	13	0.05	4	10	-16	0.0025	399.78	0.1624	0.7289	3.69	-0.9908
20	1.25	14	0.05	10	24	-16	0.0025	399.78	0.1536	0.7536	4.06	-0.9898
20	1.25	15	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4923	0.8857	8.75	-0.9769
20	1.25	16	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4862	0.8950	9.52	-0.9749
20	1.25	17	0.4	1	21	-3	0.0026	379.37	0.4829	0.8998	9.98	-0.9737
20	2	0	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5266	0.0030	1.00	-0.9973
20	2	1	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3826	0.0693	1.07	-0.9972
20	2	2	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3271	0.1642	1.20	-0.9968
20	2	3	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.2877	0.2710	1.37	-0.9964
20	2	4	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.3566	0.3629	1.57	-0.9959
20	2	5	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.3376	0.4269	1.75	-0.9955
20	2	6	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.4291	0.0291	1.03	-0.9973
20	2	7	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3663	0.0911	1.10	-0.9971
20	2	8	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3408	0.1349	1.16	-0.9969
20	2	9	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.3702	0.3198	1.47	-0.9962
20	2	10	0.1	20	4	-9	0.0026	386.13	0.3357	0.4334	1.77	-0.9954
20	2	11	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.3153	0.5058	2.02	-0.9948
20	2	12	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3931	0.0577	1.06	-0.9972
20	2	13	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3706	0.0848	1.09	-0.9971
20	2	14	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.3627	0.0964	1.11	-0.9971
20	2	15	0.1	15	3	-9	0.0026	386.13	0.3315	0.4479	1.81	-0.9953
20	2	16	0.2	8	5	-5	0.0025	396.44	0.4500	0.5539	2.24	-0.9943
20	2	17	0.2	8	5	-5	0.0025	396.44	0.4362	0.5886	2.43	-0.9939
20	4	0	0.05	7	1	-12	0.0026	388.51	0.7652	0.0000	1.00	-0.9974
20	4	1	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.6700	0.0000	1.00	-0.9974
20	4	2	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.6241	0.0001	1.00	-0.9974
20	4	3	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5855	0.0005	1.00	-0.9974
20	4	4	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5446	0.0018	1.00	-0.9973
20	4	5	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5122	0.0043	1.00	-0.9973
20	4	6	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.6375	0.0001	1.00	-0.9974
20	4	7	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.6167	0.0002	1.00	-0.9974
20	4	8	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.6067	0.0003	1.00	-0.9974
20	4	9	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5541	0.0014	1.00	-0.9973
20	4	10	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5043	0.0053	1.01	-0.9973
20	4	11	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.5820	0.0102	1.01	-0.9974
20	4	12	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5759	0.0007	1.00	-0.9974

20	4	13	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5838	0.0005	1.00	-0.9974
20	4	14	0.05	10	2	-13	0.0026	377.71	0.5860	0.0005	1.00	-0.9974
20	4	15	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.5927	0.0078	1.01	-0.9974
20	4	16	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.5525	0.0201	1.02	-0.9974
20	4	17	0.1	5	1	-9	0.0026	386.13	0.5275	0.0337	1.03	-0.9973
25	0.25	0	0.2	3	1	-22	0.0023	434.08	0.0000	0.0000	1.00	-0.9977
25	0.25	1	0.2	3	1	-22	0.0023	434.08	0.0000	0.0000	1.00	-0.9977
25	0.25	2	0.4	3	1	-15	0.0022	447.85	0.0008	0.0000	1.00	-0.9978
25	0.25	3	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.0578	0.0000	1.00	-0.9974
25	0.25	4	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.0781	0.0001	1.00	-0.9974
25	0.25	5	0.6	2	23	3	0.0024	424.63	0.0928	0.0003	1.00	-0.9976
25	0.25	6	0.2	3	1	-22	0.0023	434.08	0.0000	0.0000	1.00	-0.9977
25	0.25	7	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.1219	0.0000	1.00	-0.9975
25	0.25	8	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.1186	0.0000	1.00	-0.9975
25	0.25	9	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.0773	0.0001	1.00	-0.9974
25	0.25	10	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.0979	0.0004	1.00	-0.9974
25	0.25	11	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.1121	0.0011	1.00	-0.9974
25	0.25	12	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.1613	0.0002	1.00	-0.9975
25	0.25	13	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.1452	0.0001	1.00	-0.9975
25	0.25	14	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.1400	0.0000	1.00	-0.9975
25	0.25	15	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.1884	0.0009	1.00	-0.9975
25	0.25	16	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.2157	0.0030	1.00	-0.9975
25	0.25	17	0.7	2	21	8	0.0025	405.74	0.2300	0.0053	1.01	-0.9975
25	0.5	0	0.2	3	1	-22	0.0023	434.08	0.0000	0.0000	1.00	-0.9977
25	0.5	1	0.2	5	2	-22	0.0027	373.93	0.0003	0.0082	1.01	-0.9973
25	0.5	2	0.4	9	4	-14	0.0026	380.84	0.0923	0.1696	1.20	-0.9968
25	0.5	3	0.4	18	8	-14	0.0026	380.84	0.1113	0.2491	1.33	-0.9965
25	0.5	4	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.3165	0.2933	1.41	-0.9963
25	0.5	5	0.6	2	22	3	0.0026	385.37	0.3244	0.3134	1.46	-0.9962
25	0.5	6	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.1944	0.0383	1.04	-0.9973
25	0.5	7	0.5	12	10	-8	0.0027	370.42	0.1433	0.1234	1.14	-0.9969
25	0.5	8	0.4	18	8	-14	0.0026	380.84	0.0865	0.1463	1.17	-0.9969
25	0.5	9	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.3071	0.2691	1.37	-0.9964
25	0.5	10	0.6	2	22	3	0.0026	385.37	0.3234	0.3108	1.45	-0.9962
25	0.5	11	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.3328	0.3349	1.50	-0.9961
25	0.5	12	0.6	2	22	3	0.0026	385.37	0.2019	0.0471	1.05	-0.9973
25	0.5	13	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.2361	0.1021	1.11	-0.9971
25	0.5	14	0.5	12	10	-8	0.0027	370.42	0.1415	0.1186	1.13	-0.9969
25	0.5	15	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.3208	0.3041	1.44	-0.9963
25	0.5	16	0.6	2	22	3	0.0026	385.37	0.3403	0.3538	1.55	-0.9960
25	0.5	17	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.3495	0.3774	1.61	-0.9958
25	0.75	0	0.2	3	1	-22	0.0023	434.08	0.0000	0.0000	1.00	-0.9977
25	0.75	1	0.2	8	14	-19	0.0026	377.75	0.0692	0.6863	3.19	-0.9916
25	0.75	2	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4844	0.7423	3.88	-0.9899
25	0.75	3	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4872	0.7505	4.01	-0.9896
25	0.75	4	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4900	0.7587	4.14	-0.9892

25	0.75	5	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4922	0.7650	4.26	-0.9890
25	0.75	6	0.3	6	5	-17	0.0026	391.37	0.1062	0.5407	2.18	-0.9944
25	0.75	7	0.2	4	7	-19	0.0026	377.75	0.0693	0.6867	3.19	-0.9915
25	0.75	8	0.2	4	7	-19	0.0026	377.75	0.0802	0.7295	3.70	-0.9902
25	0.75	9	0.6	2	22	3	0.0026	385.37	0.4874	0.7509	4.01	-0.9896
25	0.75	10	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4917	0.7637	4.23	-0.9890
25	0.75	11	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4944	0.7717	4.38	-0.9886
25	0.75	12	0.3	6	5	-17	0.0026	391.37	0.1132	0.5708	2.33	-0.9940
25	0.75	13	0.3	6	5	-17	0.0026	391.37	0.1322	0.6506	2.86	-0.9927
25	0.75	14	0.3	24	20	-17	0.0026	391.37	0.1396	0.6809	3.13	-0.9920
25	0.75	15	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4904	0.7597	4.16	-0.9892
25	0.75	16	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4963	0.7772	4.49	-0.9884
25	0.75	17	0.6	1	11	3	0.0026	385.37	0.4993	0.7860	4.67	-0.9879
25	1.25	0	0.05	9	7	-18	0.0021	469.20	0.2337	0.3697	1.59	-0.9966
25	1.25	1	0.05	5	24	-21	0.0021	477.28	0.1397	0.7515	4.02	-0.9916
25	1.25	2	0.05	4	19	-21	0.0021	477.28	0.1169	0.8245	5.70	-0.9881
25	1.25	3	0.1	2	10	-18	0.0027	372.92	0.1766	0.8575	7.02	-0.9812
25	1.25	4	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4942	0.8742	7.95	-0.9787
25	1.25	5	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4917	0.8785	8.23	-0.9779
25	1.25	6	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.2059	0.4743	1.90	-0.9959
25	1.25	7	0.05	9	7	-18	0.0021	469.20	0.1466	0.7268	3.66	-0.9922
25	1.25	8	0.05	4	19	-21	0.0021	477.28	0.1296	0.7833	4.62	-0.9903
25	1.25	9	0.2	5	14	-11	0.0026	385.28	0.2944	0.8653	7.42	-0.9807
25	1.25	10	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4918	0.8783	8.22	-0.9779
25	1.25	11	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4888	0.8835	8.58	-0.9770
25	1.25	12	0.05	10	8	-18	0.0021	469.20	0.1918	0.5312	2.13	-0.9955
25	1.25	13	0.05	9	7	-18	0.0021	469.20	0.1624	0.6570	2.92	-0.9938
25	1.25	14	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.1536	0.6958	3.29	-0.9930
25	1.25	15	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4923	0.8774	8.16	-0.9781
25	1.25	16	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4862	0.8879	8.92	-0.9761
25	1.25	17	0.4	1	11	-3	0.0027	372.68	0.4829	0.8934	9.39	-0.9748
25	2	0	0.05	9	7	-18	0.0021	469.20	0.5266	0.0009	1.00	-0.9979
25	2	1	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.3826	0.0416	1.04	-0.9978
25	2	2	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.3271	0.1145	1.13	-0.9976
25	2	3	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.3830	0.1839	1.23	-0.9969
25	2	4	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.3566	0.2580	1.35	-0.9966
25	2	5	0.1	11	2	-12	0.0025	400.06	0.3376	0.3201	1.47	-0.9963
25	2	6	0.05	10	8	-18	0.0021	469.20	0.4291	0.0145	1.01	-0.9978
25	2	7	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.3663	0.0575	1.06	-0.9977
25	2	8	0.05	13	10	-18	0.0021	469.20	0.3408	0.0912	1.10	-0.9977
25	2	9	0.1	10	2	-12	0.0025	400.06	0.3702	0.2181	1.28	-0.9968
25	2	10	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.3357	0.3266	1.48	-0.9963
25	2	11	0.2	13	6	-7	0.0026	389.87	0.4639	0.3951	1.65	-0.9958
25	2	12	0.05	9	7	-18	0.0021	469.20	0.3931	0.0333	1.03	-0.9978
25	2	13	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.3706	0.0529	1.06	-0.9977
25	2	14	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.3627	0.0615	1.07	-0.9977

25	2	15	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.3315	0.3411	1.52	-0.9962
25	2	16	0.2	13	6	-7	0.0026	389.87	0.4500	0.4387	1.78	-0.9954
25	2	17	0.2	15	7	-7	0.0026	389.87	0.4362	0.4830	1.93	-0.9950
25	4	0	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.7652	0.0000	1.00	-0.9979
25	4	1	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.6700	0.0000	1.00	-0.9979
25	4	2	0.05	13	10	-18	0.0021	469.20	0.6241	0.0000	1.00	-0.9979
25	4	3	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.5855	0.0001	1.00	-0.9979
25	4	4	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.6316	0.0004	1.00	-0.9975
25	4	5	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.6109	0.0008	1.00	-0.9975
25	4	6	0.05	13	10	-18	0.0021	469.20	0.6375	0.0000	1.00	-0.9979
25	4	7	0.05	18	14	-18	0.0021	469.20	0.6167	0.0000	1.00	-0.9979
25	4	8	0.05	10	8	-18	0.0021	469.20	0.6067	0.0000	1.00	-0.9979
25	4	9	0.1	10	2	-12	0.0025	400.06	0.6364	0.0003	1.00	-0.9975
25	4	10	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.6051	0.0010	1.00	-0.9975
25	4	11	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.5820	0.0022	1.00	-0.9975
25	4	12	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.5759	0.0001	1.00	-0.9979
25	4	13	0.05	9	7	-18	0.0021	469.20	0.5838	0.0001	1.00	-0.9979
25	4	14	0.05	5	4	-18	0.0021	469.20	0.5860	0.0001	1.00	-0.9979
25	4	15	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.5927	0.0015	1.00	-0.9975
25	4	16	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.5525	0.0054	1.01	-0.9975
25	4	17	0.1	5	1	-12	0.0025	400.06	0.5275	0.0108	1.01	-0.9975
30	0.25	0	0.2	3	2	-25	0.0021	467.75	0.0000	0.0000	1.00	-0.9979
30	0.25	1	0.2	3	2	-25	0.0021	467.75	0.0000	0.0000	1.00	-0.9979
30	0.25	2	0.5	2	1	-10	0.0026	384.79	0.0070	0.0000	1.00	-0.9974
30	0.25	3	0.5	2	1	-10	0.0026	384.79	0.0200	0.0000	1.00	-0.9974
30	0.25	4	0.5	6	3	-10	0.0026	384.79	0.0344	0.0000	1.00	-0.9974
30	0.25	5	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.0928	0.0000	1.00	-0.9976
30	0.25	6	0.2	3	2	-25	0.0021	467.75	0.0000	0.0000	1.00	-0.9979
30	0.25	7	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.0681	0.0000	1.00	-0.9976
30	0.25	8	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.0615	0.0000	1.00	-0.9976
30	0.25	9	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.0773	0.0000	1.00	-0.9976
30	0.25	10	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.0979	0.0001	1.00	-0.9976
30	0.25	11	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.1121	0.0002	1.00	-0.9976
30	0.25	12	0.7	2	24	10	0.0023	442.65	0.1613	0.0001	1.00	-0.9977
30	0.25	13	0.7	1	12	10	0.0023	442.65	0.1452	0.0000	1.00	-0.9977
30	0.25	14	0.7	2	24	10	0.0023	442.65	0.1400	0.0000	1.00	-0.9977
30	0.25	15	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.1095	0.0002	1.00	-0.9976
30	0.25	16	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.1308	0.0009	1.00	-0.9976
30	0.25	17	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.1435	0.0021	1.00	-0.9976
30	0.5	0	0.2	3	2	-25	0.0021	467.75	0.0000	0.0000	1.00	-0.9979
30	0.5	1	0.3	8	5	-20	0.0023	436.38	0.0133	0.0073	1.01	-0.9977
30	0.5	2	0.3	16	10	-20	0.0023	436.38	0.0382	0.0963	1.11	-0.9975
30	0.5	3	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.1939	0.1856	1.23	-0.9968
30	0.5	4	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.2087	0.2367	1.31	-0.9966
30	0.5	5	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.2191	0.2747	1.38	-0.9964
30	0.5	6	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.1944	0.0206	1.02	-0.9975

30	0.5	7	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.1433	0.0533	1.06	-0.9972
30	0.5	8	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.1623	0.0933	1.10	-0.9971
30	0.5	9	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.1991	0.2032	1.25	-0.9967
30	0.5	10	0.5	21	12	-10	0.0026	380.10	0.2194	0.2758	1.38	-0.9964
30	0.5	11	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.3328	0.3029	1.43	-0.9965
30	0.5	12	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.2019	0.0266	1.03	-0.9975
30	0.5	13	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.1415	0.0502	1.05	-0.9972
30	0.5	14	0.5	7	4	-10	0.0026	380.10	0.1415	0.0502	1.05	-0.9972
30	0.5	15	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.3208	0.2707	1.37	-0.9967
30	0.5	16	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.3403	0.3227	1.48	-0.9964
30	0.5	17	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.3495	0.3471	1.53	-0.9963
30	0.75	0	0.2	3	2	-25	0.0021	467.75	0.0000	0.0000	1.00	-0.9979
30	0.75	1	0.2	6	5	-24	0.0024	412.82	0.0692	0.6496	2.85	-0.9931
30	0.75	2	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4844	0.7169	3.53	-0.9914
30	0.75	3	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4872	0.7253	3.64	-0.9911
30	0.75	4	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4900	0.7338	3.76	-0.9908
30	0.75	5	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4922	0.7403	3.85	-0.9906
30	0.75	6	0.3	8	5	-20	0.0023	436.38	0.1062	0.4812	1.93	-0.9956
30	0.75	7	0.2	6	5	-24	0.0024	412.82	0.0693	0.6501	2.86	-0.9931
30	0.75	8	0.2	5	7	-23	0.0025	400.03	0.0802	0.6983	3.31	-0.9917
30	0.75	9	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4874	0.7257	3.65	-0.9911
30	0.75	10	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4917	0.7389	3.83	-0.9907
30	0.75	11	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4944	0.7472	3.96	-0.9903
30	0.75	12	0.3	16	10	-20	0.0023	436.38	0.1132	0.5174	2.07	-0.9953
30	0.75	13	0.3	10	16	-18	0.0025	392.55	0.1322	0.6100	2.56	-0.9935
30	0.75	14	0.3	5	8	-18	0.0025	392.55	0.1396	0.6353	2.74	-0.9930
30	0.75	15	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4904	0.7348	3.77	-0.9908
30	0.75	16	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4963	0.7529	4.05	-0.9901
30	0.75	17	0.6	1	13	4	0.0024	409.87	0.4993	0.7621	4.20	-0.9897
30	1.25	0	0.05	10	11	-23	0.0024	414.64	0.2337	0.3411	1.52	-0.9963
30	1.25	1	0.05	6	7	-23	0.0024	414.64	0.1397	0.7206	3.58	-0.9914
30	1.25	2	0.1	13	24	-20	0.0021	465.67	0.1882	0.8087	5.23	-0.9888
30	1.25	3	0.2	5	17	-14	0.0024	421.08	0.2971	0.8401	6.25	-0.9852
30	1.25	4	0.2	5	17	-14	0.0024	421.08	0.2896	0.8573	7.01	-0.9834
30	1.25	5	0.4	2	14	-3	0.0026	389.12	0.4917	0.8653	7.42	-0.9809
30	1.25	6	0.05	8	9	-23	0.0024	414.64	0.2059	0.4454	1.80	-0.9957
30	1.25	7	0.05	7	8	-23	0.0024	414.64	0.1466	0.6908	3.23	-0.9922
30	1.25	8	0.05	8	9	-23	0.0024	414.64	0.1296	0.7646	4.25	-0.9898
30	1.25	9	0.2	5	17	-14	0.0024	421.08	0.2944	0.8463	6.51	-0.9845
30	1.25	10	0.4	2	14	-3	0.0026	389.12	0.4918	0.8650	7.41	-0.9810
30	1.25	11	0.4	2	14	-3	0.0026	389.12	0.4888	0.8711	7.76	-0.9801
30	1.25	12	0.05	5	6	-23	0.0024	414.64	0.1918	0.5013	2.01	-0.9952
30	1.25	13	0.05	5	6	-23	0.0024	414.64	0.1624	0.6231	2.65	-0.9936
30	1.25	14	0.05	14	16	-23	0.0024	414.64	0.1536	0.6606	2.95	-0.9929
30	1.25	15	0.4	2	14	-3	0.0026	389.12	0.4923	0.8639	7.35	-0.9811
30	1.25	16	0.4	3	21	-3	0.0026	389.12	0.4862	0.8764	8.09	-0.9792

30	1.25	17	0.4	2	14	-3	0.0026	389.12	0.4829	0.8829	8.54	-0.9781
30	2	0	0.05	5	3	-22	0.0024	413.14	0.5266	0.0003	1.00	-0.9976
30	2	1	0.05	3	2	-22	0.0024	411.98	0.3826	0.0264	1.03	-0.9975
30	2	2	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.4108	0.0727	1.08	-0.9971
30	2	3	0.1	20	6	-16	0.0026	378.00	0.3830	0.1221	1.14	-0.9970
30	2	4	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.3566	0.1869	1.23	-0.9967
30	2	5	0.1	13	4	-16	0.0026	378.00	0.3376	0.2446	1.32	-0.9965
30	2	6	0.05	3	2	-22	0.0024	411.98	0.4291	0.0075	1.01	-0.9976
30	2	7	0.05	3	2	-22	0.0024	411.98	0.3663	0.0390	1.04	-0.9975
30	2	8	0.1	13	4	-16	0.0026	378.00	0.4174	0.0635	1.07	-0.9972
30	2	9	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.3702	0.1514	1.18	-0.9969
30	2	10	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.3357	0.2508	1.33	-0.9965
30	2	11	0.1	13	4	-16	0.0026	378.00	0.3153	0.3227	1.48	-0.9961
30	2	12	0.05	6	4	-22	0.0024	411.98	0.3931	0.0203	1.02	-0.9975
30	2	13	0.05	14	9	-22	0.0024	411.98	0.3706	0.0352	1.04	-0.9975
30	2	14	0.05	6	4	-22	0.0024	411.98	0.3627	0.0422	1.04	-0.9975
30	2	15	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.3315	0.2646	1.36	-0.9964
30	2	16	0.2	10	10	-11	0.0026	387.78	0.4500	0.3828	1.62	-0.9958
30	2	17	0.2	7	7	-11	0.0026	387.78	0.4362	0.4247	1.74	-0.9955
30	4	0	0.05	5	1	-20	0.0018	558.22	0.7652	0.0000	1.00	-0.9982
30	4	1	0.05	3	2	-22	0.0024	411.98	0.6700	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	2	0.05	6	4	-22	0.0024	411.98	0.6241	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	3	0.1	3	1	-16	0.0025	395.25	0.6572	0.0000	1.00	-0.9975
30	4	4	0.1	7	2	-16	0.0026	379.23	0.6316	0.0001	1.00	-0.9974
30	4	5	0.1	7	2	-16	0.0026	379.23	0.6109	0.0001	1.00	-0.9974
30	4	6	0.05	5	3	-22	0.0024	413.14	0.6375	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	7	0.05	3	2	-22	0.0024	411.98	0.6167	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	8	0.05	11	6	-22	0.0024	413.14	0.6067	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	9	0.1	7	2	-16	0.0026	379.23	0.6364	0.0000	1.00	-0.9974
30	4	10	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.6051	0.0002	1.00	-0.9974
30	4	11	0.1	18	5	-16	0.0026	379.23	0.5820	0.0005	1.00	-0.9974
30	4	12	0.05	22	12	-22	0.0024	413.14	0.5759	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	13	0.05	10	6	-22	0.0024	413.14	0.5838	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	14	0.05	3	2	-22	0.0024	411.98	0.5860	0.0000	1.00	-0.9976
30	4	15	0.1	7	2	-16	0.0026	379.23	0.5927	0.0003	1.00	-0.9974
30	4	16	0.1	10	3	-16	0.0026	378.00	0.5525	0.0014	1.00	-0.9974
30	4	17	0.1	20	6	-16	0.0026	378.00	0.5275	0.0034	1.00	-0.9973

**TABLA 11**

n	tau	J_id	ARL1 CEWMA	ARL1 Shewhart	Dif ARL1	MR CEWMA	MR Shewhart	Dif MR
10	0.25	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9982	-0.9990	-0.0840%
10	0.25	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9990	-0.1167%
10	0.25	2	1.0678	1.0504	1.66%	-0.9977	-0.9982	-0.0522%
10	0.25	3	1.1860	1.1242	5.50%	-0.9975	-0.9981	-0.0656%
10	0.25	4	1.3099	1.2208	7.30%	-0.9972	-0.9980	-0.0760%
10	0.25	5	1.4051	1.3090	7.35%	-0.9970	-0.9978	-0.0810%
10	0.25	6	1.4076	1.2063	16.68%	-0.9970	-0.9981	-0.1093%
10	0.25	7	1.3116	1.1272	16.36%	-0.9972	-0.9982	-0.1013%
10	0.25	8	1.2799	1.1182	14.46%	-0.9973	-0.9982	-0.0960%
10	0.25	9	1.3399	1.2163	10.16%	-0.9971	-0.9980	-0.0832%
10	0.25	10	1.4540	1.3435	8.22%	-0.9969	-0.9977	-0.0857%
10	0.25	11	1.5460	1.4512	6.53%	-0.9967	-0.9976	-0.0880%
10	0.25	12	1.6195	1.2334	31.31%	-0.9965	-0.9989	-0.2406%
10	0.25	13	1.4989	1.2011	24.80%	-0.9968	-0.9981	-0.1297%
10	0.25	14	1.4628	1.1827	23.68%	-0.9969	-0.9981	-0.1249%
10	0.25	15	1.5603	1.4037	11.16%	-0.9967	-0.9978	-0.1113%
10	0.25	16	1.6952	1.5870	6.82%	-0.9964	-0.9975	-0.1111%
10	0.25	17	1.7895	1.7056	4.92%	-0.9962	-0.9973	-0.1124%
10	0.5	0	1.1236	1.1399	-1.43%	-0.9976	-0.9989	-0.1291%
10	0.5	1	2.1593	5.1045	-57.70%	-0.9946	-0.9950	-0.0431%
10	0.5	2	2.6165	6.3121	-58.55%	-0.9934	-0.9894	0.4074%
10	0.5	3	2.9671	7.1139	-58.29%	-0.9934	-0.9881	0.5389%
10	0.5	4	3.2763	7.9842	-58.97%	-0.9927	-0.9866	0.6178%
10	0.5	5	3.4825	8.7018	-59.98%	-0.9911	-0.9854	0.5761%
10	0.5	6	2.3632	2.5455	-7.16%	-0.9949	-0.9957	-0.0796%
10	0.5	7	2.4060	4.5599	-47.24%	-0.9948	-0.9923	0.2515%
10	0.5	8	2.6298	5.4442	-51.70%	-0.9933	-0.9909	0.2418%
10	0.5	9	3.1169	7.2150	-56.80%	-0.9920	-0.9879	0.4169%
10	0.5	10	3.4885	8.6071	-59.47%	-0.9911	-0.9856	0.5583%
10	0.5	11	3.7437	9.5576	-60.83%	-0.9904	-0.9840	0.6548%
10	0.5	12	2.5185	2.7021	-6.80%	-0.9935	-0.9955	-0.1928%
10	0.5	13	2.3808	3.6127	-34.10%	-0.9949	-0.9939	0.0966%
10	0.5	14	2.3814	4.0387	-41.03%	-0.9949	-0.9932	0.1685%
10	0.5	15	3.5070	8.3625	-58.06%	-0.9910	-0.9860	0.5116%
10	0.5	16	4.0204	10.3951	-61.32%	-0.9897	-0.9826	0.7266%
10	0.5	17	4.2894	11.5674	-62.92%	-0.9899	-0.9806	0.9461%
10	0.75	0	3.0000	52.6739	-94.30%	-0.9976	-0.9116	9.4344%
10	0.75	1	5.8685	67.9961	-91.37%	-0.9874	-0.8859	11.4505%
10	0.75	2	7.0158	72.4844	-90.32%	-0.9814	-0.8784	11.7253%
10	0.75	3	7.8115	75.7542	-89.69%	-0.9793	-0.8729	12.1857%
10	0.75	4	8.6560	79.2052	-89.07%	-0.9770	-0.8671	12.6763%
10	0.75	5	9.3418	81.9759	-88.60%	-0.9752	-0.8625	13.0727%
10	0.75	6	4.2826	50.1297	-91.46%	-0.9886	-0.9510	3.9527%



10	0.75	7	5.7214	65.2044	-91.23%	-0.9848	-0.8906	10.5788%
10	0.75	8	6.4209	69.0645	-90.70%	-0.9830	-0.8841	11.1788%
10	0.75	9	8.1324	75.9344	-89.29%	-0.9784	-0.8726	12.1269%
10	0.75	10	9.3991	81.3863	-88.45%	-0.9751	-0.8635	12.9255%
10	0.75	11	10.2538	85.0172	-87.94%	-0.9728	-0.8574	13.4634%
10	0.75	12	4.4827	52.3359	-91.43%	-0.9881	-0.9122	8.3219%
10	0.75	13	5.1369	60.5666	-91.52%	-0.9864	-0.8984	9.7937%
10	0.75	14	5.4488	62.7496	-91.32%	-0.9855	-0.8947	10.1506%
10	0.75	15	9.5496	79.6526	-88.01%	-0.9747	-0.8664	12.5003%
10	0.75	16	11.2519	87.6388	-87.16%	-0.9701	-0.8530	13.7379%
10	0.75	17	12.2303	92.0170	-86.71%	-0.9676	-0.8456	14.4189%
10	1.25	0	3.2226	5.3360	-39.61%	-0.9926	-0.9945	-0.1969%
10	1.25	1	8.7492	25.1908	-65.27%	-0.9833	-0.9741	0.9500%
10	1.25	2	11.7378	39.0334	-69.93%	-0.9685	-0.9362	3.4540%
10	1.25	3	12.8037	50.7203	-74.76%	-0.9658	-0.9171	5.3181%
10	1.25	4	13.4621	63.7964	-78.90%	-0.9641	-0.8957	7.6358%
10	1.25	5	14.0114	74.5233	-81.20%	-0.9626	-0.8782	9.6185%
10	1.25	6	4.1068	7.6058	-46.00%	-0.9905	-0.9922	-0.1680%
10	1.25	7	7.9419	21.5510	-63.15%	-0.9849	-0.9778	0.7207%
10	1.25	8	10.2887	31.9007	-67.75%	-0.9804	-0.9478	3.4362%
10	1.25	9	12.9907	56.1739	-76.87%	-0.9653	-0.9082	6.2972%
10	1.25	10	13.9814	76.1236	-81.63%	-0.9627	-0.8755	9.9552%
10	1.25	11	14.6936	89.1860	-83.52%	-0.9608	-0.8542	12.4819%
10	1.25	12	4.6841	9.3561	-49.94%	-0.9908	-0.9904	0.0429%
10	1.25	13	6.4304	15.5605	-58.68%	-0.9874	-0.9840	0.3432%
10	1.25	14	7.2366	18.5559	-61.00%	-0.9858	-0.9809	0.4970%
10	1.25	15	13.8619	80.6061	-82.80%	-0.9630	-0.8682	10.9201%
10	1.25	16	15.3607	105.5744	-85.45%	-0.9590	-0.8274	15.9094%
10	1.25	17	16.2648	116.3322	-86.02%	-0.9566	-0.8150	17.3779%
10	2	0	1.1376	1.1516	-1.22%	-0.9974	-0.9988	-0.1446%
10	2	1	1.5504	1.7447	-11.14%	-0.9964	-0.9982	-0.1791%
10	2	2	1.8944	2.3605	-19.75%	-0.9956	-0.9976	-0.1954%
10	2	3	2.2800	3.0769	-25.90%	-0.9947	-0.9950	-0.0239%
10	2	4	2.6810	3.8004	-29.45%	-0.9931	-0.9938	-0.0684%
10	2	5	3.0292	4.5075	-32.80%	-0.9922	-0.9926	-0.0422%
10	2	6	1.3640	1.4541	-6.19%	-0.9968	-0.9985	-0.1659%
10	2	7	1.6345	1.8866	-13.36%	-0.9962	-0.9981	-0.1840%
10	2	8	1.7923	2.1683	-17.34%	-0.9959	-0.9978	-0.1915%
10	2	9	2.4779	3.3979	-27.08%	-0.9936	-0.9944	-0.0820%
10	2	10	3.0684	4.5881	-33.12%	-0.9921	-0.9925	-0.0390%
10	2	11	3.4318	5.6248	-38.99%	-0.9911	-0.9908	0.0332%
10	2	12	1.5021	1.6663	-9.85%	-0.9965	-0.9983	-0.1760%
10	2	13	1.6111	1.8465	-12.75%	-0.9963	-0.9981	-0.1827%
10	2	14	1.6545	1.9212	-13.88%	-0.9962	-0.9980	-0.1851%
10	2	15	3.1582	4.7738	-33.84%	-0.9919	-0.9922	-0.0317%
10	2	16	3.7429	7.0814	-47.15%	-0.9903	-0.9884	0.1930%

10	2	17	3.9347	8.6944	-54.74%	-0.9895	-0.9858	0.3773%
10	4	0	1.0024	1.0024	0.00%	-0.9977	-0.9990	-0.1287%
10	4	1	1.0186	1.0189	-0.03%	-0.9976	-0.9990	-0.1307%
10	4	2	1.0392	1.0405	-0.12%	-0.9976	-0.9989	-0.1333%
10	4	3	1.0675	1.0710	-0.33%	-0.9975	-0.9989	-0.1367%
10	4	4	1.1121	1.1215	-0.84%	-0.9974	-0.9988	-0.1418%
10	4	5	1.1570	1.1745	-1.49%	-0.9970	-0.9981	-0.1056%
10	4	6	1.0320	1.0328	-0.08%	-0.9976	-0.9989	-0.1324%
10	4	7	1.0438	1.0453	-0.15%	-0.9976	-0.9989	-0.1338%
10	4	8	1.0505	1.0525	-0.19%	-0.9976	-0.9989	-0.1346%
10	4	9	1.1002	1.1078	-0.69%	-0.9975	-0.9989	-0.1404%
10	4	10	1.1676	1.1874	-1.67%	-0.9970	-0.9981	-0.1063%
10	4	11	1.2151	1.2467	-2.54%	-0.9969	-0.9980	-0.1088%
10	4	12	1.0764	1.0809	-0.42%	-0.9975	-0.9989	-0.1377%
10	4	13	1.0690	1.0727	-0.34%	-0.9975	-0.9989	-0.1368%
10	4	14	1.0671	1.0706	-0.33%	-0.9975	-0.9989	-0.1366%
10	4	15	1.1921	1.2177	-2.10%	-0.9969	-0.9980	-0.1076%
10	4	16	1.2895	1.3447	-4.11%	-0.9967	-0.9978	-0.1119%
10	4	17	1.3667	1.4521	-5.88%	-0.9965	-0.9976	-0.1142%
15	0.25	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9995	-0.2132%
15	0.25	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9995	-0.2132%
15	0.25	2	1.0001	1.0017	-0.15%	-0.9975	-0.9981	-0.0617%
15	0.25	3	1.0030	1.0092	-0.61%	-0.9974	-0.9981	-0.0610%
15	0.25	4	1.0136	1.0259	-1.20%	-0.9974	-0.9980	-0.0605%
15	0.25	5	1.0290	1.0460	-1.63%	-0.9974	-0.9980	-0.0599%
15	0.25	6	1.0294	1.0358	-0.61%	-0.9974	-0.9992	-0.1804%
15	0.25	7	1.0138	1.0162	-0.23%	-0.9974	-0.9980	-0.0624%
15	0.25	8	1.0102	1.0114	-0.12%	-0.9974	-0.9981	-0.0624%
15	0.25	9	1.0177	1.0250	-0.71%	-0.9974	-0.9980	-0.0617%
15	0.25	10	1.0394	1.0548	-1.46%	-0.9974	-0.9980	-0.0615%
15	0.25	11	1.0636	1.0852	-1.98%	-0.9973	-0.9979	-0.0618%
15	0.25	12	1.0720	1.0431	2.77%	-0.9978	-0.9992	-0.1424%
15	0.25	13	1.0439	1.0403	0.34%	-0.9978	-0.9992	-0.1367%
15	0.25	14	1.0367	1.0381	-0.13%	-0.9978	-0.9980	-0.0167%
15	0.25	15	1.0679	1.0789	-1.02%	-0.9973	-0.9979	-0.0635%
15	0.25	16	1.1140	1.1394	-2.23%	-0.9972	-0.9978	-0.0642%
15	0.25	17	1.1515	1.1874	-3.02%	-0.9971	-0.9977	-0.0645%
15	0.5	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9995	-0.2132%
15	0.5	1	1.2162	2.5844	-52.94%	-0.9968	-0.9988	-0.1951%
15	0.5	2	1.6935	3.1865	-46.85%	-0.9956	-0.9939	0.1749%
15	0.5	3	1.9254	3.5664	-46.01%	-0.9960	-0.9931	0.2869%
15	0.5	4	2.0063	3.9843	-49.64%	-0.9958	-0.9923	0.3513%
15	0.5	5	2.0701	4.3328	-52.22%	-0.9957	-0.9916	0.4059%
15	0.5	6	1.3383	1.4948	-10.47%	-0.9972	-0.9971	0.0084%
15	0.5	7	1.4501	2.3760	-38.97%	-0.9963	-0.9954	0.0892%
15	0.5	8	1.6039	2.7813	-42.34%	-0.9959	-0.9946	0.1285%

15	0.5	9	1.9350	3.6147	-46.47%	-0.9960	-0.9930	0.2943%
15	0.5	10	2.0618	4.2866	-51.90%	-0.9957	-0.9917	0.3986%
15	0.5	11	2.1433	4.7529	-54.91%	-0.9955	-0.9908	0.4725%
15	0.5	12	1.3690	1.5601	-12.25%	-0.9971	-0.9970	0.0146%
15	0.5	13	1.4370	1.9524	-26.40%	-0.9963	-0.9962	0.0105%
15	0.5	14	1.4373	2.1413	-32.88%	-0.9963	-0.9959	0.0470%
15	0.5	15	2.0402	4.1676	-51.05%	-0.9957	-0.9920	0.3799%
15	0.5	16	2.2124	5.1684	-57.19%	-0.9954	-0.9900	0.5392%
15	0.5	17	2.3060	5.7568	-59.94%	-0.9952	-0.9889	0.6347%
15	0.75	0	2.0000	25.6276	-92.20%	-0.9976	-0.9880	0.9719%
15	0.75	1	4.6002	39.6197	-88.39%	-0.9879	-0.9236	6.9647%
15	0.75	2	5.5457	42.6310	-86.99%	-0.9855	-0.9178	7.3713%
15	0.75	3	6.3189	44.8470	-85.91%	-0.9834	-0.9135	7.6517%
15	0.75	4	6.9196	47.2056	-85.34%	-0.9824	-0.9090	8.0726%
15	0.75	5	7.3949	49.1135	-84.94%	-0.9812	-0.9053	8.3780%
15	0.75	6	3.2099	24.6059	-86.95%	-0.9914	-0.9884	0.3040%
15	0.75	7	4.5920	37.7652	-87.84%	-0.9877	-0.9272	6.5304%
15	0.75	8	5.1228	40.3333	-87.30%	-0.9866	-0.9222	6.9758%
15	0.75	9	6.5532	44.9697	-85.43%	-0.9833	-0.9133	7.6648%
15	0.75	10	7.4344	48.7064	-84.74%	-0.9811	-0.9061	8.2730%
15	0.75	11	7.7796	51.2219	-84.81%	-0.9837	-0.9013	9.1516%
15	0.75	12	3.3929	29.4124	-88.46%	-0.9909	-0.9433	5.0511%
15	0.75	13	4.0125	34.7168	-88.44%	-0.9893	-0.9331	6.0252%
15	0.75	14	4.3188	36.1465	-88.05%	-0.9885	-0.9303	6.2515%
15	0.75	15	7.2995	47.5129	-84.64%	-0.9847	-0.9084	8.4029%
15	0.75	16	8.0217	53.0511	-84.88%	-0.9832	-0.8977	9.5239%
15	0.75	17	8.4377	56.1294	-84.97%	-0.9824	-0.8918	10.1552%
15	1.25	0	2.3494	3.8301	-38.66%	-0.9944	-0.9976	-0.3205%
15	1.25	1	6.5319	14.1684	-53.90%	-0.9846	-0.9681	1.6980%
15	1.25	2	9.2675	21.2523	-56.39%	-0.9751	-0.9522	2.4027%
15	1.25	3	9.6622	28.0996	-65.61%	-0.9740	-0.9368	3.9732%
15	1.25	4	10.0951	35.9686	-71.93%	-0.9728	-0.9191	5.8491%
15	1.25	5	10.4547	42.5653	-75.44%	-0.9719	-0.9042	7.4793%
15	1.25	6	2.8835	5.5630	-48.17%	-0.9932	-0.9966	-0.3406%
15	1.25	7	5.7900	13.1446	-55.95%	-0.9863	-0.9704	1.6373%
15	1.25	8	7.9913	17.1739	-53.47%	-0.9811	-0.9614	2.0546%
15	1.25	9	9.7853	31.3568	-68.79%	-0.9737	-0.9295	4.7572%
15	1.25	10	10.4351	43.5594	-76.04%	-0.9719	-0.9020	7.7517%
15	1.25	11	10.8997	51.7634	-78.94%	-0.9707	-0.8835	9.8610%
15	1.25	12	3.2704	6.9564	-52.99%	-0.9923	-0.9957	-0.3467%
15	1.25	13	4.5695	10.6568	-57.12%	-0.9892	-0.9760	1.3500%
15	1.25	14	5.1808	12.0031	-56.84%	-0.9878	-0.9730	1.5170%
15	1.25	15	10.3569	46.3571	-77.66%	-0.9721	-0.8957	8.5323%
15	1.25	16	11.3333	62.2635	-81.80%	-0.9695	-0.8599	12.7432%
15	1.25	17	11.9188	70.7043	-83.14%	-0.9679	-0.8409	15.1017%
15	2	0	1.0386	1.0400	-0.13%	-0.9975	-0.9994	-0.1816%

15	2	1	1.2809	1.3515	-5.22%	-0.9970	-0.9992	-0.2198%
15	2	2	1.5082	1.5877	-5.01%	-0.9964	-0.9964	0.0008%
15	2	3	1.7075	1.8409	-7.25%	-0.9956	-0.9959	-0.0234%
15	2	4	1.9672	2.1869	-10.05%	-0.9950	-0.9951	-0.0120%
15	2	5	2.2170	2.5301	-12.37%	-0.9943	-0.9943	0.0013%
15	2	6	1.1617	1.1852	-1.98%	-0.9973	-0.9993	-0.2018%
15	2	7	1.3363	1.4352	-6.89%	-0.9968	-0.9968	0.0071%
15	2	8	1.4407	1.5398	-6.44%	-0.9966	-0.9965	0.0060%
15	2	9	1.8233	1.9936	-8.54%	-0.9953	-0.9955	-0.0187%
15	2	10	2.2454	2.5695	-12.62%	-0.9942	-0.9942	0.0029%
15	2	11	2.5165	3.0796	-18.29%	-0.9937	-0.9931	0.0597%
15	2	12	1.2494	1.3051	-4.27%	-0.9970	-0.9992	-0.2152%
15	2	13	1.3208	1.4129	-6.51%	-0.9969	-0.9991	-0.2255%
15	2	14	1.3495	1.4586	-7.48%	-0.9968	-0.9991	-0.2294%
15	2	15	2.3104	2.6604	-13.16%	-0.9941	-0.9940	0.0067%
15	2	16	2.7240	3.8061	-28.43%	-0.9931	-0.9914	0.1719%
15	2	17	2.9668	4.6215	-35.81%	-0.9925	-0.9896	0.2958%
15	4	0	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9979	-0.9994	-0.1485%
15	4	1	1.0016	1.0017	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1752%
15	4	2	1.0054	1.0054	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1759%
15	4	3	1.0106	1.0107	-0.01%	-0.9974	-0.9977	-0.0316%
15	4	4	1.0185	1.0187	-0.02%	-0.9974	-0.9977	-0.0318%
15	4	5	1.0280	1.0284	-0.04%	-0.9974	-0.9977	-0.0321%
15	4	6	1.0039	1.0039	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1756%
15	4	7	1.0064	1.0065	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1761%
15	4	8	1.0081	1.0081	-0.01%	-0.9976	-0.9994	-0.1764%
15	4	9	1.0168	1.0169	-0.02%	-0.9974	-0.9977	-0.0318%
15	4	10	1.0313	1.0318	-0.05%	-0.9974	-0.9977	-0.0321%
15	4	11	1.0474	1.0486	-0.11%	-0.9973	-0.9976	-0.0325%
15	4	12	1.0155	1.0157	-0.02%	-0.9976	-0.9994	-0.1776%
15	4	13	1.0127	1.0128	-0.01%	-0.9974	-0.9977	-0.0317%
15	4	14	1.0120	1.0121	-0.01%	-0.9974	-0.9977	-0.0316%
15	4	15	1.0393	1.0401	-0.08%	-0.9973	-0.9977	-0.0323%
15	4	16	1.0773	1.0801	-0.26%	-0.9972	-0.9976	-0.0331%
15	4	17	1.1128	1.1184	-0.50%	-0.9971	-0.9975	-0.0336%
20	0.25	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9992	-0.1811%
20	0.25	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9992	-0.1811%
20	0.25	2	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9973	-0.9987	-0.1365%
20	0.25	3	1.0001	1.0006	-0.05%	-0.9975	-0.9987	-0.1169%
20	0.25	4	1.0006	1.0034	-0.28%	-0.9975	-0.9984	-0.0842%
20	0.25	5	1.0015	1.0079	-0.63%	-0.9975	-0.9984	-0.0837%
20	0.25	6	1.0011	1.0017	-0.06%	-0.9974	-0.9974	0.0011%
20	0.25	7	1.0002	1.0016	-0.13%	-0.9975	-0.9987	-0.1177%
20	0.25	8	1.0001	1.0010	-0.09%	-0.9975	-0.9984	-0.0845%
20	0.25	9	1.0005	1.0032	-0.27%	-0.9975	-0.9984	-0.0842%
20	0.25	10	1.0021	1.0103	-0.81%	-0.9975	-0.9984	-0.0835%

20	0.25	11	1.0046	1.0195	-1.46%	-0.9975	-0.9984	-0.0826%
20	0.25	12	1.0023	1.0023	0.00%	-0.9974	-0.9974	0.0010%
20	0.25	13	1.0010	1.0021	-0.10%	-0.9974	-0.9974	0.0012%
20	0.25	14	1.0008	1.0033	-0.25%	-0.9974	-0.9974	0.0016%
20	0.25	15	1.0040	1.0175	-1.32%	-0.9975	-0.9984	-0.0828%
20	0.25	16	1.0107	1.0394	-2.76%	-0.9975	-0.9983	-0.0809%
20	0.25	17	1.0175	1.0595	-3.97%	-0.9975	-0.9983	-0.0793%
20	0.5	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9992	-0.1811%
20	0.5	1	1.1276	1.3070	-13.73%	-0.9970	-0.9990	-0.1949%
20	0.5	2	1.3359	1.9412	-31.18%	-0.9965	-0.9975	-0.1043%
20	0.5	3	1.4536	2.2806	-36.26%	-0.9964	-0.9971	-0.0634%
20	0.5	4	1.5115	2.6714	-43.42%	-0.9963	-0.9966	-0.0272%
20	0.5	5	1.5569	3.0098	-48.27%	-0.9962	-0.9961	0.0054%
20	0.5	6	1.0767	1.2165	-11.49%	-0.9974	-0.9980	-0.0685%
20	0.5	7	1.2580	1.4705	-14.45%	-0.9967	-0.9981	-0.1443%
20	0.5	8	1.2879	1.7007	-24.27%	-0.9966	-0.9978	-0.1226%
20	0.5	9	1.4605	2.4081	-39.35%	-0.9964	-0.9969	-0.0486%
20	0.5	10	1.5510	3.0202	-48.64%	-0.9962	-0.9961	0.0082%
20	0.5	11	1.6088	3.3463	-51.92%	-0.9960	-0.9946	0.1449%
20	0.5	12	1.0907	1.2533	-12.97%	-0.9973	-0.9980	-0.0661%
20	0.5	13	1.1749	1.4519	-19.08%	-0.9971	-0.9981	-0.1017%
20	0.5	14	1.2135	1.4524	-16.45%	-0.9970	-0.9981	-0.1111%
20	0.5	15	1.5357	2.9426	-47.81%	-0.9962	-0.9953	0.0975%
20	0.5	16	1.6575	3.6362	-54.42%	-0.9959	-0.9941	0.1799%
20	0.5	17	1.7228	4.0512	-57.47%	-0.9958	-0.9935	0.2312%
20	0.75	0	2.0000	4.1905	-52.27%	-0.9983	-0.9967	0.1619%
20	0.75	1	3.8488	26.3903	-85.42%	-0.9905	-0.9789	1.1784%
20	0.75	2	4.4754	32.3369	-86.16%	-0.9890	-0.9583	3.2004%
20	0.75	3	4.6362	35.7391	-87.03%	-0.9886	-0.9540	3.6332%
20	0.75	4	4.8093	39.1511	-87.72%	-0.9882	-0.9369	5.4733%
20	0.75	5	4.9510	40.9368	-87.91%	-0.9878	-0.9340	5.7611%
20	0.75	6	2.8382	9.4478	-69.96%	-0.9938	-0.9925	0.1311%
20	0.75	7	3.8549	23.1958	-83.38%	-0.9905	-0.9815	0.9140%
20	0.75	8	4.3104	29.0922	-85.18%	-0.9894	-0.9625	2.7943%
20	0.75	9	4.6452	36.2581	-87.19%	-0.9886	-0.9533	3.7036%
20	0.75	10	4.9206	40.5549	-87.87%	-0.9879	-0.9346	5.6994%
20	0.75	11	5.1092	42.9226	-88.10%	-0.9875	-0.9308	6.0829%
20	0.75	12	2.9886	11.0601	-72.98%	-0.9934	-0.9912	0.2278%
20	0.75	13	3.5011	17.0514	-79.47%	-0.9923	-0.9864	0.5993%
20	0.75	14	3.7559	20.2491	-81.45%	-0.9917	-0.9838	0.8033%
20	0.75	15	4.8320	39.4380	-87.75%	-0.9881	-0.9364	5.5195%
20	0.75	16	5.2482	44.6556	-88.25%	-0.9871	-0.9280	6.3654%
20	0.75	17	5.4855	47.5929	-88.47%	-0.9865	-0.9233	6.8475%
20	1.25	0	1.8768	1.9328	-2.90%	-0.9950	-0.9950	0.0006%
20	1.25	1	4.8425	7.3211	-33.86%	-0.9879	-0.9812	0.6860%
20	1.25	2	7.0058	13.2390	-47.08%	-0.9817	-0.9659	1.6353%

20	1.25	3	8.2016	19.9457	-58.88%	-0.9784	-0.9487	3.1328%
20	1.25	4	8.5446	26.2149	-67.41%	-0.9775	-0.9320	4.8821%
20	1.25	5	8.8286	29.5996	-70.17%	-0.9767	-0.9232	5.7988%
20	1.25	6	2.3951	2.5244	-5.12%	-0.9937	-0.9935	0.0157%
20	1.25	7	4.4165	6.3037	-29.94%	-0.9890	-0.9838	0.5263%
20	1.25	8	5.6555	9.3328	-39.40%	-0.9859	-0.9760	1.0119%
20	1.25	9	8.2993	22.8897	-63.74%	-0.9781	-0.9454	3.4632%
20	1.25	10	8.8131	29.7502	-70.38%	-0.9768	-0.9228	5.8480%
20	1.25	11	9.1790	34.1131	-73.09%	-0.9758	-0.9115	7.0569%
20	1.25	12	2.7399	2.9867	-8.26%	-0.9947	-0.9923	0.2433%
20	1.25	13	3.6893	4.6555	-20.75%	-0.9908	-0.9880	0.2788%
20	1.25	14	4.0583	5.4754	-25.88%	-0.9898	-0.9859	0.3998%
20	1.25	15	8.7515	30.0648	-70.89%	-0.9769	-0.9220	5.9594%
20	1.25	16	9.5195	39.0546	-75.63%	-0.9749	-0.8987	8.4845%
20	1.25	17	9.9778	44.1566	-77.40%	-0.9737	-0.8854	9.9702%
20	2	0	1.0030	1.0030	0.00%	-0.9973	-0.9974	-0.0074%
20	2	1	1.0745	1.0746	-0.02%	-0.9972	-0.9972	-0.0079%
20	2	2	1.1965	1.1985	-0.17%	-0.9968	-0.9969	-0.0083%
20	2	3	1.3717	1.3810	-0.67%	-0.9964	-0.9964	-0.0077%
20	2	4	1.5695	1.6463	-4.66%	-0.9959	-0.9961	-0.0137%
20	2	5	1.7450	1.8631	-6.34%	-0.9955	-0.9956	-0.0074%
20	2	6	1.0300	1.0300	0.00%	-0.9973	-0.9973	-0.0076%
20	2	7	1.1002	1.1005	-0.03%	-0.9971	-0.9972	-0.0080%
20	2	8	1.1560	1.1571	-0.10%	-0.9969	-0.9970	-0.0082%
20	2	9	1.4701	1.5032	-2.20%	-0.9962	-0.9961	0.0062%
20	2	10	1.7651	1.8882	-6.52%	-0.9954	-0.9955	-0.0066%
20	2	11	2.0234	2.1810	-7.23%	-0.9948	-0.9943	0.0422%
20	2	12	1.0612	1.0613	-0.01%	-0.9972	-0.9973	-0.0078%
20	2	13	1.0927	1.0930	-0.03%	-0.9971	-0.9972	-0.0080%
20	2	14	1.1067	1.1071	-0.04%	-0.9971	-0.9972	-0.0081%
20	2	15	1.8113	1.9463	-6.94%	-0.9953	-0.9954	-0.0047%
20	2	16	2.2418	2.4461	-8.35%	-0.9943	-0.9937	0.0697%
20	2	17	2.4307	2.7728	-12.34%	-0.9939	-0.9928	0.1071%
20	4	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9974	0.0000%
20	4	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	2	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	3	1.0005	1.0005	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	4	1.0018	1.0018	0.00%	-0.9973	-0.9974	-0.0074%
20	4	5	1.0043	1.0043	0.00%	-0.9973	-0.9974	-0.0074%
20	4	6	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	7	1.0002	1.0002	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	8	1.0003	1.0003	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	9	1.0014	1.0014	0.00%	-0.9973	-0.9974	-0.0074%
20	4	10	1.0053	1.0053	0.00%	-0.9973	-0.9974	-0.0074%
20	4	11	1.0103	1.0103	-0.01%	-0.9974	-0.9976	-0.0206%
20	4	12	1.0007	1.0007	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%

20	4	13	1.0005	1.0005	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	14	1.0005	1.0005	0.00%	-0.9974	-0.9974	-0.0074%
20	4	15	1.0078	1.0079	0.00%	-0.9974	-0.9976	-0.0206%
20	4	16	1.0205	1.0207	-0.02%	-0.9974	-0.9976	-0.0208%
20	4	17	1.0349	1.0354	-0.05%	-0.9973	-0.9975	-0.0210%
25	0.25	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9977	-0.9999	-0.2170%
25	0.25	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9977	-0.9999	-0.2170%
25	0.25	2	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9978	-0.9976	0.0134%
25	0.25	3	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0557%
25	0.25	4	1.0001	1.0002	-0.01%	-0.9974	-0.9980	-0.0557%
25	0.25	5	1.0003	1.0008	-0.05%	-0.9976	-0.9980	-0.0316%
25	0.25	6	1.0000	1.0003	-0.03%	-0.9977	-0.9985	-0.0764%
25	0.25	7	1.0000	1.0001	-0.01%	-0.9975	-0.9982	-0.0687%
25	0.25	8	1.0000	1.0001	0.00%	-0.9975	-0.9982	-0.0687%
25	0.25	9	1.0001	1.0003	-0.02%	-0.9974	-0.9980	-0.0557%
25	0.25	10	1.0004	1.0014	-0.10%	-0.9974	-0.9980	-0.0555%
25	0.25	11	1.0011	1.0037	-0.27%	-0.9974	-0.9980	-0.0552%
25	0.25	12	1.0002	1.0005	-0.03%	-0.9975	-0.9985	-0.0926%
25	0.25	13	1.0001	1.0004	-0.03%	-0.9975	-0.9982	-0.0687%
25	0.25	14	1.0000	1.0003	-0.02%	-0.9975	-0.9982	-0.0687%
25	0.25	15	1.0009	1.0035	-0.26%	-0.9975	-0.9982	-0.0683%
25	0.25	16	1.0030	1.0101	-0.70%	-0.9975	-0.9982	-0.0677%
25	0.25	17	1.0053	1.0165	-1.10%	-0.9975	-0.9982	-0.0671%
25	0.5	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9977	-0.9999	-0.2170%
25	0.5	1	1.0083	1.0453	-3.54%	-0.9973	-0.9984	-0.1056%
25	0.5	2	1.2042	1.2425	-3.09%	-0.9968	-0.9971	-0.0222%
25	0.5	3	1.3317	1.4303	-6.89%	-0.9965	-0.9966	-0.0112%
25	0.5	4	1.4149	1.6621	-14.87%	-0.9963	-0.9961	0.0263%
25	0.5	5	1.4564	1.8706	-22.14%	-0.9962	-0.9956	0.0651%
25	0.5	6	1.0398	1.1059	-5.98%	-0.9973	-0.9987	-0.1367%
25	0.5	7	1.1408	1.1599	-1.64%	-0.9969	-0.9976	-0.0717%
25	0.5	8	1.1713	1.1985	-2.27%	-0.9969	-0.9972	-0.0240%
25	0.5	9	1.3682	1.5546	-11.99%	-0.9964	-0.9963	0.0130%
25	0.5	10	1.4510	1.9087	-23.98%	-0.9962	-0.9955	0.0756%
25	0.5	11	1.5035	2.1474	-29.99%	-0.9961	-0.9956	0.0479%
25	0.5	12	1.0494	1.1286	-7.02%	-0.9973	-0.9986	-0.1364%
25	0.5	13	1.1137	1.1517	-3.30%	-0.9971	-0.9977	-0.0543%
25	0.5	14	1.1346	1.1519	-1.51%	-0.9969	-0.9977	-0.0716%
25	0.5	15	1.4370	1.9348	-25.73%	-0.9963	-0.9961	0.0216%
25	0.5	16	1.5475	2.4085	-35.75%	-0.9960	-0.9951	0.0899%
25	0.5	17	1.6061	2.7088	-40.71%	-0.9958	-0.9945	0.1362%
25	0.75	0	1.0000	2.0988	-52.35%	-0.9977	-0.9967	0.0997%
25	0.75	1	3.1881	10.4046	-69.36%	-0.9916	-0.9754	1.6594%
25	0.75	2	3.8805	13.1519	-70.50%	-0.9899	-0.9689	2.1735%
25	0.75	3	4.0077	15.3440	-73.88%	-0.9896	-0.9637	2.6893%
25	0.75	4	4.1442	17.7364	-76.63%	-0.9892	-0.9580	3.2592%

25	0.75	5	4.2556	19.7098	-78.41%	-0.9890	-0.9534	3.7348%
25	0.75	6	2.1775	3.7865	-42.49%	-0.9944	-0.9910	0.3429%
25	0.75	7	3.1921	9.2580	-65.52%	-0.9915	-0.9781	1.3763%
25	0.75	8	3.6964	11.2904	-67.26%	-0.9902	-0.9733	1.7401%
25	0.75	9	4.0148	15.9402	-74.81%	-0.9896	-0.9623	2.8380%
25	0.75	10	4.2317	19.6603	-78.48%	-0.9890	-0.9535	3.7285%
25	0.75	11	4.3797	22.2052	-80.28%	-0.9886	-0.9474	4.3474%
25	0.75	12	2.3302	4.4430	-47.55%	-0.9940	-0.9895	0.4610%
25	0.75	13	2.8619	7.2052	-60.28%	-0.9927	-0.9887	0.4053%
25	0.75	14	3.1340	8.2550	-62.04%	-0.9920	-0.9805	1.1760%
25	0.75	15	4.1621	19.5034	-78.66%	-0.9892	-0.9538	3.7071%
25	0.75	16	4.4884	24.7943	-81.90%	-0.9884	-0.9413	4.9968%
25	0.75	17	4.6735	27.8089	-83.19%	-0.9879	-0.9342	5.7473%
25	1.25	0	1.5865	1.8265	-13.14%	-0.9966	-0.9978	-0.1168%
25	1.25	1	4.0247	7.8409	-48.67%	-0.9916	-0.9823	0.9466%
25	1.25	2	5.6977	12.1810	-53.22%	-0.9881	-0.9725	1.6049%
25	1.25	3	7.0176	16.6248	-57.79%	-0.9812	-0.9624	1.9509%
25	1.25	4	7.9509	21.9820	-63.83%	-0.9787	-0.9503	2.9858%
25	1.25	5	8.2333	26.6519	-69.11%	-0.9779	-0.9397	4.0625%
25	1.25	6	1.9022	2.4257	-21.58%	-0.9959	-0.9971	-0.1115%
25	1.25	7	3.6600	6.7025	-45.39%	-0.9922	-0.9919	0.0332%
25	1.25	8	4.6153	9.6466	-52.16%	-0.9903	-0.9782	1.2415%
25	1.25	9	7.4222	18.8122	-60.55%	-0.9807	-0.9575	2.4310%
25	1.25	10	8.2179	27.3686	-69.97%	-0.9779	-0.9381	4.2466%
25	1.25	11	8.5831	33.4027	-74.30%	-0.9770	-0.9245	5.6793%
25	1.25	12	2.1331	2.9119	-26.75%	-0.9955	-0.9965	-0.1018%
25	1.25	13	2.9153	4.7626	-38.79%	-0.9938	-0.9942	-0.0439%
25	1.25	14	3.2870	5.7156	-42.49%	-0.9930	-0.9931	-0.0073%
25	1.25	15	8.1566	29.4027	-72.26%	-0.9781	-0.9335	4.7779%
25	1.25	16	8.9241	41.4118	-78.45%	-0.9761	-0.9064	7.6901%
25	1.25	17	9.3851	47.3482	-80.18%	-0.9748	-0.9158	6.4449%
25	2	0	1.0009	1.0009	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0920%
25	2	1	1.0434	1.0449	-0.15%	-0.9978	-0.9987	-0.0957%
25	2	2	1.1293	1.1426	-1.17%	-0.9976	-0.9986	-0.1022%
25	2	3	1.2253	1.2470	-1.74%	-0.9969	-0.9972	-0.0244%
25	2	4	1.3477	1.3935	-3.29%	-0.9966	-0.9968	-0.0218%
25	2	5	1.4708	1.5467	-4.91%	-0.9963	-0.9965	-0.0179%
25	2	6	1.0148	1.0150	-0.02%	-0.9978	-0.9988	-0.0933%
25	2	7	1.0610	1.0641	-0.29%	-0.9977	-0.9987	-0.0972%
25	2	8	1.1004	1.1085	-0.73%	-0.9977	-0.9987	-0.1002%
25	2	9	1.2789	1.3104	-2.40%	-0.9968	-0.9970	-0.0234%
25	2	10	1.4850	1.5647	-5.10%	-0.9963	-0.9965	-0.0174%
25	2	11	1.6532	1.8023	-8.27%	-0.9958	-0.9959	-0.0165%
25	2	12	1.0345	1.0355	-0.10%	-0.9978	-0.9987	-0.0950%
25	2	13	1.0558	1.0584	-0.24%	-0.9977	-0.9987	-0.0968%
25	2	14	1.0656	1.0691	-0.33%	-0.9977	-0.9987	-0.0976%



25	2	15	1.5177	1.6064	-5.52%	-0.9962	-0.9964	-0.0162%
25	2	16	1.7816	2.1530	-17.25%	-0.9954	-0.9951	0.0300%
25	2	17	1.9343	2.4846	-22.15%	-0.9950	-0.9962	-0.1139%
25	4	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0919%
25	4	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0919%
25	4	2	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0919%
25	4	3	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0920%
25	4	4	1.0004	1.0004	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0239%
25	4	5	1.0008	1.0008	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0239%
25	4	6	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0919%
25	4	7	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0919%
25	4	8	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0919%
25	4	9	1.0003	1.0003	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0239%
25	4	10	1.0010	1.0010	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0239%
25	4	11	1.0022	1.0022	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0239%
25	4	12	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0920%
25	4	13	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0920%
25	4	14	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0920%
25	4	15	1.0015	1.0016	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0239%
25	4	16	1.0054	1.0055	0.00%	-0.9975	-0.9977	-0.0240%
25	4	17	1.0109	1.0110	-0.01%	-0.9975	-0.9977	-0.0241%
30	0.25	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0901%
30	0.25	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9993	-0.1423%
30	0.25	2	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9974	0.0013%
30	0.25	3	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9974	0.0013%
30	0.25	4	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9974	0.0013%
30	0.25	5	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9974	0.0172%
30	0.25	6	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0901%
30	0.25	7	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9979	-0.0316%
30	0.25	8	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9979	-0.0316%
30	0.25	9	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9974	0.0172%
30	0.25	10	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9976	-0.9974	0.0172%
30	0.25	11	1.0002	1.0004	-0.01%	-0.9976	-0.9974	0.0172%
30	0.25	12	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9977	-0.9979	-0.0135%
30	0.25	13	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9977	-0.9979	-0.0135%
30	0.25	14	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9977	-0.9979	-0.0135%
30	0.25	15	1.0002	1.0005	-0.03%	-0.9976	-0.9974	0.0173%
30	0.25	16	1.0009	1.0019	-0.09%	-0.9976	-0.9974	0.0175%
30	0.25	17	1.0021	1.0037	-0.16%	-0.9976	-0.9979	-0.0313%
30	0.5	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0901%
30	0.5	1	1.0073	1.0074	-0.01%	-0.9977	-0.9979	-0.0180%
30	0.5	2	1.1066	1.1179	-1.01%	-0.9975	-0.9976	-0.0174%
30	0.5	3	1.2278	1.2704	-3.35%	-0.9968	-0.9967	0.0088%
30	0.5	4	1.3101	1.3867	-5.53%	-0.9966	-0.9964	0.0175%
30	0.5	5	1.3787	1.4905	-7.50%	-0.9964	-0.9961	0.0266%
30	0.5	6	1.0210	1.0527	-3.01%	-0.9975	-0.9973	0.0259%

30	0.5	7	1.0563	1.0591	-0.26%	-0.9972	-0.9972	-0.0013%
30	0.5	8	1.1030	1.1121	-0.82%	-0.9971	-0.9971	0.0002%
30	0.5	9	1.2550	1.3078	-4.04%	-0.9967	-0.9966	0.0114%
30	0.5	10	1.3808	1.4937	-7.56%	-0.9964	-0.9961	0.0269%
30	0.5	11	1.4346	1.6346	-12.23%	-0.9965	-0.9957	0.0772%
30	0.5	12	1.0274	1.0690	-3.89%	-0.9975	-0.9991	-0.1593%
30	0.5	13	1.0528	1.0553	-0.23%	-0.9972	-0.9972	-0.0014%
30	0.5	14	1.0529	1.0554	-0.23%	-0.9972	-0.9972	-0.0014%
30	0.5	15	1.3712	1.5036	-8.80%	-0.9967	-0.9961	0.0583%
30	0.5	16	1.4764	1.7971	-17.85%	-0.9964	-0.9953	0.1096%
30	0.5	17	1.5317	1.9855	-22.85%	-0.9963	-0.9948	0.1455%
30	0.75	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9979	-0.9988	-0.0901%
30	0.75	1	2.8537	6.7496	-57.72%	-0.9931	-0.9857	0.7457%
30	0.75	2	3.5320	9.8077	-63.99%	-0.9914	-0.9793	1.2364%
30	0.75	3	3.6402	12.4481	-70.76%	-0.9911	-0.9737	1.7894%
30	0.75	4	3.7561	14.1663	-73.49%	-0.9908	-0.9630	2.8899%
30	0.75	5	3.8504	15.2787	-74.80%	-0.9906	-0.9601	3.1773%
30	0.75	6	1.9275	2.7119	-28.93%	-0.9956	-0.9943	0.1321%
30	0.75	7	2.8581	5.9702	-52.13%	-0.9931	-0.9874	0.5766%
30	0.75	8	3.3144	7.9604	-58.36%	-0.9917	-0.9832	0.8683%
30	0.75	9	3.6462	13.0077	-71.97%	-0.9911	-0.9660	2.5954%
30	0.75	10	3.8302	15.1392	-74.70%	-0.9907	-0.9605	3.1433%
30	0.75	11	3.9553	16.6055	-76.18%	-0.9903	-0.9566	3.5242%
30	0.75	12	2.0723	3.0851	-32.83%	-0.9953	-0.9935	0.1782%
30	0.75	13	2.5640	4.4937	-42.94%	-0.9935	-0.9905	0.2993%
30	0.75	14	2.7419	5.2584	-47.86%	-0.9930	-0.9889	0.4173%
30	0.75	15	3.7712	14.7335	-74.40%	-0.9908	-0.9615	3.0446%
30	0.75	16	4.0471	17.8891	-77.38%	-0.9901	-0.9533	3.8648%
30	0.75	17	4.2029	19.6958	-78.66%	-0.9897	-0.9486	4.3413%
30	1.25	0	1.5177	1.7470	-13.13%	-0.9963	-0.9990	-0.2661%
30	1.25	1	3.5786	6.6184	-45.93%	-0.9914	-0.9866	0.4802%
30	1.25	2	5.2262	10.4466	-49.97%	-0.9888	-0.9789	1.0090%
30	1.25	3	6.2524	14.4697	-56.79%	-0.9852	-0.9708	1.4811%
30	1.25	4	7.0055	19.4270	-63.94%	-0.9834	-0.9608	2.3525%
30	1.25	5	7.4228	23.8267	-68.85%	-0.9809	-0.9519	3.0519%
30	1.25	6	1.8033	2.3539	-23.39%	-0.9957	-0.9987	-0.3003%
30	1.25	7	3.2337	6.0974	-46.97%	-0.9922	-0.9877	0.4573%
30	1.25	8	4.2476	8.1970	-48.18%	-0.9898	-0.9834	0.6419%
30	1.25	9	6.5068	16.4810	-60.52%	-0.9845	-0.9667	1.8450%
30	1.25	10	7.4079	24.5075	-69.77%	-0.9810	-0.9505	3.2050%
30	1.25	11	7.7605	27.7031	-71.99%	-0.9801	-0.9411	4.1351%
30	1.25	12	2.0053	2.8635	-29.97%	-0.9952	-0.9984	-0.3199%
30	1.25	13	2.6534	4.8700	-45.52%	-0.9936	-0.9902	0.3471%
30	1.25	14	2.9466	5.5272	-46.69%	-0.9929	-0.9888	0.4103%
30	1.25	15	7.3488	24.5718	-70.09%	-0.9811	-0.9478	3.5157%
30	1.25	16	8.0912	30.7059	-73.65%	-0.9792	-0.9348	4.7549%

30	1.25	17	8.5405	34.3747	-75.15%	-0.9781	-0.9270	5.5113%
30	2	0	1.0003	1.0003	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1849%
30	2	1	1.0271	1.0278	-0.06%	-0.9975	-0.9994	-0.1905%
30	2	2	1.0784	1.0817	-0.31%	-0.9971	-0.9978	-0.0669%
30	2	3	1.1391	1.1489	-0.85%	-0.9970	-0.9977	-0.0694%
30	2	4	1.2299	1.2545	-1.96%	-0.9967	-0.9975	-0.0722%
30	2	5	1.3238	1.3693	-3.32%	-0.9965	-0.9972	-0.0738%
30	2	6	1.0076	1.0076	-0.01%	-0.9976	-0.9994	-0.1869%
30	2	7	1.0405	1.0420	-0.14%	-0.9975	-0.9994	-0.1929%
30	2	8	1.0679	1.0704	-0.24%	-0.9972	-0.9978	-0.0664%
30	2	9	1.1784	1.1940	-1.30%	-0.9969	-0.9976	-0.0708%
30	2	10	1.3347	1.3829	-3.49%	-0.9965	-0.9972	-0.0740%
30	2	11	1.4765	1.5658	-5.71%	-0.9961	-0.9968	-0.0746%
30	2	12	1.0207	1.0211	-0.04%	-0.9975	-0.9994	-0.1893%
30	2	13	1.0365	1.0377	-0.11%	-0.9975	-0.9994	-0.1922%
30	2	14	1.0441	1.0458	-0.16%	-0.9975	-0.9994	-0.1936%
30	2	15	1.3599	1.4146	-3.87%	-0.9964	-0.9971	-0.0742%
30	2	16	1.6202	1.8121	-10.59%	-0.9958	-0.9961	-0.0329%
30	2	17	1.7381	1.9586	-11.26%	-0.9955	-0.9958	-0.0322%
30	4	0	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9982	-0.9994	-0.1219%
30	4	1	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1855%
30	4	2	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1855%
30	4	3	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9975	-0.9980	-0.0511%
30	4	4	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0618%
30	4	5	1.0001	1.0001	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0618%
30	4	6	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1848%
30	4	7	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1855%
30	4	8	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1848%
30	4	9	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0618%
30	4	10	1.0002	1.0002	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0627%
30	4	11	1.0005	1.0005	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0619%
30	4	12	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1848%
30	4	13	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1848%
30	4	14	1.0000	1.0000	0.00%	-0.9976	-0.9994	-0.1855%
30	4	15	1.0003	1.0003	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0619%
30	4	16	1.0014	1.0014	0.00%	-0.9974	-0.9980	-0.0628%
30	4	17	1.0034	1.0034	0.00%	-0.9973	-0.9980	-0.0629%