

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Trabajo Fin de Máster

**OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA EN
EL ENTORNO cgFEM PARA LA
FABRICACIÓN ADITIVA SIN SOPORTES:
EVALUACIÓN DE TÉCNICAS DE MEDIDA
DEL ÁNGULO DE VOLADIZO**

Máster en Ingeniería Mecánica

Presentado por:

D. Marc Bosch Galera

Dirigido por:

Dr. D. Juan José Ródenas García

Dr. D. Enrique Nadal Soriano

València, septiembre de 2021



Optimización topológica en el entorno cgFEM para la fabricación aditiva sin soportes: evaluación de técnicas de medida de ángulo de voladizo © 2021 de [Marc Bosch Galera](#) está licenciado con [CC BY-NC 4.0](#). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Resumen

En el presente Trabajo de Final de Máster se pretende desarrollar una metodología que permita restringir el proceso de Optimización Topológica para que los diseños resultantes sean autosoportantes, esto es, imprimibles a través de técnicas de Fabricación Aditiva sin la necesidad de soportes adicionales. Esta cuestión resulta relevante desde la perspectiva de su fabricación, puesto que permite ahorrar, tanto tiempo de procesamiento y postprocesamiento, como costes de producción.

Para lograrlo, se plantea implementar una función de restricción explícita en el código: un esquema de penalización del ángulo de las barras de una pieza con respecto a la base del equipo de impresión (Ángulo de Voladizo). Así pues, será necesaria también la recopilación bibliográfica de métodos de medida del ángulo con técnicas de procesamiento de imagen y su comparación.

La formulación se ha implementado en el código de Elementos Finitos cgFEM, desarrollado por el Centro de Investigación de Ingeniería Mecánica (UPV), que basa su funcionamiento en el uso de mallas cartesianas cuyos elementos son semejantes (proporcionales).

Los resultados no son satisfactorios, pero sí esperanzadores. Los dos problemas principales detectados que impiden la convergencia del problema se cree que son: los elementos con densidades intermedias que difuminan los contornos y modifican su ángulo a conveniencia del algoritmo; y la oposición entre la restricción de volumen y la del Ángulo de Voladizo, que no se combinan, sino que dominan en diferentes regiones de la imagen, colocando material sin un criterio único.

Palabras clave: Optimización Topológica, Fabricación Aditiva, restricciones de fabricabilidad, Estructura autosoportante, Ángulo de Voladizo, cgFEM.

Resum

En el present Treball de Final de Màster es pretén desenvolupar una metodologia que permeta restringir el procediment d'Optimització Topològica per a que el dissenys resultants siguin autosuportants, açò és, imprimibles a través de tècniques de Fabricació Additiva sense la necessitat de suports addicionals. Aquesta qüestió resulta rellevant des de la perspectiva de la seua fabricació, ja que permet estalviar tant temps de processament i postprocessament, com costos de producció.

Per a aconseguir-ho, es planteja implementar una funció de restricció explícita en el codi: un esquema de penalització de l'angle de les barres d'una peça amb respecte a la base de l'equip d'impressió (Angle de Volada). Així doncs, serà necessària també la recopilació de mètodes de mesura de l'angle amb tècniques de processament d'imatge y la seua comparació.

La formulació s'ha implementat en el codi d'Elements Finites cgFEM, desenvolupat pel *Centro de Investigación de Ingeniería Mecánica* (UPV), que basa el seu funcionament en l'ús de malles cartesianes, els elements de les quals on semblants (proporcionals).

Els resultats no son satisfactoris, però sí esperançadors. Els dos problemes principals detectats que impedeixen la convergència del problema es que creu que són: els elements amb densitats intermèdies que difuminen els contorns i modifiquen el seu angles a conveniència de l'algoritme; i l'oposició entre la restricció de volum i la de l'Angle de Volada, que no es combinen, sinó que dominen en diferents regions de la imatge, col·locant material sense un criteri únic.

Paraules clau: Optimització Topològica, Fabricació Additiva, restriccions de fabricabilitat, estructura autosuportant, Angle de Volada, cgFEM.

Abstract

This Master's Thesis aims to develop a methodology that enables Topology Optimization constraint so that designs produced are self-supporting, that is, printable through Additive Manufacturing techniques without the need for additional supports. This issue is relevant from a manufacturing outlook since it eases the lowering of both processing and postprocessing times and production costs.

To accomplish that, it is proposed to implement an explicit constraint function in the code: a penalization scheme over the angle of the bars in a certain part with respect to the printing machine (Overhang Angle). In that sense, a bibliographic compilation of methods for measuring the angle based on digital image processing techniques will also be required, as well as a comparison between them.

The formulation has been implemented in the Finite Element code cgFEM, developed by *Centro de Investigación de Ingeniería Mecánica (UPV)*, whose functioning relies on cartesian meshes with similar (proportional) elements.

The results are no satisfactory, yet they are promising. Two main problems have been identified that prevent the optimization to converge: the elements with intermediate densities that blur the contours and modify their angle to the algorithm convenience; and the confrontation between the volume and the overhang angle constraints that, rather than merging, dominate over different regions of the image, thus resulting in a material distribution without a unified criterion.

Key words: Topology Optimization, Additive Manufacturing, manufacturing constraints, self-support structure, Overhang Angle, cgFEM.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecerles a mis tutores reincidentes, Juanjo y Enrique, haber confiado en mí una vez más y haberme incorporado formalmente en su grupo de investigación, brindándome de esa manera nuevos horizontes en el ámbito académico y profesional.

También tienen un lugar aquí todos mis compañeros del Instituto Universitario de Ingeniería Mecánica y Biomecánica (I2MB): Antolín, David, Jorge, Héctor... Y también Xavi y Borja, cuando se sienten inspirados. Vuestra compañía hace más amena la jornada, y los consejos que me dais, a través de vuestra experiencia, siempre son de gran valor.

Merecen mención especial Olivier Allix, profesor de la *Université Paris-Saclay* actualmente de estancia en la UPV, y M^a Amparo Guerrero, técnico superior de apoyo a la investigación del Instituto de Biomecánica de Valencia (IBV). El primero, por mostrar siempre interés en mi trabajo y realizar abundantes aportaciones interesantes, desde su particular perspectiva, sobreponiéndose a la (leve) barrera lingüística que nos separa, en una muestra de su buena voluntad. La segunda, por ayudarme incansablemente y de buena gana con las casuísticas administrativas y burocráticas a las que me enfrente, cargando con una parte de mis preocupaciones y aligerándome el camino.

Por último, pero no por ello menos importante, me gustaría darles las gracias a mis padres, Paco y Dori, pues ellos son los que siempre han velado por mi educación y, en general, por mis intereses.

A todos vosotros, muchas gracias.

“El código se está haciendo trampas jugando al solitario...”,

José Manuel Navarro

Índice

Resumen	I
Resum	II
Abstract	III
Agradecimientos	IV
1. Introducción	1
1.1 Optimización Topológica	1
1.1.1 OT multi-escala o multi-nivel	2
1.2 Fabricación aditiva	3
1.2.1 Impresión 4D	5
1.3 Motivación	6
1.4 Objetivos	10
1.5 Herramientas	11
1.5.1 Cartesian Grid Finite Element Method (cgFEM)	11
1.5.2 Material Sólido Isotrópico con Penalización (SIMP)	13
1.5.3 Método de las Asíntotas Móviles (MMA)	15
2. Antecedentes	17
3. Desarrollo	23
3.1 Cálculo de la dirección mediante derivación	23
3.1.1 Diferencias finitas: convolución con kernel	24
3.1.2 Derivada analítica: campo de densidades nodales	25
3.2 Cálculo de la dirección sin derivación	26
3.2.1 Algoritmo SUSAN	26
3.2.2 Transformada de Radon	29
3.3 Esquema de penalización propuesto	31
4. Resultados	33
4.1 Prewitt	34
4.2 Sobel-Feldman	34
4.3 Scharr	35
4.4 Farid y Simoncelli	35



4.5	Densidades nodales	36
4.6	SUSAN	36
4.7	Radon	37
4.8	Ejemplo MBB	37
5.	Conclusiones	41
6.	Bibliografía	42
Anexo A.	Principales enfoques de la optimización topológica	45
Anexo B.	Familias de tecnologías de fabricación aditiva	46
Anexo C.	Restricciones de la OT para FA	48
Anexo D.	Código <i>Check_BarDirection</i>	49

1. Introducción

1.1 Optimización Topológica

La optimización topológica (en inglés *Topology Optimization* y en adelante OT) es un método de optimización numérico mediante el cual se encuentra la distribución óptima de material (y en ese sentido, su conectividad, es decir, su topología) en un dominio determinado, para unas condiciones de contorno concretas y dadas ciertas restricciones tecnológicas, de diseño (como la fracción de volumen, la tensión admisible, regiones con o sin material obligatoriamente u otras restricciones de fabricabilidad), a través de la minimización o maximización de alguna función objetivo.

Así pues, la OT permite a los ingenieros obtener componentes mecánicos o estructurales de bajo peso y alto rendimiento, como las que se observan en la figura 1, para unas condiciones de trabajo particulares:

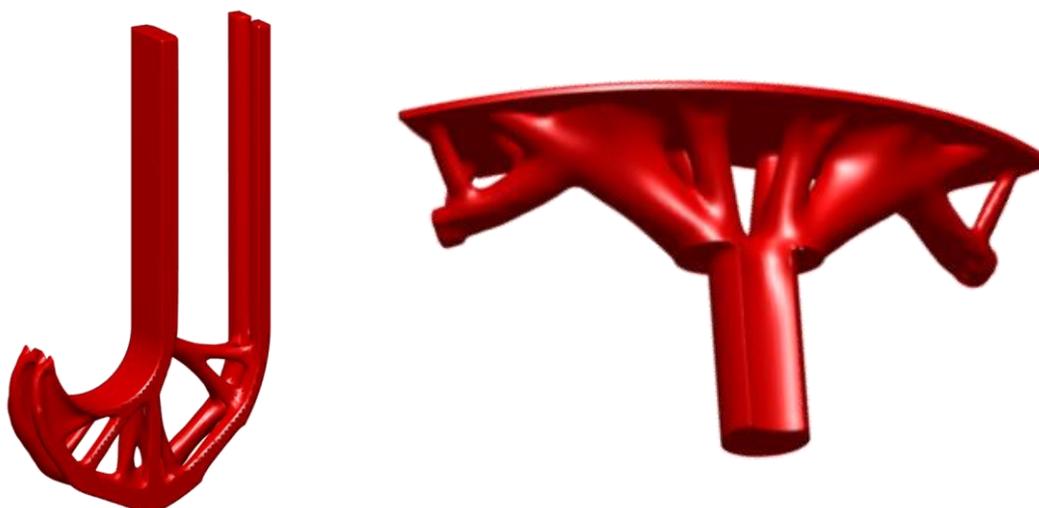


Figura 1. Distribución óptima de material en un gancho (izq.) y una sección curva de carretera (der.).
Fuente: Instituto de Ingeniería Mecánica y Biomecánica (I2MB), UPV.

A diferencia de las optimizaciones de tamaño y forma tradicionales, en la optimización topológica no se define la conectividad de la estructura o el componente mecánico *a priori*, por lo que el diseño final se obtiene con mayor libertad. De esta forma es posible evitar que el diseño quede condicionado por la experiencia del diseñador, permitiendo en consecuencia llegar a un resultado más optimizado.

Desde su planteamiento inicial por Bendsøe y Kikuchi [1] mediante el denominado “método de la homogeneización”, la técnica ha madurado hasta el punto de encontrarse integrada en buena parte de productos de software de cálculo estructural comerciales.

Hoy en día su uso se ha extendido a múltiples sectores industriales ya que puede aplicarse a todo tipo de problemas estructurales (desde minimización de la energía de deformación y problemas de vibraciones libres y forzadas o de pandeo hasta problemas biomecánicos) e incluso a otros problemas físicos como la transmisión de calor, la fluidodinámica, la acústica [2] o la biomedicina [3].

Los distintos enfoques con los que se ha abordado la OT en la literatura, recogidos en estudios monográficos como Sigmund y Maute [4] o Deaton y Grandhi [5], pueden encontrarse en el anexo A, junto con una breve explicación.

En el presente trabajo se utiliza método basado en las densidades. El procedimiento general para cada iteración se muestra paso a paso a través del siguiente diagrama de flujo (figura 2):

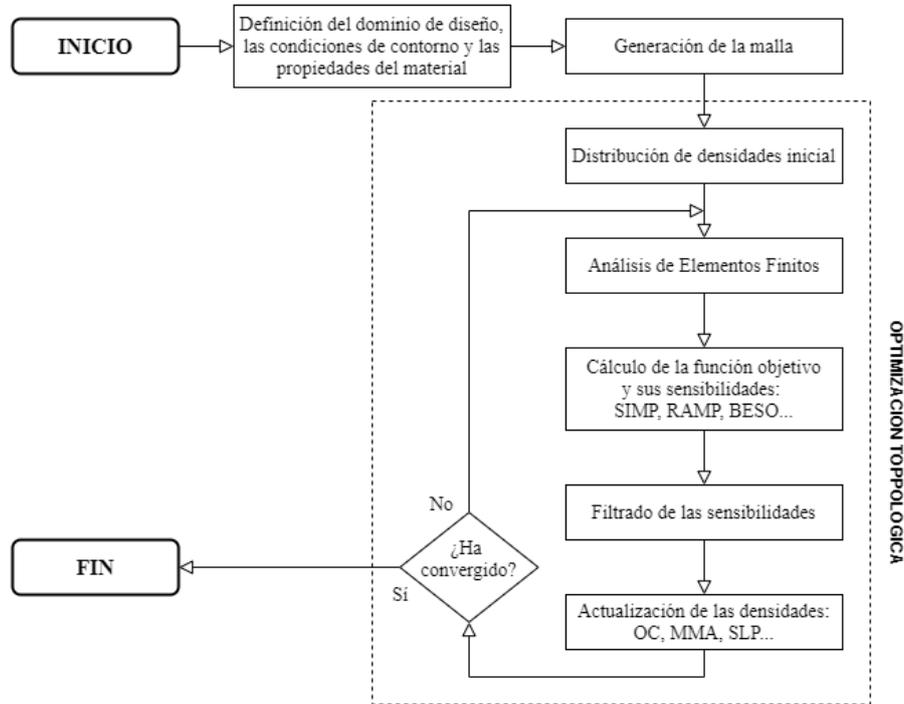


Figura 2. Visión esquemática de la OT paso a paso. Fuente: Elaboración propia.

1.1.1 OT multi-escala o multi-nivel

La OT multi-nivel es una metodología que permite optimizar los componentes a escala macro y a escala micro, obteniendo resultados como los de la figura 3, de forma que ya no sea necesario penalizar las zonas de densidad intermedia para que puedan fabricarse.

Para definir el problema local, la solución discontinua de tensiones a escala macro se postprocesa para así obtener una distribución de tracciones sobre el contorno de cada una de las celdas que esté en equilibrio con la de las celdas adyacentes.

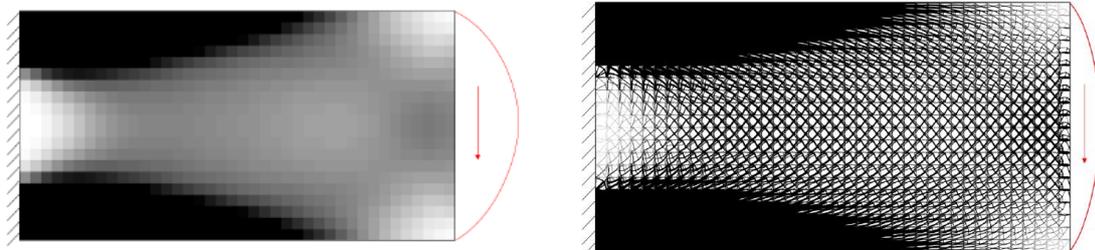


Figura 3. Distribución de material con elementos sólidos (izq.) y reticulares (der.). Fuente: Barral [6].

Aunque quede fuera del alcance del presente trabajo, cabe considerar la implementación de esta tecnología en trabajos prospectivos por su facilidad de fabricación a modo de “LEGOs”, siempre que se asegure la continuidad de la topología.

1.2 Fabricación aditiva

El concepto de fabricación aditiva (en inglés *Additive Manufacturing*, y en adelante FA) engloba cualquier tecnología que permita fabricar objetos tridimensionales de manera secuencial, mediante la deposición, unión o solidificación de capas sucesivas de material. Este proceso es usualmente controlado por un ordenador que lo planifica en base a un modelo digital (CAD) del objeto en cuestión.

La FA fue desarrollada en los años 80, en contraposición a la fabricación tradicional (sustractiva y formativa), con la finalidad de reducir los plazos y los costes para el desarrollo de prototipos, en lo que se conocía como la técnica de prototipado rápido.

El término *fabricación aditiva* es habitualmente intercambiado indistintamente, al menos en entornos no profesionales, con el de *impresión 3D*, aunque este se asocia más bien a equipos de uso doméstico, con un coste reducido y posibilidades limitadas.

Sin entrar en detalle, según la norma ISO/ASTM 52900:2015, las tecnologías de fabricación aditiva se agrupan en 7 familias:

- Fotopolimerización (*Vat photopolymerization*), en la que destaca la técnica de estereolitografía (STL), por ser la primera que se desarrolló [7] y la que da nombre al formato utilizado en los archivos informáticos que contienen la definición geométrica de los modelos CAD.
- Extrusión de material (*Material extrusion*), en la que destaca la técnica de modelado por deposición fundida (FDM), por ser la más empleada hoy en día a nivel mundial según Alsop [8].
- Inyección de material (*Material jetting*)
- Inyección de aglutinantes (*Binder jetting*)
- Fusión de lecho de polvo (*Powder bed fusion*)
- Deposición directa de energía (*Direct energy deposition*)
- Laminación de hojas (*Sheet lamination*)

Una comparativa superficial entre las distintas familias puede encontrarse en el anexo B, para aquel lector que pueda interesarle.

Por normal general, la FA es más costosa y lenta que los procedimientos tradicionales, mientras que la principal ventaja que ofrece en el sector industrial reside en la capacidad de fabricar componentes mecánicos o estructurales con geometrías complejas (incluso huecos o con algunas cavidades), lo que permite acceder a diseños más optimizados como los que resultan al aplicar procesos de OT.

Al utilizar solo la cantidad de material estrictamente necesaria, los costes de fabricación disminuyen de forma directa, debido a la menor cantidad de materia prima desaprovechada, pero también de forma indirecta, pues componentes más ligeros requerirán un menor consumo de energía para ser transportados.

En este sentido, otra variable a tener en cuenta a la hora de comparar los procesos de fabricación, a parte de la complejidad, es el tamaño del lote fabricado. A diferencia de los procesos tradicionales, en la FA el coste total apenas disminuye con el aumento de componentes producidos (ver figura 4), explicando así su coste normalmente superior.

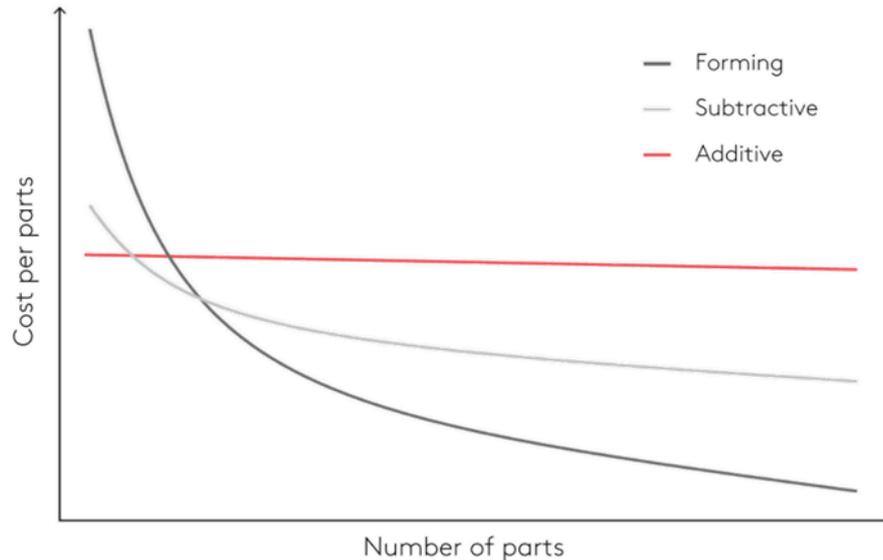


Figura 4. Diagrama cualitativo coste unitario – tamaño lote. Fuente: <https://bit.ly/3ktLj97>.

Así pues, desde el punto de vista de la rentabilidad, el “nicho de mercado” actual de la FA es muy restringido, como refleja la figura 5, a pesar de todas las posibilidades que ofrece.

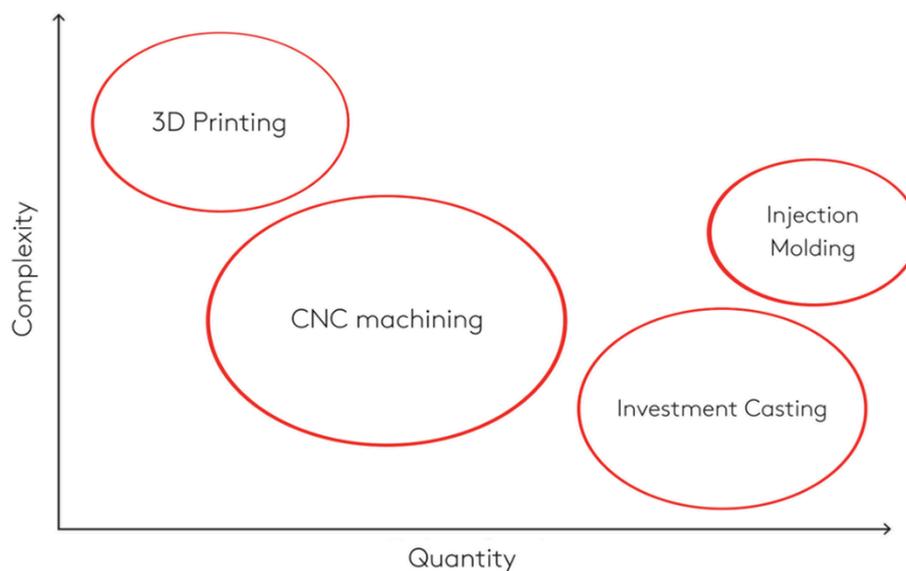


Figura 5. Diagrama cualitativo complejidad – cantidad. Fuente: <https://bit.ly/3ktLj97>.

Ejemplos relevantes de componentes fabricados mediante FA pueden ser los siguientes:

En la figura 6 se observa el primer puente de metal fabricado con impresión 3D, lo cual ha permitido conseguir una disminución de su peso y una reducción del impacto ambiental derivado de su fabricación.



Figura 6. MX3D Bridge, Amsterdam. Fuente: <https://bit.ly/39neVOZ>.

Por otro lado, en la figura 7 se muestra un componente automovilístico indeterminado fabricado de manera convencional y mediante técnicas de adición, junto con comentarios de algunos aspectos relevantes.

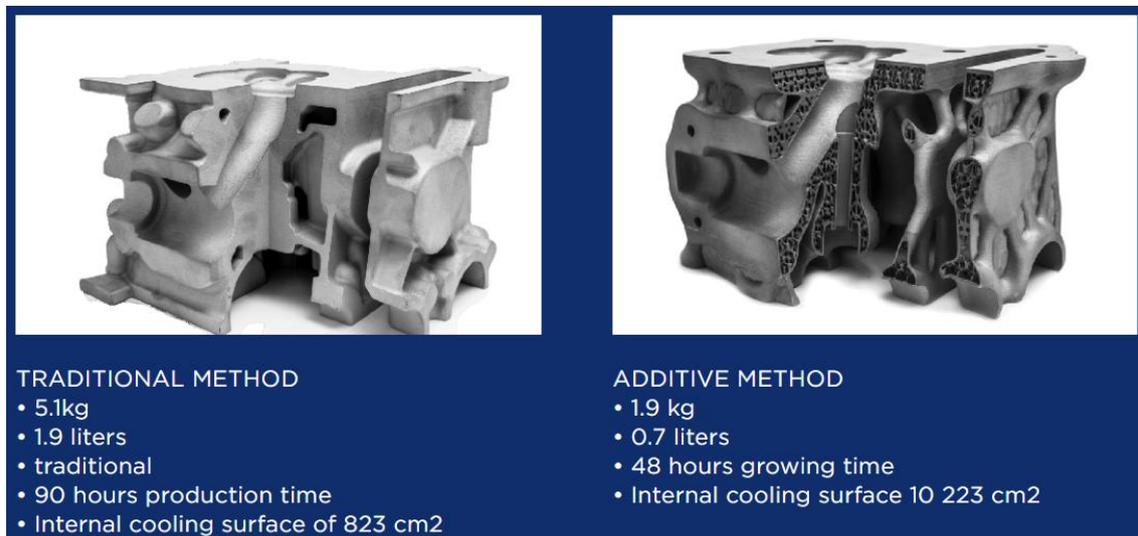


Figura 7. Comparación entre distintos procesos de fabricación. Fuente: <https://bit.ly/3hNoF9D>.

Según se indica, el componente fabricado con AM no solo es más ligero y ha requerido menos agua, sino que también se ha fabricado con mayor rapidez y presenta una capacidad de refrigeración notablemente superior (12 veces más superficie).

1.2.1 Impresión 4D

Como curiosidad, el concepto de impresión 4D hace referencia a las técnicas de impresión 3D que producen componentes cuya forma varía al aplicarles algún estímulo ambiental como humedad, calor (como el de la figura 8) o voltaje; son lo que se conoce como *materia programable*.

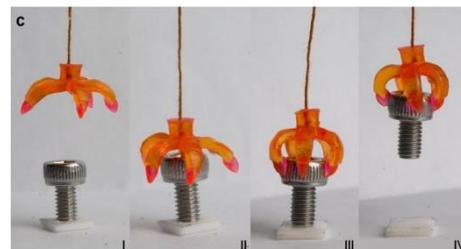


Figura 8. Gancho con memoria de forma. Fuente: Ge et al. [9].

1.3 Motivación

Con todo lo comentado anteriormente, queda claro que el futuro de la OT orientada a la fabricación consiste en su integración con la FA, pues de esta manera pueden obtenerse componentes finales más cercanos al diseño óptimo.

No obstante, el proceso de FA conlleva consigo una serie de restricciones tecnológicas o técnicas, entre las cuales destacan las siguientes [10] :

Uno de sus problemas es que el nivel de detalle de los componentes fabricados (figura 9) vendrá determinado por la precisión y la exactitud del equipo. Esto es fácil de entender a través de una analogía entre la impresión 3D y la impresión 2D, donde la resolución máxima imprimible depende de la sensibilidad en el movimiento de los inyectores de tinta, o visto de otra manera, el máximo número de subregiones distintas que puedan identificarse en la región de impresión (en una suerte de discretización). Además, según cual sea la técnica usada en la FA, pueden surgir problemas dependiendo de las propiedades fisicoquímicas del material utilizado, por ejemplo la viscosidad de los polímeros en el modelado por deposición fundida.

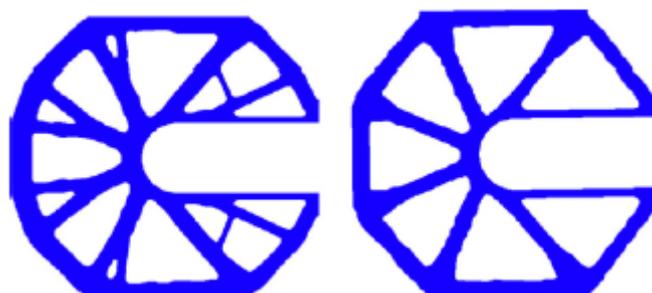


Figura 9. Solución de la OT de un circlip. Comparación entre los casos con la restricción de escala mínima de longitud desactivada (izq.) y activada (der.). Fuente: Zhu et al. [10].

Esto es lo que se conoce como **restricción de escala mínima de longitud**, y suele implementarse en el proceso de OT a través de un filtrado de las densidades (figura 10) con las densidades intermedias proyectadas según alguna función de regularización (por ejemplo, la Heaviside), que recuerda al filtrado de las sensibilidades necesario para garantizar la existencia de soluciones independientes de la malla.

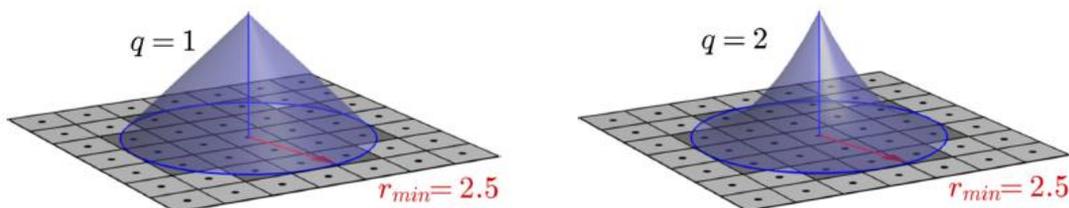


Figura 10. Filtro lineal (izq.) y cuadrático (der.). Fuente: Zegard y Paulino [11].

La elección del tamaño mínimo de las barras era algo que ya se trataba en la OT. Habitualmente se controla con el tamaño de malla, de forma que mallas más bastas generarán formas más sencillas, con menos barras o barras de mayor dimensión, a cambio de asumir la existencia de zonas de transición (grises) sin una buena definición.

En consecuencia, la h-adaptatividad de la malla (presencia de elementos de distinto tamaño, como los que se muestran en la figura 11) parece que ayudará a reducir la relevancia de esta restricción.

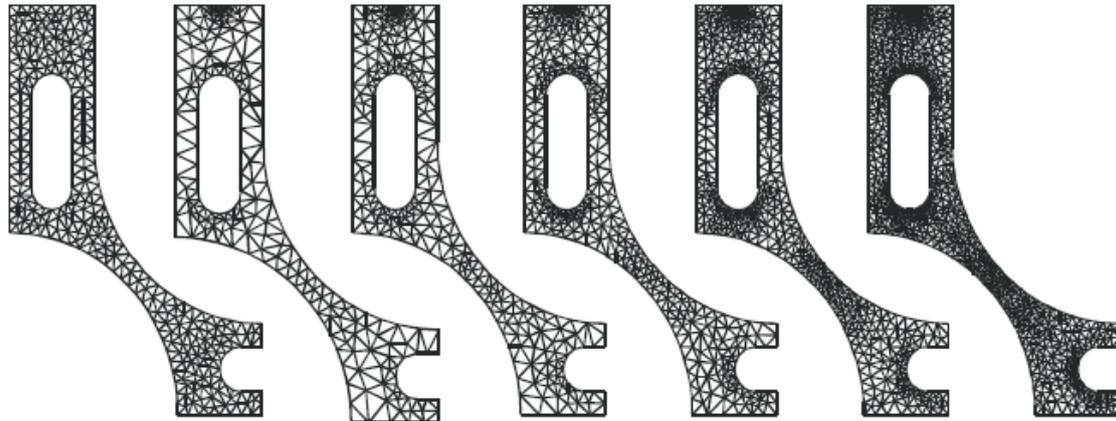


Figura 11. Secuencia de mallas h-adaptativas. Fuente: Apuntes de Técnicas Computacionales.

Sin embargo, la principal limitación de la FA reside sin duda en los soportes requeridos en ciertas situaciones para evitar que la estructura colapse mientras se imprime, según la inclinación de sus barras.

Llegados a este punto debe introducirse el concepto de ángulo de voladizo (en inglés *Overhang Angle* y en adelante AV), entendido como el ángulo descrito entre una barra de un componente y el plano horizontal, que representa la “cama” de una impresora 3D, convencionalmente medido en sentido levógiro (contrario a las agujas del reloj).

El colectivo de usuarios de impresión 3D acepta el intervalo de 45° a 135° [12] como las inclinaciones permitidas, que no generan problemas estructurales (ver figura 12), aunque realmente una estimación más precisa requeriría contemplar en ángulo de voladizo en conjunto con la distancia de voladizo [13], pues para distancias cortas el efecto del peso es menor. En cualquier caso, se asume en el código que esta magnitud corresponde al diseñador decidirla e introducirla como argumento de entrada.

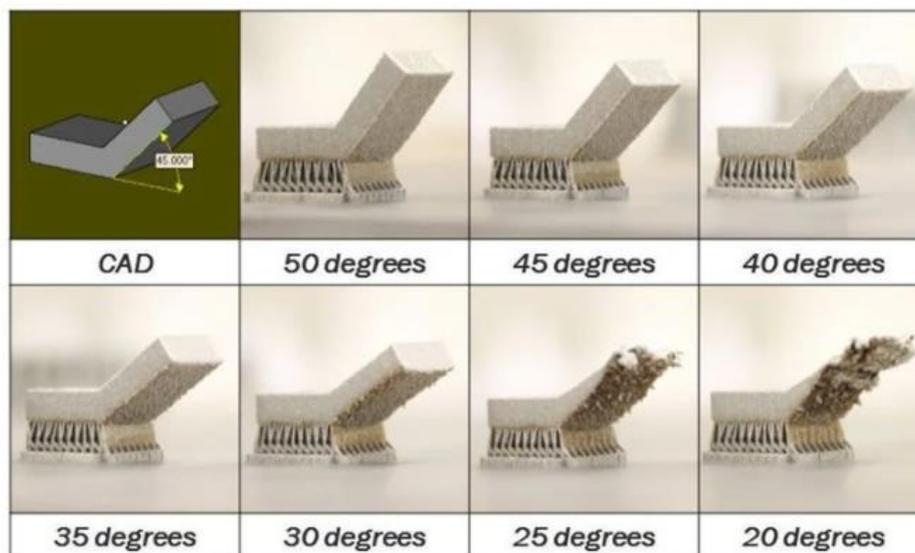


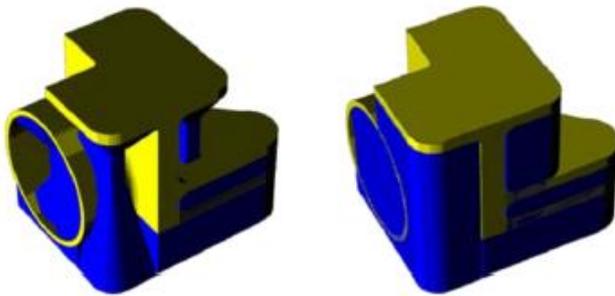
Figura 12. Experimento de impresión con distintos AV. Fuente: <https://bit.ly/3EAn2WD>.

Así pues, cuando se imprime una barra con un AV no contenido en el intervalo, el propio peso de la barra provoca que esta colapse.

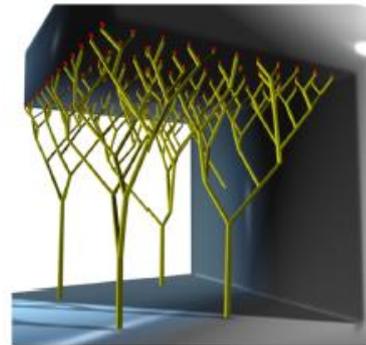
Habitualmente se salva este inconveniente mediante la utilización de estructuras auxiliares de soporte, pero ello conlleva un aumento del tiempo de conformado y también de su coste, por varias razones [14] :

- La mayor parte del coste de la FA (en metal), después de la amortización del equipo industrial, es el coste del material ($\approx 18\%$).
- El postproceso requerido para eliminar los soportes es en su mayoría a mano (lento y caro, $\approx 8\%$ del total), al menos en metales, y condiciona el diseño en tanto que debe garantizarse la accesibilidad de las herramientas de mecanizado (si bien es cierto que también existen soportes solubles, normalmente utilizados cuando se trabaja con polímeros, que resultan más cómodos de retirar).

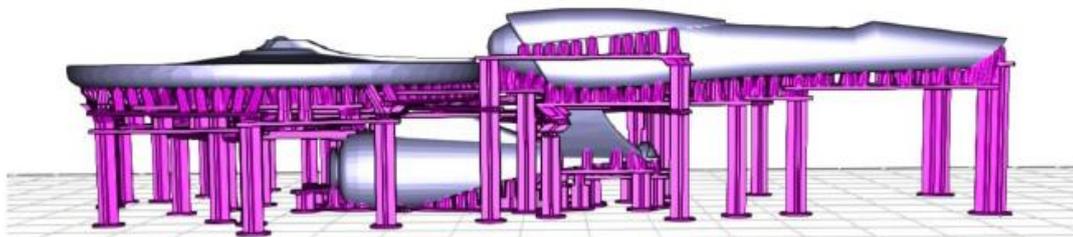
Una solución provisional, que reduce la importancia del problema aun sin llegar a resolverlo, es el refinamiento de los soportes, en el sentido de disminuir su tamaño. Varios patrones (algunos ilustrados en la figura 13) han sido estudiados con este fin, incluyendo el muro inclinado [15] , el soporte ramificado [16] , el apuntalamiento [17] o las estructuras celulares repetitivas [18] .



(a) Comparación soporte inclinado (izq.) y recto (der.).
Fuente: Huang et al. [15] .



(b) Soporte ramificado. Fuente:
Vanek et al. [16] .



(c) Soporte apuntalamo. Fuente: Dumas et al. [17] .

Figura 13. Estrategias para la reducción de soporte.

Por otro lado, resulta conveniente evitar las cavidades cerradas cuando el tamaño de estas requiere el uso de soportes internos que luego no será posible eliminar porque no se puede acceder a ellos (figura 14). Esto es lo que se conoce como **restricción de conectividad**.

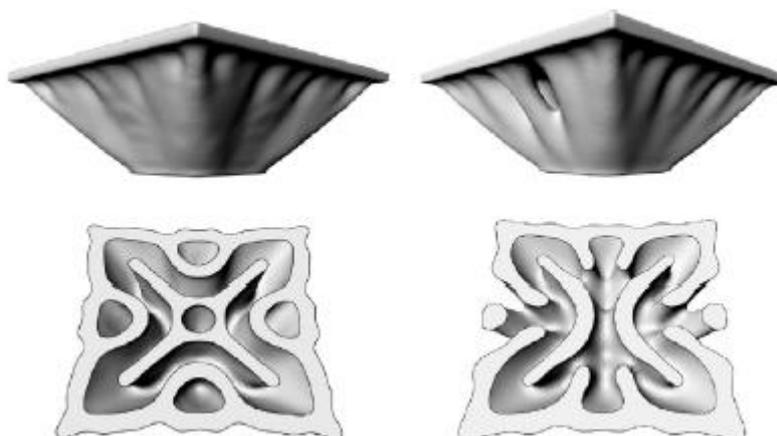


Figura 14. Solución de la OT de una plataforma. Comparación entre los casos con la restricción de conectividad desactivada (izq.) y activada (der.). Fuente: Zhu et al. [10].

Otras recomendaciones fundamentalmente heurísticas para evitar los soportes serían:

- Proporción máxima de 40:1 entre la altura y la anchura de muros verticales.
- Distancia máxima de voladizo horizontal de 0.5 mm.
- Distancia máxima de elementos horizontales biapoyados (puentes) de 2 mm.

Como consecuencia a todo lo expuesto anteriormente, no es de extrañar que los esfuerzos de hoy en día estén centrados en integrar todas estas restricciones de fabricabilidad directamente en la propia formulación de la OT, de manera conjunta con la restricción de volumen convencional.

La solución definitiva, por tanto, se encuentra en las estructuras autosoportantes, optimizadas no solo para sus condiciones de trabajo, sino también para su conformado mediante FA. Distintas técnicas exploradas en la literatura para la implementación de las restricciones presentadas en este apartado pueden encontrarse en el anexo C.

Estas restricciones pueden tener distintos niveles de integración en el proceso de OT:

En el peor escenario, las restricciones no están integradas y simplemente se recurre al andamiaje del diseño obtenido de la OT, apartando así la solución para poderse fabricar.

Lo más habitual hoy en día, volviendo a la realidad externa al mundo académico, es la integración manual *a posteriori* de estos criterios de fabricabilidad. El diseñador adapta la geometría, en base a su experiencia, y en detrimento del rendimiento del componente, para que el diseño resulte más amigable para la FA.

Finalmente, aquello a lo que realmente aspiran las investigaciones en curso desde inicios de la última década es a la total y completa integración de la FA en el marco de trabajo de la OT, no solo en lo referente al AV (aunque pueda ser la restricción más relevante), sino considerando todos los procesos de conformado, como puede empezar a vislumbrarse en [19].

1.4 Objetivos

El presente Trabajo de Final de Máster pretende, principalmente, explorar y comparar las distintas alternativas presentes en la literatura en lo referente a la identificación de barras y la evaluación de su dirección, en base a los resultados obtenidos tras aplicar el procedimiento de OT.

Este estudio supone el primer paso en el desarrollo de una función de restricción de fabricabilidad basada en la penalización del ángulo de voladizo de las barras de una determinada estructura o componente, actualizando así el software de elementos finitos FEAVox según las necesidades del sector de diseño industrial.

Como objetivos secundarios se señalan los siguientes:

- Realizar una revisión bibliográfica sobre técnicas de optimización topológica enfocadas a fabricación aditiva, esto es, considerando restricciones tecnológicas.
- Profundizar el conocimiento sobre la metodología de elementos finitos *Cartesian Grid Finite Element Method* y mejorar la desenvoltura con su código de aplicación a entornos 2D.
- Adquirir experiencia práctica en el campo de la mecánica computacional aplicada al análisis mediante el Método de los Elementos Finitos y, en especial, a los procesos de optimización topológica.
- Implementar en el código cgFEM el algoritmo *Method of Moving Assymptotes* como alternativa al *Optimality Criteria* para los casos en los que se requiera contemplar múltiples restricciones simultáneamente en el algoritmo de optimización (SIMP).
- Implementar en el código cgFEM las funciones correspondientes a los diversos métodos que se vaya a analizar.

Con estas implementaciones se expanden las posibilidades ofrecidas por el software cgFEM, que podrán ser explotadas en trabajos prospectivos.

1.5 Herramientas

1.5.1 Cartesian Grid Finite Element Method (cgFEM)

La técnica del *Cartesian Grid Finite Element Method* (cgFEM) es una metodología de Elementos Finitos (EF) basada en la combinación de mallados cartesianos (constituidos por elementos rectangulares semejantes), independientes de la geometría y no necesariamente coincidentes con esta, junto con una estructura jerárquica de datos de alta eficiencia.

Esta herramienta [20], desarrollada por el Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica (CIIM) de la *Universitat Politècnica de València* (UPV) e implementada en Matlab[®], surge ante la necesidad patente en el sector industrial de programas adecuados para el nuevo paradigma de diseño, esto es, el diseño óptimo, semiautomatizado y mínimamente sensible a la experiencia del diseñador/a. Para ello, se plantea mejorar tres aspectos de los códigos MEF comerciales disponibles en ese momento:

- La eficiencia del proceso de optimización, es decir, su coste computacional y, por extensión, temporal.
- La robustez del código de EF encargado de analizar numéricamente cada combinación de parámetros para evaluar su respuesta.
- La exactitud del análisis de EF, en el sentido de estimar correctamente y controlar el error numérico para garantizar y acelerar la convergencia del proceso optimización.

A diferencia del Método de Elementos Finitos (FEM) tradicional, donde la dificultad a la hora de generar la malla está subordinada a la complejidad y el detalle de la geometría (dominio del problema), en el cgFEM se distingue el dominio del problema (Ω) del dominio de mallado (Ω_E), siendo este último un rectángulo (en el caso 2D) que contiene al dominio del problema ($\Omega \subset \Omega_E$).

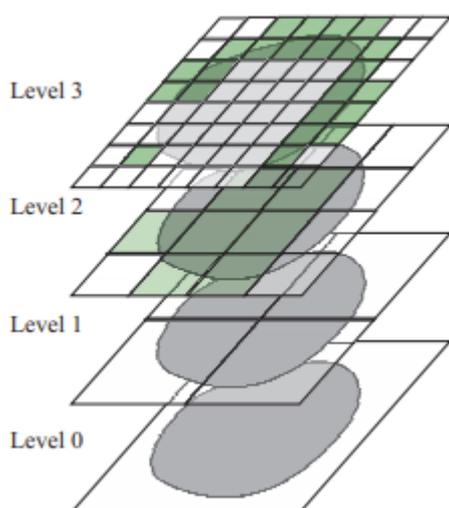


Figura 15. Apilamiento de mallas cartesianas de sucesivos niveles. Fuente: Nadal [20].

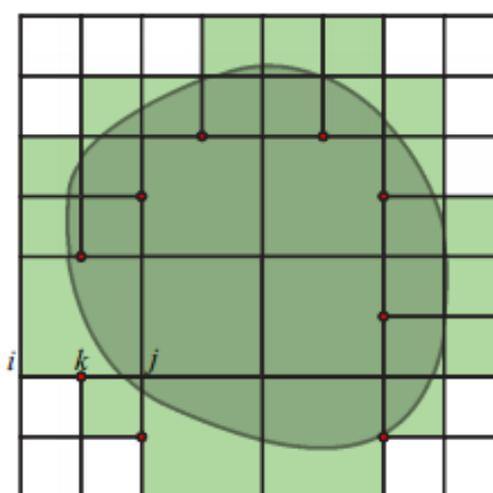


Figura 16. Malla de análisis con los elementos activos en verde. Fuente: Nadal [20].

Como puede observarse en la figura 15, la discretización de Ω_E es trivial, a partir de la división del elemento de referencia (malla de nivel 0) en 2^n elementos iguales, donde n representa el nivel de malla (su nivel de refinamiento), siguiendo un esquema de refinamiento uniforme.

La malla de aproximación (figuras 16 y 18) se genera mediante la combinación de elementos de distintos niveles de malla, de tal manera que cubra todo el dominio del problema sin que existan solapamientos ni elementos contiguos pertenecientes a mallas con más de un nivel de diferencia. Esta malla no conforme requiere utilizar restricciones multipunto (MPCs) para asegurar la continuidad C^0 de los desplazamientos que requiere la solución del problema elástico.

De acuerdo con la relación de los elementos de la malla de aproximación con Ω , estos se pueden clasificar en tres categorías:

- **Elementos de contorno:** Aquellos elementos intersecados por el contorno del dominio del problema ($\partial\Omega$). Solo el área de estos elementos que se encuentre dentro del dominio del problema (en rojo en la figura 17) se considerará en el análisis.
- **Elementos internos:** Aquellos elementos situados completamente dentro de $\partial\Omega$.
- **Elementos externos:** Aquellos elementos situados completamente fuera de $\partial\Omega$.

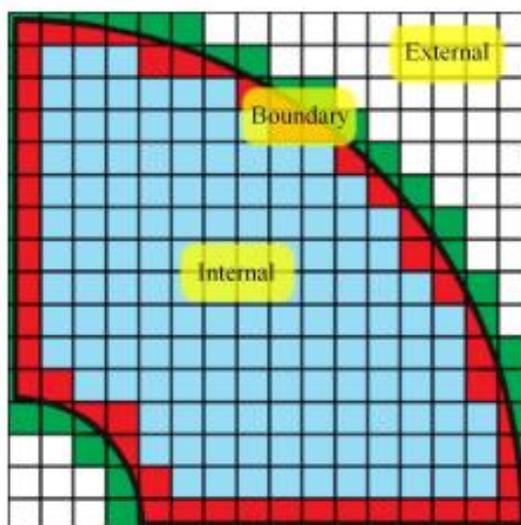


Figura 17. Tipologías de elementos según su ubicación. Fuente: Nadal [20].

El conjunto de elementos de contorno e internos es lo que se denomina elementos activos del problema (en verde en la figura 16), y son los que intervienen en el cálculo.

La matriz de rigidez de los elementos internos es proporcional a su tamaño, con lo que solo se requiere evaluar una de ellas (la del elemento de referencia) y las demás se obtendrán por escalado.

Para los elementos de contorno, es necesario definir adecuadamente el dominio de integración, lo cual se consigue definiendo subdominios de integración en esos elementos en función de su intersección con $\partial\Omega$, de manera que los únicos subdominios que se utilizarán en la integración serán los que estén situados en el interior del dominio físico.

Así pues, la malla de integración (figura 19) se genera sobrescribiendo en los elementos de contorno de la malla de aproximación los nuevos subdominios.

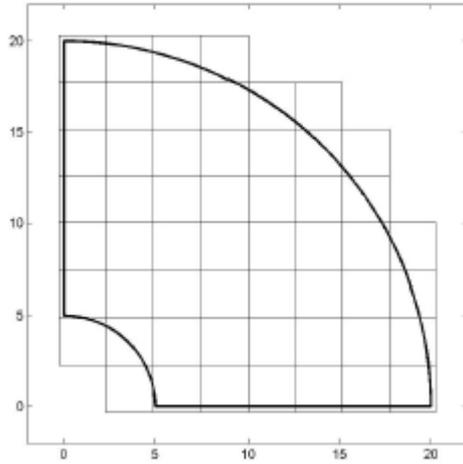


Figura 18. Malla de aproximación.

Fuente: Navarro-Jiménez [21].

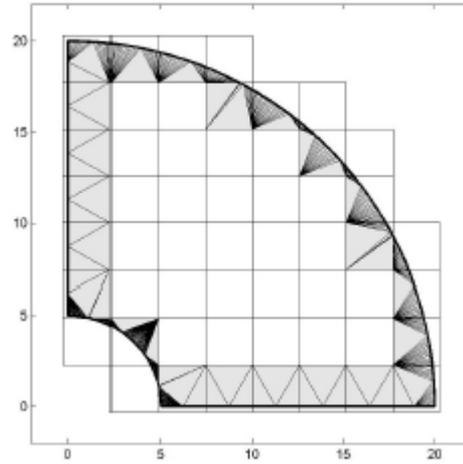


Figura 19. Malla de integración.

Fuente: Navarro [21].

En concreto se utiliza la técnica de la triangulación de Delaunay para generar los subdominios de integración de los elementos de contorno (ver figura 20), utilizando los nodos internos del elemento y algunos puntos de intersección con $\partial\Omega$.

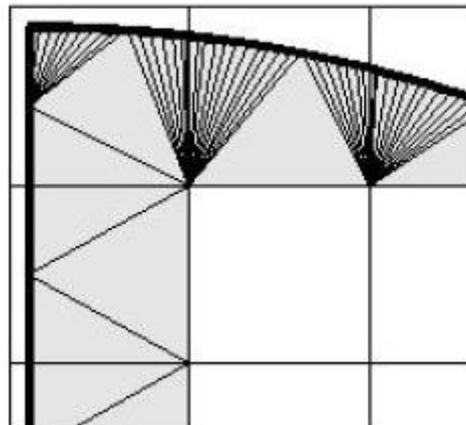


Figura 20. Detalle de la malla de integración. Fuente: Navarro [21].

1.5.2 Material Sólido Isotrópico con Penalización (SIMP)

El problema de optimización topológica básico puede atacarse desde dos frentes: como un problema de optimización de forma, siempre y cuando se considere la generación de nuevos agujeros, o enfocado en las densidades (nodales o de elemento), como un problema de distribución de material.

En el segundo caso, que es el planteamiento habitual, el dominio del problema se discretiza en una malla fija (Euleriana), donde cada elemento puede tener una “densidad” desde 0 hasta 1, que correspondería respectivamente con un agujero (aunque para evitar singularidades matemáticas de utiliza un valor pequeño distinto a cero) y con material (figura 21).

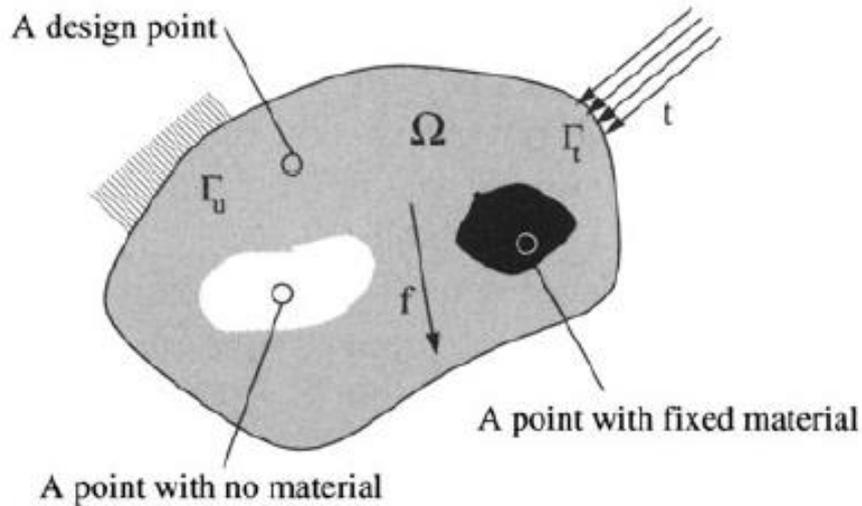


Figura 21. Distribución de material en el dominio del problema. Fuente: Bendsøe y Sigmund [22].

De esta forma, el problema de diseño se formula como un problema de tamaño, modificando la matriz de rigidez para que dependa de una función, que en este caso es la densidad del material (variable de diseño).

El algoritmo de optimización o esquema de interpolación (nivel superior del proceso de optimización) implementado en cgFEM es el Material Sólido Isotrópico con Penalización (en inglés *Solid Isotropic Material with Penalization*), donde las propiedades del material en cada elemento corresponden con las propiedades del material sólido ponderadas por la densidad del material en ese elemento elevada a un exponente p denominado penalización.

A continuación se muestra la formulación correspondiente a un problema de OT en el que pretende minimizarse la energía de deformación (en inglés *compliance*):

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } \quad c(\mathbf{x}) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N (x_e)^p \cdot \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{u}_e \\ \text{sujeto a: } \quad \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} &= f \\ \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{F} \\ 0 < \mathbf{x}_{\min} &\leq \mathbf{x} \leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Donde \mathbf{U} y \mathbf{F} son respectivamente los vectores de desplazamientos y fuerzas globales, \mathbf{K} es la matriz de rigidez global, \mathbf{u}_e y \mathbf{k}_e son respectivamente el vector de desplazamientos y la matriz de rigidez en elementos, y \mathbf{x} es el vector de variables de diseño, es decir, de las densidades relativas de cada elemento.

La elección del valor de la penalización no es trivial, pues valores muy elevados o bajos pueden provocar el aumento de zonas grises de transición o la convergencia precoz hacia mínimos locales. Existe el consenso [23] que $p = 3$ funciona correctamente en la mayoría de los casos.

Para asegurar la existencia de soluciones apropiadamente formuladas (*well-posed*) e independientes de la malla, es necesario combinar el SIMP con restricciones de perímetro o gradiente o técnicas de filtrado sobre las sensibilidades de la función objetivo o sobre las densidades, pudiendo incluir esquemas de proyección [4].

Existen otras alternativas para cuantificar las propiedades del material en función de la densidad, como la Aproximación Racional de Propiedades del Material (RAMP).

1.5.3 Método de las Asíntotas Móviles (MMA)

Aunque es habitual encontrar en la literatura el *Optimality Criteria* como método preferente para el análisis numérico o de sensibilidades (nivel inferior del proceso de optimización), por su simplicidad conceptual y facilidad de implementación, en este caso, en el que a la restricción del valor de fracción de volumen se pretenden añadir restricciones geométricas para que el ángulo de voladizo sea suficientemente grande (evitando así el uso de soporte de fabricación), se requiere un algoritmo matemático con el que se puedan considerar fácilmente múltiples funciones de restricción en el problema de optimización estructural:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a} && f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &&& \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

Una opción popular y que ofrece buenos resultados es el Método de las Asíntotas Móviles (en inglés *Method of Moving Asymptotes*), desarrollado por Svanberg [24], cuyo funcionamiento básico queda descrito a través de los siguientes pasos:

- i. En cada iteración k se parte de un valor inicial de la(s) variable(s) de diseño $\mathbf{x}^{(k)}$.
- ii. Se eligen funciones de aproximación para las funciones de restricción en base a la información proporcionada por su gradiente $\nabla f_i(\mathbf{x}^{(k)})$ y a las “asíntotas móviles” $L_j^{(k)}$ y $U_j^{(k)}$, cuyo valor se actualiza en cada iteración.

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k(\nabla f_i)}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^k(\nabla f_i)}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)} \quad (3)$$

- iii. Se genera un subproblema sustituyendo las funciones de restricción por sus aproximaciones $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$.
- iv. Se resuelve el subproblema y se utiliza la solución como el nuevo valor de la(s) variable(s) de diseño $\mathbf{x}^{(k+1)}$.

En resumen, la aportación principal de este algoritmo se basa en el control de la convergencia del problema de optimización mediante el uso de las “asíntotas móviles”, que representan límites al rango de valores posibles de las variables de diseño en una iteración dada.

El MMA es una generalización del método presentado en Fleury y Braibant (1986), o visto de otra forma, en el caso particular cuando $L_j = 0$ y U_j tiende a infinito, el MMA se comporta como dicho método.

Aunque no pretende analizarse en detalle, existen ciertos parámetros ($\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, etc.$) para ajustar la evolución de las asíntotas móviles cuyo valor es dependiente del problema a resolver. En consecuencia, encontrar el valor adecuado es un proceso tedioso y complicado (realizado habitualmente a través de un barrido paramétrico) basado exclusivamente en métodos empíricos.

Existe una versión ampliada del MMA [25] conocida como MMA Globalmente Convergente (en inglés abreviado como GCMMA) que no ha sido explorado en el presente trabajo, pero que puede resultar de interés.

2. Antecedentes

Debido a la relevancia de la temática tratada en el presente trabajo, tanto a nivel académico como industrial, es mucha la bibliografía disponible hoy en día en referencia a la adaptación de las formulaciones de OT para considerar FA, y específicamente aquellas que tratan sobre la restricción del AV para conseguir piezas autosoportantes.

Así pues, a continuación se revisan (sin entrar en detalle) aquellos artículos que, a juicio del autor, están más alineados con el propósito del presente trabajo o comparten, al menos en parte, el enfoque en la implementación de la restricción del AV.

Se describen a continuación, por orden cronológico, los trabajos más relevantes en este ámbito:

- La primera estrategia presentada para eliminar los soportes en el proceso de OT aparece en [26] . Allí se decide utilizar el algoritmo de Optimización Estructural Evolucionaria Bidimensional (en inglés BESO) en lugar del SIMP por su naturaleza dicotómica, considerando solo dos posibles estados: sólido o hueco.

El procedimiento propuesto consta de los siguientes pasos:

- i. Identificación de todas las cavidades (figura 22), entendidas como regiones delimitadas por las barras de la estructura y los límites del dominio del problema.



Figura 22. Cavidades en una viga Cantilever. Fuente: Brackett et al. [26] .

- ii. Exclusión de aquellas cavidades de tamaño menor a un umbral determinado y aquellas que no contengan ningún contorno inferior (según la dirección de impresión).
- iii. En las restantes, distinción entre los contornos inferiores y superiores, tal como se muestra en la figura 23.



Figura 23. Contornos interiores de las cavidades. Fuente: Brackett et al. [26] .

- iv. Ajuste de líneas rectas únicamente sobre los contornos inferiores (figura 24) y cálculo de su ángulo mediante la dirección del gradiente.

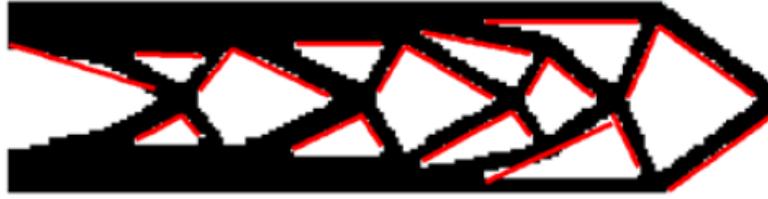


Figura 24. Ajuste de los contornos a rectas (regresión lineal). Fuente: Brackett et al. [26].

- v. Cuantificación del grado de violación de sobre el criterio de autoaporte, mediante un esquema de penalización.

Cabe destacar que la restricción de fabricación se implementó en la propia función objetivo, como un parámetro de ponderación (de manera débil), y no como una restricción directa, razonando que:

- a) Según su esquema de penalización, donde la situación crítica viene determinada por la combinación del ángulo de voladizo y la distancia de voladizo (para ángulos externos al intervalo 45° a 135°), pueden existir distintas combinaciones viables, con lo que se complica la determinación de la restricción.
 - b) Puede haber circunstancias en las que no es necesario eliminar completamente el soporte, por lo que prefiere tenerse control sobre la influencia de la penalización.
- En [27] se desarrolla otro método para modificar la topología óptima acorde a la restricción del AV. Esta técnica no pretende modificar los contornos para que cumplan la restricción, sino que parte de la geometría óptima convencional y rellena las cavidades con barras con la inclinación mínima admisible y espesor indicado por el usuario, subdividiendo la cavidad en nuevas regiones autoaportantes y no autoaportantes. Este procedimiento se repite, como una suerte de fractal, hasta minimizar el tamaño de las nuevas cavidades no autoaportadas por debajo de un umbral.

En este caso se utiliza el SIMP para el análisis de elementos finitos.

El procedimiento propuesto consta de los siguientes pasos:

- i. Identificación de los contornos y suavizado de los mismos, obteniendo una nueva geometría curvilínea como la de la figura 25.
- ii. Cálculo del ángulo de los elementos que conforman el contorno a través del gradiente y clasificación de estos según su integridad estructural (figura 26).

Los autores distinguen 3 intervalos, según la inclinación de las barras, válidos para la técnica de modelado por deposición fundida:

- $40^\circ \leq \phi$: Región robusta, sin fallos estructurales
- $30^\circ \leq \phi < 40^\circ$: Región estructuralmente comprometida
- $\phi < 30^\circ$: Región de fallo

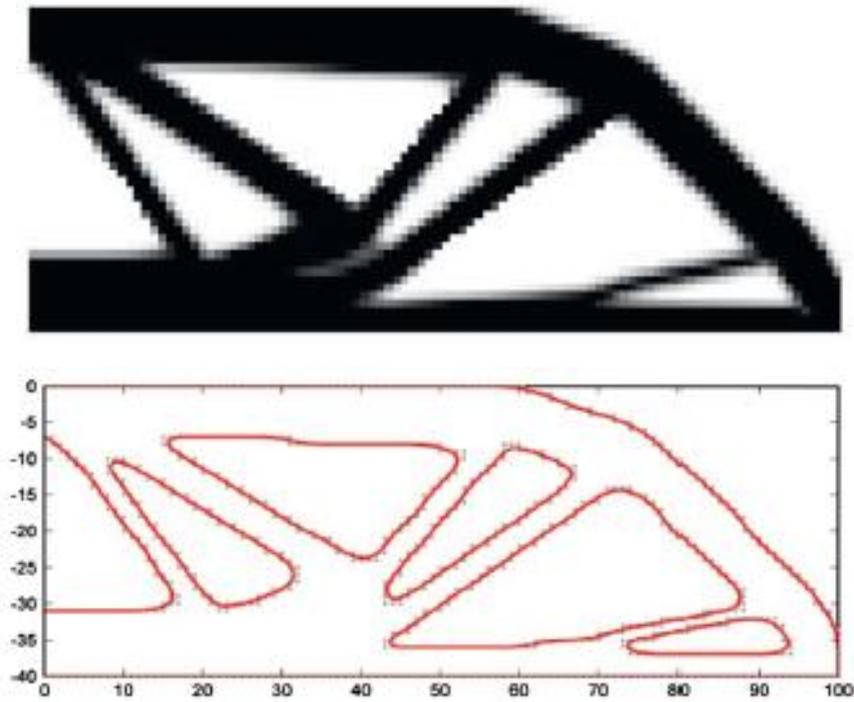


Figura 25. Soluci3n 3ptima de una viga Cantilever (arriba) y sus contornos suavizados (abajo).
Fuente: Leary et al.[27].

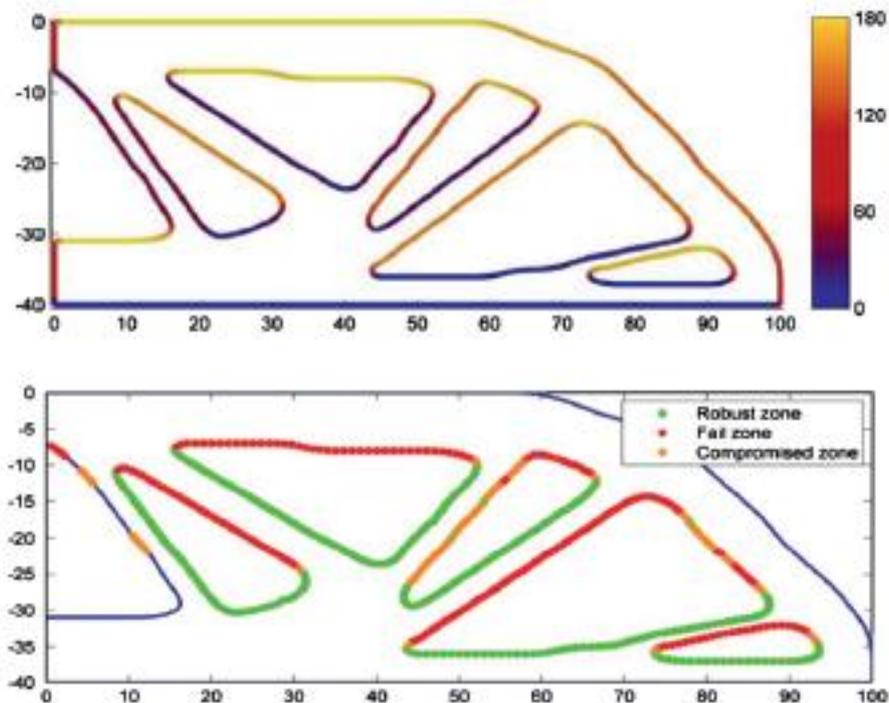


Figura 26. Gradientes de los elementos de los contornos (arriba) y su clasificaci3n en las distintas regiones (abajo). Fuente: Leary et al. [27].

- iii. Rellenado de las cavidades seg3n lo indicado anteriormente, tal y como se refleja en la figura 27 (sin entrar en detalle).

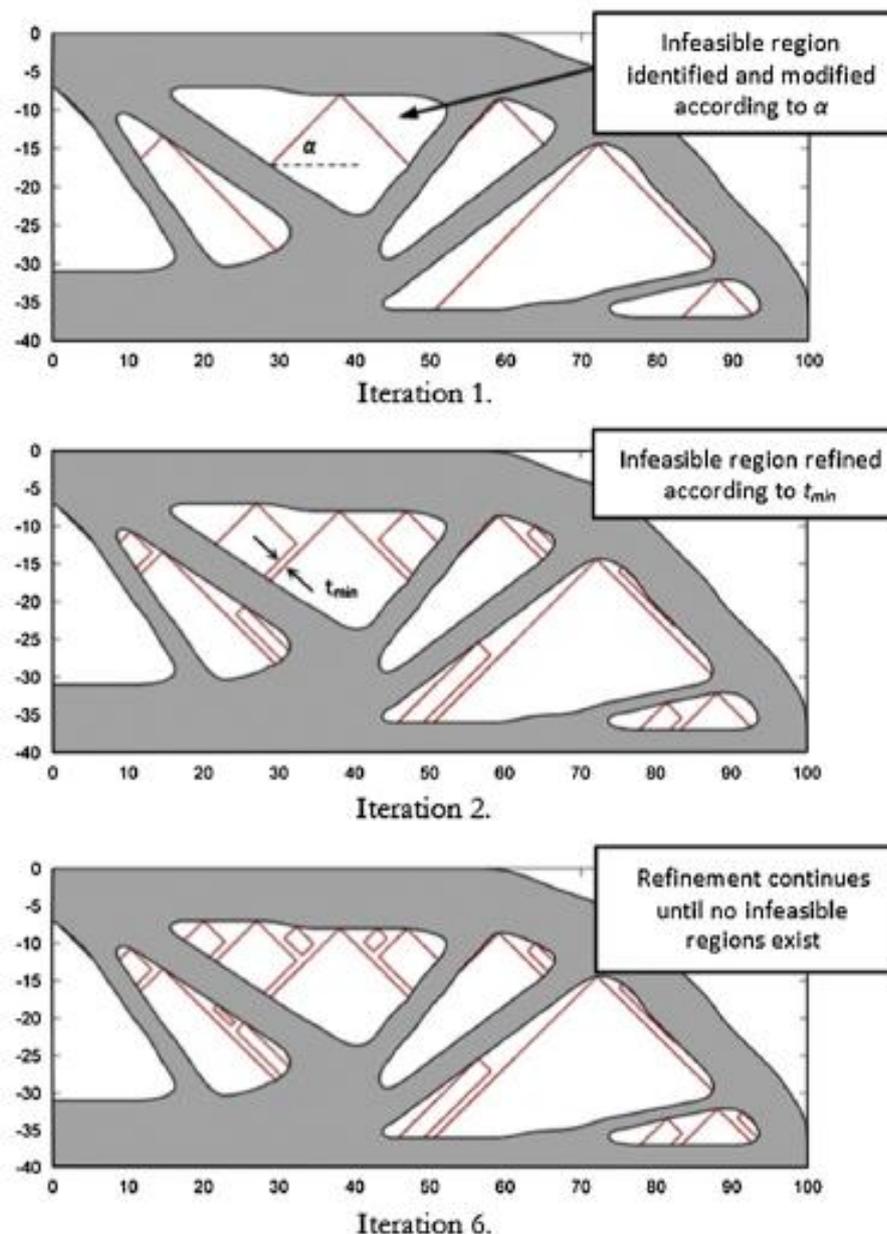


Figura 27. Rellenado de los huecos de una viga cantiléver con espesor de 1 mm y ángulo de voladizo de 45°. Fuente: Leary et al. [27].

iv. Identificación de la dirección óptima de fabricación.

- Por su parte, Gaynor y Guest [28] proponen incorporar la restricción del AV de manera implícita a través de una proyección Heaviside de las variables de diseño nodales. De hecho, con dos proyecciones sucesivas aspiran a controlar tanto la restricción de tamaño como la restricción del AV.

El procedimiento propuesto consta de los siguientes pasos:

- Para cada elemento, determinación de su vecindad (figura 28), mediante una máscara circular. Específicamente, determinación de la sección circular que queda debajo del elemento (según la dirección de impresión), cuyo ángulo corresponde con el AV, y que contiene los elementos que tienen la capacidad potencial de soportar al elemento analizado.

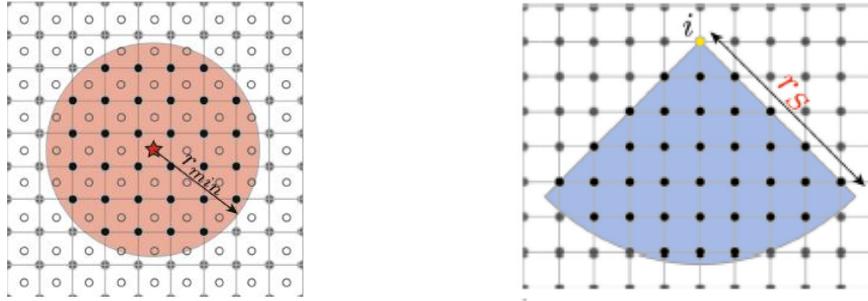


Figura 28. Vecindad local (izq.) y vecindad de soporte (der.). Fuente: Gaynor y Guest [28].

- ii. Cálculo de la variable p_s mediante una proyección Heaviside modificada (con umbral). Esta variable indica si puede haber material en el elemento analizado, dependiendo de si cumple o no con la restricción de fabricabilidad.
- iii. Cálculo de la densidad de cada elemento mediante una proyección Heaviside regular, que tendrá un valor distinto a cero exclusivamente si ocurre lo mismo con p_s y con las variables de diseño (ψ).

Para esta implementación se considera el uso de la técnica RAMP como algoritmo de optimización.

- Finalmente, uno de los artículos más recientes que aborda esta temática es [29], donde se propone otro método para obtener diseños que no requieran soporte restringiendo la OT, utilizando en este caso el RAMP como algoritmo de optimización.

El procedimiento propuesto consta de los siguientes pasos:

- i. Identificación de los contornos (figura 29) y cálculo de su gradiente mediante el algoritmo SUSAN (ver punto 3.3.1).

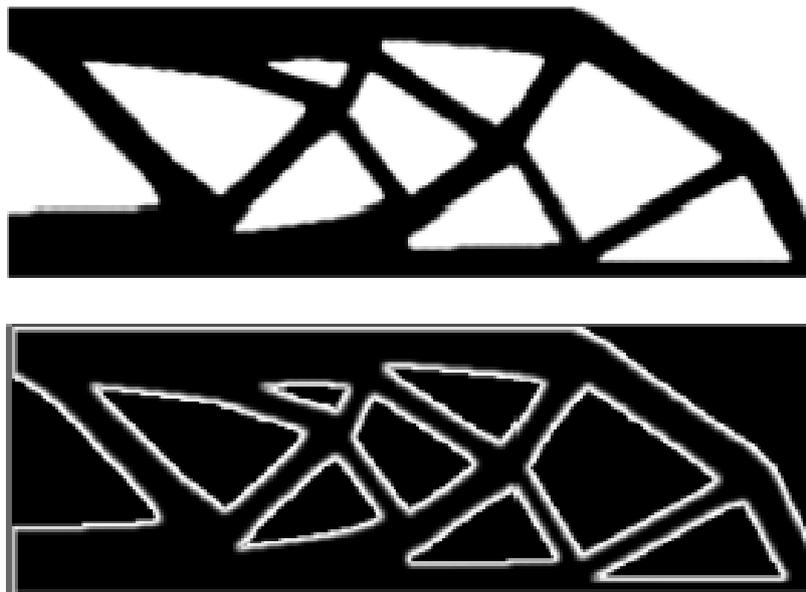


Figura 29. Contornos detectados en una viga cantiléver (SUSAN). Fuente: Garaigordobil et al. [29].

- ii. Clasificación de cada barra como autoportada o no autoportada mediante una función de comparación (φ) entre la proyección vertical de su gradiente (perpendicular a la barra) con la proyección vertical del vector determinado por el ángulo admisible (ψ) medido desde la dirección de impresión.

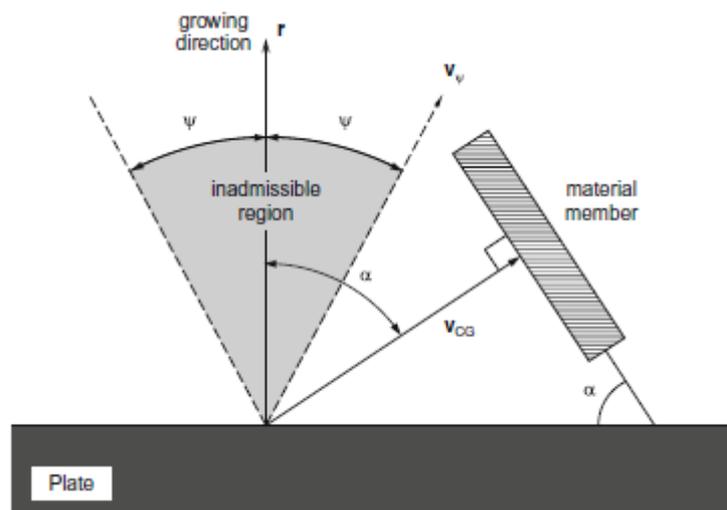


Figura 30. Direcciones y ángulos propios de la impresión 3D. Fuente: Garaigordobil et al. [29].

Nótese que, aunque en este caso los autores han decidido medir en AV (α) entre el gradiente y la dirección de impresión, esto será equivalente a la medida habitual (desde la horizontal) siempre y cuando la dirección de impresión sea perpendicular a la base, según de ilustra en la figura 30.

- iii. Cuantificación del grado de violación del criterio de autoaporte como la proporción de la suma del valor de φ en los contornos admisibles entre la suma del valor de φ en todos los contornos (admisibles e inadmisibles).

La aportación principal de este trabajo es la evaluación de la violación de la restricción de fabricación impuesta en la OT directamente sobre los contornos (como entidad) y no sobre los elementos. Además, la restricción se ha impuesto a través de su propia función (de manera fuerte).

De todos estos trabajos se pueden inferir las siguientes consideraciones a tener en cuenta en la implementación de la función de restricción del AV:

- La restricción parece activarse una vez que existen contornos bien definidos, presumiblemente tras converger el problema de OT considerando la restricción de la fracción de volumen.
- Únicamente es de interés la información geométrica obtenida en los contornos.
- La restricción puede implementarse en el código de OT tanto de manera implícita como explícita.

Una revisión más extensiva puede obtenerse consultando los trabajos [30] y [10], ambos bastante recientes.

3. Desarrollo

En el presente apartado se presentan los métodos que se han encontrado en la bibliografía en lo referente a la estimación del gradiente de una imagen tipo escala de grises.

3.1 Cálculo de la dirección mediante derivación

El concepto de gradiente de una función n -dimensional, habitualmente representado con el operador nabla (∇) hace referencia a la variación local de la función en una dirección determinada, o lo que es lo mismo, indica la dirección de máxima variación y la velocidad a la que varía (según el módulo) la función en esa dirección.

En procesamiento de imágenes, no obstante, no se trabaja con funciones analíticas o campos escalares, sino con matrices donde cada elemento representa la intensidad de su pixel asociado. En nuestro caso, la intensidad de cada píxel es en realidad la densidad relativa de ese elemento.

Así pues, para poder calcular el gradiente de una señal multidimensional discreta, una imagen, se deberá aproximar cada derivada parcial mediante el método de diferencias finitas, donde el incremento (h) corresponderá a 1 píxel.

3.1.1 Diferencias finitas: convolución con kernel

A continuación se presentan los operadores más habituales para calcular gradiente mediante operaciones de convolución, respectivamente el operador de Prewitt, el de Sobel-Felman y el de Scharr:

$$k_P^y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) \quad (4)$$

$$k_{SF}^y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 1) \quad (5)$$

$$k_{Sc}^y = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 10 \ 3) \quad (6)$$

Los dos primeros están incluidos de forma nativa el software Matlab®. La implementación del tercero es igualmente muy sencilla.

En los tres casos, se observa que los kernel tienen la capacidad de ser separados en dos vectores, el vector columna representando la operación de diferencias finitas centradas y el vector fila representando los pesos que se les asignan a los píxeles en función de su proximidad al píxel central.

Otra opción es realizar dos convoluciones consecutivas con un kernel de interpolación y otro de derivación (7), como el propuesto en [31] o [32], aunque este último queda fuera del ámbito del presente trabajo porque, al trabajar con *splines* cúbicos, su tamaño es de 7 elementos.

$$\begin{aligned} k &= (0.223755 \ 0.552490 \ 0.223755) \\ d_1 &= (-0.453014 \ 0.0000 \ 0.453014) \end{aligned} \quad (7)$$

En cualquier caso, cabe mencionar que los argumentos de salida en las operaciones de convolución con dos matrices siempre son de menores dimensiones que los argumentos de entrada. Para evitar esto existe el proceso denominado *padding*, que consiste en “rellenar” la matriz en todas sus direcciones con determinados valores.

3.1.2 Derivada analítica: campo de densidades nodales

En determinadas situaciones es posible que el tratamiento discreto del problema ocasione algún tipo de inconveniente a nivel matemático. Sobre todo, la convolución con los kernel puede conllevar dificultades asociadas, por ejemplo, al cálculo de las sensibilidades de la función de restricción, teniendo que recurrir a al método de las diferencias finitas.

En el supuesto de que esto suceda, o simplemente para facilitar los cálculos numéricos (específicamente la derivación e integración) o bien para dotar a la formulación de la restricción de fabricabilidad de mayor rigor matemático, puede preferirse trabajar con un campo de densidades nodales, en cuyo caso cualquier función dada podrá evaluarse en un punto concreto a través de las funciones de forma, como se muestra a continuación:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^q N_i(x, y) \cdot \phi_i \quad (8)$$

donde i representa el número total de nodos.

En el código utilizado para el desarrollo del presente trabajo se utilizan elementos serendípticos cuadriláteros lineales, cuyas funciones de forma se muestran a modo de recordatorio en la imagen 32.

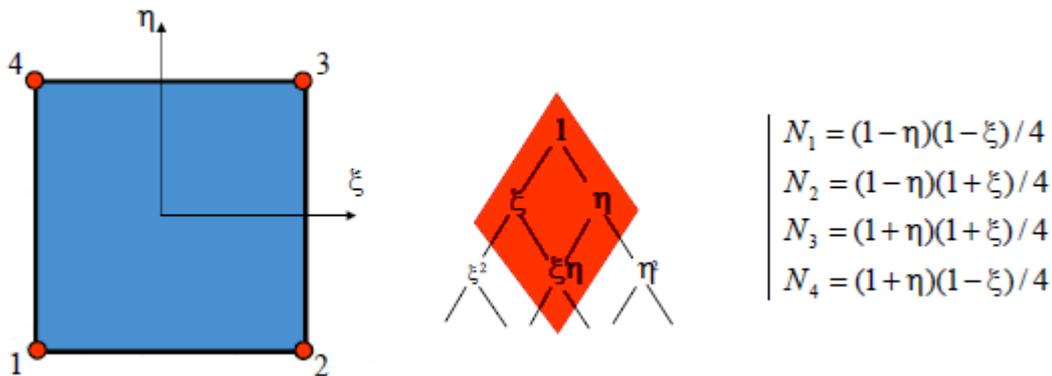


Figura 31. Familia serendípita. Elemento lineal. Fuente: Apuntes de Técnicas Computacionales.

Puesto que las funciones de forma se han obtenido considerando el elemento definido en sus coordenadas locales (ξ, η) , será necesario aplicar una transformación de coordenadas para situarnos en el sistema de referencia global (x, y) , una vez más a través de las funciones de forma:

$$x = \sum_{i=1}^q N_i'(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (9)$$

Para calcular las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales se recurrirá a la matriz Jacobiana, o más bien a su inversa.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^q \frac{N_i'(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \quad (10)$$

3.2 Cálculo de la dirección sin derivación

3.2.1 Algoritmo SUSAN

Introducido por Smith y Brady [33], el principio del *Smallest Univalve Segment Assimilating Nucleus* (SUSAN) corresponde a una metodología de procesamiento de imágenes que no involucra derivadas de imagen ni requiere tratamiento para la reducción de ruido.

Esta técnica se basa en la intensidad de los píxeles de una imagen, lo cual es asimilable a la magnitud de los valores de cada elemento de una matriz. Su funcionamiento es el descrito a continuación:

- Para cada píxel se determina una vecindad aplicando una máscara circular (o en el caso de tamaño mínimo, una máscara rectangular de 3x3).
- Se compara la intensidad I de cada píxel en la vecindad con la intensidad del píxel sobre el que está centrada la máscara (núcleo) de forma que, si la diferencia de intensidad es menor o igual a un umbral determinado t , los píxeles se considerarán iguales o pertenecientes al mismo componente (valor 1), mientras que en caso contrario se considerarán distintos (valor 0).

e.1 La función matemática que modela este comportamiento es la siguiente:

$$c(\vec{r}, \vec{r}_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } |I(\vec{r}) - I(\vec{r}_0)| \leq t \\ 0 & \text{si } |I(\vec{r}) - I(\vec{r}_0)| > t \end{cases} \quad (11)$$

e.2 No obstante, se prefiere utilizar la siguiente función suavizada por su mayor estabilidad y sensibilidad:

$$c(\vec{r}, \vec{r}_0) = e^{-\left(\frac{I(\vec{r}) - I(\vec{r}_0)}{t}\right)^6} \quad (12)$$

En la figura 9 se representan las dos funciones de comparación:

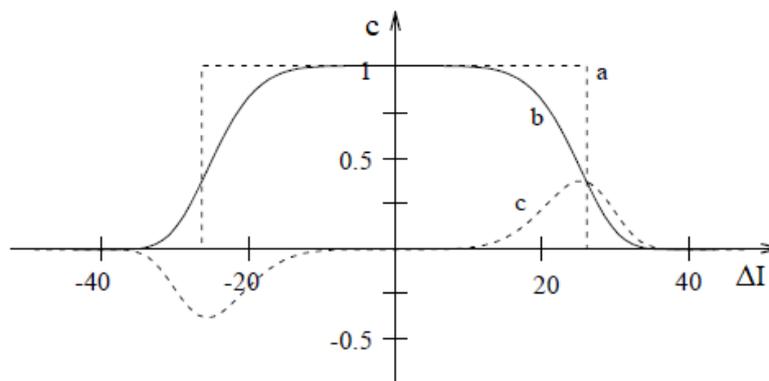


Figura 32. Función de comparación original (a) y modificada (b). Fuente: Smith y Brady [33].

El exponente 6 puede parecer arbitrario, pero según Smith (1999) es el que consigue minimizar el número de falsos positivos y negativos.

- c. El sumatorio del valor de la función anterior en todos los píxeles de la vecindad da como resultado la denominada *Univalue Segment Assimilating Nucleus* (USAN), esto es, el área cuya intensidad se asimila a la del núcleo:

$$n(\vec{r}_0) = \sum_{\vec{r}} c(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (13)$$

En las imágenes 10 y 11 se observa como varía la USAN en función de la localización de la máscara (de su núcleo), siendo efectivamente menor en las esquinas.

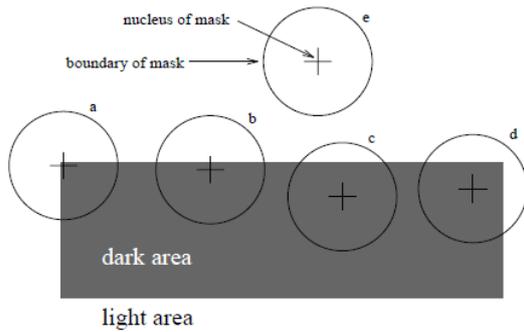


Figura 33. Máscaras en diferentes posiciones.
Fuente: Smith y Brady [33].

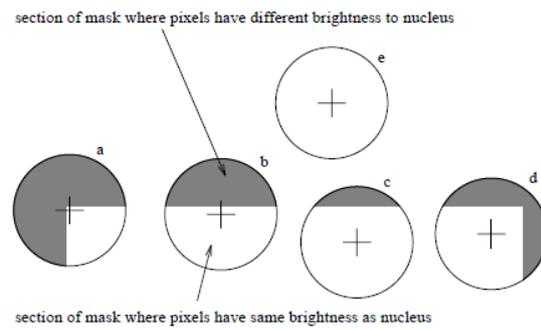


Figura 34. USAN en cada máscara.
Fuente: Smith y Brady [33].

- d. Se calcula la respuesta inicial de contorno comparando la USAN con un umbral geométrico g , que habitualmente vale $\frac{3}{4} \cdot n_{max}$, pues ese es el valor óptimo para minimizar el efecto del ruido de la imagen:

$$R(\vec{r}_0) = \begin{cases} g - n(\vec{r}_0) & \text{si } n(\vec{r}_0) < g \\ 0 & \text{si } n(\vec{r}_0) \geq g \end{cases} \quad (14)$$

En el ejemplo siguiente (figura 12) puede observarse

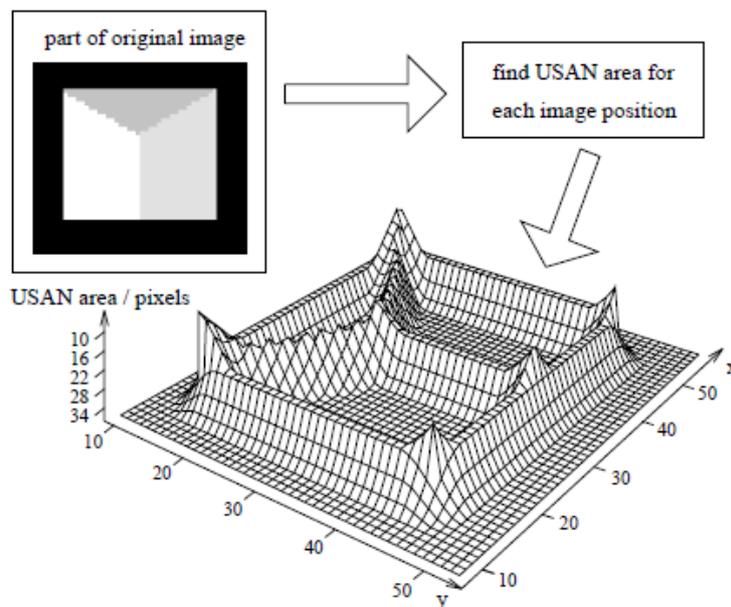


Figura 35. Representación 3D de la USAN con los ejes y esquinas. Fuente: Smith y Brady [33].

e. Finalmente, para evaluar la dirección de los contornos hay que distinguir entre dos posibles casuísticas:

e.1 En el caso del contorno *inter-píxel* es suficiente con calcular el vector entre el centro de gravedad de la USAN y el centro de la máscara, cuya dirección será perpendicular a la dirección de la barra:

$$\overline{cog}(\vec{r}_0) = \frac{\sum_{\vec{r}} \vec{r} \cdot c(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\sum_{\vec{r}} c(\vec{r}, \vec{r}_0)} \quad (15)$$

e.2 En el caso del contorno *intra-píxel*, la dirección del eje se estima a partir del cálculo del eje de simetría mayor:

$$\overline{(x - x_0)^2}(\vec{r}_0) = \sum_r (x - x_0)^2 \cdot c(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (16)$$

$$\overline{(y - y_0)^2}(\vec{r}_0) = \sum_r (y - y_0)^2 \cdot c(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (17)$$

$$\overline{(x - x_0) \cdot (y - y_0)}(\vec{r}_0) = \sum_r (x - x_0) \cdot (y - y_0) \cdot c(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad (18)$$

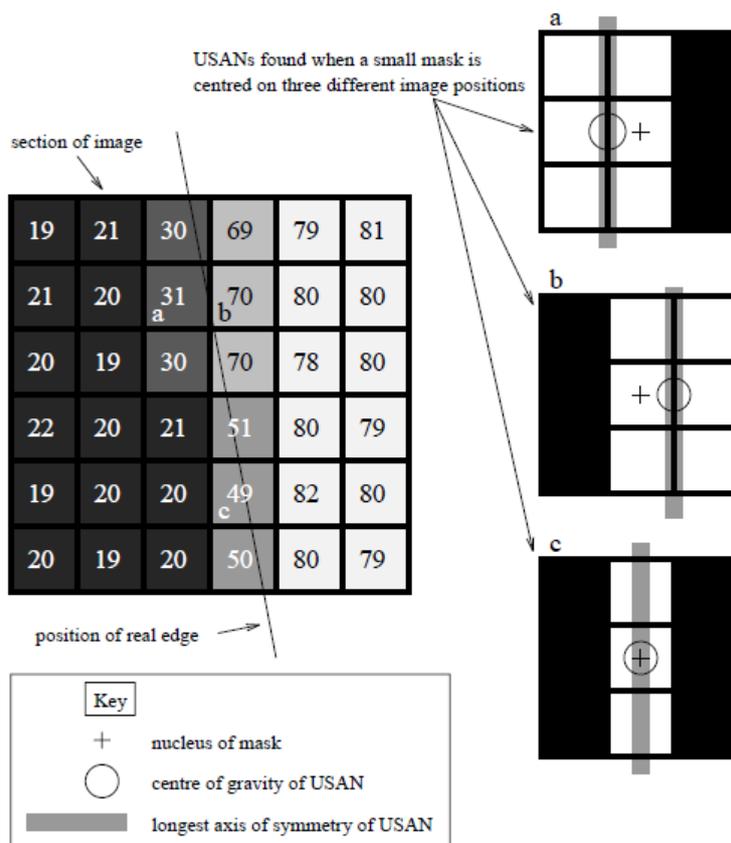


Figura 36. Ilustración de los dos casos posibles. Fuente: Smith y Brady [33].

Posteriormente se aplicarían, si procede, rutinas para la supresión de los no-máximos, la reducción de grosor o la estimación sub-píxel.

3.2.2 Transformada de Radon

La transformada de Radon [34] es un artificio matemático que permite detectar la proyección de una función de n dimensiones sobre una entidad de $n-1$ dimensiones desde todas las direcciones.

Técnicamente, se trata de una transformación integral, íntimamente relacionada con la transformada de Fourier, de forma que la función resultante $\mathcal{R}f$, definida en el espacio de líneas del plano, toma para cada línea el valor de la integral de la función original $f(x, y)$ a lo largo de dicha línea (de manera similar a una integral de contorno). Esta descripción es válida para el caso 2D, y se encuentra representada gráficamente en la figura 38:

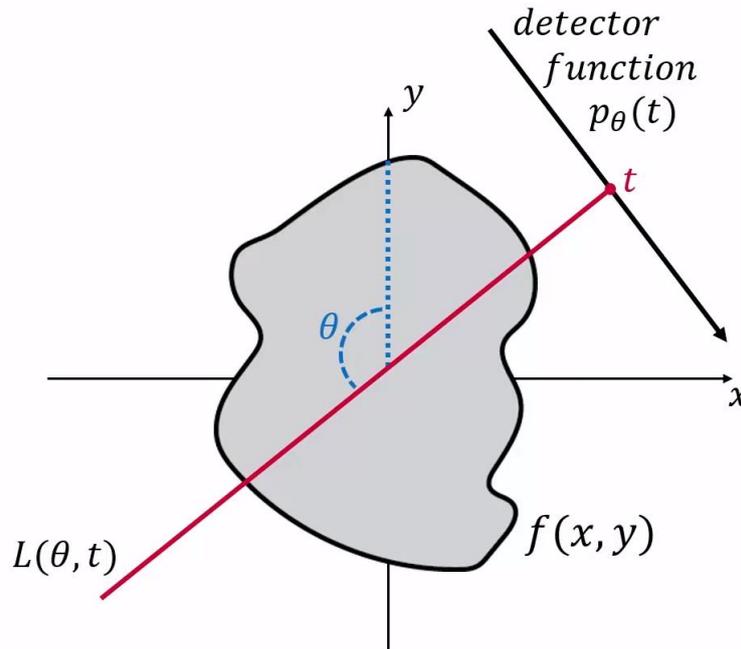


Figura 37. Representación gráfica de los componentes de una transformada de Radon.
Fuente: *Computed Tomography and the ASTRA Toolbox*, Vision Lab, University of Antwerp.

Así pues, se observa que, para una dirección θ determinada, se evalúa la integral de $f(x, y)$ a lo largo de la línea L para cualquier punto t de la función de detección a través de la siguiente ecuación:

$$\mathcal{R}f(\theta, t) \equiv p_{\theta} = \int_{L(\theta, t)} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - t) dx dy \quad (19)$$

Cuando se representa la función resultante de la transformada de Radon en el denominado dominio de proyección (θ, t) , se obtiene lo que se conoce, al menos en el ámbito médico, como sinograma.

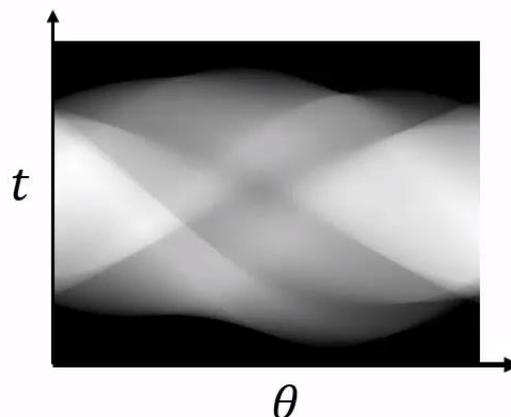


Figura 38. Ejemplo sinograma.

Fuente: *Computed Tomography and the ASTRA Toolbox, Vision Lab, University of Antwerp.*

Las aplicaciones habituales de este operador matemático se centran en la obtención de imágenes por Tomografía Axial Computarizada (TAC) y en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas. No obstante, en el contexto de este trabajo pretende utilizarse, tal y como propone Zobaer (2021), para calcular el eje de orientación principal de una imagen o una región (las barras de una estructura, en este caso), teniendo en cuenta que en esta dirección la función de detección presenta máxima variación.

$$\theta = \arg \min_{\theta} \left(\frac{d^2 \sigma_{\theta}}{d\theta^2} \right) \quad (20)$$

Para ello, previamente sería necesario discretizar la transformación de Radon, puesto que en la práctica no es posible calcularla en un número infinito de direcciones ni para un número infinito de puntos en cada dirección. Debe decidirse, por tanto, una resolución adecuada para cada parámetro según el problema a tratar.

En el caso de los TACs, por ejemplo, la resolución angular surge del compromiso entre la calidad deseada en la imagen y la cantidad de radiación a la que se exponga al paciente, mientras que la resolución espacial viene impuesta por el propio sensor, según su sensibilidad a la hora de detectar los rayos X.

Afortunadamente, el software Matlab[®] ya cuenta con una función implementada para calcular la transformada de Radon en una imagen tipo escala de grises para el rango de ángulos deseado. De esta forma, no tenemos control sobre la resolución espacial, mientras que la resolución angular será como mínimo aquella que resulte computacionalmente viable.

3.3 Esquema de penalización propuesto

Una vez medida la dirección de las barras a través de alguno de los métodos presentados a lo largo del punto 3, se hará uso de esta información para penalizar aquellos elementos para penalizar aquellos elementos cuyo AV no esté comprendido en el intervalo de 45° a 135° .

A continuación, para clasificar los elementos como autosoportados o no autosoportados se propone utilizar una función sigmoide, o más bien la diferencia de dos funciones sigmoides con puntos de inflexión en 45° y 135° , que simulan una función escalón tal y como se muestra en la figura 40. La suavidad de la transición en el escalón es contralada con el parámetro d (*dumping*), como se deduce de (21).

$$sig = \frac{1}{1 + e^{-d \cdot (\theta - AV_{min})}} - \frac{1}{1 + e^{-d \cdot (\theta - AV_{max})}} \quad (21)$$

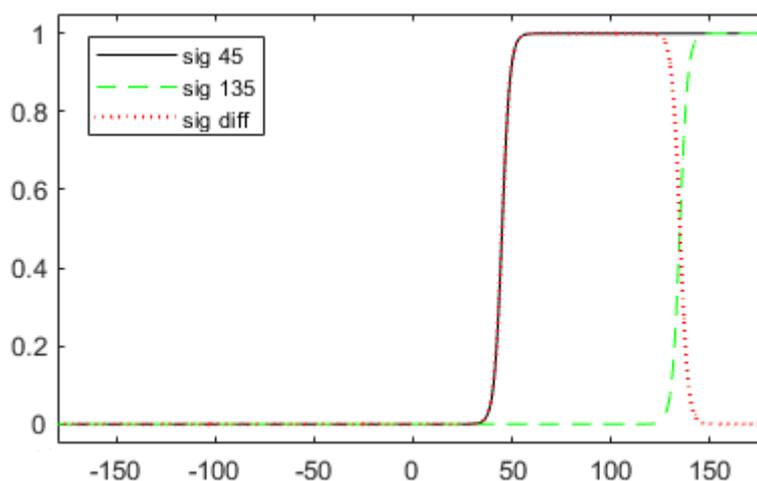


Figura 39. Ejemplo funciones sigmoides con $d = 0.5$. Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, a todos los elementos válidos se les asigna un 0, mientras que a los elementos que violan la restricción se les asigna un 1. Nótese que en la gráfica aparecen los valores invertidos respecto al comentario anterior, pero esto es debido a que internamente se trabaja con el ángulo del gradiente, perpendicular a la barra, por simplicidad en el código.

Finalmente, se ponderan estos valores según el valor de la magnitud del gradiente, que a juicio del autor resulta equivalente en gran medida a trabajar exclusivamente con los elementos de contorno, y se calcula una norma p -ésima del resultado para tener en cuenta la aportación de todos los elementos a través de un único valor.

$$f_r = \frac{1}{\sqrt[p]{\sum_e \|\nabla\|^p}} \cdot \sqrt[p]{\sum_e (\|\nabla\|_e \cdot sig_e)^p} \quad (22)$$

La experiencia realizando pruebas con el código, a nivel de desarrollador y de usuario, indica que valores razonables de p pueden ser $p = 3$ o $p = 4$.

Posteriormente se ha modificado la función *ad hoc* para normalizar el resultado, esto es, para garantizar que el dominio de la función se encuentre entre 0 y 1. Así se obtiene una función de restricción explícita, cuyo valor deberá minimizarse hasta llegar, en el caso ideal, a valer 0 sí y solo sí todos los elementos del dominio cumplen con la restricción.

Puesto que esta restricción es de naturaleza opuesta a la restricción de volumen, como se comentará con mayor profundidad al final en el apartado 4, se ha implementado en el código un factor de relajación (un término constante restando a la función) para poder controlar mejor la “intensidad” de la restricción mientras se hacían pruebas.

Para algunos cálculos posteriores se requiere la sensibilidad de la función de restricción, por lo que a continuación se presenta la derivada de f_r con respecto a las variables de diseño (las densidades):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_r}{\partial x_i} &= \frac{-1}{p} \cdot \left(\sum_e \|\nabla\|_e^p \right)^{\frac{-1}{p}-1} \cdot \left[\sum_e p \cdot \|\nabla\|_e^{p-1} \cdot \left\{ \frac{\partial \|\nabla\|_e}{\partial x_i} \right\} \right] \\ &\cdot \sqrt[2]{\sum_e (\|\nabla\|_e \cdot Sig_e)^p} + \frac{1}{\sqrt[p]{\sum \|\nabla\|^p}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\sum_e (\|\nabla\|_e \cdot Sig_e)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \\ &\cdot \left[\sum_e p \cdot (\|\nabla\|_e \cdot Sig_e)^{p-1} \cdot \left\{ \frac{\partial \|\nabla\|_e}{\partial x_i} \cdot Sig_e + \|\nabla\|_e \cdot \frac{\partial Sig_e}{\partial x_i} \right\} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

donde:

$$\frac{\partial Sig_e}{\partial x_i} = \frac{\partial Sig_e}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (24)$$

y a su vez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Sig_e}{\partial \theta} &= -1 \cdot (1 + e^{-d \cdot (\theta - OA_{min})})^{-2} \cdot [0 + e^{-d \cdot (\theta - OA_{min})} \cdot \{-d\}] \\ &+ 1 \cdot (1 + e^{-d \cdot (\theta - OA_{max})})^{-2} \cdot [0 + e^{-d \cdot (\theta - OA_{max})} \cdot \{-d\}] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{-\nabla_y}{\nabla_x}\right)^2} \cdot (-1) \cdot \left[\frac{\frac{\partial \nabla_y}{\partial x_i} \cdot \nabla_x - \nabla_y \cdot \frac{\partial \nabla_x}{\partial x_i}}{\nabla_x^2} \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial \|\nabla\|}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_x^2 + \nabla_y^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left[2 \cdot \nabla_x \cdot \frac{\partial \nabla_x}{\partial x_i} + 2 \cdot \nabla_y \cdot \frac{\partial \nabla_y}{\partial x_i} \right] \quad (27)$$

4. Resultados

En el presente apartado se recogen todos los resultados relevantes para el desarrollo del TFM, acompañados de una discusión sobre los mismos, cuando sea necesaria.

En primer lugar se comparará la exactitud con la que cada uno de los métodos presentados anteriormente es capaz de evaluar el ángulo de las barras de una imagen preparada con este fin (lo que se conoce como *benchmark*), que no corresponde con ningún componente mecánico específico (ver figura 41).

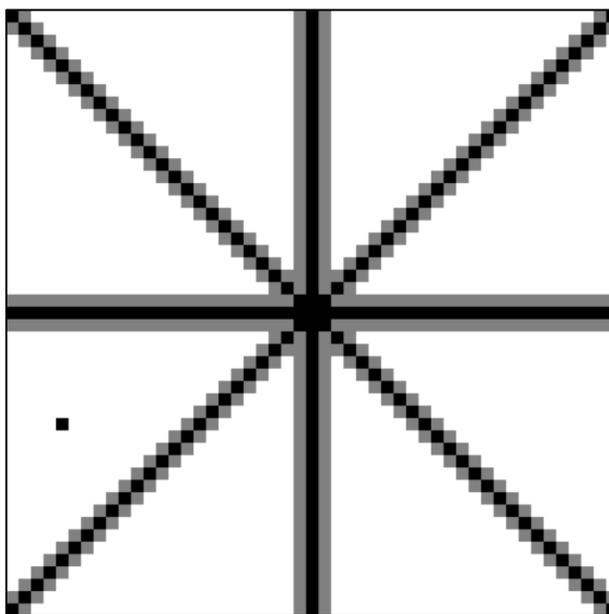


Figura 40. Benchmark para comparar los códigos. Fuente: Elaboración propia.

Se omite su comparación en términos coste computacional, o velocidad, porque este es irrelevante y no contribuirá significativamente al tiempo total del proceso de OT en ningún caso.

Posteriormente se comentan los resultados obtenidos del procedimiento de OT con la restricción del AV implementada según el esquema de penalización planteado en el apartado 3, aplicado sobre una viga MBB (*Messerschmitt–Bölkow–Blohm*), esto es, una viga biapoyada (figura 42).

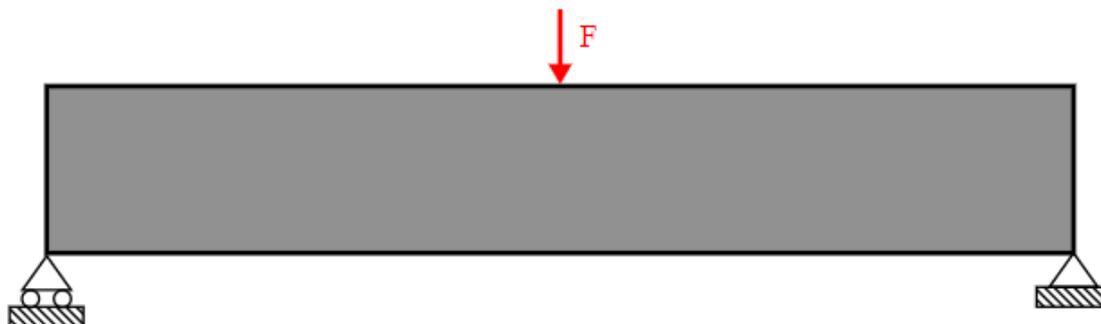


Figura 41. Representación esquemática de las condiciones de contorno en un problema de viga MBB. Fuente: Elaboración propia.

4.1 Prewitt

A continuación se muestran las representaciones gráficas (figura 43) correspondientes a la dirección y la magnitud del gradiente calculadas en cada elemento mediante la convolución del operador de Prewitt con la imagen de densidades.

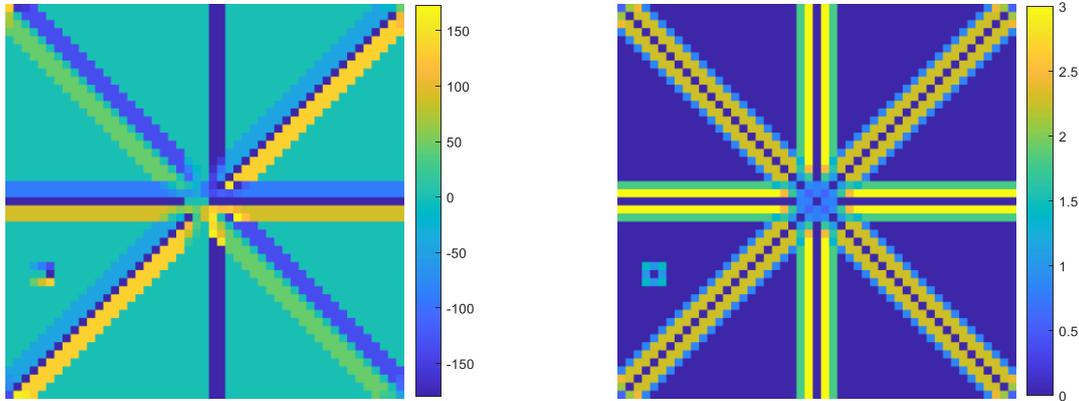


Figura 42. Dirección (izq.) y magnitud (der.) del gradiente (Prewitt). Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse, en cada una de las barras aparece un núcleo (la fibra central) donde se detectan 180° (barras horizontal y a 45°) o 0° (barras vertical y a 135°) indistintamente, puesto que la distribución de densidades es simétrica en el kernel cuando se sitúa ahí. Cabe recordar que estas dos direcciones son equivalentes.

El resto de las direcciones están bien calculadas y resultan coherentes con la imagen.

4.2 Sobel-Feldman

A continuación se muestran las representaciones gráficas (figura 44) correspondientes a la dirección y la magnitud del gradiente calculadas en cada elemento mediante la convolución del operador de Sobel con la imagen de densidades.

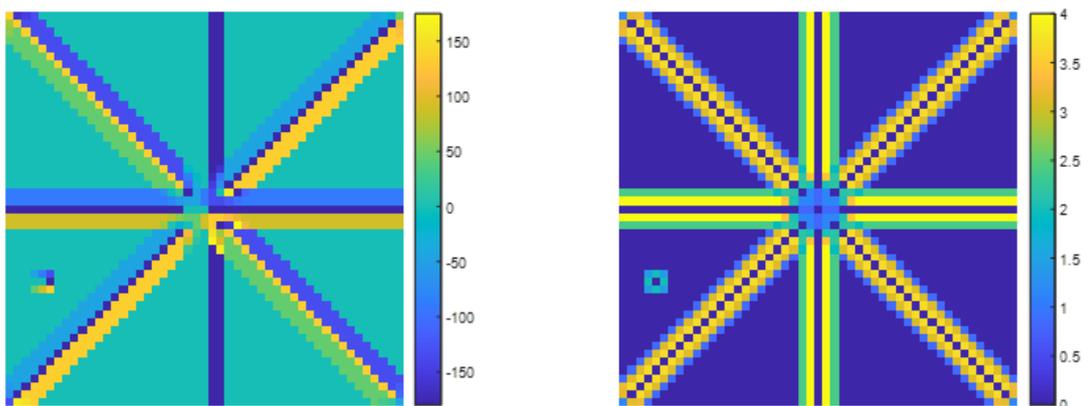


Figura 43. Dirección (izq.) y magnitud (der.) del gradiente (Sobel). Fuente: Elaboración propia.

A diferencia del anterior, en este caso se ha detectado en el núcleo de la barra a 135° una dirección de -180° , lo cual es equivalente al caso anterior.

4.3 Scharr

A continuación se muestran las representaciones gráficas (figura 45) correspondientes a la dirección y la magnitud del gradiente calculadas en cada elemento mediante la convolución del operador de Sobel con la imagen de densidades.

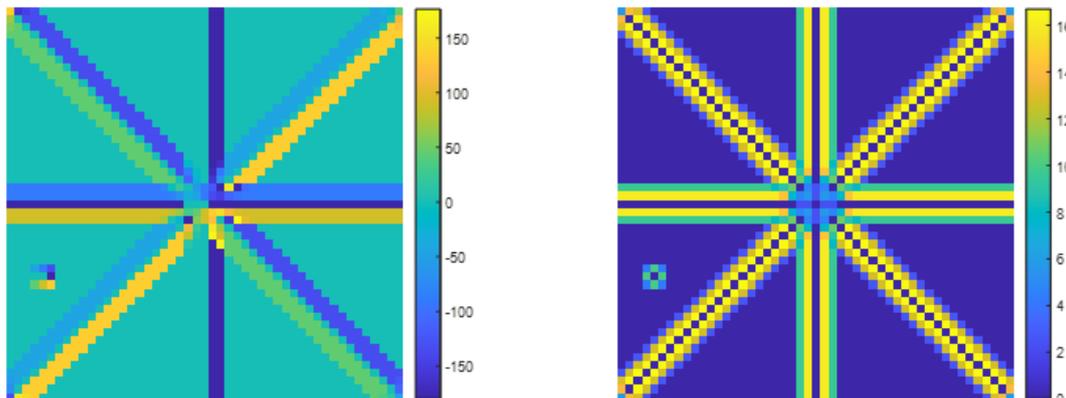


Figura 44. Dirección (izq.) y magnitud (der.) del gradiente (Scharr). Fuente: Elaboración propia.

A diferencia del primero, en este caso se ha detectado en el núcleo de la barra a 45° una dirección de 0°, lo cual es equivalente.

Como ya sucedía con el operador de Sobel, en ambos casos se aprecia una ligera mejora respecto a Prewitt en los resultados obtenidos en los elementos de las esquinas,

4.4 Farid y Simoncelli

A continuación se muestran las representaciones gráficas (figura 46) correspondientes a la dirección y la magnitud del gradiente calculadas en cada elemento mediante la convolución del kernel de interpolación y el de derivación propuestos en por Farid y Simoncelli con la imagen de densidades.

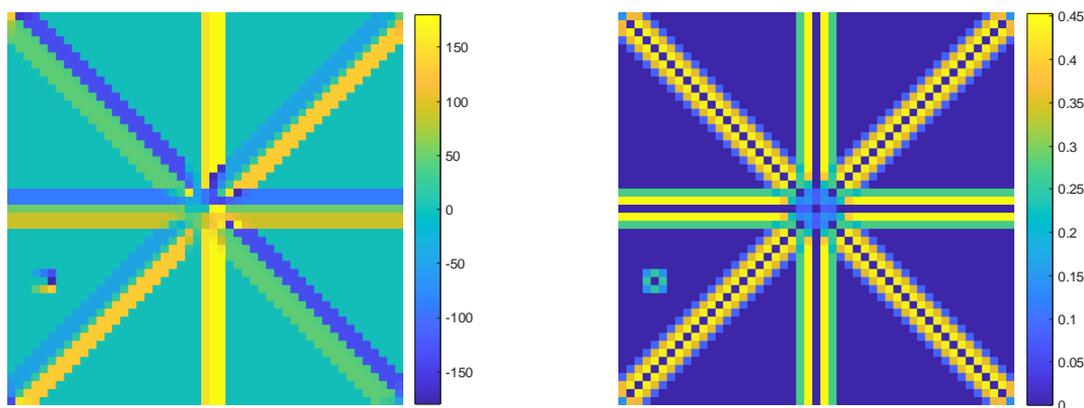


Figura 45. Dirección (izq.) y magnitud (der.) del gradiente (F&S). Fuente: Elaboración propia.

Curiosamente, en este caso se obtienen valores correctos en los núcleos de las barras oblicuas, pero los núcleos de la barra horizontal y vertical valen respectivamente 52° y el 156°, de forma aproximada.

4.5 Densidades nodales

A continuación se muestran las representaciones gráficas (figura 47) correspondientes a la dirección y la magnitud del gradiente calculadas en cada elemento a partir de las densidades nodales mediante la derivada funciones de forma.

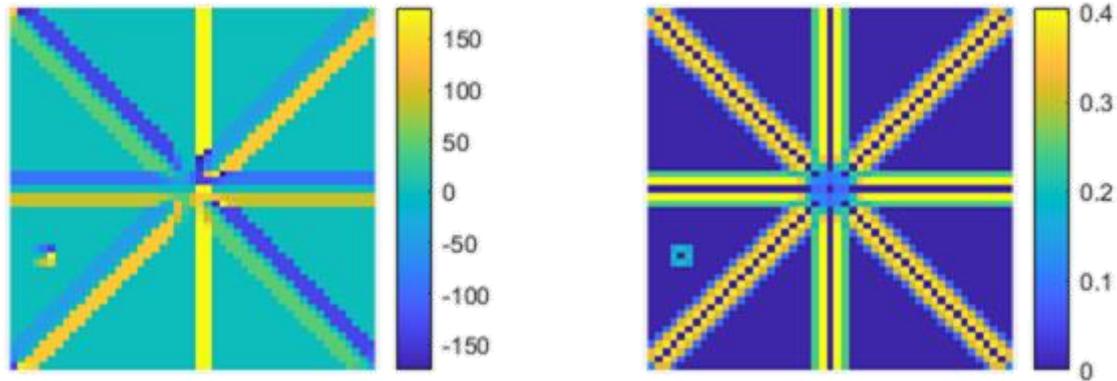


Figura 46. Dirección (izq.) y magnitud (der.) del gradiente (ρ_{nod}). Fuente: Elaboración propia.

Como ya sucedía en el caso anterior, a pesar de salir muy parecida la imagen referente a las magnitudes, sus valores son un orden de magnitud menores a los calculados por convolución. Esto se debe a que en los tres primeros casos habría que normalizar los resultados de la magnitud multiplicando por un factor de $1/6$, $1/8$ y $1/32$ respectivamente.

Por otro lado, se detecta una dirección de 0° en los núcleos de todas las barras. En el caso de barra vertical, cabe recordar que los 180° detectados a la derecha son equivalentes a los -180° que venía detectando en los primeros apartados.

4.6 SUSAN

La implementación del SUSAN no ha sido satisfactoria. Aunque es posible detectar los contornos con bastante precisión (figura 48), la dirección y la magnitud del gradiente no resultan igual de sencillos.

El autor entiende que el problema se encuentra a la hora de distinguir entre los dos casos que se plantean en X, el *inter-pixel* y el *intra-pixel*.

Cabe aclarar que el “contorno” que se observa en la parte inferior de la figura simula la base de la máquina de impresión 3D.

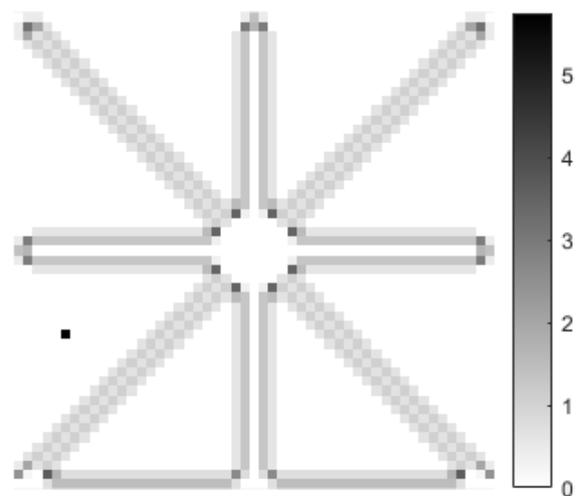


Figura 47. Contornos detectados con el SUSAN.
Fuente: Elaboración propia.

4.7 Radon

A continuación se muestran el sinograma (figura 49) correspondiente a la aplicación de la transformación de Radon sobre el *benchmark*.

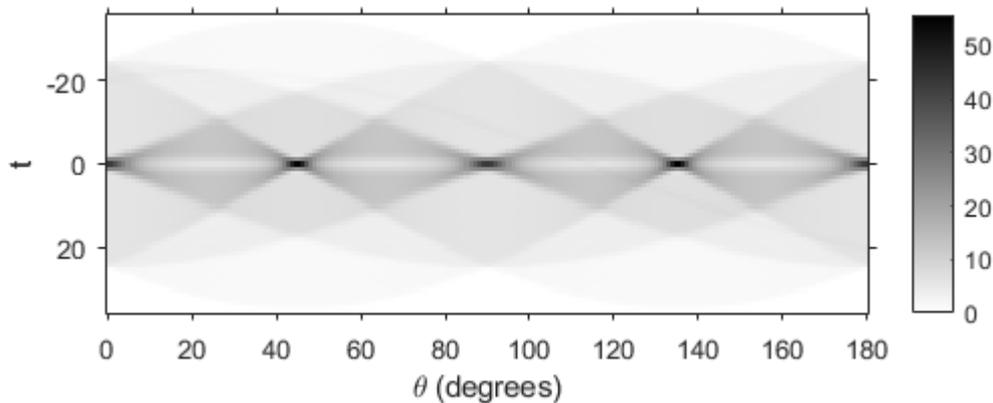


Figura 48. Dirección (izq.) y magnitud (der.) del gradiente (ρ_{nod}). Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse, se detectan claramente las direcciones preferentes de 0° , 45° , 90° , 135° y 180° , aunque la información se obtiene de una forma que no resulta sencilla de integrar en la formulación de la restricción de fabricación.

4.8 Ejemplo MBB

De entre todos los métodos propuestos anteriormente, se elige el cálculo del gradiente basado en las densidades nodales por su simplicidad de implementación en el código CGFEM, por su naturaleza analítica que permite calcular las derivadas directamente y sin problemas, y por la mayor familiarización del autor del presente trabajo (y de sus tutores) con el mismo por formar parte, a diferencia que el tratamiento digital de imágenes, del currículo del grado universitario en el que se formó el autor (Grado en Ingeniería Mecánica).

Así pues, se parte del siguiente modelo de elementos finitos (figura 50), donde se ha explotado la simetría geométrica y de condiciones de contorno para analizar únicamente la mitad de la viga.



Figura 49. Problema de EF correspondiente a media viga MBB. Fuente: Elaboración propia

Nótese que la malla parece muy basta. Se ha representado gráficamente con ese nivel de refinamiento por razones estéticas, pero realmente se está calculando con una malla con el cuádruple de elementos.

A continuación (figura 51) se presenta la geometría óptima encontrada por el CGFEM.



Figura 50. Solución OT de la viga MBB con la restricción de volumen activa. Fuente: Elaboración propia.

Esta solución coincide con la presentada en múltiples estudios ([35] ,[36]) sobre el proceso de OT, por lo que se considera válida.

En la siguiente imagen (figura 52) se representa la dirección del gradiente en los elementos de contorno para la solución anterior.

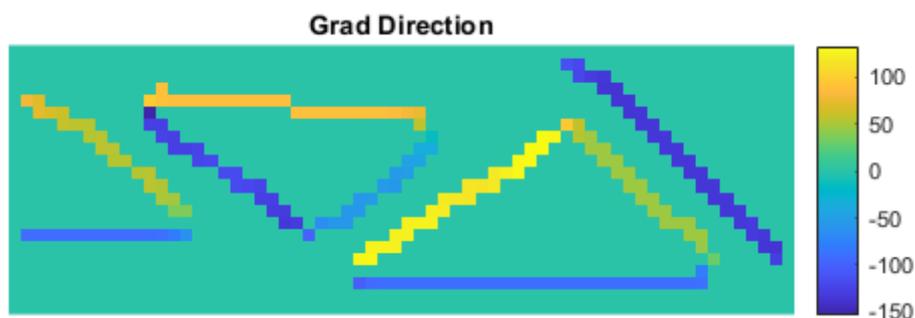


Figura 51. Dirección del gradiente según la distribución de densidades la figura 51. Fuente: Elaboración propia.

De la misma forma, se incluye también la representación de la función sigmoide (figura 53), que permitirá distinguir los elementos válidos de los inadmisibles, desde el punto de vista de la restricción del AV.

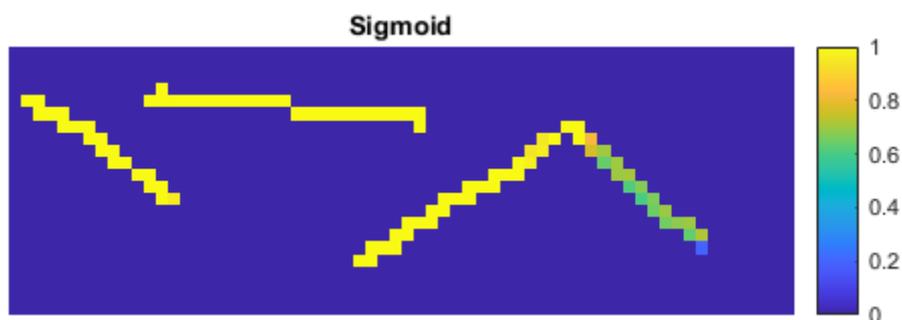


Figura 52. Valor de la función sigmoide asociada a cada elemento de la figura 51. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que todos los elementos pertenecientes a los contornos inferiores de las barras, que son los que interesan para este análisis, violan la función de restricción.

Llegados a este punto, y tras haber convergido únicamente con la restricción de volumen activa, se añade el efecto de la restricción del AV y se deja correr al programa, obteniendo finalmente la siguiente distribución de densidades (figura 54).



Figura 53. Solución OT de la viga MBB con la restricción de volumen y la restricción del AV activas.
Fuente: Elaboración propia.

Resulta evidente que, a pesar de haber convergido según el criterio de que la variación en las densidades de los elementos entre dos iteraciones consecutivas sea menor a un umbral determinado por el usuario (en este caso el 2%), no se ha obtenido ninguna geometría razonable ni mucho menos fabricable.

Para investigar las posibles causas, se representan a continuación la dirección del gradiente en los elementos de contorno para la solución anterior (figura 55), así como la función sigmoide para los mismos valores (figura 56).

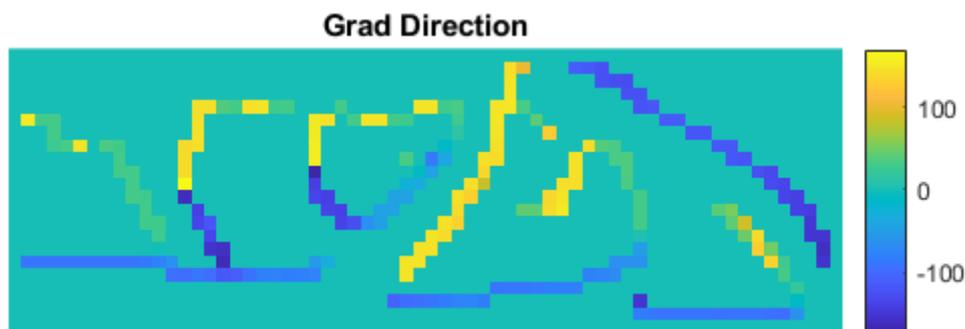


Figura 54. Dirección del gradiente según la distribución de densidades la figura 54. Fuente: Elaboración propia.

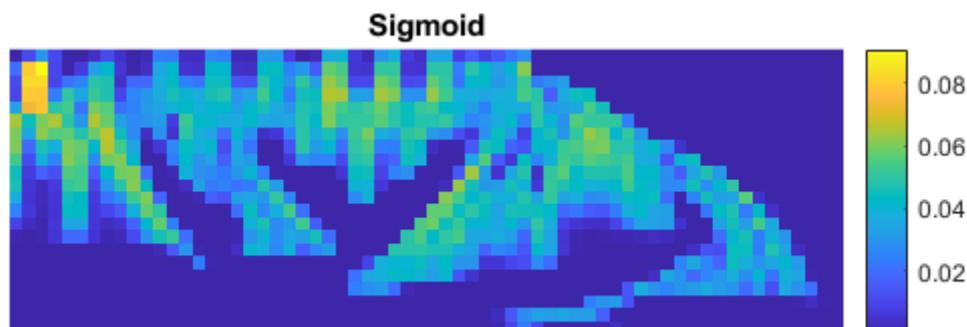


Figura 55. Valor de la función sigmoide asociada a cada elemento de la figura 54. Fuente: Elaboración propia.

Lo primero que se deduce es que los contornos no se han identificado correctamente, aunque es complicado identificar contornos en una imagen de escala de grises con tanto nivel de difuminación.

En la figura 55 se aprecia mejor lo que está sucediendo realmente: la magnitud del gradiente es elevada (en sentido relativo) en zonas muy amplias, por lo que se están teniendo en cuenta elementos que no forman parte de ninguna barra, ni en concreto de ningún contorno inferior. De esta forma, el programa es capaz de falsear los ángulos introduciendo nubes de material por la imagen.

Además, en la imagen 53 se aprecia muy bien como hay dos zonas claramente diferenciadas, donde el código tiene objetivos distintos:

En la región superior domina la restricción del ángulo de voladizo, y en consecuencia aparecen barras horizontales, lo cual corresponde con las soluciones encontradas en bibliografía para soportar una barra horizontal mediante FA. Por otro lado, en la región inferior domina la restricción de volumen y las densidades intentan imitar a la solución de la figura 51.

5. Conclusiones

En el presente Trabajo de Final de Máster se ha integrado toda la formación adquirida durante la carrera universitaria del autor, tanto en el Grado de Ingeniería Mecánica y el Máster en Ingeniería Mecánica como a través de su participación en diversos proyectos de investigación, para desarrollar un procedimiento que consiga eliminar ciertas barras en el diseño final de una estructura o componente mecánico, según su dirección, para favorecer la fabricabilidad de dicha pieza mediante técnicas de fabricación aditiva.

Colateralmente se ha desarrollado también un *script* para comparar los distintos métodos que se han encontrado en la literatura para el cálculo de derivadas de imagen (gradientes) enfocadas a aplicaciones de mecánica computacional, determinando que el más interesante para la aplicación que nos ocupa es el cálculo del gradiente a través de las densidades nodales y las funciones de forma.

Desafortunadamente, tras realizar diferentes pruebas sobre diversos aspectos del código que no necesariamente están recogidas en el TFM (pues aquí solo se trata la versión más actual del mismo y no todos los pasos que han sido necesarios hasta llegar a ella), los resultados muestran que, si bien la formulación planteada por el autor va en buen camino, es necesario continuar con la investigación para terminar de resolver algunas cuestiones. Esto resulta natural en tanto que el presente trabajo representa la etapa inicial de la tesis doctoral del autor, con lo cual queda garantizada la investigación futura.

Así pues, se considera que las principales limitaciones del presente trabajo residen:

- En la incomodidad a la hora de detectar los contornos, debida a la tendencia del programa de generar zonas de densidades intermedias (grises). Esto permite que el programa falsee los datos referidos a los AV, sorteando así la restricción.
- En la complejidad que comporta la integración de dos restricciones de gran relevancia para la OT dirigida a FA, pero de naturaleza contraria. Tanto es así que este continúa siendo un tema de investigación bastante popular a nivel mundial.

Tras todo el trabajo realizado en el presente proyecto y la experiencia adquirida en el campo de la Optimización Topológica para la Fabricación Aditiva sin soportes, se plantean los siguientes trabajos prospectivos:

- Implementar estrategias de filtrado (de densidades) y proyecciones para controlar la aparición de densidades intermedias.
- Una vez conseguido estabilizar el proceso de optimización multirestricción, determinar los valores óptimos para las variables heurísticas del MMA mediante un barrido paramétrico, de forma que se puedan ajustar a cada tipo de problema.
- Eventualmente, trasladar todo el código derivado de este TFM a FEAVox, el software desarrollado por el CIIM para entornos 3D que cuenta con procedimientos de h-adaptabilidad integrados, lo cual puede ser relevante en el desarrollo de la formulación planteada.

6. Bibliografía

- [1] M. P. Bendsøe, N. Kikuchi, “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”. *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, no. 2, pp. 197–224, Nov. 1988.
- [2] B. Ferrándiz-Catalá, F. D. Denia, J. Martínez, E. Nadal, J. J. Ródenas, “Topology and shape optimization of dissipative and hybrid mufflers”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 1, no. 62, pp. 269 – 284, Mar. 2020.
- [3] D. Muñoz-Pellicer, J. Albelda, J. J. Ródenas, E. Nadal, “Improvement in 3D topology optimization with h-adaptive refinement using the Cartesian grid Finite Element Method”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Feb. 2021.
- [4] O. Sigmund, K. Maute, “Topology optimization approaches – A comparative review”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 48, no. 6, pp. 1031–1055, Dec. 2013.
- [5] J. D. Deaton, R. V. Grandhi, “A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 49, no. 1, pp. 1–38, Jan. 2014.
- [6] M. Barral, “2 level continuous topology optimization in structural mechanics”, Trabajo Fin de Máster, UPV, 2018.
- [7] L. Gregurić, “History of 3D Printing: When Was 3D Printing Invented?”, *All3DP*, 2018. [En línea]. Disponible en: <https://all3dp.com/2/history-of-3d-printing-when-was-3d-printing-invented/> [Accedido: 20-ago-2021]
- [8] T. Alsop, “Most used 3D printing technologies worldwide 2021”, *Statista*, 2021. [En línea]. Disponible en: <https://www.statista.com/statistics/560304/worldwide-survey-3d-printing-top-technologies/> [Accedido: 20-ago-2021]
- [9] Q. Ge, A. H. Sakhaei, H. Lee, C. K. Dunn, N. X. Fang, M. L. Dunn, “Multimaterial 4D Printing with Tailorable Shape Memory Polymers”, *Sci Rep.*, vol. 6:31110, 2016 Aug. 2016.
- [10] J. Zhu, H. Zhou, C. Wang, L. Zhou, S. Yuan, W. Zhang, “A review of topology optimization for additive manufacturing: Status and challenges”. *Chin. J. Aeronaut.*, vol. 34, no. 1, pp. 91–110, Jan. 2021.
- [11] T. Zegard, G. H. Paulino, “Bridging topology optimization and additive manufacturing”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 53, pp. 175-192, Jan. 2016.
- [12] D. Thomas, “The development of design rules for selective laser melting”, Tesis doctoral, University of Wales, Cardiff, 2009.

- [13] B. Vayre, F. Vignat, F. Villeneuve, “Designing for Additive Manufacturing”. *Procedia CIRP*, vol. 3, pp. 632–637, 2012.
- [14] D. S. Thomas, S. W. Gilbert, “Costs and cost effectiveness of additive manufacturing: A Literature review and discussion”, *Special Publication (NIST SP)*, Dec. 2014.
- [15] X. Huang, C. Ye, S. Wu, K. Guo, J. Mo, “Sloping wall structure support generation for fused deposition modeling”, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol.42, no. 1074, Aug. 2009.
- [16] J. Vanek, J. A. G. Galicia, B. Benes, “Clever Support: Efficient Support Structure Generation for Digital Fabrication”, *Comput. Graphics Forum*, vol. 33, no. 5, pp. 117-125, Aug. 2014.
- [17] J. Dumas, J. Hergel, S. Lefebvre, “Bridging the gap: automated steady scaffoldings for 3D printing”, *ACM Trans. Graphics*, vol. 33, no. 98, pp. 1-10, July 2014.
- [18] G. Strano, L. Heo, R. M. Everson, K. E. Evans, “A new approach to the design and optimisation of support structures in additive manufacturing”, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol.66, pp. 1247-1254, June 2013.
- [19] S. L. Vatanabe, T. N. Lippi, C. R. de Lima, G. H. Paulino, E. C. N. Silva, “Topology optimization with manufacturing constraints: A unified projection-based approach”, *Adv. Eng. Software*, vol. 100, pp. 97-112, Oct. 2016.
- [20] E. Nadal, “Cartesian grid FEM (cgFEM): High performance h-adaptive FE analysis with efficient error control. Application to structural shape optimization”, Tesis doctoral, UPV, 2014.
- [21] J. M. Navarro-Jiménez, “Optimization of a finite element code implemented in MATLAB®. On the use of GPUs for High Performance Computing”, Trabajo Final de Máster, UPV, 2014.
- [22] M. P. Bendsøe y O. Sigmund. *Topology optimization-theory, methods and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [23] M. P. Bendsøe y O. Sigmund, “Material interpolation schemes in topology optimization”, *Arch. Appl. Mech.*, vol. 69, pp. 635–654, Nov. 1999.
- [24] K. Svanberg, “The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization”, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, vol. 24, pp. 359–373, Feb. 1987.
- [25] K. Svanberg, “A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations”, *SIAM J. of Optim.*, vol. 12, pp. 555-573, Jan. 2002.

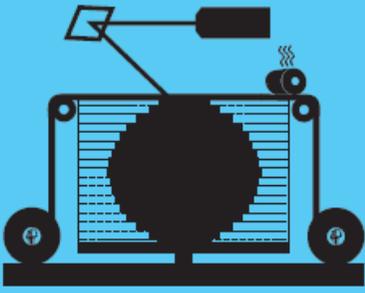
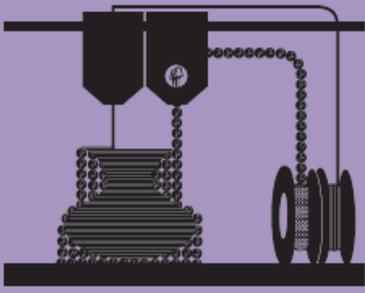
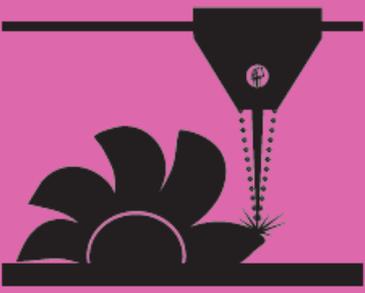
- [26] D. Brackett, I. Ashcroft, R. Hague, “Topology Optimization for Additive Manufacturing”, *Proceedings of the 22nd Solid Freeform Fabrication Symposium*, Austin, TX, USA, 2011, pp. 348–362.
- [27] M. Leary, L. Merli, F. Torti, M. Mazur, M. Brandt, “Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures”, *Mater. Des.*, vol. 63, pp. 678–690, Nov. 2014.
- [28] A. T. Gaynor y J. K. Guest, “Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 54, pp. 1157–1172, Nov. 2016.
- [29] A. Garaigordobil, R. Ansola, J. Santamaría, I. Fernández de Bustos, “A new overhang constraint for topology optimization of self-supporting structures in additive manufacturing”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, pp. 2003–2017, Nov. 2018.
- [30] J. Liu, A. T. Gaynor, S. Chen, Z. Kang, K. Suresh, A. Takezawa, L. Li, J. Kato, J. Tang, C. C. L. Wang, L. Cheng, X. Liang, A. C. To, “Current and future trends in topology optimization for additive manufacturing”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 57, pp. 2457–2483, June 2018.
- [31] H. Farid y E.P. Simoncelli, “Differentiation of Discrete Multidimensional Signals”, *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, no. 4, April 2004.
- [32] A. Hast, “Simple filter design for first and second order derivatives by a double filtering approach”, *Pattern Recognit. Lett.*, vol. 42, no. 1, pp. 65–71, June 2014.
- [33] S. M. Smith, J. M. Brady, “SUSAN – a new approach to low level image processing”, *Int. J. Comput. Vision.*, vol. 23, pp. 45–78, May 1997.
- [34] J. Radon, P. C. Parks (traductor), “On the determination of functions from their integral values along certain manifolds”, *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 5, pp. 170–176, Dec. 1986.
- [35] O. Sigmund, “A 99 line topology optimization code written in Matlab”, *Struct. Multidisc. Optim.*, vol. 21, pp. 120–127, Apr. 2001.
- [36] G. J. Cortés, “Desarrollo de un programa de optimización de forma en componentes mecánicos mediante optimización topológica adaptativa”, Trabajo Fin de Máster, UPV, 2010.

Anexo A. Principales enfoques de la optimización topológica

Enfoques de la OT	Descripción breve
Basado en las densidades	<p>Las propiedades de los elementos corresponden a las propiedades del material ponderadas por una “densidad”, comprendida entre 0 (hueco) y 1 (material sólido), elevada a un factor de penalización para “perjudicar” a las densidades intermedias.</p> <p>Esta familia de métodos requiere ciertas restricciones en su formulación para asegurar soluciones independientes de la malla. Las más habituales son el filtrado de las sensibilidades (de la función objetivo), el filtrado de las densidades (variables de diseño) y los denominados “esquemas de proyección”.</p> <p>Son los métodos más explorados y han demostrado funcionar satisfactoriamente con distintos algoritmos de optimización basado en el cálculo de gradientes.</p>
Derivadas topológicas (método de las burbujas)	<p>Se basa en la idea de predecir la influencia que tendría de la aparición de un agujero infinitesimal (burbuja) en un determinado punto del dominio de diseño. De manera sucesiva van introduciéndose agujeros en la geometría, en las localizaciones idóneas.</p>
<i>Level set</i>	<p>Los contornos son representados por una función escalar (<i>level set function</i>), de forma que a través de ella se mueven o combinan los contornos (o incluso se añaden agujeros, en las versiones más recientes) de acuerdo con los resultados de la optimización.</p> <p>Admite restricciones explícitas sobre la superficie, que está claramente definida en todo momento del proceso de OT, pero el resultado es altamente sensible a el diseño inicial.</p>
<i>Phase field</i>	<p>Desarrollado originalmente para modelar fenómenos de cambios de estado, plantea una función dependiente de la densidad $\lambda(\rho)$ con mínimos tal que $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(1) = 0$ (<i>double well potential function</i>). Este caso también se basa en la variación del contorno, pero a diferencia del <i>Level Set</i>, dicho contorno no está disponible en todo momento de la OT. Existen variaciones que admiten la generación de agujeros (<i>reaction-diffusion approaches</i>).</p>
BESO	<p>Consiste en la eliminación de los elementos con menor densidad de energía de deformación, con la posibilidad de reaparecer posteriormente. Puede ser entendido a efectos prácticos como una versión discretizada el SIMP.</p> <p>Es muy sensible a las variaciones paramétricas y puede conducir a soluciones oscilatorias y no convergentes. Resulta complejo, desde el punto de vista matemático, incluir restricciones múltiples.</p>
División celular	<p>Inspirado en los procesos de división celular (mitosis) de los organismos vivos, parte de dominio simple para ir dividiéndolo sucesivamente según un conjunto de ejes que lo intersecan.</p> <p>Su implementación en herramientas FEA resulta directa y simple, pero su motor basado en un algoritmo genérico lo convierte en una técnica computacionalmente más costosa que aquellas basadas en el cálculo de gradientes.</p>

Anexo B. Familias de tecnologías de fabricación aditiva

VAT PHOTOPOLYMERIZATION	POWDER BED FUSION (PBF)	BINDER JETTING	MATERIAL JETTING
<p>Alternative Names: SLA™ - Stereolithography Apparatus DLP™ - Digital Light Processing 3SP™ - Scan, Spin, and Selectively Photocure CLIP™ - Continuous Liquid Interface Production</p>	<p>Alternative Names: SLS™ - Selective Laser Sintering; DMLS™ - Direct Metal Laser Sintering; SLM™ - Selective Laser Melting; EBM™ - Electron Beam Melting; SHS™ - Selective Heat Sintering; MJF™ - Multi-Jet Fusion</p>	<p>Alternative Names: 3DP™ - 3D Printing ExOne Voxeljet</p>	<p>Alternative Names: PolyJet™ SCP™ - Smooth Curvatures Printing MJM - Multi-Jet Modeling Projet™</p>
<p>Description: A vat of liquid photopolymer resin is cured through selective exposure to light (via a laser or projector) which then initiates polymerization and converts the exposed areas to a solid part.</p>	<p>Description: Powdered materials is selectively consolidated by melting it together using a heat source such as a laser or electron beam. The powder surrounding the consolidated part acts assupport material for overhanging features.</p>	<p>Description: Liquid bonding agents are selectively applied onto thin layers of powdered material to build up parts layer by layer. The binders include organic and inorganic materials. Metal or ceramic powdered parts are typically fired in a furnace after they are printed.</p>	<p>Description: Droplets of material are deposited layer by layer to make parts. Common varieties include jetting a photocurable resin and curing it with UV light, as well as jetting thermally molten materials that then solidify in ambient temperatures.</p>
<p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • High level of accuracy and complexity • Smooth surface finish • Accommodates large build areas 	<p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • High level of complexity • Powder acts as support material • Wide range of materials 	<p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Allows for full color printing • High productivity • Uses a wide range of materials 	<p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • High level of accuracy • Allows for full color parts • Enables multiple materials in a single part
<p>Typical Materials UV-Curable Photopolymer Resins</p>	<p>Typical Materials Plastics, Metal and Ceramic Powders, and Sand</p>	<p>Typical Materials Powdered Plastic, Metal, Ceramics, Glass, and Sand.</p>	<p>Typical Materials Photopolymers, Polymers, Waxes</p>

			
SHEET LAMINATION	MATERIAL EXTRUSION	DIRECTED ENERGY DEPOSITION (DED)	HYBRID
<p>Alternative Names: LOM - Laminated Object Manufacture SDL - Selective Deposition Lamination UAM - Ultrasonic Additive Manufacturing</p> <hr/> <p>Description: Sheets of material are stacked and laminated together to form an object. The lamination method can be adhesives or chemical (paper/plastics), ultrasonic welding, or brazing (metals). Unneeded regions are cut out layer by layer and removed after the object is built.</p> <hr/> <p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • High volumetric build rates • Relatively low cost (non-metals) • Allows for combinations of metal foils, including embedding components. <hr/> <p>Typical Materials Paper, Plastic Sheets, and Metal Foils/Tapes</p>	<p>Alternative Names: FFF - Fused Filament Fabrication FDM™ - Fused Deposition Modeling</p> <hr/> <p>Description: Material is extruded through a nozzle or orifice in tracks or beads, which are then combined into multi-layer models. Common varieties include heated thermoplastic extrusion (similar to a hot glue gun) and syringe dispensing.</p> <hr/> <p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Inexpensive and economical • Allows for multiple colors • Can be used in an office environment • Parts have good structural properties <hr/> <p>Typical Materials Thermoplastic Filaments and Pellets (FFF); Liquids, and Slurries (Syringe Types)</p>	<p>Alternative Names: LMD - Laser Metal Deposition LENS™ - Laser Engineered Net Shaping DMD™ - Direct Metal Deposition (DM3D) LENS™ - Laser Engineered Net Shaping DMD™ - Direct Metal Deposition DM3D,</p> <hr/> <p>Description: Powder or wire is fed into a melt pool which has been generated on the surface of the part where it adheres to the underlying part or layers by using an energy source such as a laser or electron beam. This is essentially a form of automated build-up welding.</p> <hr/> <p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Not limited by direction or axis • Effective for repairs and adding features • Multiple materials in a single part • Highest single-point deposition rates <hr/> <p>Typical Materials Metal Wire and Powder, with Ceramics</p>	<p>Alternative Names: AMBIT™ - Created by Hybrid Manufacturing Technologies</p> <hr/> <p>Description: Laser metal deposition (a form of DED) is combined with CNC machining, which allows additive manufacturing and 'subtractive' machining to be performed in a single machine so that parts can utilize the strengths of both processes.</p> <hr/> <p>Strengths:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Smooth surface finish AND High Productivity • Geometrical and material freedoms of DED • Automated in-process support removal, finishing, and inspection <hr/> <p>Typical Materials Metal Powder and Wire, with Ceramics</p>

Anexo C. Restricciones de la OT para FA

	Métodos propuestos	Referencias	Valoración superficial
Restricciones de tamaño	Filtrado de densidades + Proyección	Wang et al., 2011	Computacionalmente robusto, pero “caro” debido a la necesidad de realizar 3 análisis de elementos finitos independientes.
	Restricciones geométricas basadas en el gradiente	Zhou et al., 2015 ; Yang et al., 2019	Implementación de restricciones de tamaño mínimo de una manera computacionalmente eficiente, sin análisis de elementos finitos adicionales.
	Basado en MMC	Wang et al., 2019 ; Zhang et al., 2016	El tamaño mínimo puede ser controlado a través del grosor de los elementos, pero se requieren restricciones geométricas adicionales en las intersecciones.
	Basado en el esqueleto estructural	Xia y Shi, 2015 ; Liu, 2019	Tanto el tamaño mínimo como el tamaño máximo se controlan de manera efectiva.
Restricciones de conectividad	Método de la temperatura virtual	Liu et al., 2015 ; Li et al., 2016	Fácilmente aplicable en OT, aunque los análisis térmicos añadidos incrementan el coste computacional.
	Esquema de restricción secundaria	Zhou y Zhang, 2019	Únicamente se requiere imponer los valores límite de las variables apropiados, sin restricciones adicionales.
	Generación selectiva de túneles	Xiong et al., 2020	Se obtienen distribuciones de material similares a las soluciones convencionales de la OT.
Estructuras autosoportantes	Basado en la proyección de densidades	Gaynor y Guest, 2016 ; Johnson y Gaynor, 2018	Solo se requieren operaciones de proyección, sin restricciones adicionales, pero la convergencia no se obtiene con facilidad.
	Método integral basado en gradientes de densidades	Qian, 2017 ; Wang y Qian, 2020	Las restricciones AV se formulan con un sentido geométrico explícito, pero no consigue evitarse la formación de contornos en forma de “V”.
	Método del esqueleto virtual	Mass and Amir, 2017	Computacionalmente “barato”, pero no consigue corregir completamente el AV.
	Combinación de restricciones geométricas y mecánicas	Allaire et al., 2017	Las restricciones geométricas y mecánicas se complementan para corregir el AV, pero esto supone un incremento del coste computacional.
	Basado en MMC/MMV	Guo et al., 2017	Características distintivas facilitan la imposición de restricciones al AV vía tratamiento geométrico explícito
	Basado en entidades poligonales	Zhang and Zhou, 2018	Añade el procedimiento de fusión de polígonos para eliminar los contornos en forma de “V”.

Anexo D. Código *Check_BarDirection*

```
clear
clc

%Flags
image = 2;
method = 1; % [1 - Convolution, 2 - Shape functions, 3 - SUSAN, 4 - Radon]
padding = 'replicate'; % [scalar, 'replicate'] Check "padarray_extrapol"
kernel = 4; % [1 - Prewitt, 2 - Sobel, 3 - Scharr, 4 - F&S, 5 - Hast]

switch image

    case 1
        n_row = 12;
        n_column = 16;
        I = zeros(n_row, n_column);
        center = ceil(n_row/2);
        I([1, center, n_row], :) = 1;
        I([2, center-1, center+1, n_row-1], :) = 0.5;

    case 2
        sz = 49;
        trans_ro = 0.6; %Transition densities
        center = ceil(sz/2);
        I = diag(trans_ro*ones(1, sz-1), -1) + diag(ones(1, sz)) +
diag(trans_ro*ones(1, sz-1), 1);
        I = I + rot90(I, 1);
        I(:, center) = 1;
        I(:, center-1) = max(I(:, center-1), trans_ro);
        I(:, center+1) = max(I(:, center+1), trans_ro);
        I(center, :) = 1;
        I(center-1, :) = max(I(center-1, :), trans_ro);
        I(center+1, :) = max(I(center+1, :), trans_ro);
        I(34, 5) = 1; %Isolated dot

    case 3
        sz = 49;
        center = ceil(sz/2);
        I = diag(0.5*ones(1, sz-1), -1) + diag(ones(1, sz)) +
diag(0.5*ones(1, sz-1), 1);
        I(end, :) = 1;
        I(end-1, :) = max(I(end-1, :), 0.5);
        I(:, end) = 1;
        I(:, end-1) = max(I(:, end-1), 0.5);
        for i = 1:sz
            bf = ceil(sz-(sz-i)/2); %Bifurcation
            I(i, bf) = 1;
            I(i, min(bf+1, sz)) = max(I(i, min(bf+1, sz)), 0.5);
            I(i, min(bf-1, sz)) = max(I(i, min(bf-1, sz)), 0.5);
            I(bf, i) = 1;
            I(min(bf+1, sz), i) = max(I(min(bf+1, sz), i), 0.5);
            I(min(bf-1, sz), i) = max(I(min(bf-1, sz), i), 0.5);
        end
end

end
```

```
%%Contour detection and supression of small isolated regions
%contour = edge(I,'Canny');
%regions = bwconncomp(cont); %Find connected components (regions)
%numPixels = cellfun(@numel,regions.PixelIdxList); %Pixels on each region
%idx = find(numPixels<5); %Regions to be deleted
%for i = idx
    cont(regions.PixelIdxList{i}) = 0; %Delete regions under 5 pixels
end

%Plotting grayscale image
figure
colormap gray
imagesc(-I);
axis equal;
axis tight;
axis off;

switch method

    case 1 %Convolution

        switch kernel

            case 1 %Prewitt 3x3
                [Gx, Gy] = imgradientxy(I,'prewitt');

            case 11 %Prewitt 5x5
                h = [ 1, 1, 1, 1, 1;...
                    1, 1, 1, 1, 1;...
                    0, 0, 0, 0, 0;...
                    -1,-1,-1,-1,-1;...
                    -1,-1,-1,-1,-1];
                Gx = imfilter(I,-h',padding);
                Gy = imfilter(I,-h ,padding);

            case 2 %Sobel 3x3
                [Gx, Gy] = imgradientxy(I,'sobel');

            case 12 %Sobel 5x5
                h = [ 5, 8, 10, 8, 5;...
                    4, 10, 20, 10, 4;...
                    0, 0, 0, 0, 0;...
                    -4,-10,-20,-10,-4;...
                    -5, -8,-10, -8,-5];
                Gx = imfilter(I,-h',padding);
                Gy = imfilter(I,-h ,padding);

            case 3 %Scharr 3x3
                h = [1;0;-1]*[3,10,3];
                Gx = imfilter(I,-h',padding);
                Gy = imfilter(I,-h ,padding);

            case 13 %Scharr 5x5
                h = [-1,-2,-3,-2,-1;...
                    -1,-2,-6,-2,-1;...
                    0, 0, 0, 0, 0;...
                    1, 2, 6, 2, 1;...
                    1, 2, 3, 2, 1];
```

```
Gx = imfilter(I,-h',padding);
Gy = imfilter(I,-h ,padding);

case 4 %Farid and Simoncelli tap-3 (Optimal 1st der. coeff.)
k = [0.223755 0.552490 0.223755]; %Interpolation kernel
d1 = [-0.453014 0.000000 0.453014]; %Diferentiation kernel
I = padarray(I,[1 1],padding);
Gx = conv2(-k,d1,I,'valid');
Gy = conv2(d1,-k,I,'valid');

case 14 %Farid and Simoncelli tap-5 (Optimal 1st der. coeff.)
k = [ 0.036420 0.248972 0.429217 0.248972 0.036420];
d1 = [-0.108415 -0.280353 0.000000 0.280353 0.108415];
I = padarray(I,[2 2],padding);
Gx = conv2(k, d1,I,'valid');
Gy = conv2(d1, k,I,'valid');

% THE PREFILTER AND EVEN-ORDER DERIVATIVE ARE SYMMETRIC AND
% THE ODD-ORDER DERIVATIVES ANTI-SYMMETRIC ABOUT THE ORIGIN

case 24 %Farid and Simoncelli tap-5 (Consistent with 2nd der.
interpolator)
k = [0.030320 0.249724 0.439911 0.249724 0.030320];
d1 = [0.104550 0.292315 0.000000 -0.292315 -0.104550];
d2 = [0.232905 0.002668 -0.471147 0.002668 0.232905];
I = padarray(I,[2 2],padding);
Gx = conv2(k, d1,I,'valid');
Gy = conv2(d1, k,I,'valid');

case 5 %Hast
M1 = 1/2*[1,-3,3,-1; -1,4,-5,2; 0,1,0,-1; 0,0,2,0];
%Catmull-Rom
M2 = 1/6*[1,-3,3,-1; 0,3,-6,3; 0,3,0,-3; 0,1,4,1];
%B-splines
M3 = [1,-3,3,-1; 0,3,-6,3; 0,0,3,-3; 0,0,0,1];
%Bézier

M = M1;
u = [0.125;0.25;0.5;1];
up = [0.75;1;1;0];
d = up'*M; %Diferentiation kernel
k = u'*M; %Interpolation kernel
I = padarray(I,[2 2],padding);
Gx = conv2(conv(k,k),conv(d,k),I,'valid');
Gy = conv2(conv(d,k),conv(k,k),I,'valid');

otherwise
disp('Error');
end

[G_mag,G_dir] = imgradient(Gx,Gy);

%Plotting gradient direction and magnitude
figure

subplot(1,2,1)
imagesc(G_dir);
appearance
subplot(1,2,2)
```

```
imagesc(G_mag);
appearance

case 2 %Shape functions (analitical derivative)

Nod2Elm = zeros(size(I,1)+1); %[Nodes x Elms to which they belong]
Nod2Elm = Nod2Elm(:);

[N,dNpsi,dNeta] = shape_f_2d([0,0],1,4,1); %The same for every Elm
%Remember: [SW,SE,NE,NW]

Gx = 2/1*dNpsi*full(Nod_W(Top));
Gy = 2/1*dNeta*full(Nod_W(Top));

G_dir = atan2(Gy,Gx)*180/pi; %Output direction in degrees by
default
G_mag = hypot(Gx,Gy);

%Plotting gradient direction and magnitude
figure

subplot(1,2,1)
imagesc(reshape(G_dir,[size(GS)]));
appearance

subplot(1,2,2)
imagesc(reshape(G_mag,[size(GS)]));
appearance

case 3 %SUSAN

%Inicialization
r_mask = 1; %Radius of mask [n° elements]
t = 0.5; %Brightness difference threshold

%Padding
pad = floor(r_mask);
I = padarray(I,[pad,pad],0); %Air
I(end-(pad-1):end,:) = 1; %Plate of the printing machine
[dy,dx] = size(I);

%Calculations
for nElem = 1:numel(I) %Nucleus (of mask) element {r0}

%Neighbourhood determination
e_col = ceil(nElem/dy); %Col of nelem
e_row = nElem-(e_col-1)*dy; %Row of nElem
mr_i = floor(max(1,e_row-r_mask)); %First row of mask
mr_f = ceil(min(dy,e_row+r_mask)); %Last row of mask
mc_i = floor(max(1,e_col-r_mask)); %First col of mask
mc_f = ceil(min(dx,e_col+r_mask)); %Last col of mask
[row,col] = meshgrid(mr_i:mr_f,mc_i:mc_f);
nb_s = [row(:),col(:)]; %Neighbours (subscripts)
nb = sub2ind([dy,dx],nb_s(:,1),nb_s(:,2)); %Neighbours {r}

%Edge detection
c = exp(-(I(nb)-I(nElem))/t).^6); %Camparison function
USAN = sum(c); %USAN's area {n}
```

```
g = 3/4*numel(c); %Geometric threshold. Max USAN = numel(c)
edges(nElem) = max(g-USAN,0); %Initial edge response {R}

%Gradient estimation
cg = c'*nb_s/USAN; %Center of gravity [cg_y,cg_x]
grad = cg-nb_s(find(nb==nElem),:); %Nucleus to cg

if USAN < length(mr_i:mr_f) %Square nb -> Dim. doesn't matter
    aux = 1;
elseif hypot(grad(1),grad(2)) < 1 %Distance less than 1 pixel
    aux = 1;
else
    aux = 0;
end

if aux == 0 %inter-pixel edge case
    G_dir(nElem) = atan2(grad(1),grad(2))*180/pi;
    G_mag(nElem) = hypot(grad(1),grad(2));

else %intra-pixel edge case
    loc_coord = nb_s-nb_s(find(nb==nElem),:); %[cc_y,cc_x]
    wd2 = c'*loc_coord.^2; %Weighted squared distance
    wxy = c'*(loc_coord(:,1).*loc_coord(:,2)); %Weighted dx*dy
    G_dir(nElem) = wd2(:,1)/wd2(:,2)*sign(wxy)*180/pi;
    G_mag(nElem) = 0; %Not specified in paper
end

end

%Plotting
figure
subplot(1,3,1);
colormap(flipud(gray));
imagesc(reshape(edges,dy,[]));
appearance
subplot(1,3,2);
imagesc(reshape(G_dir,dy,[]));
appearance
subplot(1,3,3);
imagesc(reshape(G_mag,dy,[]));
appearance

case 4 %Radon transform

%Calculations
theta = 0:180;
[R,xp] = radon(I,theta);

%Plotting
figure
imshow(R,[],'Xdata',theta,'Ydata',xp,'InitialMagnification','fit')
xlabel('\theta (degrees)')
ylabel('t')
colormap(gca,flipud(gray))
title('Radon Transform')
colorbar

otherwise
    disp('To be implemented');
```

end

```
function new_I = padarray_extrapol(I,padSize,method)
```

```
I = I';  
[x,y] = ndgrid(1:size(I,1),1:size(I,2));  
F = griddedInterpolant(x,y,I,method,method);  
ini = 1-padSize;  
fin = size(I)+padSize;  
[xq,yq] = ndgrid(ini:fin(1),ini:fin(2));  
new_I = F(xq,yq)';
```

end

```
function appearance
```

```
colorbar  
axis equal;  
axis tight;  
axis off;
```

end