SINGULARIDADES DE APLICACIONES

SOFÍA ALMEIDA BRUNO

DIRECTOR:
Juan José Nuño Ballesteros
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Valencia

TUTOR UPV:
Carles Bivià-Ausina
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación
Universidad Politécnica de Valencia

Máster universitario en Investigación Matemática
Universidad Politécnica de Valencia, Universidad de Valencia
Curso 2020-2021

RESUMEN

En el presente trabajo se estudian propiedades básicas de singularidades de aplicaciones diferenciables. Veremos una clasificación de singularidades, se realiza para la $\mathscr{R}$-equivalencia, en la cual se consideran cambios de coordenadas solo en el dominio. Nos aproximaremos a la clasificación mediante $\mathscr{A}$-equivalencia estudiando las definiciones básicas: desdoblamientos, estabilidad, espacio tangente a la órbita, $\mathscr{A}$-codimensión. También estudiaremos algunos teoremas esenciales, como el de la estabilidad infinitesimal de Mather.

Palabras clave: singularidades, estabilidad, desdoblamientos, $\mathscr{A}$-codimensión.

ÍNDICE GENERAL

1 INTRODUCCIÓN

Desarrollado en el contexto de la teoría de singularidades, donde se consideran aplicaciones suaves $f\colon X \to Y$ entre variedades diferenciables, en este trabajo analizaremos el comportamiento local de este tipo de aplicaciones. En el caso en el que la aplicación sea inmersión o sumersión, se conoce a qué aplicación es equivalente, por lo que cobra interés el caso en el que la aplicación no sea inmersión, ni sumersión, esto es, cuando sea *singular*. Uno de los objetivos principales de la teoría de singularidades es el de clasificar los gérmenes singulares.

Aunque los matemáticos conocían el concepto de singularidad, su estudio sistemático no llegó hasta mediados de los años 50 del siglo pasado con Hassler Whitney, que analizó inmersiones de variedades en el espacio euclídeo [10] [11]. Al mismo tiempo, René Thom señalaba la relación entre las aplicaciones singulares y otras situaciones finito-dimensionales, indicaba líneas generales en las que avanzar la teoría y abría algunas preguntas, como averiguar cuándo el conjunto de aplicaciones estables es denso en $C^\infty(X,Y)$, ya que dio un método para encontrar contraejemplos de que este conjunto no tiene por qué ser denso [3]. John Mather respondió a esta pregunta en una serie de artículos, que tituló *Estabilidad de aplicaciones* C^∞ ([5], [6] son los primeros artículos de esta serie), y es considerado por algunos autores como uno de los fundadores de la teoría de singularidades [2]. En 1967, Vladimir Arnold dio una clasificación de los gérmenes simples.

Entre las aplicaciones de esta teoría encontramos la teoría de catástrofes, dentro del campo de los sistemas dinámicos. Es en este ámbito donde R. Thom realiza una clasificación de los tipos de singularidades, o tipos de catástrofes. También observamos aplicaciones en otros campos de las matemáticas. Los movimientos de Kurt Reidemeister, tan prácticos en la teoría de nudos, se pueden ver desde esta perspectiva como singularidades de codimensión 1 de curvas planas parametrizadas.

En el presente trabajo encontramos una primera aproximación a la teoría de singularidades. Comenzando por la definición de germen de aplicación, que resultará sumamente útil puesto que queremos estudiar propiedades locales de las aplicaciones, pasando por la clasificación de gérmenes por $\mathscr{R}$-equivalencia y finalizando con la prueba de que los conceptos de estabilidad y estabilidad infinitesimal son equivalentes.

Se ha dividido la memoria en tres capítulos:

- En el Capítulo 2 se ve la definición de germen y los diferentes tipos de gérmenes, además, se enuncian algunos teoremas básicos como la

Regla de la cadena o el Teorema de la función inversa para variedades. Se presentan los diferentes tipos de equivalencia de gérmenes junto con algunas propiedades. El capítulo finaliza con una sección dedicada a la clasificación de gérmenes regulares, que está totalmente resuelta. El material en que se base este capítulo es [8].

- En el Capítulo 3 veremos la clasificación de gérmenes de funciones diferenciables por $\mathscr{R}$-equivalencia. Previamente, necesitaremos analizar algunos conceptos, como el conjunto de gérmenes de funciones, el ideal jacobiano de un germen, la codimensión de un germen y la determinación finita. En este capítulo, todas las definiciones irán acompañadas de los resultados necesarios para la clasificación de gérmenes según su codimensión. Veremos algunos ejemplos utilizando el software SINGULAR[1]. La principal referencia consultada en la elaboración de este capítulo fue [8], así como puntualmente [2].

- En el Capítulo 4 estudiamos dos de los principales conceptos para la clasificación por $\mathscr{A}$-equivalencia: estabilidad y estabilidad infinitesimal. Presentaremos las definiciones necesarias para definirlos, como el de desdoblamiento o el espacio tangente extendido. Veremos algunos ejemplos y finalizaremos viendo el Teorema de estabilidad infinitesimal de Mather. Para este capítulo nos basamos en [7].

2 FUNDAMENTOS

En este capítulo presentaremos los conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo, nos saltaremos las pruebas.

2.1 GÉRMENES Y TIPOS DE GÉRMENES

Un concepto fundamental será el de germen, tanto de aplicación como de subconjunto.

Definición 2.1.1 (Germen)**.** Sean X, Y espacios topológicos.

- Si $f\colon U \to Y$, $g\colon V \to Y$ son aplicaciones, donde U, V son entornos abiertos de x en X, decimos que f y g *definen el mismo germen* en x si existe un entorno $W \subseteq U \cap V$ tal que $f_{|W} = g_{|W}$. De esta forma obtenemos una relación de equivalencia. Un *germen de aplicación* en x es cada una de las clases de equivalencia bajo esta relación.
- Dos subconjuntos A, B en X *definen el mismo germen* en x si existe un entorno U de x en X tal que $A \cap U = B \cap U$. Esto nos da una relación de equivalencia, un *germen de subconjunto* de X en x es cada una de las clases de equivalencia dadas por esta relación.
- Denotaremos por $f\colon (X, x) \to Y$ al germen en x de una aplicación, o por $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ en caso de que $f(x) = y \in Y$. Cada elemento $f\colon U \to Y$ de la clase de equivalencia es un *representante*. El germen de un subconjunto se denota (A, x). Cada elemento A se llama representante del germen de subconjunto.

Nota 2.1.2. En lugar de considerar el germen de aplicación en un único punto x (*mono-germen*), podemos considerar el germen de aplicación en un subconjunto $S \subseteq X$ (*multi-germen*). La definición es análoga, basta tomar entornos de S en vez de x.

Muchas de las propiedades relacionadas con los gérmenes dependerán de que exista un representante que las verifique.

Definición 2.1.3 (Germen continuo)**.** Un germen $f\colon (X, x) \to Y$ es *continuo* si existe un representante continuo.

Definición 2.1.4 (Composición de gérmenes)**.** Dado un germen continuo $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ y otro germen $g\colon (Y, y) \to Z$. Tomando representantes $f\colon U \to Y$, $g\colon V \to Z$ tales que $f(U) \subseteq V$, la *composición* $g \circ f\colon (X, x) \to Z$ es el germen de $g \circ f\colon U \to Z$ en x.

Definición 2.1.5 (Germen homeomorfismo)**.** Un germen de aplicación, pongamos $\phi\colon (X,x) \to (Y,y)$, se llama *homeomorfismo* si existe un representante $\phi\colon U \to V$ que sea un homeomorfismo entre entornos abiertos U y V de x e y en X e Y, respectivamente. Equivalentemente, ϕ es *invertible* como germen continuo si existe otro germen continuo, $\phi^{-1}\colon (Y,y) \to (X,x)$, tal que $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{(Y,y)}$, $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_{(X,x)}$.

Definición 2.1.6 (Imagen inversa de un germen)**.** Sea $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ un germen continuo y (B,y) un germen de subconjunto de Y. Tomando representantes $f\colon U \to Y$, $B \subseteq Y$, definimos la *imagen inversa* por f de (B,y), $f^{-1}(B,y)$, como el germen de subconjunto $\big(f^{-1}(B),x\big)$.

Definición 2.1.7 (Germen abierto)**.** Un germen $f\colon (X,x) \to Y$ es *abierto sobre su imagen* en x si existe un representante $f\colon U \to Y$ que sea abierto sobre su imagen x, esto es, si para todo entorno W de x, $f(W)$ es un entorno de $f(x)$ en $f(X)$.

Definición 2.1.8 (Imagen de un germen)**.** Sea $f\colon (X,x) \to Y$ un germen abierto sobre su imagen, definimos su *imagen* $f(X,x)$ como el germen del conjunto $\big(f(U),f(x)\big)$ en Y, donde $f\colon U \to Y$ es cualquier representante abierto en su imagen de x.

Se puede probar que las definiciones anteriores no dependen de los representantes elegidos.

Definición 2.1.9 (Aplicación suave)**.** Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ al espacio afín real. Diremos que una aplicación $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ de un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *suave* si es diferenciable de clase C^∞.

Nota 2.1.10. También se puede considerar el espacio afín complejo, en ese caso una aplicación será suave si es holomorfa.

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua entre variedades X e Y. f será *suave* si para todo x en X existen cartas $\phi\colon U \to A$ en X y $\phi\colon V \to B$ en Y tales que $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ y $\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon A \to B$ es suave.

Definición 2.1.11 (Germen suave)**.** Un germen $f\colon (X,x) \to Y$, donde X, Y son variedades, es *suave* si existe un representante $f\colon U \to Y$ que sea suave.

Definición 2.1.12 (Difeomorfismo)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua entre variedades. f es un *difeomorfismo* si es biyectiva, suave y con inversa suave. Dos variedades X e Y se dirán *difeomorfas* cuando exista un difeomorfismo entre ellas.

Un germen de aplicación diferenciable $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ es un *germen de difeomorfismo* C^∞ si admite un representante que sea un difeomorfismo C^∞.

Definición 2.1.13 (Diferencial)**.** Dada una aplicación suave entre variedades, $f\colon X \to Y$, y $x \in X$; la *diferencial* de f en x es la aplicación

$$df_x\colon T_xX \to T_{f(x)}Y,$$

entre los correspondientes espacios tangentes, dada por

$$df_x(v) = [f \circ \alpha],$$

para todo vector tangente $v = [\alpha] \in T_xX$.

Teorema 2.1.14 (Regla de la cadena)**.** Si $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ son dos aplicaciones suaves, entonces

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Teorema 2.1.15 (Teorema de la función inversa para variedades)**.** Un germen suave $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ es un difeomorfismo si, y solo si, df_x es un isomorfismo.

Definición 2.1.16 (Germen de rango constante)**.** El *rango* de una aplicación suave en un punto es el rango de su diferencial en ese punto. Decimos que un germen $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ tiene *rango constante* r si existe un representante $f\colon U \to Y$ tal que f tiene rango r en todo punto $u \in U$.

Como consecuencia del Teorema de la función inversa se prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.1.17 (Teorema del rango constante)**.** Sea $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ un germen suave de rango constante r. Entonces, existen difeomorfismos $\phi\colon (X,x) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ y $\psi\colon (Y,y) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$ es el germen de la aplicación lineal

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0).$$

Definición 2.1.18 (Inmersión)**.** Una aplicación suave entre variedades $f\colon X \to Y$ es una *inmersión en un punto* $x \in X$ si df_x es un monomorfismo. Diremos que f es una *inmersión* si lo es en todo punto de X. Un germen $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ será una inmersión cuando df_x sea un monomorfismo.

Análogamente, definimos el concepto de sumersión.

Definición 2.1.19 (Sumersión)**.** Una aplicación suave entre variedades $f\colon X \to Y$ es una *sumersión en un punto* $x \in X$ si df_x es un epimorfismo. Diremos que f es una *sumersión* si lo es en todo punto de X. Un germen $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ será una sumersión cuando df_x sea un epimorfismo.

Como caso particular del Teorema del rango constante, tenemos el corolario a continuación.

Corolario 2.1.20 (Forma local de una inmersión/sumersión)**.** Sea $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ una inmersión o una sumersión. Entonces, existen difeomorfismos $\phi\colon (X,x) \to (\mathbb{R}^n,0)$ y $\psi\colon (Y,y) \to (\mathbb{R}^m,0)$ tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$ es el germen de la aplicación lineal

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \begin{cases} (u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0), & \text{si } f \text{ es una inmersión,} \\ (u_1, \dots, u_m), & \text{si } f \text{ es una sumersión.} \end{cases}$$

Definición 2.1.21 (Punto crítico, valor crítico, discriminante)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación suave. Decimos que $x \in X$ es un *punto crítico* si f no es una sumersión en x, denotamos por C al conjunto de todos los puntos críticos de f. Un *valor crítico* es la imagen de un punto crítico, el conjunto de todos los valores críticos, $\Delta = f(C)$, es el *discriminante de f*.

Definición 2.1.22 (Valor regular)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación suave. Un *valor regular* de f es un punto $y \in Y$ que no es un valor crítico (esto incluye a los puntos y que no estén en la imagen de f y a los puntos y tales que para todo $x \in f^{-1}(y)$ f es sumersión en x).

Definición 2.1.23 (Germen regular/singular)**.** Un germen $f\colon (X,x) \to Y$ es *regular* si tiene rango máximo, es decir, el rango de df_x es el mínimo entre $\dim X$ y $\dim Y$. En caso contrario, diremos que el germen es *singular*.

Teorema 2.1.24 (Teorema del valor regular)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación suave y sea y un valor regular de f. Si $Z := f^{-1}(y)$ es no vacío, entonces Z es una subvariedad de X con $\operatorname{codim} Z = \dim X - \dim Z = \dim Y$. Además, para todo $x \in Z$,

$$T_xZ = \ker df_x.$$

2.2 EQUIVALENCIA DE GÉRMENES

Nos encontramos en disposición de definir los diferentes tipos de equivalencia entre gérmenes. A partir de ahora, consideraremos $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ un germen de aplicación diferenciable C^∞.

Definición 2.2.1 (Equivalencia de gérmenes de conjuntos)**.** Dos gérmenes de conjuntos (S,x), (T,y), en variedades X, Y respectivamente, son *equivalentes* si existe un germen de difeomorfismo $\phi\colon (X,x) \to (Y,y)$ tal que

$$\big(\phi(S), y\big) = \big(T, y\big).$$

Definición 2.2.2 ($\mathscr{R}$-equivalencia)**.** Dos aplicaciones diferenciables $f\colon X \to Y$, $g\colon X' \to Y$ son *equivalentes a derecha* o *$\mathscr{R}$-equivalentes* si existe un difeomorfismo $\phi\colon X \to X'$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y, \\ X' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $g = f \circ \phi^{-1}$.

Dos gérmenes diferenciables, $f\colon (X,x) \to (Y,y)$, $g\colon (X',x') \to (Y,y')$, serán *equivalentes a derecha* o *$\mathscr{R}$-equivalentes* si existe un germen de difeomorfismo

$\phi\colon (X,x) \to (X,x')$ de forma que $g = f \circ \phi^{-1}$, lo que equivale a que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & (Y,y) \\
(X',x') \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Proposición 2.2.3. Todo germen $f\colon (X,x) \to Y$ es $\mathscr{R}$-equivalente a un germen $g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to Y$, donde $n = \dim X$.

Demostración. Por ser X una variedad, existirá una carta $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$, donde U es un entorno abierto de x. Componiendo esta carta con una traslación adecuada se puede obtener $\phi(x) = 0$, por tanto, $\phi\colon (X,0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ es un germen de difeomorfismo. El germen $g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to Y$, dado por $g = f \circ \phi^{-1}$, es $\mathscr{R}$-equivalente a f. $\square$

Análogamente se define el concepto de equivalencia a izquierda.

Definición 2.2.4 ($\mathscr{L}$-equivalencia)**.** Dos aplicaciones diferenciables $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y'$ son *equivalentes a izquierda* o *$\mathscr{L}$-equivalentes* si existe un difeomorfismo $\psi\colon Y \to Y'$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
& Y',
\end{tikzcd}$$

es decir, $g = \psi \circ f$.

Dos gérmenes diferenciables, $f\colon (X,x) \to (Y,y)$, $g\colon (X',x') \to (Y,y')$, serán *equivalentes a izquierda* o *$\mathscr{L}$-equivalentes* si existe un germen de difeomorfismo $\psi\colon (Y,y) \to (Y,y')$ de forma que $g = \psi \circ f$, lo que equivale a que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & (Y,y) \arrow[d, "\psi"] \\
& (Y',y')
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Proposición 2.2.5. Todo germen $f\colon (X,x) \to Y$ es $\mathscr{L}$-equivalente a un germen $g\colon (X,x) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, donde $m = \dim Y$.

Definición 2.2.6 ($\mathscr{A}$-equivalencia)**.** Dos aplicaciones diferenciables, $f\colon X \to Y$, $g\colon X' \to Y'$ son *equivalentes a derecha e izquierda* o *$\mathscr{A}$-equivalentes* si existen difeomorfismos $\phi\colon X \to X'$, $\psi\colon Y \to Y'$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y', \end{tikzcd}$$

es conmutativo, lo que equivale a que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Similarmente, si tenemos dos gérmenes de aplicaciones diferenciables, $f\colon (X,x) \to (Y,y)$, $g\colon (X',x') \to (Y',y')$ diremos que son *equivalentes a derecha e izquierda* o *$\mathscr{A}$-equivalentes* cuando existen gérmenes de difeomorfismos $\phi\colon (X,x) \to (X',x')$, $\psi\colon (Y,y) \to (Y',y')$ tales que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, esto es,

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & (Y,y) \arrow[d, "\psi"] \\ (X',x') \arrow[r, "g"'] & (Y',y') \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Proposición 2.2.7. Todo germen $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ es $\mathscr{A}$-equivalente a un germen $g\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$, donde $n = \dim X$, $m = \dim Y$.

La proposición anterior justifica que centremos nuestro estudio en los gérmenes de la forma $f\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$.

Nota 2.2.8. Dos gérmenes que sean $\mathscr{R}$-equivalentes serán también $\mathscr{A}$-equivalentes, basta tomar $\psi = \mathrm{id}$. Análogamente, dos gérmenes $\mathscr{L}$-equivalentes serán $\mathscr{A}$-equivalentes tomando $\phi = \mathrm{id}$.

Si llamamos $\mathscr{G} = \mathscr{A}, \mathscr{R}$ o $\mathscr{L}$, se tiene que dos gérmenes son $\mathscr{G}$-equivalentes si, y solo si, existen representantes de los mismos que sean $\mathscr{G}$-equivalentes como aplicaciones. La $\mathscr{G}$-equivalencia es una relación binaria de equivalencia.

Teorema 2.2.9. Sean $f\colon (X,x) \to (Y,y)$, $g\colon (X',x') \to (Y',y')$ dos gérmenes de aplicaciones diferenciables $\mathscr{A}$-equivalentes, entonces f y g tienen el mismo rango.

Demostración. Por ser f y g $\mathscr{A}$-equivalentes, existen gérmenes de difeomorfismo $\phi\colon (X,x) \to (X',x')$, $\psi\colon (Y,y) \to (Y',y')$ de forma que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Aplicando la Regla de la cadena, se tiene

$$dg_{x'} = d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{x'} = d\psi_y \circ df_x \circ d\phi^{-1}_{x'}.$$

El Teorema de la función inversa para variedades aplicado sobre ψ y ϕ^{-1} nos permite afirmar que $d\psi_y$ y $d\phi^{-1}_{x'}$ son isomorfismos, luego $dg_{x'}$ y df_x son equivalentes como aplicaciones lineales y, por tanto, f y g tienen el mismo rango. $\square$

Como consecuencia, sabremos que cuando dos gérmenes no tengan el mismo rango, no serán $\mathscr{A}$-equivalentes, y tampoco $\mathscr{R}$-equivalentes. En el caso en el que el rango de f sea máximo (f sea regular), bajo ciertas condiciones tenemos el recíproco.

2.3 CLASIFICACIÓN DE GÉRMENES REGULARES

Esta sección se dedica al estudio de los gérmenes regulares, su clasificación está totalmente resuelta.

Lema 2.3.1. Si $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$ es un germen de aplicación diferenciable de rango mayor o igual que r, entonces es $\mathscr{R}$-equivalente a un germen del tipo

$$\begin{aligned} g\colon (\mathbb{R}^n, 0) &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto (x_1 + f_1(0), \dots, x_r + f_r(0), g_{r+1}(x), \dots, g_m(x)), \end{aligned}$$

donde g_i son gérmenes $g_i\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ para $i = r+1, \dots, m$.

Demostración. Como el rango de f es mayor o igual que r, el rango de df_0 es mayor o igual que r, esto es, la matriz jacobiana de f en 0 tiene rango mayor o igual que r. La matriz jacobiana en 0 es la matriz que en la posición i, j contiene

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0).$$

Como su rango es mayor o igual que r en 0, existe un menor de orden r en 0 que es no nulo. Suponemos que el menor no nulo es el formado por las primeras r filas y columnas, tenemos

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}(0) \neq 0.$$

Definimos el germen $\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ como

$$\phi(x) = \left(f_1(x) - f_1(0), \dots, f_r(x) - f_r(0), x_{r+1}, \dots, x_n\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

La matriz jacobiana de ϕ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{bmatrix},$$

donde la matriz A es la que contiene en la posición (i, j)-ésima al elemento

$$\frac{\partial(f_i(x) - f_i(0))}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \neq 0$$

e I_{n-r} es la matriz identidad de orden $n-r$. Por ello, el determinante de la matriz jacobiana de ϕ en 0 es no nulo, $d\phi_0$ es un isomorfismo y, por el Teorema de la función inversa, ϕ es un difeomorfismo.

Definiendo $g = f \circ \phi^{-1} \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$, tenemos que f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes, faltaría probar que g tiene la forma indicada en el enunciado. Dado x un punto en un entorno de 0, como ϕ es biyectiva, existe un elemento z en el entorno de 0 tal que $\phi(z) = x$, esto es,

$$x_i = \phi_i(z) = f_i(z) - f_i(0), \quad \text{para } i = 1, \dots, r.$$

Luego, para $i = 1, \dots, r$ la componente i-ésima de g viene dada por

$$g_i(x) = f_i\left(\phi^{-1}(x)\right) = f_i\left(\phi^{-1}\left(\phi(z)\right)\right) = f_i(z) = x_i - f_i(0). \qquad \square$$

Notamos que el lema anterior es cierto incluso cuando f no es regular.

Corolario 2.3.2. Si $f \colon (X, x) \to (Y, y)$ es un germen de sumersión regular, entonces es $\mathscr{A}$-equivalente al germen de la proyección

$$\begin{aligned} \pi \colon (\mathbb{R}^n, 0) &\to (\mathbb{R}^m, 0) \\ x &\mapsto (x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

donde $n = \dim X$, $m = \dim Y$. En particular, todos los gérmenes de sumersión entre variedades con la misma dimensión son $\mathscr{A}$-equivalentes.

Demostración. Por la Proposición 2.2.7, f es $\mathscr{A}$-equivalente a un germen $g \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$. El Teorema 2.2.9 nos dice que f y g tienen el mismo rango que, por ser f sumersión regular,

$$n \geq m = \min\{n, m\} = \operatorname{rango} g$$

será mayor o igual que m. Aplicando el Lema 2.3.1, tenemos que g es equivalente a $\pi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, dada por

$$\pi(x) = (x_1 + g_1(0), \dots, x_m + g_m(0)) = (x_1, \dots, x_m).$$

Utilizando la transitividad de la $\mathscr{A}$-equivalencia queda probado el resultado. $\square$

También se obtiene un resultado similar para el caso de la $\mathscr{R}$-equivalencia.

Corolario 2.3.3. Si $f \colon (X, x_0) \to \mathbb{R}^m$ es un germen de sumersión, entonces es $\mathscr{R}$-equivalente al germen de la proyección

$$\begin{aligned} \pi \colon (\mathbb{R}^n, 0) &\to (\mathbb{R}^m, 0) \\ x &\mapsto (x_1, \dots, x_m) + f(x_0), \end{aligned}$$

donde $n = \dim X$. En particular, dos gérmenes de sumersión $f \colon (X, x_0) \to \mathbb{R}^m$, $g \colon (X', x_0') \to \mathbb{R}^m$ son $\mathscr{R}$-equivalentes si, y solo si,

$$\dim X = \dim X' \quad \text{y} \quad f(x_0) = g(x_0').$$

Corolario 2.3.4. Si $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ es un germen de inmersión regular, entonces es $\mathscr{A}$-equivalente al germen de la inclusión

$$\begin{aligned} i\colon (\mathbb{R}^n,0) &\to (\mathbb{R}^m,0) \\ x &\mapsto (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0), \end{aligned}$$

donde $n = \dim X$, $m = \dim Y$. En particular, todos los gérmenes de inmersión entre variedades de la misma dimensión son $\mathscr{A}$-equivalentes.

Demostración. El germen f es equivalente, por la Proposición 2.2.7, a un germen $g\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$. Como f es una inmersión, $n \neq m$ y, usando el Teorema 2.2.9, g tendrá el mismo rango de f. Por ser f regular,

$$\operatorname{rango} g = \min\{n,m\}.$$

Aplicamos el Lema 2.3.1 teniendo en cuenta que el rango de g es mayor o igual que n y obtenemos un germen $h\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$ $\mathscr{R}$-equivalente a g dado por

$$h(x) = \big(x_1 + g_1(0),\dots,x_n + g_n(0),h_{n+1}(x),\dots,h_m(x)\big)$$

para ciertos gérmenes $h_i\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R},0)$. Notamos que f y h son $\mathscr{A}$-equivalentes.
Definimos $\psi\colon (\mathbb{R}^m,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$ el germen dado por

$$\psi(y) = \big(y_1,\dots,y_n,y_{n+1} - h_{n+1}(y_1,\dots,y_n),\dots,y_m - h_m(y_1,\dots,y_n)\big)$$

para $y = (y_1,\dots,y_n,y_{n+1},\dots,y_m)$. La matriz jacobiana de ψ es

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -\mathrm{A} & \mathrm{I}_{m-n} \end{bmatrix},$$

donde A es la matriz con componentes $\partial h_i(y_1,\dots,y_n)/\partial y_j$ con $i = n+1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. El determinante de la matriz jacobiana de ψ es no nulo, por tanto, aplicando el Teorema de la función inversa, ψ es difeomorfismo. Como $\psi \circ h = i$, tenemos que h es $\mathscr{L}$-equivalente a i y, aplicando la transitividad de la $\mathscr{A}$-equivalencia y que tanto $\mathscr{R}$-equivalencia como $\mathscr{L}$-equivalencia implican $\mathscr{A}$-equivalencia, tenemos que f es $\mathscr{A}$-equivalente al germen de inclusión i dado en el enunciado. □

Los corolarios anteriores nos permiten clasificar los gérmenes regulares. Dado un germen regular entre variedades, una vez calculadas las dimensiones de la variedad de partida y la de llegada, sabremos que es $\mathscr{A}$-equivalente al germen de una proyección o inclusión (según si el germen es sumersión o inmersión) y, por tanto, también será $\mathscr{A}$-equivalente a cualquier otro germen entre variedades con las mismas dimensiones.

3

CLASIFICACIÓN DE GÉRMENES DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

En este capítulo estudiaremos la clasificación de gérmenes de funciones diferenciables $f\colon (X,x) \to \mathbb{R}$ por $\mathscr{R}$-equivalencia, donde X es una variedad diferenciable. La Proposición 2.2.3 nos permite centrarnos en gérmenes de la forma $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$.

3.1 CONJUNTO DE LOS GÉRMENES DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

Definición 3.1.1 (Conjunto de gérmenes de funciones)**.** Llamaremos $\mathscr{O}_n$ al *conjunto de gérmenes de funciones suaves* con forma

$$f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$$

y $\mathscr{R}_n$ al *conjunto de gérmenes de difeomorfismos*

$$\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0).$$

El conjunto $\mathscr{R}_n$ tiene estructura de grupo con la composición, donde el elemento neutro es la función identidad en $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, y los elementos son invertibles por ser difeomorfismos. Podemos definir una acción del grupo $\mathscr{R}_n$ sobre el conjunto $\mathscr{O}_n$ de la siguiente forma:

$$\phi \cdot f = f \circ \phi^{-1},$$

para $f \in \mathscr{O}_n$, $\phi \in \mathscr{R}_n$. Efectivamente, dado $f \in \mathscr{O}_n$,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \cdot f = f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f$$

y, dados $\phi, \psi \in \mathscr{R}_n$,

$$(\phi \circ \psi) \cdot f = f \circ (\phi \circ \psi)^{-1} = f \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1} = \phi \cdot (\psi \cdot f).$$

Dos elementos $f, g \in \mathscr{O}_n$ son equivalentes si existe $\phi \in \mathscr{R}_n$ tal que $g = f \circ \phi^{-1} = \phi \cdot f$, es decir, si están en la misma $\mathscr{R}_n$-órbita.

El conjunto $\mathscr{O}_n$ tiene estructura de anillo unitario conmutativo. Dados dos gérmenes $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$, $g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ para definir las operaciones suma y producto, se consideran representantes $f\colon U \to \mathbb{R}$, $g\colon V \to \mathbb{R}$, donde U, V son entornos abiertos de 0 en $\mathbb{R}$. Se define la suma, $f + g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$, como el germen de la función $f\colon U \cap V \to \mathbb{R}$ definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. De forma similar, el producto es el germen de la función $f \cdot g\colon U \cap V \to \mathbb{R}$

dada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. El germen unidad será el de la función constantemente 1. También podemos definir una operación externa a $\mathcal{O}_n$, el producto por elementos de $\mathbb{R}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{O}_n$, se tiene $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$. Por tanto, $\mathcal{O}_n$ es un $\mathbb{R}$-álgebra.

Consideramos el subconjunto de $\mathcal{O}_n$,

$$\mathfrak{m}_n = \left\{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\right\}.$$

Veamos que este subconjunto es un ideal. Dados $f, g \in \mathfrak{m}_n$,

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0,$$

por tanto, $f + g \in \mathfrak{m}_n$. Dados $f \in \mathfrak{m}_n$, $h \in \mathcal{O}_n$,

$$(h \cdot f)(0) = h(0) \cdot f(0) = 0,$$

luego, $h \cdot f \in \mathfrak{m}_n$.

Para cualquier $I \subseteq \mathcal{O}_n$ ideal propio ($I \neq \mathcal{O}_n$) veremos que $I \subseteq \mathfrak{m}_n$. Supongamos que $I \nsubseteq \mathfrak{m}_n$, entonces existirá un germen $f \in I$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_n$, es decir, $f(0) \neq 0$. Como f es continuo, se tiene que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, donde U es un entorno de 0. Existe una función,

$$\frac{1}{f} : U \to \mathbb{R} \quad \text{diferenciable de clase } C^\infty,$$

por tanto, existe el germen

$$\frac{1}{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$$

y se tiene

$$f \cdot \left(\frac{1}{f}\right) = 1,$$

es decir, f es invertible[1]. Como $f \in I$, esto nos lleva a que $I = \mathcal{O}_n$, una contradicción. Concluimos, por tanto, que $\mathfrak{m}_n$ es el *ideal maximal* de $\mathcal{O}_n$ y que $\mathcal{O}_n$ es un $\mathbb{R}$-álgebra *local*.

Proposición 3.1.2. El ideal $\mathfrak{m}_n$ está generado por $x_1, \ldots, x_n$ (las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^n$).

1 Hemos probado que si $f \in \mathcal{O}_n$ cumple $f(0) \neq 0$, entonces f es invertible.

Demostración. Tomamos $f \in \mathfrak{m}_n$, entonces $f(0) = 0$ y se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) =& f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[f(tx)\right] dt \\
\overset{\text{Regla de la cadena}}{=} & \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i dt = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt}_{g_i(x)} \\
=& \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).
\end{aligned}$$

□

Nota 3.1.3. La potencia k-ésima del ideal $\mathfrak{m}_n$, $\mathfrak{m}_n^k$, está generada por todos los monomios de grado k. Por ejemplo, cuando $n = 1$, $\mathfrak{m}_1^k = \langle x^k \rangle$. Cuando $n = 2$, $\mathfrak{m}_2^k = \langle x_1^k, x_1^{k-1}x_2, \dots, x_1 x_2^{k-1}, x_2^k \rangle$.

Proposición 3.1.4. El cociente $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n$ es un cuerpo.

Demostración. Veamos que todo elemento no nulo de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n$ es invertible. Tomamos $f + \mathfrak{m}_n$ un elemento no nulo, este verificará $f \notin \mathfrak{m}_n$, luego, $f(0) \neq 0$ y podemos afirmar que f es invertible en $\mathcal{O}_n$. Como f es invertible, existe $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $f \cdot g = 1$. Veamos que $g + \mathfrak{m}_n$ es el inverso de $f + \mathfrak{m}_n$,

$$(f + \mathfrak{m}_n)(g + \mathfrak{m}_n) = fg + \mathfrak{m}_n = 1 + \mathfrak{m}_n.$$

□

Proposición 3.1.5. El cociente $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Consideramos la aplicación $\phi\colon \mathcal{O}_n \to \mathbb{R}$, viendo $\mathbb{R}$ como un álgebra sobre sí mismo, dada por $\phi(f) = f(0)$. Veamos que ϕ es un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Dados $f, g \in \mathcal{O}_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene,

$$\phi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$$

y

$$\phi(fg) = (fg)(0) = f(0)g(0) = \phi(f)\phi(g).$$

Además, ϕ es un epimorfismo, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, la función constante $\lambda \in \mathcal{O}_n$ va a parar a λ a través de ϕ. El núcleo de ϕ, se corresponde con el ideal $\mathfrak{m}_n$, por el Teorema de isomorfía para homomorfismos de álgebras,

$$\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n \equiv \mathbb{R},$$

y el isomorfismo es el dado por $\overline{\phi}\colon \mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n \to \mathrm{Im}\phi = \mathbb{R}$, definido como $\overline{\phi}(f + \mathfrak{m}_n) = \phi(f) + \mathfrak{m}_n$. □

Corolario 3.1.6. Un ideal I de $\mathcal{O}_n$ tiene codimensión 1 si, y solo si, $I = \mathfrak{m}_n$.

Demostración. Como $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n$ es isomorfo a $\mathbb{R}$, codim $\mathfrak{m}_n = 1$. Recíprocamente, tomamos I un ideal con codim $I = 1$. Tenemos codim $I \neq 0$, $I \neq \mathcal{O}_n$, por tanto, el ideal I debe estar contenido en el ideal maximal. $I \subseteq \mathfrak{m}_n$ y codim $I =$ codim $\mathfrak{m}_n$, implican que $I = \mathfrak{m}_n$. □

Nota 3.1.7. Se puede calcular la codimensión de la potencia k-ésima del ideal maximal [8],

$$\operatorname{codim} \mathfrak{m}_n^k = \binom{n+k-1}{n}.$$

Consideramos, para cada $k \geq 0$, el conjunto de $\mathcal{O}_n$

$$\mathscr{L}_k = \left\{ f \in \mathcal{O}_n : \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) = 0 \text{ para todo multiíndice } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Notamos que en caso de que $k = 0$, $\mathscr{L}_0 = \mathfrak{m}_n$. Además, se verifica

$$\mathscr{L}_0 \supseteq \mathscr{L}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{L}_k \supseteq \ldots$$

Veamos que $\mathscr{L}_k$ es un ideal independientemente del valor de k. Dados $f, g \in \mathscr{L}_k$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f+g)}{\partial x^\alpha}(0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) + \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(0) = 0,$$

$f + g \in \mathscr{L}_k$. Tomando $h \in \mathcal{O}_n$, queremos ver que $h \cdot f \in \mathscr{L}_k$, para ello probaremos por inducción sobre el orden del multiíndice que dadas $f, h \in \mathcal{O}_n$, toda derivada parcial de orden ℓ de $h \cdot f$ la podemos expresar como combinación lineal de derivadas parciales de f de orden menor o igual que ℓ. Cuando $\ell = 1$,

$$\frac{\partial(h \cdot f)}{\partial x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i} f + h \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Suponemos que es cierto para $|\alpha| = \ell$, se tiene

$$\frac{\partial^\ell (h \cdot f)}{\partial x^\alpha} = \sum_{|\beta| \leq \ell} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} c_{\alpha\beta},$$

donde $c_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_n$. Veamos qué ocurre en el caso $|\alpha| = \ell + 1$,

$$\frac{\partial^{\ell+1}(h \cdot f)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^\ell (h \cdot f)}{\partial x^\alpha} = \sum_{|\beta| \leq \ell} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} c_{\alpha\beta} + \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} \frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \right).$$

Cuando $f \in \mathscr{L}_k$, se tendrá $h \cdot f \in \mathscr{L}_k$.

Como la intersección de ideales es también un ideal, podemos considerar adicionalmente el ideal

$$\mathscr{L}_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}_k,$$

el ideal de los gérmenes con derivadas parciales nulas en $x = 0$.

Veamos la relación del ideal $\mathscr{L}_k$ con el ideal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Proposición 3.1.8. Se verifica

$$\mathfrak{m}_n^k = \mathscr{L}_{k-1},$$

para todo $k \geq 1$.

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre k. Ya hemos comentado que $m_n^1 = \mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_{1-1}$, con lo que tendríamos el caso base. Supongamos que $\mathfrak{m}_n^k = \mathscr{L}_{k-1}$. Como las derivadas parciales de orden k de los monomios de orden $k+1$ en el cero son nulas, se tiene

$$\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathscr{L}_k.$$

Por otro lado, si $f \in \mathscr{L}_k$, se cumple $f \in \mathfrak{m}_n$, por la Proposición 3.1.2, $f = g_1 x_1 + \cdots + g_n x_n$, con

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt.$$

Así, para un multiíndice α cualquiera,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(tx) t^{|\alpha|} dt,$$

que, en $x = 0$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(0) \int_0^1 t^{|\alpha|} dt$$

es 0 cuando $|\alpha| \leq k-1$. Luego, $g_i \in \mathscr{L}_{k-1} = \mathfrak{m}_n^k$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, $f \in \mathfrak{m}_n \mathfrak{m}_n^k = \mathfrak{m}_n^{k+1}$. □

Presentamos a continuación un resultado algebraico que resultará práctico para demostrar varios resultados del trabajo.

Lema 3.1.9 (Lema de Nakayama)**.** Si A es una K-álgebra y M es un ideal de A tal que para todo $m \in M$, $1 + m$ es invertible. Entonces, para todo par de ideales I, J de A con I finitamente generado, se verifica

$$\text{si } I \subseteq J + MI, \text{ entonces } I \subseteq J.$$

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_t$ los generadores de I. Si $I \subseteq J + MI$, podemos expresar

$$x_i = y_i + \sum_{j=1}^{t} \lambda_{ij} x_j, \quad \text{con } y_i \in J, \lambda_{ij} \in M,$$

para todo $i = 1, \ldots, t$. Matricialmente, podemos escribir las expresiones anteriores como

$$X = Y + \Lambda X,$$

donde $X = [x_i]_i, Y = [y_i]_i, \Lambda = [\lambda_{ij}]_{ij}$. Operando, la ecuación anterior queda

$$(\mathrm{I}_t - \Lambda)X = Y,$$

con I_t la matriz identidad de orden t. Nos preguntamos si la matriz $\mathrm{I}_t - \Lambda$ es invertible en A, esto ocurrirá cuando su determinante lo sea. Para calcular el determinante tendremos en cuenta que el determinante de una matriz de la forma $x\mathrm{I}_t - \Lambda$ es un polinomio $x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \cdots + a_0$, donde los a_i son sumas y productos de los elementos λ_{ij}. Por tanto, el determinante de $\mathrm{I}_t - \Lambda$ tendrá la forma $1 + m$, con $m \in M$ sumas y productos de λ_{ij}. Por hipótesis, $1 + m$ es invertible para todo $m \in M$, así la matriz $\mathrm{I}_t - \Lambda$ es invertible y se cumple

$$X = (\mathrm{I}_t - \Lambda)^{-1}Y.$$

Como cada x_i se puede expresar como combinación lineal de los elementos $y_j, x_1, \dots, x_t \in J$ y, por tanto, $I \subseteq J$. □

Corolario 3.1.10. El álgebra $\mathcal{O}_n$ y el ideal $\mathfrak{m}_n$ verifican las hipótesis del Lema de Nakayama.

Demostración. Un elemento m pertenece a $\mathfrak{m}_n$ si, y solo si, m no es invertible. Dado $m \in \mathfrak{m}_n$ si $1 + m$ no fuera invertible, $1 + m \in \mathfrak{m}_n$, pero entonces $1 \in \mathfrak{m}_n$ con lo que $\mathfrak{m}_n = \mathcal{O}_n$, llegando a contradicción. □

Podemos definir también el ideal

$$\mathfrak{m}_n^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$$

que verifica

$$\mathfrak{m}_n^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}_k = \mathscr{L}_\infty,$$

es decir, es el ideal de las funciones cuyas derivadas parciales de cualquier orden en 0 son nulas. El Lema de Nakayama nos permite probar que este ideal no está finitamente generado. Supongamos que $\mathfrak{m}_n^\infty$ está finitamente generado, aplicamos el Lema de Nakayama tomando $I = \mathfrak{m}_n$ y $J = \{0\}$, una vez que veamos que $\mathfrak{m}_n^\infty \subseteq \mathfrak{m}_n\mathfrak{m}_n^\infty$, podremos concluir que $\mathfrak{m}_n^\infty = \{0\}$, llegando a contradicción.

Veamos dicha inclusión. Tomamos $f \in \mathfrak{m}_n^\infty$, en particular, $f \in \mathfrak{m}_n$ y, por la Proposición 3.1.2, $f = x_1g_1 + \cdots + x_ng_n$, con $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$ para $i = 1, \dots, n$. Como vimos en la demostración de la Proposición 3.1.8, para cualquier multiíndice α,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(0) \int_0^1 t^{|\alpha|} dt.$$

Esto nos dice que $g_i \in \mathfrak{m}_n^\infty$, por tanto, $f \in \mathfrak{m}_n\mathfrak{m}_n^\infty$.

Proposición 3.1.11. Un ideal I de $\mathcal{O}_n$ tiene codimensión finita si, y solo si, existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$.

Demostración. Si la codimensión de I es finita, consideramos la sucesión de ideales

$$I + \mathfrak{m}_n \supset I + \mathfrak{m}_n^2 \supset \cdots \supset I.$$

Como la codimensión de I es finita, la sucesión para en algún punto, luego, existe $k \geq 1$ tal que

$$I + \mathfrak{m}_n^k = I + \mathfrak{m}_n^{k+1},$$

por tanto, $\mathfrak{m}_n^k \subset I + \mathfrak{m}_n^{k+1}$. Aplicando el Lema de Nakayama, se obtiene $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$.

Si existe un $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$, se tiene $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_n/I \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k$. Como la codimensión de la potencia k-ésima de $\mathfrak{m}_n$ es finita, el ideal I también tendrá codimensión finita. □

Corolario 3.1.12. Sea I un ideal finitamente generado por $f_1, \dots, f_t$ en $\mathcal{O}_n$ y $V(I)$ el germen del conjunto de ceros,

$$V(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \cdots = f_t(x) = 0\}.$$

Si la codimensión de I es finita y no nula, entonces $V(I) = (\{0\}, 0)$.

Demostración. Como la codimensión de I es no nula, el ideal es distinto de $\mathcal{O}_n$ y, por tanto, f_j no es invertible, para $j = 1, \dots t$. De esta forma obtenemos que $f_j(0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, t$, esto es, $x = 0$ es una solución del sistema. La proposición anterior nos permitirá probar que esta es la única solución en un entorno suficientemente pequeño.

Como la codimensión es finita, existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$. Para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{t} g_{ij} f_j, \quad \text{con } g_{ij} \in \mathcal{O}_n.$$

Si x es una solución del sistema, anulará a todas las f_j y, por tanto, también anulará a las funciones x_i^k para $i = 1, \dots, n$. Sin embargo, el único valor que verifica esta última propiedad es $x = 0$. □

Ejemplo 3.1.13. El corolario anterior nos proporciona un criterio para saber cuándo un ideal tiene codimensión infinita. SI $I = \langle x^2, y^2 \rangle$ en $\mathcal{O}_3$, entonces

$$V(I) = \{(x, y) : x = y = 0\},$$

el germen del eje z. Por tanto, el ideal I ha de tener codimensión infinita.

La definición a continuación resultará de utilidad para calcular la codimensión de un ideal.

Definición 3.1.14 (Codimensión k-ésima de un ideal)**.** Sea I un ideal de $\mathcal{O}_n$ y $k \in \{0, 1, 2, \dots, \}$ la codimensión k-ésima del ideal I es

$$\operatorname{codim}_k I = \dim \frac{I + \mathfrak{m}_n^k}{I + \mathfrak{m}_n^{k+1}}.$$

Proposición 3.1.15. Dado I un ideal de $\mathcal{O}_n$, se cumplen:

1. para cada $k = 0, 1, 2, \dots$, $\operatorname{codim}_k I < \infty$,
2. si $\operatorname{codim}_{k_0} I = 0$ para algún k_0, entonces $\operatorname{codim}_k I = 0$ para todo $k \geq k_0$,
3. $\operatorname{codim} I < \infty$ si, y solo si, $\operatorname{codim}_k \ = 0$ para algún k,
4. si $\operatorname{codim} I < \infty$, entonces

$$\operatorname{codim} I = \operatorname{codim}_0 I + \operatorname{codim}_1 I + \operatorname{codim}_2 I + \dots$$

Demostración. 1. Se tiene $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n^{k+1} + I$, luego,

$$\operatorname{codim}\,(\mathfrak{m}_n^{k+1} + I) \leq \operatorname{codim} \mathfrak{m}_n^{k+1} < \infty.$$

Entonces, $(I + \mathfrak{m}_n^k)/(I + \mathfrak{m}_n^{k+1})$ es un subespacio de $\mathcal{O}_n/(I + \mathfrak{m}_n^{k+1})$ y, por tanto, tiene dimensión finita.

2. $\operatorname{codim}_k I = 0$ si, y solo si, $I + \mathfrak{m}_n^k = I + \mathfrak{m}_n^{k+1}$, pero, aplicando el Lema de Nakayama, vemos que esto ocurre si, y solo si, $\mathfrak{m}_n \subseteq I$.

3. Basta utilizar la cadena de equivalencias del apartado anterior y la Proposición 3.1.11.

4. Consideramos la cadena de ideales

$$\mathcal{O}_n = I + \mathfrak{m}_n^0 \supseteq I + \mathfrak{m}_n \supseteq I + \mathfrak{m}_n^2 \supseteq \cdots \supseteq I + \mathfrak{m}_n^{k_0} = I.$$

Para cada $k = 0, 1, \dots, k_0 - 1$ tomamos V_k un suplementario de $I + \mathfrak{m}_n^{k+1}$ en $I + \mathfrak{m}_n^k$, esto es, el conjunto que verifica

$$I + \mathfrak{m}_n^k = (I + \mathfrak{m}_n^{k+1}) \oplus V_k.$$

Entonces, un suplementario de I en en el espacio $\mathcal{O}_n$ vendrá dado por

$$V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{k_0-1}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} I &= \dim(V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{k_0-1}) \\ &= \dim V_0 + \dim V_1 + \cdots + \dim_{k_0-1} \\ &= \operatorname{codim}_0 I + \operatorname{codim}_1 I + \cdots + \operatorname{codim}_{k_0-1} I. \end{aligned}$$

□

Definición 3.1.16 (Homomorfismo inducido)**.** Dado un germen de aplicación $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, se define el *homomorfismo inducido por* f como

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathcal{O}_m &\to \mathcal{O}_n \\ h &\mapsto h \circ f. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.17. El homomorfismo inducido por un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es, efectivamente, un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Demostración. Dados $g, h \in \mathcal{O}_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} f^*(\lambda g + \mu h) &= (\lambda g + \mu h) \circ f = (\lambda g) \circ f + (\mu h) \circ f \\ &= \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = \lambda f^*(g) + \mu f^*(h) \end{aligned}$$

y

$$f^*(gh) = (gh) \circ f = (g \circ f)(h \circ f) = f^*(g) f^*(h).$$

□

Ejemplo 3.1.18. Cuando $n \geq m$, definimos el germen de la proyección como

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Calculamos el homomorfismo inducido por π, este será

$$\begin{aligned} \pi^*\colon \mathcal{O}_m &\to \mathcal{O}_n \\ f &\mapsto f \circ \pi, \end{aligned}$$

aplicado sobre $(x_1, \ldots, x_n)$, $\pi^*(f)(x_1, \ldots, x_n) = f \circ \pi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots x_m)$. De esta forma, podemos ver los gérmenes de $\mathcal{O}_m$ como gérmenes en $\mathcal{O}_n$ que solo dependen de las m primeras variables. De hecho, la imagen de π^*, el subconjunto de $\mathcal{O}_n$ que solo depende de las m primeras variables, es una subálgebra de $\mathcal{O}_n$, utilizando π^* podemos identificar $\mathcal{O}_m$ con esta subálgebra. Utilizando esta identificación, se tiene

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3 \subset \ldots$$

Además, π^* es un monomorfismo, cuando $\pi^*(f)$ sea 0 en $\mathcal{O}_n$, f será 0 en $\mathcal{O}_m$.

Ejemplo 3.1.19. En caso $m \geq n$, consideramos el germen de aplicación

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

El homomorfismo inducido por i es

$$\begin{aligned} i^*\colon \mathcal{O}_m &\to \mathcal{O}_n \\ f &\mapsto f \circ i, \end{aligned}$$

$i^*(f)(x_1, \ldots, x_n) = f \circ i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. i^* es un epimorfismo, ya que dado $f \in \mathcal{O}_n$, consideramos el mismo germen en $\mathcal{O}_m$, utilizando la identificación del ejemplo anterior, y se tiene que su imagen por i^* es f. Además, el núcleo de i^* está formado por los gérmenes $f \in \mathcal{O}_m$ que verifican $f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0$.

3.2 IDEAL JACOBIANO

Definición 3.2.1 (Ideal jacobiano)**.** Sea $f \in \mathcal{O}_n$, definimos el *ideal jacobiano de* f como el ideal generado por las derivadas parciales de f de primer orden,

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

Definición 3.2.2 (Codimensión de un germen)**.** Dado un germen $f \in \mathcal{O}_n$, la *codimensión de* f será la codimensión de su ideal jacobiano,

$$\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} J_f = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle}.$$

Ejemplo 3.2.3.

- Si consideramos el germen $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ en $\mathcal{O}_n$, entonces $J_f = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \mathfrak{m}_n$ y $\operatorname{codim} f = \dim(\mathcal{O}_n / \mathfrak{m}_n) = 1$.
- Tomamos $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^{k+1}$, entonces $J_f = \langle x_1, x_2^k \rangle$ y $\operatorname{codim} f = \dim(\mathcal{O}_2 / \langle x_1, x_2^k \rangle) = k$.
- Sea $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, entonces $J_f = \langle x_1 x_2, x_1^2 \rangle$ y se tiene $\operatorname{codim} f = \dim(\mathcal{O}_2 / \langle x_1 x_2, x_1^2 \rangle) = \infty$.

Proposición 3.2.4. Dado $f \in \mathcal{O}_n$. $\operatorname{codim} f = 0$ si, y solo si, f es regular.

Demostración. Si $\operatorname{codim} f = 0$, se tiene $J_f = \mathcal{O}_n$. Supongamos que f no es regular, entonces las derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$ serían elementos de $\mathfrak{m}_n$, luego $J_f \subseteq \mathfrak{m}_n$, llegando a contradicción con la hipótesis. Recíprocamente, si f es un germen regular, alguna derivada parcial $\partial f / \partial x_i(0)$ es no nula. Por ello, $\partial f / \partial x_i$ es invertible y $J_f = \mathcal{O}_n$. □

La siguiente proposición nos muestra una gran utilidad de la codimensión de un germen.

Proposición 3.2.5. Sean $f, g \in \mathcal{O}_n$ gérmenes $\mathcal{R}$-equivalentes, entonces las álgebras $\mathcal{O}_n / J_f$ y $\mathcal{O}_n / J_g$ son isomorfas. En particular, $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} g$.

Demostración. Como f, g son $\mathcal{R}$-equivalentes, existe $\phi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ germen de difeomorfismo tal que $g = f \circ \phi$. El homomorfismo inducido por ϕ nos da un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, $\phi^* \colon \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$, que es un isomorfismo con inversa $(\phi^{-1})^*$. A partir de este isomorfismo obtendremos una aplicación $\overline{\phi^*} \colon \mathcal{O}_n / J_f \to \mathcal{O}_n / J_g$ que lleva un elemento $h + J_f \in \mathcal{O}_n / J_f$ al elemento $\phi^*(h + J_f)$. Para ver que está bien definida tenemos que probar que $J_g = \phi^*(J_f)$. Usando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \phi \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \phi^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \in \phi^*(J_f),$$

esto es, $J_g \subseteq \phi^*(J_f)$. Utilizando la propiedad simétrica $f = g \circ \phi^{-1}$ se prueba que $\phi^*(J_f) \subseteq J_g$. Basta usar que ϕ^* es un isomorfismo de álgebras para obtener que $\overline{\phi^*}$ es un isomorfismo y, por tanto, $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} g$. □

La proposición anterior nos da un criterio para probar cuándo dos gérmenes no son $\mathscr{R}$-equivalentes: calcular sus codimensiones y ver que difieren.

Ejemplo 3.2.6. Tomamos el germen $f(x) = x^k$ en $\mathscr{O}_1$. Su ideal jacobiano es

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \langle x^{k-1} \rangle,$$

luego $\operatorname{codim} f = k - 1$. Utilizando la proposición anterior, los gérmenes de la forma x^ℓ con $k \neq \ell$ no serán $\mathscr{R}$-equivalentes a f.

Como consecuencia del Corolario 3.1.12 se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 3.2.7. Dado un germen f de codimensión finita y no nula, el germen del conjunto singular $\Sigma(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ tiene rango } 0 \text{ en } x\}$ coincide con el germen $(\{0\}, 0)$, esto es, el 0 es un punto singular aislado de cualquier representante de f.

A continuación, vamos a estudiar la relación entre la codimensión del ideal J_f y la del ideal $\mathfrak{m}_n J_f$, ya que será de utilidad a la hora de clasificar gérmenes.

Lema 3.2.8. Dado $f \in \mathscr{O}_n$, la codimensión del ideal J_f es finita si, y solo si, la codimensión del ideal $\mathfrak{m}_n J_f$ es finita.

Demostración. Supongamos que J_f tiene codimensión finita, entonces, por la Proposición 3.1.11, existirá un $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq J_f$. Si multiplicamos ambos ideales por $\mathfrak{m}_n$ obtenemos $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n J_f$, lo que nos da

$$\operatorname{codim} \mathfrak{m}_n J_f \leq \operatorname{codim} \mathfrak{m}_n^{k+1} < \infty.$$

Recíprocamente, si $\mathfrak{m}_n J_f$ tiene codimensión finita, como $\mathfrak{m}_n J_f \subseteq J_f$, la codimensión de J_f también será finita. □

Lema 3.2.9. Si $\xi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$ es un germen de aplicación que cumple $\xi(0) \neq 0$, entonces existe un germen de difeomorfismo $\phi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ verificando

$$\xi \circ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}.$$

Demostración. Consideramos $F \colon (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to \mathbb{R}^n$ el flujo del germen ξ, esto es, el único germen que para $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ verifica:

- $F(x, 0) = x$,

- $\partial F / \partial t = \xi \circ F$.

Como $\xi(0) \neq 0$, alguna de sus componentes será no nula, supongamos que es la primera, es decir $\xi_1(0) \neq 0$.

Definimos

$$\begin{aligned} \phi \colon (\mathbb{R}^n, 0) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(0, x_2, \dots, x_n, x_1). \end{aligned}$$

Veamos que ϕ es el germen que verifica las propiedades del enunciado. Utilizando la definición de ϕ y la primera propiedad del flujo F, se tiene $\phi(0) = F(0,0) = 0$.

Se cumple

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, x_2, \dots, x_n, x_1) = \xi \circ F(0, x_2, \dots, x_n, x_1) = \xi \circ \phi(x).$$

Para ver que ϕ es difeomorfismo tenemos, por un lado, que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0) = \xi(0) \neq 0.$$

Por otro lado, para $i = 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0,0),$$

tomando derivadas parciales respecto de x_i en la expresión $F(x,0) = x$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,0) = \frac{\partial x}{\partial x_i} = e_i,$$

donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, el jacobiando de ϕ en el punto 0 es distinto de 0 y podemos afirmar que ϕ es difeomorfismo. □

Proposición 3.2.10. Si $f \in \mathcal{O}_n$ es un germen de codimensión finita y no nula, entonces

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{m}_n J_f) = \operatorname{codim} f + n.$$

Demostración. Comenzamos viendo que J_f se puede expresar como la siguiente suma

$$J_f = \mathfrak{m}_n J_f + \mathbb{R}\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}.$$

Dado $g \in J_f$, por definición, se expresa como

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \text{donde } g_i \in \mathcal{O}_n.$$

Cada germen de $\mathcal{O}_n$, en particular los g_i, se puede descomponer de la forma $g_i = (g_i - g_i(0)) + g_i(0)$. Dado que $g_i - g_i(0) \in \mathfrak{m}_n$, hemos descompuesto g como buscábamos. La inclusión contraria es trivial.

Veamos ahora que si $\xi_1, \ldots \xi_n$ son gérmenes tales que $\sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, entonces $\xi_i(0) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que existe un i tal que $\xi_i(0) \neq 0$, entonces al definir el germen $\xi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$ como $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ se cumple $\xi(0) \neq 0$. Utilizando el lema anterior, existe un germen de difeomorfismo $\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $\partial\phi/\partial x_1 = \xi \circ \phi$. Consideramos el germen $g = f \circ \phi$, por definición, g es $\mathscr{R}$-equivalente a f, por la Proposición 3.2.5, $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} g$, luego g tendrá codimensión finita y no nula. Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \phi \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \phi \right) \xi_i \circ \phi = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_i \right) \circ \phi = 0,$$

esto es, g no depende de la variable x_1. Cualquier punto del eje x_1, tan cercano a 0 como queramos, será un punto singular, lo que nos lleva a contradicción, ya que la Proposición 3.2.7 nos dice que el origen de $\mathbb{R}^n$ es un punto singular aislado de g.

Terminaremos la prueba viendo que la expresión de J_f dada al comienzo de la misma es una suma directa y que las derivadas parciales de f respecto de x_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Supongamos que existe $g \in \mathfrak{m}_n J_f \cap \mathbb{R}\{\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n\}$, entonces

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

donde $g_i \in \mathfrak{m}_n, \lambda_i \in \mathbb{R}$. Reescribiendo esta expresión obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} (g_i - \lambda_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

por lo probado anteriormente, $g_i(0) - \lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $g_i \in \mathfrak{m}_n$, $g_i(0) = 0$, luego $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, $g = 0$, la suma es directa. Utilizando un razonamiento similar se obtiene que las parciales $\partial f/\partial x_i$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. De esta forma obtenemos que

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{J_f}{\mathfrak{m}_n J_f} = n$$

y, como $\mathfrak{m}_n J_f \subseteq J_f \subseteq \mathcal{O}_n$,

$$\operatorname{codim} \mathfrak{m}_n J_f = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}_n J_f} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_f} + \dim_{\mathbb{R}} \frac{J_f}{\mathfrak{m}_n J_f} = \operatorname{codim} f + n. \quad \square$$

3.3 DETERMINACIÓN FINITA

La determinación finita será otra de las herramientas que nos ayudará a clasificar gérmenes, para poder definirla necesitamos conocer el concepto de *k-jet* de un germen.

Definición 3.3.1 (*k-jet* de un germen)**.** Dado un germen $f \in \mathcal{O}_n$, $k \in \mathbb{N}$, se define el *k-jet de f*, denotado por $j^k f(0)$, como el desarrollo de Taylor de orden k de un representante de f en 0,

$$j^k f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha.$$

Definición 3.3.2 (*jet* infinito de un germen)**.** Dado un germen $f \in \mathcal{O}_n$, se define el *jet infinito de f*, denotado $j^\infty f(0)$, como el desarrollo completo de Taylor de un representante de f en el punto 0,

$$j^\infty f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha.$$

Notamos que esta serie solo será convergente cuando f sea el germen de una función analítica en un entorno del punto 0.

Veamos algunas propiedades de los *k-jets*.

Proposición 3.3.3. Dados $f, g \in \mathcal{O}_n$, se cumple

1. $j^k(f+g)(0) = j^k f(0) + j^k g(0)$, para todo $k = 0, 1, \dots, \infty$,
2. $j^k(\lambda f)(0) = \lambda j^k f(0)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $k = 0, 1, \dots, \infty$,
3. si f es el germen de un polinomio de grado menor o igual que k, entonces $j^k f(0) = f$; en caso de que el grado de f sea $m > k$, $f = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha x^\alpha$, se tiene
$$j^k f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} a_\alpha x^\alpha,$$
4. si $f_k = j^k f(0)$, $g_k = j^k g(0)$, entonces $j^k(fg)(0) = j^k(f_k g_k)(0)$, para todo $k = 0, 1, \dots,$
5. $j^\infty(fg)(0) = j^\infty f(0) j^\infty g(0)$.

Demostración. 1. Basta aplicar la linealidad de la derivada,

$$\begin{aligned} j^k(f+g)(0) &= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}(f+g)}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) + \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(0) \right) x^\alpha \\ &= j^k f(0) + j^k g(0). \end{aligned}$$

2. También se prueba utilizando las propiedades de las derivadas parciales,

$$j^k(\lambda f)(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}(\lambda f)}{\partial x^\alpha}(0)x^\alpha = \lambda\left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0)x^\alpha\right) = \lambda j^k f(0)$$

3. Como todo polinomio es combinación lineal de monomios, las dos propiedades anteriores nos permiten realizar la prueba en el caso en que f sea un monomio, esto es, $f = x^\beta$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. La derivada parcial respecto de un multiíndice cualquiera $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0) = \begin{cases} \alpha!, & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Por tanto, cuando $|\beta| \leq k$,

$$j^k f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(0)x^\alpha = \frac{1}{\alpha!}\alpha! x^\beta = x^\beta = f.$$

Cuando $f = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha x^\alpha$, con $m > k$,

$$j^k f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} a_\alpha x^\alpha + 0.$$

4. Definimos $F = f - f_k, G = g - g_k$ gérmenes en $\mathcal{O}_n$, utilizando las propiedades de los *k-jets* ya probadas, se cumple

$$j^k F(0) = j^k f(0) - j^k f(0) = 0 = j^k g(0) - j^k g(0) = j^k G(0).$$

Tenemos, por tanto, que las derivadas parciales de F y G de orden menor o igual que k son nulas en el punto 0, esto es, $F, G \in \mathscr{L}_k$. Calculamos

$$fg = (j^k f(0) + F)(j^k g(0) + G) = f_k g_k + f_k G + g_k F + FG.$$

Como $F, G \in \mathscr{L}_k$, se tiene que $f_k G + g_k F + FG \in \mathscr{L}_k$, luego,

$$j^k(fg)(0) = j^k(f_k g_k)(0) + j^k(f_k G + g_k F + FG)(0) = j^k(f_k g_k)(0) + 0.$$

5. Sean

$$j^\infty f(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha x^\alpha, \quad j^\infty g(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha x^\alpha$$

y

$$j^\infty f(0) j^\infty g(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha x^\alpha, \quad \text{donde } c_\alpha = \sum_{\alpha=\beta+\gamma} a_\beta b_\gamma.$$

Queremos ver que, para cualquier valor $k \geq 0$,

$$j^k(fg)(0) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha x^\alpha.$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} j^k(fg)(0) &= j^k\left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} a_\alpha x^\alpha \sum_{|\alpha|=0}^{k} b_\alpha x^\alpha\right)(0) = j^k\left(\sum_{|\alpha|=0}^{2k} c_\alpha x^\alpha\right)(0) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha x^\alpha. \end{aligned}$$ □

Ya nos encontramos en disposición de definir cuándo un germen está k-determinado, notamos que esta propiedad puede enunciarse para diferentes tipos de equivalencia, en este caso nos quedamos con la $\mathscr{R}$-equivalencia.

Definición 3.3.4 (Germen k-determinado)**.** Sea $k \in \mathbb{N}$. Decimos que un germen $f \in \mathscr{O}_n$ está *k-determinado* cuando para todo $g \in \mathscr{O}_n$ cumpliendo

$$j^kf(0) = f^kg(0)$$

se tiene que f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes. Diremos que f está *finitamente determinado* cuando está k-determinado para algún $k \geq 0$.

Nota 3.3.5. Intuitivamente, un germen estará k-determinado cuando su $\mathscr{R}$-clase no cambie al añadir términos de grado mayor que k.

Nota 3.3.6. Si $f \in \mathscr{O}_n$ está k-determinado para cierto $k \geq 0$, también estará ℓ-determinado para todo $\ell \geq k$.

Definición 3.3.7 (Grado de determinación de un germen)**.** Llamamos *grado de determinación* de un germen $f \in \mathscr{O}_n$ al menor k tal que f está k-determinado.

Nota 3.3.8. Si un germen f está k-determinado, entonces es $\mathscr{R}$-equivalente a su *k-jet*. Así, la determinación finita nos permite simplificar el problema de clasificación por $\mathscr{R}$-equivalencia al caso en el que los gérmenes sean polinomios.

Proposición 3.3.9. No existen los gérmenes 0-determinados.

Demostración. Supongamos que existe un germen $f \in \mathscr{O}_n$ 0-determinado, esto es, para todo $g \in \mathscr{O}_n$ cumpliendo $f(0) = g(0)$ se tiene que f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes. Entonces, $g(x) = f(0) + x_1, \tilde{g}(x) = f(0)$ serían $\mathscr{R}$-equivalentes a f y, por tanto, $\mathscr{R}$-equivalentes entre sí. Hemos llegado a una contradicción, ya que g no es constante y $\tilde{g}$ sí lo es. □

Proposición 3.3.10. Sea $f \in \mathscr{O}_n$. f es 1-determinado si, y solo si, f es regular.

Demostración. Si f no es regular, entonces $j^1f(0) = f(0)$. Definimos $g(x) = f(0) + x^2, \tilde{g}(x) = f(0)$ que no son $\mathscr{R}$-equivalentes entre sí, luego no pueden ser las dos $\mathscr{R}$-equivalentes a f. Sin embargo, $j^1g(0) = j^1\tilde{g}(0) = j^1f(0)$, por tanto, f no está 1-determinado.

Recíprocamente, si f es regular, entonces los gérmenes $g \in \mathcal{O}_n$ que verifiquen $j^1f(0) = j^1g(0)$ también lo serán y, además, $g(0) = f(0)$. Esto implica que son equivalentes, ya que son equivalentes al germen $h(x) = f(0) + x_1$. □

Proposición 3.3.11. No hay gérmenes no nulos finitamente determinados en $\mathfrak{m}_n^\infty$.

Demostración. Supongamos que existe $f \neq 0$ finitamente determinado en $\mathfrak{m}_n^\infty$, como $j^kf(0) = 0$, f sería $\mathscr{R}$-equivalente a 0, pero esto solo ocurre cuando $f = 0$. □

Proposición 3.3.12. Si f, g son gérmenes $\mathscr{R}$-equivalentes y f está k-determinado, entonces g está k-determinado. El grado de determinación de un germen es un $\mathscr{R}$-invariante.

Demostración. Como f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes, existe ϕ un germen de difeomorfismo tal que $g = f \circ \phi$. Tomamos $\tilde{g} \in \mathcal{O}_n$ tal que $j^k\tilde{g}(0) = j^kg(0)$, nos preguntamos si g y $\tilde{g}$ son $\mathscr{R}$-equivalentes. Definimos $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \phi^{-1}$, un germen $\mathscr{R}$-equivalente a $\tilde{g}$. Si probamos que $j^k\tilde{f}(0) = j^kf(0)$, como f está k-determinado f y $\tilde{f}$ serán $\mathscr{R}$-equivalentes y, por tanto, g y $\tilde{g}$ también lo serán.

Las condiciones $j^k\tilde{g}(0) = j^kg(0)$ y $j^k\tilde{f}(0) = j^kf(0)$ equivalen a que

$$g - \tilde{g} \in \mathfrak{m}_n^{k+1}, \quad f - \tilde{f} \in \mathfrak{m}_n^{k+1}.$$

Consideramos el isomorfismo inducido por ϕ, $\phi^* : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$. Se cumple

$$\phi^*(f) = f \circ \phi = g, \quad \phi^*(\tilde{f}) = \tilde{f} \circ \phi = \tilde{g}.$$

Como $\phi^*(f - \tilde{f}) = g - \tilde{g} \in \mathfrak{m}_n^{k+1}$, se tiene $f - \tilde{f} \in (\phi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_n^{k+1})$. Basta probar que $(\phi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_n^{k+1}) = \mathfrak{m}_n^{k+1}$ o, equivalentemente, que $\phi^*(\mathfrak{m}_n^{k+1}) = \mathfrak{m}_n^{k+1}$.

Como ϕ^* es biyectiva y $\mathfrak{m}_n \neq \mathcal{O}_n$, se tiene $\phi^*(\mathfrak{m}_n) \neq \mathcal{O}_n$ y, por ser $\mathfrak{m}_n$ el ideal maximal, $\phi^*(\mathfrak{m}_n) \subseteq \mathfrak{m}_n$. Aplicando el mismo razonamiento a $(\phi^*)^{-1}$ obtenemos la inclusión contraria, es decir, tenemos que

$$\phi^*(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_n.$$

Esto nos ha servido como caso base para razonar por inducción sobre k. Supongamos que $\phi^*(\mathfrak{m}_n^k) = \mathfrak{m}_n^k$, entonces

$$\phi^*(\mathfrak{m}_n^{k+1}) = \phi^*(\mathfrak{m}_n^k\mathfrak{m}_n) = \phi^*(\mathfrak{m}_n^k)\phi^*(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_n^k\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_n^{k+1},$$

como queríamos probar. □

Definición 3.3.13 (Gérmenes $\mathscr{R}^k$-equivalentes)**.** Dos gérmenes $f, g \in \mathscr{O}_n$ son *$\mathscr{R}^k$-equivalentes* si existe un germen de difeomorfismo $\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que

$$j^k g(0) = j^k(f \circ \phi)(0).$$

La condición anterior depende únicamente de los *k-jets* de f, g y ϕ, luego el problema de la $\mathscr{R}^k$-equivalencia solo depende de un número finito de incógnitas (los coeficientes de $j^k\phi(0)$).

Si f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes, serán $\mathscr{R}^k$-equivalentes para cualquier $k \geq 0$, a continuación vemos una condición que nos da el recíproco.

Proposición 3.3.14. Si $f, g \in \mathscr{O}_n$ son gérmenes $\mathscr{R}^k$-equivalentes y f está k-determinado, entonces f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes.

Demostración. Por definición de $\mathscr{R}^k$-equivalencia, existe un germen ϕ tal que $j^k g(0) = j^k(f \circ \phi)(0)$. Como $f \circ \phi$ es equivalente a f y f es k-determinado, la Proposición 3.3.12 nos dice que $f \circ \phi$ está k-determinado, luego $f \circ \phi$ y g son $\mathscr{R}$-equivalentes y, por tanto, f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes. □

Veamos una consecuencia de estas propiedades que puede ser de utilidad para hallar el grado de determinación de un germen que sabemos que es finitamente determinado.

Corolario 3.3.15. Sea $f \in \mathscr{O}_n$ un germen finitamente determinado. Entonces, f está $(k-1)$-determinado si, y solo si, para todo polinomio homogéneo p de grado k se tiene que f y $j^{k-1}f(0) + p$ son $\mathscr{R}^k$-equivalentes.

Demostración. Si f está $k-1$-determinado, $g = j^{k-1}f(0) + p$ tiene el mismo $(k-1)$-*jet* que f, para cualquier polinomio p, por tanto, f y g son $\mathscr{R}$-equivalentes y, en consecuencia, también son $\mathscr{R}^k$-equivalentes.

Supongamos que para todo polinomio homogéneo p de grado k, f y $j^{k-1}f(0)+p$ son $\mathscr{R}^k$-equivalentes. Dado $g \in \mathscr{O}_n$ un germen con el mismo $(k-1)$-*jet* que f, tenemos

$$g = j^{k-1}f(0) + p + h,$$

donde p es un cierto polinomio homogéneo de grado k y $h \in \mathfrak{m}_n^{k+1}$. Por hipótesis, f es $\mathscr{R}^k$-equivalente a $j^{k-1}f(0) + p$, como f está finitamente determinado, la proposición anterior nos dice que, de hecho, f y $j^{k-1}f(0) + p$ son $\mathscr{R}$-equivalentes. Por tanto, $j^{k-1}f(0) + p$ está k-determinado y es $\mathscr{R}$-equivalente a g. □

Continuamos estudiando la relación entre la determinación finita y la codimensión, veremos un lema previo a la demostración del Teorema de Mather, que relaciona ambos conceptos.

Lema 3.3.16. Sea $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n^2 J_f$ y $g \in \mathcal{O}_n$ un germen con el mismo *k-jet*. Tomamos representantes de f, g en un entorno U de 0 en $\mathbb{R}^n$ y definimos

$$\begin{aligned} F\colon U \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x). \end{aligned}$$

Entonces:

1. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un germen $\xi\colon (\mathbb{R}^{n+1},(0,t_0)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ verificando
   - $\xi(0,t) = 0$,
   - $\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial t}$.
2. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un germen $H\colon (\mathbb{R}^{n+1},(0,t_0)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ que cumple
   - $H(x,t_0) = x$,
   - $H(0,t) = 0$,
   - $F(H(x,t),t) = F(x,t_0)$.

Demostración. 1. Consideramos A el álgebra de gérmenes de funciones en $(\mathbb{R}^{n+1},(0,t_0))$, su ideal maximal, M, está generado por $x_1,\dots,x_n, t-t_0$ y se verifica el Lema de Nakayama. El álgebra $\mathcal{O}_n$ se puede identificar con la subálgebra de A de los gérmenes que no dependen de t.

Si el germen $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, la propiedad $\xi(0,t) = 0$, se puede reescribir como $\xi_i \in I = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$ (ideal generado en A) para todo $i = 1,\dots,n$. Además,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)f + tg\right] = g - f \in \mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq I^{k+1},$$

puesto que el *k-jet* de $g-f$ es 0. Quedaría probar que

$$I^{k+1} \subseteq I\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right\rangle.$$

De la hipótesis $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n^2 J_f$, se obtiene

$$I^{k+1} \subseteq I^2\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle,$$

utilizando que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = (1-t)\frac{\partial f}{\partial x_i} + t\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t\frac{\partial (g-f)}{\partial x_i} \in I^k,$$

tenemos

$$I^{k+1} \subseteq I^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle + I^{k+2} \subseteq I \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle + MI^{k+1}$$

y obtendremos la inclusión deseada aplicando el Lema de Nakayama.

2. Considerando el germen ξ como un campo vectorial dependiente del tiempo, podemos tomar su flujo, que es el germen $H\colon (\mathbb{R}^{n+1}, (0, t_0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ que cumple
   - $H(x, t_0) = x$,
   - $\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \xi(H(x,t),t)$.

   Veamos H cumple las propiedades del enunciado. Por definición de flujo, $x(t) = H(0,t)$ es la única solución de la ecuación diferencial $x'(t) = \xi(x(t),t)$ verificando $x(t_0) = 0$. Como $\xi(0,t) = 0$, $x(t) = 0$ es una solución del sistema que cumple la condición inicial, como la condición es única, tenemos $H(0,t) = 0$. Para ver la propiedad restante comenzaremos viendo que $F(H(x,t),t)$ no depende de t. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F(H(x,t),t) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\right)\left(\frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\right)(\xi(H(x,t),t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\xi_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right)(H(x,t,t)) = 0,\end{aligned}$$

   donde hemos usado lo probado en el apartado anterior. Como $F(H(x,t),t)$ no depende de t,

$$F(H(x,t),t) = F(H(x,t_0),t_0) = F(x,t_0). \qquad \square$$

Teorema 3.3.17 (Teorema de Mather)**.** Sea $f \in \mathcal{O}_n$. Si

$$\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n^2 J_f,$$

entonces f está k-determinado.

Demostración. Sea $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$, como en el lema previo, tomamos representantes de f y g en un entorno U de 0 y definimos $F\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotamos f_t al germen $f_t\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ dado por $f_t(x) = F(x,t)$, nuestro objetivo es ver que $f_0 = f$ es $\mathcal{R}$-equivalente a $f_1 = g$.

Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, consideramos $H\colon (\mathbb{R}^{n+1}, (0,t)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ el germen del lema anterior y sea $H\colon V \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ un representante suyo. Siguiendo la notación anterior, llamamos $h_t\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$ al germen $h_t(x) = H(x,t)$. Veamos en qué se traducen las propiedades verificadas por H.

- $H(0, t) = 0$ implica $h_t(0) = 0$.
- $H(x, t_0) = x$ se traduce en $h_{t_0}(x) = x$, esto es, $h_{t_0} = \mathrm{id}$. Podemos reducir el valor de ε hasta obtener que h_t es germen de difeomorfismo.
- $F(H(x, t), t) = F(x, t_0)$ nos lleva a $f_t(h_t(x)) = f_{t_0}(x)$, es decir, $f_{t_0} = f_t \circ h_t$.

Por tanto, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que los gérmenes $\{f_t : t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\}$ son $\mathscr{R}$-equivalentes. Veamos que realmente los gérmenes $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ son $\mathscr{R}$-equivalentes. Definimos

$$\begin{aligned} \Omega\colon \mathbb{R} &\to \frac{\mathscr{O}_n}{\mathscr{R}\text{-equivalencia}} \\ t &\mapsto \mathscr{R}\text{-clase de } f_t. \end{aligned}$$

Considerando la topología usual en el espacio de partida, $\mathbb{R}$, y la topología discreta en el espacio de llegada, $\mathscr{O}_n/\mathscr{R}$-equivalencia, lo probado anteriormente nos dice que Ω es continua. Como $\mathbb{R}$ es conexo, $\Omega(\mathbb{R})$ también será conexo, pero como todo espacio discreto es totalmente disconexo la única opción es que $\Omega(\mathbb{R})$ sea un único punto. Así, Ω es constante y todas las funciones f_t, con $t \in \mathbb{R}$ son $\mathscr{R}$-equivalentes. □

Corolario 3.3.18. Si $f \in \mathscr{O}_n$ verifica

$$\mathfrak{m}_n^k \subseteq \mathfrak{m}_n J_f,$$

entonces f está k-determinado.

Demostración. Si $\mathfrak{m}_n^k \subseteq \mathfrak{m}_n J_f$, entonces $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n^2 J_f$ y, por el teorema anterior, f está k-determinado. □

Ejemplo 3.3.19. Veamos, usando el corolario anterior, que el germen $f(x, y) = x^3 + y^3$ en $\mathscr{O}_2$ está 3-determinado. En este caso, $J_f = \langle x^2, y^2 \rangle$ y, por tanto, $\mathfrak{m}_2 J_f = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle = \mathfrak{m}_2^3$ y f está 3-determinado.

Corolario 3.3.20. Si $f \in \mathscr{O}_n$ tiene codimensión finita, entonces está finitamente determinado y su grado de determinación es menor o igual que $\operatorname{codim} f + 1$.

Demostración. Usando la Proposición 3.1.11, como f tiene codimensión finita, existirá un $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq J_f$, tomamos k el menor natural que verifica dicha condición. Entonces, utilizando la Proposición 3.1.15, se tiene $\operatorname{codim}_k f = 0$ y $\operatorname{codim}_\ell f > 0$ para $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$, luego

$$\operatorname{codim} f = \operatorname{codim}_0 f + \operatorname{codim}_1 f + \cdots + \operatorname{codim}_{k-1} f \geq k \geq 1.$$

Además, como $\mathfrak{m}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}_n J_f$, aplicando el corolario anterior, f está $(k+1)$-determinado, esto es, su grado de determinación es menor o igual que $k + 1 \leq \operatorname{codim} f + 1$. □

3.4 CLASIFICACIÓN SEGÚN LA CODIMENSIÓN

Ya hemos estudiado las herramientas necesarias para comenzar con la clasificación por $\mathscr{R}$-equivalencia de los gérmenes de $\mathcal{O}_n$ de hasta codimensión 5. Notamos que el caso de codimensión nula corresponde a los gérmenes regulares, ya estudiado anteriormente, por lo que nos interesará el caso en el que la codimensión sea mayor que 0. Además, para reducir el número de variables consideraremos gérmenes que verifiquen $f(0) = 0$. Podemos agrupar ambas propiedades tomando gérmenes $f \in \mathfrak{m}_n^2$.

3.4.1 *Clasificación de gérmenes de codimensión* 1

Sea $f \in \mathfrak{m}_n^2$ un germen singular. Si f tiene codimensión 1, entonces, utilizando el Corolario 3.3.20 y la Proposición 3.3.10, sabemos que su grado de determinación es 2 y, por tanto, f es $\mathscr{R}$-equivalente a su 2-*jet*. Al haber supuesto que $f \in \mathfrak{m}_n^2$, tenemos que $j^2 f(0)$ solo tiene términos de grado dos, luego, es una forma cuadrática. Expresamos f en función de sus coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ como sigue,

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Matricialmente,

$$f = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

donde $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{i,j}$ es una matriz simétrica. Utilizaremos el siguiente resultado de Álgebra Lineal, que nos garantiza la existencia de una transformación lineal de la forma cuadrática a sus ejes.

Lema 3.4.1. Si f es una forma cuadrática en n variables con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces existe un cambio lineal de coordenadas $\phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f \circ \phi(x) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

El valor r coincide con el rango de la matriz de coeficientes de f (rango A) y se llama *rango* de la forma cuadrática. Al número de sumandos positivos s se le denomina *índice de la forma cuadrática.* La Ley de inercia de Sylvester [9] nos dice que ambos valores son invariantes por cambios de coordenadas lineales. En este ámbito, es más común utilizar el *corrango* de una forma cuadrática en lugar del rango,

$$\text{corrango } f = n - r.$$

Ejemplo 3.4.2. Estudiemos con detalle un caso concreto, $n = 2$. En este caso,

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Cuando $a = b = c = 0$, el rango de f es 0 y decimos que es una forma cuadrática *simbólica.*

El rango es 1 cuando $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y el determinante $ac - b^2 = 0$. En este caso, f puede ser equivalente a x^2, si el índice es 1, o a $-x^2$, si el índice es 0. Como estamos en el caso $ac = b^2 > 0$, el índice será 1 cuando $a, c > 0$ y será 0 en caso contrario. En ambos casos diremos que la forma cuadrática es *parabólica*.

El rango de f es 2 cuando $ac - b^2 \neq 0$, pudiendo ser el índice $2, 1$ o 0. Si el índice es 2, f es equivalente a $x^2 + y^2$ y decimos que es de tipo *mínimo*. Si el índice es 1, entonces f es equivalente a $x^2 - y^2$, denominado de tipo *silla*. En el caso índice 0, f es equivalente a $-x^2 - y^2$ y decimos que se trata de una forma cuadrática de tipo *máximo*. Una denominación alternativa para las formas cuadráticas de tipo mínimo y máximo es tipo *elíptico* y para las de tipo silla, tipo *hiperbólico*. Si el determinante $ac - b^2$ es positivo, entonces $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ solo tiene como solución $x = y = 0$, correspondiendo al caso elíptico. Tendremos un máximo cuando $a, c < 0$ y un mínimo cuando $a, c > 0$, ya que $ac > b^2 \leq 0$. El caso hiperbólico se dará cuando el determinante $ac - b^2$ sea negativo.

Nota 3.4.3. Si en vez de $\mathscr{R}$-equivalencia consideráramos $\mathscr{A}$-equivalencia, se podría multiplicar por -1 la forma cuadrática y el índice no quedaría invariante. Lo que sí que queda invariante es el denominado *semiíndice* que es el mínimo entre s y $r - s$. En el ejemplo $n = 2$, x^2 es $\mathscr{A}$-equivalente a $-x^2$ y $x^2 + y^2$ lo es a $-x^2 - y^2$. Así, tenemos cuatro clases de $\mathscr{A}$-equivalencia de formas cuadráticas: simbólica, parabólica, elíptica e hiperbólica.

Definición 3.4.4 (Corrango, índice)**.** Sea $f \in \mathfrak{m}_n^2$ un germen singular, definimos su *corrango* e *índice* como el corrango y el índice de la forma cuadrática $j^2 f(0)$. La matriz de coeficientes de la forma cuadrática coincide con la *matriz hessiana* de f,

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right]_{i,j=1,\dots,n}.$$

Definición 3.4.5 (Germen no degenerado, de Morse)**.** Un germen singular f es *no degenerado* o *de Morse* cuando tiene corrango 0, esto es, cuando la matriz H_f es regular.

Lema 3.4.6. El corrango y el índice de un germen singular son $\mathscr{R}$-invariantes.

Demostración. Sean $f, g \in \mathfrak{m}_n^2$ gérmenes $\mathscr{R}$-equivalentes, esto es, tales que $g = f \circ \phi$ para ϕ un germen de difeomorfismo. Entonces,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i},$$

derivando otra vez,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \circ \phi \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

En $x = 0$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(0) \frac{\partial \phi_l}{\partial x_j}(0) \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(0)$$

y el resultado es consecuencia de la Ley de inercia de Sylvester y de que la matriz de derivadas parciales de ϕ es regular por ser ϕ un difeomorfismo. □

Denotamos por $H_d(x_1, \dots, x_n)$ al subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ formado por los polinomios homogéneos de grado d.

Lema 3.4.7. Sea $f \in H_2(x_1, \dots, x_n)$ una forma cuadrática de rango n. Entonces,

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$$

forman una base de las formas lineales $H_1(x_1, \dots, x_n)$.

Demostración. Sea

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Como las funciones coordenadas $x_1, \dots, x_n$ son una base de $H_1(x_1, \dots, x_n)$ y el rango de f es n, entonces $\det(a_{ij}) \neq 0$. Por tanto, $\partial f / \partial x_i$ también son base de $H_1(x_1, \dots, x_n)$. □

Lema 3.4.8 (Lema de Morse)**.** Un germen singular $f \in \mathfrak{m}_n^2$ tiene codimensión 1 si, y solo si, es de Morse, en cuyo caso, f es $\mathscr{R}$-equivalente a la forma cuadrática

$$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Demostración. Si $\operatorname{codim} f = 1$, por definición, $\operatorname{codim} J_f = 1$. Como $J_f \subseteq \mathfrak{m}_n$ y $\operatorname{codim} \mathfrak{m}_n = 1$, $J_f = \mathfrak{m}_n$. Por tanto, podemos escribir

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

para $g_{ik} \in \mathcal{O}_n$. Derivando esta expresión respecto de x_j y evaluando en $x = 0$ se obtiene,

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0).$$

Matricialmente, las expresiones anteriores se pueden escribir como $\mathrm{I}_n = GH_f$, donde I_n es la matriz identidad de orden n, $G = \left[g_{ik}(0)\right]_{i,k}$ y H_f la matriz hessiana de f. Por tanto, H_f es regular y f es de Morse.

Supongamos ahora que f es de Morse, esto es, H_f es regular. Llamamos $q = j^2 f(0)$ a la forma cuadrática definida por f, su rango será n. Por el lema anterior, las derivadas parciales $\partial q / \partial x_i$ forman una base de las formas lineales $H_1(x_1, \dots, x_n)$, podemos expresar cada x_i como

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial q}{\partial x_j}, \quad \text{donde } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Las derivadas parciales $\partial q / \partial x_j$ tienen el mismo 1-*jet* que la correspondiente derivada parcial de f, $\partial f / \partial x_j$, esto es,

$$\frac{\partial q}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathfrak{m}_n^2.$$

Reescribimos la igualdad anterior módulo $\mathfrak{m}_n^2$ y obtenemos

$$x_i + \mathfrak{m}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathfrak{m}_n^2,$$

así, $\mathfrak{m}_n \subseteq J_f + \mathfrak{m}_n^2$. Aplicando el Lema de Nakayama, concluimos que $\mathfrak{m}_n = J_f$, lo que nos da $\operatorname{codim} f = 1$.

Queda probar la última parte del enunciado. Por el Corolario 3.3.20, el grado de determinación de f es menor o igual que $\operatorname{codim} f + 1 = 2$, luego f está 2-determinado. Como está 2-determinado, es $\mathscr{R}$-equivalente a su 2-*jet* que, utilizando el Lema 3.4.1, es $\mathscr{R}$-equivalente a la forma cuadrática del enunciado. □

El Lema de Morse nos da una clasificación de los gérmenes de codimensión 1, que equivalen a los de corrango 0.

3.4.2 *Clasificación de gérmenes con codimensión mayor o igual que* 2 *y corrango* 1

Continuamos clasificando gérmenes singulares que no sean de Morse, es decir, cuyo corrango sea distinto de 0. Comenzamos la sección clasificando los gérmenes de corrango 1.

Lema 3.4.9 (Lema de descomposición)**.** Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular finitamente determinado de corrango c, entonces f es $\mathscr{R}$-equivalente a un germen de la forma

$$g(x_1, \ldots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2,$$

donde $g \in \mathfrak{m}_c^3$, $\delta_i = \pm 1$.

Demostración. Durante el desarrollo de la prueba denotaremos que dos gérmenes $h, \tilde{h}$ son $\mathscr{R}^k$-equivalentes como

$$h \sim_k \tilde{h}.$$

Vamos a demostrar por inducción sobre k que, para cualquier valor k, existe $g_k \in \mathfrak{m}_c^3$ un polinomio de grado menor o igual que k tal que

$$f \sim_k g_k(x_1, \ldots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 =: \psi.$$

Una vez demostrado, como f está k-determinado la Proposición 3.3.14 nos permite afirmar que f es $\mathscr{R}$-equivalente a ψ.

Veamos el caso base de la inducción, $k = 2$. El 2-*jet* de f es una forma cuadrática en n variables con rango $r = n - c$, por el Lema 3.4.1, existe un cambio de coordenadas lineal que transforma f en

$$\delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2, \quad \text{con } \delta_i = \pm 1.$$

Tomando $g_2 = 0$, queda probado este caso. Supongamos la afirmación cierta para k, esto es, existe un cambio de coordenadas ϕ tal que

$$j^k(f \circ \phi)(0) = g_k(x_1, \ldots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2.$$

Entonces,

$$f \sim_{k+1} g_k(x_1, \ldots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 + H(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.1}$$

donde $H(x_1, \ldots, x_n)$ son los términos de grado $k+1$ del $(k+1)$-*jet* de $f \circ \phi$. Como H es un polinomio homogéneo de grado $k+1$, tenemos

$$H(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_c) + x_{c+1}H_{c+1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n H_n(x_1, \ldots, x_n),$$

donde h es un polinomio homogéneo de grado $k+1$ y H_i es un polinomio homogéneo de grado k para $i = c+1, \ldots, n$. Sustituyendo la expresión de H en (3.1),

$$\begin{aligned} f \sim_{k+1} & \; g_{k+1}(x_1, \ldots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2 \\ & + x_{c+1}H_{c+1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n H_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $g_{k+1} = g_k + h$. Definimos el germen $\varphi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, cuyas componentes $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ vienen dadas por

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, c,$$
$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i - \frac{1}{2\delta_i} H_i(x_1, \dots, x_n), \quad \text{para } i = c+1, \dots, n.$$

El germen φ es un germen de difeomorfismo ya que $d\varphi(0) = \mathrm{id}$. Componiéndolo con el germen que aparece en (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} f \sim_{k+1} & g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}\varphi_{c+1}(x)^2 + \cdots + \delta_n \varphi_n(x)^2 \\ & + \varphi_{c+1}(x) H_{c+1}(\varphi(x)) + \cdots + \varphi_n(x) H_n(\varphi(x)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Cada uno de estos sumandos puede escribirse como

$$\delta_i \varphi_i(x)^2 = \delta_i \left(x_i - \frac{1}{2\delta_i} H_i(x) \right)^2 = \delta_i x_i^2 - x_i H_i(x) + s(x),$$
$$\varphi_i(x) H_i(\varphi(x)) = \left(x_i - \frac{1}{2\delta_i} H_i(x) \right) H_i(\varphi(x)) = x_i H_i(x) + \tilde{s}(x),$$

para $i = c+1, \dots, n$, donde $s(x), \tilde{s}(x)$ contienen los términos de orden mayor que $k+1$. Como la relación de equivalencia $\sim_{k+1}$ nos permite olvidarnos de los términos de grado mayor que $k+1$, al sustituir las expresiones anteriores en (3.3) se obtiene

$$f \sim_{k+1} g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2,$$

con lo que queda probado el lema. □

Proposición 3.4.10. Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular finitamente determinado de corrango c, entonces el germen $g \in \mathfrak{m}_c^3$ que aparece en la descomposición de f dada en el Lema de descomposición tiene la misma codimensión (en $\mathcal{O}_c$) que f (en $\mathcal{O}_n$).

Demostración. Como la codimensión es invariante por $\mathcal{R}$-equivalencia (Proposición 3.2.5), podemos suponer que $f = g + \delta_{c+1} x_{c+1}^2 + \cdots + \delta_n x_n^2$. Por definición, $\operatorname{codim} g = \operatorname{codim} J_g$. El ideal jacobiano J_g está generado en $\mathcal{O}_c$ por $\{\partial g/\partial x_i\}_{i=1}^c$. A su vez, $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} J_f$ y el ideal J_f está generado en $\mathcal{O}_n$ por las parciales $\{\partial g/\partial x_i\}_{i=1}^c$ y por $x_{c+1}, \dots, x_n$.

Definimos el epimorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{O}_n & \to \mathcal{O}_c \\ h & \mapsto h(x_1, \dots, x_c, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Como $\psi(J_f) = J_g$, se tiene $\psi^{-1}(J_g) = J_f + \ker \psi$, pero el núcleo de ψ coincide con el ideal generado por $x_{c+1}, \dots, x_n$, por tanto, $\psi^{-1}(J_g) = J_f$. De esta forma, el epimorfismo ψ, induce un isomorfismo

$$\tilde{\psi}\colon \frac{\mathcal{O}_n}{J_f} \to \frac{\mathcal{O}_c}{J_g}$$

y, por tanto, $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} g$. □

Teorema 3.4.11. Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular de corrango 1 y codimensión $k \geq 2$, entonces f es $\mathscr{R}$-equivalente a

$$\pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2.$$

Demostración. Por el Lema de descomposición podemos tomar $f(x) = g(x_1) \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2$, con $g \in \mathfrak{m}_1^3$ un germen de codimensión k. Existe un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}$, $\psi\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ tal que $g(\psi(x_1)) = \pm x_1^{k+1}$. Tomando el cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$, $\phi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ dado por $\phi(x) = (\psi(x_1), x_2, \ldots, x_n)$ tenemos que

$$f(\phi(x)) = \pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2. \qquad \square$$

Definición 3.4.12 (Germen de tipo A_k)**.** Un germen singular f de corrango 1 y codimensión $k \geq 2$ se llama *germen de tipo* A_k. Los gérmenes con valores más pequeños de k tienen nombres propios provenientes de la Teoría de Catástrofes,

si $k = 2$, f es de tipo *pliegue*,
si $k = 3$, f es de tipo *cúspide*,
si $k = 4$, f es de tipo *cola de golondrina*,
si $k = 5$, f es de tipo *mariposa*.

Nota 3.4.13. Cuando k es par, $k+1$ es impar y se tiene que x^{k+1} y $-x^{k+1}$ son $\mathscr{R}$-equivalentes y solo existe una clase de singularidad de tipo A_k con un índice prefijado. Sin embargo, cuando k es impar, $k+1$ es par y x^{k+1} y $-x^{k+1}$ no son $\mathscr{R}$-equivalentes, por tanto, existen dos clases de $\mathscr{R}$-equivalencia de tipo A_k con el mismo índice.

3.4.3 *Clasificación de gérmenes con codimensión menor o igual que* 5 *y corrango* 2

En esta sección terminaremos la clasificación de gérmenes de codimensión menor o igual que 5, veremos que en este caso el corrango debe ser menor o igual que 2, con lo que solo nos faltará por estudiar el caso en que el corrango sea 2.

Lema 3.4.14. Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular de codimensión finita y corrango c, entonces

$$\operatorname{codim} f \geq \frac{1}{2}c(c+1) + 1.$$

Demostración. Por el Lema de descomposición, podemos suponer $f(x) = g(x_1, \ldots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2$, con $g \in \mathfrak{m}_c^3$ un germen tal que $\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} g$.

Llamamos $I = \mathfrak{m}_c J_g$ y, como $g \in \mathfrak{m}_c^3$, se tiene $I \subseteq \mathfrak{m}_c^3$. Por la Proposición 3.1.15, $\operatorname{codim} I = \operatorname{codim}_0 I + \operatorname{codim}_1 I + \ldots$ En este caso,

$$\begin{aligned}
\operatorname{codim}_0 I &= \dim \frac{I + \mathcal{O}_c}{I + \mathfrak{m}_c} = \dim \frac{\mathcal{O}_c}{\mathfrak{m}_c} = 1,\\
\operatorname{codim}_1 I &= \dim \frac{I + \mathfrak{m}_c}{I + \mathfrak{m}_c^2} = \dim \frac{\mathfrak{m}_c}{\mathfrak{m}_c^2} = c,\\
\operatorname{codim}_2 I &= \dim \frac{I + \mathfrak{m}_c^2}{I + \mathfrak{m}_c^3} = \dim \frac{\mathfrak{m}_c^2}{\mathfrak{m}_c^3} = \frac{c(c+1)}{2},
\end{aligned}$$

por lo que $\operatorname{codim} I \geq (1/2)c(c+1) + c + 1$. Utilizando la Proposición 3.2.10,

$$\operatorname{codim} I = \operatorname{codim} \mathfrak{m}_c J_g = \operatorname{codim} g + c,$$

por tanto,

$$\operatorname{codim} g \geq \frac{1}{2}c(c+1) + 1. \qquad \square$$

Corolario 3.4.15. Sea $f \in \mathfrak{m}_n^2$ un germen singular. Si $\operatorname{codim} f \leq 5$, entonces $\operatorname{corrango} f \leq 2$. Además, si $\operatorname{corrango} f = 2$, entonces $\operatorname{codim} f \geq 4$.

Por tanto, solo nos falta clasificar gérmenes de corrango 2 y codimensión 4 o 5. Por el Lema de descomposición, supondremos que f se descompone como un germen $g \in \mathfrak{m}_2^3$, de la misma codimensión de f, más la correspondiente forma cuadrática en el resto de variables. Comenzaremos clasificando las formas cúbicas en dos variables.

Lema 3.4.16. Sea $f \neq 0$ una forma cúbica en las variables x, y con coeficientes reales. Entonces f factoriza en una de las dos siguientes formas:

1. $f = (a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y)(a_3 x + b_3 y)$, con $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$,
2. $f = (a_1 x + b_1 y)g$, con $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ y g una forma cuadrática elíptica.

Demostración. Supongamos que $f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. Comenzamos estudiando el caso $a \neq 0$. En este caso, $f(x,1) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$ es un polinomio de grado 3 en la variable x y coeficientes reales, factoriza de una de las dos siguientes maneras:

1. $f(x,1) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$,
2. $f(x,1) = a(x-\alpha)(x^2 + 2\beta x + \gamma)$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\beta^2 - \gamma < 0$.

Estas factorizaciones nos llevan a la factorización del enunciado teniendo en cuenta que si dos formas cúbicas f, g verifican $f(x,1) = g(x,1)$ para todo x, entonces $f = g$. Efectivamente, tomando (x,y) con $y \neq 0$,

$$f(x,y) = f\left(y\left(\frac{x}{y},1\right)\right) = y^3 f\left(\frac{x}{y},1\right) = y^3 g\left(\frac{x}{y},1\right) = g\left(y\left(\frac{x}{y},1\right)\right) = g(x,y).$$

En los puntos $(x, 0)$ coinciden por continuidad.

Finalizamos la prueba viendo el caso $a = 0$. $f(x, y) = y(3bx^2 + 3cxy + y^2)$, entonces la forma cuadrática $(3bx^2 + 3cxy + y^2)$ o es elíptica o se puede descomponer como producto de dos formas lineales. □

Definición 3.4.17 (Tipos de formas cúbicas)**.** Sea $f \neq 0$ una forma cúbica en las variables x, y y coeficientes reales. Decimos que f es de uno de los siguientes tipos, según su factorización:

1. *elíptico*, cuando f factoriza como producto de tres formas lineales que no son proporcionales entre sí,
2. *hiperbólico*, cuando f factoriza como producto de una forma lineal y una forma cuadrática elíptica,
3. *parabólico*, cuando f factoriza como producto de tres formas lineales, dos proporcionales y la tercera no proporcional,
4. *simbólico*, cuando f factoriza como producto de tres formas lineales proporcionales entre sí.

Proposición 3.4.18. Todas las formas cúbicas del mismo tipo son $\mathscr{R}$-equivalentes entre sí mediante un cambio de coordenadas lineal. En particular, son $\mathscr{R}$-equivalentes a la siguiente forma normal:

1. $x^3 - xy^2$, si es de tipo elíptico,
2. $x^3 + xy^2$, si es de tipo hiperbólico,
3. x^2y, si es de tipo parabólico,
4. x^3, si es de tipo simbólico.

Demostración. Veremos que en cada caso una forma cúbica cualquiera es equivalente mediante un cambio de coordenadas lineal a la correspondiente forma normal.

1. Sea $f(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$, con $a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, a_3x + b_3y$ tres formas lineales que no son proporcionales entre sí. Comenzamos componiendo f con el cambio inverso al siguiente cambio de coordenadas lineal

$$(x, y) \mapsto (a_2x + b_2y, a_3x + b_3y),$$

así, $f \sim (\alpha x + \beta y)xy$ con $\alpha, \beta \neq 0$, ya que si α o β fuera 0, entonces $a_1x + b_1y$ sería proporcional a alguna de las otras dos formas lineales. A continuación, componemos con el cambio

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\alpha}x, \frac{1}{\beta}y\right)$$

y llegamos a que $f(x, y) \sim (1/\alpha\beta)(x + y)xy$. Para eliminar la constante, utilizamos el cambio

$$(x, y) \mapsto (\alpha\beta)^{1/3}(x, y)$$

y obtenemos $f(x, y) \sim x(x + y)(x - y) = x^3 - xy^2$.

2. Sea $f(x, y) = (ax + by)g$, donde $ax + by$ es una forma lineal no nula y g una forma cuadrática elíptica. Por la clasificación de formas cuadráticas, existe un cambio de coordenadas lineal de forma que $f(x, y) \sim (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2)$, donde $\alpha x + \beta y$ es una forma lineal no nula. Utilizando coordenadas polares, encontramos $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha = \rho \cos\theta$, $\beta = \rho \sin\theta$. El cambio

$$(x, y) \mapsto (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y)$$

nos da $f(x, y) \sim \gamma x(x^2 + y^2)$, con $\gamma \neq 0$. Para eliminar la constante, basta usar el cambio

$$(x, y) \mapsto \gamma^{1/3}(x, y).$$

3. Sea $f(x, y) = (a_1x + b_1y)^2(a_2x + b_2y)$, con $a_1x + b_1y$, $a_2x + b_2y$ dos formas lineales no proporcionales. Utilizando el cambio inverso de

$$(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$$

obtenemos $f(x, y) \sim x^2y$.

4. Sea $f(x, y) = (ax + by)^3$ con $ax + by$ una forma lineal no nula, entonces el cambio inverso de

$$(x, y) \mapsto (ax + by, ax + by)$$

nos da $f(x, y) = x^3$. □

Proposición 3.4.19. Formas cúbicas de distinto tipo dan lugar a diferentes clases de $\mathcal{R}$-equivalencia.

Demostración. Basta ver que las cuatro formas normales de la proposición anterior no son equivalentes entre sí. Calculamos sus codimensiones:

$$\text{codim } (x^3 - xy^2) = 4, \text{codim } (x^3 + xy^2) = 4,$$
$$\text{codim } (x^2y) = \infty, \text{codim } (x^3) = \infty.$$

Por tanto, pasamos a comparar la primera forma con la segunda y la tercera con la cuarta. Si fueran $\mathcal{R}$-equivalentes sus conjuntos de ceros deberían ser homeomorfos. Pero $x^3 - xy^2 = 0$ da lugar a tres rectas distintas que pasan por el origen, $x^3 + xy^2 = 0$ a una recta que pasa por el origen, $x^2y = 0$ a dos rectas diferentes que pasan por el origen y $x^3 = 0$ a una única recta que pasa por el origen. Por tanto, las cuatro formas normales no son $\mathcal{R}$-equivalentes. □

Teorema 3.4.20. Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular de codimensión 4 y rango 2, entonces es $\mathscr{R}$-equivalente a uno de los siguientes gérmenes

$$x_1^3 - x_1x_2^2 \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2, \quad x_1^3 + x_1x_2^2 \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2.$$

Demostración. Aplicando el Lema de descomposición, tenemos

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2) \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

con $g \in \mathfrak{m}_2^3$, $\operatorname{codim} g = 4$. Al igual que en la demostración del Lema 3.4.14, llamando $I = \mathfrak{m}_2 J_g$, tenemos que $I \subseteq \mathfrak{m}_2^3$ y $\operatorname{codim} I = 6$. En particular,

$$\begin{aligned} 6 = \operatorname{codim} I &= \operatorname{codim}_0 I + \operatorname{codim}_1 I + \operatorname{codim}_2 I + \dots \\ &= 1 + 2 + 3, \end{aligned}$$

por lo que $\operatorname{codim}_3 I = 0$, es decir, $\mathfrak{m}_2^3 \subseteq I$. Por el Corolario 3.3.18, g está 3-determinado y, por tanto, es $\mathscr{R}$-equivalente a $j^3g(0)$, una forma cúbica en dos variables. Como la codimensión del 3-*jet* de g es 4, solo puede ser de tipo elíptico o hiperbólico. □

Teorema 3.4.21. Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular con $\operatorname{codim} f = 5$ y corrango $f = 2$, entonces f es $\mathscr{R}$-equivalente a un germen del tipo

$$\pm(x_1^2x_2 + x_2^4) \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2.$$

Demostración. El razonamiento será similar al del teorema anterior. Por el Lema de descomposición,

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, x_2) \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

con $g \in \mathfrak{m}_2^3$ un germen de codimensión 5. En este caso, el ideal $I = \mathfrak{m}_2 J_g$ tiene codimensión 7, por tanto, $\operatorname{codim}_3 I = 1$, $\operatorname{codim}_4 I = 0$. Esto implica que g está 4-determinado y es $\mathscr{R}$-equivalente a su 4-*jet*. Se tiene

$$j^4g(0) = j^3g(0) + h(x_1, x_2),$$

donde $h(x_1, x_2)$ es un polinomio homogéneo de grado 4. Por la Proposición 3.4.18, podemos suponer que $j^3g(0)$ es equivalente a una de las cuatro formas normales. Si $j^3g(0)$ fuese igual a una de las formas $x_1^3 \pm x_1x_2^2$, como están 3-determinadas, g sería equivalente a $j^3g(0)$, llegando a contradicción con que $\operatorname{codim} g = 5$. Por tanto, $j^3g(0)$ será, o bien $x_1^2x_2$, o bien x_1^3. Si $j^3g(0) = x_1^3$, tendríamos

$$\operatorname{codim}_3 I = \dim \frac{I + \mathfrak{m}_2^3}{I + \mathfrak{m}_2^4} \geq \dim \frac{\mathfrak{m}_2^3}{\langle x_1^3, x_1^2x_2 \rangle + \mathfrak{m}_2^4} = 2,$$

pero $\operatorname{codim}_3 I = 1$, por lo que $j^3g(0) = x_1^2x_2$. Tenemos entonces,

$$j^4g(0) = x_1^2x_2 + h(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + ax_2^4 + bx_2^3x_1 + x_1^2k(x_1, x_2),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $k(x_1, x_2)$ es una forma cuadrática. Componiendo cada uno de los sumandos con el cambio de coordenadas $\phi(x_1, x_2) = (x_1 - (b/2)x_2^2, x_2 - k(x_1, x_2))$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(x_1 - \frac{b}{2}x_2^2\right)^2 (x_2 - k(x_1, x_2)) &= x_1^2 x_2 - b x_1 x_2^3 - x_1 k(x_1, x_2) + s(x_1, x_2), \\
a(x_2 - k(x_1, x_2))^4 &= a x_2^4 + \tilde{s}(x_1, x_2) \\
b(x_2 - k(x_1, x_2))^3 \left(x_1 - \frac{b}{2}x_2^2\right) &= b x_1 x_2^3 + t(x_1, x_2) \\
\left(x_1 - \frac{b}{2}x_2^2\right)^2 k(\phi(x_1, x_2)) &= x_1 k(x_1, x_2) + \tilde{t}(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

donde $s, \tilde{s}, t, \tilde{t}$ contienen en cada caso los términos de orden superior. De esta forma, se tiene que g es $\mathscr{R}$-equivalente a $x_1^2 x_2 + a x_2^4$. Si $a = 0$, entonces g sería $\mathscr{R}$-equivalente a $x_1^2 x_2$, lo que no puede ser ya que esta forma cúbica tiene codimensión infinita. Por tanto, $a \neq 0$. Cuando $a > 0$, el cambio

$$(x, y) \mapsto (a^{1/8}x, a^{-1/4}y)$$

nos lleva el germen anterior a $x_1^2 x_2 + x_2^4$. Cuando $a < 0$, usando un cambio similar se obtiene $x_1^2 x_2 - x_2^4$. □

Corolario 3.4.22 (Las siete catástrofes elementales de Thom)**.** Si $f \in \mathfrak{m}_n^2$ es un germen singular con $2 \leq \operatorname{codim} f \leq 5$, entonces (salvo signo y adición de una forma cuadrática en el resto de variables) f es $\mathscr{R}$-equivalente a uno de los siguientes gérmenes:

corrango	codim	germen	nombre
1	2	x^3	pliegue
	3	x^4	cúspide
	4	x^5	cola de golondrina
	5	x^6	mariposa
2	4	$x^3 - xy^2$	umbílico elíptico
	4	$x^3 + xy^2$	umbílico hiperbólico
	5	$x^2y + y^4$	umbílico parabólico

3.4.4 *Ejemplos con SINGULAR*

En esta sección veremos algunos ejemplos de clasificación de gérmenes utilizando el lenguaje SINGULAR.

SINGULAR es un sistema computacional algebraico creado específicamente para realizar cálculos polinómicos, centrándose en el álgebra (conmutativa y no conmutativa), la geometría algebraica y la teoría de singularidades. Sus objetos principales son los ideales y los módulos, que se pueden definir sobre distintos anillos. Permite trabajar con anillos de polinomios sobre distintos cuerpos y realizar múltiples operaciones en ellos. Para realizar cálculos con SINGULAR se utiliza su sintaxis propia, similar a la de C, en una interfaz mediante línea de comandos.

Para clasificar gérmenes con SINGULAR, el primer paso es definir el anillo de polinomios en que vamos a trabajar. En este caso, tomaremos polinomios en dos variables.

```
> ring r = 0, (x,y), ds;
```

Podemos definir el germen $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - x^2y - xy^2 + y^2$ y calcular su ideal jacobiano.

```
> poly f = x4+x2y2-x2y-xy2+y2;
> ideal Jf = jacob(f);
> Jf;
Jf[1]=-2xy-y2+4x3+2xy2
Jf[2]=2y-x2-2xy+2x2y
```

Tenemos, $J_f = \langle -2xy - y^2 + 4x^3 + 2xy^2, 2y - x^2 - 2xy + 2x^2y \rangle$. Sin embargo, estos generadores del ideal jacobiano no son los más simples. Queremos obtener la forma simplificada de este ideal, para ello, utilizaremos la función `std` que aplicada sobre un ideal nos devuelve su base estándar. Además de por simplicidad, esta función es importante, ya que muchas de las funciones de SINGULAR requieren que la base del ideal sea la estándar respecto al orden monomial de la base.

```
  > std(Jf);
_[1]=2y-x2
_[2]=x3
```

Así, tenemos que $J_f = \langle 2y - x^2, x^3 \rangle$. Calculamos la codimensión de f.

```
> vdim(std(Jf));
3
```

Para determinar ante qué germen nos encontramos no basta con conocer su codimensión, $k = 4$, también necesitamos conocer su corrango. SINGULAR no incluye la función `corank`, aunque está implementada en una de sus bibliotecas, `classify.lib`. Cargamos esta biblioteca y calculamos el corrango de f.

```
> LIB "classify.lib";
// ** loaded /usr/bin/../share/singular/LIB/classify.lib (4.1.1.0,
   Dec_2017)
// ...

> corank(f);
1
```

Como el corrango de f es 1 y su codimensión es 3, sabemos que f es un germen de tipo A_3, también llamado germen de tipo cúspide.

La biblioteca `classify.lib` contiene las funciones necesarias para clasificar gérmenes singulares por $\mathscr{R}$-equivalencia. En particular, la función `classify` nos permite clasificar directamente cualquier polinomio dado. Por ejemplo, para el polinomio f anterior obtendríamos la salida:

```
> classify(f);
About the singularity :
          Milnor number(f)   = 3
          Corank(f)          = 1
          Determinacy       <= 4
Guessing type via Milnorcode:  A[3]

Computing normal form ...
   Arnold step number 2
The singularity
   y2-x2y-xy2+x4+x2y2
is R-equivalent to A[3].
   Milnor number = 3
   modality      = 0
y2+x4
```

Para interpretarla debemos saber que el *Milnor number* de f corresponde con su codimensión, en este caso 3. *Corank* es el corrango y *determinacy* el grado de determinación que, se indica, es menor o igual que 4. También se explicita a qué germen es equivalente, `A[3]` corresponde con el tipo A_3, como podríamos esperar, y se finaliza mostrando el germen, en este caso, $y^2 + x^4$.

Utilizando esta función podemos clasificar los gérmenes que se nos ocurran, por ejemplo $g(x,y) = x^2+y^3+x^2y+xy^2-xy$ o $h(x,y) = x^5+x^4+y^3-y^2-xy$.

```
> poly g=x2+y3+x2y+xy2-xy;
> classify(g);
About the singularity :
          Milnor number(f)   = 1
          Corank(f)          = 0
          Determinacy       <= 2
Guessing type via Milnorcode:  A[1]

Computing normal form ...
   Arnold step number 2
The singularity
   x2-xy
is R-equivalent to A[1].
   Milnor number = 1
   modality      = 0
2x2+y2
```

```
> poly h = x5+x4+y3-y2-xy;
> classify(h);
About the singularity :
          Milnor number(f)   = 1
          Corank(f)          = 0
          Determinacy       <= 2
Guessing type via Milnorcode:  A[1]

Computing normal form ...
   Arnold step number 2
The singularity
   -xy-y2
is R-equivalent to A[1].
   Milnor number = 1
   modality      = 0
2x2+y2
```

Así, hemos visto que tanto g como h son gérmenes de tipo A_1 y, por tanto, son $\mathscr{R}$-equivalentes entre sí.

4 ESTABILIDAD Y ESTABILIDAD INFINITESIMAL

Tras estudiar la clasificación de gérmenes por $\mathcal{R}$-equivalencia, el siguiente paso consiste en estudiar su clasificación por $\mathcal{A}$-equivalencia. El objetivo final es el de clasificar gérmenes $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ entre variedades X, Y cualesquiera según esta relación de equivalencia. Al igual que en el caso de la $\mathcal{R}$-equivalencia, tenemos una propiedad, dada en la Proposición 2.2.7, que nos permite centrar nuestro estudio en los gérmenes de la forma $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$.

Una clasificación de los gérmenes diferenciables por $\mathcal{A}$-equivalencia comenzaría también por aquellos que tienen menor codimensión, sin embargo, este caso es más complicado que el anterior pues hay que generar familias de difeomorfismos tanto en la salida como en la llegada. Se comienza estudiando el caso de menor codimensión, el de los gérmenes *estables*. En este capítulo, por ello, estudiaremos los conceptos de estabilidad y estabilidad infinitesimal ($\mathcal{A}_e$-codimensión nula), finalizando con la prueba de que ambas propiedades son equivalentes.

4.1 ESTABILIDAD

Comenzaremos presentando algunos conceptos necesarios para estudiar la definición de estabilidad.

Definición 4.1.1 (Desdoblamiento d-paramétrico)**.** Un *desdoblamiento d-paramétrico* de un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es un germen de aplicación

$$\begin{aligned} F\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, 0) &\to (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0) \\ (x,u) &\mapsto (\tilde{f}(x,u), u) \end{aligned}$$

tal que $\tilde{f}(x,0) = f(x)$.

En ocasiones denotaremos $\tilde{f}(x,u) = f_u(x)$ y la condición del desdoblamiento sería $f_0 = f$.

Definición 4.1.2 (Desdoblamientos equivalentes)**.** Dos desdoblamientos F, G de un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ son *equivalentes* si existen gérmenes de difeomorfismos

$$\begin{aligned} &\phi\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, 0), \\ &\psi\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0) \end{aligned}$$

que sean desdoblamientos de la identidad en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, tales que $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, 0) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\phi"'] & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0) \arrow[d, "\psi"] \\
(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, 0) \arrow[r, "G"'] & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0).
\end{tikzcd}$$

Definición 4.1.3 (Desdoblamiento constante, trivial)**.** El desdoblamiento *constante* de un germen f es $f \times \mathrm{id}$, es decir, el dado por $F(x,u) = (f(x), u)$.

Diremos que un desdoblamiento es *trivial* cuando es equivalente al desdoblamiento constante.

Definición 4.1.4 (Germen estable)**.** Un germen de aplicación $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es *estable* si todo desdoblamiento de f es trivial.

Ejemplo 4.1.5.

- Tomamos el germen $f\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ dado por $f(x) = x^2$ y su desdoblamiento $F\colon (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0)$ definido como $F(x,u) = (\tilde{f}(x,u), u) = (x^2 + ux, u)$. Efectivamente, F verifica la condición de desdoblamiento,

  $$\tilde{f}(x, 0) = x^2 = f(x).$$

  F es un desdoblamiento trivial, veremos que las familias de difeomorfismos

  $$\phi(x,u) = (x - u/2, u), \quad \text{y} \quad \psi(y,u) = (y - u^2/4, u).$$

  nos muestran que F es equivalente al germen constante,

  $$\begin{aligned}
  \left(\psi \circ (f \times \mathrm{id}) \circ \phi^{-1}\right)(x,u) &= (\psi \circ (f \times \mathrm{id}))(x + u/2, u) \\
  &= \psi((x + u/2)^2, u) \\
  &= (x^2 + xu + u^2/4 - u^2/4, u) \\
  &= (x^2 + xu, u) = F(x,u).
  \end{aligned}$$

- El desdoblamiento $F(x,u) = (x^3 + ux, u)$ del germen $f(x) = x^3$ no es trivial. Si escribimos $f_u(x) = x^3 + ux$, entonces para $u \neq 0$ f_u tiene dos puntos críticos distintos, mientras que f solo tiene 1. Si F fuera equivalente a $f \times \mathrm{id}$ esto no podría pasar, ya que si existieran difeomorfismos ϕ, ψ desdoblamientos de la identidad, ϕ se puede restringir a un difeomorfismo de los puntos críticos de F, Σ_F, al conjunto de puntos críticos de $f \times \mathrm{id}$, $\Sigma_{f \times \mathrm{id}}$ y, además, el siguiente diagrama conmuta

  $$\begin{tikzcd}
  \Sigma_F \arrow[rr, "\phi_|"] \arrow[dr, "\pi_u"'] & & \Sigma_{f\times\mathrm{id}} \arrow[dl, "\pi_u"] \\
  & \mathbb{R}, &
  \end{tikzcd}$$

donde π_u es la proyección al espacio de parámetros.

La proyección de la izquierda lleva dos puntos críticos a un punto crítico, mientras que la de la derecha solo lleva un punto crítico a un punto crítico.

Dado un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, consideramos el espacio

$$\left\{ \left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0} : F(x,t) = (f_t(x), t) \text{ es un desdoblamiento trivial de } f \right\},$$

que también se puede escribir como

$$\left\{ \left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0} : f_t = \psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1}, \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id} \right\}.$$

Las familias de difeomorfismos ϕ_t y ψ_t no tienen por qué preservar los puntos bases del germen f. Como ϕ y ψ son desdoblamientos de la identidad, $\phi_0(0) = 0, \psi_0(0) = 0$, pero no se tiene por qué dar $\phi_t(0) = 0$ o $\psi_t(0) = 0$ para $t \neq 0$. Conocer una fórmula algebraica del espacio anterior nos dará un criterio simple y computable de la estabilidad de un germen.

Veremos el conjunto anterior como un subespacio de las *deformaciones infinitesimales* de f, dado por

$$\mathrm{ID}(f) := \left\{ \left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0} : F(x,t) = (f_t(x), t) \text{ es un desdoblamiento de } f \right\}.$$

Consideramos en $\mathrm{ID}(f)$ la estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un caso especial de deformación infinitesimal es cuando exigimos que F preserve los puntos base del germen f, es decir, $f_t(0) = 0$ para todo t. Denotaremos por $\mathrm{ID}_0(f)$ al subespacio de $\mathrm{ID}(f)$ que preserva los puntos base.

Definición 4.1.6 (Espacio tangente extendido, espacio tangente de la $\mathscr{A}$-órbita)**.** Dado un germen de aplicación $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, definimos el *espacio tangente extendido* de f como

$$\mathrm{T}\mathscr{A}_e f = \left\{ \left.\frac{d}{dt}(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1})\right|_{t=0} : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id} \right\}$$

y el *espacio tangente de la $\mathscr{A}$-órbita* de f como

$$\mathrm{T}\mathscr{A} f = \left\{ \left.\frac{d}{dt}(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1})\right|_{t=0} : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id}, \phi_t(0) = 0, \psi_t(0) = 0 \text{ para todo } t \right\}.$$

Además, se definen los cocientes

$$\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = \frac{\mathrm{ID}(f)}{\mathrm{T}\mathscr{A}_e f}, \quad \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}} f = \frac{\mathrm{ID}_0(f)}{\mathrm{T}\mathscr{A} f}.$$

Cuando ϕ_t, ψ_t fijan los puntos bases, las familias ϕ_t y ψ_t se pueden ver como curvas en el grupo $\mathscr{R}_n$, luego $\psi_t \circ f \circ \phi_t$ es una curva en la $\mathscr{A}$-órbita de f.

Proposición 4.1.7. Si $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es estable, entonces $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = 0$.

Demostración. Sea $F(x,t) = (f_t(x), t)$ un desdoblamiento 1-paramétrico de f. Como f es estable, F es trivial, luego $F = \psi \circ (f \times \mathrm{id}) \circ \phi$ para ciertos ϕ, ψ desdoblamientos de la identidad. Escribiendo

$$\phi(x,t) = (\phi_t(x), t) \quad \text{y} \quad \psi(y,t) = (\psi_t(y), t),$$

tenemos

$$f_t = \psi_t \circ f \circ \phi_t,$$

por tanto, $f_t \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f$. □

Definición 4.1.8 (Germen infinitesimalmente estable)**.** Un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es *infinitesimalmente estable* si

$$\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = 0.$$

Por tanto, en la proposición anterior hemos visto que ser estable implica ser infinitesimalmente estable, más adelante probaremos que ambas propiedades son equivalentes.

Para un germen inestable, la $\mathscr{A}_e$-codimensión de un germen será un invariante importante, intuitivamente, nos permite medir cómo de lejos está el germen de ser estable.

Definición 4.1.9 ($\mathscr{A}_e$-codimensión, $\mathscr{A}$-codimensión)**.** Se define la $\mathscr{A}_e$-codimensión y la $\mathscr{A}$-codimensión de un germen f, respectivamente, como

$$\operatorname{codim}_{\mathscr{A}_e} f = \dim \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f, \quad \operatorname{codim}_{\mathscr{A}} f = \dim \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}} f.$$

Definición 4.1.10 (Germen $\mathscr{A}$-finito)**.** Un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es *$\mathscr{A}$-finito* si

$$\operatorname{codim}_{\mathscr{A}_e} f = \dim \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f < \infty.$$

Lema 4.1.11. Si ϕ_t y ψ_t son familias de difeomorfismos parametrizadas, se cumple

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1}\right)\Big|_{t=0} = df \circ \left(\frac{d\phi_t^{-1}}{dt}\Big|_{t=0} \right) + \left(\frac{d\psi_t}{dt}\Big|_{t=0} \right) \circ f.$$

Demostración. En esta prueba solo se utiliza la regla de la cadena, pero hay que aplicarla con sutileza. Definimos $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}, G$ y $\tilde{g}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= (\tilde{\phi}(x,t), t) = (\phi_t(x), t), \\
\psi(x,t) &= (\tilde{\psi}(x,t), t) = (\psi_t(x), t), \\
G(x,t) &= (\tilde{g}(x,t), t) = (f(\phi_t^{-1}(x)), t).
\end{aligned}$$

Tomamos representantes de ϕ, f, ψ y $(x,0)$ un punto en el dominio de $\psi \circ (f \times \mathrm{id}) \circ \phi^{-1}$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1})\Big|_{t=0}(x) = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\psi} \circ G)(x,0).$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\psi} \circ G)(x,0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y_i}(G(x,0))\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(G(x,0)).$$

Utilizando que

$$G(x,0) = (\tilde{g}(x,0),0) = (f(\mathrm{id}(x)),0) = (f(x),0)$$

y que $\tilde{\psi}(y,0) = y$, se tiene

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial y_i}(y,0) = \delta_{ij},$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\psi} \circ G)(x,0) &= \sum_{i=1}^{m} \delta_{ih}\frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}(f(x),0)\\ &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t}(x,0) + \frac{d\psi_t}{dt}\Big|_{t=0}(f(x))\\ &= \frac{df}{dt}(\phi_t^{-1}(x))\Big|_{t=0} + \frac{d\psi_t}{dt}\Big|_{t=0}(f(x)).\end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena y que $\phi_0(x) = x$, el primer sumando queda

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ \frac{d(\phi_t)_i^{-1}}{dt}\Big|_{t=0}(x) = df_x\left(\frac{d\phi_t^{-1}}{dt}\Big|_{t=0}\right). \qquad \square$$

Las derivadas $(d\phi_t/dt)|_{t=0}$ y $(d\psi_t/dt)|_{t=0}$ determinan gérmenes de campos vectoriales en $(\mathbb{R}^n,0)$ y $(\mathbb{R}^m,0)$, respectivamente: $(d\phi_t(x)/dt)|_{t=0}$ es el vector tangente a la trayectoria de $\phi_t(x)$ en el punto x.

Denotamos por θ_n al conjunto de todos los gérmenes de campos vectoriales en $(\mathbb{R}^n,0)$, esto es, el conjunto de las secciones locales $\xi\colon (\mathbb{R}^n,0) \to \mathrm{T}\mathbb{R}^n$ en 0. Es un módulo sobre el anillo $\mathcal{O}_n$. El subconjunto de los $(d\phi_t(x)/dt)|_{t=0}$ que preserva los puntos base es igual al submódulo $\mathfrak{m}_n\theta_n$.

Razonando de forma similar, dado $f\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$, podemos ver los elementos de $\mathrm{ID}(f)$ como campos vectoriales sobre f, $(df_t/dt)|_{t=0}$ es el vector tangente a la trayectoria $x \mapsto f_t(x)$ en $f(x)$. Asociando a $(df_t/d_t)|_{t=0}$ la aplicación

$$\hat{f}\colon x \mapsto \left(f(x), \frac{df_t(x)}{dt}\Big|_{t=0}\right) \in \mathrm{T}\mathbb{R}^m,$$

obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}\mathbb{R}^n \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}^n}"'] & \mathrm{T}\mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}^m}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] & \mathbb{R}^m, \end{tikzcd}$$

donde $\pi_{\mathbb{R}^n}$ y $\pi_{\mathbb{R}^m}$ son las proyecciones dadas por la fibra, $\pi_{\mathbb{R}^n}(x, v) = x$.

Recíprocamente, cualquier campo vectorial ξ sobre f es una aplicación suave $\xi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathrm{T}\mathbb{R}^m$ de la forma $\xi(x) = (f(x), \tilde{\xi}(x))$, para algún $\tilde{\xi}\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$. Se tiene que $\tilde{\xi}$ es la deformación infinitesimal $(df_t/dt)|_{t=0}$ asociada a la deformación $f_t = f + t\tilde{\xi}$. Por tanto, tenemos una identificación canónica $\mathrm{ID}(f) \equiv \theta(f)$, el espacio de campos vectoriales sobre f. El espacio $\theta(f)$ también es un módulo sobre $\mathcal{O}_n$ y las deformaciones infinitesimales que preservan los puntos base corresponden al submódulo $\mathfrak{m}_n\theta(f)$.

A partir de ahora, hablaremos en términos de campos vectoriales sobre f en lugar de deformaciones infinitesimales y abandonaremos la notación $\mathrm{ID}(f)$ en favor de $\theta(f)$.

Como $\mathcal{O}_n$-módulo, θ_n está generado por los gérmenes de los campos vectoriales coordenados

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Luego un elemento ξ de θ_n se puede escribir de varias formas. O bien, como una suma

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada ξ_i es un germen de aplicación en 0, o bien, sin mencionar el sistema coordenado, como una n-tupla $\xi = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$. Escribiremos los elementos de $\theta(f)$ y θ_n como columnas.

Al trabajar con estos módulos, utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} tf\colon \theta_n &\to \theta(f) \\ \xi &\mapsto df \circ \xi, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \omega f\colon \theta_m &\to \theta(f) \\ \eta &\mapsto \eta \circ f. \end{aligned}$$

Corolario 4.1.12. Para cualquier germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, se tiene

$$\mathrm{T}\mathscr{A}_e f = tf(\theta_n) + \omega f(\theta_m), \quad \mathrm{T}\mathscr{A} f = tf(\mathfrak{m}_n\theta_n) + \omega f(\mathfrak{m}_m\theta_m)$$

y también

$$\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = \frac{\theta(f)}{\mathrm{T}\mathscr{A}_e f}, \quad \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}} f = \frac{\mathfrak{m}_n\theta(f)}{\mathrm{T}\mathscr{A} f}.$$

Demostración. Por definición,

$$\mathrm{T}\mathscr{A}_e f = \left\{ \frac{d}{dt}(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1})\bigg|_{t=0} : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id} \right\}.$$

Aplicando el Lema 4.1.11,

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}\mathscr{A}_e f &= \left\{ df \circ \left(\frac{d\phi_t^{-1}}{dt}\bigg|_{t=0} \right) + \left(\frac{d\phi_t}{dt}\bigg|_{t=0} \right) \circ f : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id} \right\} \\
&= \left\{ tf\left(\frac{d\phi_t^{-1}}{dt}\bigg|_{t=0} \right) + \omega f\left(\frac{d\psi_t}{dt}\bigg|_{t=0} \right) : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id} \right\} \\
&= tf(\theta_n) + \omega f(\theta_m).
\end{aligned}$$

El razonamiento para $\mathrm{T}\mathscr{A} f$ es similar y para los cocientes $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f, \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}} f$ basta usar la identificación $\mathrm{ID}(f) \equiv \theta(f)$. □

Como se ha comentado anteriormente, θ_n tiene estructura de $\mathscr{O}_n$-módulo y θ_m de $\mathscr{O}_m$-módulo, lo que nos puede generar dudas a la hora de trabajar con $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$, ya que $tf(\theta_n)$ es un $\mathscr{O}_n$-submódulo y $\omega f(\theta_m)$ es un $\mathscr{O}_m$-submódulo. Para solucionarlo se utiliza el homomorfismo inducido por f, f^*. Todo módulo M sobre $\mathscr{O}_n$ tiene estructura de $\mathscr{O}_m$-módulo vía f^* en el siguiente sentido. Dados $m \in M, h \in \mathscr{O}_m$,

$$h \cdot m := f^*(h) \cdot m = (h \circ f) \cdot m.$$

Así, podemos ver $\theta(f)$ y θ_n como $\mathscr{O}_m$-módulos vía f^* y $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$ como un $\mathscr{O}_m$-módulo. Sin embargo, si M es un módulo finitamente generado sobre $\mathscr{O}_n$, no tiene por qué estar finitamente generado sobre $\mathscr{O}_m$, el Teorema de preparación nos permite saber cuándo M es finitamente generado sobre $\mathscr{O}_m$.

Teorema 4.1.13 (Teorema de preparación, [4])**.** Sea un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ y M un $\mathscr{O}_n$-módulo finitamente generado. Son equivalentes:

1. El módulo M es finitamente generado sobre $\mathscr{O}_m$ vía f,
2. $\dim(M/f^*\mathfrak{m}_m M) < \infty$.

4.2 EJEMPLOS DEL CÁLCULO DE $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$

En esta sección veremos algunos ejemplos del cálculo de una base de $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = \theta(f)/\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$. En cada caso, asumiremos que $\theta(f)/\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$ está generado por monomios. Aunque $\theta(f)$ no esté generado por monomios en general, una serie de potencias infinita no está en el sistema generado por monomios, en cada ejemplo estará claro que f es estable fuera del 0 y de ahí se sigue, utilizando el Criterio de Mather-Gaffney y el Lema 4.2.2 (mostrados a continuación), que $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f \supseteq \mathfrak{m}_n^k \theta(f)$ para algún k finito. Por tanto, el cociente $\theta(f)/\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$ tendrá una base de monomios de grado menor o igual que $k-1$.

Teorema 4.2.1 (Criterio de Mather-Gaffney, [7]). Un multi-germen holomorfo $f\colon (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ con $S \subseteq C(f)$, donde $C(f)$ es el conjunto de puntos críticos de f, tiene $\mathscr{A}_e$-codimensión finita si, y solo si, existe un representante $f\colon X \to Y$ lo suficientemente pequeño tal que:

1. $f^{-1}(0) \cap C(f) = S$,
2. la restricción $f\colon X \backslash f^{-1}(0) \to Y \backslash \{0\}$ es localmente estable.

Lema 4.2.2. Un germen $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ es $\mathscr{A}$-finito si, y solo si, $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f \supseteq \mathfrak{m}_n^k \theta(f)$ para algún k finito.

Demostración. En el Teorema 6.2 de [7] se prueba una versión más general de este lema. □

Ejemplo 4.2.3. Consideramos el germen $f\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ dado por $f(x) = (x^2, x^3)$. Teniendo en cuenta que su diferencial en un punto x es

$$\begin{aligned} df_x\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto (2x, 3x^2)v, \end{aligned}$$

es una inmersión inyectiva fuera del 0, ya que para $x = 0$, $\ker df_x = \mathbb{R}$, y para $x \neq 0$, $df_x(v) = 0$ si, y solo si $v = 0$. Escribiremos los elementos de θ_2 y $\theta(f)$ como vectores columna.

Todo monomio x^k, salvo el propio x, se puede escribir como producto de potencias de x^2 y x^3 y, por tanto, como una composición $a \circ f$. Entonces,

$$\omega f(\theta_2) = \left\{\xi \circ f : \xi \in \theta_2\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \circ f : a, b \in \mathscr{O}_2\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a(x^2, x^3) \\ b(x^2, x^3) \end{bmatrix} : a, b \in \mathscr{O}_2\right\}$$

y

$$\omega f(\theta_2) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} \left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}\right\} = \theta(f)$$

Como

$$tf\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix},$$

se sigue que

$$tf(\theta_1) + \omega f(\theta_2) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}\right\} = \mathrm{T}\mathscr{A}_e f + \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}\right\} = \theta(f).$$

El término $[0, x]^T$ no está en $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$, ya que el orden de la segunda componente de cualquier elemento de $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f$ es al menos 2. Por tanto, $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$ tiene como base la clase de $[0, x]^T$.

Ejemplo 4.2.4. Tomaremos ahora el germen $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2, x_1 x_2)$ que parametriza el llamado *paraguas de Whitney*. Veremos que es estable probando que $T^1_{\mathscr{A}_e} f = 0$. Denotaremos por (x_1, x_2) a las coordenadas en el espacio de partida y por (y_1, y_2, y_3) a las coordenadas en el espacio de llegada. Al igual que antes, escribiremos los elementos de θ_2, θ_3 y $\theta(f)$ como vectores columna. Dividiremos $\mathscr{O}_2$ entre la parte *par* y la parte *impar* respecto a la variable x_2, denotándolas $\mathscr{O}^p$, $\mathscr{O}^i$, respectivamente. Esto es, todo elemento $a(x,y) \in \mathscr{O}_2$ se puede escribir como

$$a(x,y) = a_1(x,y^2) + y a_2(x,y^2), \quad \text{donde } a_1(x,y^2) \in \mathscr{O}^p, y a_2(x,y^2) \in \mathscr{O}^i.$$

Entonces,

$$\theta(f) = \begin{bmatrix} \mathscr{O}^p \oplus \mathscr{O}^i \\ \mathscr{O}^p \oplus \mathscr{O}^i \\ \mathscr{O}^p \oplus \mathscr{O}^i \end{bmatrix}.$$

Como

$$\omega f(\theta_3) = \left\{ \begin{bmatrix} a(x,y^2,xy) \\ b(x,y^2,xy) \\ c(x,y^2,xy) \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathscr{O}_3 \right\},$$

se cumple,

$$\omega f\left(\begin{bmatrix} a(y_1,y_2) \\ b(y_1,y_2) \\ c(y_1,y_2) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a(x_1,x_2^2) \\ b(x_1,x_2^2) \\ c(x_1,x_2^2) \end{bmatrix},$$

quedando probado que la parte par de $\theta(f)$ está contenida en $T\mathscr{A}_e f$, basta mirar qué ocurre con la parte impar. Como

$$tf\left(a(x_1,x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x_1,x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_1,x_2^2) \\ 0 \\ x_2 a(x_1,x_2^2) \end{bmatrix},$$

$T\mathscr{A}_e f$ contiene la parte impar de la tercera fila. Como

$$tf\left(a(x_1,x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a(x_1,x_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2 a(x_1,x_2^2) \\ x_1 a(x_a,x_2^2) \end{bmatrix},$$

la parte impar de la segunda fila está contenida en $T\mathscr{A}_e f$. Por último, como

$$tf\left(x_2 a(x_1,x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 a(x_1,x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 a(x_1,x_2^2) \\ 0 \\ x_2^2 a(x_1,x_2^2) \end{bmatrix}$$

$T\mathscr{A}_e f$ contiene la parte impar de la primera fila. Luego, $T\mathscr{A}_e f = \theta(f)$, $T^1_{\mathscr{A}_e} f = 0$ y f es infinitesimalmente estable.

Ejemplo 4.2.5. Veamos que el germen $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2, x_2^3 + x_1^2 x_2)$ no es estable. Este germen tiene un punto no inmersivo en $(0, 0)$, ya que

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix}\right|_{x=(0,0)} v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

si, y solo si, $v = (0, y)$ para cualquier y. Para determinar $T^1_{\mathscr{A}_e} f$ utilizaremos los cálculos del ejemplo anterior con ligeras modificaciones. Se tiene,

$$\theta(f) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}^p \oplus \mathcal{O}^i \\ \mathcal{O}^p \oplus \mathcal{O}^i \\ \mathcal{O}^p \oplus \mathcal{O}^i \end{bmatrix}.$$

y como

$$\omega f(\theta_3) = \begin{bmatrix} a(x_1, x_2^2) \\ b(x_1, x_2^2) \\ c(x_1, x_2^2) \end{bmatrix},$$

la parte par de $\theta(f)$ está contenida en $T\mathscr{A}_e f$. Como

$$\begin{aligned} tf\left(a(x_1, x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a(x_1, x_2^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2 a(x_1, x_2^2) \\ 3x_2^2 a(x_1, x_2^2) + x_1^2 a(x_1, x_2^2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la parte impar de la segunda fila está en $T\mathscr{A}_e f$. Como

$$tf\left(x_2 a(x_1, x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 a(x_1, x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 a(x_1, x_2^2) \\ 0 \\ 2x_1 x_2^2 a(x_1, x_2^2) \end{bmatrix},$$

$T\mathscr{A}_e f$ contiene a la parte impar de la primera fila. Como

$$tf\left(a(x_1, x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x_1, x_2^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x_1, x_2^2) \\ 0 \\ 2x_1 x_2 a(x_1, x_2^2) \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$(x_1 \mathscr{O}^i)\frac{\partial}{\partial y_3} \subset T\mathscr{A}_e f.$$

Utilizando que

$$\begin{aligned} tf\left(x_2 a(x_1, x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 a(x_1, x_2^2) \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2^2 a(x_1, x_2^2) \\ 3x_2^3 a(x_1, x_2^2) + x_1^2 x_2 a(x_1, x_2^2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

se tiene

$$T\mathscr{A}_e f = \begin{bmatrix} \mathscr{O}^p + \mathscr{O}^i \\ \mathscr{O}^p + \mathscr{O}^i \\ \mathscr{O}^p + x_1 \mathscr{O}^i + x_2^2 \mathscr{O}^i \end{bmatrix} \neq \theta(f).$$

El espacio $T^1_{\mathscr{A}_e} f$ está generado, como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, por

$$x_2 \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Ejemplo 4.2.6. Sea $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3 + x_1 x_2)$, denotamos por $\mathscr{O}_2^s$ al espacio de salida y por $\mathscr{O}_2^t$ al espacio de llegada. Se tiene que

$$\frac{\mathscr{O}_2^s}{f^*\mathfrak{m}_2^t \mathscr{O}_2^s} = \frac{\mathscr{O}_2^2}{\langle f_1, f_2 \rangle} = \frac{\mathscr{O}_2^s}{\langle x_1, x_2^3 + x_1 x_2 \rangle} = \frac{\mathscr{O}_2^s}{\langle x_1, x_2^3 \rangle}$$

está generado por $1, x_2, x_2^2$ sobre $\mathbb{R}$, utilizando el Teorema de preparación, afirmamos que $\mathscr{O}_2^s$ está generado sobre $\mathscr{O}_2^t$ por $1, x_2, x_2^2$. Por tanto,

$$\theta(f) = (\mathscr{O}_2^s)^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathscr{O}_2^s \right\}$$

está generado sobre $\mathscr{O}_2^t$ por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\omega f(\mathscr{O}_2^t) = \left\{ \begin{bmatrix} A \circ f \\ B \circ f \end{bmatrix} : A, B \in \mathscr{O}_2^t \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} A(x_2, x_2^3 + x_1 x_2) \\ B(x_1, x_2^3 + x_1 x_2) \end{bmatrix} : A(u,v), B(u,v) \in \mathscr{O}_2^t \right\},$$

tomando $A(u,v) = 1, B(u,v) = 0$ y $A(u,v) = 0, B(u,v) = 1$, vemos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \omega f(\mathcal{O}_2^t).$$

Por otro lado, se tiene

$$tf(\mathcal{O}_2^s) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & 3x_2^2 + x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x_1,x_2) \\ b(x_1,x_2) \end{bmatrix} : a(x_1,x_2), b(x_1,x_2) \in \mathcal{O}_2^s \right\}.$$

Tomando $a(x_1,x_2) = 0, b(x_1,x_2) = 0$, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3x_2^2 + x_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f$$

y, como tomando $A(u,v) = 0, B(u,v) = u$, se tiene $[0, x_1]^T \in \omega f(\mathcal{O}_2^t)$, podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f.$$

Tomando $a(x_1,x_2) = x_2, b(x_1,x_2) = 0$, obtenemos $[x_2, x_2^2]^T \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f$, utilizando lo anterior,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f.$$

Cogiendo $a(x_1,x_2) = 1, b(x_1,x_2) = 0$, se llega a que $[1, x_2]^T \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f$, por lo que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f.$$

Por último, tomando $a(x_1,x_2) = x_2^2, b(x_1,x_2) = 0$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_2^3 + x_1 x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f$$

y, tomando $A(u,v) = 0, B(u,v) = v$ vemos que $[0, x_2^3 + x_1 x_2]^T \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f$, por ello,

$$\begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f.$$

Podemos concluir que, $\mathrm{T}\mathscr{A}_e f = \theta(f)$, esto es, $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = 0$.

4.3 ESTABILIDAD INFINITESIMAL IMPLICA ESTABILIDAD

En la Proposición 4.1.7 vimos que si un germen es estable, entonces también es infinitesimalmente estable. En esta sección veremos que el recíproco también es cierto.

Comenzaremos viendo un lema que nos da una condición infinitesimal para la trivialidad de un desdoblamiento 1-paramétrico.

Lema 4.3.1. Sea $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ un germen suave y F un desdoblamiento 1-paramétrico de f. Entonces, F es trivial si, y solo si, existen gérmenes de campos vectoriales ξ en $(\mathbb{R}^n \times, 0)$ y η en $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0)$ tales que $\xi(t) = 1$, $\eta(t) = 1$ y $dF \circ \xi = \eta \circ F$.

Demostración. Supongamos que F es trivial, entonces, por definición, existen difeomorfismos ϕ, ψ que son desdoblamientos de la identidad en $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, respectivamente, tales que $F = \psi \circ G \circ \phi^{-1}$, donde $G = f \times \mathrm{id}$. Definimos ξ, η como los campos vectoriales dados por

$$\xi = d\phi \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \phi^{-1}, \quad \eta = d\psi \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \psi^{-1}.$$

Como $\phi = (\tilde{\phi}(x,t), t)$ es un desdoblamiento de la identidad,

$$d\phi \circ \frac{\partial}{\partial t} = \left[\begin{array}{ccc|c} & * & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} * \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

y, por cómo hemos definido ξ, $\xi(t) = 1$. Mediante un razonamiento análogo para ψ, se llega a que $\eta(t) = 1$. Se cumple

$$\begin{aligned} dF \circ \xi &= dF \circ d\phi \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \phi^{-1} = d(F \circ \phi) \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \phi^{-1} \\ &\overset{(1)}{=} d(\psi \circ G) \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \phi^{-1} = d\psi \circ dG \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \phi^{-1} \\ &\overset{(2)}{=} d\psi \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ G \circ \phi^{-1} \overset{(3)}{=} \eta \circ \psi \circ G \circ \phi^{-1} = \eta \circ F, \end{aligned}$$

donde en (1) se ha utilizado que F, G son equivalentes, en (2) que $dG \circ (\partial/\partial t) = (\partial/\partial t) \circ G$, como $G(x,t) = (f(x), t)$,

$$\left(dG \circ \frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,t)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & df & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{G(x,t)},$$

y en (3), que $\eta \circ \psi = d\psi \circ (\partial/\partial t)$.

Supongamos ahora que existen campos vectoriales ξ, η tales que $\xi(t) = 1, \eta(t) = 1$ y $dF \circ \xi = \eta \circ F$. Tomando los flujos integrales de ξ, η definimos ϕ, ψ como los únicos difeomorfismos que satisfacen

$$\xi = d\phi \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \phi^{-1}, \quad \eta = d\psi \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \psi^{-1}.$$

Como $\xi(t) = 1$ y $\eta(t) = 1$, se tiene que

$$\phi(x,t) = (\tilde{\phi}(x,t), t), \quad \psi(x,t) = (\tilde{\psi}(x,t), t),$$

luego ϕ, ψ son desdoblamientos de la identidad en $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, respectivamente. Definimos $G = \psi^{-1} \circ F \circ \phi$, usando la regla de la cadena, se tiene

$$dG \circ \frac{\partial}{\partial t} = d(\psi^{-1} \circ F \circ \phi) \circ \frac{\partial}{\partial t} = d\psi^{-1} \circ dF \circ d\phi \circ \frac{\partial}{\partial t}.$$

Por la definición de ξ y la propiedad $dF \circ \xi = \eta \circ F$,

$$dG \circ \frac{\partial}{\partial t} = d\psi^{-1} \circ dF \circ \xi \circ \phi = d\psi^{-1} \circ \eta \circ F \circ \phi.$$

Por la definición de G y de η,

$$dG \circ \frac{\partial}{\partial t} = d\psi^{-1} \circ \eta \circ \psi \circ G = \frac{\partial}{\partial t} \circ G.$$

Si G viene dado por $G(x,t) = (\tilde{g}(x,t), t)$, la condición anterior significa que $\partial\tilde{g}/\partial t = 0$. Efectivamente,

$$dG \circ \frac{\partial}{\partial t} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial t} \\ & * & & \vdots \\ & & & \frac{\partial \tilde{g}_m}{\partial t} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \frac{\partial}{\partial t} \circ G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right],$$

por tanto, $\partial\tilde{g}_i/\partial t = 0$ para $i = 1, \dots, m$. Concluimos que G es el desdoblamiento constante. □

Si γ es un germen de campo vectorial en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) = 1$, escribimos

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Podemos ver $\tilde{\gamma}$ como un campo vectorial sobre la proyección en el primer factor, $\pi_k \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, es decir, como un elemento de $\theta(\pi_k)$. También podemos ver $\tilde{\gamma}$ como un campo vectorial dependiente del tiempo en $\mathbb{R}^k$: dado un representante de γ en un entorno abierto $U \times D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, para cada t, γ_t es el campo vectorial en U dado por $(\gamma_t)_x = \tilde{\gamma}_{(x,t)}$.

Sea $F\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0)$ un desdoblamiento uniparamétrico dado por $F(x,t) = (\tilde{f}(x,t), t)$. La condición infinitesimal $dF \circ \xi = \eta \circ F$ se puede escribir en notación matricial como

$$\begin{bmatrix} df_t & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_t \circ f_t \\ 1 \end{bmatrix},$$

que equivale a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + df_t \circ \xi_t = \eta_t \circ f_t.$$

Queremos introducir versiones relativas de las aplicaciones tf y ωf y del módulo $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$ para desdoblamientos. Las daremos en el caso general de desdoblamientos d-paramétricos aunque en la demostración del teorema utilizaremos el caso uniparamétrico.

Definición 4.3.2 ($\theta_{n+d/d}, \theta(F/d)$). Denotamos por $\theta_{n+d/d}$ al conjunto de gérmenes de campos vectoriales relativos: campos vectoriales en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ en la dirección $\mathbb{R}^n$, es decir, de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Notamos que $\theta_{n+d/d}$ está contenido en θ_d.

De la misma forma, $\theta(F/d)$ denotará el espacio de deformaciones infinitesimales relativas de F: deformaciones infinitesimales en la dirección $\mathbb{R}^m$, esto es, campos vectoriales sobre F de la forma

$$\sum_{j=1}^{m} \eta_j(x,u) \frac{\partial}{\partial y_j},$$

se tiene $\theta(F/d) \subseteq \theta(F)$.

Sea F un desdoblamiento d-paramétrico de un germen f. Entonces, tF y ωF se restringen a morfismos

$$t_{\mathrm{rel}}F\colon \theta_{n+d/d} \to \theta(F/d), \quad \omega_{\mathrm{rel}}F\colon \theta_{m+d/d} \to \theta(F/d).$$

Definimos

$$\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d = \frac{\theta(F/d)}{t_{\mathrm{rel}}F(\theta_{n+d/d}) + \omega_{\mathrm{rel}}F(\theta_{m+d/d})},$$

es un $\mathscr{O}_{m+d}$-módulo vía F, llamado el T^1 *relativo del desdoblamiento* F. En efecto, $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ es una versión de $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$ con parámetros $u_1, \dots, u_d$ y, además

$$\frac{\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d}{\{u_1, \dots, u_d\}\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d} \equiv \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f. \tag{4.1}$$

Lema 4.3.3. Sean $F\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d, 0) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0)$ un desdoblamiento del germen $\mathscr{A}$-finito $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, $G_1, \dots, G_k \in \theta(F/d)$ y $g_i(x) = G_i(x, 0)$ para $i = 1, \dots, k$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. las clases de $G_1, \dots, G_k$ generan $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ sobre $\mathscr{O}_d$,
2. las clases de $g_1, \dots, g_k$ generan $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$ sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que se cumple 1., entonces los elementos de $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ se pueden escribir como

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(u) G_i(x, u), \quad \text{donde } \alpha_i \in \mathscr{O}_d.$$

Utilizamos el isomorfismo de (4.1),

$$\begin{aligned} \phi\colon \frac{\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d}{\{u_1, \dots, u_d\}\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d} &\to \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f \\ [G] &\mapsto [G(x,0)] = [g]. \end{aligned}$$

Dado $[h] \in \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$, existe $[H] \in \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ tal que $H(x, 0) = h(x)$. Como

$$H = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i G_i, \quad \text{con } \alpha_i \in \mathscr{O}_d,$$

mediante ϕ, obtenemos que

$$h = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(0) g_i, \quad \text{con } \alpha_i(0) \in \mathbb{R},$$

como queríamos probar.
Supongamos 2., definimos

$$M := \frac{\theta(F/d)}{t_{\mathrm{rel}} F(\theta_{n+d/d})}, \quad M_0 := \frac{M}{\{u_1, \dots, u_n\}M} \equiv \frac{\theta(f)}{tf(\theta_n)}.$$

En esta parte de la prueba aplicaremos varias veces el Teorema de preparación, comenzaremos viendo que se cumplen sus hipótesis. Todo elemento $G \in \theta(F/d)$ se puede escribir como

$$G = \sum_{i=1}^{m} a_i(x, u) \frac{\partial}{\partial y_i} = (a_1(x, u), \dots, a_m(x, u)) \in \mathscr{O}^m_{n+d},$$

luego $\theta(F/d) \equiv \mathscr{O}^m_{n+d}$ y, por tanto, M está finitamente generado sobre $\mathscr{O}_{n+d}$. De forma similar, $\theta(f)$ está finitamente generado sobre $\mathscr{O}_n$. Utilizando que

$g_1, \dots, g_k$ generan $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f$ sobre $\mathbb{R}$ y que $\omega f(\theta_m)$ como $\mathscr{O}_m$-módulo está generado por $\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_m$,

$$\begin{aligned}\theta(f) &= tf(\theta_n) + \omega f(\theta_m) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\{g_1, \dots, g_k\} \\ &= tf(\theta_n) + \mathscr{O}_m \left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\right\} + \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\{g_1, \dots, g_k\}.\end{aligned}$$

Por tanto, $M_0 = \theta(f)/tf(\theta_n)$ está finitamente generado sobre $\mathscr{O}_m$ con generadores

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, g_1, \dots, g_k\right\}.$$

Aplicando el Teorema de preparación,

$$\dim \frac{M_0}{f^*\mathfrak{m}_m M_0} < \infty.$$

Queremos ver qué ocurre con M. El homomorfismo inducido por F, $F^*\colon \mathscr{O}_{m+d} \to \mathscr{O}_{n+d}$ verifica

$$\begin{aligned}F^*\mathfrak{m}_{m+d} &= F^*(\langle y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_d\rangle) = \rangle F^* y_1, \dots F^* y_m, F^* u_1, \dots, F^* u_d\rangle \\ &= \langle y_1 \circ F, \dots, y_m \circ F, u_1 \circ F, \dots, u_m \circ F\rangle = \langle F_1, \dots, F_m, u_1, \dots, u_d\rangle.\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{M}{F^*(\mathfrak{m}_{m+d})M} = \frac{M}{\langle F_1, \dots, F_m, u_1, \dots, u_d\rangle M} \overset{\phi}{\equiv} \frac{M_0}{\langle f_1, \dots, f_m\rangle M_0} = \frac{M_0}{f^*\mathfrak{m}_m M_0}$$

y $\dim M/F^*\mathfrak{m}_{m+d}M < \infty$. Por el Teorema de preparación, M está finitamente generado sobre $\mathscr{O}_{m+d}$ vía F.

Utilizamos una vez más el Teorema de preparación, ahora con el módulo $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ y el germen de la proyección $\pi\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$, con aplicación inducida $\pi^*\colon \mathscr{O}_d \to \mathscr{O}_{m+d}$. $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ es finitamente generado sobre $\mathscr{O}_{m+d}$ por ser un cociente de M, $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d = M/\omega_{\mathrm{rel}} F(\theta_{m+d/d})$ y $\pi^*\mathfrak{m}_d = \{u_1, \dots, u_d\}$, luego

$$\frac{\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d}{\pi^*\mathfrak{m}_d \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d} = \frac{\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d}{\{u_1, \dots, u_d\}\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d} \equiv \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f.$$

Como $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}} f$ está finitamente generado sobre $\mathbb{R}$, entonces

$$\frac{\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d}{\pi^*\mathfrak{m}_d \mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d}$$

está generado sobre $\mathbb{R}$ por $G_1, \dots, G_k$. Aplicando el Teorema de preparación, concluimos que $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/d$ está finitamente generado sobre $\mathscr{O}_d$ vía π por $G_1, \dots, G_k$. $\square$

Teorema 4.3.4. Estabilidad infinitesimal es equivalente a estabilidad.

Demostración. Supongamos que f es estable. Para cada $\gamma \in \theta(f)$ consideramos el desdoblamiento uniparamétrico $F(x,t) = (f_t(x), t)$ dado por $f_t(x) = f(x) + t\gamma$. Como f es estable, F es trivial y, por el Lema 4.3.1, existen gérmenes de campos vectoriales ξ, η tales que $\xi(t) = 1, \eta(t) = 1$ y $dF \circ \xi = \eta \circ F$. Usando que esta expresión se puede reescribir como

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + df_t \circ \xi_t = \eta_t \circ f_t,$$

tomando $t = 0$, se tiene

$$\gamma = \left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0} = -df \circ \xi_0 + \eta_0 \circ f \in \mathrm{T}\mathscr{A}_e f,$$

ya que $-df \circ \xi_0 \in tf(\xi_0)$ y $\eta_0 \circ f \in \omega f(\eta_0)$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} f = 0$. Veamos que todo desdoblamiento uniparamétrico $F(x,t) = (f_t(x), t)$ es trivial. Por el Lema 4.3.3, sabemos que $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F/1 = 0$. Luego, existen campos vectoriales $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ tales que

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = df_t \circ \tilde{\xi}_t + \tilde{\eta}_t \circ f_t.$$

Viéndolos como campos absolutos, $\xi = -\tilde{\xi} + \partial/\partial t, \eta = \tilde{\eta} + \partial/\partial t$, y sabemos que la expresión anterior equivale a que $dF \circ \xi = \eta \circ F$, aplicando el Lema 4.3.3 obtenemos que F es trivial.

Veamos ahora que cualquier desdoblamiento d-paramétrico $F(x,u) = (f_u(x), u)$ es trivial por inducción sobre d. El caso base lo acabamos de probar. Suponemos que es cierto para todo desdoblamiento $(d-1)$-paramétrico F_1 obtenido de F al tomar $u_d = 0$. Por hipótesis de inducción, F_1 es trivial, es decir, equivalente a $f \times \mathrm{id}$. Esto implica que F_1 también es $\mathscr{A}$-equivalente a $f \times \mathrm{id}$ como germen de aplicación y, por tanto, $\mathrm{T}^1_{\mathscr{A}_e} F_1 = 0$. Como F es un desdoblamiento uniparamétrico de F_1, deducimos que F es un desdoblamiento trivial de F_1 y, por tanto, un desdoblamiento trivial de f. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister y Hans Schönemann. *Singular 4-2-1 — A computer algebra system for polynomial computations*. 2021. URL: http://www.singular.uni-kl.de.

[2] Christopher G. Gibson. *Singular points of smooth mappings*. Research notes in mathematics 25. London ; San Francisco: Pitman, 1979. 239 págs. ISBN: 978-0-273-08410-5.

[3] H. I. Levine. «Singularities of differentiable mappings». En: *Proceedings of Liverpool Singularities — Symposium I*. Ed. por C.T.C. Wall. Vol. 192. Series Title: Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1971, págs. 1-21. ISBN: 978-3-540-05402-3 978-3-540-36531-0. DOI: 10.1007/BFb0066810. URL: http://link.springer.com/10.1007/BFb0066810 (visitado 29-07-2021).

[4] Bernard Malgrange. «Le théorème de préparation en géométrie différentiable. I. Position du problème». En: *Secrétariat mathématique* 15 (1962). URL: http://www.numdam.org/item/SHC_1962-1963__15__A4_0/.

[5] John N. Mather. «Stability of C ∞ Mappings: I. The Division Theorem». En: *The Annals of Mathematics* 87.1 (ene. de 1968), pág. 89. ISSN: 0003486X. DOI: 10.2307/1970595. URL: https://www.jstor.org/stable/1970595?origin=crossref (visitado 29-07-2021).

[6] John N. Mather. «Stability of C ∞ Mappings: II. Infinitesimal Stability Implies Stability». En: *The Annals of Mathematics* 89.2 (mar. de 1969), pág. 254. ISSN: 0003486X. DOI: 10.2307/1970668. URL: https://www.jstor.org/stable/1970668?origin=crossref (visitado 29-07-2021).

[7] David Mond y Juan J. Nuño-Ballesteros. *Singularities of mappings: the local behaviour of smooth and complex analytic mappings*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften volume 357. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 567 págs. ISBN: 978-3-030-34439-9. DOI: 10.1007/978-3-030-34440-5.

[8] Juan J. Nuño Ballesteros y M. Carmen Romero Fuster. *Singularidades de aplicaciones diferenciables*. 2014.

[9] J.J. Sylvester. «XIX. *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares*». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 4.23 (ago. de 1852), págs. 138-142. ISSN: 1941-5982, 1941-5990. DOI: 10.1080/

14786445208647087. URL: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786445208647087 (visitado 28-07-2021).

[10] Hassler Whitney. «The Singularities of a Smooth n-Manifold in (2n - 1)-Space». En: *The Annals of Mathematics* 45.2 (abr. de 1944), pág. 247. ISSN: 0003486X. DOI: 10.2307/1969266. URL: https://www.jstor.org/stable/1969266?origin=crossref (visitado 28-07-2021).

[11] Hassler Whitney. «On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane Into the Plane». En: *Hassler Whitney Collected Papers*. Ed. por James Eells y Domingo Toledo. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1992, págs. 370-406. ISBN: 978-1-4612-7740-8 978-1-4612-2972-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-2972-8_27. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-2972-8_27 (visitado 28-07-2021).