Un laboratorio virtual para el estudio de las superficies regladas

Fernando Giménez-Palomares[a], Andrés Lapuebla-Ferri[b], Antonio-José Jiménez-Mocholí[c] y Juan A. Monsoriu[d]

[a]Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada (IUMPA), fgimenez@mat.upv.es, [b]Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, anlafer0@mes.upv.es, [c]Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, ajimene@mes.upv.es y [d]Departamento de Física Aplicada, Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño, jmonsori@fis.upv.es. Universitat Politècnica de València. Camino de Vera, s/n. 46022 València, España.

Abstract

The ruled surfaces are surfaces that contain straight lines, or more precisely, that can be generated from straight lines that move along a curve following a certain path. The most interesting ones are the warped ones (which have double curvature), the developables (which, intuitively, can be flattened without deforming or distorting them) and the locally developable ones. They play a very important role in engineering and, particularly, in architecture. The use of ruled surfaces in architecture presents great advantages not only from the aesthetic point of view but also for its structural effectiveness. In this work we present a virtual laboratory developed as a graphical user interface of MATLAB and a methodological proposal for the study of the properties of this type of surfaces with the aim that students can strengthen their knowledge about the topic.

Keywords: *ruled surface, directive curve, generating line, stricture line, distribution parameter, virtual laboratory, Matlab.*

Resumen

Las superficies regladas son superficies que contienen rectas, o más precisamente, que se pueden generar a partir de rectas que se van moviendo a lo largo de una curva siguiendo un recorrido determinado. Las más interesantes son las alabeadas (que tienen doble curvatura), las desarrollables (que, intuitivamente, se pueden aplanar sin deformarlas ni distorsionarlas) y las localmente desarrollables. Juegan un papel muy importante en la ingeniería y, particularmente, en la arquitectura. El uso de las superficies regladas en arquitectura presenta grandes ventajas no solo desde el punto de vista estético sino también por su eficacia estructural. En este trabajo presentamos un

ISBN: 978-84-09-02970-9

laboratorio virtual desarrollado como una interfaz gráfica de usuario de MATLAB y una propuesta metodológica para el estudio de las propiedades de este tipo de superficies con el objetivo de que los alumnos puedan afianzar sus conocimientos sobre el tema.

Palabras clave: *superficie reglada, curva directriz, recta generatriz, línea de estricción, parámetro de distribución, laboratorio virtual, Matlab.*

1. Introducción.

Un *laboratorio virtual* (LV) consiste en una herramienta informática de autoaprendizaje interactivo, que permite a los estudiantes el modelado de un sistema, la simulación de un determinado fenómeno o la puesta en práctica de conceptos abstractos. Una de las características más destacables de un LV es el empleo de nuevas tecnologías para captar la atención de los estudiantes, invitándoles a participar en escenarios interactivos de aprendizaje que resulten innovadores (Luengas et al., 2009) y que, al mismo tiempo, sean accesibles a través de una interfaz gráfica atractiva (Depcik y Assanis, 2005).

De forma tradicional, los LV han apoyado los procesos de docencia y aprendizaje de asignaturas tecnológicas o experimentales, en las que las prácticas de laboratorio tienen un peso importante. De hecho, un LV correctamente diseñado puede sustituir dichas prácticas tradicionales de laboratorio, reemplazando costosas inversiones en personal, equipamiento o licencias de software por los actualmente ubículos dispositivos conectados a la red. De este modo, se puede llegar a un número masivo de alumnos salvando cualquier barrera geográfica o temporal (Calvo et al., 2008) (Lorandi et al., 2011).

No obstante lo anterior, el uso de LV se ha extendido hoy en día a asignaturas con escasa componente experimental, como las relacionadas con las Matemáticas (Jones et al., 2011). En el presente trabajo, los autores presentamos el LV *sreglada* que posibilita el aprendizaje autónomo y la puesta en práctica de la teoría de las superficies regladas que configuran algunas estructuras (Figura 1). El laboratorio virtual se ha programado en el entorno de programación del paquete MATLAB (The Mathworks, 2018), aprovechando las capacidades de su Interfaz Gráfica de Usuario (GUI). Los alumnos pueden trabajar de manera autónoma y autodidacta con su propio ordenador, aunque no se disponga de Matlab o no se tengan conocimientos previos sobre él, mediante el uso de una versión ejecutable del laboratorio virtual que también ponemos a su disposición, lo que representa una ventaja respecto a usar Matlab directamente o Wolfram Alpha.

2. Trabajos relacionados.

Existen numerosos trabajos relacionados con el uso de LV de Matemáticas en asignaturas de las ingenierías (Jiménez y Sucerquia, 2008) y (Torres y Martínez, 2015).

ISBN: 978-84-09-02970-9

Figura 1. Estructura de acero cuya geometría es una superficie reglada conocida como *hiperboloide* hiperbólico.

En los últimos años, los autores han presentado varias contribuciones que abordan la implementación de LV como herramientas de apoyo a los procesos de enseñanza y aprendizaje de asignaturas universitarias relacionadas con diversas disciplinas, como las Matemáticas (Giménez et al., 2016) (Giménez et al., 2018), la Elasticidad (Jiménez-Mocholí et al., 2013) o las estructuras de hormigón armado (Lapuebla-Ferri et al., 2017).

Para profundizar sobre superficies regladas y sus propiedades se pueden consultar (Gray et al., 2006), (Do Carmo, 1995), (Porto et al, 2005) y (Lastra, 2015). En (Montesinos, 2016) puede encontrarse un interesante programa de ordenador para el estudio de las superficies y curvas contenidas en ellas.

3. Metodología.

3.1 Fundamentos teóricos.

A continuación vamos a presentar el concepto de superficie reglada, estudiar someramente sus propiedades y describir la herramienta docente que hemos diseñado para su estudio.

Se llama *superficie reglada* a una superfice regular M en el espacio tridimensional que admite una parametrización $x: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma

$$x(t,u) = a(t) + u\, b(t)$$

donde $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $b: I \rightarrow \mathbb{R}$ son curvas en $\mathbb{R}^3$ diferenciables, con I un cierto intervalo. A la curva $a(t)$ se le llama *directriz* o *curva base* y a cada recta $u \rightarrow x(t,u)$ *generatriz*. Se dice que M es la *desarrollable tangencial* de la curva $a(t)$ si $b(t) \coloneqq a'(t)$. Particularmente, M es un *cilindro generalizado* si $b(t) \coloneqq q$, siendo q un punto fijo, y M es un *cono generalizado* si $a(t) \coloneqq p$, siendo p un punto fijo.

ISBN: 978-84-09-02970-9

Las superficies regladas contienen una curva, llamada *línea de estricción*, que se define como la única curva sobre la superficie que corta a las generatrices perpendicularmente en todo punto, y que presenta propiedades interesantes. Se llaman *puntos centrales* a los puntos de la superficie que se encuentran en la traza de la línea de estricción.

Es conocido que la línea de estricción es la curva parametrizada por:

$$\gamma(t) := a(t) - \frac{\big(a'(t) \wedge b(t)\big) \cdot \big(b'(t) \wedge b(t)\big)}{\big\|\big(b'(t) \wedge b(t)\big)\big\|^2} b(t)$$

Otra función interesante, que permite clasificar las superficies regladas, es el *parámetro de distribución*, definido por:

$$t \to b'(t) \cdot \big(a'(t) \wedge b(t)\big)$$

3.2 El LV sreglada

Al ejecutar el LV *sreglada* se abre en primer lugar la ventana de presentación mostrada en la Figura 2.

Figura 2. Ventana inicial del LV *sreglada*.

Los parámetros de entrada son los siguientes:

- **Desplegable inicial:** a elegir entre *ejemplo del usuario*, *hiperboloide de una hoja*, *paraboloide hiperbólico*, *helicoide*, *conoide de Plücker*, *cono circular*, *cilindro circular*, *Paraguas de Whitney* y *Arista Cónica de Wallis*.

27 Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas (2019)
ISBN: 978-84-09-02970-9

- **a(t):** expresión correspondiente a la curva generatriz $a(t)$. Necesariamente, hay que utilizar la letra *t* como variable.
- **b(t):** expresión correspondiente a la curva $b(t)$. De nuevo, hay que utilizar la letra t. Si se deja en blanco este recuadro, automáticamente se toma $b(t)$ como $a'(t)$ sin necesidad de introducir la expresion.
- **Intervalo para t:** vector $[t_i, t_f]$ que define el intervalo usado para las curvas $a(t)$ y $b(t)$.
- **n:** número de subdivisiones del intervalo para t, usadas para la gráfica.
- **Intervalo para u:** vector $[u_i, u_f]$ que define el intervalo usado para las rectas generatrices.
- **m:** número de subdivisiones del intervalo para u, usadas para la gráfica.
- **Tipo de gráfica:** desplegable en el que se puede elegir el tipo de gráfica que se desea generar: *superficie*, *reconstrucción de la superficie a partir de rectas generatrices*, *reconstrucción de la superficie a partir de curvas paralelas a la directriz*, *superficie y línea de estricción*, y *gráfica del parámetro de distribución*.

Al pulsar el botón **Guía de usuario** se abre un documento en pdf con instruciones sobre el uso del programa. Si se pulsa el botón **PULSAR BOTÓN** se genera el gráfico elegido en una nueva ventana. Si se ha elegido la opción de *reconstrucción de la superficie a partir de rectas generatrices* o la opción de *reconstrucción de la superficie a partir de curvas paralelas a la directriz* el gráfico generado es animado. Es posible ampliar la ventana y rotar las gráficas generadas usando el ratón.

El usuario tiene la opción de introducir directamente las expresiones correspondientes a las curvas que definen las superficies regladas seleccionando *ejemplo del usuario* en el desplegable inicial o bien seleccionar alguno de los ejemplos, en cuyo caso no es necesario introducir ninguna expresión.

3.3 Metodología propuesta.

Se propone la siguiente metodología a seguir en las asignaturas de matemáticas (presentes en las titulaciones de ingeniería o de arquitectura) en las que se estudian las superficies regladas:

1) Introducción en las clases de aula de los conceptos teóricos necesarios.
2) Presentación del LV *sreglada* y descripción de su uso.
3) Propuesta de una serie de ejercicios ilustrativos en donde los alumnos utilicen el LV *sreglada* para dibujar diversas superficies regladas y resuelvan, en su caso, analíticamente las cuestiones planteadas.

Para valorar esta metodología, propondremos una breve encuesta al término de su implementación.

ISBN: 978-84-09-02970-9

4. Resultados.

4.1 Ejemplo.

Se desea representar la superficie $x: [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, dada por:

$$x(t,u) \coloneqq \big(0,0,\mathrm{sen}(6t)\big) + u(\cos(t)\,, \mathrm{sen}(t), 0)$$

usando $\boldsymbol{n = 60}$ y $\boldsymbol{m = 20}$. La Figura 3 muestra la gráfica de la superficie.

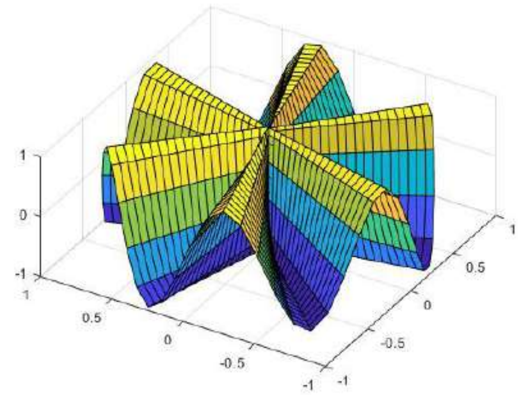

Figura 3. Gráfica de la superficie del ejemplo 4.1.

4.2 Ejemplo.

Consideremos la banda de Moebius generada a partir de $x: [0,2\pi] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3$, siendo:

$$x(t,u) \coloneqq (\cos(t)\,, \mathrm{sen}(t), 0) + u\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t)\,, \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{sen}(t)\,, \mathrm{sen}(t/2), 0\right)$$

La figuras 4 y 5 muestra los resultados de la aplicación del LV *sreglada.*

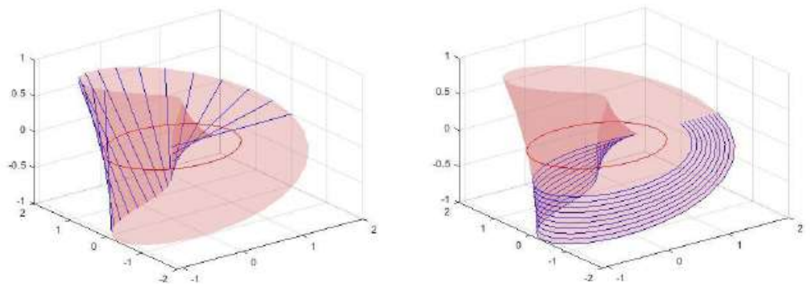

Figura 4. Generación de la superficie a partir de las rectas generatrices y a partir de las curvas paralelas a la directriz.

ISBN: 978-84-09-02970-9

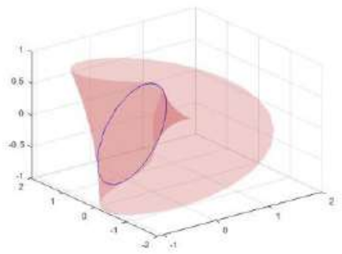

Figura 5. Superficie y línea de estricción.

En las clases de informática, a la hora de trabajar con ejemplos de superficies regladas, también es recomendable fórmular cuestiones para resolverse de manera analítica: clasificar la superficie y calcular explícitamente la curvatura de gauss, la línea de estricción y el parámetro de distribución. Otro ejercicio interesante consiste en estudiar algunos de las construcciones más famosas basadas en superficies regladas y tratar de generarlas a partir del LV.

5. Conclusiones.

En este trabajo hemos presentado el desarrollo y el eventual empleo del LV *sreglada* en asignaturas del ámbito de la educación superior en las que se estudien las superficies regladas, principalmente aquellas relacionadas con las Matemáticas.

Como sucede con cualquier LV virtual que esté convenientemente diseñado, el LV *sreglada* puede representar una excelente herramienta para el apoyo a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se destaca su facilidad de uso y la rapidez en el trazado de las gráficas correspondientes, lo que permite a las personas usuarias profundizar sobre el tema y afianzar los conocimientos teóricos adquiridos previamente en el aula. La interactividad posibilita que se puedan controlar las variables que intervienen, así como analizar su influencia en el resultado.

6. Agradecimientos.

Los autores agradecen al Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València por su ayuda al Equipo de Innovación y Calidad Educativa MOMA.

Referencias.

Gray, A., Abbena, E., Salamon, S. (2006). *Modern differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, Chapman &Hall/CRC.

Calvo, I., Zulueta, E., Gangoiti, U., López, J. (2008). *Laboratorios remotos y virtuales en enseñanzas técnicas y científicas*, Ikastorratza, revista electrónica de Didáctica. Tercer número. http://ehu.es/ikastorratza/castellano/index_cast

Depcik, C., Assanis, D.N. (2005). *Graphical user interfaces in an engineer in educational environment*, Comput. Appl. Eng. Educ., Vol. 13, pp 48-59.

Do Carmo, M. P. *Differential geometry of curves and surfaces* (1976). Englewood Cliks, New Jersey, Prentice Hall.

Giménez, F., Monsoriu, J. A., Gimenez, J. F. (2016). *Problemas de contorno en ecuaciones diferenciales de segundo orden: una herramienta docente.* 24 Congreso Universitario de innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas (CUIEET 2016).

Giménez, F., Gimenez, J. F., Monsoriu, J. A., Férnandez de Córdob, P. J. (2018) *Using cubic splines to solve second order linear differential equations,* 12th International Technology, Education and Development Conference (INTED 2018), pp. 5617-5622.

Jiménez, A., Sucerquia, E. (2008*). Laboratorio virtual de matemáticas: el aula matic*. Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Jiménez-Mocholí A. J., Giménez-Palomares F., Lapuebla-Ferri A. (2013). *Círculos de Mohr: un laboratorio virtual para la enseñanza y el aprendizaje de estados tensionales planos*. *Modelling in Science Education and Learning, 6(1)(12).* 157-171.

Jones, K., Lagrange, J. B., Lemut, E. (2001). *Tools and Technologies in Mathematical Didactics*. In: J. Novotna (Ed), European Research in Mathematics. Education II. Prague: Charles University, pp. 125-127.

Lapuebla-Ferri A., Giménez-Palomares F., Jiménez-Mocholí A. J., Juan A. Monsoriu (2017). *Aprendizaje interactivo de los dominios de deformación de elementos de hormigón armado*. 25 CUIEET (Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas). Badajoz, España.

Lastra A. (2015). *Geometría de curvas y superficies con aplicaciones en arquitectura*. Ed. Paraninfo.

Lorandi, A. P., Hermida, G., Hernández, J., Ladrón de Guevara, E. (2011). *Los Laboratorios Virtuales y Laboratorios Remotos en la Enseñanza de la Ingeniería*. Revista Internacional de Educación en Ingeniería. AcademiaJournals.com, Volumen 4, pp. 24-30.

Luengas, L., Guevara, J., Sánchez, G. (2009). *¿Cómo desarrollar un Laboratorio Virtual? Metodología de Diseño*. En J. Sánchez (Ed.): Nuevas Ideas en Informática Educativa ,Volumen 5, pp. 165 – 170, Santiago de Chile.

MATHWORKS, (2018) *MATLAB® Creating Graphical User Interfaces*. The MathWorks, Inc. 500 pp.

Montesinos, A. Página de Ángel Montesinos Amilibia. Profesor jubilado del Departamento de Geometría y Topología de la Univèrsitat de València. http://www.uv.es/montesin/ [Consulta:20 abril 2019]

Porto, A. M., Costa, A: F., Gamboa, J. M. (2005) *Notas de geometría diferencial de curvas y superficies*. Ed. Sanz y Torres S.L.

Torres, S. L., Martínez, E. J. (2015). *Laboratorio virtual de matemáticas como estrategia didáctica para fomentar el pensamiento lógico*. Revista Academia y Virtualidad 8, Volumen 2. 73-84.

ISBN: 978-84-09-02970-9