

CÁLCULO 3D DE LA POTENCIA ACÚSTICA RADIADA POR UNA RUEDA FERROVIARIA A PARTIR DE LA RESPUESTA TEMPORAL CON EFECTOS GIROSCÓPICOS Y COMPORTAMIENTO NO LINEAL

X. Garcia-Andrés¹, F. D. Denia¹, J. Martínez-Casas¹ y L. Baeza²

1: Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica(CIIM)
Universitat Politècnica de València
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España
E-mail: xagaran@upv.es, Web page: <http://www.upv.es>

2: Institute of Sound and Vibration Research (ISVR)
University of Southampton
Southampton SO17 1BJ, United Kingdom
E-mail: L.Baeza@soton.ac.uk, Web page:<http://www.southampton.ac.uk>

Palabras clave: Modelo de potencia acústica radiada, modelo dinámico, ruido de rodadura, interacción rueda-carril no lineal, TWINS, rueda ferroviaria, eficiencia de radiación.

Resumen *El objetivo de este trabajo es el desarrollo de un modelo de radiación acústica para una rueda de tren a partir de su respuesta temporal, calculada con un modelo de interacción dinámico vehículo-vía que considera la rotación de la rueda y sus efectos giroscópicos, la dinámica de alta frecuencia asociada a la flexibilidad de los sólidos y las no linealidades del contacto rueda-carril. Además, se realiza una comparación con los resultados proporcionados por el programa comercial TWINS. La implementación acústica se ha realizado sobre un modelo 3D de elementos finitos (EF) de una rueda ferroviaria excitada por una rugosidad pseudoaleatoria en la superficie del carril. A diferencia de los métodos de cálculo de la radiación acústica basados en funciones de respuesta en frecuencia lineales, el modelo utilizado en este trabajo está desarrollado en el dominio temporal y permite tener en cuenta las no linealidades presentes en el sistema. En la metodología propuesta, inicialmente se divide la superficie de la rueda estudiada en diversos elementos de superficie y se calcula la velocidad normal de cada uno de ellos para cada modo de vibración. En segundo lugar, se calculan las eficiencias acústicas correspondientes a cada modo de vibración a partir de una formulación semianalítica, la cual requiere conocer el número de diámetros nodales por modo. Por último, la potencia acústica se obtiene mediante una suma de contribuciones modales, pues se conoce la contribución acústica de cada modo de vibración.*

1. INTRODUCCIÓN

El ruido de rodadura constituye en la actualidad un problema relevante asociado al transporte ferroviario y, entre sus fuentes, la rueda juega un papel fundamental en la radiación acústica, especialmente a frecuencias altas [1]. Debido a una creciente necesidad de controlar el ruido causado por este tipo de transporte y tratar de evitar las molestias que genera, especialmente a su paso por los núcleos de población, resulta cada vez más importante el desarrollo de modelos que expliquen y describan los mecanismos y niveles de emisión de sonido, y que faciliten el diseño de soluciones constructivas que cumplan la legislación vigente. Concretamente el presente trabajo se centrará en la modelización y el cálculo de los niveles de potencia acústica emitidos por una rueda ferroviaria.

La utilización de la potencia acústica radiada para el estudio del ruido emitido por un vehículo ferroviario y las técnicas para mitigarlo es una práctica extendida dentro de la investigación de los problemas acústicos [2]. Dicha magnitud permite conocer la energía acústica total emitida por el vehículo estudiado, es relativamente independiente de diversos factores ambientales, y permite analizar cómo influyen cambios en la configuración del vehículo y la vía en el campo sonoro generado. A diferencia de otras aproximaciones como el uso del campo de presión para el estudio de problemas acústicos, desarrollar un modelo de cálculo de la potencia acústica radiada tiene la ventaja de no estar influenciado por las condiciones externas, al poderse tratar la potencia sonora como si se tratara de una propiedad intrínseca del sistema [3].

El nivel de potencia acústica radiada dependerá en primer lugar de la dinámica de la rueda y la velocidad en la vibración de su superficie. En el ámbito de la dinámica ferroviaria, debido a la complejidad de la interacción rueda/carril y el cálculo de su respuesta dinámica, la mayoría de los modelos acústicos actuales se centran en linealizar el problema y obtener las velocidades mediante Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRFs) [4]. Pese a las ventajas desde el punto de vista de coste computacional, el uso de FRFs introduce limitaciones en el realismo y precisión de las predicciones y no permite la inclusión de las no linealidades presentes en el sistema. Aunque existen ciertos tipos de FRF adaptadas para poder considerar comportamientos no lineales, estas no dejan de tener sus propios inconvenientes y limitaciones [5]. Las no linealidades pueden tener una contribución significativa en la radiación acústica, destacando especialmente los casos donde se consideran niveles altos de rugosidad en el carril, o en los que se dan discontinuidades tales como juntas de carril, planos de rueda, desvíos, etc. [6, 7, 8]. Por todo ello, es importante que el modelo incorpore en su formulación las no linealidades presentes en el sistema. A diferencia de los modelos basados en FRFs, la metodología presentada en este trabajo es capaz de tener en cuenta dichas no linealidades al calcular la dinámica del sistema en el dominio del tiempo [6].

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en el desarrollo e implementación de un modelo de cálculo de la potencia acústica radiada por una rueda de tren a partir de su respuesta temporal. Este modelo deberá ser capaz de incorporar las no linealidades producidas en la interacción entre la rueda y el carril. Además, el modelo dinámico usado para obtener la respuesta temporal también tendrá en consideración la rotación y sus efectos giroscópicos y la dinámica de alta frecuencia asociada a la flexibilidad de los sólidos. Concretamente, la implementación

acústica se ha realizado sobre un modelo 3D de elementos finitos (EF) de una rueda ferroviaria excitada por una rugosidad pseudoaleatoria en la superficie del carril, cuyo espectro máximo viene determinado por la norma ISO 3095. El trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce el modelo de simulación dinámica vehículo-vía y el concepto de eficiencia acústica, se detalla la formulación utilizada para su obtención y se describe el procedimiento de cálculo de la potencia acústica radiada. En la sección 3 se presentan los resultados obtenidos mediante el modelo implementado y su validación con los datos generados por el software comercial TWINS [9]. Finalmente, en la sección 4 se detallan las conclusiones más relevantes.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1. Modelo dinámico

En esta sección se describe brevemente el modelo de interacción dinámica vehículo-vía. Para una descripción más extensa y detallada de la formulación completa consultar la referencia [10]. Dicho modelo de interacción vehículo-vía tomado como base del cálculo de la potencia acústica radiada, es capaz de resolver la dinámica en el dominio temporal, teniendo en cuenta la rotación de la rueda y los efectos giroscópicos que genera, la dinámica de alta frecuencia asociada a la flexibilidad de los sólidos y las no linealidades presentes en el contacto rueda-carril. El modelo de interacción rueda-carril y el sistema de coordenada usadas para el eje montado pueden verse en la fig. 1.

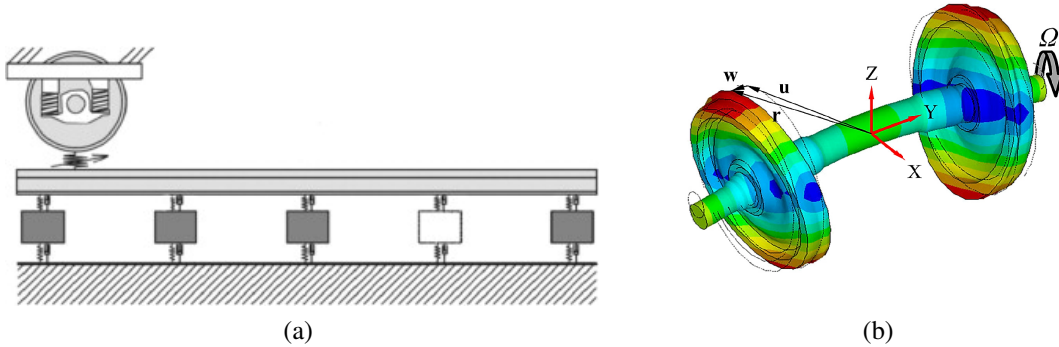


Figura 1: Modelo de interacción rueda-carril (a) y sistema de coordenadas del eje montado (b).

Así, el vector \mathbf{r} representado en la fig. 1b es el vector de posición final de un punto espacial en la configuración deformada, definido como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u}, t), \quad (1)$$

siendo \mathbf{u} el vector de coordenadas Eulerianas en un sistema de referencia fijo y \mathbf{w} el desplazamiento asociado a la flexibilidad y movimientos de sólido rígido. A partir de la Ec. (1) se puede obtener la velocidad a través de la derivada material de \mathbf{r}

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i} + \dot{\mathbf{w}} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \quad (2)$$

donde v_i son las componentes de la velocidad asociada a la rotación de cuerpo rígido. Finalmente, adoptando un planteamiento modal y mediante la aplicación del principio de Lagrange se obtiene la ecuación de movimiento del eje:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega\tilde{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{q}} + \left(\tilde{\mathbf{D}} + \Omega^2(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}})\right)\mathbf{q} = \Omega^2\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{Q}, \quad (3)$$

donde \mathbf{q} es el vector de coordenadas nodales, Ω es la velocidad angular del eje, la matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ representa las fuerzas de inercia debidas a la aceleración de Coriolis, $\tilde{\mathbf{A}}$ está relacionada con la aceleración convectiva, $\tilde{\mathbf{C}}$ considera las fuerzas de inercia que surgen tras la deformación del sólido y $\tilde{\mathbf{c}}$ las fuerzas de inercia constantes asociadas a la configuración no deformada del sólido. El vector \mathbf{Q} representa la fuerza generalizada debida a las cargas externas aplicadas en el sólido y la matriz $\tilde{\mathbf{D}}$ es la matriz de rigidez modal, representada por una matriz diagonal que contiene el cuadrado de las frecuencias naturales no amortiguadas del sólido.

2.2. Eficiencia de radiación

Para llevar a cabo la descripción del modelo de potencia acústica radiada, se debe introducir primero el concepto de eficiencia de radiación. Ésta se define como la ratio que expresa la cantidad de potencia acústica radiada respecto a la de un pistón de la misma área en una pared infinita vibrando uniformemente con la misma velocidad cuadrática media a una frecuencia tal que el diámetro del pistón exceda considerablemente la longitud de onda acústica o, dicho de otra manera, que el número de Helmholtz $ka \gg 1$ [3]. La eficiencia de radiación, para cada modo de vibración, es:

$$\sigma_n = \frac{W_n}{\rho c_0 S \langle \overline{v^2} \rangle_n} \quad (4)$$

donde W_n es la potencia acústica radiada por el modo de vibración n -ésimo, ρ es la densidad del aire, c_0 es la velocidad del sonido en el aire, S es el área de radiación y $\langle \overline{v^2} \rangle_n$ es la velocidad cuadrática media para cada modo de vibración n -ésimo. La velocidad cuadrática media se define como

$$\langle \overline{v^2} \rangle_n = \frac{1}{S} \int_S \left[\frac{1}{T} \int_0^T v_{\perp}^2 dt \right] dS \quad (5)$$

siendo T el periodo de tiempo sobre el que se estima la velocidad cuadrática media y v_{\perp} la proyección de la velocidad en la dirección normal a la superficie.

Conociendo las eficiencias de radiación correspondientes a cada modo de vibración, se obtendrá posteriormente la potencia acústica radiada por la rueda, tal y como se explica en el apartado 2.3. Además, la eficiencia de radiación también dependerá de si la superficie radia en dirección axial o radial [11]. Así, con el fin de reducir el coste computacional y mantenerlo dentro de un rango adecuado, se ha optado por usar para el modelo desarrollado en el presente trabajo una formulación semianalítica que permite obtener las eficiencias acústicas de cada modo de vibración para un determinado rango de frecuencia a partir únicamente de la geometría de la rueda y del número de diámetros nodales del modo. El desarrollo completo de la formulación fue publicado originalmente en [11] y, consecuentemente, este apartado se limitará exclusivamente a mostrar las formulas implementadas para el desarrollo de este trabajo.

Para la radiación axial, la eficiencia de radiación viene descrita por

$$\sigma_{axi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^{2m+4}}, \quad (6)$$

donde m es el número de diámetros nodales y f_c es una frecuencia de transición para el movimiento axial definida por

$$f_c = \frac{c_0 \mu}{2\pi r} \quad (7)$$

donde r es el radio de rodadura y μ es un parámetro de escala definido como:

$$\mu = 1.90 + 1.015 m - 0.0189 m^2. \quad (8)$$

Por último, la eficiencia para el caso de radiación radial es:

$$\sigma_{rad} = \begin{cases} \frac{\gamma}{1 + \left(\frac{f_r}{f}\right)^2} & \text{si } m = 0 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{f_r}{f}\right)^{2m}} \frac{\gamma}{1 + \left(\frac{f_r}{f}\right)^2} & \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (9)$$

con

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{\frac{S_{out} - S_{in}}{S_{out} + S_{in}}} & \text{para } f < f_{r3} \\ 1 & \text{para } f \geq f_{r3} \end{cases} \quad (10)$$

y

$$f_{r1} = \frac{120 m}{\sqrt{r/0.42}} \quad (11)$$

$$f_{r2} = \frac{800}{\sqrt{r/0.42}} \quad (12)$$

$$f_{r3} = \frac{280 + 150 m}{\sqrt{r/0.42}} \quad (13)$$

donde S_{in} y S_{out} son las áreas de las superficies interior y exterior de la llanta respectivamente.

2.3. Potencia acústica radiada

La potencia acústica radiada se define como la cantidad de energía por unidad de tiempo radiada por una fuente sonora. Partiendo de Ec. (4), es inmediato que

$$W = \sum_n W_n = \sum_n \sigma_n \rho_0 c_0 S \langle \overline{v^2} \rangle_n \quad (14)$$

A continuación, si se divide la superficie de la rueda en secciones suficientemente pequeñas, de ahora en adelante elementos de superficie, se puede expresar Ec. (5) como

$$\langle \overline{v^2} \rangle_n = \frac{1}{S} \sum_{e=1}^{N_e} A_e \overline{v_e^2} \quad (15)$$

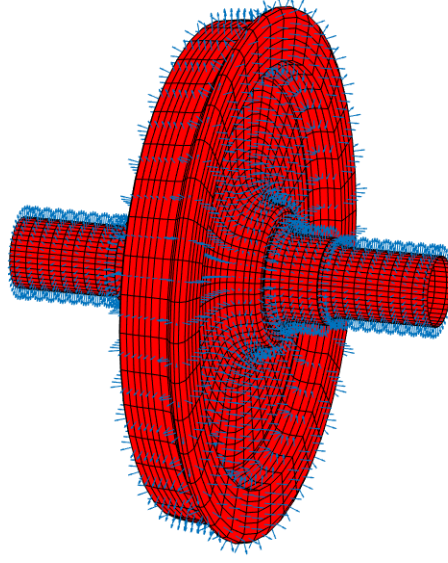


Figura 2: Elementos de superficie de una rueda ferroviaria con los respectivos vectores normales a cada superficie.

donde N_e es el número total de elementos de superficie y A_e y $\overline{v_e^2}$ son respectivamente el área y la velocidad normal media de cada elemento.

Finalmente, después de seleccionar los elementos de superficie en función de si radian en la dirección radial o axial y obtener las eficiencias correspondientes de cada modo tal y como se ha descrito en el apartado 2.2, se puede describir la potencia acústica radiada por la rueda mediante

$$W = \rho c_0 \sum_m [\sigma_{axi}^m (\langle (\mathbf{v}_{axi}^m)^2 \rangle) \cdot \mathbf{S}_{axi} + \sigma_{rad}^m (\langle (\mathbf{v}_{rad}^m)^2 \rangle) \cdot \mathbf{S}_{rad}] \quad (16)$$

donde $\sigma_{axi,rad}^m$ son las eficiencias de radiación de cada modo para los elementos que radian en la dirección axial y radial respectivamente y $\mathbf{S}_{axi,rad}$ contiene los vectores de superficie de cada elemento radiando axial o radialmente.

Por tanto, para el cálculo de la potencia acústica radiada se parte en primer lugar de la información obtenida a partir del modelo dinámico descrito en el apartado 2.1. Concretamente, se parte de una matriz $\dot{\mathbf{q}}(t)$ de amplitudes de velocidad modales donde \dot{q}_{ij} representa $\dot{q}_i(t_j)$, es decir, la amplitud de velocidad del modo i -ésimo en el instante de tiempo t_j . También se dispone de la matriz de modos Φ en donde Φ_{nm} representa el valor de la componente modal del modo de vibración m para el grado de libertad n . La velocidad del sistema para cada nodo en cada instante de tiempo queda definida por tanto como

$$\mathbf{v} = \Phi \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (17)$$

siendo la contribución a la velocidad \mathbf{v} de cada modo m la siguiente:

$$\mathbf{v}^m = \Phi^{(m)} \cdot \dot{\mathbf{q}}_m, \quad (18)$$

donde $\Phi^{(m)}$ es la columna m -ésima de Φ .

A continuación, se seleccionan las caras externas de los elementos que conforman la malla de la rueda, que serán los elementos de superficie, y se calcula el vector normal a cada superficie obteniendo una malla de elementos de superficie tal y como muestra la fig. 2. Seguidamente, se procederá a calcular a partir del campo de velocidades \mathbf{v} el vector de las velocidades medias cuadráticas en la dirección normal de cada elemento de superficie para cada modo de vibración $\langle(\mathbf{v}^m)^2\rangle$. Finalmente, con esta información se realizará el cálculo de la potencia acústica mediante la Ec. (16).

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la obtención de resultados con los modelos propuestos se considerará la configuración concreta definida en este apartado. La simulación dinámica se ha realizado considerando una velocidad del vehículo de $V = 160$ km/h y las propiedades especificadas en la tabla 1. Por lo que respecta a la rueda, en la fig. 3 se muestra un esquema con su configuración y sus propiedades están especificadas también en la tabla 1. En todos los cálculos, los valores usados para la velocidad del sonido y la densidad del aire han sido $c_0 = 343.21$ m/s y $\rho_0 = 1.20$ kg/m³ respectivamente.

El nivel de potencia acústica radiada, expresado en decibelios, se lleva a cabo en base a la siguiente definición:

$$L_W = 10 \log_{10}\left(\frac{W}{W_{ref}}\right), \quad (19)$$

usando la potencia acústica de referencia para el aire $W_{ref} = 10^{-12}$ W.

3.1. Comparación de resultados

Se procede a comparar en esta sección los cálculos del nivel de potencia acústica realizados con el modelo presentado en este trabajo y los realizados mediante TWINS. En la fig. 4 se presenta la comparación de los resultados del nivel de potencia acústica de ambas simulaciones por bandas de tercio de octava. El filtro de contacto usado para la rugosidad en el modelo ha sido el desarrollado por Remington en [12]. Se puede apreciar claramente en dicha figura que los resultados del modelo desarrollado y los de TWINS presentan ciertas discrepancias a tener en cuenta. Tal y como es de esperar teniendo en cuenta el comportamiento de las eficiencias acústicas de la rueda, así como la elevada velocidad del vehículo y el espectro de rugosidad de excitación, el contenido en frecuencia del nivel de potencia sonora es menor en el rango de bajas frecuencias que en el de frecuencias medias y altas. Respecto a las diferencias observadas, se comprueba principalmente que las discrepancias más relevantes entre ambos resultados se encuentran en el rango de 500 - 1000 Hz y el de 2000 - 3000 Hz. Las causas más probables que se valoran son: la consideración de fenómenos no lineales en la respuesta dinámica usada para el cálculo de la potencia acústica, las cuales no se consideran en el de TWINS; las diferencias producidas por el uso de amortiguamiento viscoso en vez de amortiguamiento estructural y las diferencias en el tratamiento de la rugosidad entre ambos modelos. También se ha de valorar la influencia del modelo de contacto. Por ejemplo, el modelo de contacto tangencial de TWINS se basa en la teoría de Knothe y Gross-Thebing [13], mientras que en el modelo presentado aquí

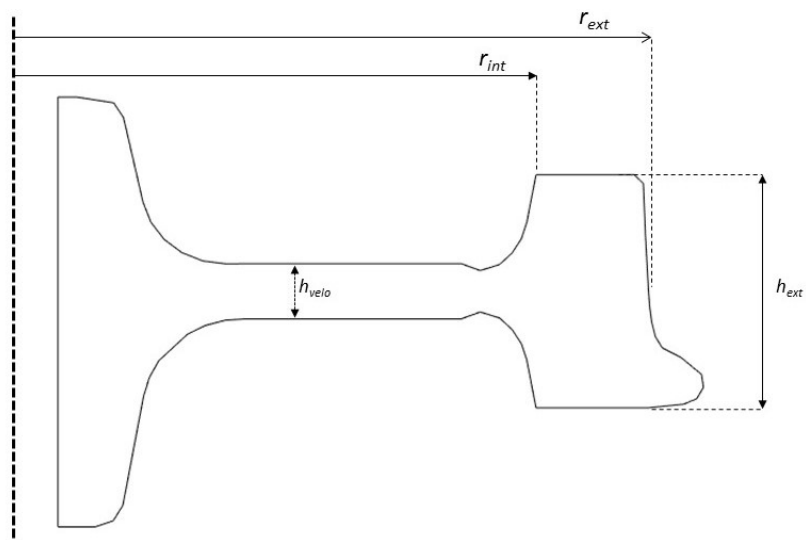


Figura 3: Esquema de la sección transversal de una rueda de ferrocarril.

Tabla 1: Propiedades de los componentes usados en la simulación y cálculo de la potencia acústica.

Datos del modelo dinámico de la rueda		Datos de la vía	
Carga de la rueda	75.5 kN	Espacio entre traviesas	0.6 m
Rigidez longitudinal de la suspensión primaria	4.5 MN/m	Número de traviesas	70
Rigidez lateral de la suspensión primaria	7.1 MN/m	Masa de la traviesa	324 kg
Rigidez vertical de la suspensión primaria	0.81 MN/m	Rigidez del balasto	200 MN/m
Amortiguamiento vertical de la suspensión primaria	30 kN s/m	Amortiguamiento del balasto	150 kN s/m
Amortiguamiento longitudinal de la suspensión primaria	100 kN s/m	Rigidez de la almohadilla del carril	1 GN/m
Amortiguamiento lateral de la suspensión primaria	100 kN s/m	Amortiguamiento de la almohadilla del carril	50 kN s/m
		Sección transversal del carril	UIC60

Datos de la rueda	
Radio	0.46 m
Modulo de Young	$2.10 \cdot 10^{11}$ N/m ²
Coefficiente de Poisson	0.3
Densidad	7800 kg/m ³
r_{int}	0.39 m
r_{ext}	0.46 m
h_{ext}	0.135 m
h_{velo}	0.032 m
S_{int}	0.25 m ²
S_{ext}	0.39 m ²

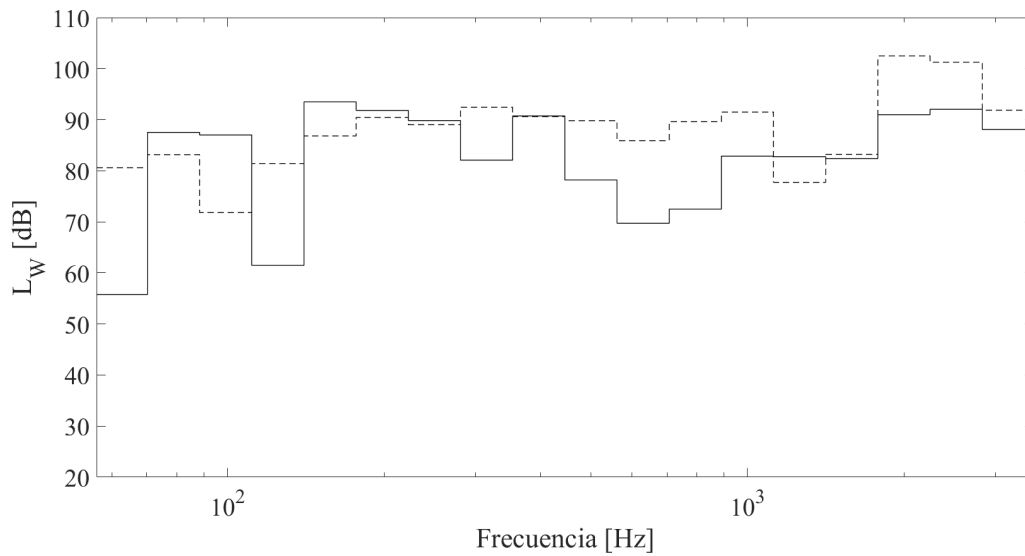


Figura 4: Nivel de potencia acústica radiada: —, Modelo desarrollado; - -, TWINS.

se utiliza el modelo de contacto tangencial de FASTSIM [14].

A continuación, en las fig. 5, 6 y 7 se representa la movilidad vertical, cruzada vertical/lateral y lateral respectivamente, en el punto de contacto obtenida a partir de la información modal usada en cada uno de los programas. En el caso del modelo presentado en el presente trabajo, se ha obtenido la movilidad también mediante superposición modal, por lo que la respuesta está linealizada y puede ser comparada con la obtenida a través de TWINS. Se observa claramente como ambas muestran un comportamiento similar, tal y como cabría esperar. Como posible causa de la diferencia entre las amplitudes de los picos en uno y otro caso se considera las diferencias en el tratamiento dado al amortiguamiento.

Finalmente, en la fig. 8 se han representado los niveles de potencia acústica en dB(A). En esta escala el contenido a bajas frecuencias es menor y, por tanto, las diferencias existentes entre el modelo descrito y TWINS en ese rango de frecuencias serán menos relevantes. Aun así, cabe destacar que sigue habiendo discrepancias importantes entre el nivel de potencia acústica predicho por TWINS y el predicho por el modelo que será necesario estudiar con más detenimiento.

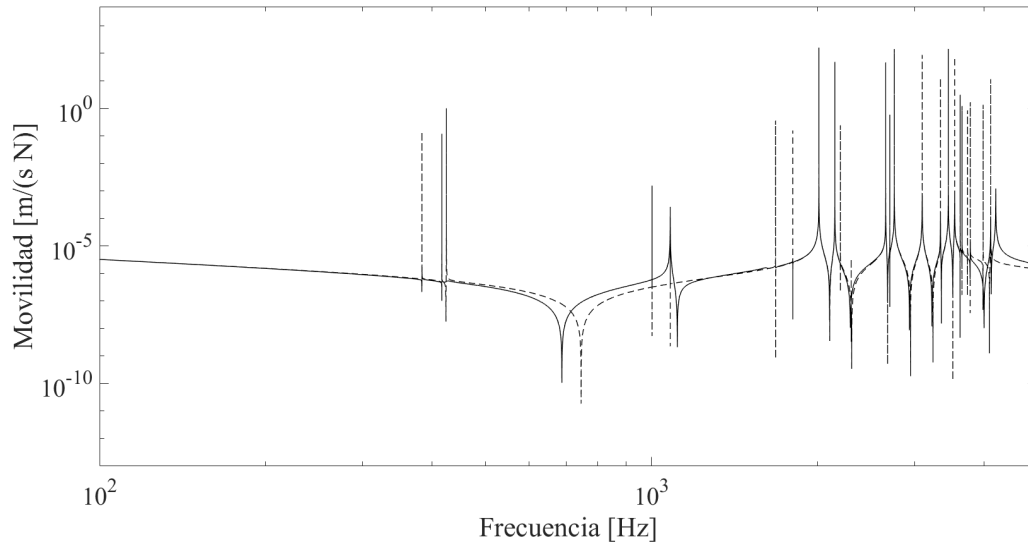


Figura 5: Comparación de la movilidad directa en dirección vertical: —, modelo desarrollado; - -, TWINS

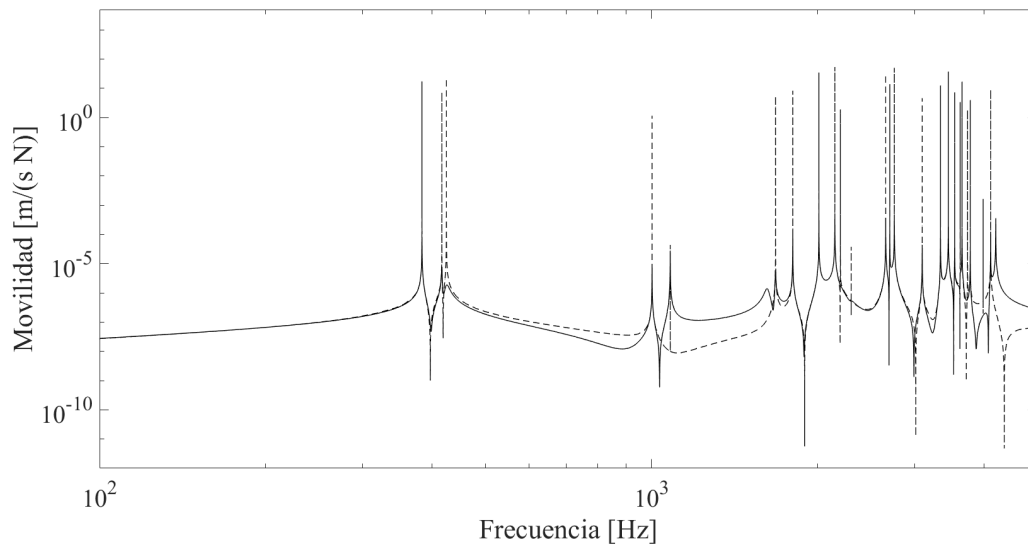


Figura 6: Comparación de la movilidad cruzada vertical/lateral. —, modelo desarrollado; - -, TWINS

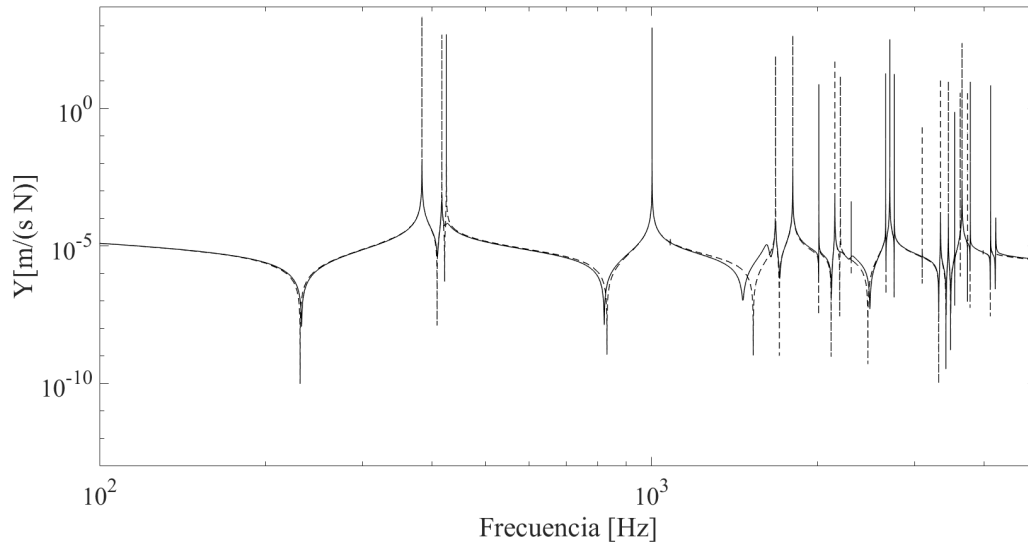


Figura 7: Comparación de la movilidad directa en dirección lateral: —, modelo desarrollado; - -, TWINS

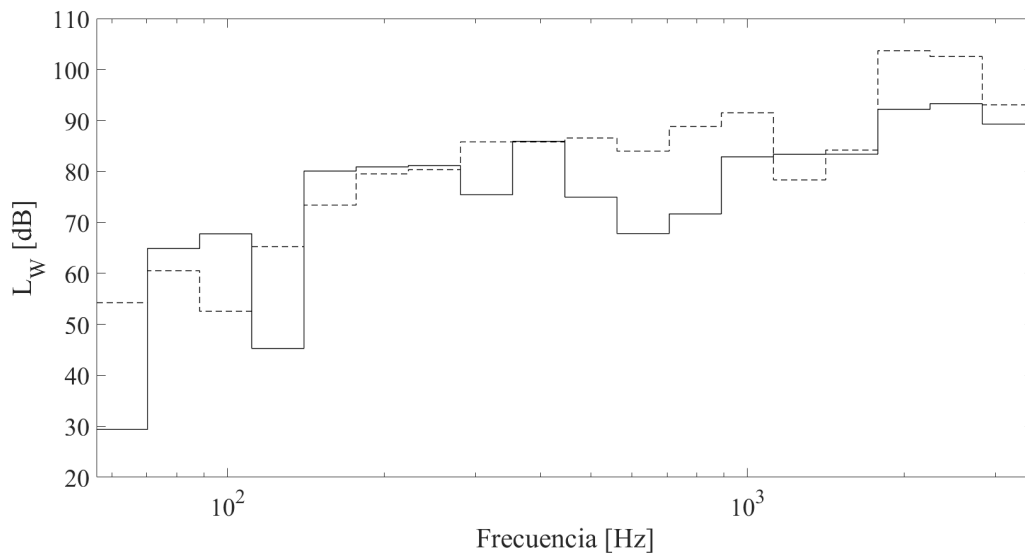


Figura 8: Nivel de potencia acústica radiada en dB(A): —, modelo desarrollado; - -, TWINS

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha llevado a cabo la implementación de un modelo de cálculo de radiación acústica de una rueda ferroviaria a partir de su respuesta dinámica en el dominio del tiempo. Dicho modelo es capaz de incluir en su formulación las no linealidades propias de un sistema ferroviario, además de tener en consideración la rotación y los efectos giroscópicos de los ejes montados. En el procedimiento propuesto se ha combinado el uso del método de elementos finitos para la obtención de la información modal de la rueda con el uso de una formulación semianalítica para la obtención de las eficiencias acústicas necesarias para el cálculo final de la potencia acústica.

Se ha observado que los resultados obtenidos tienen tendencias similares a los resultados esperados para un modelo con las características descritas en este trabajo, sobre todo por lo que respecta a la movilidad, y en menor grado en lo que se refiere al nivel de potencia acústica. La validación con el software comercial TWINS ha permitido detectar ciertas discrepancias que recibirán atención en trabajos futuros. Dichas discrepancias destacan especialmente en los rangos de 500 - 1000 Hz y 2000 - 3000 Hz y están originadas por considerar distintos modelos de contacto, distintos tipos de amortiguamiento y la consideración de las no linealidades. Es por tanto necesario un estudio más detallado del modelo con el fin de incrementar la precisión de los resultados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo recibido del Ministerio de Economía y Competitividad y del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (proyecto TRA2013-45596-C2-1-R), así como de la Generalitat Valenciana (proyecto Prometeo/2016/007 y GV/2016/2011 de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport).

REFERENCIAS

- [1] D.J. Thompson y P.J. Remington, "Effects of transverse profile on the excitation of wheel/rail noise", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **231**, pp. 537-548, (2000).
- [2] H.J.A. van Leeuwen, "Railway noise prediction models: a comparison", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **231**, pp. 975-987, (2000).
- [3] F. Fahy y P. Gardonio, *Sound and Structural Vibration (Second Edition)*, Academic Press, (2007).
- [4] D.J. Thompson, *Railway noise and vibration*, Elsevier Ltd, (2009).
- [5] D. Rijlaarsdam, P. Nuij, J. Schoukens y M. Steinbuch, "A comparative overview of frequency domain methods for nonlinear systems", *Mechatronics*, Vol. **42**, pp. 11-24, (2017).
- [6] T.X. Wu y D.J. Thompson, "Theoretical investigation of wheel/rail non-linear interaction due to roughness excitation", *Vehicle System Dynamics*, Vol. **34**, pp. 261-282, (2000).

- [7] B. Ripke, “Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik (High frequency track modelling and simulation of the vehicle-track dynamics taking into account the influence of non-linear contact mechanics)”, *VDI Fortschrittberichte, Reihe 12, No. 249*, (1995).
- [8] S.G. Newton y R.A. Clark, “Investigation into the dynamic effects on the track of wheel flats on railway vehicles”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. **21**, pp. 287-297, (1979).
- [9] M.H.A. Janssens, D.J. Thompson, F.G. de Beer, TWINS version 3.3 Theoretical Manual, TNO report MON-RPT-033-DTS-2009-03455, TNO Institute of Applied Physics, Delft, The Netherlands, (2014).
- [10] J. Martínez-Casas, L. Mazzola, L. Baeza y S. Bruni, “Numerical estimation of stresses in railway axles using a train-track interaction mode”, *International Journal of Fatigue*, Vol. **47**, pp. 18-30, (2013).
- [11] D.J. Thompson y C.J.C. Jones, “ Sound radiation from a vibrating railway wheel”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **253**, pp. 401–419, (2002).
- [12] P.J. Remington, “Wheel/rail noise - part IV : rolling noise”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **46**, pp. 419–436, (1976).
- [13] K. Knothe y A. Gross-Thebing, “Derivation of frequency dependent creep coefficients based on an elastic half-space model”, *Vehicle System Dynamics*, Vol. **15**, pp. 133-153, (1986).
- [14] J.J. Kalker, *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact* , Springer Science & Business Media, (2013).