académica

Integración mediante algunas funciones especiales

Manuel Forner Gumbau

edUPV
Universitat Politècnica de València

Manuel Forner Gumbau

Integración mediante algunas funciones especiales

edUPV
Universitat Politècnica de València

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:
Forner Gumbau, Manuel (2021). *Integración mediante funciones especiales.* Valencia: edUPV

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0230_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, S. L.
ISBN: 978-84-9048-901-7
Impreso bajo demanda

El sello edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

A mis seres queridos

Índice general

Índice de materias

Las funciones elementales fundamentales expresadas analíticamente son las siguientes:

1. Función potencial: $f(x) = x^{\lambda}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Función exponencial: $f(x) = a^x$ con $a \in (\mathbb{R}^+ - \{1\})$.
3. Función logarítmica: $f(x) = \log_a x$ con $a \in (\mathbb{R}^+ - \{1\})$.
4. Funciones trigonométricas:
   - Función seno: $f(x) = \sin x$.
   - Función coseno: $f(x) = \cos x$.
   - Función tangente: $f(x) = \tan x$.
   - Función cotangente: $f(x) = \cot x$.
   - Función secante: $f(x) = \sec x$.
   - Función cosecante: $f(x) = cosec\, x$.
5. Funciones trigonométricas recíprocas:
   - Función arcoseno: $f(x) = \arcsin x$.
   - Función arcocoseno: $f(x) = \arccos x$.
   - Función arcotangente: $f(x) = \arctan x$.
   - Función arcocotangente: $f(x) = arcotan\, x$.

Se denomina función elemental la formada por funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición de funciones[1].

[1] https://fabianizquierdo.files.wordpress.com/2020/02/calculo-diferenciales-integral-piskunov.pdf

En realidad, las funciones elementales fundamentales se pueden reducir a dos, en el campo complejo, mediante la función exponencial de base e, la función logaritmo neperiano y un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Por ejemplo:

- $x^\lambda = e^{\lambda \ln x}$.
- $a^x = e^{x \ln a}$.
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- $\sin x = \dfrac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}$.
- $\arcsin x = -i \ln\left(i\,x + e^{\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{2\ln x}\right)}\right)$.

En matemáticas, se consideran funciones especiales todas aquellas que no son funciones elementales. No obstante, en la Wikipedia se da una definición de función especial[2].

La presente obra ha sido concebida para dar a conocer algunas propiedades y características de determinadas funciones especiales. Para ello se utiliza como hilo conductor el cálculo de determinadas integrales que requieren para su evaluación el empleo de dichas funciones.

Las propiedades y teoremas expuestos o bien se demuestran o bien se indica en qué cita o citas de la bibliografía se pueden consultar las demostraciones.

Para asimilar el trabajo aquí expuesto, es necesario contar con una formación previa en determinadas técnicas de integración, tanto en el campo real como en el campo complejo, y poseer conocimientos sobre resolución de ecuaciones diferenciales lineales, variable compleja y series de Fourier.

El trabajo está organizado de la forma siguiente:

1) Índice de materias

2) Presentación

3) Ejercicios preparatorios
   Con el objetivo de conseguir un aprovechamiento máximo del potencial del trabajo, se ha considerado necesario incluir un capítulo en el que se

[2]Una función especial es una función matemática particular, que por su importancia en el campo del análisis matemático, análisis funcional, la física y otras aplicaciones, posee nombres y designaciones más o menos establecidos (https://es.wikipedia.org/wiki/Funcion_especial)

determinan una serie de integrales que sirven para ejercitarse en el manejo de ciertas técnicas de integración.

El capítulo se ha subdividido en dos secciones: ejercicios de iniciación y ejercicios de profundización. Finaliza ofreciendo la resolución de la denominada integral de Ahmed, interesante por las técnicas de integración utilizadas.

4) Integrales logaritmo-seno
Las técnicas empleadas para la resolución de este tipo de integrales hacen que se hayan considerado necesarias como preludio del trabajo, para introducir los desarrollos en serie para el cálculo de determinadas integrales.

5) Funciones eulerianas
Se enuncian y se demuestran algunas propiedades de las funciones eulerianas siguientes:

   a) La función factorial
   b) La función Gamma de Euler
   c) La función doble factorial
   d) La función Beta de Euler
   e) La función digamma
   f) La función poligamma

   Con el conocimiento expuesto anteriormente, se determinan diversas integrales y, además, se obtienen los siguientes desarrollos:

   a) En serie de Laurent de la función $\Gamma(z)$ para $\Re(z) > 0$
   b) En serie de Taylor de $\ln(\Gamma(z+1))$
   c) En serie de Fourier de $\ln(\Gamma(x))$ para $0 < x < 1$

6) La transformada de Mellin y la función W de Lambert
En este capítulo se introducen y se explican diversas aplicaciones de la transformada de Mellin y la función W de Lambert. Además se enuncia y demuestra el teorema maestro de Ramanujan para aplicarlo después al cálculo de determinadas transformadas de Mellin.

7) La integral de Frullani
Se dedica un capítulo a la integral de Frullani, una de cuyas aplicaciones es su utilización para la representación integral de la función logaritmo neperiano.

Como ocurre en el capítulo anterior, para determinar diversas fórmulas que involucran a la integral de Frullani se aplica el teorema maestro de Ramanujan.

8) Miscelánea
Este capítulo se ha concebido como «un cajón de sastre» para incluir en él diversas integrales a modo de resumen.

Para finalizar, se ha considerado conveniente incluir los apéndices siguientes:

A) Introducción a los desarrollos en series de Fourier

B) Sumas de series mediante desarrollos en series de Fourier

C) Algunos resultados de la variable compleja

Presentación

Como se señala en el «Libro blanco de las matemáticas» la formación matemática del alumnado que cursa los grados de arquitectura e ingenierías se ha visto mermada de un tiempo a esta parte:

> De la tradicional buena formación matemática de ingenieros e ingenieras y arquitectos y arquitectas en nuestro país, hemos pasado a personas tituladas en ingeniería y arquitectura más algoritmizados y menos capaces de trabajar con la modelización matemática[3].

La implantación del plan Bolonia y la consiguiente reducción de créditos ha provocado, además, una nueva merma en la formación matemática:

> La implantación del Plan Bolonia ha traído consigo una nueva y sustancial reducción de los créditos de matemáticas, básicos o no. Esta situación ha supuesto una contracción de los temarios que ha dejado su contenido real en un nivel instrumental[4].

A los factores anteriores se podría añadir que en los grados universitarios de ciencias, por lo general, las asignaturas se ofrecen demasiado circunscritas a los contenidos conceptuales de la materia de la que tratan sin detenerse a poner de relieve que, en diversas ocasiones, el planteamiento y resolución de algunos problemas requieren una visión más amplia que la que ofrece la propia asignatura. Por ejemplo, para la resolución de una integral puede ser necesario utilizar un desarrollo en serie (Taylor, Laurent o Fourier), la resolución de una ecuación diferencial, o las propiedades de funciones especiales (por ejemplo la función zeta de Riemann), ...

---

[3] Libro blanco de las matemáticas (página 120). David Martín de Diego (Coordinador general). Fundación Ramón Areces. Madrid 2020

[4] Libro blanco de las matemáticas (página 123). David Martín de Diego (Coordinador general). Fundación Ramón Areces. Madrid 2020

Sin embargo, si no se ofrece al alumnado una visión panorámica que le permita estructurar el pensamiento para desarrollar sucesivamente las técnicas anteriores, esta tarea puede llegar a ser tan ardua que muchos de ellos se verán incapaces de llevarla a cabo. Ahora bien, debido a la amplitud de los currícula y la escasez de tiempo para poder impartirlos, al profesorado le resulta muy difícil ofrecer esta visión panorámica en el aula, por lo que el contenido de este trabajo puede suponer una ayuda que facilite su labor al tiempo que su lectura sosegada puede ayudar al alumnado a conseguir una visión transversal y más completa de la materia en estudio.

No obstante, a pesar de la amplitud del currículum y la escasez de tiempo, el «Libro blanco de las matemáticas» insiste en la importancia de un aprendizaje significativo, para lo que nos recuerda que:

> La formación en matemática en ingeniería y tecnología debe aumentar, pero lo debe hacer a la luz de nuevos paradigmas matemáticos, haciendo mucho más hincapié en la resolución de problemas abiertos en contextos reales, la modelización, el uso con criterio matemático de herramienta computacionales[5].

Llegados a este punto, sería el momento de proponer soluciones que permitan subsanar las carencias detectadas. Una de las que recomienda el «Libro blanco de las matemáticas» es ampliar la visión de las matemáticas que tienen los graduados para reforzar su formación:

> Los grados de Matemáticas deberían tener una mirada más amplia, sin renunciar a formar personal graduado que trabaje en las áreas y temas clásicos de las matemáticas, para conseguir, a fin de cuentas, que la mirada de los y las egresadas a la hora de optar por los diferentes posgrados sea tan rica y plural como lo son las matemáticas en sí[6].

Dado que el problema de la escasez de tiempo sigue estando latente, la consecución de este objetivo pasa necesariamente por disponer de materiales que orienten la resolución de problemas abiertos y transversales. En este sentido, el presente trabajo ofrece una contribución dirigida a la mejora de la formación matemática del alumnado universitario incorporando a su contenido las sugerencias plasmadas en el «Libro blanco de las matemáticas».

[5] Libro blanco de las matemáticas (página 124). David Martín de Diego (Coordinador general). Fundación Ramón Areces. Madrid 2020

[6] Libro blanco de las matemáticas (página 130). David Martín de Diego (Coordinador general). Fundación Ramón Areces. Madrid 2020

El tema escogido en este trabajo, entre todo el abanico de posibilidades que ofrecen los contenidos que se estudian en matemáticas, ha sido el de las funciones especiales aplicadas al cálculo integral. El motivo de esta elección ha sido el hecho, que se hace evidente ya en los primeros cursos de las carreras científicas, de que las funciones elementales no son suficientes para resolver numerosos problemas de diferente índole, como por ejemplo el diseño de modelos matemáticos mediante los cuales predecir diferentes fenómenos físicos o para formalizar la distribución de los números primos, ... Esta necesidad de nuevas herramientas obliga a introducir en el acerbo matemático las llamadas funciones especiales.

Por otra parte, los equipos de investigación que desarrollan su trabajo en cualquiera de las distintas disciplinas de la ciencia moderna (matemáticas, física, química-física, ingeniería, ...) precisan de un conocimiento notable de estas funciones denominadas especiales.

Pero además, es importante resaltar que la importancia de las funciones especiales no se circunscribe únicamente al campo de la investigación sino que su utilización se hace indispensable en la resolución de innumerables problemas que surgen en la industria en general: problemas sobre la cinética enzimática, soluciones de problemas de combustible para aviones, inferencia estadística o cálculo de probabilidades, por citar algunos de ellos.

Es por ello que su estudio se hace necesario tanto para el alumnado de las carreras de ciencias como para aquellas personas que se estén preparando para dedicarse a la investigación y para las que ya están desarrollando su actividad profesional trabajando en diversas industrias. Como puede observarse, el público potencial al que se dirige la obra es amplio y variado por lo que el contenido del mismo se ha seleccionado intentando cubrir las necesidades de los diferentes colectivos a los que se dirige.

En cuanto a la metodología utilizada, el desarrollo de la obra pretende conseguir el aprendizaje mediante la resolución de cuestiones organizadas en función de una dificultad creciente junto con el entrelazamiento de técnicas y propiedades de distintos entes matemáticos.

Con el deseo de lograrlo, la primera parte del trabajo se centra en el análisis matemático y más concretamente en el cálculo de integrales por diversos métodos: la utilización de resultados de la variable compleja, el empleo de desarrollos en serie de potencias (Taylor) y, finalmente, haciendo uso de la derivación paramétrica de una integral. Como consecuencia de la aplicación de este último método surge la necesidad de la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

La segunda parte del trabajo está dedicada al estudio de diversas propiedades o resultados de algunas funciones especiales (funciones gamma y beta de Euler, función factorial, función doble factorial, función digamma, función poligamma y función de Lambert) con aplicación al cálculo integral.

En la tercera parte, el trabajo se ocupa del cálculo de transformadas de Mellin de diversas funciones. Para la determinación de estas transformadas se hace uso del teorema maestro de Ramanujan.

Finalmente, se dedica la última parte del trabajo a la resolución de las conocidas como integrales de Frullani mediante la aplicación, al igual que la parte anterior, del teorema maestro de Ramanujan.

Se han incluido también en el texto unos apéndices en los que se exponen, someramente, resultados o propiedades necesarias para una mejor comprensión de los aspectos abordados a lo largo del mismo, así como la justificación de demostraciones o cálculos.

Capítulo 1

Ejercicios preparatorios

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1 (Parte entera). *La parte entera de un número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, es el entero más próximo a x que sea menor que x.*

Definición 1.1.2 (Parte decimal). *La parte decimal de un número real x, denotada por $\{x\}$, es la diferencia entre el número x y su parte entera. Es decir,*

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

Teorema 1.1.1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC1)). *Dada una función real de variable real $f(x)$,*

1) La función $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es continua.

2) Si además $f(x)$ es una función continua, entonces $F(x)$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

Teorema 1.1.2 (Generalización del TFC1 (Regla de Leibniz)). *Dada la función*

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x)\,dt,$$

$$F'(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\,dt + f\left(h(x), x\right) h'(x) - f\left(g(x), x\right) g'(x).$$

1.2. Ejercicios de iniciación

Integral 1.2.1. *Determina* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, dx.$

Cálculo de la integral 1.2.1. *Por una parte,*

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}.$$

Por otra parte,

$$\int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\, dx = \left\{t = \frac{\pi}{4}-x\right\} = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\, dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, dx = & \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right) dx = \\ = & \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right) dx = \int_0^{\pi/4} \ln 2\, dx - \\ & - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, dx.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Integral 1.2.2. *Determina* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ *(Integral de Dirichlet).*

Cálculo de la integral 1.2.2.

$$\textit{Sea } f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-\lambda\, x}\, dx, \quad \lambda \in [0, \infty[. \tag{1.1}$$

$$f'(\lambda) = -\int_0^\infty \sin x\, e^{-\lambda\, x}\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} U = \sin x & dV = e^{-\lambda\, x}\, dx \\ & \\ dU = \cos x\, dx & V = -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, x} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda\, x} \cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} U = \cos x & dV = e^{-\lambda\, x}\, dx \\ & \\ dU = -\sin x\, dx & V = -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, x} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda\, x}\, \sin x\, dx.$$

De ahí que,

$$-\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda\, x}\, \sin x\, dx = -\frac{1}{\lambda^2}$$

y

$$f'(\lambda) = -\int_0^\infty \sin x\, e^{-\lambda\, x}\, dx = -\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Con lo que

$$f(\lambda) = -\arctan\lambda + C. \tag{1.2}$$

De (1.1) y de (1.2)

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0 = -\arctan\infty + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}. \tag{1.3}$$

En consecuencia, de (1.1)-(1.3)

$$f(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan\lambda = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-\lambda\, x}\, dx.$$

Con lo que,

$$f(0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{1.4}$$

Integral 1.2.3. *Determina* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$

Cálculo de la integral 1.2.3. *Si* $0 < x < \frac{\pi}{2}$*, entonces* $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$*.* *Con lo que,*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx = \left\{t = \frac{\pi}{2} - x\right\} = \\ =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Sea

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx. \tag{1.6}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}2I =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin x) + \ln(\cos x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\, \cos x)\, dx = \\ =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx - \frac{\pi}{2}\ln 2.\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx =& \{t = 2x\} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, dt = \\ =& \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt\right).\end{aligned} \tag{1.8}$$

De (1.5) y de (1.6)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt =& \left\{u = t - \frac{\pi}{2}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right) du = \\ =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\, du = I.\end{aligned} \tag{1.9}$$

De (1.8) y de (1.9)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx = I. \tag{1.10}$$

De (1.7) y de (1.10)

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\,\ln 2.$$

En consecuencia,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\; dx = -\frac{\pi}{2}\,\ln 2.$$

Integral 1.2.4. *Determina* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\,\sin x + \cos x)^2}\,dx.$

Cálculo de la integral 1.2.4.

$$\begin{aligned}
I = {} & \int \frac{x^2}{(x\,\sin x + \cos x)^2}\,dx = \left\{(x\,\sin x + \cos x)' = x\,\cos x\right\} = \\
= {} & \int \frac{x}{\cos x}\,\frac{x\,\cos x}{(x\,\sin x + \cos x)^2}\,dx = \\
= {} & \left\{\begin{array}{ll} U = \dfrac{x}{\cos x} & dV = \dfrac{x\,\cos x}{(x\,\sin x + \cos x)^2}\,dx \\ & \\ dU = \dfrac{\cos x + x\,\sin x}{\cos^2 x}\,dx & V = -\dfrac{1}{x\,\sin x + \cos x} \end{array}\right\} = \\
= {} & -\frac{x}{(x\,\sin x + \cos x)\,\cos x} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \\
= {} & -\frac{x}{(x\,\sin x + \cos x)\,\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-x\,\cos x + \sin x}{x\,\sin x + \cos x} + C.
\end{aligned}$$

Integral 1.2.5. *Determina* $\displaystyle\int \sin(4x)\,e^{\tan^2 x}\,dx.$

Cálculo de la integral 1.2.5.

$$\begin{aligned}
I = {} & \int \sin(4x)\,e^{\tan^2 x}\,dx = 2\int \sin(2x)\,\cos(2x)\,e^{\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}}\,dx = \\
= {} & \{t = \cos(2x)\} = -\int t\,e^{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = -e^{-1}\int t\,e^{\frac{2}{1+t}}\,dt = \\
= {} & \left\{u = \frac{2}{1+t}\right\} = 2\,e^{-1}\int \left(\frac{2}{u} - 1\right)\,e^u\,\frac{du}{u^2} = \\
= {} & \frac{2}{e}\int \frac{2}{u^3}\,e^u\,du - \frac{2}{e}\int \frac{1}{u^2}\,e^u\,du.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\int \frac{2}{u^3}\, e^u \, du = \left\{ \begin{array}{ll} U = e^u & dV = \dfrac{2}{u^3}\, du \\ & \\ dU = e^u \, du & V = -\dfrac{1}{u^2} \end{array} \right\} = -\frac{e^u}{u^2} + \int \frac{e^u}{u^2}\, du. \tag{1.12}$$

De (1.11) y de (1.12)

$$\begin{aligned} I = & -\frac{2}{u^2}\, e^{u-1} = -\frac{2}{\left(\frac{2}{1+t}\right)^2}\, e^{\frac{2}{1+t}-1} = -\frac{(1+t)^2}{2}\, e^{\frac{1-t}{1+t}} = \\ = & -\frac{(1+\cos(2x))^2}{2}\, e^{\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}} = -2\cos^4 x \, e^{\tan^2 x} + C. \end{aligned}$$

Integral 1.2.6. *Determina* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\, \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx.$

Cálculo de la integral 1.2.6.

$$\begin{aligned} I = & \int_0^{\pi} \frac{x\, \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{x\, \sin x}{1+\sin x}\, dx = \{x = \pi - t\} = \\ = & \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\sin(\pi - t)}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\sin t}\, dt = \\ = & \ \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin t}\, dt - \int_0^{\pi} \frac{t\, \sin t}{1+\sin t}\, dt. \end{aligned}$$

Con lo que

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin t}\, dt. \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin t}\, dt = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{1+\sin t}\right) dt = \\ = & \ \pi - \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin t}\, dt = \pi - \int_0^{\pi} \frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}\, dt = \\ = & \ \pi - \left(\int_0^{\pi} \frac{dt}{\cos^2 t} + \int_0^{\pi} \frac{-\sin t\, dt}{\cos^2 t}\right) = \pi - 2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

De (1.13) y de (1.14)

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \frac{\pi(\pi-2)}{2}.$$

Integral 1.2.7. *Determina* $\displaystyle\int \cos(2\theta)\,\ln\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)\,d\theta.$

Cálculo de la integral 1.2.7.

$$\begin{aligned}
I = &\int \cos(2\theta)\,\ln\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)\,d\theta = \int \cos(2\theta)\,\ln\left(-\frac{1+\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right)\,d\theta = \\
= &\left\{\begin{array}{ll} U = \ln\left(-\dfrac{1+\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right) & dV = \cos(2\theta)\,d\theta \\[2ex] dU = \dfrac{2}{\cos(2\theta)}\,d\theta & V = \dfrac{1}{2}\,\sin(2\theta) \end{array}\right\} = \\
= &\ \frac{1}{2}\,\sin(2\theta)\,\ln\left(-\frac{1+\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right) - \int \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\,d\theta = \\
= &\ \frac{1}{2}\,\sin(2\theta)\,\ln\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right) + \frac{1}{2}\,\ln\left(\cos(2\theta)\right) + C.
\end{aligned}$$

Integral 1.2.8. *Determina* $\displaystyle\int_0^1 arc\cot\left(1-x+x^2\right)\,dx.$

Cálculo de la integral 1.2.8.

$$\begin{aligned}
I = &\int_0^1 arc\cot\left(1-x+x^2\right)\,dx = \left\{arc\cot\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right\} = \\
= &\int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right)dx = \int_0^1 \arctan\left(\frac{1-x+x}{1-x(1-x)}\right)dx = \\
= &\left\{\begin{array}{l}
\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta} \\
\\
\tan\alpha = 1-x \;\Leftrightarrow\; \alpha = \arctan(1-x) \\
\\
\tan\beta = x \;\Leftrightarrow\; \beta = \arctan x
\end{array}\right\} = \\
= &\int_0^1 \arctan\left(\tan\left(\arctan(1-x)+\arctan x\right)\right)\,dx = \\
= &\int_0^1 \arctan(1-x)\,dx + \int_0^1 \arctan x\,dx.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = &\int_0^1 \arctan(1-x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll}
U = \arctan(1-x) & dV = dx \\
\\
dU = -\dfrac{1}{1+(1-x)^2}\,dx & V = x
\end{array}\right\} = \\
= &\int_0^1 \frac{x}{1+(1-x)^2}\,dx = \{1-x=t\} = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \\
&-\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned} \tag{1.16}$$