

## Modelo Analítico Aplicado al Problema de Onda Solitaria en Películas de Agua Gobernadas por Gravedad en Tuberías Verticales

Dany S. Dominguez, Susana M. Iglesias, José L. Muñoz-Cobo, Alberto Escrivá, César Berna, Yago Rivera

Instituto de Ingeniería Energética  
Universitat Politècnica de València (UPV)  
Camino de Vera s/n, 46022 València (Spain)  
Tel: 0034-963879245, Email: dsdominguez@gmail.com

**Resumen** – Películas de agua gobernadas por gravedad en tuberías verticales son relevantes en diversos procesos industriales asociados a intercambiadores de calor, evaporadores y reactores nucleares. La formación de ondas y el proceso de propagación de las mismas en la película influyen significativamente en la hidrodinámica del fluido y en los fenómenos de intercambio de calor y masa. Diversos grupos de pesquisa estudian este problema usando métodos experimentales, fluido dinámica computacional o modelos analíticos. Modelos analíticos para fluidos viscosos y platos semi-infinitos inclinados han sido obtenidos por algunos autores. En este trabajo presentamos un modelo analítico para películas finas de agua gobernadas por gravedad en tubos verticales. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes en geometría cilíndrica axis-simétrica, consideramos el balance de fuerzas en el fluido, una aproximación asintótica de onda larga, y una aproximación de primera orden para la velocidad axial, para obtener una ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento de la interface. La ecuación de la interface es resuelta usando una estrategia numérica. El problema de onda solitaria fue resuelto para fluidos de diferentes viscosidades. Para fluidos de alta y media viscosidad el modelo ofrece resultados satisfactorios. Para fluidos de baja viscosidad, donde tenemos un problema con alto grado de rigidez, la solución numérica se muestra inestable. Los pasos futuros de esta investigación, envuelven proyectar una estrategia numérica que permita utilizar el modelo en fluidos de baja viscosidad, y la validación del mismo con resultados experimentales.

### 1. INTRODUCCIÓN.

Regímenes de flujo bifásico aparecen en diversas aplicaciones de ingeniería como intercambiadores de calor, torres de destilación de petróleo, reactores químicos y reactores nucleares para generación de energía. Entre los regímenes bifásicos gas-líquido, el régimen de flujo anular despierta gran interés en la comunidad científica por su complejidad. El flujo anular es caracterizado por la presencia de una fase gaseosa continua localizada en el centro del canal, con una película anular de líquido entre la fase central y la pared del canal. En dependencia de la diferencia de velocidades entre las fases tendremos ondas en la interface gas-líquido y arrastre de gotas para la fase gaseosa [1]. Este régimen aparece durante la operación normal de reactores de agua en ebullición, y en situaciones de emergencia con pérdidas de refrigerante en todos los reactores refrigerados por agua. El estudio de la estabilidad hidrodinámica y la transferencia de calor en este régimen es relevante para la seguridad operacional de los reactores nucleares energéticos.

En regímenes donde la fase central es aire estancado, el volumen de la fase anular es pequeño cuando comparado con las dimensiones del canal y apenas la fuerza de gravedad actúa sobre el fluido, tenemos una película de agua gobernada por la gravedad [2]. Adicionalmente, películas que descienden por la pared de tubos verticales son muy inestables y desarrollan ondas no lineales en su superficie. Estas ondas tienen una fuerte influencia en la hidrodinámica del fluido aumentando la

transferencia de calor y masa. Diversos grupos de investigación estudian el comportamiento de las ondas interfaciales usando instalaciones experimentales [3], fluido dinámica computacional [4] o modelos analíticos [5].

En [6] Muñoz-Cobo et. al. utilizan teoría de perturbaciones, la aproximación de onda larga, y una expansión en armónicos esféricos de la velocidad para construir un modelo para películas descendentes gobernadas por gravedad en platos inclinados. Nuestra investigación da continuidad a este trabajo proponiendo un modelo analítico para películas descendentes en tubos verticales. Para construir el modelo consideramos el balance de fuerzas en fluido, una aproximación asintótica de onda larga, y una aproximación perturbativa de primera orden en la velocidad axial, lo que nos permite obtener una ecuación diferencial parcial (EDP) que describe el comportamiento de la interface a partir del espesor de la película. Discretizamos el dominio espacial con una malla uniforme e integramos la EDP para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) para el espesor de la película en cada célula. En este punto resolvemos numéricamente el sistema de EDOs usando un método predictor-corrector semi-implícito de Adams-Moulton [7]. Para validar el modelo analizamos la formación y evolución de una onda solitaria para fluidos de diferentes viscosidades.

En la próxima sección mostramos los fundamentos matemáticos del modelo, y la estrategia de solución numérica propuesta. En la sección 3 presentamos los resultados de los experimentos numéricos realizados para validar el modelo. Finalmente, en la sección 4 ofrecemos las conclusiones del trabajo y sugerencias para trabajos futuros.

## 2. MODELO MATEMÁTICO Y ESTRATEGIA NUMÉRICA

Para desenvolver el modelo matemático para películas descendentes en tubos verticales consideramos un dominio cilíndrico axisimétrico formado por la pared interna del tubo y un fluido anular que desciende por la pared conforme ilustrado en la Figura 1a. Construimos nuestro modelo partiendo del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles en geometría cilíndrica axisimétrica, que aparece como

$$\bar{r}^{-1} \partial_{\bar{r}}(\bar{r}\bar{u}) + \partial_{\bar{z}}\bar{w} = 0, \quad (1)$$

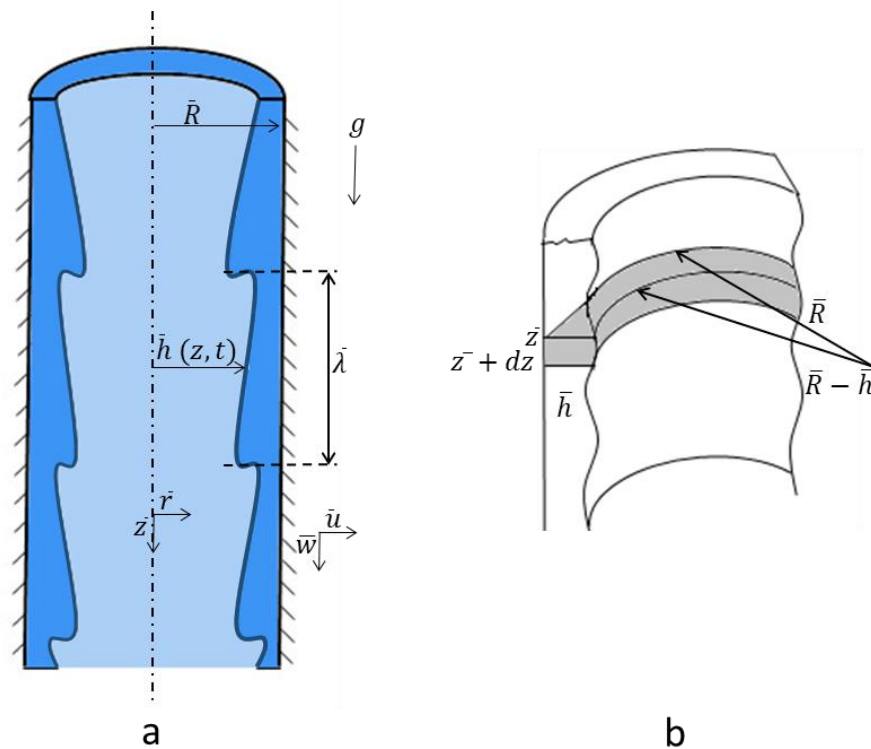
$$\partial_{\bar{t}}\bar{u} + \bar{u}\partial_{\bar{r}}\bar{u} + \bar{w}\partial_{\bar{z}}\bar{u} = -\frac{1}{\rho} \partial_{\bar{r}}\bar{P} + \nu \left( \frac{1}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}}(\bar{r}\partial_{\bar{r}}\bar{u}) + \partial_{\bar{z}\bar{z}}\bar{u} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} \right), \quad (2)$$

$$\partial_{\bar{t}}\bar{w} + \bar{u}\partial_{\bar{r}}\bar{w} + \bar{w}\partial_{\bar{z}}\bar{w} = -\frac{1}{\rho} \partial_{\bar{z}}\bar{P} + \nu \left( \frac{1}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}}(\bar{r}\partial_{\bar{r}}\bar{w}) + \partial_{\bar{z}\bar{z}}\bar{w} \right) + g, \quad (3)$$

donde  $\bar{r}$  y  $\bar{z}$  son las coordenadas radial y axial respectivamente,  $\bar{u}$  es la componente radial de la velocidad,  $\bar{w}$  es la componente de la velocidad en la dirección descendente,  $\bar{P}$  es la presión;  $\rho$ ,  $\nu$ , y  $g$  representan la densidad, la viscosidad cinemática, y la aceleración de la gravedad, respectivamente. Además, en la Figura 1a  $\bar{h}(z, t)$  representa el espesor de la película y  $\bar{h}_0$  es el espesor base o espesor de Nusselt para una película plana [2]. En nuestra notación los símbolos suprayados indican magnitudes dimensionales. En la pared del tubo consideramos condiciones de contorno de pared no deslizante, por lo tanto

$$\bar{w}|_{\bar{R}} = \bar{u}|_{\bar{R}} = 0. \quad (4)$$

En la superficie de la película consideramos condiciones de superficie libre, para la componente normal de la tensión consideramos que la suma de las fuerzas en la interface es nula y obtenemos una expresión similar a la ecuación de Young-Laplace [8], en la forma



**Figura 1. (a) Representación del dominio del problema y las principales magnitudes, (b) Detalle de un volumen diferencial de la película**

$$\bar{P}|_{\bar{R}-\bar{h}} - \bar{P}_c + \sigma \left\{ \frac{(\partial_{\bar{z}\bar{z}}\bar{h})}{(1 + (\partial_{\bar{z}}\bar{h})^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\bar{R} - \bar{h}} \right\}_{\bar{R}-\bar{h}} - \frac{2\mu}{1 + (\partial_{\bar{z}}\bar{h})^2} \left\{ \partial_{\bar{r}}\bar{u} + (\partial_{\bar{z}}\bar{h})(\partial_{\bar{z}}\bar{u} + \partial_{\bar{r}}\bar{w}) + (\partial_{\bar{z}}\bar{h})^2 \partial_{\bar{z}}\bar{w} \right\}_{\bar{R}-\bar{h}} = 0, \quad (5)$$

donde  $\bar{P}_c$  es la presión de la fase central,  $\sigma$  y  $\mu$  representan la tensión superficial y la viscosidad dinámica del fluido, respectivamente. Para la componente tangencial de la tensión consideramos la continuidad de la tensión en la interface y obtenemos

$$\left[ 1 - (\partial_{\bar{z}}\bar{h})^2 \right] \left\{ \partial_{\bar{z}}\bar{u} + \partial_{\bar{r}}\bar{w} \right\}_{\bar{R}-\bar{h}} + 2\partial_{\bar{z}}\bar{h} \left\{ \partial_{\bar{z}}\bar{w} - \partial_{\bar{r}}\bar{u} \right\}_{\bar{R}-\bar{h}} = 0. \quad (6)$$

Para obtener una ecuación que describa el comportamiento de la interface realizamos un balance de masa en la película para el intervalo  $[z, z + dz]$ , la geometría considerada en el balance de masa es ofrecida en la Figura 1b. La variación de la masa de fluido en un diferencial de volumen de la película es igual a la diferencia entre el fluido incidente por la superficie superior y el fluido emergente por la superficie inferior. Computando esta diferencia y manipulando para escribir el resultado como una formulación integral, obtenemos una ecuación integro-diferencial que describe la interface de la película como una función del tiempo y de la coordenada  $z$ , en la forma

$$(\bar{R} - \bar{h}) \partial_t \bar{h} + \partial_{\bar{z}} \int_{\bar{R}-\bar{h}}^{\bar{R}} \bar{r} \bar{w}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) d\bar{r} = 0. \quad (7)$$

La ec. (7) que describe la interface de líquido es la base de nuestro modelo matemático, y la estrategia para construirlo consiste en obtener una solución para la velocidad en la dirección axial  $\bar{w}$

que nos permita resolver la ecuación y calcular el espesor de película en todos los puntos del dominio para cualquier instante de tiempo.

El primer paso es escribir nuestro sistema de ecuaciones en su forma adimensional. El esquema adimensional adoptado independiente del flujo másico y fue propuesto por Ruyer-Quil y Manneville en [9], los parámetros adimensionales son

$$L_c = \left(\frac{v^2}{g}\right)^{1/3}, T_c = \left(\frac{v}{g^2}\right)^{1/3}, U_r = (vg)^{1/3}, P_r = \rho(vg)^{2/3}, K_a = \frac{\sigma}{\rho v^{4/3} g^{1/3}}. \quad (8)$$

donde  $L_c$  y  $T_c$  son la longitud y el tiempo característico,  $U_r$  y  $P_r$  son la velocidad y presión de referencia, y  $K_a$  es el número de Kapitza. Las ecuaciones de conservación de la masa y del momento (1-3) en su forma adimensional son escritas como

$$r^{-1}\partial_r(ru) + \partial_z w = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t u + u\partial_r u + w\partial_z u = -\partial_r P + r^{-1}\partial_r(r\partial_r u) + \partial_{zz} u - \frac{u}{r^2}, \quad (10)$$

$$\partial_t w + u\partial_r w + w\partial_z w = -\partial_z P + r^{-1}\partial_r(r\partial_r w) + \partial_{zz} w + 1. \quad (11)$$

La forma adimensional de la ecuación de contorno en la pared (4) aparece como

$$w|_R = u|_R = 0, \quad (12)$$

y las ecuaciones de contorno en la interface de la película para la tensión normal (5) y tangencial (6) se transforman en

$$P|_{R-h} - P_c + K_a \left\{ \frac{\partial_{zz} h}{(1 + (\partial_z h)^2)^{3/2}} + \frac{1}{R-h} \right\}_{R-h} \quad (13)$$

$$- \frac{2}{1 + (\partial_z h)^2} \{ \partial_r u + (\partial_z h)(\partial_z u + \partial_r w) + (\partial_z h)^2 \partial_z w \}_{R-h} = 0,$$

$$[1 - (\partial_z h)^2] \{ \partial_z u + \partial_r w \}_{R-h} + 2\partial_z h \{ \partial_z w - \partial_r u \}_{R-h} = 0. \quad (14)$$

La ecuación integro-diferencial de la interface (7) adimensionalizada aparece como

$$(R-h)\partial_t h + \partial_z \int_{R-h}^R r w(r, z, t) dr = 0. \quad (15)$$

La aproximación de onda larga [2], [5] puede ser utilizada cuando la longitud de onda de las perturbaciones en la superficie de la película es mucho mayor que el espesor de película, en estas condiciones el parámetro de perturbación se define como  $\varepsilon = h/\lambda \ll 1$ . Nuestro modelo es formado por las ecuaciones constitutivas ecs. (9 - 10), las correspondientes condiciones de contorno ecs. (12 - 14), y la ecuación de interface (15), necesitamos reescribir el modelo en su forma general perturbativa. Considerando la aproximación de onda larga, e que los términos que envuelven la derivada temporal y la derivada espacial en  $z$  son términos de primer orden en  $\varepsilon$ , las ecuaciones perturbativas de balance son

$$r^{-1}\partial_r(ru) + \varepsilon\partial_z w = 0, \quad (16)$$

$$\varepsilon\partial_t u + u\partial_r u + \varepsilon w\partial_z u = -\partial_r P + r^{-1}\partial_r(r\partial_r u) + \varepsilon^2\partial_{zz} u - \frac{u}{r^2}, \quad (17)$$

$$\varepsilon\partial_t w + u\partial_r w + \varepsilon w\partial_z w = -\varepsilon\partial_z P + r^{-1}\partial_r(r\partial_r w) + \varepsilon^2\partial_{zz} w + 1 \quad (18)$$

Las ecuaciones perturbativas para componente normal ec. (13) y tangencial ec. (14) de la tensión en la superficie de la película son escritas como

$$P|_{R-h} - P_c + Ka \left\{ \frac{\varepsilon^2 \partial_{zz} h}{[1 + \varepsilon^2 (\partial_z h)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{R-h} \right\}_{R-h} \quad (19)$$

$$-\frac{2}{1 + \varepsilon^2 (\partial_z h)^2} \{ \partial_r u + \varepsilon (\partial_z h) (\varepsilon \partial_z u + \partial_r w) + \varepsilon^3 (\partial_z h)^2 \partial_z w \}_{R-h} = 0, \quad (20)$$

$$[1 - \varepsilon^2 (\partial_z h)^2] \{ \varepsilon \partial_z u + \partial_r w \}_{R-h} + 2\varepsilon \partial_z h \{ \varepsilon \partial_z w - \partial_r u \}_{R-h} = 0.$$

Para las condiciones de contorno de pared no deslizante (12) la ecuación de interface (15) las respectivas formas perturbativas son iguales a las ecuaciones adimensionales correspondientes. Por lo tanto, en este punto tenemos nuestro modelo escrito en su forma perturbativa. Es posible encontrar las soluciones del problema, esto es, las componentes radial y axial de la velocidad y la presión usando una expansión de primera orden, que se escribe como

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \quad (21)$$

$$w = w_0 + \varepsilon w_1, \quad (22)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1. \quad (23)$$

Obtenemos el momento de orden cero de la velocidad axial resolviendo las ecuaciones perturbativas de orden cero. Para completar esta etapa, sustituimos la expansión de primer orden ecs. (21 – 23) en las ecuaciones perturbativas (16 – 20 y 12) y tomamos el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Integrando el sistema resultante obtenemos

$$w_0(r, z) = \frac{(R-h)^2}{2} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{(R^2 - r^2)}{4}. \quad (24)$$

Un procedimiento análogo es utilizado para obtener el momento de primer orden de la velocidad axial. Obtenemos las ecuaciones constitutivas de primer orden, y sus respectivas condiciones de contorno, substituyendo las expansiones de primer orden (21 - 23) en las ecuaciones perturbativas (16 – 20 y 12) y consideramos apenas los términos de primer orden. Resolvemos, el sistema resultante, y después de algunas manipulaciones algebraicas el momento de primera orden de la velocidad axial aparece como

$$w_1(r, z, t) = Ka \partial_{zzz} h \left\{ \frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{(R-h)^2}{2} \log\left(\frac{r}{R}\right) \right\} +$$

$$Ka \partial_z h \left\{ \frac{1}{2} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{R^2}{4(R-h)^2} - \frac{r^2}{4(R-h)^2} \right\} +$$

$$\frac{\partial_z h}{128} (R-h) \left\{ r^4 + 11R^4 - 12r^2 R^2 + 8r^2 R^2 \log\left(\frac{r}{R}\right) \right\} +$$

$$\frac{\partial_z h}{32} (R-h)^3 \left\{ 5R^2 - 5r^2 + (6r^2 + 4R^2) \log\left(\frac{r}{R}\right) - \right. \quad (25)$$

$$\left. (r^2 - R^2) \left[ 8 \log\left(\frac{R-h}{R}\right) \right] - 4r^2 \log^2\left(\frac{r}{R}\right) + \right.$$

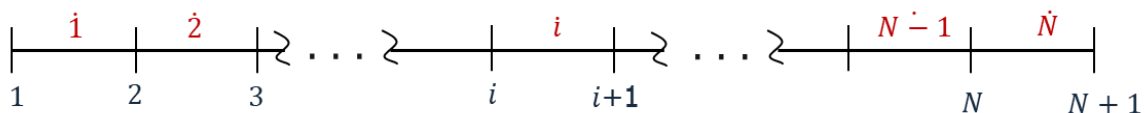
$$\left. \log\left(\frac{r}{R}\right) \log\left(\frac{R-h}{R}\right) (8r^2 - 4R^2) \right\}$$

$$\frac{\partial_z h}{16} (R-h)^3 \left\{ R^2 [\log^2(r) - \log^2(R)] - 2R^2 \log\left(\frac{r}{R}\right) \log(R-h) \right\} +$$

$$\frac{\partial_z h}{8} (R-h)^5 \left\{ \log\left(\frac{r}{R}\right) \left[ \log\left(\frac{R-h}{R}\right) - 2 \log^2\left(\frac{R-h}{R}\right) + \frac{3}{4} \right] \right\}$$

Las ecs. (24 y 25) representan una aproximación de primer orden para la velocidad axial, si usamos esta aproximación en la ecuación integro-diferencial de la interface (15) podemos resolverla, y analizar la hidrodinámica de la película, específicamente la evolución de las ondas sobre diferentes consideraciones geométricas y físicas. Para resolver la ecuación de la interface desarrollamos una estrategia numérica para integrar la ecuación en el tiempo y obtener el comportamiento de la interface en todos los puntos del dominio. A continuación, describimos este procedimiento numérico.

Nuestro dominio del problema es una tubería con longitud  $L$ , por lo tanto  $0 \leq z \leq L$ . Discretizamos el dominio espacial usando una malla uniforme de  $N$  células, con dimensión  $\Delta z = L/N$ , conforme mostrado en la Figura 2. Las fronteras de las células están localizadas en  $z_i = (i - 1)\Delta z$  con  $i = 1: N + 1$ . La coordenada de cada célula es considerada en el centro de la célula y representadas por suprapunto, en la forma  $\dot{z}_i = (i - 1/2)\Delta z$  con  $i = 1: N$ . Entonces, una magnitud con suprapunto y subíndice  $i$  representa una cantidad calculada en el centro de la  $i$ -ésima célula. En contrapartida, una magnitud con subíndice  $i$  sin suprapunto esta relacionada con la  $i$ -ésima arista de célula.



**Figura 2. Discretización espacial del dominio, coordenadas de la célula localizadas en el centro de cada célula (rojo), coordenadas de las fronteras de célula localizadas en las aristas (azul).**

Una vez discretizado el dominio, discretizamos nuestra ecuación integro-diferencial aplicando el operador promedio sobre la célula espacial

$$\dot{f}_i = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f(z) dz, \quad (26)$$

en la ec. (15), el resultado se escribe como

$$d_t \dot{h}_i(t) = - \frac{q_{i+1}(t) - q_i(t)}{[R - \dot{h}_i(t)] \Delta z}, \quad i = 1 \dots N, \quad (27)$$

donde  $q_i(t)$  representa el valor del flujo másico por radian en la coordenada  $z_i$ , definido como

$$q(t) = \int_{R-h}^R r w(r, z, t) dr, \quad (28)$$

para calcular la integral de la ec. (28) usamos la aproximación de primer orden de la velocidad e integramos analíticamente. Las derivadas de primer y tercer orden en relación a  $z$  que aparecen en el resultado son calculadas de forma numérica utilizando esquemas en diferencias. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias representado por la ec. (27) nos ofrece una ecuación para cada célula espacial con la espesura del filme en la célula  $\dot{h}_i(t)$  como incógnita, al integrarlo obtenemos el comportamiento de la interface de la película en función del tiempo. Resolvemos el sistema utilizando un método predictor-corrector semi-implícito de cuarto orden de tipo Adams-Moulton [7], con el paso de predicción basado en el algoritmo de Adams-Bashfort [10]. Para inicializar el método multi-paso de Adams-Moulton realizamos las cuatro iteraciones iniciales usando el algoritmo de Runge-Kutta [10]. Como condición inicial para el problema consideramos el espesor de película plana de Nusselt a lo largo del dominio, adicionando una perturbación de Fourier de pequeños modos múltiples como descrito en [11].

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para validar el modelo analítico y evaluar la eficacia del procedimiento numérico seleccionamos un problema de evolución de onda única, que consiste en introducir una perturbación en el inicio del tubo y analizar la evolución de la onda sin introducir nuevas perturbaciones. Ejecutamos simulaciones para seis fluidos diferentes y analizamos a evolución de la onda en cada caso. Los fluidos utilizados y sus respectivas propiedades físicas son listados en la Tabla 1. Simulaciones preliminares mostraron que la estabilidad de la solución numérica estaba estrechamente relacionada con la viscosidad del fluido, por ese motivo seleccionamos fluidos en un amplio intervalo de viscosidades, variando de  $1E-2$  a  $1E-7$ .

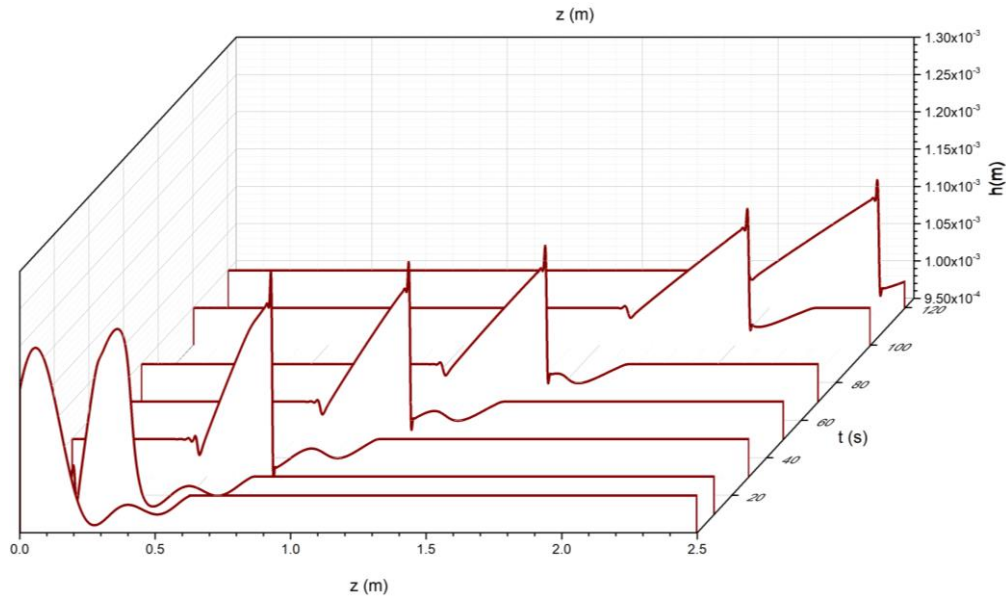
**Tabla 1. Fluidos utilizados en los experimentos numéricos.**

Fluido	T ( $^{\circ}$ C)	$\nu$ ( $m^2/s$ )	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\sigma$ (N/m)
Agua	25	8.930E-07	9.970E+02	7.200E-02
Fuelóleo ligero	20	1.650E-05	9.100E+02	2.300E-02
Aceite de ricino	30	5.800E-04	9.550E+02	3.900E-02
Glicerina	20	1.183E-03	1.261E+03	6.340E-02
Fuelóleo pesado	20	8.000E-03	9.900E+02	2.300E-02
Aceite de silicona [5]	-	1.330E-02	9.700E+02	2.150E-02

Como dominio de simulación consideramos un tubo con radio interno de  $2.1E-2$  m y longitud de  $2.5$  m. Para la condición inicial, la espesura de película plana de Nusselt fue de  $h_0 = 1E - 3m$ , y la perturbación consideró 6 modos de Fourier, con una amplitud de 3% para cada modo. Buscando que la construcción de la malla no perjudicase la estabilidad de la solución numérica fueron escogidos pasos de malla finos, tanto en la dimensión espacial como temporal, específicamente  $\Delta z = 1E - 3m$  y  $\Delta t = 5.0E - 7s$ .

En la Figura 3 mostramos la evolución temporal de la onda para el aceite de ricino. En el tiempo  $t = 0$ , donde tenemos la condición inicial, observamos una perturbación cosenoidal múltiple en el primer cuarto del dominio, con una amplitud máxima de aproximadamente  $1.15h_0$ . En los tres cuartos finales del dominio tenemos el perfil de película plana. Analizando la evolución temporal, notamos que después de los primeros segundos la onda comienza a deformarse, comprimiéndose y aumentando su altura, hasta alcanzar el punto de amplitud máxima ( $1.25h_0$  en el instante  $t_m = 25s$ ). A partir del punto de máxima amplitud la onda mantiene su forma, y la amplitud disminuye lentamente hasta alcanzar su estado estacionario en la posición  $z_e = 2.3m$  el tiempo  $t_e = 115s$ . La onda permanece con estas características hasta abandonar el dominio.

El comportamiento cualitativo de la onda es similar para los fluidos de glicerina, fuelóleo pesado y aceite de silicona, variando apenas la posición y el tiempo para la onda alcanzar el estado estacionario, es decir el punto a partir del cual no hay cambios en la amplitud y en el perfil de la onda. Para los fluidos menos viscosos, agua y fuelóleo ligero, las soluciones numéricas se mostrarán inestables, lo que sugiere que la estrategia numérica adoptada no es satisfactoria para fluidos con baja viscosidad. En la Tabla 2 mostramos la amplitud ( $h_m$ ), posición ( $z_m$ ) y tiempo ( $t_m$ ) para el punto máximo de la onda de cada fluido. Además, en la Tabla 3 ofrecemos los mismos detalles ( $h_e$ ,  $z_e$ ,  $t_e$ ) para el punto donde la onda se torna estacionaria, adicionalmente mostramos el tiempo total para la onda abandonar el dominio.



**Figura 3. Evolución temporal de la onda para el fluido aceite de ricino.**

**Tabla 2. Parámetros de la onda en el punto de máxima amplitud.**

Fluido	$h_m$ (m)	$z_m$ (m)	$t_m$ (s)
Aceite de ricino	1.236E-03	5.895E-01	2.250E+01
Glicerina	1.247E-03	5.710E-01	4.400E+01
Fuelóleo pesado	1.237E-03	5.770E-01	2.980E+02
Aceite de silicona	1.238E-03	5.930E-01	5.520E+03

**Tabla 3. Parámetros de la onda en estado estacionario y tiempo para abandonar el dominio.**

Fluido	$h_e$ (m)	$z_e$ (m)	$t_e$ (s)	$t_T$ (s)
Aceite de ricino	1.122E-03	2.290E+02	1.150E+02	1.540E+02
Glicerina	1.147E-03	1.861E+00	1.830E+02	3.120E+02
Fuelóleo pesado	1.179E-03	1.430E+00	7.550E+02	1.840E+03
Aceite de silicona	1.183E-03	1.293E+00	1.489E+03	3.251E+03

La Tabla 2 nos muestra que la máxima amplitud de la onda, y la localización del máximo, no dependen del tipo de fluido, estando gobernados apenas por la geometría y condiciones iniciales del problema. Sin embargo, el tiempo necesario para la deformación de la onda, y el tiempo para alcanzar la máxima amplitud aumentan considerablemente con el incremento de la viscosidad del fluido.

Analizando la Tabla 3 podemos observar que al aumentar la viscosidad del fluido la distancia recorrida por la onda hasta tornarse estacionaria disminuye, por otro lado, se incrementa la amplitud de la onda en estado estacionario. También, el tiempo para alcanzar el estado estacionario y para abandonar el tubo aumentan significativamente con el aumento de la viscosidad. La evolución de la onda en cada fluido y la dependencia comportamental con la viscosidad cinemática son consistente con la física del fenómeno abordado.



## 4. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un modelo analítico para simular la evolución de ondas en películas descendentes gobernadas por gravedad en tubos verticales. El modelo es representado por una ecuación integro-diferencial que describe el espesor de la película en función de la componente axial de la velocidad. Propusimos una estrategia numérica para resolver el modelo usando un método predictor-corrector semi-implícito de cuarta orden. El modelo analítico y el procedimiento numérico fueron evaluados mediante la solución del problema de onda solitaria para fluidos con viscosidades diferentes.

El modelo y la estrategia de solución numérica ofrecieron resultados satisfactorios para fluidos de viscosidad media y elevada. Sin embargo, para fluidos de baja viscosidad no fue posible reproducir la evolución de la onda, los resultados fueron inestables. La inestabilidad está asociada al alto grado de rigidez del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias obtenido después de la discretización, característica que se agudiza con fluidos poco viscosos. Los pasos futuros de esta investigación envuelven perfeccionar la estrategia numérica para obtener soluciones estables para todos los tipos de fluidos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero ofrecido a esta investigación a través del programa de I + D del proyecto EXMOTRANSIN ENE2016-79489-C2-1-P. Los investigadores Susana M. Iglesias y Dany S. Dominguez agradecen a la Universidad Estadual de Santa Cruz por el financiamiento parcial ofrecido a esta investigación.

## REFERENCIAS

- [1] J. R. Fanchi, "Wells," in *Principles of Applied Reservoir Simulation*, Elsevier, 2018, pp. 139–162.
- [2] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde, *Falling Liquid Films*, no. 163. Springer, Applied Mathematical Sciences, 2012.
- [3] I. Zadrazil, O. K. Matar, and C. N. Markides, "An experimental characterization of downwards gas-liquid annular flow by laser-induced fluorescence: Flow regimes and film statistics," *Int. J. Multiph. Flow*, vol. 60, pp. 87–102, 2014.
- [4] N. Mascarenhas and I. Mudawar, "Study of the influence of interfacial waves on heat transfer in turbulent falling films," *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 67, pp. 1106–1121, 2013.
- [5] R. Camassa, H. R. Ogrosky, and J. Olander, "Viscous film flow coating the interior of a vertical tube . Part 1 . Gravity-driven flow," *J. Fluid Mech.*, vol. 745, pp. 682–715, 2014.
- [6] J. L. Muñoz-Cobo, A. Miquel, C. Berna, and A. Escrivà, "Spatial and Time Evolution of Non Linear Waves in Falling Liquid Films by the Harmonic Expansion Method with Predictor-Corrector Integration," in *12th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics 2016*, 2016, pp. 91–97.
- [7] J. D. Hoffman and S. Frankel, *Numerical Methods for Engineers and Scientists, Second Edition*,. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001.
- [8] T. Chen, M.-S. Chiu, and C.-N. Weng, "Derivation of the generalized Young-Laplace equation of curved interfaces in nanoscaled solids," *J. Appl. Phys.*, vol. 100, no. 7, p. 074308, Oct. 2006.
- [9] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, "Modeling film flows down inclined planes," *Eur. Phys. J. B*,



vol. 6, pp. 277–292, 1998.

- [10] K. Atkinson, W. Han, and D. Stewart, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [11] R. Camassa, M. G. Forest, L. Lee, H. R. Ogorosky, and J. Olander, “Ring waves as a mass transport mechanism in air-driven core-annular flows,” *Phys. Rev. E*, vol. 86, no. 6, p. 066305, 2012.