

# **COMPOSICIÓN DE CARTERA RÉPLICA PARA LA PREDICCIÓN DEL ÍNDICE BURSÁTIL ESPAÑOL IBEX 35**

Carla Moreno Navarro

Máster en Dirección Financiera y Fiscal

Facultad de Administración y Dirección de Empresas  
Universidad Politécnica de Valencia

Septiembre, 2012



# AGRADECIMIENTOS

---

En primer lugar, quiero agradecer a mis profesores Ana María Debón y Juan Carlos Cortés por el tiempo dedicado y el constante apoyo a lo largo de la realización de esta tesina, sin los cuales no habría sido posible realizarla. Sus consejos, orientación y buena disposición para atender dudas y analizar resultados, me han permitido desarrollar este trabajo de investigación y han sido sumamente importantes en mi formación académica.

De ellos he aprendido no sólo en lo profesional, sino en lo personal. Su afán de investigación, su profesionalidad y su compromiso, son cualidades que poseen y que pretendo llevar a la práctica en mi objetivo de ser docente.

Quiero agradecerle también a mi amigo Pedro Eslava, del Departamento de Autorización y Registros de Entidades de la Comisión Nacional de Mercado de Valores (CNMV), por el asesoramiento proporcionado.

Finalmente, quiero agradecer de forma muy especial a mis padres, Manuel y Vicenta, a mi hermana, María, y a mi pareja, Paco, quienes me han apoyado en todo momento y han estado conmigo dándome ánimo en momentos muy difíciles.



# ÍNDICE

---

<b>1</b>	<b>RESUMEN DEL TRABAJO FINAL DE MASTER</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL DE MASTER</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>ANTECEDENTES. SITUACIÓN ACTUAL</b>	<b>13</b>
<b>3.1</b>	<b>EI IBEX 35</b>	<b>13</b>
3.1.1	COMPOSICIÓN DEL IBEX 35	13
3.1.2	CÁLCULO DEL IBEX 35	15
3.1.3	NECESIDAD DE PREDICCIÓN DEL IBEX 35	18
<b>3.2</b>	<b>METODOLOGÍA CLÁSICA APLICADA</b>	<b>19</b>
3.2.1	ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES	19
3.2.1.1	Análisis de componentes principales sobre los residuos obtenidos mediante regresión simple	20
3.2.1.2	Rotación de componentes	22
3.2.1.3	Selección de acciones en la cartera réplica	23
3.2.2	INDEX TRACKING	23
3.2.2.1	Criterio Tracking Error Variance (TEV) para la réplica de carteras	24
3.2.3	EL MODELO LOG NORMAL	25
3.2.3.1	Movimiento Browniano	27
3.2.3.2	Motivación del modelo Log normal	28
3.2.3.3	Calibración de los parámetros del modelo Log normal	38
3.2.3.4	Estimación de los parámetros del modelo Log normal por el método de máxima verosimilitud	41
3.2.3.5	Predicción del IBEX 35 mediante el modelo Log normal	43

3.2.4	LA SIMULACIÓN MONTECARLO	44
3.2.4.1	Conceptos fundamentales para la aplicación práctica del método Monte Carlo	45
3.2.5	VALIDACIÓN DE LA METODOLOGIA PROPUESTA	47
3.2.5.1	Medidas de Bondad de Ajuste	47
3.2.5.2	Medidas de Bondad de Ajuste penalizadas	48
<b>3.3</b>	<b>OTRAS TEÓRIAS CLÁSICAS PARA LA FORMACIÓN Y EVALUACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN Y PARA LA PREDICCIÓN DE ÍNDICES</b>	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>APLICACIÓN DE COMPONENTES PRINCIPALES Y TRACKING ERROR PARA LA FORMACIÓN DE LA CARTERA RÉPLICA</b>	<b>53</b>
4.1.1	COMPONENTES PRINCIPALES	54
4.1.2	TRACKING ERROR	58
<b>4.2</b>	<b>APLICACIÓN DEL MODELO LOG NORMAL Y SIMULACIÓN MONTE CARLO PARA LA PREDICCIÓN DEL IBEX 35</b>	<b>62</b>
4.2.1	PREDICCIÓN DEL IBEX 35 UTILIZANDO LOS TÍTULOS DE LA CARTERA RÉPLICA	62
4.2.2	PREDICCIÓN DEL IBEX 35 UTILIZANDO SUS 10 PRIMERAS EMPRESAS POR PONDERACIÓN	68
4.2.3	APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD PARA LA CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO LOG NORMAL	71
4.2.4	PREDICCIÓN DEL IBEX 35 PARA EL AÑO ANTERIOR (2011)	72
<b>4.3</b>	<b>VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA</b>	<b>78</b>
4.3.1	MEDIDAS DE BONDAD DE AJUSTE	78
4.3.2	MEDIDAS DE BONDAD DE AJUSTE PENALIZADAS	82
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>85</b>

<b>6</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>91</b>
	<b>Índice de Tablas</b>	<b>97</b>
	<b>Índice de Gráficas</b>	<b>99</b>
	<b>Índice de Figuras</b>	<b>99</b>
	<b>Anexos</b>	<b>101</b>





# 1 | RESUMEN DEL TRABAJO

El índice IBEX 35 es el principal índice de referencia de la bolsa española. La motivación de estudiar cómo se construye y cómo se predice radica en la importancia que tiene para la economía española, ya que su valor refleja la salud económica del país. Ello estimula la búsqueda de una metodología que replique el índice, en un entorno en que los mercados financieros se caracterizan por la gran cantidad de información que manejan. Se hace necesario conocer herramientas que sean capaces de procesar gran cantidad de información y que simplifiquen la toma de decisiones.

El IBEX 35 es un índice ponderado por capitalización bursátil, lo cual significa que no todas las empresas que lo forman tienen el mismo peso. Por este motivo se pretende realizar una réplica parcial del índice, no sólo porque desde el punto de vista computacional resulta más barato, sino porque permite construir carteras de inversión.

Con el propósito de obtener una cartera que replique el comportamiento del IBEX 35 utilizando un número reducido de títulos, se utilizará el análisis de regresión y el análisis de componentes principales. Para obtener los pesos de la cartera réplica seleccionada, se utilizará como medida del riesgo de carteras de inversión, el Tracking Error Variance. El periodo considerado para aplicar esta metodología será de 2 años (2010 y 2011).

En un segundo paso, mediante la fórmula del cálculo del IBEX 35, se deducen aquellos valores o parámetros que resultan desconocidos. El precio de las acciones de las empresas que componen el índice es un valor desconocido, por lo que se aplicará el modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo para estimar el valor de cada una de las cotizaciones asociadas a las empresas seleccionadas en la cartera réplica. De esta forma podrá estimarse la Capitalización Bursátil, y por lo tanto, predecir el valor del IBEX 35. En nuestro caso, esto se realizará para la primera semana de 2012.

La aplicación de este modelo exige la calibración de ciertos parámetros. Esto se realizará mediante diferentes metodologías: el método de los momentos y el método de máxima verosimilitud, lo que nos permitirá testear la calidad de las predicciones por ambos enfoques.

Asimismo, en el trabajo se compararán los resultados obtenidos mediante el análisis de componentes principales y Tracking Error con la opción de seleccionar los títulos que formarán la cartera réplica según el peso que representan en la composición del índice IBEX 35. Concretamente se han seleccionado las 10 primeras empresas por ponderación.

La selección del periodo temporal para la aplicación del modelo Log normal y Simulación Monte Carlo exige una búsqueda empírica previa. Tras un trabajo de búsqueda de la mejor longitud temporal para su aplicación, en esta memoria se ha aplicado esta metodología en dos periodos diferentes, 12 y 20 semanas, lo que ha permitido establecer una comparación entre los resultados obtenidos en ambos periodos.

Para comprobar si la metodología utilizada es apta para el fin perseguido se van a emplear dos métodos de aprobación. En primer lugar, se calcularán medidas de bondad de ajuste. Posteriormente, se procederá a la validación del modelo mediante medidas de bondad de ajuste penalizadas.

Finalmente, todo el estudio será analizado para el periodo de tiempo comprendido entre 2009 y 2010, con el objetivo de comparar la predicción realizada para la primera semana de 2012, con la realizada para 2011. La volatilidad es una característica fundamental de los mercados financieros actuales, y el uso de modelos matemáticos y econométricos se encuentran en entredicho a causa del aumento de la volatilidad en los últimos años. Por ello, se busca contrastar la efectividad de la metodología presentada para diferentes años.

## 2 | OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL DE MASTER

El presente trabajo tiene como principal objetivo estudiar una metodología capaz de replicar el índice IBEX 35 con la utilización de un número reducido de títulos, lo que permitirá realizar predicciones y construir carteras de inversión basadas en este índice.

Para alcanzar este objetivo necesitaremos también marcarnos otra serie de objetivos, como es el estudio de la composición y cálculo del índice. La volatilidad de dicho índice es una variable fundamental en la determinación del precio de los futuros y en las estrategias de negociación en los mercados de derivados. Por tanto, resulta ineludible un conocimiento del comportamiento que presenta este índice, además de la información que ofrece sobre las expectativas y la marcha de la economía.

Otro de los objetivos marcados en este trabajo es el estudio de métodos estadísticos para replicar índices, como es el caso del método de componentes principales, y para modelar activos financieros, en particular, el modelo Log normal.

De la misma manera, el estudio y análisis de medidas de Bondad de Ajuste de las series temporales utilizadas a lo largo de todo el estudio, es primordial para aceptar el modelo como válido.

Con respecto a la metodología aplicada en este trabajo, el objetivo del análisis de componentes principales consiste en comprobar la representación adecuada de toda la

información disponible a partir de un número menor de variables construidas como combinaciones lineales e incorreladas de las variables originales.

El modelo Log normal es un modelo de acciones basado en un proceso estocástico denominado movimiento browniano geométrico, utilizado con el objetivo de estudiar la evolución del IBEX 35 durante un período determinado.

El modelo Log normal será utilizado para comprobar, por un lado, la calidad de la cartera seleccionada mediante componentes principales, y por otro, para realizar una predicción del valor que alcanzará el IBEX 35 en una semana en concreto, la primera semana del 2012.

# 3 ANTECEDENTES, SITUACIÓN ACTUAL

## 3.1 EL IBEX 35

### 3.1.1 Composición del IBEX 35

Un Índice Bursátil es una convención simple, un número calculado estadísticamente que tiene por objeto reflejar la variación del precio de la cesta de acciones que lo conforman.

El índice IBEX 35 es el índice compuesto por los 35 valores más líquidos cotizados en el Sistema de Interconexión Bursátil (SIBE) de las cuatro Bolsas Españolas, usado como referente nacional e internacional y subyacente en la contratación de productos derivados. Técnicamente es un índice de precios, ponderado por capitalización y ajustado por el Capital Flotante<sup>1</sup> de cada compañía integrante del índice.

Sociedad de Bolsas, S.A., es la encargada de la gestión y funcionamiento del Sistema de Interconexión Bursátil. Es también la propietaria del índice IBEX 35 y encargada de su

<sup>1</sup> El Capital Flotante es la parte del capital de una sociedad que cotiza en bolsa y no está controlada por accionistas estables.

<sup>2</sup> El Comité Asesor Técnico denominado "Comité de expertos", es el que decide en reuniones ordinarias (semestralmente) o

gestión, cálculo, revisión de su composición y difusión en tiempo real. La supervisión del Índice es responsabilidad del Comité Asesor Técnico<sup>2</sup>, (en adelante, el Comité).

El valor del índice es un valor en puntos y un porcentaje que indica la subida o la bajada del mismo. El porcentaje muestra la evolución histórica del índice, mientras que los llamados puntos tienen un comienzo en un punto llamado Base Bursátil.

El IBEX 35 comenzó su andadura oficial el 14 de enero de 1992 en los 3.000 puntos, aunque es posible obtener cotizaciones anteriores gracias a estimaciones del selectivo que se hicieron con posterioridad. En teoría, se puede encontrar la serie histórica del selectivo español desde 1989, ya que la fecha que se tomó como referencia para elaborar la base 3.000 del índice fue el 31 de diciembre de ese año.

Los homólogos más importantes a nivel internacional son: en Francia, CAC 40; en EEUU, Dow Jones; Alemania, DAX y Reino Unido, Footsie.

Entre los criterios utilizados para que un valor forme parte del índice IBEX 35, no se tiene en cuenta el sector económico al que pertenece el citado valor, ya que el índice IBEX 35 no debe guardar ninguna diversificación sectorial específica en su composición. Tampoco depende directamente de la dimensión de las empresas, aun cuando se requiere un mínimo de capitalización para ser elegible como componente del índice. Es probable que muchas grandes empresas que cotizan en bolsa con asiduidad y de la que se negocian diariamente volúmenes importantes de sus acciones, pertenezcan al índice, no por su tamaño, sino por la liquidez de sus títulos.

De acuerdo con las Normas Técnicas para la Composición y Cálculo de los Índices de Sociedad de Bolsas, S.A., el Comité tiene en cuenta para cada valor, el volumen efectivo negociado en el mercado de órdenes, o mercado principal, siempre que dicho volumen efectivo, reúna unas garantías de calidad en su realización. En este sentido el Comité vigilará y podrá descontar, en su caso, del volumen efectivo total negociado, los volúmenes que atiendan a características como:

- Sean consecuencia de operaciones que conlleven un cambio en el accionariado estable de la Sociedad.

---

<sup>2</sup> El Comité Asesor Técnico denominado "Comité de expertos", es el que decide en reuniones ordinarias (semestralmente) o extraordinarias (cuando así lo requieran las circunstancias) los valores que integran la composición del IBEX 35. Este Comité, está formado por representantes de los mercados de Renta Variable y Derivados, así como por reconocidos expertos del ámbito académico y financiero.

- Haya sido contratado por un único miembro del mercado, realizado en pocas negociaciones, o realizado durante un periodo considerado por el Gestor del índice como poco representativo.
- Que el efectivo negociado sufra un descenso tal que el Gestor considere que la liquidez del valor está gravemente afectada.

El comportamiento en precios de un valor no es un factor tenido en cuenta por el Comité en su toma de decisiones, que se basa exclusivamente en criterios de liquidez, entendida ésta en términos de volumen de contratación, tanto en euros como en órdenes. Aun cuando estadísticamente se da con frecuencia una cierta relación entre comportamientos alcistas de un valor e incrementos de su liquidez, en tanto en cuanto la liquidez del valor no se sitúe entre los 35 primeros valores, no se integrará como componente del índice IBEX 35.

El Comité, en su toma de decisiones, no hace previsiones de futuro a largo plazo a la hora de incluir o excluir un valor del índice, aunque siempre puede hacer algún tipo de consideración a una operación próxima en el tiempo. En todo caso, se tratará de una información pública, fiable y que afecte significativamente a los criterios utilizados por el Comité recogidos de forma general en las Normas Técnicas para la Composición y Cálculo de los Índices de Sociedad de Bolsas, S.A. En ningún caso, se tienen en cuenta previsiones de futuro sobre volumen a negociar (por ejemplo, por decadencia o alza de un sector económico o un área geográfica determinada a la que está vinculada la compañía), llegada de competidores (nacionales o extranjeros) que afecten de forma especial a un valor determinado, etc.

En la selección semestral de los 35 valores más líquidos, no existe un número mínimo ni máximo de cambios a realizar respecto al periodo anterior, pudiendo no realizarse ningún cambio o realizarse tantos cambios como sea pertinente, según sean los resultados de la medición de liquidez.

### **3.1.2 Cálculo del IBEX 35**

Para el cálculo del Índice Bursátil Español IBEX 35 se utiliza una fórmula matemática en la que se atiende a la Capitalización Bursátil (precio por número de acciones consideradas para el cálculo) de las 35 empresas, y se aplica un coeficiente de ajuste.

Las empresas con mayor capitalización bursátil tienen mayor peso dentro del índice y sus alzas y bajas influirán en mayor medida en el movimiento final del IBEX 35. Esto significa

que cuando Grupo Santander, Telefónica, BBVA, Iberdrola y Repsol YPF están en baja, el IBEX 35 tiene gran preocupación porque éstas influyen mucho sobre el índice general.

La fórmula utilizada para el cálculo del valor del índice IBEX 35 es:

$$IBEX\ 35(t) = IBEX\ 35(t - 1) \times \frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t)}{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t - 1) + J}, \quad (3.1)$$

siendo;

- $t$  = Instante del cálculo del índice.
- $Cap_i(t)$  = Capitalización de la compañía  $i$  incluida en el índice en el instante  $t$ , es decir,  $S(t) \times P(t)$ .
- $S(t)$  = N° de acciones computables para el cálculo del valor del índice.
- $P(t)$  = Precio de las acciones de la compañía incluida en el Índice en el instante ( $t$ ).
- $\frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t)}$  = Suma de la capitalización de todas las compañías incluidas en el índice.
- $J$  = Cantidad utilizada para ajustar el valor del índice.

El valor del coeficiente  $J$  representa la capitalización de ajuste para asegurar la continuidad del índice, introducida con motivo de determinadas operaciones financieras definidas de acuerdo a las Normas Técnicas de Composición y Cálculo del índice.

El objetivo de los ajustes al índice es garantizar, en la medida de lo posible y de una forma sencilla, que el mismo refleje el comportamiento de una cartera compuesta por las mismas acciones que componen éste.

En el caso en que se produjera una operación sobre uno o más valores del índice que requiriese la realización de ajustes no contemplados en las Normas Técnicas, o que el ajuste descrito en las mismas no cumpliera claramente con el objetivo del índice, el Gestor podrá proponer al Comité un nuevo ajuste o cualquier otro tipo de acción para cumplir con el objetivo del índice.

Desde el punto de vista de sus ajustes, las operaciones financieras que afectan al índice, son:

- Dividendos Ordinarios y otras retribuciones a los accionistas asimilables al pago de Dividendos Ordinarios.



- Ampliaciones de Capital.
- Reducciones de Capital y otras cuentas de Fondos Propios.
- Emisión de Instrumentos Financieros Convertibles o Canjeables.
- Variación del Valor Nominal.
- Fusiones y Absorciones.
- Segregación Patrimonial o Escisión Societaria con retribución a los accionistas.
- Dividendos Extraordinarios y otras retribuciones a los accionistas no asimilables al pago de Dividendos Ordinarios.

Con carácter general, se toma como precio aquél al que se ha realizado la última transacción en el Sistema de Interconexión Bursátil. Sin embargo, si el Gestor lo considera oportuno podrá, en casos excepcionales, proponer al Comité una solución distinta de las anteriormente descritas atendiendo a las características de cada caso.

Con carácter general, el número de acciones de cada compañía tomado para el cálculo del valor del índice dependerá de su Capital Flotante. Dicho número variará cuando se produzcan operaciones financieras sobre los valores incluidos en el índice. Para la realización de éstos ajustes al índice, se tomará el número de acciones que el Gestor objetivamente considere en cada momento. Dicho número será siempre público formando parte de los anuncios del índice.

El número de acciones de cada compañía tomado para el cálculo del valor del índice, será corregido por un coeficiente en función de su tramo de Capital Flotante.

Así mismo, y con el fin de lograr una eficiente réplica del Índice IBEX 35, el Comité Asesor Técnico podrá tomar para el cálculo del valor del índice un número inferior al nº de acciones emitidas, atendiendo a criterios de dispersión significativa de la contratación en más de un mercado, liquidez o cualquier otro criterio que considere oportuno, lo que será publicado con la antelación suficiente.

### 3.1.3 Necesidad de predicción del IBEX 35

El papel que juega la predicción en la Economía es crucial. Todo proceso de decisión supone un posicionamiento sobre el futuro en el marco de un horizonte temporal determinado. Hay que reducir y acotar el campo de variación del comportamiento futuro de las variables que se analizan, lo que exige la intervención de métodos matemáticos, estadísticos y econométricos. Es imprescindible, por tanto, el conocimiento de técnicas y métodos concretos que faciliten el establecimiento de hipótesis o predicciones acerca de la evolución futura de determinadas variables.

La forma de estas predicciones vendrá predeterminada por las necesidades requeridas en cada caso. En ocasiones, bastará con una aproximación cualitativa del futuro, mientras que en otras, se requerirá la utilización de sofisticadas técnicas estadísticas y matemáticas. Asimismo, en función de la longitud del horizonte temporal o del número de escenarios requeridos, se tendrá que discernir entre la utilización de alguno de los diversos métodos existentes en la actualidad. El contexto de la previsión, la pertinencia y disponibilidad de datos históricos, el grado de exactitud perseguido, el intervalo de tiempo que hay que cubrir con la previsión, la relación coste-beneficio de la previsión para la empresa, y el tiempo disponible para efectuar el análisis, son algunos de los factores determinantes a la hora de seleccionar el método de previsión adecuado.

Las necesidades de predicción resultan obvias ya que la compra/venta de productos en un mercado de derivados depende de la evolución de determinadas magnitudes. El índice no puede negociarse en sí mismo (no se pueden comprar o vender acciones del IBEX 35), aunque sí pueden realizarse inversiones sobre su evolución a través de los contratos de derivados. En el caso de futuros sobre el IBEX 35 el valor del futuro depende de la volatilidad prevista para el IBEX 35. Por tanto, resulta ineludible un conocimiento del comportamiento que presentan las series temporales asociadas a las magnitudes analizadas, así como de los modelos estadísticos que se han mostrado eficaces en la tarea de predecir los valores futuros de esas magnitudes.

La volatilidad es una característica fundamental de los mercados financieros modernos, cuya medida y previsión es de vital importancia para los que en ellos operan. El estudio de la volatilidad puede realizarse, bien desde un punto de vista estático, considerándola un parámetro, o bien desde un punto de vista dinámico, considerándola como un proceso que evoluciona a lo largo del tiempo de manera aleatoria, pero predecible.

Si asumimos esta segunda acepción, dicha variable aleatoria sigue un proceso estocástico que es preciso modelizar para poder describir su comportamiento histórico y, a continuación, poder realizar predicciones para el futuro.

Conseguir modelar la evolución del IBEX 35 nos proporcionaría una fuente muy importante de información sobre las perspectivas que tienen los inversores respecto a la actividad económica del país.

## **3.2 Metodología clásica aplicada**

### **3.2.1 Análisis de componentes principales**

Karl Pearson (1857-1936), científico británico, fue inventor del contraste que lleva su nombre y uno de los fundadores de la Estadística en el siglo XIX. Sus trabajos sobre ajustes ortogonales precedieron el análisis de componentes principales.

Esta técnica fue inicialmente desarrollada por Karl Pearson pero posteriormente fue estudiada por Hotelling en los años 30 del siglo XX. Sin embargo, hasta la aparición de los ordenadores no se empezaron a popularizar.

El análisis de componentes principales, es una técnica multivariante que tiene como objetivo principal reducir la dimensión de una tabla de datos para pasar de “p” variables reales a “k” variables ficticias que aunque no observables, sean combinación de las reales y sinteticen la mayor parte de la información contenida en los datos, a costa de una pequeña pérdida de información. Las nuevas variables se van construyendo según el orden de importancia en cuanto a la variabilidad total que recogen de la muestra.

El primer componente principal se define como la combinación lineal de las variables originales que explica la máxima varianza. Cuando existe una alta correlación positiva entre todas las variables, el primer componente principal tiene todas sus coordenadas del mismo signo y puede interpretarse como un promedio ponderado de todas las variables o un factor global de “tamaño”. Los restantes componentes se interpretan como factores de “forma” y típicamente tienen coordenadas positivas y negativas, que implica que contraponen unos grupos de variables frente a otros. Estos factores de forma pueden frecuentemente escribirse como medias ponderadas de dos grupos de variables con distinto signo y contraponen las variables de un signo a las del otro.

El trabajo de F. Guijarro e I. Moya (2008) titulado “Propuesta metodológica para la selección de acciones en la réplica de índices” presenta un algoritmo muy útil para la selección de acciones en la réplica de índices.

La metodología se presenta como un algoritmo de tres etapas consecutivas. En primer lugar se determina el número de títulos a emplear en la cartera réplica haciendo uso de las técnicas de análisis de regresión y análisis de componentes principales. Posteriormente se identifican los títulos que formarán la cartera réplica entre el total de los disponibles, y finalmente se obtiene la ponderación de cada uno de ellos (apartado 3.2.2 Index Tracking). A continuación se detallan cada una de estas etapas.

### 3.2.1.1 Análisis de componentes principales sobre los residuos obtenidos mediante regresión simple

Sea  $y_i$  la rentabilidad del índice en un determinado instante de tiempo  $i$ , la rentabilidad obtenida durante un conjunto de  $T$  periodos consecutivos de tiempo puede representarse en forma de vector:

$$y^t = [y_1, y_2, \dots, y_T] \quad (3.2)$$

siguiendo el análisis clásico de la varianza, la variabilidad de  $y$  puede descomponerse de la siguiente forma:

$$(y - \bar{y})^t (y - \bar{y}) = (y - \hat{y}_j)^t (y - \hat{y}_j) + (\hat{y}_j - \bar{y})^t (\hat{y}_j - \bar{y}) \quad (3.3)$$

donde  $\bar{y}$  representa la media del vector  $y$ , esto es  $\bar{y} = \frac{1}{T} y^t \mathbf{1}$ ;  $\hat{y}_j = r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t y$  es el vector de predicciones obtenido al realizar una regresión simple entre  $y$ , y la rentabilidad del  $j$ -ésimo título  $r_j$  para el mismo periodo  $T$ . Utilizando la terminología habitual en el análisis de la varianza, la componente  $(\hat{y}_j - \bar{y})^t (\hat{y}_j - \bar{y})$  representa la variabilidad de  $y$  explicada por  $r_j$ , mientras que  $(y - \hat{y}_j)^t (y - \hat{y}_j)$  recoge la variabilidad no explicada o residual. Ambas componentes están incorreladas entre sí.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todas las variables están centradas y normalizadas por su desviación estándar, teniendo en cuenta que  $\bar{y} = \hat{y} = 0$ , la expresión (3.3) se reduce a:

$$y^t y = (y - \hat{y}_j^t)(y - \hat{y}_j) + \hat{y}_j^t \hat{y}_j = (1 - R_j^2) + R_j^2 \quad (3.4)$$

siendo  $R_j^2$  el coeficiente de determinación múltiple entre  $y$  y  $r_j$ . Desarrollando este término podemos expresar  $R_j^2$  en función de los escalares  $C_j = r_j^t y$  y  $C_j^{-1} = (r_j^t r_j)^{-1}$ :

$$R_j^2 = \hat{y}_j^t \hat{y}_j = (r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t y) (r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t y) = y^t r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t y = y^t r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t y = c_j C_j^{-1} c_j \quad (3.5)$$

En este primer paso se propone aplicar un análisis de componentes principales sobre la parte residual o no explicada (3.6).

$$u_j = y - \hat{y}_j \quad (3.6)$$

La idea clave que subyace tras esta propuesta es la de obtener componentes principales que relacionen, bajo una misma componente principal, aquellos títulos que tienen en común lo siguiente: la variabilidad del índice  $y$  que no explican. Si el análisis de componentes principales se lleva a cabo sobre la rentabilidad de los  $N$  títulos, la agrupación de estos en componentes principales se obtendrá según la relación que exista entre sus rentabilidades: si las rentabilidades de dos títulos están muy correlacionadas entre sí, sus coeficientes dentro de cada componente principal serán muy similares; si estas dos variables están poco correlacionadas entre sí, sus coeficientes en las diferentes componentes principales no guardarán a priori relación. En este caso no interviene la relación que los títulos puedan tener con la rentabilidad del índice  $y$ . Sin embargo, si el análisis de componentes principales se realiza sobre los residuos  $u$ , cuando los coeficientes de dos títulos sean similares en las componentes principales implicará que existe una fuerte relación entre la parte que no explican de  $y$ , y al contrario, cuando los coeficientes de dos títulos no guarden relación, será resultado de que ambas explican partes significativamente distintas de la variabilidad de  $y$ .

De esta forma, variables con elevado coeficiente en una misma componente deben ser entendidas como que comparten la explicación de la misma variabilidad de  $y$ , por lo que no pueden considerarse simultáneamente en la cartera réplica. De esta forma, en dicha cartera réplica solo se podrá considerar un título por componente principal.

La varianza de  $u_j$  será inversamente proporcional a la capacidad explicativa del título; esto es, cuanto mayor sea la capacidad explicativa del título sobre  $y$ , menor será la varianza de  $u_j$  obtenido de la regresión entre ambas rentabilidades. Puesto que el análisis de componentes principales maximiza la varianza de las componentes, los títulos altamente explicativos tendrán poco peso en las componentes (coeficiente de valor absoluto comparativamente pequeño). Para superar esto, de forma que los títulos de mayor capacidad explicativa obtengan coeficientes elevados debe reformularse la fórmula (3.6) de la siguiente forma:

$$v_j = ((u_j^t u_j)^{-1} - 1)^{1/2} u_j \quad (3.7)$$

con lo que la varianza de la nueva variable  $v_j$  coincide con el coeficiente de determinación  $R_j^2$  obtenido en la regresión entre  $y$  y  $r_j$ . En efecto, considérese la varianza de  $v_j$ :

$$v_j^t v_j = u_j^t ((u_j^t u_j)^{-1} - 1)^{1/2} ((u_j^t u_j)^{-1} - 1)^{1/2} u_j = ((u_j^t u_j)^{-1} - 1) u_j^t u_j$$

Empleando (3.5) llegamos a que la varianza de  $u_j$  resulta ser igual a  $1 - R_j^2$ :

$$u_j^t u_j = (y - \hat{y}_j)(y - \hat{y}_j) = y^t y + \hat{y}_j^t \hat{y}_j - 2y^t \hat{y}_j = 1 + \hat{y}_j^t (y - \hat{y}_j + y) - 2y^t \hat{y}_j =$$

$$1 + \hat{y}_j^t u_j + \hat{y}_j^t y - 2y^t \hat{y}_j = 1 - y^t r_j (r_j^t r_j)^{-1} r_j^t y = 1 - c_j^t C_j^{-1} c_j = 1 - R_j^2$$

con lo que se demuestra que:

$$v_j^t v_j = ((1 - R_j^2)^{-1} - 1)(1 - R_j^2) = \frac{1 - (1 - R_j^2)}{1 - R_j^2} (1 - R_j^2) = R_j^2$$

Para llevar a cabo el análisis de componentes principales sobre  $v_j$  se deberá emplear la matriz de covarianzas<sup>3</sup>, y no la de correlaciones<sup>4</sup>, puesto que ahora las diferencias en el momento de segundo orden si son relevantes: indican la diferente capacidad explicativa de cada título sobre la rentabilidad del índice. Obsérvese como  $u_j$  y  $v_j$  siguen manteniendo la misma matriz de correlaciones.

### 3.2.1.2 Rotación de las componentes

En la anterior etapa el número de componentes principales sólo determina el número de títulos a utilizar en la cartera réplica. Cuando las variables están significativamente correlacionadas entre sí, el análisis de componentes principales tiende a agruparlas en un componente. De esta forma, si consideramos que los títulos pueden seguir una evolución similar a largo plazo en cuanto a su rentabilidad, en consonancia por ejemplo con la marcha general de la economía, la primera componente principal será una combinación lineal positiva de todos los títulos, y con coeficientes próximos a la unidad. Esto implica que los coeficientes en el resto de componentes serán bajos, y se hará difícil la interpretación de los mismos (Jackson, 2003).

<sup>3</sup> Mide dependencia de dos variables. Serán independientes si su covarianza es 0.

<sup>4</sup> Mide fuerza y dirección de una relación lineal entre variables aleatorias. Dos variables estarán correlacionadas cuando los valores de una de ellas varíen sistemáticamente cuando lo haga la otra.

Para superar esta dificultad se propone llevar a cabo una rotación Varimax sobre aquellas componentes principales obtenidas. Esta rotación maximiza la varianza de los coeficientes que definen los efectos de cada componente sobre las variables explicativas. El objetivo es mejorar la interpretación de estas componentes, de forma que las variables (3.7) correlacionadas con alguna componente no lo estén con otras. La rotación Varimax permite que las componentes sigan siendo ortogonales entre sí.

En la rotación ortogonal, los ejes se rotan de forma que quede preservada la incorrelación entre las componentes. Dicho de otra forma, los nuevos ejes, o ejes rotados son perpendiculares de igual forma que lo son las componentes sin rotar.

### **3.2.1.3 Selección de acciones en la cartera réplica**

Al haber transformado los residuos (3.6) de forma que su varianza sea proporcional a su capacidad explicativa (3.7), pueden seleccionarse como representantes de cada componente los títulos que mayor coeficiente en valor absoluto hayan obtenido en la componente después de la Rotación Varimax.

Al incluir en la cartera réplica un solo título por componente principal, se está minimizando el grado de multicolinealidad dentro de la cartera. Esto es, sólo se incluyen títulos que aporten información incremental a la del resto de los títulos representantes de otras componentes. Si se incluyera más de un título por componente, la capacidad informativa de los mismos sería muy similar, puesto que por construcción del modelo, dos títulos en la misma componente explicarían una parte de la variabilidad muy afín.

## **3.2.2 Index Tracking**

El Index Tracking (réplica de un índice) consiste en componer una cartera que replique un índice (benchmark). La réplica puede ser completa o parcial, según se empleen todos los títulos del índice en la cartera réplica o no.

La réplica completa consiste en invertir en cada activo constituyente del índice la proporción exacta en que se considera en éste, y otro enfoque alternativo incluye muestreo estratificado y estrategias de optimización de carteras, según las cuales se construyen carteras invirtiendo en un subconjunto de activos del índice, pero tratando de reproducir las características de riesgo y rendimiento del índice de forma lo más acertada posible.

La réplica total presenta algunos inconvenientes:

- Ciertos títulos tienen un peso cuantitativamente poco relevante en el índice, lo que puede ser ineficiente si se consideran las comisiones de gestión en que incurren para poder mantenerlos en la cartera.
- Si la revisión periódica del índice origina un cambio paralelo en la composición de la cartera réplica, de nuevo las comisiones de gestión incidirán negativamente en la rentabilidad de la cartera. Además de estas revisiones, otras acciones como fusiones o adquisiciones entre empresas afectarán a la composición de la cartera réplica y las consiguientes comisiones a su rentabilidad.
- Las rentabilidades de algunos títulos pueden estar positiva y altamente correlacionados entre sí.

Estos motivos justifican el análisis de carteras réplica que limiten el número de títulos a un subconjunto de activos contemplados en el índice.

### 3.2.2.1 Criterio Tracking Error Variance (TEV) para la réplica de carteras

El Tracking Error se define como el error cometido por la cartera réplica frente a la evolución de la rentabilidad del índice, esto es, la varianza de la diferencia entre la rentabilidad del índice a replicar y la rentabilidad de la cartera réplica.

$$TEV = (q_p - q_b)^t V(q_p - q_b) = x^t V x \quad (3.8)$$

donde  $V$  es la matriz ( $N \times N$ ) de covarianzas entre los títulos;  $q$  es un vector ( $N \times 1$ ) con los pesos de la cartera ( $q_p$  para la cartera réplica y  $q_b$  para el índice), de forma que la entrada  $k$ -ésima se corresponde con la proporción invertida en el activo  $k$ . El vector  $x$ , también de dimensión ( $N \times 1$ ), representa la variación en el peso de los  $N$  activos de la cartera réplica respecto del índice.

La expresión (3.8) es minimizada bajo la restricción (3.9):

$$x^t 1 = 0 \quad (3.9)$$

siendo  $1$  un vector ( $N \times 1$ ) compuesto por  $1$ 's. Obviamente, si no se considera más restricciones que (3.9), el óptimo se alcanza con  $x = 0$ , y por tanto,  $q_p = q_b$ . Sin embargo, los gestores de fondos habitualmente incluyen una restricción sobre la rentabilidad en exceso:

$$x^t R = G \quad (3.10)$$



donde  $R$  es un vector ( $N \times 1$ ) de rentabilidades esperadas, y  $G$  es el objetivo de exceso de rentabilidad respecto del índice. Al variar  $G$  en el problema de minimizar (3.8), sujeto a (3.9) y (3.10) se obtiene una frontera que solo es eficiente si también lo es el índice.

La función cuadrática que minimiza el Tracking error considerando únicamente el subconjunto de títulos referenciados es:

$$\sum_{i=1}^T (w^t r_i - R_i)^2 \quad (3.11)$$

sujeto a:

$$w^t 1 = 1 \quad (3.12)$$

donde  $w$  es el vector incógnita de los pesos de los títulos en la cartera réplica;  $r_i$  es el vector de rentabilidad de dichos títulos durante el periodo  $i$ ; y  $R_i$  la rentabilidad del benchmark durante el mismo periodo  $i$ . La restricción (3.12) determina que la suma de los pesos ha de ser uno.

Debe tenerse en cuenta que no siempre se obtendrá la cartera de menor tracking error con  $k$  títulos; o en otras palabras, la solución óptima del problema. Ninguno de los algoritmos propuestos en la literatura asegura su obtención, más bien, la competencia entre ellos está en esclarecer quién se aproxima más al ideal u óptimo, pero con un coste que sea computacionalmente aceptable.

### 3.2.3 El modelo Log normal

El siguiente apartado tiene como objeto, motivar el uso del denominado modelo Log normal o Movimiento Browniano Geométrico, para la valoración de acciones y opciones sobre acciones. La justificación de su uso práctico está basado en el éxito del mismo, testado en numerosos estudios empíricos (véase, Lamberton y Lapeyre 1996, y Øksendahl 1998), y sobretodo porque es una de las piedras angulares de modelo de Black-Scholes y Merton (véase, Black y Scholes, 1973 y Merton, 1976) para poner precio a un tipo de activo financiero llamado opción europea, cuyo valor se basa en el de una acción. Este último modelo fue galardonado en el año 1997 con el Premio Nobel de Economía.

El modelo Log normal se basa en la ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB(t), \quad (3.13)$$

que modeliza la tasa de cambio  $dS(t)$  del precio de una acción o subyacente en el intervalo  $[t, t+dt]$  de longitud  $dt$ , descomponiendo su valor en dos sumandos: el primero de tipo determinista,  $\mu S(t)dt$ , que indica que la variación es proporcional al subyacente al inicio del intervalo, i.e.,  $S(t)$  y al plazo transcurrido,  $dt$ , (siendo  $\mu$  la constante de proporcionalidad, que se denomina deriva o drift); y un segundo sumando de tipo aleatorio,  $\sigma S(t)dB(t)$ , que trata de recoger todos los aspectos no deterministas del mercado, pero que influyen en la variación del precio del subyacente (como puede ser el riesgo político internacional, la incertidumbre ante catástrofes naturales, etc.). Esto último se hace multiplicando el valor del subyacente  $S(t)$  por una constante positiva  $\sigma$ , llamada volatilidad, por, -y esta es la forma mediante la cual se introduce la aleatoriedad-, un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano o proceso de Wiener,  $B(t)$ . En resumen, las variables y parámetros de (3.13) son:

- $S(t)$  es el precio del subyacente o acción en el instante  $t$ .
- $\mu$  es una constante llamada tendencia o deriva (o drift).
- $\sigma$  es una constante positiva llamada volatilidad.
- $B(t)$  es un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano.
- $dS(t)$  es la variación del subyacente en el intervalo  $[t, t + dt]$ .
- $dB(t)$  es la variación del Movimiento Browniano en  $[t, t + dt]$ .

El primer modelo de precios para acciones que contenía en su formulación la aleatoriedad fue introducido por Louis Bachelier en 1900 (véase, Bachelier 1900) en su tesis doctoral, pero debido al contexto formativo de su época, esta aportación quedó desgraciadamente aparcada y resultó incomprendida, y fue posteriormente en los trabajos de P. Samuelson (véase, Samuelson 1965) cuando se recuperó el trabajo de Bachelier (el cual ciertamente contenía errores graves desde el punto de vista matemático, pero contenía las ideas novedosas y centrales que luego se aprovecharían para desarrollar gran parte de los principales modelos actuales). Desde entonces, estas aportaciones han tenido un gran impacto en la literatura e investigación en Finanzas, y hoy son numerosos los modelos de tipo estocástico que tratan de explicar la evolución de los precios de los activos financieros, debido al gran número de factores inciertos que determinan finalmente el precio de cualquier acción.

### 3.2.3.1 El movimiento Browniano

Ya se ha señalado en el apartado anterior que la forma de introducir la aleatoriedad en el modelo es a través de un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano o proceso de Wiener<sup>5</sup>, denotado  $B = \{B(t) : t \geq 0\}$  y que se define como aquel que cumple las siguientes propiedades:

- B1. Empieza en el origen con probabilidad 1:  $P[B(0) = 0] = 1$ .
- B2. Tiene incrementos estacionarios:  $B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s)$ ,  $\forall s, t \in [0, +\infty[$ , siendo  $\stackrel{d}{=}$  una igualdad en distribución.
- B3. Tiene incrementos independientes, es decir, se cumple que las siguientes variables aleatorias:  $B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \dots, B(t_{n+1}) - B(t_n)$ , con  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < +\infty$ , son independientes.
- B4. Los incrementos siguen una distribución normal o gaussiana de media cero y varianza la longitud del incremento de la variable independiente, es decir,  $B(t) - B(s) \sim N(0; t - s)$ . En particular si  $s = 0$  se sigue:  $B(t) \sim N(0; t)$ .
- B5. Tiene trayectorias continuas (sin saltos), pero que no son diferenciables en ningún punto.

Algunas de las trayectorias muestrales de este proceso pueden verse en la Figura 3.1. Éstas cumplen las condiciones B1-B5, como una primera aproximación. Cada una de las trayectorias representadas podría ser el ruido o aleatoriedad que modeliza el término aleatorio de cada uno de los posibles caminos que el precio de la acción podría seguir de acuerdo al modelo de paseo aleatorio que se formulará más adelante.

La elección de este proceso estocástico para su inclusión en el modelo (3.13) está fundamentada en el éxito que el mismo ha tenido en las aplicaciones reales. Ello no debe de extrañar en base al Teorema Central del Límite, ya que son muy numerosos y diferentes, los factores y variables que en el mundo real pueden llegar a determinar el valor de un activo financiero.

Por otro lado, las trayectorias irregulares del proceso browniano recogen muy bien, cuando se incluyen en el modelo final (el modelo Log normal), las gráficas que los operadores de índices manejan día a día al representar su evolución.

---

<sup>5</sup> Fue el gran físico-matemático, Norbert Wiener quien a principios del siglo XX formalizó matemáticamente la observación empírica del botánico R. Brown.

El Movimiento Browniano  $B = \{B(t) : t \geq 0\}$  goza de las siguientes propiedades, de las cuales se hará uso posteriormente:

- P1. Función media:  $\mu_B(t) = 0, \forall t \geq 0$ .
- P2. Función covarianza:  $\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \forall s, t \geq 0$ .
- P3. Es  $\frac{1}{2}$ -autosemejante:  $T^{\frac{1}{2}} B(t) = B(Tt), \forall t \geq 0$  y  $\forall T > 0$ .

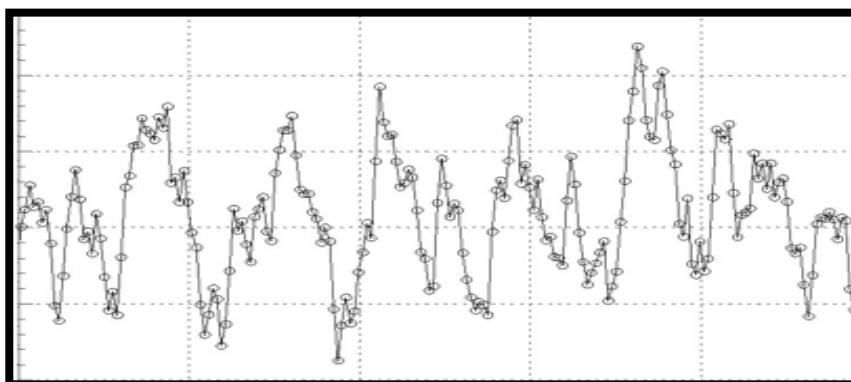


Figura 3.1. Fuente: Angarita (2008). Algunas trayectorias muestrales del Movimiento Browniano

La primera propiedad nos indica que, en media, el valor que toma este proceso es nulo (esto se aprecia intuitivamente en la Figura 3.1). La función de covarianza mide el grado de relación lineal (en el sentido estadístico) entre las variables aleatorias  $B(s)$  y  $B(t)$  que se obtienen al fijar dos instantes  $s$  y  $t$ . Mientras que la última propiedad es puramente geométrica. Se han introducido aquí estas propiedades porque a continuación permitirán motivar el uso del modelo Log normal en la valoración de acciones (véase, Figura 3.3).

### 3.2.3.2 Motivación del modelo Log normal

En este apartado se motivará la aplicación del modelo Log normal desde dos enfoques diferentes. Para desarrollar el primer enfoque, se considerará en primer lugar el modelo clásico determinista de capitalización compuesta continua, y a partir del mismo, introduciendo la aleatoriedad en él, llegaremos a admitir como plausible el modelo Log normal. En el segundo enfoque, más formal y técnico, se requerirá el uso del denominado Lema de Itô, y se presenta en este trabajo porque es el camino adecuado para formalizar gran parte de la teoría estocástica moderna de la modelización y valoración de activos financieros.

Sea  $S_0$  un principal que se invierte (capitaliza) a un interés  $\mu$  compuesto continuo durante un intervalo temporal  $[0, T]$  dividido en  $K$  periodos de longitud  $\Delta t > 0$  cada uno (véase, Figura 3.2).



Figura 3.2. Fuente: Elaboración propia. Capitalización a interés compuesto continuo

Denotemos por  $\hat{S}^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, K$ , el capital al cabo de  $j$  períodos (por convenio de notación, implícitamente se supone que  $\hat{S}^{(0)} = S_0$ ), entonces sabemos que

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 \exp(\mu \Delta t),$$

$$\hat{S}^{(2)} = S^{(1)} \exp(\mu \Delta t),$$

y en general,

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad (3.14)$$

y por tanto, razonando recursivamente se tiene

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) = \hat{S}^{(j-2)} \exp(2\mu \Delta t) = \dots = S_0 \exp(\mu j \Delta t) \quad , \quad j = 1, \dots, K. \quad (3.15)$$

Obsérvese que cuando  $j = K$ , se cumple que:  $\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) = S_0 \exp(\mu T)$ , donde se ha utilizado que  $K \Delta t = T$  y se ha introducido la notación siguiente:  $\hat{S}(T)$  representa el capital al cabo de  $K$  períodos. Es decir, el efecto de  $K$  pasos de longitud  $\Delta t$  equivale a un paso de tamaño  $T = K \Delta t$ . En realidad, este modelo de capitalización resulta de resolver el problema de valor inicial (ecuación diferencial ordinaria junto a una condición inicial) siguiente:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu \hat{S}(t) \quad , \quad \hat{S}(0) = S_0, \quad (3.16)$$

cuya solución es

$$\hat{S}(t) = S_0 \exp(\mu t), \quad (3.17)$$

la cual, para  $t=T$  captura la solución del problema anterior:  $\hat{S}(T) = S_0 \exp(\mu T)$ . Es importante observar que el modelo (3.13), el modelo estocástico de partida, contiene al modelo clásico determinista de capitalización continua, pues basta hacer  $\sigma = 0$  en (3.13) para obtener a partir de la ecuación diferencial estocástica (3.13) la ecuación diferencial ordinaria (3.16). Sin embargo, hace falta subrayar que el valor de una acción está gobernado por multitud de factores y variables que deben considerarse inciertos y no deterministas, por ello (3.16) no es un buen modelo, si bien el modelo que aspire a ser adecuado debe recoger en su formulación (y el modelo (3.13), así lo hace, como se verá después) la parte del valor de la evolución del precio de la acción que se comporta de forma determinista como cualquier otra inversión libre de riesgo y, la parte, incierta o aleatoria, que hace que el valor de ese activo financiero no sea predecible de forma determinista.

Por un razonamiento intuitivo, en este primer enfoque, llegaremos a que la solución de la ecuación diferencial estocástica es

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right). \quad (3.18)$$

En el segundo enfoque, se resolverá la ecuación 3.13 utilizando el cálculo estocástico de Itô (véase, Øksendahl 1998). Comencemos entonces con la deducción (intuitiva) anunciada. Para ello, basándonos en (3.14) con  $j=1$  introduzcamos (pertinente) aleatoriedad como sigue:

$$\tilde{S}^{(1)} = \tilde{S}^{(0)} \exp(\mu \Delta t) \exp(c Z_1), \quad (3.19)$$

siendo  $c$  una constante libre (que más tarde fijaremos) y  $Z_1$  una variable aleatoria normal o gaussiana tipificada, i.e,  $Z_1 \sim N(0;1)$ , y en general, introduciendo la aleatoriedad en (3.14) del mismo modo se tiene

$$\tilde{S}^{(j)} = \tilde{S}^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) \exp(c Z_j), \quad (3.20)$$

siendo  $Z_j \sim N(0;1)$ . Si hacemos esto para cada,  $j=1,2,\dots,K$  de modo que,  $Z_1,\dots,Z_j,\dots,Z_K$  sean variables aleatorias  $N(0;1)$  e independientes, desde (3.20) con  $j=K$ , obtenemos por recursividad que

$$\tilde{S}^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) \exp(c(Z_1 + \dots + Z_K)), \quad (3.21)$$

o equivalentemente,

$$\tilde{S}(T) = S_0 \exp(\mu T) \exp(c(Z_1 + \dots + Z_K)).$$

La aleatoriedad introducida así en (3.19) (o más generalmente en (3.20)), parece coherente porque garantiza que  $\tilde{S}^{(1)} > 0$  ( $\tilde{S}^{(j)} > 0$ ); pero no es totalmente satisfactoria, ya que, es de esperar que cuando no haya incertidumbre,  $\tilde{S}^{(1)}$  en (3.19) se comporte como en (3.15) con  $j = 1$ , al menos en media. Sin embargo, se sabe que (véase, Quesada 1988)

$$E[\exp(cZ)] = \exp\left(\frac{c^2}{2}\right), \quad Z \sim N(0,1), \quad (3.22)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} E[\tilde{S}^{(1)}] &= E[S_0 \exp(\mu \Delta t) \exp(cZ_1)] = S_0 \exp(\mu \Delta t) E[\exp(cZ_1)] \\ &= S_0 \exp(\mu \Delta t) \exp\left(\frac{c^2}{2}\right) \neq S_0 \exp(\mu \Delta t) = \tilde{S}^{(1)} \end{aligned}$$

Para lograr este objetivo marcado, vamos a introducir la aleatoriedad como sigue

$$S^{(1)} = S_0 \exp(\mu \Delta t) \exp\left(cZ_1 - \frac{c^2}{2}\right), \quad (3.23)$$

ya que, claramente de (3.22) se obtiene que

$$E[S^{(1)}] = S_0 \exp(\mu \Delta t),$$

y en general en (3.14) introduciremos la aleatoriedad del mismo modo:

$$S^{(j)} = S^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) \exp\left(cZ_j - \frac{c^2}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (3.24)$$

Razonando recursivamente como en (3.15) obtenemos

$$S(T) = S^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) \exp(c(Z_1 + \dots + Z_K)) \exp\left(-K \frac{c^2}{2}\right). \quad (3.25)$$

Denotemos por

$$W_K = Z_1 + \dots + Z_K, \quad (3.26)$$

entonces dado que  $Z_j \sim N(0,1)$ , con  $j = 1, 2, \dots, K$ , son variables aleatorias independientes se tiene  $W_K \sim N(0, K)$  y como  $K \Delta t = T$  y  $S^{(K)} = S(T)$ , (3.25) equivale a

$$S(T) = S_0 \exp(\mu T) \exp\left(cW_K - K \frac{c^2}{2}\right), \quad (3.27)$$

donde  $S_0$  es el precio o subyacente de la acción en el instante inicial;  $\exp(\mu T)$  es la componente determinista del valor de la acción (ligado al valor  $\mu$  del tipo de interés);  $W_K$  representa la introducción de la aleatoriedad en el modelo y  $\exp(-Kc^2/2)$  es un término (determinista) de corrección.

La modelización dada (3.27) tiene una gran ventaja frente a otro tipo de modelos como los basados en árboles binomiales (véase, Hull 2002), y es que permite que el valor de la acción no sólo tome dos valores posibles, sino cualquier valor positivo. Sin embargo, sigue conteniendo un defecto importante respecto de nuestros intereses; si fijamos  $T$  y vamos considerando subintervalos más pequeños (particiones más finas del intervalo  $[0, T]$ ), es decir, hacemos  $K \rightarrow +\infty$  ó equivalentemente  $\Delta t \rightarrow 0$ , con  $T$  fijo, para la varianza del término que introduce la aleatoriedad en el modelo (3.27) se obtiene por (3.26) que

$$\text{Var}[cW_K] = c^2 \text{Var}[W_K] = c^2 K \rightarrow +\infty, \quad (3.28)$$

esto es, la varianza de este término que forma parte del modelo de la acción aumentará cuantas más discretizaciones tomemos del intervalo objeto de análisis, con independencia del valor  $T$  que define su extremo superior, el cual está fijo. Esto carece de sentido desde el punto de vista financiero, ya que fijado un intervalo durante el cual se observa una acción, la volatilidad de la misma es un valor fijo que no debería cambiar aunque en lugar de observar la acción intra-semana lo hiciéramos intra-día. Para resolver esto, recordemos que la constante  $c$  introducida en (3.24) es libre y por tanto está a nuestro servicio. Tomemos entonces  $c$  de modo que

$$c^2 K = \sigma^2 T, \quad (3.29)$$

siendo  $\sigma^2$  un parámetro fijo identificativo del modelo particular que manejemos (y que en la práctica se calculará a partir de los datos reales observados). De esta forma,

$$\text{Var}[cW_K] = \sigma^2 T < +\infty. \quad (3.30)$$

Obsérvese que esto nos indica algo coherente que se aprecia en la práctica: a mayor longitud  $T$  del intervalo  $[0, T]$ , tendremos mayor volatilidad, es decir, variabilidad de la acción.

Vamos ahora a relacionar  $W_K$  dada en (3.26) con el Movimiento Browniano. A continuación, probaremos que

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t} W_K, \quad (3.31)$$



Siendo la igualdad anterior en distribución. Para ello observemos que ambos términos de (3.31) son gaussianos: el miembro de la izquierda por la propia definición de Movimiento Browniano, y el miembro de la derecha, por ser la transformación lineal de  $W_K$  que es, como ya se ha señalado anteriormente normal o gaussiano. Además, como por la propiedad B4

$$E[B(T)] = 0,$$

se tiene

$$E[\sqrt{\Delta t} W_K] = \sqrt{\Delta t} E[W_K] = 0,$$

ya que,  $E[W_K] = 0$ . Finalmente, por la propiedad B4 sabemos que

$$\text{Var}[B(T)] = T,$$

y como,  $\text{Var}[W_K] = K$  y  $K\Delta t = T$ , se obtiene

$$\text{Var}[\sqrt{\Delta t} W_K] = \Delta t \text{Var}[W_K] = K\Delta t = T.$$

Por otra parte, con la elección (5.17) se tiene

$$c = \sigma \sqrt{\frac{T}{K}} \stackrel{K\Delta t = T}{\Rightarrow} c = \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad (3.32)$$

y entonces,

$$cW_K = \sigma \sqrt{\Delta t} W_K = \sigma B(T), \quad (3.33)$$

donde en el último paso hemos utilizado la propiedad (3.31).

Finalmente, sustituyendo (3.29) y (3.33) en (3.27) llegamos a;

$$S(T) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \exp(\sigma B(T)), \quad (3.34)$$

Por lo que desde una motivación basada en la introducción de la aleatoriedad en el modelo determinista, hemos obtenido el modelo Log normal.

Observemos además que de (3.34), la propiedad P3 y aplicando (3.22) para  $c = \sigma\sqrt{T}$ , ya que,  $B(1) \sim N(0;1)$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 E[S(T)] &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) E[\exp(\sigma B(T))] \\
 &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) E[\exp(\sigma\sqrt{T} B(1))] \quad (3.35) \\
 &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \exp\left(\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right) \\
 &= S_0 \exp(\mu T)
 \end{aligned}$$

En palabras: el modelo Log normal goza de la deseable propiedad de que el comportamiento medio del precio de la acción es el mismo que el valor en el caso determinista (véase (3.17) con  $t = T$ ).

Para saber cómo evoluciona la volatilidad del precio de la acción según el modelo Log normal observemos que, razonando como para el caso de la media, la varianza está dada por

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[S(T)] &= E[(S(T))^2] - (E[S(T)])^2 \\
 &= E\left[(S_0)^2 \exp\left(2\sigma B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right] - (S_0)^2 \exp(2\mu T) \\
 &= (S_0)^2 \exp(2\mu T) (E[\exp(2\sigma B(T))] \exp(-\sigma^2 T) - 1) \quad (3.36) \\
 &= (S_0)^2 \exp(2\mu T) (E[\exp(2\sigma\sqrt{T} B(1))] \exp(-\sigma^2 T) - 1) \\
 &= (S_0)^2 \exp(2\mu T) \left(\exp\left(\frac{4\sigma^2 T}{2}\right) \exp(-\sigma^2 T) - 1\right) \\
 &= (S_0)^2 \exp(2\mu T) (\exp(\sigma^2 T) - 1) > 0,
 \end{aligned}$$

la cual nos indica (como cabe esperar desde la experiencia bursátil) que la varianza crece a medida que lo hace el horizonte temporal  $T$ .

Abordemos ahora la introducción del modelo Log normal mediante el segundo enfoque, el cual está basado, como ya se adelantó, en la aplicación del denominado lema de Itô que se presentará posteriormente.

En ambiente de certidumbre, si  $\hat{S}(t)$  es el valor resultante de invertir 1 € a un régimen de capitalización a interés compuesto continuo a una tasa constante  $\mu$  durante el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , entonces como se vio en (3.16),  $S(t)$  es la solución del siguiente problema de valor inicial cuya ecuación diferencial ordinaria indica que el capital crece a una tasa de

crecimiento relativo constante e igual a  $\mu$ , y cuya condición inicial indica la inversión al principio del intervalo:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu \hat{S}(t) \quad , \quad \hat{S}(0) = 1. \quad (3.37)$$

Sin embargo, cuando la inversión se realiza en un mercado bursátil, es más realista considerar que la tasa de crecimiento de la inversión contiene incertidumbre, y ésta es habitualmente modelizada en la forma  $\mu + \sigma \dot{B}(t)$ , siendo  $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$ , i.e., un proceso estocástico de tipo gaussiano o normal con media cero y varianza  $t$ , llamado Movimiento Browniano, y  $\dot{B}(t)$  su derivada (en el sentido de la teoría de distribuciones, ya que, las trayectorias de dicho proceso estocástico no son diferenciables en ningún punto). Por su parte,  $\dot{B}(t)$  es un proceso también gaussiano y estacionario, llamado ruido blanco. En este contexto, la ecuación diferencial dada en (3.37) se escribe en la forma

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma \dot{B}(t)) S(t),$$

o en su representación diferencial formal dada en (3.13), i.e.,

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB(t),$$

La cual, recordemos se denomina ecuación diferencial estocástica. Cuando  $\sigma = 0$ , corresponde a un modelo determinista (o sin ruido o incertidumbre) cuya solución para la condición inicial  $S(0) = 1$ , es bien conocida:  $S(t) = \exp(\mu t)$ , pero si  $\sigma \neq 0$ , su solución es un proceso estocástico, y para su cálculo se precisa de un cálculo estocástico especial, denominado Cálculo de Itô. Este cálculo maneja ecuaciones diferenciales estocásticas en la forma

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A_1(s) ds + c \int_0^t A_2(s) dB(s), \quad (3.38)$$

siendo  $A_1(s)$  y  $A_2(s)$  procesos estocásticos adaptados a la filtración  $\Gamma = (\mathfrak{F}_t) = (\sigma(B(s) : s \leq t))$ , donde  $\sigma(B(s) : s \leq t)$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $B(s)$  con  $s \leq t$  (véase, Lamberton 1996).

En (3.38), la primera integral es una integral ordinaria de Riemann y la segunda es una integral estocástica tipo Itô. Aunque las hipótesis se pueden relajar sustancialmente (véase, Øksendahl 1998), si suponemos que  $A_1(s)$  y  $A_2(s)$  son continuos y que con probabilidad 1 (c.p. 1) se cumple que

$$\int_0^t (A_2(s))^2 ds < +\infty, \text{ c.p. 1,}$$

las integrales que aparecen en (3.38) están bien definidas.

La principal herramienta del cálculo de Itô, la cual desempeña un rol análogo a la regla de la cadena en el cálculo diferencial, está dada a través del siguiente resultado, denominado:

**Lema de Itô** (versión adaptada al Movimiento Browniano). Dada una ecuación diferencial estocástica de la forma (3.13) y  $f(t, x)$  una función continua con derivada parcial de primer orden respecto de  $t$  continua y de segundo orden respecto de  $x$  continua, para  $s < t$ , se cumple:

$$\left. \begin{aligned} f(t, B(t)) - f(s, B(s)) &= \int_s^t \left( \frac{\partial f(u, B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, B(u))}{\partial x^2} \right) du \\ &+ \int_s^t \frac{\partial f(u, B(u))}{\partial x} dB(u) \end{aligned} \right\}. \quad (3.39)$$

Para la aplicación de este resultado, escribamos primero la e.d.e. (3.13) con condición inicial  $S(0) = S_0$  en forma integral

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu S(x) dx + \int_0^t \sigma S(x) dB(x), \quad (3.40)$$

y supongamos que  $S(t) = f(t, B(t))$ , entonces identificando coeficientes en (3.39) y (3.40), se tiene

$$\mu f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.41)$$

$$\sigma f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (3.42)$$

derivando (3.42) respecto de la segunda variable, i.e.,  $x$ , obtenemos

$$\sigma \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.43)$$

y sustituyendo (5.30) en (5.31), se llega a

$$\sigma^2 f(t, x) = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}. \quad (3.44)$$

Simplificando (5.29)-(5.32), obtenemos las ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \quad ; \quad \sigma f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (3.45)$$

cuya solución buscamos -utilizando el método de separación de variables para ecuaciones en derivadas parciales-, en la forma  $f(t, x) = g(t)h(x)$ , con lo que según (3.45) se debe satisfacer

$$g(t) = g(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \quad ; \quad h(x) = h(0) \exp(\sigma x), \quad (3.46)$$

por tanto,

$$f(t, x) = g(t)h(x) = g(0)h(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma x\right),$$

y como por definición del Movimiento Browniano (véase, propiedad B1), se cumple que  $B(0) = 1$  con probabilidad 1, se tiene que  $S(0) = f(0, B(0)) = f(0, 0) = g(0)h(0)$ , y por lo tanto sustituyendo esto en la última expresión

$$f(t, x) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right).$$

Finalmente,

$$S(t) = f(t, B(t)) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right) \quad , \quad t \geq 0, \quad (3.47)$$

que es el proceso estocástico solución de la ecuación diferencial estocástica tipo Itô (3.13), el cual es denominado Movimiento Browniano Geométrico o proceso estocástico Log normal, ya que, para cada  $t$  es la exponencial de una variable aleatoria gaussiana ( $B(t)$ ).

Se finaliza este apartado, mostrando en la Figura 3.3, diferentes simulaciones del Movimiento Browniano Geométrico. Obsérvese que dicho proceso toma valores no negativos, tal y como es deseable.

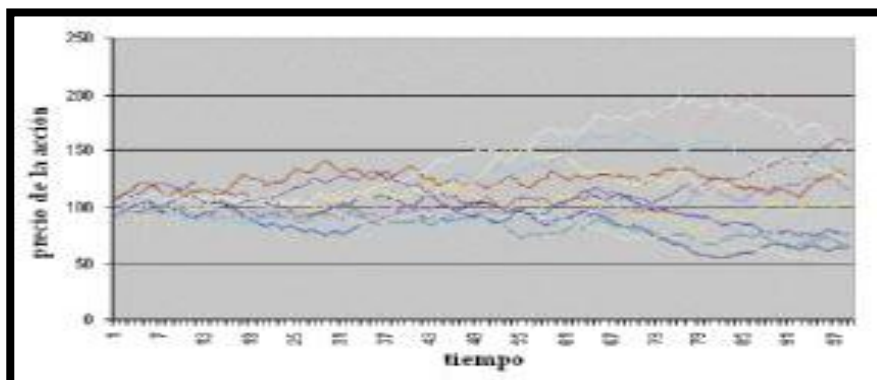


Figura 3.3. Fuente: Pozuelo Monfort (2004). Trayectorias muestrales del Movimiento Browniano Geométrico

### 3.2.3.3 Calibración de los parámetros del modelo Log normal

Desde un punto de vista práctico, si  $S(t)$  dada en (3.47) pretende recoger el comportamiento de la trayectoria temporal de un activo bursátil, primero se deben calibrar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Para este propósito es más adecuado manejar (3.47) en la forma equivalente que resulta de tomar logaritmos:

$$\ln(S(t)) - \ln(S(0)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma\sqrt{t}\right), \quad (3.48)$$

donde hemos utilizado que la distribución estadística es gaussiana por ser una transformación lineal de  $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$ .

Consideremos ahora una colección de  $K + 1$  cotizaciones del activo, digamos:  $S(0)$ ,  $S^{(1)} = S(\Delta t)$ ,  $S^{(2)} = S(2\Delta t)$ , ...,  $S^{(K)} = S(K\Delta t)$ , en los instantes  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t = t$  equiespaciados del intervalo  $[0, t]$ . En cada subperíodo  $[(j-1)\Delta t, j\Delta t]$  con  $1 \leq j \leq K$  consideremos los  $K$  incrementos:

$$U_j = \ln(S(j\Delta t)) - \ln(S((j-1)\Delta t)) \quad , \quad 1 \leq j \leq K. \quad (3.49)$$

Observemos que por (3.48) se tiene:

$$\ln(S(j\Delta t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j\Delta t) + \sigma B(j\Delta t),$$

$$\ln(S((j-1)\Delta t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)((j-1)\Delta t) + \sigma B((j-1)\Delta t),$$

de donde restando la segunda expresión de la primera, podemos expresar (3.49) en la forma

$$U_j = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (B(j \Delta t) - B((j-1) \Delta t)), \quad (3.50)$$

ahora bien, como por definición el Movimiento Browniano,  $B(t)$  cumple que tiene incrementos gaussianos e independientes de media cero y varianza la longitud del incremento sobre  $t$ , se tiene que

$$B(j \Delta t) - B((j-1) \Delta t) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}) \quad , \quad 1 \leq j \leq K,$$

por lo que las variables aleatorias  $U_j$  son gaussianas e independientes con media  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t$  y varianza  $\sigma^2 \Delta t$ . A partir de una muestra de  $K + 1$  datos reales de las cotizaciones, podemos construir las  $K$  diferencias dadas en (3.49) y realizar una estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  mediante el método de los momentos, que supone igualar la media y la varianza de las  $K$  variables aleatorias a la media muestral  $\bar{U}$  y a la quasi-varianza muestral  $S^2$  dadas por:

$$\bar{U} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j \quad , \quad S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U})^2, \quad (3.51)$$

lo que permite construir el siguiente sistema de ecuaciones algebraico para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ :

$$\bar{U} = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \quad , \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t, \quad (3.52)$$

cuya solución nos da las estimaciones buscadas

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right) \quad , \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (3.53)$$

Resumiendo, para poner en práctica el modelo (3.47) se realizarán los siguientes pasos:

- **Paso 1:** A partir de la serie de  $K+1$  cotizaciones:  $S(0)$ ,  $S^{(1)} = S(\Delta t)$ ,  $S^{(2)} = S(2\Delta t)$ , ...,  $S^{(K)} = S(K \Delta t)$ , observadas en períodos de longitud  $\Delta t$  (por ejemplo, intra-día), formar la serie de  $K$  valores  $U_j$  dada por (3.49).
- **Paso 2:** Calcular la media muestral  $\bar{U}$  y la  $S^2$  quasi-varianza muestral, dadas en (3.51).

- **Paso 3:** Estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo (3.47), mediante  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$ , dadas en (3.53).
- **Paso 4:** Simular el término  $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$  a través de cualquier de los métodos disponibles en la literatura (véase, Ross 1999).
- **Paso 5:** La implementación de los pasos 3 y 4 en el modelo (3.47), permite obtener simulaciones de activo de la acción al día siguiente de las cotizaciones disponibles.

En la práctica para calibrar el modelo sobre cotizaciones diarias del mercado bursátil español se toma  $\Delta t = 1/365$  cuando el activo es sensible a los sucesos y acontecimientos que ocurren durante todos los días del año, y  $\Delta t = 1/252$ , cuando el precio de la acción bursátil sólo depende de las decisiones que se toman por los inversores en horario de cotización durante los 252 días que, en media, opera el mercado continuo español. La decisión entre la elección entre una de las dos posibilidades se realiza en base a una opinión experta sobre el mercado, y el número de veces que, históricamente ha funcionado mejor un método frente otro, cuando se han comparado. En el primer caso, es decir, si se toma  $\Delta t = 1/365$  y deseamos aplicar el modelo para predecir el valor de una acción al día siguiente de la serie histórica que dispongamos, por ejemplo, si ésta va desde el 1 de junio de 2012 al 15 de julio de 2012 (estos son 45 días, pues se deben incluir los fines de semana y festivos), tomaremos en el modelo (3.47),  $t = 46/365$ , quedando

$$S\left(\frac{46}{365}\right) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\frac{46}{365} + \hat{\sigma}B\left(\frac{46}{365}\right)\right),$$

siendo  $S(0)$  el valor de la acción al principio de la serie histórica y,  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$ , las estimaciones realizadas en el paso 3.

Para simular el término  $B(46/365)$ , y como muchas veces el software disponible sólo proporciona simulaciones de variables aleatorias normales tipificadas, puede utilizarse el siguiente resultado:

$$B(t) \sim N(0; \sqrt{t}) \Rightarrow B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t} Z, Z \sim N(0;1),$$

con lo que el término  $B(46/365)$  puede simularse, a partir de una variable normal de media 0 y desviación típica 1, como sigue

$$B\left(\frac{46}{365}\right) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{46}{365}} Z, Z \sim N(0;1).$$



En las mismas condiciones del ejemplo anterior, pero con  $\Delta t = 1/252$ , deberíamos únicamente considerar los días de cotización de entre los 45 días naturales anteriores, pongamos 30 días (suponemos eliminados los fines de semana y festivos) y proceder como antes para realizar la estimación del valor de la acción al día siguiente:

$$S\left(\frac{31}{252}\right) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\frac{31}{252} + \hat{\sigma}B\left(\frac{31}{252}\right)\right).$$

Para la calibración del modelo sobre cotizaciones semanales, se tomará  $\Delta t = 1/52$ . Si deseamos aplicar el modelo para predecir el valor de una acción a la semana siguiente de la serie histórica que dispongamos, por ejemplo, si ésta va desde el 1 de junio de 2012 al 15 de julio de 2012, como en el ejemplo anterior, son 6 semanas, por lo que tomaremos en el modelo (3.47),  $t = 7/52$ , quedando

$$S\left(\frac{7}{52}\right) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\frac{7}{52} + \hat{\sigma}B\left(\frac{7}{52}\right)\right).$$

### 3.2.3.4 Estimación de los parámetros del modelo Log normal por el método de máxima verosimilitud

En este apartado detallaremos cómo se han calibrado a partir de los datos u observaciones de las cotizaciones de las empresas que han sido seleccionadas para predecir el IBEX 35, los parámetros del modelo Log normal,  $\mu$  y  $\sigma$ .

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t).$$

Con objeto de hacer más general la exposición, observemos que la ecuación diferencial estocástica anterior es un caso particular del siguiente modelo abstracto.

$$dX(t) = f(t, X(t); \bar{\theta})dt + g(t, X(t); \bar{\theta})dB(t) \quad (3.54)$$

siendo,

$$X(t) = S(t), \quad f(t, X(t)) = \mu S(t), \quad g(t, X(t)) = \sigma S(t)$$

y donde  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de parámetros que en nuestro caso es

$$\bar{\theta} = (\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.55)$$

y el cual deseamos estimar.

Esta estimación se va a realizar mediante el método de máxima verosimilitud. Se calculará a partir de unas observaciones  $\{(t_i, X_i)\}_{i=0}^N$  de  $X(t)$  que en nuestro caso

corresponden a las cotizaciones  $X_i$  en el instante (semana)  $i$ -ésimo de una determinada compañía del IBEX 35. Asumiremos para la presentación del desarrollo teórico que las observaciones

$$X_0, X_1, \dots, X_N$$

de  $\bar{\theta}(t)$  se realizan en instantes  $t_0, t_1, \dots, t_N$ , uniformemente distribuidos, es decir,

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

siendo  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . Obsérvese que esto no supone ninguna restricción en la aplicación a nuestro caso práctico.

Vamos a denotar por

$$p(t_k, X_k | t_{k-1}, X_{k-1}; \bar{\theta})$$

la densidad de la probabilidad de transición de  $(t_k, X_k)$  empezando desde  $(t_{k-1}, X_{k-1})$  dado  $\bar{\theta}$ .

La función de probabilidad (f.d.p.) del estado inicial se denotará por:

$$p_0(x_0 | \bar{\theta})$$

Por ser la solución  $X(t)$  de la ecuación de Itô (2) un proceso Markov y la densidad conjunta del parámetro  $\bar{\theta}$  es

$$D(\bar{\theta}) = p_0(x_0, \bar{\theta}) \prod_{k=1}^N p(t_k, X_k | t_{k-1}, X_{k-1}; \bar{\theta}) \quad (3.56)$$

Se trata de encontrar el vector  $\bar{\theta}$  que maximiza esta función  $D(\bar{\theta})$ . Para evitar el trabajo en el ordenador con valores muy pequeños (resultantes del producto de probabilidades) es más conveniente minimizar la función  $L(\bar{\theta}) = -\ln(D(\bar{\theta}))$  que en este caso adquiere la forma:

$$L(\bar{\theta}) = -\ln(p_0(x_0 | \bar{\theta})) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, X_k | t_{k-1}, X_{k-1}; \bar{\theta})) \quad (3.57)$$

Una dificultad para encontrar el valor óptimo de  $\bar{\theta}$  es que las densidades de transición no son conocidas. Por eso, vamos a utilizar un esquema discreto tipo Euler-Maruyama para aproximar el modelo (3.13), o más generalmente el modelo (3.54). Denotando por

$X(t_{k-1}) = x_{k-1}$  en  $t = t_{k-1}$ , entonces

$$X(t_k) \approx x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \bar{\theta}) \Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \bar{\theta}) \sqrt{\Delta t} \eta_k \quad (3.58)$$

Donde hemos aplicado que la discretización del ruido blanco  $dB(t)$  según el esquema de Euler-Maruyama es  $B(t_k + \Delta t) - B(t_k)$  y , que esta diferencia, según la definición del movimiento browniano, sigue una distribución normal de media 0 y varianza “ $\Delta t$ ”, por ello

$$B(t_k + \Delta t) - B(t_k) = \sqrt{\Delta t} \eta_k, \quad \eta_k \sim N(0,1) \quad (3.59)$$

siendo la igualdad anterior en distribución de (3.58) se deduce

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \bar{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k} \right)^2} \quad (3.60)$$

donde:

$$\mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \bar{\theta}) \Delta t \quad (3.61)$$

$$\sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \bar{\theta}) \sqrt{\Delta t} \quad (3.62)$$

Sustituyendo esta densidad de transición (3.60) – (3.62) en la expresión de  $L(\bar{\theta})$  dada en (3.57) obtenemos como función objetivo:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^\alpha &= \min_{\bar{\theta} \in \mathbb{R}^n} L(\bar{\theta}) = -\ln(p_0(x_0 | \bar{\theta})) = \\ &= - \sum_{k=1}^N \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

En nuestro caso particular el procedimiento anterior ha sido aplicado para  $\Delta t = \frac{1}{52}$  y tomando como valor inicial la cotización  $X_0$ . La función  $L(\bar{\theta})$  se ha minimizado utilizando el comando NMinimize del software Mathematica basado en el algoritmo de Nelder-Mead (véase [Leader, J J. Numerical Analysis and Scientific Computation. Pearson Education, Inc., Boston (2004)]).

### 3.2.3.5 Predicción del IBEX 35 mediante el modelo Log normal

Según la fórmula del cálculo del índice bursátil IBEX 35 (apartado 3.1.2),

$$IBEX\ 35(t) = IBEX\ 35(t-1) \times \frac{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t)}{\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t-1) + J}$$

para su cálculo, necesitamos conocer los siguientes parámetros:

- $IBEX\ 35(t-1)$ . Valor conocido. Es el valor del IBEX 35 en el instante t-1.
- $\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t-1)$ . Valor conocido. Es la Capitalización Bursátil en el instante t-1.
- $\sum_{i=1}^{35} Cap_i(t)$ . Valor desconocido. Es la Capitalización Bursátil en el instante t.
- $\pm J$ . Parámetro desconocido. Es el coeficiente de ajuste por operaciones financieras.

El parámetro J se ajusta puntualmente, cuando es necesario, por operaciones financieras (Ampliaciones de Capital, Fusiones, etc.), por lo tanto, J es un parámetro cuya predicción resulta difícil y excede de los objetivos del trabajo. Se considera nulo en el periodo estudiado.

La Capitalización Bursátil en el instante t, es el valor desconocido dentro del cálculo del IBEX 35 que impide saber el valor futuro que alcanzará. La Capitalización Bursátil depende del número de acciones de las diferentes compañías que componen el IBEX 35 y del precio al que coticen las mismas. Por ello, el objetivo es averiguar el precio futuro de las acciones de cada compañía, ya que el número de acciones no variará exceptuando alguna operación financiera.

Para la predicción del precio de las acciones de cada compañía se utilizará el modelo Log normal, siguiendo los pasos explicados en el apartado anterior. Una vez obtenidas las cotizaciones de cada una de las empresas en el instante t, se calculará la Capitalización Bursátil en ese mismo instante. De esta forma, conocidos ya todos los parámetros de la fórmula del cálculo del IBEX 35, podremos predecir el valor que alcanzará el índice en el instante t.

### 3.2.4 La Simulación Monte Carlo

Bajo el nombre de Método Monte Carlo (MC) o Simulación Monte Carlo se agrupan una serie de procedimientos que analizan distribuciones de variables aleatorias usando simulación de números aleatorios. El Método de Monte Carlo da solución a una gran variedad de problemas matemáticos haciendo experimentos con muestreos estadísticos en una

computadora. En general, se utiliza para cualquier esquema que emplee números aleatorios, usando variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas.

El método fue llamado así por el principado de Mónaco por ser "la capital del juego de azar", al considerar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo datan aproximadamente de 1944 con el desarrollo de la computadora. Están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40 en el laboratorio de Los Alamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. Sin embargo, hay varias aportaciones (aisladas y no desarrolladas) en muchas ocasiones anteriores a 1944. El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta de investigación, proviene del trabajo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.

El Método de Monte Carlo es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinístico. Se puede realizar en condiciones diferentes y determinar la mejor solución en el marco de los resultados obtenidos. Son muchos los autores que han apostado por utilizar hojas de cálculo para realizar simulación MC. La potencia de las hojas de cálculo reside en su universalidad, en su facilidad de uso, en su capacidad para recalcular valores y, sobre todo, en las posibilidades que ofrece con respecto al análisis de escenarios. Sirva como ejemplo Gedam y Beaudet (2000).

El defecto del método, es en primer lugar, la dificultad de comprobar la calidad de los números generados. Se hace necesario realizar controles periódicos. En segundo lugar, todos los cálculos deben realizarse varias veces para evitar interferencias causales.

En los últimos años, los métodos de Monte Carlo se han vuelto a utilizar. Esto es debido principalmente a mejoras en el reconocimiento de los problemas en los que es el mejor, y a veces la única técnica disponible. Así, en la actualidad es posible encontrar modelos que hacen uso de simulación Monte Carlo en las áreas informática, empresarial, económica, industrial e incluso social. De hecho, en el mercado existen complementos de Excel (Add-Ins) específicamente diseñados para realizar simulación Monte Carlo, siendo los más conocidos: @Risk, Crystall Ball, Insight.xla, SimTools.xla, etc.

#### **3.2.4.1 Conceptos fundamentales para la aplicación práctica del método Monte Carlo**

La clave de la simulación MC consiste en crear un modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando aquellas variables (inputs del modelo) cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Una vez identificados dichos inputs o variables aleatorias, se lleva a cabo un experimento

consistente en: (1º) generar muestras aleatorias con ayuda del ordenador (obtención de valores concretos) para dichos inputs, y (2º) analizar el comportamiento del sistema ante los valores generados.

Tras repetir  $N$  veces este experimento, dispondremos de  $N$  observaciones sobre el comportamiento del sistema, lo cual nos será de utilidad para entender el funcionamiento del mismo: obviamente, el análisis será tanto más preciso cuanto mayor sea el número  $N$  de repeticiones que se lleven a cabo. Para un tratamiento más extenso sobre el tema consultar el texto Gilks, Richardson y Spiegelhalter (1996).

Una vez se han calibrado los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , y sustituidos en la expresión:

$$\hat{S}(t) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)t + \hat{\sigma}B(t)\right) \quad (3.64)$$

Teniendo en cuenta que  $B(t) = \sqrt{t} Z$ , con  $Z \sim N(0;1)$ , obtenemos el modelo:

$$\hat{S}(t) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)t + \hat{\sigma}\sqrt{t}Z\right) \quad (3.65)$$

Así pues generando diferentes valores de  $Z$ , tendremos estimaciones puntuales diferentes  $\hat{S}(t)$  para la valoración de la acción en un instante fijo  $t$ .

Las hojas de cálculo como Excel (y cualquier lenguaje de programación estándar) son capaces de generar números pseudo-aleatorios provenientes de una distribución uniforme entre el 0 y el 1. Este tipo de números pseudo-aleatorios son los elementos básicos a partir de los cuales se desarrolla cualquier simulación por ordenador. En Excel, es posible obtener un número pseudo-aleatorio -proveniente de una distribución uniforme entre el 0 y el 1- usando la función ALEATORIO. Los números generados mediante la función ALEATORIO tienen dos propiedades que los hacen equiparables a números completamente aleatorios:

- Cada vez que se usa la función ALEATORIO, cualquier número real entre 0 y 1 tiene la misma probabilidad de ser generado (de ahí el nombre de distribución uniforme).
- Los diferentes números generados son estadísticamente independientes unos de otros (es decir, el valor del número generado en un momento dado no depende de los generados con anterioridad).

La función ALEATORIO es una función volátil de Excel. Esto significa que cada vez que pulsamos la tecla F9 o cambiamos alguno de los inputs del modelo, todas las celdas donde aparezca la función ALEATORIO serán recalculadas de forma automática.

### 3.2.5 Validación de la metodología propuesta

Para la validación del modelo se van a emplear dos métodos de aprobación. En primer lugar, se calcularán medidas de bondad de ajuste. Posteriormente, se procederá a la validación del modelo mediante medidas de bondad de ajuste penalizadas.

Es importante tener en cuenta que toda predicción lleva asociado un error.

#### 3.2.5.1 Medidas de bondad de ajuste

Una vez obtenido el modelo se puede valorar hasta qué punto se ajusta a los datos que han servido para su formulación. Las pruebas de bondad de ajuste tienen por objetivo determinar si los datos se ajustan a una determinada distribución.

Para el diagnóstico del modelo se utilizan tres herramientas:

- Gráfica de Comparación de las observaciones y las estimaciones.
- Error cuadrático medio (Mean Squared Error (MSE))

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^K (S_i - \hat{S}_i)^2}{K}} . \quad (3.66)$$

- Error porcentual absoluto medio (Mean Absolute Percentage Error (MAPE))

$$MAPE = \sum_{i=0}^K \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i} \times 100 . \quad (3.67)$$

En el primer método, las estimaciones se consideraran tanto mejores cuanto más se acerca la serie de observaciones a la de las estimaciones. Las medidas MSE y MAPE son de bondad de ajuste.

El MSE mide la distancia por término medio entre los valores observados y los estimados. Si el MSE es cero significa que el estimador predice observaciones del parámetro con una exactitud perfecta, es lo ideal, pero casi nunca es posible. La diferencia se produce debido a la aleatoriedad o porque el estimador no tiene en cuenta la información que podría producir una estimación más precisa.

El MAPE es la media de los valores absolutos ponderado por el inverso del valor. Estos pesos consiguen reducir el efecto de los errores asociados a los valores más altos. En el caso de las predicciones, como se va a predecir para un periodo en el que se conoce la

cotización real (observación), se considera que la predicción es buena si se acerca al valor observado.

### 3.2.5.2 Medidas de Bondad de Ajuste penalizadas

Se utiliza para evaluar el ajuste de un modelo de regresión que se ha estimado utilizando mínimos cuadrados ordinarios. Se aplica en el contexto de la selección del modelo, donde un número de variables predictoras están disponibles para predecir un resultado, y el objetivo es encontrar el mejor modelo que implica un subconjunto de estos predictores.

El problema de la modelización requiere un equilibrio entre la mejora del modelo y el no deseable incremento de la complejidad de éste al ir añadiendo cada nuevo parámetro. El estadístico  $C_p$  de Mallow se utiliza para ello.

Dicho estadístico está definido como

$$C_p = \frac{RSS}{S^2} + 2p - N \quad (3.68)$$

donde  $RSS$  es la suma de cuadrados residuales,  $S^2$  es la varianza residual del modelo teniendo en cuenta el tamaño de la muestra,  $p$  es el número de variables predictoras del modelo (tamaño de la cartera) y  $N$  es el tamaño de la muestra o número de datos.

El mejor modelo, es decir, el que más se ajusta, a la vez que el más sencillo, es al que le corresponde menor valor del estadístico  $C_p$ .

El estadístico  $C_p$  de Mallow es un procedimiento adecuado y se utiliza como regla de parada en diversas regresiones por pasos si no hay muchas variables predictoras. Para evitar la multicolinealidad cuando existen muchas variables predictoras, se utilizan los procedimientos backward o forward para seleccionar el mejor modelo, aplicando regresión stepwise (por pasos) para la selección de las variables más significativas.

## 3.3 Otras teorías clásicas para la formación y evaluación de carteras de inversión y para la predicción de índices

Muchos autores han desarrollado modelos que relacionan el problema de Index Tracking con otras técnicas ampliamente utilizadas en la literatura financiera, como los modelos de cointegración (Alexander y Dimitriu, 2005). Otra cuestión importante tratada en la literatura es la referida a los costes de transacción ocasionados por la revisión en la composición de la cartera réplica. Adcock y Meade (1994) incluyen dichos costes en el



modelo de optimización a través de un factor de ponderación, asumiendo que dichos costes ocurren en cada ocasión en que la cartera es rebalanceada.

Con respecto a la formación de carteras réplicas, y en comparación con la metodología utilizada en el presente trabajo, se destaca la metodología propuesta por Tabata y Takeda (1995), los cuales suponen determinados el número de títulos a emplear en la cartera réplica a través de un algoritmo iterativo. Se seleccionan los títulos de forma aleatoria. A partir de este conjunto de títulos, el algoritmo utiliza un criterio de minimización del Tracking Error para decidir qué título se elimina de la cartera réplica, y qué otro entra en su lugar.

Por otro lado, muchos investigadores han propuesto numerosas medidas para establecer rankings de performance que permitan evaluar la gestión financiera de carteras o fondos. A continuación se detallan algunas de estas metodologías.

#### A) Teoría de la función de utilidad esperada

De acuerdo con esta teoría, el inversor representativo es un individuo racional, con una función de utilidad de inversión que le permite discriminar entre carteras en función del rendimiento de éstas y de su nivel de riesgo (Muñoz, 2005; Balaguer, 2006). De este modo, los inversores buscan maximizar su función de utilidad basando sus decisiones de inversión en una combinación de activos que consigan este objetivo en función de la rentabilidad y riesgo esperado de las carteras que estos forman. En consecuencia, las decisiones de inversión se realizan teniendo en cuenta que se prefieren aquellos activos o carteras que, para un mismo nivel de rentabilidad esperada, presentan un menor nivel de riesgo o que, para un mismo nivel de riesgo, ofrecen rentabilidades esperadas mayores.

Diferentes modelos que emplean esta teoría para establecer las preferencias de los inversores a la hora de seleccionar sus carteras son: el modelo de media-varianza de Markowitz<sup>6</sup>, el modelo de mercado de Sharpe (1963)<sup>7</sup> y el modelo CAMP<sup>8</sup>.

#### B) Teoría del arbitraje. El modelo APT<sup>9</sup>.

Como consecuencia de las limitaciones conceptuales del CAPM, así como los resultados empíricos no satisfactorios obtenidos con este modelo, los investigadores en Economía Financiera han desarrollado modelos alternativos acerca del equilibrio en el mercado de capitales, y la consiguiente valoración de activos financieros.

<sup>6</sup> Véase Freixas, 1997 y Suárez, 1986.

<sup>7</sup> Véase Suarez, 1986.

<sup>8</sup> Véase Marín, 1997; Gómez-Bezares, 2006.

<sup>9</sup> Suárez, 1986; Alexander et al., 2003, Gómez-Bezares, 2006

Ross (1976) propone, como alternativa al modelo CAPM, un nuevo modelo de valoración de títulos o carteras que tiene en cuenta la existencia de varios factores de riesgo en la determinación de la rentabilidad de los activos (Gómez-Bezares, 2006). Este modelo, cuya formulación surge de la consideración de la existencia de no arbitraje en el mercado, se denomina Arbitrage Pricing Theory (APT).

En el enfoque tradicional de series temporales usualmente se trabaja con un enfoque lineal basado en los procesos estocásticos en los que la introducción de perturbaciones aleatorias se hace necesaria para emular el comportamiento complejo observado en la realidad económica.

Empíricamente existe evidencia a favor de la existencia de una estructura no lineal en los mercados financieros (Scheinkman y Le Baron, 1989, Hinich y Patterson, 1985; Hsieh, 1989 y 1991; Bajo-Rubio et al., 1992; Brock et al., 1996; Guarda y Salmon, 1996; Brooks, 1996; Cecen y Erkal, 1996, Abhyankar et al., 1997 y Pérez-Rodríguez et al., 2005, Bonilla et al., 2006).

Además, existen trabajos en los que se proporciona una base teórica para estos resultados empíricos, principalmente mediante la descripción de la dinámica de precios en los mercados financieros como el resultado de la interacción entre grupos de agentes con información heterogénea (Cutler et al., 1990; De Long et al., 1990; Day and Huang, 1990; Chiarella, 1992; Lux, 1997 y 1998; Lux y Marchesi, 1999 y 1999; LeBaron, 2000; Chen, Lux y Marchesi, 2001).

Centrándonos en la predicción de series temporales financieras, en los últimos años se ha pasado del ajuste de modelos no lineales paramétricos relativamente sencillos (como ejemplos pueden citarse trabajos que utilizan modelos de varianza condicional (Hsieh, 1997, Baillie y Bollerslev, 1991, Baillie et al., 2000, Balaban y Bayar, 2005), el modelo de Markov (Turner et al., 1989 y Kanas, 2003), el modelo no lineal por piezas (Oh y Kim, 2002) o el modelo umbral autorregresivo (Sarantis, 2001 y Bradley y Janse, 2004), a generalizaciones más complejas de estos modelos. Entre ellas pueden citarse diversas generalizaciones del modelo umbral, como la exponencial (McMillan, 2003 y Brooks, 2001) o la generalización a modelos GARCH (Marcucci, 2005), generalizaciones de modelos GARCH, como los modelos GARCH no lineales (Gokcan, 2000 y Wei, 2002) y los fraccionales (Beine et al., 2002 y Jin y Frechet, 2004).

Dentro de esta misma tendencia, en los últimos años se han considerado distintos modelos no paramétricos, dentro de los cuales destacan por su potencia los modelos de redes neuronales. Con la utilización de estas técnicas no paramétricas se entra dentro de lo

que se denomina “econometría caótica o no lineal”. Estas técnicas presentan además la ventaja, como señalan Satchell y Timmermann (1996), de funcionar tanto para series caóticas como para series estocásticas.

A continuación se muestra diferentes técnicas desarrolladas dentro de lo que se denomina Econometría Compleja No Lineal.

#### A) Enfoque de Comprensión mediante la Reconstrucción del Espacio De Estados

Casdagli (1989) trata el problema de la predicción no lineal como un “problema inverso” en la teoría de sistemas dinámicos. El problema usual en este campo es, conociendo el modelo, describir su evolución conforme pasa el tiempo; el problema inverso es el contrario, es decir, dada la evolución del sistema (que es lo que se manifiesta en la serie de datos recogida a lo largo del tiempo) construir un modelo que pueda haberla originado (modelo generador de datos). Si se localiza la función (necesariamente no lineal si estamos ante un sistema caótico) que puede dar origen a esta evolución, dispondremos de un posible modelo predictivo.

Para conocer esta función se separan los datos en dos grupos; el primero se utiliza para llevar a cabo una interpolación o aproximación de la función desconocida (conjunto de entrenamiento) y el segundo (conjunto de verificación) para evaluar la bondad del ajuste mediante los errores de predicción.

#### B) Redes neuronales

Cuando el sistema no es suficientemente simple es más apropiado el enfoque del aprendizaje por medio de redes neuronales ya que, debido a su generalidad, es capaz de ajustar el comportamiento de cualquier función. Las redes neuronales (Nychka et al., 1992, Jungeilges, 1996 y White, 1989) son una clase de modelos no lineales inspirados en la arquitectura neuronal del cerebro.

Al igual que la técnica anterior, las redes neuronales intentan resolver el problema inverso de ajustar una función no lineal utilizando los valores sucesivos de una serie temporal. Existe una amplia aplicación de las redes neuronales en el campo de la predicción de series temporales económicas. En concreto, se pueden citar ejemplos en mercados financieros (Trippi y Turban, 1993, Azoff, 1994, Refenes, 1995 y Gately, 1996), predicción en mercados bursátiles (White, 1988, Kimono et al., 1990, Schoneburg, 1990, Yoon y Swales, 1991, Grudnitsky y Osburn, 1993, Chen et al., 2003 y Jasic y Wood, 2004), predicción de bancarrotas y fallos de mercados (Coleman et al., 1991, Salchenkerger et al., 1992, Tam y Kian, 1992, Fletcher y Goss, 1993, Wilson y Sharda, 1994 y O’Leary, 1998), predicción de

tipos de cambio (Weigend et al, 1992, Refenes, 1993, Kuan y Liu, 1995, Hann y Steurer, 1996, Zhang y Hu, 1998, Franses y Griensven, 1998 y Giles et al., 2001). Además también se están desarrollando aplicaciones macroeconómicas, como la predicción de recesiones (Qi, 2001) o del comportamiento de magnitudes macroeconómicas (GDP en Tkacz, 2001), e incluso existe alguna aplicación en el mercado de la vivienda (Caridad y Ceular, 2001).

# 4 | APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA

Tal y como se ha señalado en el apartado 3.2, el objetivo de este análisis es la composición de una cartera que replique el comportamiento del IBEX 35. Mediante los títulos de la cartera réplica se pretende realizar una predicción del valor del IBEX 35. Nosotros realizaremos la estimación para la primera semana de 2012.

## 4.1 Aplicación de Componentes Principales y Tracking Error para la formación de la cartera réplica

Para la aplicación práctica se han seleccionado los títulos pertenecientes al IBEX 35 que han formado parte de él durante los años 2010 y 2011 y principios de 2012<sup>10</sup>. Esto conlleva considerar 32 títulos, lo que implica que la réplica del comportamiento del IBEX 35 no será completa o con Tracking error nulo, puesto que no se han considerado títulos no indexados en la actualidad pero si en años anteriores.<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Incluida primera revisión del Comité en 2012.

<sup>11</sup> Este mismo problema aparece en el resto de aplicaciones encontradas en la literatura, cuando se quiere evaluar una metodología que hace uso de una ventana temporal de varios años. En estos casos, se argumenta que la metodología puede ser igualmente contrastada y, sobre todo, comparada con otras con independencia de que el tracking error sea o no nulo.

El algoritmo se ha aplicado sobre el bienio 2010-2011, mientras que la primera semana del año 2012 se ha utilizado para contrastar la predicción obtenida del IBEX 35.

En primer lugar se han calculado las rentabilidades semanales<sup>12</sup> para los dos años en cuestión, calculándose su rentabilidad relativa y posteriormente tipificada<sup>13</sup> (estandarizada o normalizada), con el objetivo de poder comparar entre valores con distintas distribuciones.

#### 4.1.1 Componentes principales

A continuación se detallan y se analizan los resultados obtenidos en la implementación de la metodología de componentes principales.

En primer lugar, para cada uno de los 32 títulos seleccionados y durante el periodo 2010-2011 se ha realizado una regresión lineal simple entre la rentabilidad tipificada de cada título (variable independiente) y la rentabilidad tipificada del índice IBEX 35 (variable dependiente). Los residuos de estas regresiones han sido transformados según la fórmula (3.7), para posteriormente aplicar el análisis de componentes principales sobre su matriz de covarianzas.

El propósito del análisis es obtener un pequeño número de combinaciones lineales de las 32 variables que expliquen la mayoría de la variabilidad en los datos. En este caso, se han extraído 5 componentes, con autovalores mayores o iguales a 1. Juntos explican el 66,40% de la variabilidad en los datos originales. Como es habitual en este tipo de análisis, la primera componente recoge una combinación lineal positiva de todas las variables, la denominada componente de *tamaño*, mientras que en la segunda y siguientes se alternan los signos de las variables, por lo que se las denomina componentes de *forma*.

Al aplicar la rotación Varimax sobre las anteriores componentes se ha obtenido una estructura que permite ser interpretada con mayor profundidad, y donde la asociación de los títulos en diferentes componentes o grupos resulta más sencilla.

En la rotación Varimax se maximiza la varianza de los coeficientes de las variables, de esta forma, se puede identificar la variable que mayor coeficiente tiene en cada componente. En la Tabla 4.1 aparecen los coeficientes de los títulos en las 5 componentes rotadas, seleccionándose en cada una de ellas el título que tiene un coeficiente mayor.

---

<sup>12</sup> La periodicidad de los rendimientos más habitual es los trabajos académicos es la semanal, por lo que se ha decidido utilizar esta alternativa frente a otras. No obstante, la metodología propuesta es igualmente aplicable con independencia de esta elección.

<sup>13</sup> Se dice que una variable está tipificada, normalizada o estandarizada cuando a sus valores se les resta su media aritmética y se les divide por su desviación estándar. El resultado de esta operación es otra variable que tiene media cero y varianza uno.

RESIDUOS transformados	Componente 1	Componente 2	Componente 3	Componente 4	Componente 5
U TELEFÓNICA	0,246165	0,062603	-0,149402	0,66120	0,05870
U SANTANDER	-0,032822	0,00678743	0,719357	-0,34946	0,119929
U INDITEX	0,491903	0,384247	0,239162	0,0756552	0,404365
<b>U IBERDROLA</b>	0,010439	0,11257	0,0331805	<b>0,706208</b>	0,337386
<b>U BBVA</b>	-0,036641	0,0217876	<b>0,795816</b>	-0,0066639	-0,210345
U REPSOL	0,752087	0,104521	-0,107388	0,0286674	0,0695159
U ENDESA	0,29424	0,282185	0,0216423	0,698061	0,149895
<b>U GAS NATUR</b>	0,29591	0,103568	0,318572	0,274647	<b>0,620176</b>
U ABERTIS	0,41275	0,372386	0,149521	0,156985	0,366506
U ACS CONST.	0,579577	0,0187758	0,194037	0,338582	0,0325531
<b>U MAPFRE</b>	0,132833	<b>0,672804</b>	0,197496	0,19647	0,139543
U FERROVIAL	0,371814	0,666329	0,039662	0,055099	0,176666
U POPULAR	0,087025	0,337014	0,75112	0,024702	0,100825
U RED ELECT.	0,322519	0,3562	-0,06467	0,420879	0,564682
U ACCIONA	0,215978	0,667468	0,217881	0,301937	0,0309041
U SABADELL	0,252122	0,33077	0,749682	0,065486	0,131505
U ENAGAS	0,341497	0,318551	-0,074085	0,446675	0,515108
U GRIFOL	0,435384	0,429895	0,209245	0,40545	0,177022
U FCC	0,460646	0,233662	0,371998	0,464622	-0,0775938
U ACERINOX	0,758345	0,255107	0,217059	0,24165	0,146046
U OHL	0,69906	0,330671	-0,064709	0,069286	0,213109
U INDRA	0,622135	0,277744	0,17773	0,423574	0,175884
U TELE5	0,533086	0,343465	0,088093	0,137338	0,38457
U BME	0,41297	0,468779	0,401948	0,312085	0,159386
U ABENGOA	0,308081	0,655677	0,262862	-0,004433	0,290938
U TRE	0,747674	0,387992	0,039282	0,168921	0,197268
U GAMESA	0,644912	0,357468	0,299924	0,165961	0,252101
<b>U ARCELOR</b>	<b>0,809551</b>	0,0798523	0,0314343	0,161932	0,348502
U BANKINTER	0,186091	0,129097	0,725787	0,210407	0,243898
U CAIXABANK	0,530642	0,474632	0,18319	0,319004	-0,113645
U EBRO PUL	0,636583	0,382263	0,316098	0,363896	0,268769
U SYV	0,615297	0,436971	0,280714	0,284221	-0,11091

Tabla 4.1. Fuente: Elaboración propia. 5 Componentes principales

Los títulos escogidos como representativos de cada una de los componentes principales son:

- Componente principal 1: **ARCELOR**. (coef. **0,809551**).
- Componente principal 2: **MAPFRE** (coef. **0,672804**).
- Componente principal 3: **BBVA** (coef. **0,795816**).
- Componente principal 4: **IBERDROLA** (coef. **0,706208**).

- Componente principal 5: **GAS NATURAL** (coef. **0,620176**).

Los títulos representativos en cada componente principal simbolizan 5 sectores de la economía española; sector bancario (BBVA), energético (GAS NATURAL), eléctrico (IBERDROLA), siderúrgico (ARCELOR) y asegurador (MAPFRE).

Uno de los objetivos del cálculo de componentes principales es la identificación de los mismos, es decir, averiguar qué información de la muestra resumen. Sin embargo este es un problema difícil que a menudo resulta subjetivo. No obstante, el objetivo que se persigue en este trabajo con el análisis de componentes principales es obtener el número de títulos y el peso de cada uno para realizar la predicción del IBEX 35 en la primera semana de 2012.

Apoyándonos en el *criterio del porcentaje de la varianza*<sup>14</sup>, tomaremos como número de componentes, el número mínimo necesario para que el porcentaje acumulado de la varianza explicado alcance el umbral del 75% o del 80%.

Statgraphics permite extraer todas las componentes principales, esto es, tantas como variables. A continuación se vuelve a realizar el mismo análisis solicitando que se extraigan las componentes principales con valor propio mayor que 0,8. En este caso, se han extraído 8 componentes, con autovalores mayores o iguales a 0,8. Juntos explican el 74,86% de la variabilidad en los datos originales.

En la Figura 4.2 aparecen los coeficientes de los títulos en las componentes rotadas, identificando el mayor coeficiente en cada una de las componentes.

Los títulos escogidos como representativos de cada uno de los componentes principales son:

- Componente principal 1: **ARCELOR**. (coef. **0,862025**).
- Componente principal 2: **BBVA** (coef. **0,809236**).
- Componente principal 3: **IBERDROLA** (coef. **0,706539**).
- Componente principal 4: **ACCIONA** (coef. **0,672729**).
- Componente principal 5: **FERROVIAL** (coef. **0,781505**).
- Componente principal 6: **TELEFÓNICA** (coef. **0,776049**).
- Componente principal 7: **ABERTIS** (coef. **0,748281**).
- Componente principal 8: **ACS CONST.** (coef. **0,681949**).

---

<sup>14</sup> En la práctica, nos quedaremos con un número suficiente de componentes que recoja un porcentaje amplio de la variabilidad.



Estos títulos simbolizan nuevamente 5 sectores de la economía española. Del mismo modo que para la selección de 5 componentes principales, se encuentran el sector bancario (BBVA), eléctrico (IBERDROLA) y siderúrgico (ARCELOR). Además se incluye el sector de la construcción y el de telecomunicaciones: ACCIONA, FERROVIAL Y ACS (construcción), TELEFÓNICA (telecomunicaciones) y ABERTIS (construcción y explotación de infraestructuras de transporte y telecomunicaciones).

<b>RESIDUOS transformados</b>	<i>Componente 1</i>	<i>Componente 2</i>	<i>Componente 3</i>	<i>Componente 4</i>	<i>Componente 5</i>
U TELEFÓNICA	0,142785	-0,157748	0,24895	0,0666346	0,022448
U SANTANDER	0,051002	0,778184	-0,16227	-0,141603	-0,125638
U INDITEX	0,447172	0,276039	0,164155	-0,0678821	0,447919
<b>U IBERDROLA</b>	0,013538	-0,022131	<b>0,706539</b>	0,243286	-0,037833
<b>U BBVA</b>	-0,016018	<b>0,809236</b>	-0,10307	0,18641	-0,063329
U REPSOL	0,733596	-0,126806	0,049469	0,163848	0,116362
U ENDESA	0,284115	-0,020462	0,52064	0,43772	0,024625
U GAS NATUR	0,397129	0,320374	0,643761	-0,0050566	0,058503
U ABERTIS	0,334659	0,106875	0,220926	0,184939	0,029671
U ACS CONST.	0,369287	0,11748	0,106508	0,105566	0,112845
U MAPFRE	0,154726	0,233887	0,130457	0,359174	0,349884
<b>U FERROVIAL</b>	0,343975	0,073825	0,115848	0,218728	<b>0,781505</b>
U POPULAR	0,037787	0,733829	0,131639	0,214181	0,349775
U RED ELECT.	0,380101	-0,06646	0,654727	0,134681	0,301858
<b>U ACCIONA</b>	0,197002	0,168495	0,26809	<b>0,672729</b>	0,270177
U SABADELL	0,166735	0,73881	0,072596	0,160044	0,286871
U ENAGAS	0,375396	-0,06803	0,617995	0,0776992	0,390639
U GRIFOL	0,397301	0,23492	0,229917	0,210841	0,351673
U FCC	0,366757	0,287621	0,253008	0,546697	-0,019741
U ACERINOX	0,749345	0,203314	0,195108	0,303523	0,087411
U OHL	0,700918	-0,055229	0,079399	0,184311	0,129946
U INDRA	0,583775	0,182076	0,259323	0,214158	0,198315
U TELE5	0,624682	0,133794	0,329684	0,0986681	0,335366
U BME	0,403618	0,405726	0,27417	0,348402	0,35414
U ABENGOA	0,294503	0,24902	0,176863	0,353218	0,353883
U TRE	0,669401	0,035046	0,089123	0,186445	0,296934
U GAMESA	0,664934	0,292075	0,253677	0,305657	0,153861
<b>U ARCELOR</b>	<b>0,862025</b>	0,050557	0,272513	0,0281666	0,059865
U BANKINTER	0,11293	0,671561	0,304155	0,155936	0,033601
U CAIXABANK	0,471934	0,136041	0,093671	0,615867	0,108985
U EBRO PUL	0,584029	0,310654	0,278831	0,243529	0,222834
U SYV	0,520978	0,249	0,034164	0,487795	0,258113

Tabla 4.2. Fuente: Elaboración propia. 8 Componentes principales (I)

<b>RESIDUOS transformados</b>	<i>Componente 6</i>	<i>Componente 7</i>	<i>Componente 8</i>
<b>U TELEFÓNICA</b>	<b>0,776049</b>	0,051642	0,147164
U SANTANDER	-0,059326	0,192902	-0,295472
U INDITEX	0,275214	0,372073	0,141949
U IBERDROLA	0,275133	0,063282	0,10513
U BBVA	0,0411298	-0,23681	-0,104405
U REPSOL	-0,077044	0,010574	0,222331
U ENDESA	0,406092	0,035860	0,0292608
U GAS NATUR	-0,016937	0,1728	-0,0044012
<b>U ABERTIS</b>	0,156981	<b>0,748281</b>	0,15869
<b>U ACS CONST.</b>	0,253949	0,156038	<b>0,681949</b>
U MAPFRE	0,34021	0,342705	-0,299742
U FERROVIAL	0,0778319	0,089975	0,0848673
U POPULAR	-0,10331	0,073682	0,210738
U RED ELECT.	0,134508	0,216055	0,0162514
U ACCIONA	0,0089713	0,256065	-0,0258133
U SABADELL	0,107285	0,238822	0,234376
U ENAGAS	0,201623	0,091138	0,0940058
U GRIFOL	0,525655	0,131454	0,0156746
U FCC	0,144624	0,036708	0,305199
U ACERINOX	0,167514	0,12047	0,107359
U OHL	0,159378	0,34406	-0,0138155
U INDRA	0,451909	0,084943	0,113106
U TELE5	0,0968312	0,063320	-0,120775
U BME	0,231348	0,069276	0,0365116
U ABENGOA	-0,072069	0,563258	-0,0104233
U TRE	0,268179	0,340012	0,211494
U GAMESA	0,0572393	0,224709	0,0351054
U ARCELOR	0,13638	0,087081	0,0465938
U BANKINTER	0,0040374	0,253911	0,325417
U CAIXABANK	0,183922	0,165623	0,0671418
U EBRO PULEV	0,388756	0,29541	0,14366
U SYV	0,243077	0,075835	0,204345

Tabla 4.3. Fuente: Elaboración propia. 8 Componentes principales (II)

#### 4.1.2 Tracking error

Para obtener los pesos de cada uno de los títulos que componen la cartera réplica se ha utilizado el programa Solver de Excel. Esta herramienta permite optimizar funciones, esto es, hallar la mejor solución al problema de la búsqueda de pesos, incluyendo condiciones o restricciones.

Los datos a utilizar han sido las rentabilidades tipificadas de los 5 títulos seleccionados y del índice IBEX 35 para el periodo 2010-2011.

Los pasos que se han seguido para su implementación han sido los siguientes:

- Rentabilidad promedio de la cartera réplica.

Se ha multiplicado cada una de las rentabilidades tipificadas de los títulos seleccionados por el peso de cada uno de ellos en la cartera réplica<sup>15</sup>, lo que ha dado como resultado un vector de rentabilidades de la cartera réplica. La función utilizada en Excel ha sido “sumaproducto”. Posteriormente, mediante la función “promedio” y sobre el vector anterior, se ha obtenido la rentabilidad promedio de la cartera réplica.

- Variación en el peso de los activos de la cartera réplica respecto del índice.

Esto es, la diferencia del vector de rentabilidades de la cartera réplica y la del índice. De la misma forma, se calcula la función “promedio” sobre el anterior vector. Como resultado se obtiene el TEV: “Tracking error variance”, que se define como la varianza de la diferencia entre la rentabilidad del índice a replicar y la rentabilidad de la cartera réplica. El TEV será la celda objetivo que Solver buscará minimizar.

- Rentabilidad promedio del IBEX 35.

Mediante la función “promedio” y sobre el vector de las rentabilidades tipificadas del índice, se ha obtenido la rentabilidad promedio del IBEX 35.

- Calculo de G.

Definida como la ganancia que se espera obtener con la réplica del índice, se calcula la diferencia entre la rentabilidad promedio de la cartera réplica y la rentabilidad promedio del IBEX 35. En este caso se pretende obtener una ganancia igual a 0, puesto que el objetivo no es batir al índice, sino, replicarlo.

- Se introducen las restricciones en Solver (véase Figura 4.1).
  - ✓  $w^t1 = 1$ , suma de pesos sea igual a 1.
  - ✓  $G = 0$ , se quiere obtener la misma rentabilidad que el índice.
  - ✓ que el peso calculado para cada título no sea negativo.

---

<sup>15</sup> El peso de los títulos de la cartera réplica es lo que se pretende computar. Se deja indicado para que posteriormente sean calculados mediante Solver.

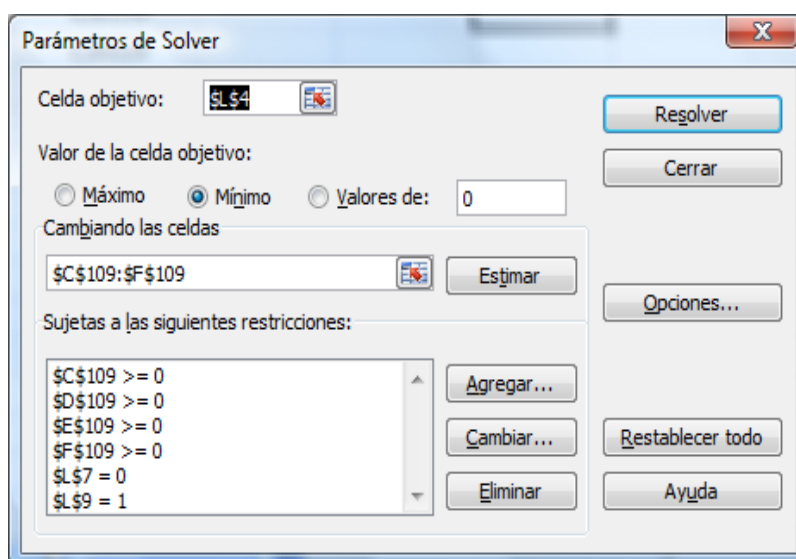


Figura 4.1. Fuente: Elaboración propia. Introducción parámetros Solver.

De esta forma se obtienen los pesos de la cartera réplica para cada uno de los títulos, (véase Tabla 4.4).

Títulos	BBVA	IBERDROLA	GAS NAT.	MAPFRE	ARCELOR
Pesos	44,94%	16,79%	10,00%	13,09%	15,19%

Tabla 4.4. Fuente: Elaboración propia. Pesos cartera réplica (5 títulos)

Los títulos considerados mediante el análisis de componentes principales no dan como resultado los de mayor ponderación en el IBEX 35.

En el segundo semestre de 2011, los 5 títulos con mayor peso en la composición del IBEX 35 son por este orden: Telefónica (20,47%), Santander (17,59%), BBVA (9,41%), Iberdrola (9,17%) y Repsol YPF (7,48%). Estos 5 valores ponderan el 64,12% del índice, dejando al resto de valores (29 títulos)<sup>16</sup> el 35,88% de ponderación.

A 31 de enero de 2012 los 5 primeros títulos del IBEX 35, que coinciden con los anteriores, representaban el 61,65% del índice, con los siguientes pesos: Telefónica (18,84%), Santander (16,41%), BBVA (10,13%), Iberdrola (8,33%) y Repsol YPF (7,94%).

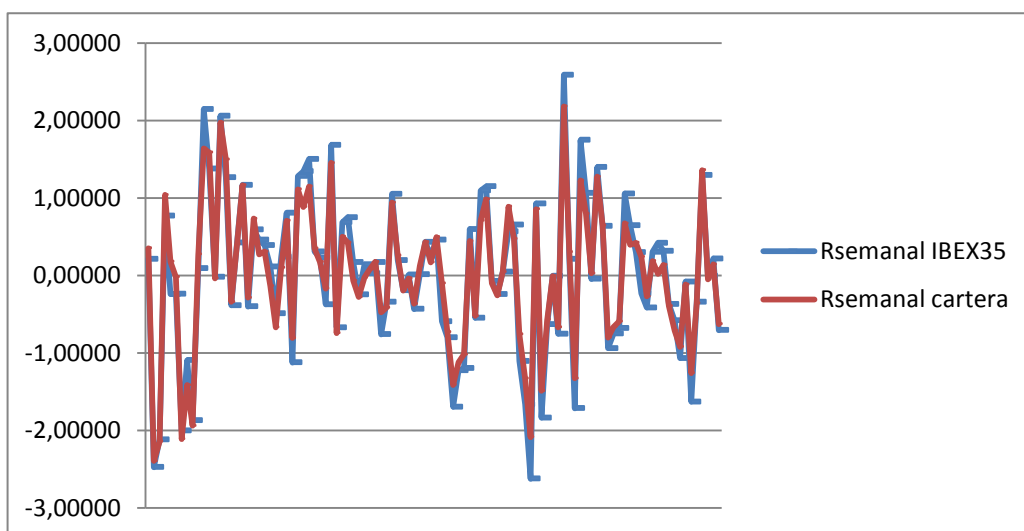
<sup>16</sup> La composición del Ibx 35 para el segundo semestre del 2011 sufrió bastantes cambios, el más significativo fue que el Índice contara sólo con 34 valores, de forma temporal, hasta que el Comité decidiera qué valor entrara en el índice, debido a la desaparición de Iberdrola Renovables por haberse fusionado con Iberdrola.

Mediante el análisis de componentes principales, el título con mayor peso en la cartera réplica es BBVA, con el 44,94%, como indica la Tabla 4.4, seguido de Iberdrola con el 16,79%, con un peso mucho menor.

Esto confirma que la estrategia de componer la cartera réplica seleccionando los títulos de mayor peso dentro del IBEX 35, no es, en la mayoría de los casos, la mejor elección, ya que no considera las covarianzas entre las rentabilidades de los títulos, hecho que si garantiza el empleo del análisis de componentes principales.

El valor de la función objetivo para el Tracking Error Variance (TEV) en el caso de seleccionar estos 5 títulos es de 0,04367.

Para poder evidenciar de forma gráfica, y no solo mediante el Tracking Error Variance, la calidad en la réplica de la cartera se ha obtenido un gráfico entre la rentabilidad semanal del IBEX 35 y la rentabilidad semanal de la cartera réplica durante los años 2010 y 2011. Puede apreciarse, en general, un comportamiento parecido entre ambas rentabilidades (véase Gráfica 4.1).



Gráfica 4.1. Fuente: Elaboración propia. Rentabilidad cartera réplica y Rentabilidad IBEX 35 (5 títulos).

Los pesos de la cartera réplica en el caso de la selección de 8 títulos son los siguientes:

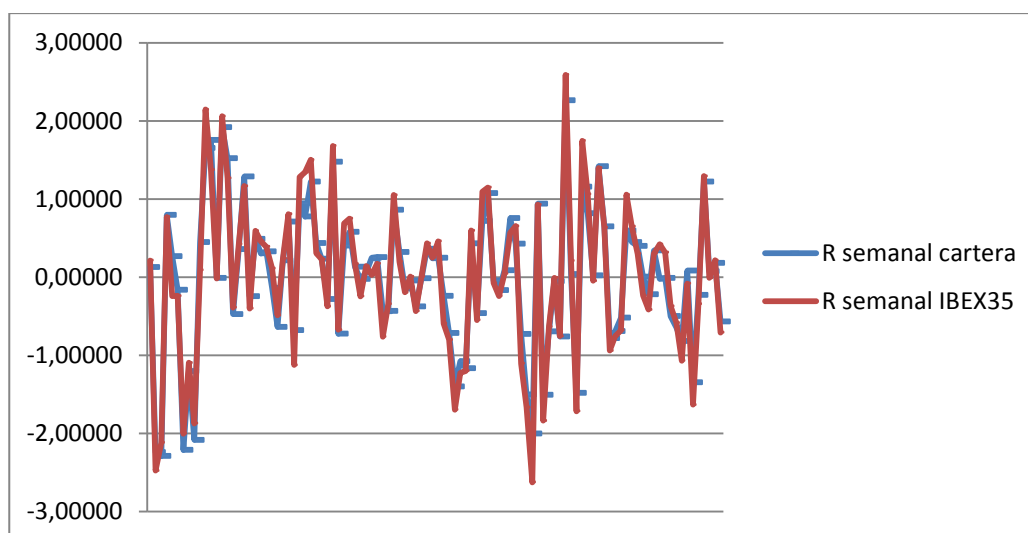
Títulos	ACS	BBVA	ACCIONA	ABERTIS	TELEFÓNICA	IBERDROLA	ARCELOR	FERROVIAL
Pesos	6,39%	<b>44,47%</b>	0,57%	7,63%	14,98%	12,08%	5,43%	8,45%

Tabla 4.5. Fuente: Elaboración propia. Pesos cartera réplica (8 títulos)

Como ocurre con la selección de 5 títulos, el peso de los 8 títulos seleccionados en la cartera réplica no son los de mayor ponderación en la composición del IBEX 35. Sigue siendo la compañía BBVA a la que se le asigna un mayor peso (44,47%), seguida de Telefónica (14,98%), que si coincide con la de mayor ponderación del índice.

El valor de la función objetivo para el tracking error variance (TEV) es de 0,02511, inferior a la cartera réplica formada por 5 títulos.

De forma gráfica, se puede comprobar la calidad en la réplica de la cartera. Puede apreciarse, en general, un comportamiento parecido entre ambas rentabilidades (véase Gráfica 4.2).



Gráfica 4.2. Fuente: Elaboración propia. Rentabilidad cartera réplica y Rentabilidad IBEX 35 (8 títulos)

## 4.2 Aplicación del modelo Log normal y Simulación Montecarlo para la predicción del IBEX 35

Para la aplicación práctica del modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo se han utilizado como serie temporal histórica las últimas 12 semanas del año 2011 (3 meses) y las últimas 20 semanas de 2011 (5 meses), con el objetivo de comparar los resultados según el espacio temporal utilizado. El objetivo es predecir el IBEX 35 en la primera semana del 2012.

### 4.2.1 Predicción del IBEX 35 utilizando los títulos de la cartera réplica

La metodología ha sido aplicada para todas las compañías seleccionadas en la cartera réplica. Se realizará un análisis más detallado para la compañía seleccionada con

mayor peso, que tanto en la selección de 5 componentes principales, como en la selección de 8 componentes principales es BBVA.

El primer paso en cada una de las compañías es considerar si en el periodo elegido repartieron dividendos. En este caso, los datos seleccionados ya van ajustados por dividendos, pero si esto no fuera así, habría que ajustar los precios restando el valor del dividendo a la cotización de la acción a partir de la fecha en la cual se realice el reparto.

A partir del histórico de cotizaciones semanales de BBVA, mediante la aplicación del modelo Log normal y Simulación Monte Carlo, se calcula el precio que alcanzará la acción la primera semana del año 2012 siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

### **Paso 1: Formar la serie de datos**

Para cada día considerado se construye una tabla de valores (véase Tabla 4.6), calculando el logaritmo neperiano de cada precio, menos el logaritmo neperiano del precio del día anterior.

Semana	Cierre €	$\mu$
93	6,53	
94	6,31	-0,033648034
95	6,55	0,036401593
96	6,29	-0,039575191
97	6,03	-0,043195544
98	5,90	-0,021809286
99	5,59	-0,053294868
100	6,16	0,09774663
101	6,56	0,062569517
102	6,14	-0,066470692
103	6,45	0,049565418
104	6,55	0,015456496
105	?	

Tabla 4.6. Fuente: Elaboración propia. Tabla de valores ( $\mu$ )

### **Paso 2: Cálculo de la media y quasi-varianza muestral de los datos del paso 1**

Se calcula la media y varianza muestral de los datos anteriores con las correspondientes funciones de Excel: PROMEDIO y VAR.

Los resultados para la compañía BBVA son:

$$\bar{U} = 0,000340 \text{ y } S^2 = 0,002978736$$

### **Paso 3. Estimación de $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$**

Para calibrar el modelo sobre cotizaciones semanales del mercado bursátil español se ha utilizado en primer lugar el método de los momentos.

Se ha tomado como incremento temporal el valor  $\Delta t = 1/52$  y se han calculado las estimaciones del parámetro de la deriva o drift,  $\hat{\mu}$ , y de la volatilidad  $\hat{\sigma}$ .

Los resultados obtenidos son:  $\hat{\mu} = 0,095155$  y  $\hat{\sigma} = 0,393566$

### **Paso 4. Simulación del proceso estocástico browniano $B_t$ mediante la Simulación Monte Carlo.**

Para ello, se simula un valor  $z$  de una v.a.  $Z \sim N(0;1)$ , de la forma siguiente: se genera un número aleatorio de una distribución uniforme  $(0,1)$ , con la función ALEATORIO( ) y posteriormente se le aplica la inversa de la función de distribución de una v.a.  $N(0;1)$ , es decir,  $Z = \text{DISTR.NORM.INV}(\text{ALEATORIO}(); 0;1)$ . El resultado  $z$  es un posible valor de una variable aleatoria  $N(0;1)$ , luego ponemos  $B_t = \sqrt{t} z$ , la cual es una variable aleatoria gaussiana, con media 0 y varianza  $t$ . Este procedimiento se repite 1000 veces.

### **Paso 5. Predicción puntual.**

Para cada una de las 1000 simulaciones conseguidas se calculan 1000 predicciones puntuales, mediante la fórmula (3.65).

A continuación, con todas las predicciones obtenidas se consigue, mediante la función “promedio”, la predicción puntual que estimará el precio semanal que alcanzará la acción de BBVA la primera semana del año 2012, y es de **6,57**.

La cotización real (observación) la primera semana del 2012 para BBVA es de **6,56**, por lo que existe una pequeña desviación de **0.01** puntos entre el valor real y la predicción.

El resultado de aplicar el modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo para cada una de las 5 empresas que componen la cartera que replica el IBEX 35 se muestra en la Tabla 4.7.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
IBERDROLA	4,74	4,75	-0,01	0,001350
BBVA	6,56	6,57	-0,01	0,002978
GAS NAT	13,42	13,41	0,02	0,001120
MAPFRE	2,5	2,51	-0,01	0,001839
ARCELOR	14,924	14,86	0,06	0,006464

Tabla 4.7. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 5 títulos)



Según los datos que muestra la tabla anterior, en principio se puede afirmar que las predicciones difieren poco de las observaciones. No obstante habrá que esperar al diagnóstico del ajuste del modelo (apartado 4.3).

En la Tabla 4.8 se muestra el cálculo de la Capitalización Bursátil en el instante t, “valor desconocido”, utilizando la estimación del precio de las compañías con la correspondiente ponderación obtenida por el método del Tracking Error Variance. Así mismo, mediante la sustitución en la fórmula del IBEX 35 de los valores tanto conocidos como desconocidos que han sido estimados, se obtiene la predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2012.

EMPRESA	Nº ACCIONES	PREDICCIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX35
IBERDROLA	5.822.196	4,75	4647537,07	<b>8.503,44</b>
BBVA	4.551.602	6,57	13432353,57	
GAS NAT	572.093	13,41	766936,43	
MAPFRE	1.235.755	2,51	405553,25	
ARCELOR	312.182	14,86	704665,53	
			<b>19.957.045,86</b>	

Tabla 4.8. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (12 semanas. 5 títulos)

La predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2012 es de **8.503,44**. El dato real (observación) para la primera semana de 2012 es de **8.531,34**, por tanto difiere en **27,90 puntos**, lo que representa un **0,33 %** sobre el valor real del IBEX 35.

Con respecto a la predicción semanal del IBEX 35 utilizando en la cartera réplica los 8 títulos seleccionados por el método de componentes principales y el peso obtenido mediante el Tracking Error Variance, los resultados se muestran en las tablas 4.9 y 4.10.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
IBERDROLA	4,74	4,75	-0,01	0,00135
BBVA	6,56	6,57	-0,01	0,00298
ARCELOR	14,92	14,86	0,06	0,00646
TELEFÓNICA	13,39	13,15	<b>0,24</b>	0,00136
FERROVIAL	9,45	9,45	0,00	0,00146
ACCIONA	65,57	66,28	<b>-0,71</b>	0,00113
ABERTIS	12,53	12,52	0,01	0,00174
ACS. CONST	22,89	22,60	<b>0,29</b>	0,00231

Tabla 4.9. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 8 títulos)

En la Tabla 4.9 se observa como para Telefónica, Acciona y ACS las predicciones no se aproximan tanto a las observaciones, como es el caso de los restantes títulos.

EMPRESA	Nº ACCIONES	PREDICCIÓN	CAPITALIZACIÓN	IBEX 35
IBERDROLA	5822196	4,75	3343790,814	<b>8.480,0</b>
BBVA	4551602	6,57	13291872,79	
ARCELOR	312182	14,86	251898,2118	
TELEFÓNICA	4563996	13,15	8993469,141	
FERROVIAL	733510	9,45	585840,5028	
ACCIONA	50840	66,28	19207,15703	
ABERTIS	591230	12,52	564868,6296	
ACS. CONST	251731	22,60	363568,3721	
			<b>27.414.515,62</b>	

Tabla 4.10. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (12 semanas. 8 títulos)

La predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2012 utilizando 8 títulos en la cartera réplica y con un histórico de 12 semanas es de **8.480,00**. El dato real (observación) para la primera semana de 2012 es de **8.531,34**, por tanto difiere en **51,40 puntos**, lo que representa un **0,60 %** sobre el valor real del IBEX 35.

Los resultados obtenidos utilizando 8 títulos en la cartera réplica, con un histórico de 12 semanas, son peores que en el caso de elegir 5 títulos en la cartera réplica ya que la predicción del IBEX 35 es más próxima al dato real (observación) utilizando 5 títulos.

La predicción de Telefónica obtiene una diferencia de 0,24 puntos. Teniendo en cuenta que se le asigna un peso del 14,98% en la cartera réplica y que con la selección de 5 títulos esta compañía no ha sido tenida en cuenta, se puede intuir que el valor de su predicción haya influido negativamente en la predicción del IBEX 35 utilizando 8 títulos.

Con respecto a la utilización de un histórico de 20 semanas (5 meses) para la aplicación del modelo Log Normal y simulación Monte Carlo, los resultados obtenidos han sido los que se muestran en la Tabla 4.11.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
IBERDROLA	4,74	4,79	-0,04	0,001288914
BBVA	6,56	6,61	-0,05	0,002849119
GAS NAT	13,42	13,40	0,02	0,001092045
MAPFRE	2,5	2,51	-0,01	0,001468178
ARCELOR	14,924	14,95	-0,03	0,005835392

Tabla 4.11. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 5 títulos)

En el caso de la elección en la cartera réplica de 5 componentes principales, se muestra en la tabla 4.12 como la predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2012 es de **8.555,99**, por tanto difiere en **24,65 puntos**, lo que representa un **0,29 %** sobre el

valor real del IBEX 35, un resultado muy parecido a la aplicación del modelo teniendo en cuenta un histórico de 12 semanas.

EMPRESA	Nº ACCIONES	PREDICCIÓN	CAPITALIZACIÓN	IBEX 35
IBERDROLA	5.822.196	4,79	4681081,005	<b>8.555,99</b>
BBVA	4.551.602	6,61	13517985,34	
GAS NAT	572.093	13,40	766792,1837	
MAPFRE	1.235.755	2,51	405421,2487	
ARCELOR	312.182	14,95	709088,7669	
			<b>20.080.368,55</b>	

Tabla 4.12. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (20 semanas. 5 títulos)

En el caso de la elección en la cartera réplica de 8 componentes principales, y con un histórico de 20 semanas, se muestra en las tablas 4.13 y 4.14 los resultados.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
IBERDROLA	4,74	4,79	-0,04	0,00129
BBVA	6,56	6,61	-0,05	0,00285
ARCELOR	14,92	14,95	-0,03	0,00584
TELEFÓNICA	13,39	13,25	0,15	0,00130
FERROVIAL	9,45	9,59	-0,14	0,00182
ACCIONA	65,57	67,17	-1,61	0,00117
ABERTIS	12,53	12,52	0,01	0,00146
ACS. CONST	22,89	22,65	0,24	0,00203

Tabla 4.13. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 8 títulos)

En este caso, la predicción de la compañía Telefónica obtiene un mejor resultado que en el caso de utilizar 12 semanas como serie histórica. La diferencia entre el valor observado y la predicción es de 0,15. Para el título BBVA, que obtiene un peso muy alto con respecto a los demás títulos, y por lo tanto adquiere mayor relevancia su resultado, se obtiene una diferencia de 0,05, frente al 0,01 que se obtenía con 12 semanas de histórico. No obstante, en principio es una diferencia bastante aceptable.

En el caso de Acciona, que aparentemente parece que su predicción dista mucho de las demás predicciones para otros títulos, tiene un valor de sus acciones (observación= 65,57) muy superior al resto de los valores observados. En estos casos es importante tener en cuenta este detalle que posteriormente en las medidas de Bondad de Ajuste se analizarán con mayor detenimiento (apartado 4.3).

EMPRESA	Nº ACCIONES	PREDICCIÓN	CAPITALIZACIÓN	IBEX 35
IBERDROLA	5.822.196	4,79	3367924,869	<b>8.536,41</b>
BBVA	4.551.602	6,61	13376609	
ARCELOR	312.182	14,95	253479,3946	
TELFÓNICA	4.563.996	13,25	9055654,095	
FERROVIAL	733.510	9,59	594654,5508	
ACCIONA	50.840	67,17	19465,78991	
ABERTIS	591.230	12,52	564944,9403	
ACS. CONST	251.731	22,65	364307,5005	
			<b>27.597.040,14</b>	

Tabla 4.14. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (20 semanas. 8 títulos)

La predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2012 con la selección de 8 títulos y con un histórico de 20 semanas es de **8.536,41**, por tanto difiere en **5,07 puntos**, lo que representa un **0,06 %** sobre el valor real del IBEX 35.

El resultado obtenido en este escenario es el mejor empleando la metodología de componentes principales en cuanto a que la predicción del IBEX 35 se aproxima en mayor medida a la observación del IBEX 35 para la primera semana de 2012.

Este hecho podría ser debido a que la predicción depende de un mayor número de empresas, por tanto, están más repartidos los pesos, o dicho de otra forma, el error en la predicción de los precios de una compañía sobre el total de empresas no tiene la misma repercusión cuando el total de compañías es de 8, en lugar de 5.

No obstante, la predicción que se alcance para el título más representativo, BBVA, influye en mayor medida que para otros títulos con menor representación en la cartera réplica. Utilizando 12 semanas se obtenía una predicción más cercana al valor real. Aun así, para ambos escenarios sus predicciones se han aceptado como buenas.

En contra, para la compañía Telefónica su predicción mejoraba en el caso de utilizar un espacio temporal de 20 semanas. Otra mejora a la hora de utilizar una serie temporal más amplia ha sido para la empresa Arcelor, pasando de una diferencia de 0,06 a 0,03.

#### 4.2.2 Predicción del IBEX 35 utilizando sus 10 primeras empresas por ponderación

En este apartado, la aplicación del modelo se realiza para las 10 primeras compañías del IBEX 35, las cuales representan un mayor peso dentro del índice. Del mismo modo que en el apartado 4.2.1, se calcula mediante el modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo la predicción de las cotizaciones para la primera semana del 2012 para cada una de ellas. Los resultados obtenidos son los que indica la Tabla 4.15.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
TELEFÓNICA	13,39	13,15	0,24	0,001363
SANTANDER	5,75	5,74	0,01	0,002278
BBVA	6,56	6,57	-0,01	0,002979
IBERDROLA	4,74	4,75	-0,01	0,001350
REPSOL YPF	23,77	23,79	-0,02	0,001981
INDITEX	63,64	62,90	0,74	0,000586
ABERTIS	12,53	12,52	0,01	0,001745
ACS. CONST	22,89	22,60	0,29	0,002311
CAIXABANK	3,82	3,95	-0,13	0,001425
GAS NAT.	13,42	13,41	0,02	0,001121

Tabla 4.15. Fuente: Elaboración propia. Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35. (12 semanas)

A continuación, en la Tabla 4.16, se muestra el cálculo de la Capitalización Bursátil utilizando la estimación del precio de las compañías, y la predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2012.

EMPRESA	Nº ACCIONES	PREDICCIÓN	CAPITALIZACIÓN	IBEX 35
TELEFÓNICA	4.563.996	13,15	60036509,62	<b>8.481,25</b>
SANTANDER	8.440.275	5,74	48435780,97	
BBVA	4.551.602	6,57	29889527,3	
IBERDROLA	5.822.196	4,76	27724822,2	
REPSOL YPF	1.220.863	23,79	29047899,55	
INDITEX	373.998	62,90	23525709,24	
ABERTIS	591.230	12,52	7403258,579	
ACS. CONST	251.731	22,60	5689645,886	
CAIXABANK	1.494.917	3,95	5899583,857	
GAS NAT.	572.093	13,41	7669364,346	
			<b>245.322.101,56</b>	

Tabla 4.16. Fuente: Elaboración propia. Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (12 semanas)

La predicción del IBEX 35 utilizando las 10 primeras empresas que componen el IBEX 35 es de **8.481,25**. El dato real (observación) para la primera semana de 2012 es de **8.531,34**, por tanto difiere en **50,09 puntos**, lo que representa un **0,59 %** sobre el valor real del IBEX 35.

Del mismo modo que se hizo en el apartado 4.2.1, se comparará la predicción en el caso de utilizar 20 semanas (véase Tablas 4.17 y 4.18).

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
TELEFÓNICA	13,39	13,15	0,24	0,0014
SANTANDER	5,75	5,74	0,01	0,0023
BBVA	6,56	6,57	-0,01	0,0030
IBERDROLA	4,744	4,75	-0,01	0,0014
REPSOL YPF	23,77	23,79	-0,02	0,0020
INDITEX	63,64	62,90	0,74	0,0006
ABERTIS	12,53	12,52	0,01	0,0017
ACS. CONST	22,88	22,60	0,29	0,0023
CAIXABANK	3,82	3,95	-0,13	0,0014
GAS NAT.	13,42	13,41	0,02	0,0011

Tabla 4.17. Fuente: Elaboración propia. Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35 (20 semanas)

EMPRESA	Nº ACCIONES	PREDICCIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
TELEFÓNICA	4.563.996	13,245	60451629,47	<b>8.552,84</b>
SANTANDER	8.440.275	5,817	49101051,86	
BBVA	4.551.602	6,609	30080074,2	
IBERDROLA	5.822.196	4,789	27880172,75	
REPSOL YPF	1.220.863	24,148	29481822,16	
INDITEX	373.998	63,525	23758313,23	
ABERTIS	591.230	12,523	7404258,72	
ACS. CONST	251.731	22,648	5701212,84	
CAIXABANK	1.494.917	3,924	5866310,645	
GAS NAT.	572.093	13,403	7667921,837	
			<b>247.392.767,71</b>	

Tabla 4.18. Fuente: Elaboración propia. Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (20 semanas)

La predicción del IBEX 35 utilizando las 10 primeras empresas que componen el IBEX 35 es de **8.552,84**. El dato real (observación) para la primera semana de 2012 es de **8.531,34**, por tanto difiere en **21,50 puntos**, lo que representa un **0,25 %** sobre el valor real del IBEX 35.

En la siguiente tabla (4.19) quedan resumidos los resultados obtenidos en los diferentes escenarios analizados.

	Ponderación	Comp. principales	
<b>20 semanas</b>		5 comp.	<b>8 comp.</b>
Difiere sobre valor IBEX 35	21,50	24,65	<b>5,07</b>
% sobre valor IBEX 35	0,25%	0,29%	<b>0,06%</b>
<b>12 semanas</b>		5 comp.	8 comp.
Difiere sobre valor IBEX 35	-50,09	-27,90	-51,39
% sobre valor IBEX 35	-0,59%	-0,33%	-0,60%

Tabla 4.19. Fuente: Elaboración propia. Resumen Predicción del IBEX 35

El escenario con mejores resultados para la predicción del IBEX 35 ha sido la utilización de la metodología de componentes principales seleccionando 8 títulos en la cartera réplica, con un histórico de datos de longitud 20 semanas.

Además el análisis seleccionando 8 componentes, con valor propio  $> 0,8$  ha ofrecido mejores resultados que seleccionando valores propios  $> 1$ . Esto puede ser debido a que se consigue mayor explicación de la variabilidad de los datos originales. Concretamente el 74,86% en el caso de 8 componentes frente al 66,40 % en el caso de 5 componentes.

No obstante, con la selección de 5 componentes principales los resultados son muy parecidos que seleccionando la cartera réplica por ponderación, siempre y cuando el histórico de datos utilizados sea de 20 semanas.

Ya se ha comentado que la estrategia de componer la cartera réplica seleccionando los títulos de mayor peso dentro del IBEX 35, no es, en la mayoría de los casos, la mejor elección. Los datos analizados anteriormente lo confirman.

#### 4.2.3 Aplicación del método de máxima verosimilitud para la calibración de los parámetros del modelo Log normal

En el apartado anterior se ha aplicado el modelo Log normal calibrando sus parámetros mediante el método de los momentos. He incluido este punto que muestra la calibración de parámetros por ambos métodos. Para su implementación se ha utilizado el paquete de cálculo simbólico *Mathematica* (ver primer Anexo).

Esta metodología ha sido aplicada para la cartera réplica formada por 8 títulos, resultado de utilizar el análisis de componentes principales, ya que ha sido la cartera que mejor predicción ha obtenido del valor del IBEX 35.

En las tablas 4.20 y 4.21 se muestran los resultados de los diferentes métodos.

Método de los momentos	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Predicción	Observación	Difiere
<b>ACS</b>	-0,387235	0,325226	22,65	22,89	<b>-0,24</b>
<b>BBVA</b>	0,177286	0,384908	6,61	6,56	0,05
<b>Acciona</b>	0,267353	0,246601	67,17	65,57	<b>1,61</b>
<b>Abertis</b>	0,354101	0,275417	12,52	12,53	-0,01
<b>Telefónica</b>	-0,163511	0,260296	13,25	13,39	<b>-0,15</b>
<b>Iberdrola</b>	-0,118420	0,258888	4,79	4,74	0,04
<b>Arcelor</b>	-0,069763	0,550854	14,95	14,92	0,03
<b>Ferrovial</b>	0,427638	0,308028	9,59	9,45	0,14

Tabla 4.20. Fuente: Elaboración propia. Método de los momentos

Método de máxima verosimilitud	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	Predicción	Observación	Difiere
<b>ACS</b>	0,006938	0,279594	26,60	22,89	<b>3,71</b>
<b>BBVA</b>	0,046843	0,346799	6,49	6,56	-0,07
<b>Acciona</b>	0,527324	0,222893	75,30	65,57	<b>9,73</b>
<b>Abertis</b>	0,356079	0,263215	12,55	12,53	0,02
<b>Telefónica</b>	0,302605	0,209709	15,77	13,39	<b>2,38</b>
<b>Iberdrola</b>	-0,006318	0,239500	5,03	4,74	0,28
<b>Arcelor</b>	-0,054858	0,488732	14,91	14,92	-0,02
<b>Ferrovial</b>	0,583500	0,327994	10,29	9,45	0,84

Tabla 4.21. Fuente: Elaboración propia. Método de máxima verosimilitud

Las tablas anteriores muestran los resultados de  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  según la metodología utilizada (el método de los momentos corresponde a la Tabla 4.20 y el método de máxima verosimilitud a la Tabla 4.21). Se ha aplicado para cada una de los 8 títulos de la cartera réplica, y mediante el modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo se han obtenido las predicciones de las cotizaciones semanales de cada una de las empresas para la primera semana de 2012.

Se observa como en ambos casos las predicciones que más difieren de sus observaciones son ACS, Acciona y Telefónica, pero es en el método de máxima verosimilitud donde las predicciones difieren en mayor medida de las observaciones, por lo tanto, se acepta como mejor metodología para los datos seleccionados en el estudio, el método de los momentos.

#### 4.2.4 Predicción del IBEX 35 para el año anterior (2011)

A continuación se presentan los resultados obtenidos aplicando el algoritmo sobre el bienio 2009-2010. La primera semana de 2011 se ha utilizado para contrastar la predicción



obtenida del IBEX 35. Han sido analizados 27 títulos que han pertenecido al IBEX 35 durante todo el periodo considerado.

Mediante el análisis de componentes principales se han obtenido dos carteras réplica del IBEX 35, compuestas por 4 y 6 títulos, dependiendo de si se han tomado valores propios mayores que 1 o 0,8. Operando de la misma forma que en el apartado anterior, los resultados obtenidos se muestran en las tablas 4.22 y 4.23.

Títulos	REPSOL	RED ELECT.	BBVA	FCC
<b>Pesos</b>	20,96%	13,71%	<b>57,78%</b>	7,55%

Tabla 4.22. Fuente: Elaboración propia. Pesos cartera réplica (4 títulos). 2011

Títulos	ENAGAS	ACCIONA	BBVA	REPSOL	ACS.CONST	OHL
<b>Pesos</b>	6,01%	8,25%	<b>55,07%</b>	18,38%	11,83%	0,46%

Tabla 4.23. Fuente: Elaboración propia. Pesos cartera réplica (6 títulos). 2011

El valor de la función objetivo para el tracking error es de 0,04733, inferior a la cartera réplica formada por 4 títulos, que es de 0,05016.

Al igual que ocurría en el apartado anterior, el título con mayor peso en la cartera réplica, a mucha distancia de los demás es BBVA.

Para la aplicación práctica del modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo también se han seleccionado las últimas 12 semanas del año 2010 (3 meses). El objetivo es predecir para la primera semana del 2011. Asimismo, también se ha realizado el estudio seleccionando las últimas 20 semanas del año 2010 (5 meses), con el objetivo de comparar los resultados según el espacio temporal utilizado.

El resultado de aplicar el modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo para cada una de las 4 empresas que componen la cartera que replica el IBEX 35 se muestra en la Tabla 4.24.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
FCC	18,384	19,26	-0,88	0,000779
BBVA	7,44	7,46	-0,02	0,001131
REPSOL	20,96	21,06	-0,10	0,000633
RED.ELECT	34,45	35,39	-0,94	0,000398

Tabla 4.24. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 4 títulos). 2011

A continuación se muestra el cálculo de la Capitalización Bursátil utilizando la estimación del precio de las compañías con la correspondiente ponderación obtenida por el método del Tracking Error Variance. Así mismo, mediante la sustitución en la fórmula del IBEX 35 de los valores desconocidos que han sido estimados, se obtiene la predicción del IBEX 35 (véase Tabla 4.25).

EMPRESA	Nº ACCIONES	COTIZACIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
FCC	127.303	19,26	185069,9867	<b>9.780,16</b>
BBVA	4.490.908	7,46	19357837,05	
REPSOL	1.220.863	21,06	5389433,247	
RED.ELECT	270.540	35,39	1312634,596	
			<b>26.244.974,88</b>	

Tabla 4.25. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (12 semanas. 4 títulos). 2011

La predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2011 es de **9.780,16**. El dato real (observación) para la primera semana de 2011 es de **9.768,30**, por tanto difiere en **11,86 puntos**, lo que representa un **0,12 %** sobre el valor real del IBEX 35.

Con respecto a la predicción semanal del IBEX 35 utilizando en la cartera réplica los 6 títulos seleccionados por el método de componentes principales y el peso obtenido mediante el Tracking Error, los resultados se muestran en las tablas 4.26 y 4.27.

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
ENAGAS	14,62	14,91	-0,29	0,000471
ACCIONA	52,80	52,64	0,16	0,000906
BBVA	7,44	7,46	-0,02	0,001131
REPSOL	20,96	21,06	-0,10	0,000633
ACS.CONST	33,82	34,71	-0,89	0,000398
OHL	21,92	22,30	-0,38	0,001059

Tabla 4.26. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 6 títulos). 2011

EMPRESA	Nº ACCIONES	COTIZACIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
ENAGAS	358.101	14,91	320752,582	<b>9.770,60</b>
ACCIONA	63.550	52,64	275952,688	
BBVA	4.490.908	7,46	18448767,06	
REPSOL	1.220.863	21,06	4725873,788	
ACS.CONST	314.665	34,71	1292471,171	
OHL	59.845	22,30	6168,002599	
			<b>25.069.985,30</b>	

Tabla 4.27. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (12 semanas. 6 títulos). 2011

La predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2011 utilizando 6 títulos en la cartera réplica es de **9.770,60**. El dato real (observación) para la primera semana de 2011 es de **9.768,30**, por tanto difiere en **2,30 puntos**, lo que representa un **0,02 %** sobre el valor real del IBEX 35. Los resultados obtenidos utilizando 6 títulos en la cartera réplica son mejores en cuanto a que las predicciones se aproximan en mayor medida a las observaciones.

Con respecto a la utilización de 20 semanas (5 meses) como datos históricos para la aplicación del modelo, los resultados obtenidos han sido los siguientes:

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
FCC	18,384	19,50	-1,11	0,000779
BBVA	7,44	7,49	-0,05	0,001131
REPSOL	20,96	21,20	-0,24	0,000633
RED.ELECT	34,45	35,6	-1,15	0,000398

Tabla 4.28. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 4 títulos). 2011

En el caso de la elección en la cartera réplica de 4 componentes principales, se muestra en la tabla 4.29 como la predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2011 es de **9.825,98**, por tanto difiere en **57,68 puntos**, lo que representa un **0,59 %** sobre el valor real del IBEX 35.

EMPRESA	Nº ACCIONES	COTIZACIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
FCC	127.303	19,50	187376,1547	<b>9.825,98</b>
BBVA	4.490.908	7,49	19435683,58	
REPSOL	1.220.863	21,20	5424447,241	
RED.ELECT	270.540	35,60	1320423,612	
			<b>26.367.930,59</b>	

Tabla 4.29. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (20 semanas. 4 títulos). 2011

Los resultados obtenidos en el caso de utilizar la cartera réplica formada por 6 títulos con un histórico de 20 semanas son los siguientes. (véase Tablas 4.30 y 4.31).

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	S <sup>2</sup>
ENAGAS	14,62	14,98	-0,35	0,000471
ACCIONA	52,80	52,61	0,19	0,000906
BBVA	7,44	7,49	-0,05	0,001131
REPSOL	20,96	21,20	-0,24	0,000633
ACS.CONST	33,82	35,60	-1,78	0,000398
OHL	21,92	22,99	-1,07	0,001059

Tabla 4.30. Fuente: Elaboración propia. Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 6 títulos). 2011

EMPRESA	Nº ACCIONES	COTIZACIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
ENAGAS	358.101	14,98	322227,7637	<b>9.824,90</b>
ACCIONA	63.550	52,61	275795,4202	
BBVA	4.490.908	7,49	18522957,820	
REPSOL	1.220.863	21,20	4756576,779	
ACS.CONST	314.665	35,60	1325611,458	
OHL	59.845	22,99	6358,851109	
			<b>25.209.528,09</b>	

Tabla 4.31. Fuente: Elaboración propia. Predicción IBEX 35. (20 semanas. 6 títulos). 2011

La predicción del IBEX 35 para la primera semana del año 2011 es de **9.824,90**, por tanto difiere en **56,60 puntos**, lo que representa un **0,58 %** sobre el valor real del IBEX 35.

Como ya ocurría con la utilización de 12 semanas, aunque en este caso la diferencia es mucho menor, los resultados obtenidos empleando 6 componentes principales son mejores en cuanto a que las predicciones se aproximan más a las observaciones.

La aplicación del modelo se ha realizado también para las 10 primeras empresas que forman el IBEX 35 por ponderación (véase Tablas 4.32, 4.33, 4.34 y 4.35).

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	% s/valor	S <sup>2</sup>
TELEFONICA	16,94	16,93	0,01	0,05%	0,000569
SANTANDER	7,85	7,84	0,01	0,08%	0,001217
INDITEX	55,98	56,23	-0,25	-0,45%	0,000660
IBERDROLA	5,67	5,81	-0,14	-2,48%	0,000625
BBVA	7,44	7,46	-0,02	-0,27%	0,001131
REPSOL	20,96	21,06	-0,10	-0,46%	0,000633
ENDESA	18,64	19,26	-0,62	-3,34%	0,000667
GAS NATUR	11,04	11,64	-0,59	-5,37%	0,000754
ABERTIS	13,34	13,45	-0,11	-0,84%	0,000736
ACS CONST	33,82	34,71	-0,89	-2,64%	0,000531

Tabla 4.32. Fuente: Elaboración propia. Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35. (12 semanas). 2011

EMPRESA	Nº ACCIONES	COTIZACIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
TELEFONICA	4.563.996	16,93	77273115,49	<b>9.826,60</b>
SANTANDER	8.329.122	7,84	65332316,05	
INDITEX	623.330	56,23	35052380,56	
IBERDROLA	5.483.843	5,81	31865699,59	
BBVA	4.490.908	7,46	33502173,68	
REPSOL	1.220.863	21,06	25707400,81	
ENDESA	1.058.752	19,26	20394850,24	
GAS NATUR	921.757	11,64	10728645,14	
ABERTIS	739.038	13,45	9943178,565	
ACS CONST	314.665	34,71	10923442,32	
			<b>320.723.202,44</b>	

Tabla 4.33. Fuente: Elaboración propia. Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (12 semanas). 2011

EMPRESA	OBSERVACIÓN	PREDICCIÓN	DIFIERE	% s/valor	S <sup>2</sup>
TELEFONICA	16,94	17,03	-0,09	-0,53%	0,0006
SANTANDER	7,85	7,87	-0,02	-0,25%	0,0012
INDITEX	55,98	57,28	-1,30	-2,32%	0,0007
IBERDROLA	5,67	5,85	-0,18	-3,17%	0,0006
BBVA	7,44	7,49	-0,05	-0,67%	0,0011
REPSOL	20,96	21,20	-0,24	-1,13%	0,0006
ENDESA	18,64	19,45	-0,81	-4,35%	0,0007
GAS NATUR	11,04	11,43	-0,38	-3,48%	0,0008
ABERTIS	13,34	13,66	-0,31	-2,35%	0,0007
ACS CONST	33,82	35,46	-1,64	-4,85%	0,0005

Tabla 4.34. Fuente: Elaboración propia. Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35 (20 semanas). 2011

EMPRESA	Nº ACCIONES	COTIZACIÓN	CAPITALIZACIÓN	Predicción IBEX 35
TELEFONICA	4.563.996	17,03	77724851,88	<b>9.902,40</b>
SANTANDER	8.329.122	7,87	65550190,14	
INDITEX	623.330	57,28	35704342,4	
IBERDROLA	5.483.843	5,85	32080481,55	
BBVA	4.490.908	7,49	33636900,92	
REPSOL	1.220.863	21,20	25878416,08	
ENDESA	1.058.752	19,45	20594467,37	
GAS NATUR	921.757	11,43	10536187,69	
ABERTIS	739.038	13,66	10092079,84	
ACS CONST	314.665	35,46	11158322,77	
			<b>322.956.240,65</b>	

Tabla 4.35. Fuente: Elaboración propia. Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (20 semanas). 2011

En la Tabla 4.36 quedan resumidos los resultados obtenidos en los diferentes escenarios analizados para la predicción de la primera semana del año 2011.

	Ponderación	Comp. principales	
<b>20 semanas</b>		4 comp.	6 comp.
Difiere sobre valor IBEX 35	134,10	57,68	56,6
% sobre valor IBEX 35	1,37%	0,59%	0,58%
<b>12 semanas</b>		4 comp.	<b>6 comp.</b>
Difiere sobre valor IBEX 35	58,30	11,86	<b>2,3</b>
% sobre valor IBEX 35	0,60%	0,12%	<b>0,02%</b>

Tabla 4.36. Fuente: Elaboración propia. Resumen Predicción del IBEX 35. 2011

En la tabla anterior se confirma como la técnica que obtiene mejores resultados para la selección de los títulos que se utilizarán para la predicción del IBEX 35 es la de Componentes Principales. Concretamente seleccionando en la cartera réplica componentes

principales con valores propios mayor que 0,8. Esto confirma que la opción de componer la cartera seleccionando los títulos de mayor peso dentro del IBEX 35, no es la mejor opción.

Otra de las conclusiones a las que llegamos es la longitud del histórico con la que funcionan mejor los datos seleccionados para predecir la primera semana de 2011, y es que para todos los escenarios la predicción es mejor con 12 semanas que con 20.

## 4.3 VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA

### 4.3.1 Medidas de Bondad de Ajuste

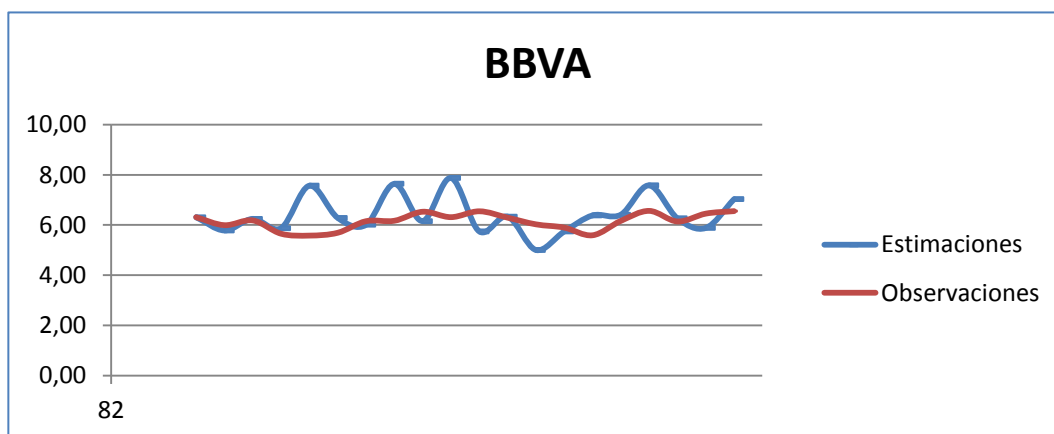
Para el diagnóstico del ajuste del modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo, se han utilizado las semanas del modelo en las cuales ya se conocen las cotizaciones semanales (últimas 20 semanas del año 2011). Se ha estimado el valor que alcanzaría la acción en cada una de las semanas conocidas, (fórmula (3.55), Simulación Monte Carlo). En la Tabla 4.37 se muestran las estimaciones semanales para el título BBVA.

Semana	Observaciones	Estimaciones	Simulaciones
85	8,15	8,15	0,9758
86	8,19	7,96	-0,4365
87	8,60	8,18	0,0486
88	8,28	9,62	1,7465
89	8,03	8,26	0,1131
90	8,24	9,04	0,8360
91	8,52	10,09	1,5843
92	8,37	6,91	-1,1529
93	9,35	4,92	-3,2883
94	9,38	7,29	-0,6998
95	9,61	11,08	1,7637
96	9,11	7,03	-0,8312
97	9,26	8,25	0,0484
98	8,99	5,62	-1,9101
99	8,45	11,15	1,5124
100	9,02	7,10	-0,6715
101	9,26	8,26	0,0393
102	9,07	8,25	0,0296
103	9,32	6,27	-1,1584
104	9,36	7,07	-0,6234
105	?		

Tabla 4.37. Fuente: Elaboración propia. Estimaciones semanas conocidas

Una vez obtenido el modelo podemos valorar hasta qué punto se ajusta a los datos que han servido para su formulación. Para comprobar la robustez del modelo utilizaremos tres herramientas:

- ▶ En la primera de ellas, se compara gráficamente las cotizaciones reales con las estimaciones proporcionadas por el modelo. En la Gráfica 4.3 podemos observar la cercanía de unas y otras.



Gráfica 4.3. Fuente: Elaboración propia. Gráfico de comparación de BBVA

- ▶ En segundo lugar, se ha calculado el valor de MSE (Error Cuadrático Medio) y el MAPE (Error Porcentual Absoluto Medio), tal y como se expone en las fórmulas (3.66) y (3.67).

El MSE mide la distancia cuadrática por término medio entre los valores observados y los estimados. Proporciona un resultado para BBVA de 0,81, lo que significa que en la estimación cometemos un error cuadrático por término medio de aproximadamente 0,81.

Mediante el MAPE, que proporciona la media de los valores absolutos ponderado por el inverso del valor, se obtiene como resultado un error porcentual de 9,77%. Esto significa que en las estimaciones se comete aproximadamente un error del 9,77%.

Para poder garantizar que el error que se comete no es importante, se debe realizar para cada una de las empresas que componen la cartera réplica. Se ha aplicado medidas de Bondad de Ajuste para la cartera compuesta por 8 títulos, ya que ha sido la cartera que mejores resultados ha obtenido.

Siguiendo los mismos pasos que para el título BBVA se obtienen los resultados que muestra la Tabla 4.38.

Título	Observación	MSE	MAPE(%)	%MSE/Obs.
ACS.CONST	22,89	4,12	12,91%	17,99%
BBVA	6,56	0,81	9,77%	12,36%
ACCIONA	65,57	6,29	7,40%	9,60%
FERROVIAL	9,45	0,99	8,74%	10,42%
IBERDROLA	4,74	0,51	8,60%	10,80%
TELEFÓNICA	13,39	1,24	6,62%	9,25%
ARCELOR	14,92	3,04	16,31%	20,34%
ABERTIS	12,53	1,47	9,73%	11,70%

Tabla 4.38. Fuente: Elaboración propia. Medidas de bondad de ajuste

El MSE nos indica qué error cuadrático por término medio estamos cometiendo en la estimación. Los valores resultantes de calcular las medidas MSE y MAPE suelen analizarse sobre el valor real observado, teniendo en cuenta la magnitud de cada observación se puede concluir si nos encontramos ante un error aceptable o no.

Se observa en la columna del MSE cómo lógicamente el error es mayor para las compañías con un valor de cotización “observación” más alto. El caso más llamativo es el de Acciona, por ello se ha calculado la columna %MSE/Obs, que nos da una idea más real sobre el error (desviación) que se está cometiendo en la predicción.

Las compañías con unas medidas de bondad de ajuste más altas son Arcelor y ACS Const. Si analizamos las predicciones que más se ajustan a las observaciones nos encontramos con que Arcelor es una de las empresas que obtiene una predicción más ajustada (véase Tabla 4.13).

Esto se explica porque se están calculando predicciones puntuales, generando 1000 simulaciones mediante el método Monte Carlo, para obtener 1000 predicciones en un instante determinado de tiempo. Por lo tanto, puede ocurrir que la serie de datos de una compañía no se ajuste tanto como otra, pero en un instante de tiempo determinado arroje una predicción más aceptable.

Debido a que los resultados de las medidas de Bondad de Ajuste se sitúan alrededor del 10% se puede concluir que los resultados son aceptables pero no todo lo satisfactorios que se esperaban, ya que lo ideal hubiera sido que rondaran entre el 5%-10%. Además nos encontramos con algunas compañías que sitúan su error entre el 15-20%.

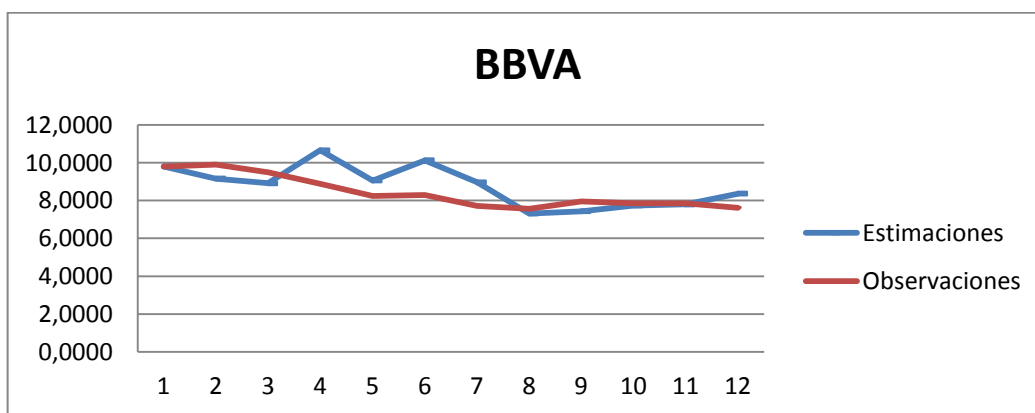
Con respecto a las medidas de Bondad de Ajuste utilizadas para la predicción de la primera semana del año 2011, han sido analizadas para la cartera réplica compuesta por 6 títulos y con un histórico de 12 semanas, puesto que ha sido el escenario donde mejores resultados se han obtenido. La Tabla 4.39 muestra las estimaciones para el título BBVA.



Semana	Observaciones	Estimaciones	Simulaciones
93	9,8	9,8000	-1,1424
94	9,894	9,6534	0,2019
95	9,494	9,8696	0,9610
96	8,886	9,6607	0,8074
97	8,236	9,2327	0,4120
98	8,286	7,3757	-1,9461
99	7,714	10,1780	1,8385
100	7,564	8,0594	-0,3397
101	7,946	8,9424	0,8339
102	7,844	8,8872	0,9294
103	7,845	9,5640	1,6636
104	7,615	5,8225	-2,0772
105	?		

Tabla 4.39. Fuente: Elaboración propia. Estimaciones semanas conocidas (2011)

Para comprobar la robustez del modelo, de igual forma que se ha realizado anteriormente, se compara gráficamente las cotizaciones reales con las estimaciones proporcionadas por el modelo.



Gráfica 4.4. Fuente: Elaboración propia. Gráfico de comparación de BBVA (predicción 2011)

El MSE proporciona un resultado para BBVA de 0,41, lo que significa que en la estimación cometemos un error cuadrático por término medio de aproximadamente 0,41, el cual representa un valor pequeño comparado con el valor de la acción.

Mediante el MAPE se obtiene como resultado un error porcentual de 3,65%. Esto significa que en las estimaciones se comete aproximadamente un error del 3,65% lo que puede considerarse un porcentaje razonable de error.

Siguiendo los mismos pasos que para el título BBVA se obtienen los resultados para cada una de las empresas que componen la cartera réplica (véase Tabla 4.40).

Título	Observación	MSE	MAPE(%)	%MSE/Obs.
ENAGAS	14,62	1,08	5,88%	7,39%
ACCIONA	52,80	3,65	4,20%	7,66%
BBVA	7,44	0,41	3,66%	5,53%
REPSOL	20,96	1,45	5,38%	6,90%
ACS.CONST	33,82	1,67	3,30%	4,93%
OHL	21,92	1,18	4,39%	5,37%

Tabla 4.40. Fuente: Elaboración propia. Medidas de bondad de ajuste (predicción 2011)

Los títulos con unas medidas de bondad de ajuste más altas son Enagas y Acciona. Si analizamos las predicciones que más se ajustan a las observaciones (ver Tabla 4.26) nos encontramos con que Enagas es efectivamente una de las compañías que peor predicción obtiene, aunque no es de las peores.

Por otro lado, ACS. CONST obtiene el menor MAPE del total de títulos, y su predicción es la que más difiere en valor absoluto con su observación, aunque como ya se ha comentado anteriormente, la desviación entre la observación y la predicción tiene que compararse con el valor de la cotización de la propia compañía, ya que si cotiza a un valor alto, la desviación real no es tan alta como la que se presupone en un principio. Y es esto efectivamente lo que ocurre con ACS. CONST.

En el caso de BBVA, la compañía con mayor peso en la cartera del total de títulos, en la tabla se muestra como obtiene errores razonables, siendo de las más bajas, y su predicción es la que más se ajusta a la observación de la semana en concreto que estamos analizando.

Además, para todas las compañías se obtienen unas medidas de bondad de ajuste que no superan el 8%, situándose en la mayoría de ellas en el 5%. Por lo tanto, se puede afirmar que el modelo se ajusta a los datos que han servido para su formulación.

### 4.3.2 Medidas de Bondad de Ajuste penalizadas

Con el objetivo de evaluar el ajuste del modelo utilizado para predecir la primera semana del 2012 frente al utilizado para predecir la primera semana del 2011, se ha calculado el estadístico Cp de Mallow, y así poder seleccionar el mejor modelo. Los resultados se muestran en la Tabla 4.41.

<b>PREDICCIÓN</b>	<b>2012</b>	<b>PREDICCIÓN</b>	<b>2011</b>
<b>Título</b>	<b>Cp Malow</b>	<b>Título</b>	<b>Cp Malow</b>
<b>ACS.CONST</b>	<b>84,63</b>	<b>ACS.CONST</b>	<b>25,77</b>
<b>BBVA</b>	<b>120,98</b>	<b>BBVA</b>	<b>2,70</b>
<b>ACCIONA</b>	<b>87,74</b>	<b>ACCIONA</b>	<b>10,53</b>
FERROVIAL	70,39	REPSOL	43,84
IBERDROLA	131,06	ENAGAS	162,65
TELEFÓNICA	55,72	OHL	19,42
ARCELOR	205,09		
ABERTIS	118,43		

Tabla 4.41. Fuente: Elaboración propia. Cp de Mallow.

Para la predicción de la primera semana del año 2012, para cada uno de los títulos, se ha utilizado un tamaño de la muestra de 20 semanas, frente a 12 semanas que se han utilizado para predecir la primera semana del año 2011.

La predicción que obtiene un ajuste mejor de sus datos, según el Cp de Malow, es la predicción para la primera semana del año 2011, ya que se obtiene un Cp menor en todos los títulos que han sido analizados en ambos años (BBVA, ACS. Const y Acciona).

Además, la predicción del IBEX35 para la primera semana del año 2011 utilizando 6 parámetros es mejor que la predicción para la primera semana del año 2012, la cual utiliza 8 parámetros, por lo tanto, la elección del modelo es el que predice la primera semana del año 2011, con un número de parámetros  $p=6$  y un tamaño de la muestra  $N=12$ .



# 5 | CONCLUSIONES

Con el propósito de obtener una cartera que replique el comportamiento del IBEX 35 utilizando un número reducido de títulos, se ha realizado el análisis de componentes principales. En un segundo paso, se han obtenido los pesos de la cartera réplica mediante la técnica del Tracking Error Variance. El periodo considerado para aplicar la metodología ha sido de 2 años (2010-2011), considerando 32 títulos que han pertenecido al IBEX 35 en este periodo. Finalmente, mediante las cotizaciones semanales de las empresas que componen la cartera réplica se ha estimado el valor que alcanza el IBEX 35 para la primera semana del año 2012.

Para poder contrastar los resultados anteriores, se ha realizado el mismo análisis para el periodo 2009-2010, con el objetivo de predecir el IBEX 35 para la primera semana de 2011. Se han considerado en este caso 27 títulos que formaron parte del IBEX 35 en ese periodo.

El modelo utilizado para la predicción de acciones ha sido el modelo Log normal, en el cual siguiendo los pasos predeterminados para su cálculo y mediante la Simulación Monte Carlo se ha obtenido una predicción puntual de la cotización semanal de los títulos

seleccionados. Con ello ha podido estimarse el valor de la Capitalización Bursátil, y sustituyendo los valores en la fórmula del cálculo del IBEX 35, se ha obtenido la predicción para la primera semana del año 2012.

A lo largo del trabajo han sido analizados diferentes escenarios. Por una parte, dentro del análisis de componentes principales se han comparado los resultados obtenidos según el número de componentes extraídos para formar la cartera réplica, teniendo en cuenta la explicación de la variabilidad de los datos originales.

. Por otro lado, se han contrastado los resultados por el método de componentes principales frente a la formación de una cartera réplica seleccionando las 10 primeras empresas que pertenecen al IBEX 35 por ponderación.

Además, se ha utilizado diferente longitud en el histórico de datos para realizar la predicción del IBEX 35, con el objetivo de evidenciar de forma práctica si el modelo Log normal y la Simulación Monte Carlo se ajusta mejor cuando sus datos históricos tienen una menor o mayor longitud.

En la tabla 4.42 se muestran los resultados obtenidos, tanto para la predicción del año 2011 como para la del año 2012. Para cada caso ha sido calculada la diferencia entre el valor observado y el valor estimado del IBEX 35 y el porcentaje que la diferencia representa sobre la observación del IBEX 35 la semana de predicción.

<b>PREDICCIÓN AÑO 2012</b>	<b>Ponderación</b>	<b>Comp. principales</b>	
<b>20 semanas</b>		5 comp.	<b>8 comp.</b>
Difiere sobre valor IBEX 35	21,50	24,65	<b>5,07</b>
% sobre valor IBEX 35	0,25%	0,29%	<b>0,06%</b>
<b>12 semanas</b>		5 comp.	8 comp.
Difiere sobre valor IBEX 35	-50,09	-27,90	-51,39
% sobre valor IBEX 35	-0,59%	-0,33%	-0,60%
<b>PREDICCIÓN AÑO 2011</b>			
<b>20 semanas</b>		4 comp.	6 comp.
Difiere sobre valor IBEX 35	134,10	57,68	56,6
% sobre valor IBEX 35	1,37%	0,59%	0,58%
<b>12 semanas</b>		4 comp.	<b>6 comp.</b>
Difiere sobre valor IBEX 35	58,30	11,86	<b>2,3</b>
% sobre valor IBEX 35	0,60%	0,12%	<b>0,02%</b>

Tabla 4.42. Fuente: Elaboración propia. Conclusiones en la predicción del IBEX 35

En el caso de la predicción para el año 2012, la técnica que obtiene mejores resultados para la selección de los títulos que formaran la cartera réplica, es la de Componentes Principales, a excepción del escenario en el que se seleccionan 8 componentes, utilizando un histórico de 12 semanas, en el cual se obtiene una diferencia entre la predicción y la observación del IBEX 35 bastante elevada, un 0,60% respecto al valor real del índice.

En la predicción utilizando las 10 primeras empresas que pertenecen al índice por ponderación, en el caso de utilizar un histórico de 20 semanas, y para la predicción de 2012, se obtiene un resultado muy parecido al que se obtiene por componentes principales cuando se seleccionan 5 títulos en la cartera réplica (valor propio  $>1$ ). Por lo tanto, a pesar de que la técnica que más se ajusta es la de Componentes Principales, hay algunas excepciones en los resultados obtenidos para la predicción de la primera semana del año 2012.

Con respecto a la predicción de la primera semana de 2011, existe un objetivo paralelo a poder contrastar resultados en varios periodos, y es evidenciar la mayor volatilidad que en los mercados financieros se está produciendo en los últimos años.

Debido a los movimientos incontrolables que se presentan en las economías actuales, con movimientos bruscos de la oferta y la demanda, cada vez resulta más complicado definir los procesos que puedan controlar estos movimientos de manera clara y ordenada, y que contribuyan directamente en la correcta valoración de las actividades de compra y venta de los activos operados, así como establecer un adecuado modelo.

Esta realidad se ve reflejada en los datos analizados, en cuanto a que las predicciones para el año 2011 se aproximan más a las observaciones, con una variabilidad en los datos menor, y con un ajuste del modelo más adecuado.

Analizando los datos que se obtienen para la predicción de año 2011, se confirma como la técnica que obtiene mejores resultados para la composición de la cartera réplica es la de Componentes Principales, concretamente con la extracción de 6 componentes. De la misma forma que en la predicción de la primera semana del año 2012, la extracción de componentes principales obtiene mejores predicciones del IBEX 35 cuando los títulos seleccionados son elegidos a partir de seleccionar componentes principales con valores propios  $> 0,8$ .

Con lo que respecta al histórico de datos utilizado para la predicción del IBEX 35, en la predicción de la primera semana del año 2011 se obtienen mejores resultados utilizando menor longitud menor (12 semanas) que para la predicción de la primera semana de año

2012 en la cual la mejor predicción del IBEX 35 se obtiene cuando el histórico de datos es de 20 semanas.

En cuanto a la mayor variabilidad de los datos utilizados para la formulación del modelo (cotizaciones históricas) se puede comprobar mediante la Tabla 4.43 como en el año 2011 (predicción de 2012) existe mayor variabilidad que en el año 2010 (predicción de 2011).

<b>EMPRESAS PREDICCIÓN 2012</b>	<b>S<sup>2</sup></b>	<b>EMPRESAS PREDICCIÓN 2011</b>	<b>S<sup>2</sup></b>
IBERDROLA	0,00129	ENAGAS	0,00047
BBVA	0,00285	ACCIONA	0,00090
ARCELOR	0,00584	BBVA	0,00113
TELEFÓNICA	0,00130	REPSOL	0,00063
FERROVIAL	0,00182	ACS.CONST	0,00039
ACCIONA	0,00117	OHL	0,00105
ABERTIS	0,00146		
ACS. CONST	0,00203		

Tabla 4.43. Fuente: Elaboración propia. Variabilidad de los datos

Referente a las medidas de Bondad de Ajuste analizadas en ambos años, en las Tablas 4.36 y 4.38 se comprueba cómo para la predicción de la primera semana del año 2011 se obtiene un error en la predicción de los títulos que fluctúa entre el 5%-8%, mucho menor al que se obtiene para la predicción de la primera semana de 2012, que se sitúa alrededor del 15%. Por lo tanto, los datos del modelo utilizados para la predicción de 2011 se ajustan en mayor medida que los utilizados para la predicción de 2012.

A partir de los resultados obtenidos a lo largo del trabajo se pueden realizar algunas afirmaciones. La primera de ellas es confirmar que la técnica más adecuada para la composición de la cartera réplica es la de Componentes Principales. La extracción de componentes funciona bastante bien cuando se extraen valores propios mayores que 0,8 con una variabilidad de los datos que se sitúa alrededor del 75%.

La segunda de ellas es afirmar la menor efectividad que tienen los modelos matemáticos y econométricos cuando los mercados bursátiles se comportan con mayor incertidumbre en sus decisiones, y por lo tanto, los precios de los títulos están sometidos a mayor fluctuación, lo que supone obtener unas predicciones menos acertadas.

Para finalizar, recordemos que se ha analizado qué longitud de cotizaciones históricas es la adecuada para aplicar el modelo Log normal y Simulación Monte Carlo. Así como en la predicción para la primera semana del año 2011 se muestra claramente que los resultados son mejores cuando la longitud de los datos es menor, no ocurre lo mismo para la predicción de la primera semana de 2012. Por lo tanto no podemos realizar ninguna afirmación en este



sentido. Una hipótesis que barajamos es pensar que cuanto mayor es la variabilidad de los datos, es decir, existen mayores fluctuaciones en el precio de las acciones, mejor funciona el modelo si se dispone de un mayor número de datos para su aplicación. No obstante, este es un aspecto que debería considerarse para futuros análisis.



# 6 | BIBLIOGRAFÍA

## Libros:

ALEXANDER, G.J.; SHARPE, W.F.; BAILEY, J.V. (2003) Fundamentos de inversiones: Teoría y práctica: Prentice Hall, Mexico.

AZNAR, A.; Y TRÍVEZ, F.J. (1993) Métodos de predicción en Economía (vol. II): Análisis de series temporales. Barcelona: Ariel.

FREIXAS, X. (1997) Rentabilidad y riesgo en la teoría de la gestión de carteras, en FREIXAS, X.; MARÍN, J.M.; MARTÍNEZ, M.A.; RUBIO, G. La evaluación de los fondos de inversión en España: Civitas, Madrid.

GEDAM, S.G.; BEAUDET, S.T. (2000) Monte Carlo Simulation using Excel Spreadsheet for Predicting Reliability of a Complex System. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium.

GILKS, W.K.; RICHARDSON, S.; SPIEGELHALTER, D.J. (eds) (1996) Markov Chain Monte Carlo in Practice: Chapman and Hall.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2006) Gestión de carteras (eficiencia, teoría de cartera, CAPM, APT): Desclée de Brouwer, Bilbao.

HULL, J.C. (2002) Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones; Pearson Education. 4ª edición.

HYNDMAN, R.J.; KOEHLER, A.B.; ORD, J.K.; SNYDER, R.D. (2008b) Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach.

LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. (1996) Introduction to Stochastic Calculus to Finance: Chapman & Hall/CRC.

MALLOW, C.L. (1973) Some Comments on CP: Technometrics.

MARÍN, J.M. (1997). Criterios de evaluación y eficiencia en la gestión de carteras: una crítica al modelo tradicional, en FREIXAS, X.; MARÍN, J.M.; MARTÍNEZ, M.A.; RUBIO, G. La evaluación de los fondos de inversión en España: Civitas, Madrid.

ØKSENDAHL, B. (1998) Stochastic Differential Equations: Springer, Berlin.

QUESADA, V.; GARCÍA A. (1988) Lecciones de Cálculo de Probabilidades: Ed. Díaz de Santos.

ROSS, S.H. (1999) Simulación: Pearson. 2ª Edición.

SAMUELSON, P. (1965) Rational theory of warrants prices: Industrial Management Review, 13-31.

SHARPE, W.F. (1963) A Simplified Model for Portfolio Analysis: Management Science, Vol. 9, pp. 277-293.

SUÁREZ SUÁREZ, A.S. (1986) Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa: Pirámide, Madrid.

### **Artículos de revista:**

ADOCK, C.J.; MEADE, N. (1994) A simple algorithm to incorporate transaction costs in quadratic optimization. European Journal of Operational Research, nº 79. pp. 85-94.

AGNON, Y.; GOLAN, A.; SHEARER, M. (1999) Nonparametric, nonlinear, short-term forecasting: theory and evidence for nonlinearities in the commodity markets. *Economic Letters*, nº 65, pp. 293-299.

ALEXANDER, C.; DIMITRIU, A. (2005) Indexing and Statistical Arbitrage. *The Journal of Portfolio Management*, nº 31 (2), pp. 50-63.

BAILLIE, T.R. y BOLLERSLEV, T. (1991) Intra-day and Intermarket Volatility in Foreign Exchange Rates. *Review of Economic Studies* 58, nº 3, pp. 85–565.

BAJO-RUBIO, O.; FERNÁNDEZ-RODRÍGUEZ, F.; SOSVILLA-RIVERO, S. (1992) Chaotic behavior in exchange-rate series: results for the peseta-US dollar case. *Economic Letters*, nº 39, pp. 207-211.

BALABAN, E.; BAYAR, A. (2005) Stock returns and volatility: empirical evidence from fourteen countries. *Applied Economic Letters* 12, 10: 603-611

BALAGUER, M.R.; MUÑOZ, M.J. (2006) Análisis de la rentabilidad-riesgo de los fondos de inversión socialmente responsables en España. *Análisis Financiero Internacional*, nº 125, pp. 29-41.

BARNETT, W.A.; GALLANT, A.R.; HINICH, M.J.; JUNGEILGES, J.A.; KAPLAN, D.T.; JENSEN, M.J. (1997) A singled blind controlled competition among test for nonlinearity and chaos. *Journal of Econometrics*, nº 77, pp. 157-192.

BASK, M. (2002) A positive Lyapunov exponent in Swedish exchange rates? *Chaos. Solitons and Fractals*, nº 14, pp. 1295-3004.

BEINE, M.; BENASSY-QUERE, A.; LECOURT, C. (2002) Central bank intervention and foreign exchange rates: new evidence from FIGARCH estimations. *Journal of International Money and Finance* 21, nº 1, pp. 115-144.

BELAIRE-FRANCH, J.; CONTRERAS, D.; TORDERA-LLEDÓ, L. (2002) Assessing nonlinear structures in real exchange rates using recurrence plot strategies. *Physica D*, nº 171, pp. 249-264.

BLACK, F.; SCHOLES, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, nº 81, pp. 637-659.

BONILLA, C.A.; ROMERO-MEZA, R.; HINICH, M.J. (2006) Episodic nonlinearity in Latin American stock market indices. *Applied Economic Letters* nº 16, pp. 193-199.

BRADLEY, M.D.; JANSEN, D.W. (2004) Forecasting with a nonlinear dynamic model of stock returns and industrial production. *International Journal of Forecasting*, nº 20, pp. 321-342.

BROCK, W.A.; DECHERT, D.; SCHEINKMAN, J.; LEBARON, B. (1996) A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Reviews*, nº15, pp. 197-235.

BROOKS, C. (1996) Testing for nonlinearity in daily pound exchange rates. *Applied Financial Economics*, nº 6, pp. 307-317.

BROOKS, C. (2001): A double-threshold GARCH model for the French Franc/Deutschmark exchange rate. *Journal of Forecasting* 20, 2: 135-143

CAO, L.; SOOFI, A.S. (1999) Nonlinear deterministic forecasting of daily dollar exchange rates. *International Journal of Forecasting*, nº 15, pp. 421-430.

CARIDAD, J.M. y CEULAR, N. (2001) Un análisis del mercado de la vivienda a través de redes neuronales artificiales. *Revista de Estudios de Economía Aplicada* nº 18, pp. 67-81.

CHEN, A.-S.; LEUNG, M.T.; DAOUK, H. (2003) Application of neural networks to an emerging financial market. Forecasting and trading the Taiwan Stock Index. *Computers and Operations Research* 30, nº 6, 901-923.

CHEN, S.; LUX, T.; y MARCHESI, M. (2001) Testing for non-linear structure in an artificial market. *Journal of Economic Behavior and Organization*, nº 46, pp 327-342.

FERNÁNDEZ-RODRÍGUEZ, F.; SOSVILLA-RIVERO, S. (1998) Testing nonlinear forecastability in time series: theory and evidence from the EMS. *Economic Letters* nº 59, pp. 49-63.

F. GUIJARRO.; I. MOYA (2008) Propuesta metodológica para la selección de acciones en la réplica de índices. *Revista de Economía Financiera*, nº 16. pp. 26-51.

GOKCAN, S. (2000) Forecasting volatility of emerging stock markets: linear versus non-linear GARCH models. *Journal of Forecasting* 19, nº6, pp. 499-504.

GRUDNITSKI, G.; OSBURN, L. (1993) Forecasting S and P and gold futures prices. An application of neural networks. *The Journal of Future Markets* 13, nº 6, pp. 631-643.

- HINICH, M.J.; PATTERSON, D.M. (1985) Evidence of nonlinearity in daily stock returns. *Journal of Business and Economic Statistics* 3, nº 1, pp. 69-77.
- HSIEH, D.A. (1989) Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates. *Journal of Business*, nº 62, pp. 339-368.
- HSIEH, D.A. (1991) Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial markets. *Journal of Finance* 46, nº 5, pp. 1839–1877.
- KIMOTO, T.; ASAKAWA, K.; YODA, M.; y TAKEOKA, M. (1990) Stock market prediction system with modular neural networks. En *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks*. San Diego, California, nº 2, pp. 11-16.
- LUX, T. (1998). The socio-economic dynamics of speculative markets: interacting agents, chaos, and the fat tails of return distributions. *Journal of Economic Behavior and Organization*. Nº 22, pp. 143-168.
- MARKOWITZ, H. (1952) Portfolio selection. *Journal of Finance*, nº 7, 77-91.
- NYCHKA, D.; ELLNER, S.; GALLANT, A.R.; MCCAFFREY, D. (1992) Finding chaos in noisy systems. *Journal of the Royal Statistical Society B* 54, nº 2, pp. 399-426.
- PÉREZ-RODRÍGUEZ, J.V.; TORRA, S.; ANDRADA-FÉLIX, J. (2005) are Spanish Ibex35 stock future index returns forecasted with non-linear models. *Applied Financial Economics* 15, nº 14, pp. 963-975.
- Qi, M. (2001). Predicting US recessions with leading indicators via neural network models. *International Journal of Forecasting*, nº 17, pp. 383-401.
- ROLL R. (1992) A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management* summer 1992, 13-23.
- ROSS, S.A. (1976) The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, nº. 3, pp. 341-360.
- SCHEINKMAN, J.A.; LEBARON, B. (1989) Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business*, nº 62, pp. 311-337.
- TABATA, Y.; TAKEDA, E. (1995) Bicriteria optimization problema of designing an index fund. *Journal of the Operational Research Society*, nº 46, pp. 1023-1032.

ZHANG, G.; HU, M.Y. (1998) Neural network forecasting of the British Pound/US Dollar exchange rate. Omega. International Journal of Management Science 26, nº 4, pp. 495-506.

### **Documentos en línea:**

COMISIÓN NACIONAL DE MERCADO DE VALORES [en línea] [09/08/12] <[www.cnmv.es](http://www.cnmv.es)>.

JAIME POZUELO MONFORT (2004): “Un paseo aleatorio o la evolución temporal del precio de la acción” [en línea] [22/03/11].

SOCIEDAD DE BOLSAS: “10 preguntas clave sobre el IBEX 35”. Secretaria de gestión de los índices IBEX 35 [en línea] [05/04/11] <[www.sbolsas.es](http://www.sbolsas.es)>, <[www.ibex35.com](http://www.ibex35.com)>.



## ÍNDICE DE TABLAS

---

4.1	5 Componentes principales	55
4.2	8 Componentes principales (I)	57
4.3	8 Componentes principales (II)	58
4.4	Pesos cartera réplica (5 títulos)	60
4.5	Pesos cartera réplica (8 títulos)	61
4.6	Tabla de valores ( $\mu$ )	63
4.7	Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 5 títulos)	64
4.8	Predicción IBEX 35. (12 semanas. 5 títulos)	65
4.9	Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 8 títulos)	65
4.10	Predicción IBEX 35. (12 semanas. 8 títulos)	66
4.11	Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 5 títulos)	66
4.12	Predicción IBEX 35. (20 semanas. 5 títulos)	67
4.13	Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 8 títulos)	67
4.14	Predicción IBEX 35. (20 semanas. 8 títulos)	68
4.15	Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35. (12 semanas)	69
4.16	Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (12 semanas)	69
4.17	Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35 (20 semanas)	70
4.18	Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (20 semanas)	70
4.19	Resumen Predicción del IBEX 35	71
4.20	Método de los momentos	72
4.21	Método de máxima verosimilitud	72

4.22	Pesos cartera réplica (4 títulos). 2011	73
4.23	Pesos cartera réplica (6 títulos). 2011	73
4.24	Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 4 títulos) 2011	73
4.25	Predicción IBEX 35. (12 semanas. 4 títulos). 2011	74
4.26	Predicciones títulos cartera réplica. (12 semanas. 6 títulos) 2011	74
4.27	Predicción IBEX 35. (12 semanas. 6 títulos). 2011	74
4.28	Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 4 títulos) 2011	75
4.29	Predicción IBEX 35. (20 semanas. 4 títulos). 2011	75
4.30	Predicciones títulos cartera réplica. (20 semanas. 6 títulos) 2011	75
4.31	Predicción IBEX 35. (20 semanas. 6 títulos). 2011	76
4.32	Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35. (12 semanas). 2011	76
4.33	Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (12 semanas). 2011	76
4.34	Estimaciones del precio de la acción para las 10 primeras compañías que componen el IBEX 35 (20 semanas). 2011	77
4.35	Predicción del IBEX 35 utilizando 10 primeras empresas del IBEX 35 (20 semanas). 2011	77
4.36	Resumen Predicción del IBEX 35. 2011	77
4.37	Estimaciones semanas conocidas	78
4.38	Medidas de bondad de ajuste	80
4.39	Estimaciones semanas conocidas (2011)	81
4.40	Medidas de bondad de ajuste (predicción 2011)	82
4.41	Cp de Mallow.	83
4.42	Conclusiones en la predicción del IBEX 35	86

4.43	Variabilidad de los datos	88
------	---------------------------	----

---

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

---

4.1	Rentabilidad cartera réplica y Rentabilidad IBEX 35 (5 títulos)	61
4.2	Rentabilidad cartera réplica y Rentabilidad IBEX 35 (8 títulos)	62
4.3	Gráfico de comparación de BBVA	79
4.4	Gráfico de comparación de BBVA (predicción 2011)	84

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.1	Algunas trayectorias muestrales del Movimiento Browniano	28
3.2	Capitalización a interés compuesto continuo	29
3.3	Trayectorias muestrales del Movimiento Browniano Geométrico	38
4.1	Introducción parámetros Solver	60

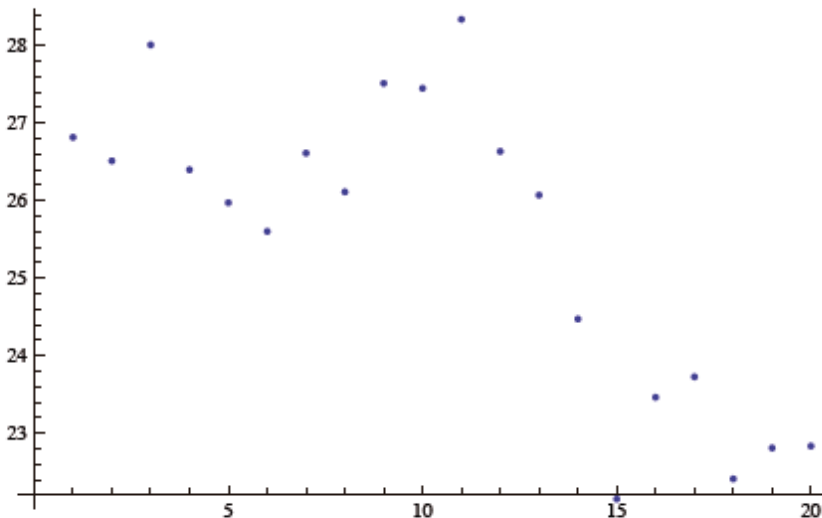


## **ANEXOS**

---

## Ejemplo de aplicación: Empresa del IBEX 35 (ACS)

```
zz = Import[NotebookDirectory[] <> "datos_8_componentes_principales.xlsx"];  
xx1 = zz[[1]] // Flatten;  
n = Length[xx1];  
yy1 = Table[{i, xx1[[i]]}, {i, n}];  
ListPlot[yy1]
```



```
Table[yy1[[k, 2]], {k, 1, 12}] (*12 cotizaciones*)
```

```
{26.816, 26.512, 28.008, 26.398, 25.972,  
 25.602, 26.612, 26.112, 27.512, 27.448, 28.338, 26.634}
```

```
incrt = 1 / 52; (*datos semanales*)
```

```
f1[s_] :=  $\mu_1 * s$ 
```

```
g1[s_] :=  $\sigma_1 * s$ 
```

```
 $\mu_{1k}[1] = yy1[[1, 2]];$ 
```

```
h = 13;
```

```
For[k = 1, k < h - 1, k++,  $\mu_{1k}[k + 1] = yy1[[k, 2]] + f1[yy1[[k, 2]]] * incrt$ ]
```

```
 $\sigma_{1k}[1] = 0;$ 
```

```
For[k = 1, k < h - 1, k++,  $\sigma_{1k}[k + 1] = g1[yy1[[k, 2]]] * \sqrt{incrt}$ ]
```

$$p_{1k}[k_] := \frac{1}{\sqrt{2 * \pi * \sigma_{1k}[k]^2}} * e^{-\frac{(yy1[[k, 2]] - \mu_{1k}[k])^2}{2 * \sigma_{1k}[k]^2}}$$

```
FMV1[ $\mu_1$ _,  $\sigma_1$ _] := -  $\sum_{k=2}^{h-1} \text{Log}[p_{1k}[k]]$  // FullSimplify
```

```
NMinimize[{Hold[FMV1[ $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ]],  $\sigma_1 > 0$ }, { $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ },  
  Method -> "DifferentialEvolution", MaxIterations -> 1000]
```

```
{16.0448, { $\mu_1 \rightarrow 0.00693785$ ,  $\sigma_1 \rightarrow 0.279594$ }}
```

```
NMinimize[{Hold[FMV1[ $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ]],  $\sigma_1 > 0$ }, { $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ }]
```

```
{16.0448, { $\mu_1 \rightarrow 0.00693817$ ,  $\sigma_1 \rightarrow 0.279595$ }}
```



Revisión		Inclusiones			Exclusiones		
Nº	fecha						
46	15/12/2003				DRC		
47	02/01/2004	BTO	PRS		TRR		
48	01/07/2004	SAB			SYV		
49	03/01/2005	SYV	TL5		REE	ZEL	
50	28/06/2005				AMS		
51	01/07/2005	REE	CIN		BTO	NHH	
52	08/07/2005	A3TV					
53	02/01/2006	NHH			MAP		
54	03/07/2006	FAD			NHH		
55	06/07/2006				LOR		
56	25/07/2006	MAP			TEM	TPI	
57	01/08/2006	BTO					
58	17/08/2006	NHH					
59	02/01/2007	AGS			PRS		
60	09/03/2007				FAD		
61	21/03/2007	CAR					
62	10/05/2007	COL			CAR		
63	02/07/2007	BME			MVC		
64	02/01/2008	GRF	ABG		A3TV	NHH	
65	04/02/2008	IBR	CRI		ALT	AGS	
66	13/04/2008	TRE			COL		
67	12/05/2008				SGC		
68	01/07/2008	OHL					
69	02/01/2009			—			—
70	15/04/2009				UNF		
71	05/05/2009	MTS					
72	01/07/2009			—			—
73	07/12/2009				CIN		
74	04/01/2010	EVA					
75	01/07/2010			—			—
76	26/07/2010	EBRO			EVA		
77	03/01/2011	AMS			BTO		
78	21/01/2011				IBLA		
79	01/04/2011	IAG					
80	01/07/2011	CABK			CRI		
81	01/07/2011			—			—
82	11/07/2011				IBR		
83	03/10/2011	BKIA					
84	02/01/2012	DIA					
85	02/05/2012				EBRO		
86	02/07/2012			—			—

Clave color:

Revisión extraordinaria

Cambio de código



# Año : 2012

Enero							Febrero							Marzo							Abril							
L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	
						1			1	2	3	4	5				1	2	3	4							1	
2	3	4	5	6	7	8	6	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	9	10	11	2	3	4	5	6	7	8	
9	10	11	12	13	14	15	13	14	15	16	17	18	19	12	13	14	15	16	17	18	9	10	11	12	13	14	15	
16	17	18	19	20	21	22	20	21	22	23	24	25	26	19	20	21	22	23	24	25	16	17	18	19	20	21	22	
23	24	25	26	27	28	29	27	28	29	26	27	28	29	30	23	24	25	26	27	28	29	23	24	25	26	27	28	29
30	31																				30							

Mayo							Junio							Julio							Agosto												
L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D						
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10	2	3	4	5	6	7	8	6	7	8	9	10	11	12						
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	9	10	11	12	13	14	15	13	14	15	16	17	18	19						
21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24	16	17	18	19	20	21	22	20	21	22	23	24	25	26						
28	29	30	31	25	26	27	28	29	30	23	24	25	26	27	28	29	27	28	29	30	31	27	28	29	30	31							

Septiembre							Octubre							Noviembre							Diciembre							
L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	L	M	Mi	J	V	S	D	
3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	5	6	7	8	9	10	11	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	8	9	10	11	12	13	14	12	13	14	15	16	17	18	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	15	16	17	18	19	20	21	19	20	21	22	23	24	25	17	18	19	20	21	22	23	
24	25	26	27	28	29	30	22	23	24	25	26	27	28	26	27	28	29	30	24	25	26	27	28	29	30			
							29	30	31						31													

Los mercados de valores en España funcionan durante todo el año de lunes a viernes, menos 5 días que se consideran inhábiles que son los siguientes:

viernes, 06 de abril de 2012	Viernes Santos
lunes, 09 de abril de 2012	Lunes de pascua
martes, 01 de mayo de 2012	Fiesta del trabajo
martes, 25 de diciembre de 2012	Navidad
miércoles, 26 de diciembre de 2012	San Estebán

**Total: 256 días hábiles**

Los días 24 y 31 de diciembre funcionarán hasta las 14 horas