

Ejercicios sobre el Método de los Elementos Finitos

Josep Casanova Colon



Ejercicios sobre el Método de los Elementos Finitos, de Josep Casanova Colon, se distribuye bajo una licencia [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Índice

Índice	III
Introducción.....	VII
Capítulo 1: métodos de residuos ponderados.....	1
Síntesis de la teoría y ejercicio nº 1	3
Método de los residuos ponderados	3
1) Introducción	3
2) Interpolación de la solución	3
3) Residuos.....	4
4) Sistema de ecuaciones de residuos ponderados.....	4
5) Resolución del ejemplo planteado	5
6) Expresión alternativa de las ecuaciones de residuos ponderados	7
7) Resolución del ejemplo planteado usando esta última formulación	8
Método de Petrov-Galerkin	10
1) Descripción	10
2) Resolución del ejemplo planteado	10
3) Expresión alternativa de las ecuaciones	13
4) Equivalencia de la última relación con el teorema de los trabajos virtuales.....	14
5) Resolución del ejemplo usando la formulación alternativa del método.....	16
Método de Galerkin	17
1) Descripción	17
2) Aplicación al ejemplo planteado en el primer apartado	18
3) Formulación alternativa del método de Galerkin.....	19
4) Resolución del ejemplo partiendo de la última formulación expuesta	20
Ejercicio nº 2	22
Introducción	23
1) Condiciones que deben satisfacer las funciones de aproximación y las de ponderación	23
2) Elección de los coeficientes de peso de las CCN en el método de Petrov-Galerkin	28
3) Formulación alternativa del método de Petrov-Galerkin	30
Resolución	36
1) Comprobar que la función propuesta es adecuada para obtener la solución aproximada por el método de Bubnov-Galerkin.....	36
2) Calcular los coeficientes A_1 , A_2 y A_3 que determinen la mejor aproximación a la solución (planteamiento: MRP con las funciones de interpolación y de peso que exige el MBG).....	38

3) Calcular los coeficientes A_1 , A_2 y A_3 que determinen la mejor aproximación a la solución (planteamiento que iguala los órdenes de derivación de las funciones de interpolación y de ponderación)	40
4) Calcular los coeficientes A_1 y A_2 que determinen la mejor aproximación a la solución con sólo los dos primeros sumandos de la inicialmente definida, usando el mismo planteamiento del punto anterior	42
5) Comparación de los resultados de los apartados 2 y 3 (exactos) con los del apartado 4 (aproximados)	43
Ejercicio nº 3	45
Resolución	45
1) Identificación de las ecuaciones	45
2) Interpolación de los desplazamientos	45
3) Exigencias del método de Bubnov-Galerkin	45
4) Residuos.....	46
5) Ecuaciones de residuos ponderados	46
6) Sistema de ecuaciones.....	46
Ejercicio nº 4	47
Resolución	48
1) Particularización de las ecuaciones al problema concreto.....	48
2) Aplicabilidad del método de Galerkin	48
3) Determinación de la aproximación.....	49
Referencias.....	51
Capítulo 2: Método de los Elementos Finitos: procedimientos básicos.....	52
Ejercicio nº 1	54
Resolución	54
1) Interpolación de los desplazamientos	54
2) Determinación de las deformaciones aproximadas	54
3) Matriz constitutiva.....	55
4) Matriz de rigidez	55
Ejercicio nº 2	59
Resolución	59
1) Tratamiento de las fuerzas de volumen	59
2) Tratamiento de las fuerzas de superficie en el lado 2-3.....	60
3) Valor final de las fuerzas nodales	61
Ejercicio nº 3	62
Resolución	63
1) Cálculo de las tensiones: resultados auxiliares.....	63

2) Cálculo de las tensiones en los nodos	64
Ejercicio nº 4	67
Resolución	68
Ejercicio nº 5	69
Resolución	69
1) Fuerzas nodales originadas por las fuerzas en el interior del dominio.....	69
2) Fuerzas nodales originadas por las fuerzas en el contorno.....	72
Capítulo 3. Método de los Elementos Finitos: elementos isoparamétricos y condensación estática	74
Ejercicio nº 1	76
Resolución	77
1) Interpolación de la geometría	77
2) Determinación de la matriz [B].....	78
3) Expresión genérica de la matriz de rigidez [K].....	80
4) Elemento (2,5) de la matriz de rigidez.....	81
Ejercicio nº 2	84
Resolución	84
1) Planteamiento y operaciones previas	84
2) Evaluación del integrando	85
3) Integrales.....	85
4) Fuerzas nodales	86
Ejercicio nº 3	87
Resolución	89
1) Tensiones en los nodos.....	89
2) Tensiones en los puntos de Gauss y extrapolación a los nodos	93
3) Matriz de rigidez.....	95
Ejercicio nº 4	97
Resolución	97
Capítulo 4: Flexión de vigas por el M.E.F.	98
Ejercicio nº 1	100
Resolución	102
1) Apartado 1, modelo de 3 elementos.....	102
2) Apartado 2, modelo de N elementos	109
3) Apartado 3, análisis de los resultados para varias relaciones canto/luz y varias divisiones en elementos finitos.....	113

4) Nota sobre el factor de cortante:	116
Ejercicio nº 2	119
Resolución	119
1) Obtención de la matriz de rigidez.....	119
2) Previsión del bloqueo	124
3) Condensación estática.....	126
4) Comportamiento del elemento	128
Anexo 1: Determinación de las funciones de forma	129
Anexo 2: Aclaración sobre el proceso de condensación estática.....	130
Capítulo 5: Características de los elementos finitos de placa explicadas con ejemplos	
1D	132
Ejercicio nº 1	134
Resolución	134
1) Interpolación de los desplazamientos	134
2) Determinación de las deformaciones aproximadas	134
3) Relación constitutiva	135
4) Obtención de la matriz de rigidez.....	135
5) Previsión de la posibilidad de bloqueo.....	136
6) Condensación estática.....	138
Ejercicio nº 2	141
Resolución	141
1) Cálculos previos.....	141
2) Interpolación de las distorsiones angulares. Determinación de la matriz \mathbf{B}_Q modificada..	143
3) Cálculo de la parte de la matriz de rigidez debida al cortante	143
4) Determinación de la matriz de rigidez y condensación estática	144
Ejercicio nº 3	147
Resolución	147
1) Modificación de las funciones de forma.....	147
2) Determinación de la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(\xi)$	150
3) Matriz de rigidez	150
Ejercicio 4	152
Resolución	152
1) Considerando la matriz de rigidez obtenida en el ejercicio 1.....	152
2) Considerando la matriz de rigidez obtenida en el ejercicio 2.....	153
3) Considerando la matriz de rigidez obtenida en el ejercicio 3.....	153

Introducción

Próxima ya mi jubilación, me he propuesto recopilar y ordenar la colección de ejercicios sobre el Método de los Elementos Finitos que se han planteado y resuelto en los últimos cursos en las clases de Mecánica Computacional de Sólidos, en el Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universitat Politècnica de València. Este texto es el resultado de tal propósito.

Los ejercicios se agrupan en cinco capítulos, correspondientes a las cinco *prácticas de aula* –el ampuloso nombre que hoy se da a las humildes clases de problemas– de la asignatura, que tratan sobre los siguientes temas:

- Capítulo 1. Métodos de los residuos ponderados, de Petrov-Galerkin y de Bubnov-Galerkin, que constituyen la base teórica del método de los elementos finitos. Se aplican sobre diferentes problemas de extensión, flexión y torsión de vigas, y los primeros ejercicios se aprovechan para exponer los aspectos principales de la teoría a través de un ejemplo concreto.
- Capítulo 2. Método de los Elementos Finitos: procedimientos básicos. En él se aborda la obtención de la matriz de rigidez y las fuerzas nodales de un elemento finito regular, la determinación de las tensiones en él una vez conocidos los parámetros nodales, el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura completa y la imposición en ella de las condiciones de contorno cinemáticas. Todo ello se desarrolla sobre ejemplos de Elasticidad Bidimensional.
- Capítulo 3. Método de los Elementos Finitos: elementos isoparamétricos y condensación estática. De nuevo se aborda la obtención de la matriz de rigidez, las fuerzas nodales y la determinación de las tensiones una vez conocidos los parámetros nodales, pero ahora en un elemento finito de elasticidad bidimensional que ha sufrido una distorsión isoparamétrica. En la parte de determinación de tensiones se expone la *suavización* de estas, esto es, el proceso que mejora la precisión de estos resultados extrapolando los valores en los nodos a partir de los valores que adoptan en los puntos de colocación óptima y el posterior promedio de los valores determinados en el mismo nodo pero en los diferentes elementos finitos que confluyen en él. Así mismo, se presenta un ejemplo de eliminación de un grado de libertad interno por condensación estática.
- Capítulo 4. Flexión de vigas por el M.E.F. Se plantea el problema de ensamblar el sistema de ecuaciones de rigidez de una ménsula cargada exclusivamente en la punta usando algunos de los elementos finitos desarrollados en las clases de teoría. Primero se resuelve el problema a mano, discretizando la ménsula en solo tres elementos; a continuación se elabora un programa, mediante una *macro* de *Excel*, que monta y resuelve el sistema de ecuaciones para diferentes discretizaciones de la ménsula y, por último, se comparan los resultados obtenidos usando distintas discretizaciones para cada uno de los diferentes elementos finitos anteriormente mencionados. Así mismo, en un segundo ejercicio, se desarrolla un elemento finito de viga de Timoshenko, se comprueba su susceptibilidad al

bloqueo por cortante y se presenta un nuevo ejemplo de condensación estática para eliminar un grado de libertad interno.

- Capítulo 5. Características de los elementos finitos de placa explicadas con ejemplos de viga. En él se trata de explicar qué son los elementos de deformación por cortante impuesta y los elementos discretos de Kirchhoff, propios de la teoría de placas, a partir de un ejemplo mucho más sencillo, un elemento de viga de Timoshenko con interpolación cuadrática de flecha y giro. Consta de cuatro ejercicios, el primero dedicado a generar el elementos de viga de Timoshenko, el segundo a aplicarle el procedimiento de deformación por cortante impuesta, el tercero a transformarlo en un elemento *discreto de Navier*, si puede llamarse así al equivalente al elemento discreto de Kirchhoff en una sola dimensión, y el cuarto a comprobar los resultados que cabe esperar de cada uno de ellos, operando de forma similar a como se hizo en la última parte del primer ejercicio del capítulo 4.

Las explicaciones de la mayoría de estos ejercicios se grabaron en vídeo durante el confinamiento del año 2020; posteriormente se ha completado la colección. Tales grabaciones están disponibles en <https://media.upv.es/#/portal/channel/7a080340-c2d9-11ec-8b39-93ba168b6143>.

Me he encargado la *Mecánica Computacional de Sólidos* desde que se empezó a impartir, y prácticamente durante todo ese tiempo he compartido la asignatura con el profesor D. Carlos R. Sánchez Carratalá, que ha revisado la mayoría de los ejercicios que presento y ha colaborado en la resolución de alguno. Desde aquí quiero expresarle mi sincero agradecimiento. Si quedan erratas o errores, son responsabilidad mía, pero que su número sea muy reducido es gracias a él.

Valencia, 14 de julio de 2022

J. Casanova

Capítulo 1:

métodos de residuos ponderados

Este capítulo incluye cuatro «ejercicios». El primero de ellos no es propiamente un ejercicio, sino las notas preparadas para exponer los métodos de los Residuos Ponderados, de Petrov-Galerkin y de Galerkin (o Bubnov-Galerkin) a través de un ejemplo concreto (el de una barra elástica sometida a axil, gobernado por una ecuación diferencial ordinaria –e.d.o. en lo sucesivo– de segundo grado), incluyendo su resolución por los diferentes procedimientos. Este es el modo en el que se han expuesto esta materia en Mecánica Computacional de Sólidos en los últimos cursos, aunque en ocasiones el que se ha llamado *planteamiento alternativo* se ha tratado someramente o incluso se ha omitido. Se ha llamado así a la formulación basada en igualar el orden de derivación de las funciones de interpolación y las funciones de peso integrando por partes, la cual, al menos en el caso de Bubnov-Galerkin, es la más habitual.

El segundo ejercicio se ha facilitado como material de ampliación el último curso. Se ha desarrollado como aclaración sobre el modo de proceder y las peculiaridades de los problemas en los que la ecuación diferencial es de orden superior a dos, ya que después de varios años exponiendo la materia mediante el ejemplo de orden dos tratado en el primer ejercicio, observamos que algunas características de los problemas de e.d.o. de orden superior a dos no habían quedado suficientemente claras. Incluye una extensa introducción teórica para aclarar algunos puntos que solían plantear dudas, mostrar las particularidades de la elección de las funciones de peso en el método de Bubnov-Galerkin cuando el orden de la ecuación diferencial es superior a dos, y para insistir, una vez más, en el *planteamiento alternativo* y su equivalencia con el teorema de los trabajos virtuales.

Los dos últimos ejercicios son casos sencillos, en los que sólo se pretende que el estudiante se fije en las condiciones que deben satisfacer tanto las funciones de interpolación como las de peso, defina los residuos y los identifique como funciones de error y, finalmente, observe que estos procedimientos se basan en imponer que ciertas sumas ponderadas de los errores se anulen. Esto último debe hacerle pensar que es razonable suponer que, al aumentar el número de términos de la función de prueba y con él el de sumas ponderadas cuya nulidad se impone, debe mejorar la precisión del resultado.

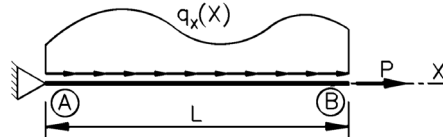
La explicación de los ejercicios 2 y 4 también puede encontrarse, grabada en vídeo, en <https://media.upv.es/#/portal/channel/c9964e20-d220-11ec-b3e8-85c626fc9bb5>. Allí figuran como ejercicios 1 y 2, respectivamente.

Síntesis de la teoría y ejercicio nº 1

Método de los residuos ponderados

1) Introducción

Es un procedimiento que permite obtener soluciones aproximadas de una ecuación diferencial ordinaria, una ecuación diferencial en derivadas parciales o un sistema de unas u otras. Vamos a exponerlo a partir del siguiente ejemplo:



La figura representa, esquemáticamente, el problema elástico de una barra recta, de sección constante, sometida a axil. Se sabe que está gobernado por la ecuación diferencial

$$EA \frac{d^2 u(X)}{dX^2} = -q_x(X)$$

en la que EA es la rigidez a axil de la barra, a efectos de este ejercicio una constante, $q_x(X)$ es una fuerza paralela a la barra, repartida por unidad de longitud sobre ella, y la función incógnita $u=u(X)$ representa el desplazamiento del punto de abscisa X en la dirección de la barra, eje X del problema.

Las condiciones de contorno del problema se resumen en la tabla siguiente:

Punto	Abscisa	Condición	Tipo
A	$X=0$	$u _{X=0} = 0$	Esencial (cinemática)
B	$X=L$	$N = P \Leftrightarrow EA \frac{du}{dX} = P$	Natural (estática)

2) Interpolación de la solución

El primer paso del procedimiento es adoptar una expresión aproximada de la solución, expresada como combinación lineal de funciones conocidas multiplicadas por coeficientes que serán las incógnitas a determinar. En nuestro caso podría ser

$$u(X) \cong \hat{u}(X) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

donde se puede adoptar como funciones $\varphi_i(X)$ a las que forman cualquier familia de funciones de interpolación. Por ejemplo, podríamos adoptar una cualquiera de las siguientes expresiones

$$\hat{u}(X) = \sum_{i=0}^n A_i X^i = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i X^i$$

$$\hat{u}(X) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right)$$

$$\hat{u}(X) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right)$$

que, en esencia, son el resultado de truncar una serie de Taylor o una de Fourier de senos o de cosenos. También podríamos haber escogido aproximaciones basadas en los polinomios de Lagrange, de Legendre, de Chebyshev, de Hermite, de Laguerre...

Según Reddy (1984), las funciones de interpolación deben ser linealmente independientes y definir un conjunto completo, lo cual, de forma más coloquial, se puede expresar diciendo que las funciones de interpolación deben ser los primeros n elementos de una familia de funciones tal que, añadiendo más términos, permite mejorar la aproximación. Esto se consigue siempre adoptando como interpolación los primeros términos de una serie como las citadas más arriba.

3) Residuos

Naturalmente, al sustituir en ellas la solución aproximada adoptada, ni la ecuación de campo ni las condiciones de contorno se cumplen. Llamamos residuos a los errores en cada una de ellas.

Así, el residuo en la ecuación de campo resulta

$$R(X) = EA \frac{d^2 \hat{u}(X)}{dX^2} + q_X(X) = EA \sum_{i=1}^n A_i \frac{d^2 \varphi_i(X)}{dX^2} + q_X(X)$$

el asociado a la condición de contorno esencial (o cinemática) es

$$R_E = \hat{u}(0) - 0 = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(0)$$

y el asociado a la condición de contorno natural (o estática) es

$$R_N = EA \left. \frac{d\hat{u}(X)}{dX} \right|_{X=L} - P = EA \sum_{i=1}^n A_i \left. \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \right|_{X=L} - P$$

Nótese que, en todos los casos, el residuo podría haberse definido de signo contrario. A fin de cuentas, eso supone haber partido de las ecuaciones iniciales pasando todos los términos al primer miembro (es lo que hemos hecho) o al segundo (cambiarían los signos). Por ejemplo, la última relación podría haberse escrito como

$$R_N = P - EA \sum_{i=1}^n A_i \left. \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \right|_{X=L}$$

Ambas formulaciones son equivalentes y, en ocasiones, adoptar una definición u otra de alguno de los residuos puede conducir a ecuaciones más sencillas.

4) Sistema de ecuaciones de residuos ponderados

Para determinar los coeficientes incógnita de la aproximación adoptada el método de los residuos ponderados plantea un sistema de ecuaciones lineales cada una de las cuales se obtiene multiplicando los residuos por unas funciones de peso e integrando el resultado en todo el dominio. Por ejemplo, en nuestro caso tendríamos

$$\int_0^L \psi_i(X) R(X) dX + \bar{\psi}_i R_E + \bar{\bar{\psi}}_i R_N = 0$$

donde los pesos $\psi_i(X)$, $\bar{\psi}_i$ y $\bar{\bar{\psi}}_i$ son, respectivamente, una función y dos valores escalares que podemos elegir arbitrariamente. Escogiendo tantos conjuntos $\psi_i(X)$, $\bar{\psi}_i$ y $\bar{\bar{\psi}}_i$ como coeficientes se necesita determinar ($i=1,2,\dots,n$) se llega a un sistema lineal de ecuaciones que proporciona los valores de estas constantes.

Una posibilidad para elegir las funciones $\psi_i(X)$ es recurrir a alguna de las familias que se han mencionado al hablar de la solución aproximada. Las constantes $\bar{\psi}_i$ y $\bar{\bar{\psi}}_i$ se pueden elegir a partir de los términos de una sucesión.

5) Resolución del ejemplo planteado

Vamos a resolver el problema planteado al principio, por el método de los residuos ponderados, suponiendo que $q(X) = q_0 = \text{cte}$. Adoptaremos como solución aproximada

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=0}^3 A_j X^j = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3$$

y como pesos

$$\psi_i(X) = \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right) \quad ,, \quad \bar{\psi}_i = i \quad ,, \quad \bar{\bar{\psi}}_i = i^2$$

En casos bidimensionales o tridimensionales los pesos que afectan a las condiciones de contorno serían funciones, $\bar{\psi}_i(s)$ y $\bar{\bar{\psi}}_i(s)$, siendo s la longitud de arco sobre el contorno, en el caso 2D, o $\bar{\psi}_i(u, v)$ y $\bar{\bar{\psi}}_i(u, v)$, siendo u y v las coordenadas paramétricas de la superficie frontera del cuerpo, en el caso 3D.

Derivando en la primera expresión obtenemos las siguientes relaciones auxiliares:

$$\frac{d\hat{u}(X)}{dX} = A_1 + 2A_2 X + 3A_3 X^2$$

$$\frac{d^2\hat{u}(X)}{dX^2} = 2A_2 + 6A_3 X$$

y, a partir de ellas, los siguientes residuos

$$R(X) = EA \frac{d^2\hat{u}(X)}{dX^2} + q_X(X) = EA[2A_2 + 6A_3 X] + q_0 = 2EA A_2 + 6EA A_3 X + q_0$$

$$R_E = \hat{u}(0) - 0 = A_0$$

$$\begin{aligned} R_N &= EA \left. \frac{d\hat{u}(X)}{dX} \right|_{X=L} - P = EA[A_1 + 2A_2 X + 3A_3 X^2]_{X=L} - P \\ &= EA A_1 + 2EAL A_2 + 3EAL^2 A_3 - P \end{aligned}$$

Con todo ello, la expresión genérica de la ecuación de residuos ponderados resulta

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_i(X) R(X) dX + \bar{\psi}_i R_E + \bar{\bar{\psi}}_i R_N = \\ = \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right) [2EA A_2 + 6EA A_3 X + q_0] dX + \\ + i A_0 + i^2 [EA A_1 + 2EAL A_2 + 3EAL^2 A_3 - P] = 0 \end{aligned}$$

y, como

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right) dX = \frac{L}{i\pi} (1 - \cos(i\pi)) \\ \int_0^L X \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right) dX = \frac{L^2}{i^2 \pi^2} (\sin i\pi - i\pi \cos(i\pi)) \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones

i	Ecuación
1	$A_0 + EA A_1 + 2EAL \left(\frac{2}{\pi} + 1\right) A_2 + 3EAL^2 \left(\frac{2}{\pi} + 1\right) A_3 + \frac{2L}{\pi} q_0 - P = 0$
2	$2A_0 + 4EA A_1 + 8EAL A_2 + 3EAL^2 \left(-\frac{1}{\pi} + 4\right) A_3 - 4P = 0$
3	$3A_0 + 9EA A_1 + 2EAL \left(\frac{2}{3\pi} + 9\right) A_2 + 3EAL^2 \left(\frac{2}{3\pi} + 9\right) A_3 + \frac{2L}{3\pi} q_0 - 9P = 0$
4	$4A_0 + 16EA A_1 + 32EAL A_2 + 3EAL^2 \left(-\frac{1}{2\pi} + 16\right) A_3 - 16P = 0$

que se pueden reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 + \frac{2}{\pi} & 1 + \frac{2}{\pi} \\ 2 & 4 & 4 & 4 - \frac{1}{\pi} \\ 3 & 9 & 9 + \frac{2}{3\pi} & 9 + \frac{2}{3\pi} \\ 4 & 16 & 16 & 16 - \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ EA A_1 \\ 2EAL A_2 \\ 3EAL^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{q_0 L}{\pi} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} P$$

de donde

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ EA A_1 \\ 2EAL A_2 \\ 3EAL^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,1416 \\ -3,1416 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{q_0 L}{\pi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P$$

es decir

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_0 L}{EA} \\ -\frac{q_0}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución aproximada queda

$$\hat{u}(X) = \frac{q_0 L}{EA} X - \frac{q_0}{2EA} X^2 + \frac{P}{EA} X$$

que coincide con la solución exacta que se obtiene integrando la ecuación diferencial. Esto da idea de la potencia del procedimiento, aunque el hecho de haber alcanzado la solución exacta se debe a que la función de aproximación adoptada es capaz de representarla. Normalmente no conoceremos la estructura de la solución, la función de interpolación no incluirá términos que puedan representar exactamente dicha solución y el resultado será una aproximación a esta. La elección de las funciones de peso no parece tener tanta importancia, aunque quizás una opción desafortunada pueda impedir que, aún con la función de interpolación adecuada, se pueda llegar a la solución exacta; en el apartado dedicado al método de Petrov-Galerkin veremos algún ejemplo de esto.

De lo visto hasta aquí se deduce que, al margen de lo trabajosos que puedan resultar los cálculos, la mayor dificultad del procedimiento está en escoger funciones de interpolación adecuadas y funciones de peso que faciliten, en la medida de lo posible, los cálculos.

6) *Expresión alternativa de las ecuaciones de residuos ponderados*

Si sustituimos la aproximación a la solución del problema que habíamos adoptado

$$u(X) \cong \hat{u}(X) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

en la ecuación de residuos ponderados anterior

$$\int_0^L \psi_j(X) R(X) dX + \bar{\psi}_j R_E + \bar{\bar{\psi}}_j R_N = 0$$

y nos centramos en el problema de la barra a axil que estamos analizando, podemos reescribirla como

$$\int_0^L \psi_j(X) \left[EA \sum_{i=1}^n A_i \frac{d^2 \varphi_i(X)}{dX^2} + q_X(X) \right] dX + \bar{\psi}_j \left[\sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(0) - \bar{u} \right] + \bar{\bar{\psi}}_j \left[EA \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - P \right] = 0$$

donde, por mor de generalidad, se ha sustituido la condición de contorno $u(0) = 0$ por $u(0) = \bar{u}$.

Operando, la relación anterior se transforma en

$$EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \psi_j(X) \frac{d^2 \varphi_i(X)}{dX^2} dX \right] + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \bar{\psi}_j \left[\sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(0) - \bar{u} \right] + \bar{\bar{\psi}}_j \left[EA \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - P \right] = 0$$

Ahora, integrando por partes la primera de las integrales que aparecen se obtiene

$$\int_0^L \psi_j(X) \frac{d^2 \varphi_i(X)}{dX^2} dX = \dots \left[\begin{array}{l} u = \psi_j(X) \quad du = \frac{d\psi_j(X)}{dX} dX \\ dv = \frac{d^2 \varphi_i(X)}{dX^2} dX \quad v = \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \end{array} \right] \dots =$$

$$= \left[\psi_j(X) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \right]_0^L - \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX$$

que, sustituido en la expresión anterior conduce a

$$EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \left(\psi_j(L) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=0} - \psi_j(0) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right) \right] +$$

$$+ \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \bar{\psi}_j \left[\sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(0) - \bar{u} \right] + \bar{\bar{\psi}}_j \left[EA \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - P \right] = 0$$

En esta última expresión hemos reducido el orden de derivación de las funciones de interpolación a costa de aumentar el de las funciones de peso. De este modo se llega a una formulación débil en sentido estricto, menos exigente que la formulación fuerte en cuanto al orden de derivación de la función incógnita. Por lo demás, al menos en este caso concreto, no parece presentar grandes ventajas.

7) Resolución del ejemplo planteado usando esta última formulación¹

Vamos a resolver de nuevo el problema suponiendo que $q(X) = q_0 = \text{cte.}$ y adoptando la misma aproximación y las mismas funciones de peso del cálculo anterior

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=0}^3 A_j X^j = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 \quad \leftrightarrow \quad \varphi_i(X) = X^i$$

$$\psi_j(X) = \sin\left(\frac{j\pi X}{L}\right) \quad ,, \quad \bar{\psi}_j = j \quad ,, \quad \bar{\bar{\psi}}_j = j^2 \quad j = 1,2,3,4$$

En primer lugar, calcularemos las derivadas que aparecen en la última expresión del apartado anterior resultan

$$\frac{d\varphi_i(X)}{dX} = iX^{i-1} \quad ,, \quad \frac{d\psi_j(X)}{dX} = \frac{j\pi}{L} \cos\left(\frac{j\pi X}{L}\right)$$

Y, a continuación, sustituiremos todos estos valores en la mencionada expresión obteniendo

$$EA \sum_{i=0}^3 \left[A_i \left(\sin(j\pi) iL^{i-1} - \sin(0) \times 0 - \int_0^L \frac{ij\pi}{L} X^{i-1} \cos\left(\frac{j\pi X}{L}\right) dX \right) \right] +$$

$$+ \int_0^L \sin\left(\frac{j\pi X}{L}\right) q_0 dX + j [A_0 - 0] + j^2 \left[EA \sum_{i=0}^3 iL^{i-1} A_i - P \right] = 0 \quad j = 1,2,3,4$$

¹ Este apartado no tiene demasiado interés. Simplemente se comprobará que, operando con las mismas funciones de interpolación y de peso que en el apartado 5 se llega al mismo resultado y que el desarrollo matemático resulta más complejo.

es decir

$$EA \sum_{i=0}^3 \left[A_i \left(- \int_0^L \frac{ij\pi}{L} X^{i-1} \cos\left(\frac{j\pi X}{L}\right) dX \right) \right] + \int_0^L \sin\left(\frac{j\pi X}{L}\right) q_0 dX + j A_0 + j^2 [EA(A_1 + 2LA_2 + 3L^2A_3) - P] = 0 \quad j = 1,2,3,4$$

Pasamos a evaluar las integrales que aparecen en esta expresión. La que multiplica a la carga q_0 es

$$\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi X}{L}\right) dX = \frac{L}{j\pi} (1 - \cos(j\pi)) = \begin{cases} \frac{2L}{\pi} & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j = 2 \\ \frac{2L}{3\pi} & \text{si } j = 3 \\ 0 & \text{si } j = 4 \end{cases}$$

y las que aparecen afectando a los coeficientes A_0, A_1, \dots son

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \int_0^L 0 dX = 0 \\ i = 1 & \quad \int_0^L \frac{j\pi}{L} \cos\left(\frac{j\pi X}{L}\right) dX = \sin(j\pi) \\ i = 2 & \quad \int_0^L \frac{2j\pi}{L} X \cos\left(\frac{j\pi X}{L}\right) dX = \frac{2L[j\pi \sin(j\pi) + \cos(j\pi) - 1]}{j\pi} \\ i = 3 & \quad \int_0^L \frac{3j\pi}{L} X^2 \cos\left(\frac{j\pi X}{L}\right) dX = \frac{3L^2[2j\pi \cos(j\pi) + (j^2L^2 - 2) \sin(j\pi)]}{j^2\pi^2} \end{aligned}$$

que adoptan los siguientes valores

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	0	0	$-\frac{4L}{\pi}$	$-\frac{6L^2}{\pi}$
$j = 2$	0	0	0	$\frac{3L^2}{\pi}$
$j = 3$	0	0	$-\frac{4L}{3\pi}$	$-\frac{2L^2}{\pi}$
$j = 4$	0	0	0	$\frac{3L^2}{2\pi}$

Así pues, el sistema de ecuaciones resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 + \frac{2}{\pi} & 1 + \frac{2}{\pi} \\ 2 & 4 & 4 & 4 - \frac{1}{\pi} \\ 3 & 9 & 9 + \frac{2}{3\pi} & 9 + \frac{2}{3\pi} \\ 4 & 16 & 16 & 16 - \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ EA A_1 \\ 2EAL A_2 \\ 3EAL^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{q_0 L}{\pi} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} P$$

que es exactamente el mismo obtenido por el planteamiento anterior, por lo que es obvio que conduce al mismo resultado.

Como ya se había adelantado, esta formulación no parece presentar ventajas significativas respecto a la anterior; de hecho, en este caso han aparecido más integrales distintas que han resultado algo más complejas de evaluar. Las bondades de este planteamiento aparecerán en los métodos de Petrov-Galerkin y Bubnov-Galerkin.

Método de Petrov-Galerkin

1) Descripción

El método de Petrov-Galerkin es un caso particular del método de los residuos ponderados, que se caracteriza porque:

- 1) Se adopta una expresión de la solución aproximada que cumple las condiciones de contorno esenciales.
- 2) Las funciones de peso en la parte de la frontera donde las condiciones de contorno son naturales, $\bar{\psi}_l$, son la particularización a esa parte del contorno de las funciones de peso ψ_i adoptadas en el interior del dominio.

Como consecuencia de la primera condición no hay residuos esenciales R_E (son idénticamente nulos) y, por lo tanto, no aparecen funciones de peso $\bar{\psi}_l$.

Así, en un caso unidimensional la interpolación se escribiría como

$$u(X) \cong \hat{u}(X) = \varphi_0(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

donde $\varphi_0(X)$ es una función que cumple las condiciones de contorno esenciales y $\varphi_i(X)$ representa una familia de funciones que cumple las condiciones de contorno esenciales de manera homogénea, es decir, que valen 0 en los puntos donde las condiciones de contorno son esenciales.

En cuanto a las funciones de peso, adoptadas unas $\psi_i(X)$ a partir de alguna de las familias especificadas en el primer punto, $\bar{\psi}_{0,i} = \psi_i(0)$ si las condiciones de contorno en $X=0$ son naturales, $\bar{\psi}_{L,i} = \psi_i(L)$ si lo son en $X=L$.

A continuación, aplicaremos todo esto al mismo problema tratado en el apartado anterior.

2) Resolución del ejemplo planteado

De nuevo, consideraremos que $q(X) = q_0 = \text{cte}$. Ahora adoptaremos como solución aproximada

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^n A_j X^j = A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3$$

que cumple las condiciones de contorno esenciales, pues $\hat{u}(0) = 0$. Si escogiéramos las mismas funciones de peso del caso anterior, es decir

$$\psi_i(X) = \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right)$$

los pesos en $X = L$, donde las condiciones de contorno son naturales, deberían ser

$$\bar{\psi}_i = \psi_i(L) = \sin\left(\frac{i\pi L}{L}\right) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

que no permitirían resolver el problema pues no permitirían considerar el residuo R_N en las ecuaciones. Por ello, en su lugar escogeremos

$$\psi_i(X) = \sin\left(\frac{i\pi X}{2L}\right)$$

que determinan

$$\bar{\psi}_i = \psi_i(L) = \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i = 2 \\ -1 & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

Los residuos $R(X)$ y R_N adoptarán las mismas expresiones del caso anterior, y la expresión genérica de las ecuaciones resultará

$$\begin{aligned} & \int_0^L \psi_i(X) R(X) dX + \bar{\psi}_i R_N = \\ & = \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi X}{2L}\right) [2EA A_2 + 6EA A_3 X + q_0] dX + \\ & + \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) [EA A_1 + 2EAL A_2 + 3EAL^2 A_3 - P] = 0 \end{aligned}$$

Así pues, como

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi X}{2L}\right) dX &= \frac{4L}{i\pi} \sin^2\left(\frac{i\pi}{4}\right) \\ \int_0^L X \sin\left(\frac{i\pi X}{2L}\right) dX &= \frac{2L^2}{i^2\pi^2} \left(i\pi \cos\left(\frac{i\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

se llega a las siguientes ecuaciones

i	Ecuación
1	$EA A_1 + 2EAL \left(\frac{2}{\pi} + 1\right) A_2 + 3EAL^2 \left(\frac{8}{\pi^2} + 1\right) A_3 + \frac{2L}{\pi} q_0 - P = 0$
2	$2EAL \left(\frac{2}{\pi}\right) A_2 + 3EAL^2 \left(\frac{2}{\pi^2}\right) A_3 + \frac{2L}{\pi} q_0 = 0$
3	$-EA A_1 + 2EAL \left(\frac{2}{3\pi} - 1\right) A_2 + 3EAL^2 \left(-\frac{8}{9\pi^2} - 1\right) A_3 + \frac{2L}{3\pi} q_0 + P = 0$

que se pueden reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\pi} + 1 & 1 + \frac{8}{\pi^2} \\ 0 & \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi^2} \\ -1 & \frac{2}{3\pi} - 1 & -\left(\frac{8}{9\pi^2} + 1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EA A_1 \\ 2EAL A_2 \\ 3EAL^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \frac{2q_0L}{\pi} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} P$$

de donde

$$\begin{pmatrix} EA A_1 \\ 2EAL A_2 \\ 3EAL^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5708 \\ -1,5708 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{2q_0L}{\pi} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P$$

es decir

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_0L}{EA} \\ \frac{q_0}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución aproximada queda

$$\hat{u}(X) = \frac{q_0L}{EA} X - \frac{q_0}{2EA} X^2 + \frac{P}{EA} X$$

que, de nuevo, coincide con la solución exacta que se obtiene integrando la ecuación diferencial.

Este ejemplo muestra como **una elección equivocada de las funciones de peso puede impedir la resolución del problema**. Ya hemos visto que

$$\psi_i(X) = \sin\left(\frac{i\pi X}{L}\right) \quad \text{y} \quad \bar{\bar{\psi}}_i = \psi_i(L) = \sin\left(\frac{i\pi L}{L}\right) = 0$$

no permite resolverlo porque elimina la condición de contorno natural en $X=L$ de las ecuaciones. La elección de

$$\psi_i(X) = \cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right) \quad \text{y} \quad \bar{\bar{\psi}}_i = \psi_i(L) = \cos\left(\frac{i\pi L}{L}\right) = (-1)^i$$

tampoco lo permite, porque entonces la ecuación genérica queda

$$\begin{aligned} & \int_0^L \psi_i(X) R(X) dX + \bar{\bar{\psi}}_i R_N = \\ & = \int_0^L \cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right) [2EA A_2 + 6EA A_3 X + q_0] dX + \\ & \quad + (-1)^i [EA A_1 + 2EAL A_2 + 3EAL^2 A_3 - P] = 0 \end{aligned}$$

y como

$$\int_0^L \cos\left(\frac{i\pi X}{L}\right) dX = \frac{L}{i\pi} \sin(i\pi) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

desaparecen los términos en q_0 de las ecuaciones.

3) Expresión alternativa de las ecuaciones

Como en el caso general de residuos ponderados, mediante la integración por partes se puede llegar a unas ecuaciones equivalentes a las anteriores pero en la que el orden de derivación de las funciones de interpolación es menor que en la formulación fuerte, a cambio de exigir mayor derivabilidad a las funciones de peso. Para obtenerlas podemos partir de la expresión hallada en el caso general de residuos ponderados, adaptada a la escritura de la interpolación con el formato

$$u(X) \cong \hat{u}(X) = \varphi_0(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

que hemos adoptado. Es inmediato deducirla de la anterior y resulta

$$\begin{aligned} & EA \left[\left(\psi_j(L) \frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=0} - \psi_j(0) \frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX \right) \right] + \\ & + EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \left(\psi_j(L) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=0} - \psi_j(0) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right) \right] + \\ & + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \bar{\psi}_j \left[\varphi_0(0) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(0) - \bar{u} \right] + \\ & + \bar{\bar{\psi}}_j \left[EA \left(\frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=L} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - P \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Imponemos ahora las condiciones del método de Petrov-Galerkin, es decir:

- Que la función $\varphi_0(X)$ cumple las condiciones de contorno esenciales y las funciones $\varphi_i(X)$ las cumplen de forma homogénea. En el problema que hemos tomado como ejemplo esto significa que las funciones de interpolación son tales que

$$\varphi_0(0) = \bar{u} \quad ,, \quad \varphi_i(0) = 0 \quad \forall i$$

- Que las funciones de peso en la parte del contorno donde hay c.c. naturales coinciden con la particularización a esos puntos de las funciones de peso en el interior del dominio. En el caso que estamos desarrollando

$$\bar{\bar{\psi}}_j = \psi_j(L)$$

Además, recordando lo que ya se expuso al plantear el método de los residuos ponderados respecto a la equivalencia entre escogerlos pasando todos los términos al primer o al segundo miembro, vamos a reescribir el correspondiente a la condición de contorno natural como $R_N = P - N(L)$ en lugar de mantener la expresión $R_N = N(L) - P$ considerada has ahora. Esto conduce a que el último término de la relación anterior, en adelante, se escribirá

$$\bar{\psi}_j \left[P - EA \left(\frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} \right) \right]$$

Sustituyendo todo esto en la expresión de partida obtenemos

$$\begin{aligned} & EA \left[\left(\psi_j(L) \frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=0} - \psi_j(0) \frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX \right) \right] + \\ & + EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \left(\psi_j(L) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=0} - \psi_j(0) \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right) \right] + \\ & + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \psi_j(L) \left[P - EA \left(\frac{d\varphi_0(X)}{dX} \Big|_{X=L} - \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \Big|_{X=L} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Si, además, imponemos como condición adicional a las funciones de ponderación que satisfagan las condiciones de contorno esenciales de forma homogénea, esto es, en nuestro caso

$$\psi_j(0) = 0 \quad \forall j$$

la ecuación queda

$$\begin{aligned} & -EA \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX - EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right] + \\ & + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \psi_j(L) P = 0 \end{aligned}$$

que es la expresión que estábamos buscando.

4) Equivalencia de la última relación con el teorema de los trabajos virtuales

Si sustituimos la aproximación adoptada en la ecuación cinemática del problema de axil,

$$\varepsilon = \frac{du}{dX}$$

y este resultado en la ecuación constitutiva de dicho problema

$$N = EA\varepsilon$$

obtendremos

$$\hat{N}(X) = EA \left[\frac{d\varphi_0(X)}{dX} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \right]$$

Por otra parte, podemos definir un desplazamiento virtual cinemáticamente admisible como

$$\delta \hat{u}(X) = \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi_j(X)$$

donde δA_j es un conjunto de parámetros escalares totalmente arbitrario. Esto hace que la función así definida sea totalmente arbitraria excepto en lo relativo a su valor donde existen c.c. esenciales, donde valdrá 0 (las cumplirá de forma homogénea) porque hemos establecido que las funciones $\psi_j(X)$ lo hagan. Sustituyendo esta definición en las ecuaciones cinemáticas del problema obtenemos

$$\delta \hat{\varepsilon}(X) = \sum_{j=1}^n \delta A_j \frac{d\psi_j(X)}{dX}$$

Volvamos ahora a nuestro problema. Multipliquemos por δA_j la j -ésima ecuación y sumémoslas todas para obtener

$$\sum_{j=1}^n \delta A_j \left\{ -EA \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX - EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right] + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \psi_j(L) P \right\} = 0$$

Ahora, teniendo en cuenta que la integral de la suma es la suma de las integrales, agrupamos términos para obtener

$$- \int_0^L \sum_{j=1}^n \left[\delta A_j \frac{d\psi_j(X)}{dX} \right] \left[EA \left(\frac{d\varphi_0(X)}{dX} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{d\varphi_i(X)}{dX} \right) \right] dX + \int_0^L \sum_{j=1}^n [\delta A_j \psi_j(X)] q_X(X) dX + \left[\sum_{j=1}^n \delta A_j \psi_j(L) \right] P = 0$$

Por último, sustituyendo en esta expresión los resultados establecidos al principio del apartado, se transforma en

$$- \int_0^L \sum_{j=1}^n \delta \hat{\varepsilon}(X) \hat{N}(X) dX + \int_0^L \sum_{j=1}^n \delta \hat{u}(X) q_X(X) dX + \delta \hat{u}(L) P = 0 \quad \forall \delta A_j \quad j = 1, 2 \dots n$$

que indica que el trabajo virtual de las fuerzas internas (primera integral) iguala al trabajo virtual de las fuerzas exteriores (segundo y tercer términos) para cualquier desplazamiento virtual cinemáticamente admisible (ya se ha comentado esta condición). Así pues, hemos demostrado que la segunda formulación descrita del método de Petrov-Galerkin es equivalente al teorema de los trabajos virtuales. Esto explica porqué, a lo largo del curso, se recurrirá al teorema de los trabajos virtuales como punto de partida para formular el método de los elementos finitos como un caso de aplicación de la formulación de Bubnov-Galerkin, que se verá más adelante, a diferentes problemas de mecánica de sólidos deformables.

Aunque la equivalencia entre la formulación descrita y el teorema de los trabajos virtuales se ha justificado para el caso particular de la barra sometida a axil, se cumple en cualquier problema de mecánica de sólidos deformables.

5) *Resolución del ejemplo usando la formulación alternativa del método*

De nuevo, consideraremos $q(X) = q_0 = \text{cte.}$ y adoptaremos la misma solución aproximada y las mismas funciones de peso que en el apartado 2, es decir

$$\hat{u}(X) = \sum_{i=1}^3 A_i X^i = A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 \quad \rightarrow \quad \varphi_0(X) \equiv 0 \quad ,, \quad \varphi_i(X) \equiv X^i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\psi_j(X) = \sin\left(\frac{j\pi X}{2L}\right)$$

$$\bar{\psi}_j = \psi_j(L) = \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i = 2 \\ -1 & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

Ya habíamos comprobado que satisfacían las condiciones exigibles en el primer planteamiento del método de Petrov-Galerkin; en la segunda formulación les hemos añadido la exigencia de que las funciones de peso satisfagan las condiciones de contorno esenciales de forma homogénea. Como

$$\psi_j(0) = \sin(0) = 0 \quad \forall j$$

lo hacen.

Sustituyendo estas funciones en la última expresión del apartado 3,

$$\begin{aligned} -EA \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX - EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right] + \\ + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \psi_j(L) P = 0 \quad j = 1, 2 \dots n \end{aligned}$$

obtenemos

$$-EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{ij\pi}{2L} \cos \frac{j\pi X}{2L} X^{i-1} dX \right] + \int_0^L \sin \frac{j\pi X}{2L} q_0 dX - \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) P = 0 \quad j = 1, 2 \dots n$$

Las integrales a evaluar son

$$\int_0^L \sin \frac{j\pi X}{2L} dX = -\frac{2L}{j\pi} \left[\cos \frac{j\pi X}{2L} \right]_0^L = \begin{cases} \frac{2L}{\pi} & \text{si } j = 1 \\ \frac{2L}{\pi} & \text{si } j = 2 \\ \frac{2L}{3\pi} & \text{si } j = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^L \frac{ij\pi}{2L} \cos \frac{j\pi X}{2L} X^{i-1} dX = \begin{cases} \sin \frac{j\pi}{2} & \text{si } i = 1 \\ \frac{2L \left(-2 + 2 \cos \frac{j\pi}{2} + j\pi \sin \frac{j\pi}{2} \right)}{j\pi} & \text{si } i = 2 \\ \frac{3L^2 \left(4j\pi \cos \frac{j\pi}{2} + (-8 + j^2\pi^2)j\pi \sin \frac{j\pi}{2} \right)}{(j\pi)^2} & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

Estas últimas adoptan los siguientes valores

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	1	$2L \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$	$3L^2 \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right)$
$j = 2$	0	$-\frac{4L}{\pi}$	$-\frac{6L^2}{\pi}$
$j = 3$	-1	$-2L \left(1 + \frac{2}{3\pi} \right)$	$3L^2 \left(\frac{8}{9\pi^2} - 1 \right)$

Así pues, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{\pi} - 1 & \frac{8}{\pi^2} - 1 \\ 0 & \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ 1 & 1 + \frac{2}{3\pi} & 1 - \frac{8}{9\pi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EA A_1 \\ 2EA L A_2 \\ 3EA L^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \frac{2q_0 L}{\pi} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} EA A_1 \\ 2EA L A_2 \\ 3EA L^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5708 \\ -1,5708 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{2q_0 L}{\pi} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P$$

que coincide con la calculada en el punto 2 usando el planteamiento inicial. Así pues, de nuevo llegamos a la solución exacta del problema.

Al simplificarse la expresión general de las ecuaciones, la evaluación de las mismas resulta algo más sencilla; sin embargo, la parte más laboriosa, que es la determinación de las integrales, no experimenta cambios sustanciales.

Método de Galerkin

1) Descripción

También se conoce como método de Bubnov-Galerkin. Es un caso particular del método de Petrov-Galerkin que se caracteriza porque se adopta como funciones de peso las mismas funciones de interpolación escogidas para aproximar la solución.

Como en el método de Petrov-Galerkin, en un problema unidimensional la interpolación podría escribirse como

$$u(X) \cong \hat{u}(X) = \varphi_0(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

donde $\varphi_0(X)$ es una función que cumple las condiciones de contorno esenciales y $\varphi_i(X)$ representa una familia de funciones que cumple las condiciones de contorno esenciales de manera homogénea, es decir, que valen 0 en los puntos donde las condiciones de contorno son esenciales. En tal caso, las funciones de peso en el interior del dominio serían

$$\psi_i(X) = \varphi_i(X)$$

y las correspondientes al contorno, suponiendo que las condiciones existentes son naturales, resultarían

$$\bar{\bar{\psi}}_{0,i} = \varphi_i(0) \quad ,, \quad \bar{\bar{\psi}}_{L,i} = \varphi_i(L)$$

2) Aplicación al ejemplo planteado en el primer apartado

De nuevo, consideraremos que $q(X) = q_0 = \text{cte}$. Como en el caso de Petrov-Galerkin, adaptaremos como solución aproximada la expresión

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^n A_j X^j = A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3$$

que satisface las condiciones de contorno esenciales, $\hat{u}(X=0) = 0$. De acuerdo con el método de Galerkin, los pesos deberán ser

$$\begin{aligned} \psi_1(X) &= X & ,, & \quad \bar{\bar{\psi}}_1 = L \\ \psi_2(X) &= X^2 & ,, & \quad \bar{\bar{\psi}}_2 = L^2 \\ \psi_3(X) &= X^3 & ,, & \quad \bar{\bar{\psi}}_3 = L^3 \end{aligned}$$

Como los residuos siguen siendo los mismos del primer apartado, la ecuación de residuos ponderados genérica será

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_i(X) R(X) dX + \bar{\bar{\psi}}_i R_N &= \\ = \int_0^L X^i [2EA A_2 + 6EA A_3 X + q_0] dX + \\ + L^i [EA A_1 + 2EAL A_2 + 3EAL^2 A_3 - P] &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\int_0^L X^i dX = \frac{L^{i+1}}{i+1}$$

se obtienen las siguientes ecuaciones

i	Ecuación
1	$EA L A_1 + 2EA L^2 \left(\frac{1}{2} + 1\right) A_2 + 3EA L^3 \left(\frac{2}{3} + 1\right) A_3 + \frac{L^2}{2} q_0 - PL = 0$
2	$EA L^2 A_1 + 2EA L^3 \left(\frac{1}{3} + 1\right) A_2 + 3EA L^4 \left(\frac{2}{4} + 1\right) A_3 + \frac{L^3}{3} q_0 - PL^2 = 0$
3	$EA L^3 A_1 + 2EA L^4 \left(\frac{1}{4} + 1\right) A_2 + 3EA L^5 \left(\frac{2}{5} + 1\right) A_3 + \frac{L^4}{4} q_0 - PL^3 = 0$

Este sistema se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EA A_1 \\ 2EA L A_2 \\ 3EA L^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/3 \\ -1/4 \end{pmatrix} q_0 L + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} P$$

de donde

$$\begin{pmatrix} EA A_1 \\ 2EA L A_2 \\ 3EA L^2 A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_0 L + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} P$$

es decir

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_0 L}{EA} \\ -\frac{q_0}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución aproximada queda

$$\hat{u}(X) = \frac{q_0 L}{EA} X - \frac{q_0}{2EA} X^2 + \frac{P}{EA} X$$

que, de nuevo, coincide con la solución exacta que se obtiene integrando la ecuación diferencial.

3) Formulación alternativa del método de Galerkin

Como en los casos anteriores, es posible plantear el método de modo que se reduzca el orden de derivación de las funciones de interpolación a costa de aumentar el de las funciones de peso. Para ello, simplemente partimos de la última expresión obtenida planteando el método de Petrov-Galerkin de este modo,

$$\begin{aligned} & -EA \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX - EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{d\psi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right] + \\ & + \int_0^L \psi_j(X) q_X(X) dX + \psi_j(L) P = 0 \end{aligned}$$

y sustituimos en ella la condición características del método de Galerkin

$$\psi_i(X) = \varphi_i(X)$$

Llegando a

$$-EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{d\varphi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right] +$$

$$-EA \int_0^L \frac{d\varphi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX + \int_0^L \varphi_j(X) q_X(X) dX + \varphi_j(L) P = 0 \quad j = 1, 2 \dots n$$

Hemos escrito esta relación de manera que la primera fila determina la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones a resolver y la segunda define el vector de términos independientes. Nótese en la primera de estas filas que el valor de cada coeficiente no varía si se intercambian los contadores i y j , lo cual significa que la mencionada matriz de coeficientes es **simétrica**. Esto supone una ventaja evidente cuando el sistema de ecuaciones es muy grande y se va a resolver usando un ordenador, porque existen algoritmos muy eficientes para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones minimizando la cantidad de memoria necesaria y el tiempo de cómputo. Por este motivo, el planteamiento del método de los elementos finitos se basa en una formulación de este tipo; en este curso, teniendo en cuenta la equivalencia de tal formulación con el teorema de los trabajos virtuales ya demostrada, se ha escogido partir de este último en el desarrollo de cada uno de los casos que se abordan.

4) Resolución del ejemplo partiendo de la última formulación expuesta

Como en el apartado 2 anterior, consideraremos que $q(X) = q_0 = \text{cte.}$ y adoptaremos la interpolación

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^n A_j X^j = A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 \quad \rightarrow \quad \varphi_0(X) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_i(X) = X^i$$

No necesitamos más funciones para evaluar la expresión de la j -ésima ecuación del sistema, que habíamos llegado a expresar como

$$-EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L \frac{d\varphi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_i(X)}{dX} dX \right] +$$

$$-EA \int_0^L \frac{d\varphi_j(X)}{dX} \frac{d\varphi_0(X)}{dX} dX + \int_0^L \varphi_j(X) q_X(X) dX + \varphi_j(L) P = 0$$

Sustituyendo en ella las funciones de interpolación se transforma en

$$-EA \sum_{i=1}^n \left[A_i \int_0^L ij X^{i-1} X^{j-1} dX \right] + \int_0^L X^j q_0 dX + L^j P = 0$$

donde sólo hay dos integrales (sencillas) a evaluar

$$\int_0^L ij X^{i+j-2} dX = \left[\frac{ij X^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^L = \frac{ij L^{i+j-1}}{i+j-1}$$

$$\int_0^L X^j dX = \left[\frac{X^{j+1}}{j+1} \right]_0^L = \frac{L^{j+1}}{j+1}$$

Así pues, el sistema de ecuaciones resultante es

$$EA \begin{pmatrix} L & L^2 & L^3 \\ L^2 & \frac{4L^3}{3} & \frac{6L^4}{4} \\ L^3 & \frac{6L^4}{4} & \frac{9L^5}{5} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L^2}{2} \\ L^3 \\ \frac{L^4}{4} \end{Bmatrix} q_0 + \begin{Bmatrix} L \\ L^2 \\ L^3 \end{Bmatrix} P$$

que se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{6}{4} \\ 1 & \frac{6}{4} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 L \\ A_3 L^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} \frac{q_0 L}{EA} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{P}{EA}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_0 L}{EA} \\ -\frac{q_0}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

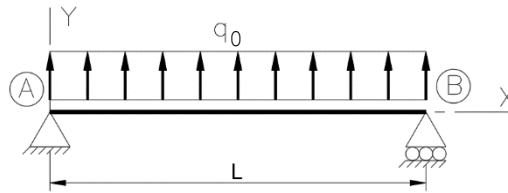
Por lo tanto, una vez más, la solución aproximada queda

$$\hat{u}(X) = \frac{q_0 L}{EA} X - \frac{q_0}{2EA} X^2 + \frac{P}{EA} X$$

que es la solución exacta del problema planteado.

Este ejemplo pone de manifiesto las ventajas de la formulación del método de Bubnov-Galerkin usando el planteamiento que iguala los órdenes de derivación de las funciones de interpolación y de peso. Las integrales han resultado más sencillas, más fáciles de evaluar y el sistema más fácil de resolver. Además, la matriz de coeficientes ha resultado simétrica, lo cual, como ya se ha dicho, es una gran ventaja cuando se ha de resolver un sistema de muchas ecuaciones mediante un procedimiento numérico.

Ejercicio nº 2



Ecuación de campo	Cond. de contorno esenciales	Cond. de contorno naturales
$\frac{d^4 v}{dX^4} = \frac{q_0}{EI_Z}$ <p>($EI_Z = \text{const.}$)</p>	$v(0) = 0$ $v(L) = 0$	$\left. \frac{d^2 v}{dX^2} \right _{X=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{d^2 v}{dX^2} \right _{X=L} = 0$

Se facilitan la ecuación de campo y las condiciones de contorno que gobiernan el problema de la viga representada en la figura según la teoría de Navier-Bernoulli. Se pretende obtener una aproximación a la ley de flechas de la forma

$$\hat{v}(X) = X(L - X)(A_1 + A_2 X + A_3 X^2) = A_1(LX - X^2) + A_2(LX^2 - X^3) + A_3(LX^3 - X^4)$$

Se pide:

- 1) Comprobar que la función propuesta es adecuada para obtener la solución aproximada por el método de Galerkin (o método de Bubnov-Galerkin).
- 2) Calcular los coeficientes A_1 , A_2 y A_3 que determinen la mejor aproximación a la solución utilizando el método de Bubnov-Galerkin (formulado como un planteamiento convencional del método de residuos ponderados con las limitaciones que impone el de Bubnov-Galerkin a las funciones de interpolación y de forma).
- 3) Calcular los coeficientes A_1 , A_2 y A_3 que determinen la mejor aproximación a la solución utilizando el método de Bubnov-Galerkin (usando el planteamiento que iguala los órdenes de derivación de las funciones de interpolación y de ponderación).
- 4) Repetir el punto 3 pero adoptando la aproximación

$$\hat{v}(X) = X(L - X)(A_1 + A_2 X) = A_1(LX - X^2) + A_2(LX^2 - X^3)$$
 (Implica que sólo hay que determinar los coeficientes A_1 y A_2 .)

Introducción

A modo de introducción, vamos a desarrollar algunos aspectos teóricos relacionados con la resolución del problema, con los siguientes objetivos:

- Presentar de forma resumida y compacta aspectos tratados de forma más dispersa en las clases de teoría.
- Desarrollar algo más puntos que en ellas se han visto de forma muy sucinta (o incluso no se han visto algún curso).
- Completar los contenidos de las clases con aspectos que el tiempo disponible no ha permitido desarrollar en ellas.

Obviamos, por innecesaria, la enumeración de los temas que el lector encontrará a continuación.

1) Condiciones que deben satisfacer las funciones de aproximación y las de ponderación

En este primer punto se van a recapitular las condiciones que deben satisfacer tanto las funciones de interpolación como las de ponderación en el método general de los residuos ponderados y en los métodos de Petrov-Galerkin y de Galerkin (o Bubnov-Galerkin). Se enunciarán las condiciones correspondientes a un problema unidimensional, que se extrapolan directamente a los problemas bidimensionales y tridimensionales.

Condiciones que debe satisfacer la aproximación

1) Método de los residuos ponderados

Estructura de la aproximación a la solución

En la resolución de problemas unidimensionales por métodos de residuos ponderados se adopta una aproximación a la solución de la forma

$$\hat{v}(X) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

donde $\varphi_i(X)$ es un conjunto de funciones de interpolación, elegidas a priori, y los coeficientes de combinación A_i son las incógnitas del problema.

Las funciones de interpolación $\varphi_i(X)$ deben satisfacer dos condiciones:

- 1) ser linealmente independientes, y
- 2) definir un conjunto completo. Según Reddy (1984, pág. 181), se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_i\}$ es completo en Ω si cualquier función f , continua a trozos, se puede aproximar en él por una suma $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i$ de modo que el error

$$\mathcal{E}_n = \int_{\Omega} \left(f - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right)^2 d\Omega$$

se puede hacer tan pequeño como se desee incrementando el valor de n .

Así pues, de forma más coloquial, podemos decir que las funciones de interpolación deben ser los primeros n elementos de una familia de funciones tal que, añadiendo más términos, permite mejorar la aproximación.

Condición de derivabilidad

Las funciones de interpolación $\varphi_i(X)$ se deben elegir de manera que la aproximación de la función incógnita sea derivable hasta el orden impuesto por la ecuación de residuos ponderados y la derivada de tal orden no sea idénticamente nula.

Nótese que esta condición se impone a la aproximación en conjunto, no a cada una de las funciones $\varphi_i(X)$ que la definen.

Si no se satisficiera este requisito, no se podría evaluar correctamente el residuo de la ecuación de campo y, en consecuencia, no se podría resolver el problema.

2) Método de Petrov-Galerkin

Estructura de la aproximación; cumplimiento de las condiciones de contorno esenciales

En el método de Petrov-Galerkin la aproximación se debe escoger de modo cumpla las condiciones de contorno esenciales (en adelante, CCE).

Esto se puede conseguir a partir de la misma aproximación que en el método de los residuos ponderados,

$$\hat{v}(X) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

sustituyéndola en la CCE y deduciendo de ello una serie de relaciones entre los coeficientes A_i antes de comenzar la aplicación del procedimiento. Aunque esto es posible, no se suele proceder así porque las relaciones mencionadas pueden resultar muy farragosas.

En la práctica, se suele adoptar la siguiente estructura de la solución:

$$\hat{v}(X) = \varphi_0(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(X)$$

donde

- 1) $\varphi_0(X)$ debe satisfacer las CCE, y
- 2) las funciones $\varphi_i(X)$, $i = 1, 2 \dots n$ deben
 - a) satisfacer las condiciones de independencia lineal y conjunto completo propias de cualquier método de residuos ponderados y, además,
 - b) cumplir las CCE de forma homogénea.

Que la aproximación satisfaga las CCE implica que los residuos de dichas condiciones de contorno sean nulos, por lo que no hará falta especificar ninguna función de peso que los pondere.

Condición de derivabilidad

La aproximación debe satisfacer la condición de derivabilidad propia de cualquier método de residuos ponderados, enunciada más arriba.

El método de Petrov-Galerkin (y el de Bubnov-Galerkin, que es un caso particular de este²) se pueden formular de dos maneras:

- Como un método general de residuos ponderados, simplemente imponiendo a la aproximación las restricciones mencionadas y a las funciones de ponderación las que se enumerarán más adelante.
- Transformando la ecuación obtenida según se indica en el punto anterior mediante la aplicación reiterada de la integración por partes³, disminuyendo el orden de derivación de las funciones de interpolación a costa de aumentarlo en las de ponderación. Esta es la auténtica formulación débil (menos exigente en cuanto a derivabilidad que la inicial) y también la más habitual.

Lógicamente, el grado de derivabilidad necesario depende del planteamiento, ya que está condicionado por la expresión de funcional que se utilice.

3) Método de Galerkin (o de Bubnov-Galerkin)

La aproximación que se utiliza en el método de Galerkin (o de Bubnov-Galerkin, que de las dos maneras se denomina en la literatura técnica) es idéntica a la que se considera en el método de Petrov-Galerkin y, en consecuencia, debe satisfacer las mismas condiciones. Recuérdese que el método de Galerkin puede considerarse un caso particular del de Petrov-Galerkin.

Condiciones que debe satisfacer las funciones de ponderación

1) Método de los residuos ponderados

Independencia lineal

En el método de los residuos ponderados se consideran tres familias de funciones de ponderación:

- a) las que intervienen en el interior del dominio, $\psi_j(X)$, $j = 1, 2 \dots n$;
- b) las que lo hacen en la parte del contorno en la que existen condiciones de contorno esenciales, $\bar{\psi}_j$, $j = 1, 2 \dots n$; y
- c) las que lo hacen en la parte del contorno en la que existen condiciones de contorno naturales, $\bar{\bar{\psi}}_j$, $j = 1, 2 \dots n$.

Los elementos de cada una de las tres familias deben ser linealmente independientes; de otro modo, las ecuaciones de residuos ponderados que originarían podrían no serlo y conducir a un sistema que no permitiera despejar los coeficientes de combinación A_i que determinan la aproximación.

No nulidad

Todos los términos de una cualquiera de las tres familias no pueden anularse idénticamente en su dominio de definición, o en una parte de él.

Esto es una obviedad: si se anulan todos los términos de una de las familias, la condición a la que afectan no aparece en las ecuaciones de residuos ponderados y, en consecuencia, no se imponen.

² En realidad, dice Reddy (1984, pág. 217) que el de Petrov-Galerkin es una generalización del de Bubnov-Galerkin.

³ O la utilización de la definición de derivada del producto y del teorema de la divergencia, en problemas bidimensionales o tridimensionales.

Del mismo modo, algunas situaciones particulares limitan la libertad de elección de funciones de peso; por ejemplo, si tenemos un dominio simétrico en el que los residuos de un tipo de condición de contorno son simétricos, no debemos ponderarlos usando funciones antisimétricas, ya que ello eliminaría los residuos de la ecuación y el planteamiento no tendría en cuenta las condiciones de contorno en cuestión. Lo mismo ocurre si los residuos son antisimétricos y las funciones de peso simétricas.

Por ser tan evidentes, estas condiciones no suelen enunciarse de forma explícita como restricciones que limitan la elección de funciones de peso en el método de los residuos ponderados. Hemos preferido incluirlas porque más adelante, en los métodos de Petrov-Galerkin y Bubnov-Galerkin, habrá que comprobar que se cumplen ya el modo de elección de las funciones de peso en el contorno hará que pueda fallar como consecuencia de una elección anterior.

Quizás el hecho de que, habitualmente, estas condiciones no se señalen de forma explícita se debe a que pueden considerarse incluidas en la condición de independencia lineal: en efecto, si todos los términos son idénticamente nulos en una parte de su dominio de definición, pueden considerarse el resultado de multiplicar por cero los definidos en la otra parte, luego no son independientes; las condiciones de simetría y antisimetría pueden expresarse indicando que las funciones definidas en una parte se obtienen multiplicando por 1 o por -1 las definidas en la otra... De todas maneras, hemos preferido enunciarlas de forma explícita.

2) Método de Petrov-Galerkin

Elección de las funciones de peso

En el método de Petrov-Galerkin se adoptan como funciones de peso de las CCN a las que resultan de particularizar las funciones de peso en el interior del dominio, o de sus derivadas, a la parte del contorno Γ_N en la que existen CCN, es decir, $\bar{\psi}_j = \psi_j|_{\Gamma_N}$ o $\bar{\psi}_j = \varphi_j^{(n)}|_{\Gamma_N}$, $j = 1, 2 \dots n$.

En cuanto a las funciones de peso que afectan a las CCE, $\bar{\psi}_j$, $j = 1, 2 \dots n$, no son necesarias, ya que la elección de una aproximación que satisfaga las CCE anula los residuos correspondientes.

La forma de elección de las funciones de peso $\bar{\psi}_j$ obliga a comprobar que satisfacen las condiciones de independencia lineal y no nulidad, porque puede darse el caso de que una elección de funciones ψ_j que resultaría adecuada en el método de los residuos ponderados no lo sea en el de Petrov-Galerkin por definir unas funciones $\bar{\psi}_j$ que no satisfagan estas condiciones.

Derivabilidad y cumplimiento de las condiciones de contorno esenciales

Cuando se utiliza la formulación basada en disminuir el orden de derivación de las funciones de interpolación a costa de aumentar el de las funciones de peso mediante la integración por partes (o el planteamiento equivalente en problemas 2D y 3D), las funciones de ponderación:

- Han de ser derivables hasta el orden que aparezca en la ecuación de residuos ponderados, y la derivada de mayor orden no puede ser idénticamente nula.
- Han de satisfacer las condiciones de contorno esenciales de forma homogénea.

3) Método de Bubnov-Galerkin

Elección de las funciones de peso

En el método de Bubnov-Galerkin es un caso particular del de Petrov-Galerkin que adopta como funciones de peso a las propias funciones de interpolación, es decir:

- $\psi_j = \varphi_j, j = 1, 2 \dots n$ en el interior del dominio
- $\bar{\psi}_j = \varphi_j|_{\Gamma_N}$ o $\bar{\psi}_j = \varphi_j^{(n)}|_{\Gamma_N}$ $j = 1, 2 \dots n$ en la parte del contorno en la que hay definidas CCN

Como en el método de Petrov-Galerkin, no son necesarias las funciones de peso de las CCE, $\bar{\psi}_j(X), j = 1, 2 \dots n$.

Esta elección de las funciones de ponderación garantiza que satisfacen los requisitos exigibles a las funciones de peso en la más exigente de las formulaciones indicadas, la que utiliza la integración por partes para igualar los órdenes de derivación de las funciones de interpolación y de peso. En efecto, según hemos visto, en el método de Bubnov-Galerkin las funciones de interpolación $\varphi_j, j = 1, 2 \dots n$ deben:

- ser linealmente independientes,
- tener derivadas no idénticamente nulas hasta el orden que aparece en la ecuación de residuos ponderados, y
- cumplir las CCE de forma homogénea.

y éstas son las condiciones que deben satisfacer las funciones de peso.

Quizás pueda quedarnos la duda de si satisfarán la condición de no nulidad en la parte del contorno donde hay CCN. La cumplen. En esa parte de la frontera los desplazamientos generalizados son incógnitas, parte de la solución del problema, luego la aproximación a la solución debe poder representarlos sea cual sea su valor, lo cual garantiza que las funciones φ_j (y sus derivadas si intervienen como función de peso) no se anulan en tal parte del contorno.

2) Elección de los coeficientes de peso de las CCN en el método de Petrov-Galerkin

Vamos a verificar si los factores de peso de las CCN naturales se deben determinar a partir de la propia función de interpolación o de una de sus derivadas, especificando cuál. Desarrollaremos el razonamiento para el caso del presenta ejercicio; el lector observará que aplicarlo a cualquier otro es inmediato.

Para comprobar cómo se deben determinar los coeficientes de peso de las CCN nos basaremos en la homogeneidad dimensional de la expresión general de las ecuaciones de residuos ponderados, que en nuestro caso son

$$\int_0^L \psi_j(X) R(X) dX + \sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_{j,l} R_{N,l} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

donde los residuos de la EC vienen dados por

$$R(X) = \frac{d^4 \hat{v}}{dX^4} - \frac{q_0}{EI_z}$$

y los de las CCN por

$$R_{N,1} = \left. \frac{d^2 \hat{v}}{dX^2} \right|_{X=0} - 0 \quad , \quad R_{N,2} = \left. \frac{d^2 \hat{v}}{dX^2} \right|_{X=L} - 0$$

En primer lugar, determinaremos las dimensiones de los residuos. Observemos que

$$\left. \begin{array}{l} \left[\frac{d^4 \hat{v}}{dX^4} \right] = L^{-3} \\ \left[\frac{q_0}{EI_z} \right] = \frac{FL^{-1}}{FL^{-2}L^4} = L^{-3} \end{array} \right\} \rightarrow [R(X)] = L^{-3}$$

y

$$\left[\frac{d^2 \hat{v}}{dX^2} \right] = L^{-1} \quad \leftrightarrow \quad [R_{N,j}] = L^{-1}, \quad j = 1, 2$$

donde, por brevedad, se ha indicado las dimensiones de las fuerzas como F en lugar de MLT^{-2} , que es lo que correspondería de acuerdo con las magnitudes fundamentales del SI. Teniendo en cuenta que los desplazamientos \hat{v} tienen dimensiones de longitud, es obvio que su derivada enésima tiene dimensiones de L^{1-n} ya que cada derivada (por ser el límite de un cociente respecto a una longitud) disminuye en una unidad el exponente de L en $[\hat{v}]$.

Aceptaremos que las funciones de peso tienen dimensiones de L^m , donde el valor de m no tiene importancia para el razonamiento que vamos a hacer. En efecto, en nuestro problema las funciones de interpolación, que hemos adoptado como funciones de peso, tienen dimensiones de L^m con $m = 2, 3, 4$; en otros casos, por ejemplo en una serie de Fourier truncada, simplemente m valdría 0, pero ello no afectará al razonamiento.

De acuerdo con todo esto, como $[dX] = L$ y la integral, que a fin de cuentas es una suma, tiene las mismas dimensiones que los sumandos,

$$\left[\int_0^L \psi_j(X) R(X) dX \right] = L^m L^{-3} L = L^{m-2}$$

por lo que, para que se mantenga la homogeneidad dimensional de la ecuación de residuos ponderados

$$\left[\sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_{j,l} R_{N,l} \right] = [\bar{\psi}_{j,l}] L^{-1} = L^{m-2} \Rightarrow [\bar{\psi}_{j,l}] = L^{m-1}$$

es decir, que en este ejercicio las dimensiones de las funciones de peso en la parte del contorno donde hay CCN, $[\bar{\psi}_{j,l}]$, deben ser de longitud elevado a un grado menos que en las funciones de peso en el interior del dominio, lo que implica que deben determinarse a partir de las **primeras derivadas** de aquellas.

Esta forma de proceder es fácilmente extrapolable a otros problemas.

3) Formulación alternativa del método de Petrov-Galerkin

En este apartado vamos a exponer la forma de plantear el método de Petrov-Galerkin igualando el orden de derivación de la función incógnita y de sus derivadas mediante el uso de la integración⁴ por partes el número de veces necesario, que ya se ha citado varias veces.

Para explicar el proceso recurriremos al ejemplo de una viga de Navier-Bernoulli sometida a flexión, similar al caso del enunciado pero sin ningún enlace, por lo que las condiciones de contorno serán todas de fuerza impuesta. Más adelante introduciremos las condiciones de contorno cinemáticas.

Planteamiento del problema

El dominio de definición será el segmento $[0,L]$ y el sistema de referencia el representado en la figura del enunciado.

Ecuación de campo (Casanova, 2018, pág. 356)

$$EI_Z \frac{d^4 v}{dX^4} = q_0 \quad (1)$$

Condiciones de contorno (Casanova, 2018, pág. 357)

$$\begin{aligned} EI_Z \left[\frac{d^3 v}{dX^3} \right]_{X=0} &= \bar{F}_{Y1} & EI_Z \left[\frac{d^2 v}{dX^2} \right]_{X=0} &= -\bar{M}_{Z1} \\ EI_Z \left[\frac{d^3 v}{dX^3} \right]_{X=L} &= -\bar{F}_{Y2} & EI_Z \left[\frac{d^2 v}{dX^2} \right]_{X=L} &= \bar{M}_{Z2} \end{aligned} \quad (2)$$

Aproximación y funciones de ponderación

Como se ha establecido más arriba, se adopta la expresión

$$\hat{v}(X) = \varphi_0(X) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(X) \quad (3)$$

como aproximación de la flecha y la familia de funciones

$$\psi_i(X) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (4)$$

como funciones de ponderación en el interior del dominio. Aceptamos que todas ellas satisfacen las condiciones enumeradas más arriba, que no reiteramos aquí.

Residuos

El residuo de la ecuación de campo resulta

$$R(X) = EI \frac{d^4 \hat{v}}{dX^4} - q_y(X) = EI \left[\varphi_0^{IV}(X) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{IV}(X) \right] - q \quad (5)$$

y los de las condiciones de contorno

⁴ En problemas bidimensionales o tridimensionales se recurre a las propiedades de la derivada del producto y al teorema de la divergencia.

$$\begin{aligned}
R_{1,V} &= EI \frac{d^3 \hat{v}}{dX^3} \Big|_{X=0} - \bar{F}_{Y1} = EI \left[\varphi_0'''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(0) \right] - \bar{F}_{Y1} \\
R_{1,M} &= -EI \frac{d^2 \hat{v}}{dX^2} \Big|_{X=0} - \bar{M}_{Z1} = -EI \left[\varphi_0''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(0) \right] - \bar{M}_{Z1} \\
R_{2,V} &= -EI \frac{d^3 \hat{v}}{dX^3} \Big|_{X=L} - \bar{F}_{Y2} = -EI \left[\varphi_0'''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(L) \right] - \bar{F}_{Y2} \\
R_{2,M} &= EI \frac{d^2 \hat{v}}{dX^2} \Big|_{X=L} - \bar{M}_{Z2} = EI \left[\varphi_0''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(L) \right] - \bar{M}_{Z2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Nótese que, como todos los residuos corresponden a CCN, en la notación no se ha incluido ningún símbolo que lo indique. Los subíndices 1 y 2 hacen referencia, respectivamente, al extremo dorsal y el extremo frontal de la viga, y los subíndices V o M, a la condición relativa al cortante o al flector, respectivamente.

Observe también el lector que, por conveniencia, se han definido los residuos $R_{1,V}$ y $R_{2,M}$ pasando todos los términos de las ecuaciones (2) al segundo miembro, y los residuos $R_{2,V}$ y $R_{2,M}$ pasándolos al primer miembro; es admisible, ya que ambas diferencias representa el error de la aproximación en tales expresiones.

Ecuaciones de residuos ponderados

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left\{ EI \left[\varphi_0^{IV}(X) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{IV}(X) \right] - q \right\} \psi_j(X) dX + \\
& + \left\{ EI \left[\varphi_0'''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(0) \right] - \bar{F}_{Y1} \right\} \psi_j(0) + \left\{ -EI \left[\varphi_0''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(0) \right] - \bar{M}_{Z1} \right\} \psi_j'(0) + \\
& + \left\{ -EI \left[\varphi_0'''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(L) \right] - \bar{F}_{Y2} \right\} \psi_j(L) + \left\{ EI \left[\varphi_0''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(L) \right] - \bar{M}_{Z2} \right\} \psi_j'(L) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

$j = 1, 2 \dots n$

Nótese que, como se ha establecido más arriba, los factores de ponderación de las condiciones de contorno que afectan a los cortantes se han fijado particularizando a los extremos de la viga las funciones de peso adoptadas en el interior del dominio y las que afectan a los momentos particularizando a tales puntos las derivadas de las funciones de ponderación en el interior del dominio.

Transformación de la primera integral de la ecuación anterior

Primero la desarrollamos teniendo en cuenta que la integral de la suma es la suma de las integrales

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left\{ EI \left[\varphi_0^{IV}(X) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{IV}(X) \right] - q \right\} \psi_j(X) dX = \\
& = EI \int_0^L \varphi_0^{IV}(X) \psi_j(X) dX + \sum_{i=1}^n \left\{ EI c_i \int_0^L \varphi_i^{IV}(X) \psi_j(X) dX \right\} - \int_0^L q \psi_j(X) dX
\end{aligned} \tag{8}$$

A continuación, integramos por partes una expresión genérica que puede representar a una cualquiera de las integrales que aparecen en los dos primeros sumandos del segundo miembro anterior

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi_i^{IV}(X)\psi_j(X)dX &= \dots \left| \begin{array}{l} u = \psi_j(X) \quad du = \psi'_j(X)dX \\ dv = \varphi_i^{IV}(X)dX \quad v = \varphi_i'''(X) \end{array} \right| \dots = \\
&= [\psi_j(X)\varphi_i'''(X)]_0^L - \int_0^L \varphi_i'''(X)\psi'_j(X)dX = \\
&= \psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \int_0^L \varphi_i'''(X)\psi'_j(X)dX
\end{aligned} \tag{9}$$

Y, de nuevo, desarrollamos por partes la integral recién obtenida

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi_i'''(X)\psi'_j(X)dX &= \dots \left| \begin{array}{l} u = \psi'_j(X) \quad du = \psi''_j(X)dX \\ dv = \varphi_i'''(X)dX \quad v = \varphi_i''(X) \end{array} \right| \dots = \\
&= [\psi'_j(X)\varphi_i''(X)]_0^L - \int_0^L \varphi_i''(X)\psi''_j(X)dX = \\
&= \psi'_j(L)\varphi_i''(L) - \psi'_j(0)\varphi_i''(0) - \int_0^L \varphi_i''(X)\psi''_j(X)dX
\end{aligned} \tag{10}$$

de manera que, finalmente

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi_i^{IV}(X)\psi_j(X)dX &= \\
&= \psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \psi'_j(L)\varphi_i''(L) + \psi'_j(0)\varphi_i''(0) + \int_0^L \varphi_i''(X)\psi''_j(X)dX
\end{aligned} \tag{11}$$

Incorporación de este resultado en la ecuación de residuos ponderados

Sustituyendo (11) en (8) y el resultado en (7) obtenemos

$$\begin{aligned}
&EI[\psi_j(L)\varphi_0'''(L) - \psi_j(0)\varphi_0'''(0) - \psi'_j(L)\varphi_0''(L) + \psi'_j(0)\varphi_0''(0)] + EI \int_0^L \varphi_0''(X)\psi''_j(X)dX + \\
&+ \sum_{i=1}^n Eic_i \left[\psi_j(L)\varphi_i'''(L) - \psi_j(0)\varphi_i'''(0) - \psi'_j(L)\varphi_i''(L) + \psi'_j(0)\varphi_i''(0) + \int_0^L \varphi_i''(X)\psi''_j(X)dX \right] - \\
&\quad - \int_0^L q \psi_j(X)dX + \\
&+ \left\{ EI \left[\varphi_0'''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(0) \right] - \bar{F}_{Y1} \right\} \psi_j(0) + \left\{ -EI \left[\varphi_0''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(0) \right] - \bar{M}_{Z1} \right\} \psi'_j(0) + \\
&+ \left\{ -EI \left[\varphi_0'''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(L) \right] - \bar{F}_{Y2} \right\} \psi_j(L) + \left\{ EI \left[\varphi_0''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(L) \right] - \bar{M}_{Z2} \right\} \psi'_j(L) = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

$j = 1, 2 \dots n$

que, agrupando términos, podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
&EI \left[\varphi_0'''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(L) \right] \psi_j(L) - EI \left[\varphi_0'''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(0) \right] \psi_j(0) - \\
&- EI \left[\varphi_0''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(L) \right] \psi'_j(L) + EI \left[\varphi_0''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(0) \right] \psi'_j(0) + \\
&+ EI \int_0^L \varphi_0''(X)\psi''_j(X)dX + EI \sum_{i=1}^n c_i \int_0^L \varphi_i''(X)\psi''_j(X)dX - \int_0^L q \psi_j(X)dX + \\
&+ \left\{ EI \left[\varphi_0'''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(0) \right] - \bar{F}_{Y1} \right\} \psi_j(0) + \left\{ -EI \left[\varphi_0''(0) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(0) \right] - \bar{M}_{Z1} \right\} \psi'_j(0) + \\
&+ \left\{ -EI \left[\varphi_0'''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'''(L) \right] - \bar{F}_{Y2} \right\} \psi_j(L) + \left\{ EI \left[\varphi_0''(L) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i''(L) \right] - \bar{M}_{Z2} \right\} \psi'_j(L) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

$j = 1, 2 \dots n$

donde se ha recurrido a un código de colores para señalar los términos que se anulan entre sí. Así pues, finalmente, la ecuación de residuos ponderados se ha transformado en

$$EI \int_0^L \varphi_0''(X) \psi_j''(X) dX + EI \sum_{i=1}^n c_i \int_0^L \varphi_i''(X) \psi_j''(X) dX - \int_0^L q \psi_j(X) dX - \bar{F}_{Y1} \psi_j(0) - \bar{M}_{Z1} \psi_j'(0) - \bar{F}_{Y2} \psi_j(L) - \bar{M}_{Z2} \psi_j'(L) = 0 \quad j = 1, 2 \dots n \quad (14)$$

Fijémonos ahora en la parte de esta relación correspondiente al contorno,

$$\bar{F}_{Y1} \psi_j(L) + \bar{F}_{Y2} \psi_j(0) + \bar{M}_{Z1} \psi_j'(L) + \bar{M}_{Z2} \psi_j'(0)$$

Si todas las condiciones de contorno son naturales, las fuerzas generalizadas $\bar{F}_{Y1}, \bar{F}_{Y2}, \bar{M}_{Z1}$ y \bar{M}_{Z2} son datos del problema y no hay ninguna dificultad en evaluarlas. Si alguna de las condiciones de contorno hubiera sido cinemática, la fuerza generalizada correspondiente hubiera sido reactiva y, por lo tanto, una incógnita del problema, lo cual imposibilitaría evaluar la ecuación (14). Por ello, cuando se adopta esta formulación, **se exige que las funciones de ponderación satisfagan las condiciones de contorno esenciales de forma homogénea** para que se anule cualquier sumando que involucre una reacción.

Nótese también que la ecuación (13) confirma el acierto de haber escogido la particularización de las funciones de ponderación al contorno como coeficientes de ponderación de las condiciones que afectan a los cortantes y la de sus derivadas en las que afectan a los momentos flectores.

El planteamiento realizado se basa en haber escrito las ecuaciones de residuos ponderados como aparecen en Kleiber (1998, pág. 25 y s.s.) o en Zienkiewicz (1980, pág. 54 y s.s.). Reddy (1984, pág. 211 y s.s.) o Bhatti (2005, pág. 115 y s.s.) justifican este planteamiento del método de Petrov-Galerkin partiendo, exclusivamente, de anular el residuo de la ecuación de campo

$$\int_0^L R(X) \psi_j(X) dX = 0 \quad j = 1, 2 \dots n \quad (15)$$

transforman esta ecuación integrando por partes dos veces, como hemos hecho más arriba, y llegan a una expresión igual a (13) pero sin las dos últimas filas, las que incluyen los residuos de las CCN. Entonces sustituyen las mencionadas CCN en las dos primeras líneas de (13) y llegan a la misma expresión (14) que nosotros. En tal caso queda claro que la simple manipulación matemática ha conducido a que los coeficientes de peso de las c.c. asociadas a los cortantes se derivan de las funciones de ponderación en el interior del dominio y los de las c.c. asociadas a los flectores de las derivadas de dichas funciones.

Equivalencia entre este planteamiento y el teorema de los trabajos virtuales

Sumando las ecuaciones de residuos ponderados (14), multiplicadas cada una por un coeficiente δA_j , se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \delta A_j \left[\int_0^L EI_Z \left[\varphi_0''(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi''_i(X) \right] \psi''_j(X) dX - \int_0^L q_0 \psi_j(X) dX - \right. \\
& \quad \left. - \bar{F}_{Y1} \psi_j(0) - \bar{M}_{Z1} \psi'_j(0) - \bar{F}_{Y2} \psi_j(L) - \bar{M}_{Z2} \psi'_j(L) \right] = \\
& = \int_0^L EI_Z \left[\varphi_0''(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi''_i(X) \right] \left[\sum_{j=1}^n \delta A_j \psi''_j(X) \right] dX - \int_0^L q_0 \left[\sum_{j=1}^n \delta A_j \psi_j(X) \right] dX - \quad (16) \\
& - \bar{F}_{Y1} \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi_j(0) - \bar{M}_{Z1} \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi'_j(0) - \bar{F}_{Y2} \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi_j(L) - \bar{M}_{Z2} \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi'_j(L) = 0
\end{aligned}$$

que debe satisfacerse $\forall \delta A_j \forall j$ ya que, según (14) el corchete que multiplica a $\forall \delta A_j$ es nulo cualquiera que sea j .

Para transformar esta expresión, por una parte, sustituimos (3) en la definición de giro unitario (Casanova, 2018, pág. 308)

$$\chi_Z = \frac{d^2 v}{dX^2} \cong \varphi_0''(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi''_i(X)$$

y este resultado en la ecuación constitutiva del momento flector (Casanova, 2018, pág. 344)

$$M_Z = EI_Z \chi_Z \cong EI_Z \left[\varphi_0''(X) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi''_i(X) \right]$$

y, por otra, admitamos

$$\delta \hat{v}(X) = \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi_j(X) \quad (17)$$

es decir, aceptemos que las funciones de ponderación determinan la aproximación de los desplazamientos virtuales, por lo que, de acuerdo con la definición de deformaciones virtuales (Casanova, 2018, 317)

$$\delta \hat{\chi}_Z(X) = \sum_{j=1}^n \delta A_j \psi''_j(X)$$

Si ahora sustituimos todo esto en (16) llegaremos a

$$\begin{aligned}
& \int_0^L M_Z(X) \delta \hat{\chi}(X) dX - \int_0^L q_0 \delta \hat{v}(X) dX - \\
& - \bar{F}_{Y1} \delta \hat{v}(0) - \bar{M}_{Z1} \delta \hat{v}'(0) - \bar{F}_{Y2} \delta \hat{v}(L) - \bar{M}_{Z2} \delta \hat{v}'(L) = 0 \quad \forall \delta \hat{v} \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

que es la expresión de la igualdad entre el trabajo virtual de las fuerzas internas y el de las fuerzas externas en este problema, para cualquier desplazamiento virtual cinemáticamente admisible, ya que la condición $\forall \delta A_j \forall j$ de la relación inicial, conjuntamente con la interpolación de los desplazamientos virtuales, implica que estos pueden ser cualesquiera entre los que satisfacen de forma homogénea las condiciones de contorno cinemáticas, ya que se ha visto que las funciones de interpolación que los determinan según (17) deben satisfacerlas.

Todo esto sigue siendo válido en el método de Galerkin, o de Bubnov-Galerkin. La única diferencia es que, en tal caso, se toman como funciones de ponderación a las propias funciones de interpolación.

Este último desarrollo explica porqué, a lo largo del curso, para explicar la aplicación del Método de los Elementos Finitos en diferentes situaciones, partiremos del teorema de los trabajos virtuales y diremos que estamos aplicando el método de Galerkin.

Resolución

- 1) *Comprobar que la función propuesta es adecuada para obtener la solución aproximada por el método de Bubnov-Galerkin.*

Condiciones que deben satisfacer las funciones de interpolación $\varphi_i(X), i = 1, 2 \dots n$

- 1) **Independencia lineal y definición de un conjunto completo.** Según el enunciado, la solución particular es

$$\varphi_0(X) \equiv 0$$

y las funciones de interpolación son:

$$\begin{aligned}\varphi_1(X) &= LX - X^2 \\ \varphi_2(X) &= LX^2 - X^3 \\ \varphi_3(X) &= LX^3 - X^4\end{aligned}$$

es decir

$$\varphi_i(X) = LX^i - X^{i+1}, \quad i = 1, 2, 3$$

Es evidente que estas funciones

- son linealmente independientes, y
- constituyen un conjunto completo (nótese que, añadiendo nuevos términos del mismo tipo, correspondientes a $i = 4, 5 \dots$, iríamos generando polinomios de mayor orden que nos permitirían aproximar cualquier función en $[0, L]$ que satisficiera las CCE.

- 2) **Derivabilidad.** La ecuación de campo

$$\frac{d^4 v}{dX^4} = \frac{q_0}{EI_z}$$

incluye una derivada cuarta respecto de X , y la derivada cuarta de la aproximación adoptada es

$$\frac{d^4 \hat{v}}{dX^4} = -24A_3 \neq 0$$

por lo que se satisface tal condición.

- 3) **Cumplimiento de las condiciones de contorno esenciales:**

$$\begin{aligned}\hat{v}(X)|_{X=0} = \hat{v}(0) &= A_1(L \cdot 0 - 0^2) + A_2(L \cdot 0^2 - 0^3) + A_3(L \cdot 0^3 - 0^4) = 0 \\ \hat{v}(X)|_{X=L} = \hat{v}(L) &= A_1(L \cdot L - L^2) + A_2(L \cdot L^2 - L^3) + A_3(L \cdot L^3 - L^4) = 0\end{aligned}$$

Así pues, la aproximación adoptada cumple las CCE.

Así pues, la aproximación propuesta **es adecuada para resolver el problema** por el método de Petrov-Galerkin y, en consecuencia, también por el de Bubnov-Galerkin.

Condiciones que deben satisfacer las funciones de ponderación

Las funciones de peso en el método de Bubnov-Galerkin deben coincidir con las funciones de interpolación, es decir

$$\psi_j(X) = \varphi_j(X) = LX^j - X^{j+1}, \quad j = 1, 2, 3$$

Ya se ha comentado que **son linealmente independientes** y es obvio que **no se anulan simultáneamente** en el interior del dominio.

En nuestro problema, los coeficientes de ponderación que afectan a las condiciones de contorno naturales deben evaluarse a partir de las derivadas de las funciones de peso, como se ha visto en la introducción. Así pues, tendremos

$$\bar{\bar{\psi}}_{j,1} = \psi'_{j,1}(0), \quad j = 1,2,3$$

$$\bar{\bar{\psi}}_{j,2} = \psi'_{j,2}(L), \quad j = 1,2,3$$

y como

$$\psi'_j(X) = \varphi'_j(X) = jLX^{j-1} - (j+1)X^j, \quad j = 1,2,3$$

resulta

$$\bar{\bar{\psi}}_{j,1} = \psi'_j(X)|_{X=0} = \varphi'_j(X)|_{X=0} = \varphi'_j(0) = jL0^{j-1} - (j+1)0^j = jL0^{j-1}, \quad j = 1,2,3$$

$$\bar{\bar{\psi}}_{j,2} = \psi'_j(X)|_{X=L} = \varphi'_j(X)|_{X=L} = \varphi'_j(L) = jLL^{j-1} - (j+1)L^j = -L^j, \quad j = 1,2,3$$

Es evidente que el coeficiente $\bar{\bar{\psi}}_{j,2}$ no se anula para ningún valor de j y que $\bar{\bar{\psi}}_{j,1}$ se anula para $j=2,3$. Surge la duda de cómo debe interpretarse la expresión 0^0 que aparece al evaluar $\bar{\bar{\psi}}_{1,1}$, si se debe suponer $0^0 = 1$, puesto que cualquier número elevado a 0 da 1, o se debe considerar una indeterminación, como aprendimos en análisis diferencial al tratar de calcular $\lim f(X)^{g(X)}$ cuando tanto $f(X)$ como $g(X)$ tienden a cero. En este caso, la opción adecuada es la primera, que conduce a $\bar{\bar{\psi}}_{j,1} = L$; basta recordar que

$$\psi_1(X) = \varphi_1(X) = LX - X^2$$

derivar y evaluar en $X=0$. Así pues, los coeficientes de peso tampoco se anulan en $X = 0$ para todos los valores de j ; no tiene importancia que lo hagan para $j=2,3$ ya que no lo hacen para $j=1$.

Queda, pues, justificado que **ninguna familia de coeficientes de peso se anula idénticamente en la parte de la frontera donde existen CCN.**

En consecuencia, verificadas todas las condiciones exigibles tanto a las funciones de interpolación como a las de ponderación, podemos asegurar que **la aproximación propuesta es adecuada para resolver el problema por el método de Bubnov-Galerkin.**

2) Calcular los coeficientes A_1 , A_2 y A_3 que determinen la mejor aproximación a la solución (planteamiento: MRP con las funciones de interpolación y de peso que exige el MBG)

Las ecuaciones de residuos ponderados vienen dadas por la siguiente expresión general:

$$\int_0^L \psi_j(X) R(X) dX + \sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_{j,l} R_{N,l} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Derivadas de la función incógnita

$$\frac{d\hat{v}}{dX} = A_1(L - 2X) + A_2(2LX - 3X^2) + A_3(3LX^2 - 4X^3)$$

$$\frac{d^2\hat{v}}{dX^2} = -2A_1 + A_2(2L - 6X) + A_3(6LX - 12X^2)$$

$$\frac{d^3\hat{v}}{dX^3} = -6A_2 + A_3(6L - 24X)$$

$$\frac{d^4\hat{v}}{dX^4} = -24A_3$$

Residuo de la EC

$$R(X) = \frac{d^4\hat{v}}{dX^4} - \frac{q_0}{EI_Z} = -24A_3 - \frac{q_0}{EI_Z}$$

Residuos de las CCN

$$R_{N,1} = \left. \frac{d^2\hat{v}}{dX^2} \right|_{X=0} - 0 = -2A_1 + A_2(2L - 6X) + A_3(6LX - 12X^2)|_{X=0} = -2A_1 + 2LA_2$$

$$\begin{aligned} R_{N,2} &= \left. \frac{d^2\hat{v}}{dX^2} \right|_{X=L} - 0 = -2A_1 + A_2(2L - 6X) + A_3(6LX - 12X^2)|_{X=L} = \\ &= -2A_1 - 4LA_2 - 6L^2A_3 \end{aligned}$$

Funciones ponderadoras del residuo de la EC:

$$\psi_j(X) = \varphi_j(X) = LX^j - X^{j+1}, \quad j = 1, 2, 3$$

Coefficientes de ponderación de los residuos de las CCN:

$$\bar{\psi}_{j,1} = \varphi_j'(0) = jL0^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\bar{\psi}_{j,2} = \varphi_j'(L) = -L^j, \quad j = 1, 2, 3$$

Ecuaciones de residuos ponderados

$$\int_0^L \psi_j(X) R(X) dX + \sum_{l=1}^2 \bar{\psi}_{j,l} R_{N,l} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\int_0^L (LX^j - X^{j+1}) \left(-24A_3 - \frac{q_0}{EI_Z} \right) dX + jL0^{j-1}(-2A_1 + 2LA_2) -$$

$$-L^j(-2A_1 - 4LA_2 - 6L^2A_3) = 0$$

$$\int_0^L X^j dX = \frac{L^{j+1}}{j+1}$$

$$j = 1 \Rightarrow 6L^2A_2 + 2L^3A_3 = \frac{q_0 L^3}{EI_Z 6}$$

$$j = 2 \Rightarrow 2L^2A_1 + 4L^3A_2 + 4L^4A_3 = \frac{q_0 L^4}{EI_Z 12}$$

$$j = 3 \Rightarrow 2L^3A_1 + 4L^4A_2 + \frac{24}{5}L^5A_3 = \frac{q_0 L^5}{EI_Z 20}$$

El sistema de ecuaciones algebraicas a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & \frac{24}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2L \\ A_3L^2 \end{pmatrix} = \frac{q_0L^2}{EI_Z} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

Este sistema se puede resolver fácilmente invirtiendo la matriz a mano, con una calculadora o con una hoja de cálculo, obteniendo:

$$A_1 = \frac{q_0L^2}{24EI_Z}$$

$$A_2 = \frac{q_0L}{24EI_Z}$$

$$A_3 = -\frac{q_0}{24EI_Z}$$

Así pues, la aproximación de la flecha es:

$$\hat{v}(X) = \frac{q_0L^2}{24EI_Z}(LX - X^2) + \frac{q_0L}{24EI_Z}(LX^2 - X^3) - \frac{q_0}{24EI_Z}(LX^3 - X^4)$$

$$= \frac{q_0}{24EI_Z}(L^3X - 2LX^3 + X^4)$$

que determina la solución exacta del problema, como puede comprobarse sustituyendo en la ecuación de campo y las condiciones de contorno que figuran en el enunciado.

3) Calcular los coeficientes A_1, A_2 y A_3 que determinen la mejor aproximación a la solución (planteamiento que iguala los órdenes de derivación de las funciones de interpolación y de ponderación)

Ecuaciones de residuos ponderados. Se han obtenido en la introducción para el método de Petrov-Galerkin. Se adaptan al de Bubnov-Galerkin haciendo:

$$\psi_j(X) = \varphi_j(X), \quad j = 1, 2 \dots n$$

con lo que se obtiene

$$EI \int_0^L \varphi_0''(X) \varphi_j''(X) dX + EI \sum_{i=1}^n c_i \int_0^L \varphi_i''(X) \varphi_j''(X) dX - \int_0^L q(X) \varphi_j(X) dX - \bar{F}_{Y1} \varphi_j(0) - \bar{M}_{Z1} \varphi_j'(0) - \bar{F}_{Y2} \varphi_j(L) - \bar{M}_{Z2} \varphi_j'(L) = 0 \quad j = 1, 2 \dots n$$

En nuestro caso:

- $q(X) = q_0 = cte.$
- $\varphi_0(X) \equiv 0$
- $\varphi_j(0) = \varphi_j(L) = 0, \quad j = 1, 2 \dots n.$
- $\bar{M}_{Z1} = \bar{M}_{Z2} = 0$

luego

$$EI \sum_{i=1}^n c_i \int_0^L \varphi_i''(X) \varphi_j''(X) dX - q_0 \int_0^L \varphi_j(X) dX = 0 \quad j = 1, 2 \dots n$$

Funciones de interpolación y de ponderación, y sus derivadas

i	1	2	3
$\varphi_i(X)$	$LX - X^2$	$LX^2 - X^3$	$LX^3 - X^4$
$\varphi_i'(X)$	$L - 2X$	$2LX - 3X^2$	$3LX^2 - 4X^3$
$\varphi_i''(X)$	-2	$2L - 6X$	$6LX - 12X^2$

Integrales

$$\int_0^L \varphi_1(X) dX = \int_0^L [LX - X^2] dX = \frac{L^3}{6}$$

$$\int_0^L \varphi_2(X) dX = \int_0^L [LX^2 - X^3] dX = \frac{L^4}{12}$$

$$\int_0^L \varphi_3(X) dX = \int_0^L [LX^3 - X^4] dX = \frac{L^5}{20}$$

$$\int_0^L \varphi_1''(X) \varphi_1''(X) dX = 4 \int_0^L dX = 4L$$

$$\int_0^L \varphi_1''(X) \varphi_2''(X) dX = -2 \int_0^L [2L - 6X] dX = 2L^2$$

$$\int_0^L \varphi_1''(X)\varphi_3''(X)dX = -2 \int_0^L [6LX - 12X^2]dX = 2L^3$$

$$\int_0^L \varphi_2''(X)\varphi_2''(X)dX = \int_0^L [2L - 6X][2L - 6X]dX = 4L^3$$

$$\int_0^L \varphi_2''(X)\varphi_3''(X)dX = \int_0^L [2L - 6X][6LX - 12X^2]dX = 4L^4$$

$$\int_0^L \varphi_3''(X)\varphi_3''(X)dX = \int_0^L [6LX - 12X^2][6LX - 12X^2]dX = \frac{24}{5}L^5$$

Sistema de ecuaciones de residuos ponderados

$$EI_Z \begin{pmatrix} 4L & 2L^2 & 2L^3 \\ 2L^2 & 4L^3 & 4L^4 \\ 2L^3 & 4L^4 & \frac{24}{5}L^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = q_0 \begin{pmatrix} L^3/6 \\ L^4/12 \\ L^5/20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & \frac{24}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2L \\ A_3L^2 \end{pmatrix} = \frac{q_0L^2}{EI_Z} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/12 \\ 1/20 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2L \\ A_3L^2 \end{pmatrix} = \frac{q_0L^2}{EI_Z} \begin{pmatrix} 1/24 \\ 1/24 \\ 1/24 \end{pmatrix}$$

es decir

$$A_1 = \frac{q_0L^2}{24EI_Z}$$

$$A_2 = \frac{q_0L}{24EI_Z}$$

$$A_3 = -\frac{q_0}{24EI_Z}$$

Como no podía ser de otra manera, la aproximación de la flecha es la misma que hemos hallado en el apartado anterior

$$\hat{v}(X) = \frac{q_0L^2}{24EI_Z}(LX - X^2) + \frac{q_0L}{24EI_Z}(LX^2 - X^3) - \frac{q_0}{24EI_Z}(LX^3 - X^4)$$

$$= \frac{q_0}{24EI_Z}(L^3X - 2LX^3 + X^4)$$

que, como ya habíamos señalado, determina la solución exacta del problema.

4) Calcular los coeficientes A_1 y A_2 que determinen la mejor aproximación a la solución con sólo los dos primeros sumandos de la inicialmente definida, usando el mismo planteamiento del punto anterior

Nótese que todo lo desarrollado en el punto anterior es válido, simplemente observando que como ahora no existe ninguna función $\varphi_3(X)$ todos aquellos términos que dependían de ella ahora desaparecen. Así pues, el sistema de ecuaciones a resolver será

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 L \end{pmatrix} = \frac{q_0 L^2}{EI_Z} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/12 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 L \end{pmatrix} = \frac{q_0 L^2}{EI_Z} \begin{pmatrix} 1/24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$A_1 = \frac{q_0 L^2}{24 EI_Z}$$

$$A_2 = 0$$

por lo que la aproximación queda

$$\hat{v}(X) = \frac{q_0 L^2}{24 EI_Z} (LX - X^2)$$

Con independencia de que la aproximación resulte más o menos precisa, este último apartado ha puesto de manifiesto las siguientes características de este procedimiento:

- En efecto, es una formulación débil en el sentido de presentar una exigencia menor que la formulación fuerte (y que el planteamiento general del método de los residuos ponderados) en cuanto a derivabilidad.
- Hemos visto que, para prescindir del tercer término de la aproximación, ha sido suficiente con desechar los elementos de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes que se identifican con algún subíndice igual a 3. Del mismo modo, si usando este planteamiento hemos resuelto el problema con una aproximación de n términos:
 - 1) Para aumentarla a una de $n+1$ sólo hace falta calcular la fila y la columna $n+1$ de la matriz de coeficientes y el elemento $n+1$ del vector de términos independientes.
 - 2) Como la matriz de coeficientes es simétrica, sólo hay que evaluar $n+2$ integrales, $n+1$ de la matriz de coeficientes y 1 del vector de términos independientes.

La segunda propiedad también se presenta cuando se realiza este tipo de planteamiento pero por el método de Petrov-Galerkin, aunque en este caso, como la matriz de coeficientes no es simétrica, el número de integrales a evaluar resulta $2n+2$.

5) Comparación de los resultados de los apartados 2 y 3 (exactos) con los del apartado 4 (aproximados)

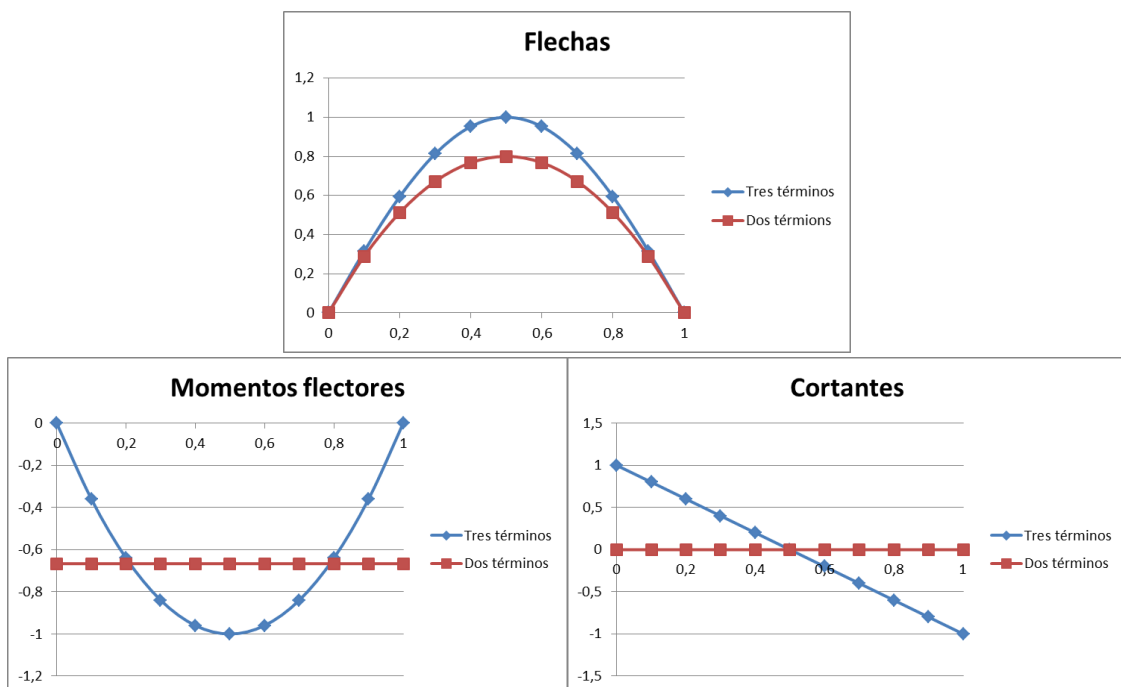
Para facilitar la comparación, vamos a escribir las leyes de flechas, de momentos flectores ($\hat{M}_Z = EI_Z \hat{v}''$) y de esfuerzos cortantes ($\hat{V}_Y = -EI_Z \hat{v}'''$) del modo siguiente

	Exacta (3 términos)	Aproximada (2 términos)
Flechas	$\frac{5q_0L^4}{385EI_Z} \frac{16}{5} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$	$\frac{5q_0L^4}{385EI_Z} \frac{16}{5} (\xi - \xi^2)$
Momentos flectores	$\frac{q_0L^2}{8} 4(-\xi + \xi^2)$	$\frac{q_0L^2}{8} \left(-\frac{2}{3}\right)$
Cortantes	$\frac{q_0L}{2} (1 - 2\xi)$	0

Para llegar a estas expresiones, primero se hallan las leyes de flechas, flectores y cortantes en función de X , luego se expresan en función de $\xi = X/L$, y por último se saca factor común el valor máximo de la flecha ($\frac{5q_0L^4}{385EI_Z}$), y del momento flector ($\frac{q_0L^2}{8}$) y del cortante ($\frac{q_0L}{2}$) en la solución exacta. Así:

- Las abscisas quedan expresadas en tanto por uno de la longitud total
- Las diferentes funciones consideradas, si prescindimos de la parte de la función escrita en azul, quedan en tanto por uno del valor máximo en la solución exacta.

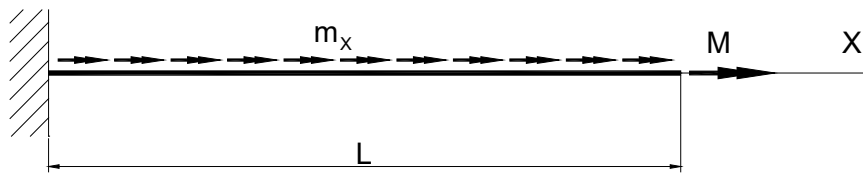
Las siguientes figuras, que representan estos valores adimensionales en función de las abscisas adimensionales, muestran la comparación de resultados.



Evidentemente, la solución aproximada no cumple ni la ecuación de campo ni las condiciones de contorno; sólo es la mejor aproximación posible a la solución exacta que se puede obtener a partir de la aproximación propuesta. Queda claramente de manifiesto en el hecho de que la ley de flectores obtenida con la aproximación de dos términos no cumple las condiciones de contorno naturales.

La aproximación de la flecha es pobre, su máximo sólo es el 80% del valor teórico, pero tiene la una forma similar a la esperada. Las aproximaciones de las leyes de flectores y cortantes son bastante peores: esto, simplemente, pone de manifiesto la pérdida de precisión asociada a la derivación de la solución aproximada. Debe reseñarse, no obstante, que las leyes de flectores y cortantes obtenidas representan el valor medio de los flectores y cortante reales.

Ejercicio nº 3



La figura representa una viga de sección transversal constante, formada por un material elástico lineal y sometida a torsión. Se facilita la ecuación de campo y las condiciones de contorno del problema.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_X}{dX^2} &= -\frac{m_X}{GJ} & \forall X \in]0, L[\\ \theta_X(0) &= 0 \\ \frac{d\theta_X}{dX}\Big|_{X=L} &= \frac{M}{GJ} \end{aligned}$$

Se pide obtener la mejor aproximación a la solución del problema que pueda expresarse de la forma $\hat{\theta} = aX + bX^2$, utilizando el método de Galerkin (o método de Bubnov-Galerkin), e identificar el tipo (natural o esencial) de cada condición de contorno dada.

Resolución

1) Identificación de las ecuaciones

Ecuación de campo: $\frac{d^2\theta_X}{dX^2} = -\frac{m_X}{GJ} \quad \forall X \in]0, L[$

Condición de contorno esencial: $\theta_X(0) = 0$

Condición de contorno natural: $\frac{d\theta_X}{dX}\Big|_{X=L} = \frac{M}{GJ}$

2) Interpolación de los desplazamientos

$$\hat{\theta}(X) = a\varphi_1(X) + b\varphi_2(X) = aX + bX^2 \quad \rightarrow \quad \varphi_i(X) = X^i$$

3) Exigencias del método de Bubnov-Galerkin

- Las funciones de interpolación deben ser linealmente independientes y constituir un conjunto completo. \rightarrow Lo cumplen por ser el resultado de truncar una serie de Taylor.
- Cada una de las derivadas de la función incógnita que aparece en la formulación del problema debe existir y no ser idénticamente nula. \rightarrow Se cumple.
- La interpolación debe cumplir las condiciones de contorno esenciales.

$$\hat{\theta}(0) = a \times 0 + b \times 0^2 = 0$$

Lo hace.

- Las funciones de peso en el interior del dominio deben coincidir con las funciones de interpolación. Por lo tanto, deben ser:

$$\psi_i(X) = \varphi_i(X) = X^i$$

- Las funciones de peso en la parte S_σ del contorno deben coincidir con la particularización a S_σ de las funciones de interpolación. Por lo tanto, deben ser:

$$\bar{\psi}_i = \varphi_i(L) = L^i$$

4) Residuos

$$R(X) = \frac{d^2 \hat{\theta}_X}{dX^2} + \frac{m_X}{GJ} = 2b + \frac{m_X}{GJ}$$

$$R_N(X) = \frac{d\theta_X}{dX} \Big|_{X=L} - \frac{M}{GJ} = a + 2bL - \frac{M}{GJ}$$

Recuérdese que como $\hat{\theta}(X)$ satisface las condiciones de contorno esenciales, $R_E(X) \equiv 0$.

5) Ecuaciones de residuos ponderados

$$\begin{aligned} \int_0^L R(X) \psi_1(X) dX + R_N(X) \bar{\psi}_1 &= 0 \\ \int_0^L \left(2b + \frac{m_X}{GJ}\right) X dX + \left(a + 2bL - \frac{M}{GJ}\right) L &= 0 \\ \left(2b + \frac{m_X}{GJ}\right) \frac{L^2}{2} + \left(a + 2bL - \frac{M}{GJ}\right) L &= 0 \\ aL + b(3L^2) + \frac{m_X L^2 - 2ML}{2GJ} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L R(X) \psi_2(X) dX + R_N(X) \bar{\psi}_2 &= 0 \\ \int_0^L \left(2b + \frac{m_X}{GJ}\right) X^2 dX + \left(a + 2bL - \frac{M}{GJ}\right) L^2 &= 0 \\ \left(2b + \frac{m_X}{GJ}\right) \frac{L^3}{3} + \left(a + 2bL - \frac{M}{GJ}\right) L^2 &= 0 \\ aL^2 + b\left(\frac{8}{3}L^3\right) + \frac{m_X L^3 - 3ML^2}{3GJ} &= 0 \end{aligned}$$

6) Sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ bL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2M - m_X L}{2GJ} \\ \frac{3M - m_X L}{3GJ} \end{Bmatrix}$$

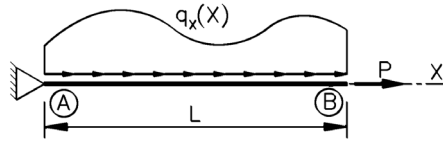
de donde

$$a = \frac{M + m_X L}{GJ} \quad ,, \quad b = \frac{-m_X}{2GJ}$$

y, en consecuencia

$$\hat{\theta}(X) = \frac{M + m_X L}{GJ} X - \frac{m_X}{2GJ} X^2$$

Ejercicio nº 4



La figura representa, esquemáticamente, el problema elástico de una barra recta, de sección variable, sometida a axil. Se sabe que está gobernado por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dX} \left[EA(X) \frac{du(X)}{dX} \right] = E \frac{dA(X)}{dX} \frac{du(X)}{dX} + EA(X) \frac{d^2u(X)}{dX^2} = -q_x(X)$$

en la que $EA(X)$ es la rigidez a axil de la barra, $q_x(X)$ es una fuerza paralela a la barra, repartida por unidad de longitud sobre ella, y la función incógnita $u = u(X)$ representa el desplazamiento del punto de abscisa X en la dirección de la barra, eje X del problema. El origen de coordenadas está en el punto A.

Se sabe que el módulo de elasticidad longitudinal del material, E , es constante, que el área de la barra varía según

$$A(X) = A_0 \left(1 - \frac{X}{2L} \right)$$

donde A_0 es una constante; que la fuerza puntual P es constante y que la fuerza $q_x(X)$ vale

$$q_x(X) = q_0 \left(1 - \frac{X}{2L} \right)$$

donde q_0 es una constante.

Las condiciones de contorno del problema se resumen en la tabla siguiente:

Punto	Abscisa	Condición	Tipo
A	$X = 0$	$u(X) _{X=0} = 0$	Esencial (cinemática)
B	$X = L$	$N(X) _{X=L} = P \Leftrightarrow EA(L) \left[\frac{du(X)}{dX} \right]_{X=L} = P$	Natural (estática)

Se adopta la siguiente expresión aproximada de la solución:

$$\hat{u}(X) = \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$$

Se pide:

- 1) Comprobar si la función propuesta es adecuada para obtener la solución aproximada por el método de Galerkin (o método de Bubnov-Galerkin).
- 2) Calcular los coeficientes α_1 y α_2 que determinen la mejor aproximación a la solución. Utilice el método de Galerkin si cree que la aproximación dada es adecuada para aplicarlo o el método de los residuos ponderados más general(*) si cree que no lo es.

(*) El método de los residuos ponderados más general es el que se expuso en primer lugar, del que son casos particulares los métodos de Petrov-Galerkin, de Galerkin (o Buvnov-Galerkin) y otros más que no hemos visto en el curso.

Resolución

1) Particularización de las ecuaciones al problema concreto

Ecuación de campo

$$\frac{dA(X)}{dX} = -\frac{A_0}{2L}$$

$$-\frac{EA_0}{2L} \frac{du(X)}{dX} + EA_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) \frac{d^2u(X)}{dX^2} = -q_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right)$$

Condición de contorno esencial

$$u(0) = 0$$

Condición de contorno natural

$$EA(L) \left[\frac{du(X)}{dX} \right]_{X=L} = P \rightarrow \frac{EA_0}{2} \left[\frac{du(X)}{dX} \right]_{X=L} = P$$

2) Aplicabilidad del método de Galerkin

La función de interpolación adoptada

$$\hat{u}(X) = \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$$

debe cumplir:

- 1) Que las funciones de interpolación sean linealmente independientes y constituyan un conjunto completo. Lo cumplen por ser el resultado de truncar una serie de Taylor.
- 2) Que existan y no sean idénticamente nulas todas las derivadas que aparecen en la formulación. En nuestro caso, esto exige que exista y no sea nula la segunda derivada de la función de interpolación.

$$\frac{d\hat{u}(X)}{dX} = \alpha_1 + 2\alpha_2 X$$

$$\frac{d^2\hat{u}(X)}{dX^2} = 2\alpha_2 \neq 0$$

Luego la primera condición se cumple.

- 3) Que la aproximación cumpla las condiciones de contorno esenciales.

$$\hat{u}(0) = [\alpha_1 X + \alpha_2 X^2]_{X=0} = 0$$

La segunda condición también se cumple.

- 4) Que las funciones de peso (iguales a las funciones de interpolación en el método de Galerkin) no se anulen todas en la parte del contorno donde existen condiciones de contorno naturales.

$$\psi_1(X) = \varphi_1(X) = X \rightarrow \bar{\psi}_1 = \psi_1(L) = \varphi_1(L) = L \neq 0$$

$$\psi_2(X) = \varphi_2(X) = X^2 \rightarrow \bar{\psi}_2 = \psi_2(L) = \varphi_2(L) = L^2 \neq 0$$

Que comprobamos que también se cumple.

Así pues, se puede resolver el problema utilizando el método de Galerkin.

3) Determinación de la aproximación

Residuos

$$\begin{aligned}
 R(X) &= -\frac{EA_0}{2L} \frac{d\hat{u}(X)}{dX} + EA_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) \frac{d^2\hat{u}(X)}{dX^2} + q_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) = \\
 &= -\frac{EA_0}{2L} (\alpha_1 + 2\alpha_2 X) + EA_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) 2\alpha_2 + q_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) = \\
 &= -\frac{EA_0}{2L} \alpha_1 + 2EA_0 \left(1 - \frac{X}{L}\right) \alpha_2 + q_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) \\
 R_N &= \frac{EA_0}{2} \left[\frac{d\hat{u}(X)}{dX} \right]_{X=L} - P = \frac{EA_0}{2} [\alpha_1 + 2\alpha_2 L] - P = \\
 &= \frac{EA_0}{2} \alpha_1 + EA_0 L \alpha_2 - P
 \end{aligned}$$

Funciones de peso (establecidas más arriba)

$$\psi_j(X) = \varphi_j(X) = X^j \quad , \quad \bar{\psi}_j = \psi_j(L) = \varphi_j(L) = L^j \quad j = 1,2$$

Ecuaciones de residuos ponderados

$$\int_0^L R(X) \psi_j(X) dX + R_N \bar{\psi}_j = 0 \quad j = 1,2$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L R(X) \psi_j(X) dX + R_N \bar{\psi}_j = \\
 &= \int_0^L \left[-\frac{EA_0}{2L} \alpha_1 + 2EA_0 \left(1 - \frac{X}{L}\right) \alpha_2 + q_0 \left(1 - \frac{X}{2L}\right) \right] X^j dX + \\
 &\quad + \left(\frac{EA_0}{2} \alpha_1 + EA_0 L \alpha_2 - P \right) L^j = \\
 &= \left(-\frac{EA_0}{2L} \alpha_1 + 2EA_0 \alpha_2 + q_0 \right) \int_0^L X^j dX - \left(\frac{2EA_0}{L} \alpha_2 + \frac{q_0}{2L} \right) \int_0^L X^{j+1} dX + \\
 &\quad + \left(\frac{EA_0}{2} \alpha_1 + EA_0 L \alpha_2 - P \right) L^j
 \end{aligned}$$

que, como

$$\int_0^L X^j dX = \frac{L^{j+1}}{j+1}$$

se puede escribir

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L R(X) \psi_j(X) dX + R_N \bar{\psi}_j = \\
 &= \left(-\frac{EA_0}{2L} \alpha_1 + 2EA_0 \alpha_2 + q_0 \right) \frac{L^{j+1}}{j+1} - \left(\frac{2EA_0}{L} \alpha_2 + \frac{q_0}{2L} \right) \frac{L^{j+2}}{j+2} + \\
 &\quad + \left(\frac{EA_0}{2} \alpha_1 + EA_0 L \alpha_2 - P \right) L^j =
 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{EA_0 L^j}{2} \left(-\frac{1}{j+1} + 1 \right) \right] \alpha_1 + \left[EA_0 L^{j+1} \left(\frac{2}{j+1} - \frac{2}{j+2} + 1 \right) \right] \alpha_2 + \\ + \left[L^{j+1} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{2(j+2)} \right) \right] q_0 - PL^j$$

Ecuación correspondiente a $j = 1$

$$\frac{EA_0 L}{4} \alpha_1 + \frac{4EA_0 L^2}{3} \alpha_2 + \frac{L^2}{3} q_0 - PL = 0$$

Ecuación correspondiente a $j = 2$

$$\frac{EA_0 L^2}{3} \alpha_1 + \frac{7EA_0 L^3}{6} \alpha_2 + \frac{5L^3}{24} q_0 - PL^2 = 0$$

Sistema de ecuaciones

Dividimos por L la primera ecuación y por L^2 la segunda, obteniendo

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} EA_0 \alpha_1 \\ EA_0 L \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{L}{3} q_0 \\ -\frac{5L}{24} q_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix}$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} EA_0 \alpha_1 \\ EA_0 L \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{11} q_0 L \\ -\frac{17}{44} q_0 L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{12}{11} P \\ \frac{6}{11} P \end{Bmatrix}$$

es decir

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{11} \frac{q_0 L}{EA_0} \\ -\frac{17}{44} \frac{q_0}{EA_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{12}{11} \frac{P}{EA_0} \\ \frac{6}{11} \frac{P}{EA_0 L} \end{Bmatrix}$$

Así pues, el campo de desplazamientos pedido resulta

$$\hat{u}(X) = \left(\frac{8}{11} \frac{q_0 L}{EA_0} + \frac{12}{11} \frac{P}{EA_0} \right) X + \left(-\frac{17}{44} \frac{q_0}{EA_0} + \frac{6}{11} \frac{P}{EA_0 L} \right) X^2$$

Referencias

BHATTI, M.A. (2005) *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Computations*. John Wiley & Sons.

CASANOVA, J. (2018) *Elementos de Mecánica de los Sólidos Deformables*. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia

KLEIBER, M. (ED.), (1998) *Handbook of Computational Solid Mechanics: Survey and Comparison of Contemporary Methods*. Springer.

REDDY, J.N. (1984) *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & sons.

ZIENKIEWICZ, O.C., (1980) *El método de los elementos finitos*. Reverté.

Capítulo 2:

Método de los Elementos Finitos: procedimientos básicos

Este capítulo consta de cinco ejercicios que muestran cómo deben abordarse algunos de los procedimientos básicos del Método de los Elementos Finitos. Todos ellos se plantean en el ámbito de los problemas de tensión plana.

- El ejercicio nº 1 se ocupa de la determinación de la matriz de rigidez de un elemento finito rectangular.
- El ejercicio nº 2 trata sobre el cálculo de las fuerzas nodales en el mismo elemento.
- El ejercicio nº 3 explica el cálculo de tensiones en los nodos de los elementos de este mismo tipo suponiendo que se han usado para mallar un cuerpo.
- El ejercicio nº 4 aborda el ensamblaje de la relación de rigidez de la estructura completa y la imposición en ella de las condiciones de contorno cinemáticas.
- Por último, el ejercicio nº 5 se ocupa del cálculo de fuerzas nodales en un elemento finito triangular. Se ha añadido a la colección inicial de cuatro ejercicios tras comprobar que, en algunos casos, la integración sobre dominios planos que no rectangulares planteaba algún problema.

Como alternativa al texto que sigue, la explicación de estos ejercicios puede encontrarse, grabada en vídeo, en <https://media.upv.es/#/portal/channel/97f43dd0-d222-11ec-b3e8-85c626fc9bb5>.

Ejercicio nº 1

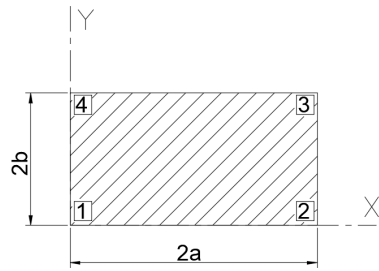


Figura 1

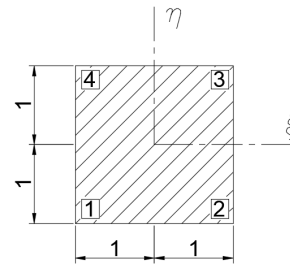


Figura 2

Determinar la matriz de rigidez de un elemento finito rectangular, de $2ax2b$ y espesor h (figura 1), previsto para estudiar problemas de tensión plana, basado en las funciones de interpolación

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{E1}$$

definidas en las coordenadas normalizadas descritas en la figura 2, que se relacionan con las coordenadas iniciales mediante

$$\xi = \frac{X-a}{a} \quad , \quad \eta = \frac{Y-b}{b} \tag{E2}$$

Resolución

1) Interpolación de los desplazamientos

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e$$

2) Determinación de las deformaciones aproximadas

$$\begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_X \\ \hat{\varepsilon}_Y \\ \hat{\gamma}_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_{1,X} & 0 & N_{2,X} & 0 & N_{3,X} & 0 & N_{4,X} & 0 \\ 0 & N_{1,Y} & 0 & N_{2,Y} & 0 & N_{3,Y} & 0 & N_{4,Y} \\ N_{1,Y} & N_{1,X} & N_{2,Y} & N_{2,X} & N_{3,Y} & N_{3,X} & N_{4,Y} & N_{4,X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e$$

siendo

$$N_{i,X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \quad ,, \quad N_{i,Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

Teniendo en cuenta (E2) y la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ,, \quad \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

y, a partir de estas expresiones y (E1) obtenemos las componentes de **B**, que resultan

$$\begin{aligned} N_{1,X} &= -\frac{1}{4a}(1-\eta) & N_{1,Y} &= -\frac{1}{4b}(1-\xi) \\ N_{2,X} &= \frac{1}{4a}(1-\eta) & N_{2,Y} &= -\frac{1}{4b}(1+\xi) \\ N_{3,X} &= \frac{1}{4a}(1+\eta) & N_{3,Y} &= \frac{1}{4b}(1+\xi) \\ N_{4,X} &= -\frac{1}{4a}(1+\eta) & N_{4,Y} &= \frac{1}{4b}(1-\xi) \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que agrupando de dos en dos las columnas de la matriz **B** podemos expresarla como

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad \text{siendo} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,X} & 0 \\ 0 & N_{i,Y} \\ N_{i,Y} & N_{i,X} \end{bmatrix}$$

3) Matriz constitutiva

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

4) Matriz de rigidez

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) dV = \int_0^{2b} \int_0^{2a} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) h dX dY = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) ab h d\xi d\eta \end{aligned}$$

donde, en la primera igualdad, se ha tenido en cuenta que el espesor es constante y que todas las funciones que intervienen en un problema de elasticidad bidimensional son constantes en él para expresar $dV = h dX dY$ y transformar la integral de volumen en una sobre el plano medio de la laja. En la segunda se ha utilizado el cambio de variable (E2), del que se deduce

$$X = \xi a + a \quad ,, \quad Y = \eta b + b$$

$$dXdY = \left| \mathbf{J} \right| d\xi d\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} d\xi d\eta = ab d\xi d\eta$$

$$X = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = -1 \quad ,, \quad X = 2a \quad \rightarrow \quad \xi = 1$$

$$Y = 0 \quad \rightarrow \quad \eta = -1 \quad ,, \quad Y = 2b \quad \rightarrow \quad \eta = 1$$

NOTA 1: La determinación del cambio de variable de la diferencial de área puede consultarse en Krasnov, M., Kiseliyov, A. Makarenko, G. y Shikin, E. (1990) *Curso de matemáticas superiores para ingenieros*. Vol. 2. Editorial MIR, Moscú, URSS. Página 313.

A continuación pasamos a evaluar el integrando

$$\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_4^T \end{pmatrix} \mathbf{D} (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} N_{i,X} & 0 & N_{i,Y} \\ 0 & N_{i,Y} & N_{i,X} \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} \\ N_{j,Y} & N_{j,X} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} N_{i,X} & \nu N_{i,X} & \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,Y} \\ \nu N_{i,Y} & N_{i,Y} & \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} \\ N_{j,Y} & N_{j,X} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} N_{i,X}N_{j,X} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,Y}N_{j,Y} & \nu N_{i,X}N_{j,Y} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,Y}N_{j,X} \\ \nu N_{i,Y}N_{j,X} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,X}N_{j,Y} & N_{i,Y}N_{j,Y} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,X}N_{j,X} \end{bmatrix}$$

y ahora, a partir de él, una submatriz genérica de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j(\xi, \eta) abhd\xi d\eta$$

A partir de la estructura de $\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j$ es inmediato observar que $\mathbf{K}_{ji} = \mathbf{K}_{ij}^T$, es decir, que la matriz de rigidez es simétrica.

Vamos a desarrollar las integrales en un caso concreto, el de las componentes de \mathbf{K}_{12} :

$$(\mathbf{K}_{12})_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_{1,X}N_{2,X} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{1,Y}N_{2,Y} \right\} abhd\xi d\eta =$$

$$= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{16a^2}(1-\eta)^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{1}{16b^2}(1-\xi^2) \right\} d\xi d\eta$$

$$= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{16a^2}(1-\eta)^2 [\xi]_{-1}^1 + \frac{(1-\nu)}{32b^2} \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 \right\} d\eta = \frac{Eabh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{8a^2}(1-\eta)^2 + \frac{(1-\nu)}{24b^2} \right\} d\eta$$

$$= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{1}{8a^2} \left[-\frac{(1-\eta)^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{(1-\nu)}{24b^2} [\eta]_{-1}^1 \right\} = \frac{Eabh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{1}{3a^2} + \frac{(1-\nu)}{12b^2} \right\} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{b}{3a} + \frac{(1-\nu)a}{12b} \right\}$$

La misma integral se podría haber evaluado numéricamente. En el ámbito de los elementos finitos lo más habitual es hacerlo de este modo utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre, que establece

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

en un dominio unidimensional y

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

en uno bidimensional. En ambos casos se debe transformar el dominio de integración real en el segmento $[-1,1]$ o el cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ mediante un cambio de variables. En cuanto a la notación, n es el número de puntos de integración en cada dirección, ξ_i las abscisas de estos puntos y w_i los pesos correspondientes. Abscisas y pesos son características del método y pueden encontrarse tabulados en cualquier libro de cálculo numérico. La cuadratura de Gauss-Legendre integra exactamente un polinomio de grado $2n-1$ siendo n el número de puntos de integración, como ya se ha mencionado.

En nuestro problema, como hemos visto en el cálculo anterior, el integrando es de grado 2 tanto en ξ como en η , por lo que necesitaremos considerar dos puntos de Gauss en cada dirección. Las abscisas y los pesos correspondientes a esta cuadratura son

$$\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ,, \quad \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ,, \quad w_1 = w_2 = 1$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{12})_{11} &= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{16a^2}(1-\eta)^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{1}{16b^2}(1-\xi^2) \right\} d\xi d\eta = \\ &= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \left[\left(-\frac{1}{16a^2} \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{1}{16b^2} \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) \right) \times 1 + \right. \\ &\quad + \left(-\frac{1}{16a^2} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{1}{16b^2} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) \right) \times 1 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{16a^2} \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{1}{16b^2} \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) \right) \times 1 \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{16a^2} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{1}{16b^2} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) \right) \times 1 \right] \end{aligned}$$

donde en la primera fila se ha evaluado el punto (ξ_1, η_1) , en la segunda (ξ_2, η_1) , en la tercera (ξ_1, η_2) y en la cuarta (ξ_2, η_2) . Ahora, simplemente operando se llega al mismo resultado que integrando analíticamente, como era previsible.

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{12})_{11} &= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{2}{16a^2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] + \frac{(1-\nu)}{32b^2} \left(4 \times \frac{2}{3} \right) \right\} = \\ &= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{2}{16a^2} \left[\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{3} \right) + \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{3} \right) \right] + \frac{(1-\nu)}{32b^2} \left(\frac{8}{3} \right) \right\} = \\ &= \frac{Eabh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{2}{16a^2} \left[\frac{8}{3} \right] + \frac{(1-\nu)}{32b^2} \left(\frac{8}{3} \right) \right\} = \frac{Eab}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{1}{3a^2} + \frac{(1-\nu)}{12b^2} \right\} = \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{b}{3a} + \frac{(1-\nu)a}{12b} \right\} \end{aligned}$$

A continuación se deberían evaluar, operando del mismo modo, las restantes 63 componentes de la matriz de rigidez. Como se ve, el procedimiento es muy laborioso, aunque en la práctica no se lleva a cabo a mano sino que se desarrolla un algoritmo que permita que un ordenador

calcule la matriz de rigidez en cada caso concreto. El resultado será una matriz, con coeficientes numéricos, de 8x8.

NOTA 1: El procedimiento numérico para determinar la matriz de rigidez de un elemento consta de los siguientes pasos:

- 1) Se programa una subrutina que evalúe las derivadas de las funciones de forma en un punto concreto (ξ, η) y determine la matriz de deformaciones **B** y el determinante de la matriz Jacobiana **|J|** en él. Para ello deberá usar las expresiones de $N_{i,x}$, $N_{i,y}$, **B** y **J** halladas anteriormente, o las equivalentes en otros problemas.
- 2) Se programa la determinación de la matriz de rigidez del elemento mediante otra subrutina cuyo diagrama de flujo, en nuestro caso, sería:

$$\mathbf{K}_{8 \times 8} = \mathbf{0}$$

Para $i=1$ hasta 2

Para $j=1$ hasta 2

} Bucles que recorren los puntos de integración

Se evalúan $\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j)$ y $|\mathbf{J}|$ mediante la subrutina anterior

$$\mathbf{Aux} = \mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_j) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}|$$

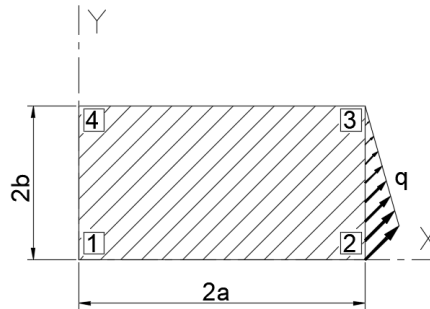
$$\mathbf{K} = \mathbf{K} + w_i w_j \mathbf{Aux} \quad w_k \text{ representa el peso en la integración, 1 en nuestro caso}$$

Fin bucle j

Fin bucle i

En otros problemas cambiarían las dimensiones de la matriz de rigidez y el número de puntos de integración.

Ejercicio nº 2



Sobre un elemento finito como el estudiado en el ejercicio 1 actúa su propio peso y, en el lado 2-3 del contorno, las fuerzas \mathbf{q} indicadas en la figura. Se pide determinar las fuerzas nodales sobre el elemento sabiendo que el peso específico del material es γ , que la gravedad actúa en dirección Y y sentido negativo, y que

$$\mathbf{q} = q_0 \left(1 - \frac{Y}{2b}\right) (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

donde q_0 es una constante.

Resolución

1) Tratamiento de las fuerzas de volumen

Según hemos visto en las clases de teoría, las fuerzas nodales que representan el efecto de las de volumen se determinan como

$$\mathbf{f}_b = - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV = - \int_0^{2b} \int_0^{2a} \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h dXdY = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h ab d\xi d\eta$$

donde, en nuestro caso, $\mathbf{b} = -\gamma \mathbf{j}$ y la matriz de funciones de forma es la descrita en el ejercicio 1. Las transformaciones de las integrales también se explicaron en dicho ejercicio.

Evaluación del integrando

$$\begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -N_1(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_2(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_3(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_4(\xi, \eta) \gamma \end{Bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$

Integrales

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{-N_1(\xi, \eta) \gamma\} abhd\xi d\eta &= -\frac{\gamma abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\xi)(1-\eta) d\xi d\eta \\ &= -\frac{\gamma abh}{4} \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_{-1}^1 \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} \right]_{-1}^1 = -\gamma abh \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que las integrales correspondientes a N_2 , N_3 y N_4 dan el mismo resultado, por lo que

$$\mathbf{f}_b = \gamma abh \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Nótese que había un signo menos delante de la integral y otro en el integrando, por lo que en el resultado final todos los términos son positivos.

2) Tratamiento de las fuerzas de superficie en el lado 2-3

$$\mathbf{f}_t = - \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA = - \int_0^{2b} [\mathbf{N}^T(\xi, \eta)]_{X=2a} \mathbf{q}(Y) h dY = - \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(1, \eta) \mathbf{q}(\eta) h b d\eta$$

Por los mismos motivos esgrimidos en el apartado anterior, la integral sobre la cara 2-3 se puede transformar en una sobre la arista 2-3 haciendo $dA=h dY$. El cambio de variables se ha visto en el ejercicio 1. Además, hay que particularizar las funciones de forma a esta arista, haciendo $\xi=1$, y expresar las fuerzas exteriores en función de η operando como sigue. Primero, de la relación (E2) del ejercicio 1 se deduce

$$X = \xi a + a \quad , \quad Y = \eta b + b$$

y, a continuación, se sustituye la segunda de estas expresiones en la definición de \mathbf{q} , obteniendo

$$\mathbf{q} = q_0 \left(1 - \frac{Y}{2b} \right) (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = q_0 \left(1 - \frac{\eta b + b}{2b} \right) (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = q_0 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Nótese que la presencia de h se debe a que el enunciado nos daba las fuerzas de superficie correspondientes al problema 3D; si nos hubieran dado las fuerzas generalizadas del problema 2D, que son fuerzas por unidad de longitud, hubiéramos tenido

$$\mathbf{f}_t = - \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q} ds = - \int_0^{2b} [\mathbf{N}^T(\xi, \eta)]_{X=2a} \mathbf{q}(Y) dY = - \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(1, \eta) \mathbf{q}(\eta) b d\eta$$

Evaluación del integrando

$$\begin{bmatrix} N_1(1, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(1, \eta) \\ N_2(1, \eta) & 0 \\ 0 & N_2(1, \eta) \\ N_3(1, \eta) & 0 \\ 0 & N_3(1, \eta) \\ N_4(1, \eta) & 0 \\ 0 & N_4(1, \eta) \end{bmatrix} q_0 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\eta) \\ \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q_0 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = q_0 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(1-\eta) \\ \frac{1}{2}(1-\eta) \\ \frac{1}{2}(1+\eta) \\ \frac{1}{2}(1+\eta) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Integrales

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\eta) q_0 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) h b d\eta = \frac{q_0 h b}{4} \int_{-1}^1 (1-\eta)^2 d\eta = \frac{q_0 h b}{4} \left[-\frac{(1-\eta)^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2q_0 h b}{3}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\eta) q_0 \left(\frac{1-\eta}{2} \right) h b d\eta = \frac{q_0 h b}{4} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) d\eta = \frac{q_0 h b}{4} \left[\eta - \frac{\eta^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{q_0 h b}{3}$$

Fuerzas nodales

$$\mathbf{f}_{\bar{t}} = \frac{q_0 h b}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) Valor final de las fuerzas nodales

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_{\bar{t}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma a b h \\ \frac{2q_0 h b}{3} \\ \gamma a b h - \frac{2q_0 h b}{3} \\ -\frac{q_0 h b}{3} \\ \gamma a b h - \frac{q_0 h b}{3} \\ 0 \\ \gamma a b h \end{Bmatrix}$$

Ejercicio nº 3

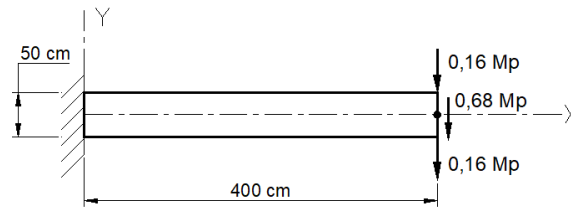


Figura 1

Se ha analizado la ménsula de la figura 1 (sección rectangular de espesor 5 cm; material: $E=300.000 \text{ kp/cm}^2$, $\nu=0,2$, $\gamma=0$) en tensión plana, por el método de los elementos finitos, utilizando el elemento desarrollado en el ejercicio nº 1 y la malla de 32×8 elementos que se muestra en la figura 2. El ejercicio se dedicará a analizar las tensiones obtenidas en los dos elementos sombreados en esta última figura.

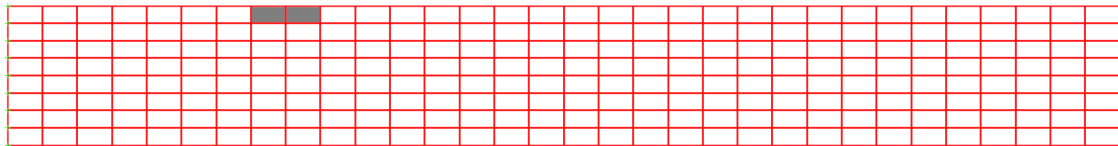


Figura 2

A los efectos de este ejercicio, los elementos considerados y los nodos que los limitan se identificarán con los símbolos indicados en la figura 3

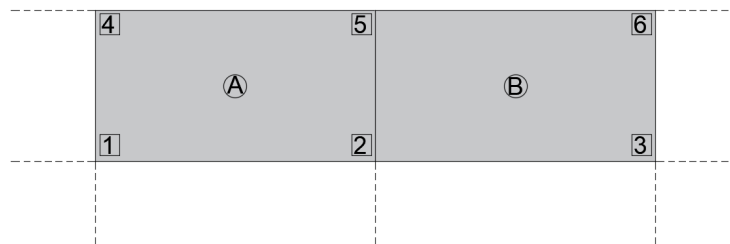


Figura 3

Se conoce la solución analítica del problema, que en el sistema de referencia de la figura 1 viene dada por las expresiones

$$\sigma_x = -0,0192XY + 7,68Y \quad \text{kp/cm}^2$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 0,0096Y^2 - 6 \quad \text{kp/cm}^2$$

en las que las coordenadas se deben expresar en centímetros. A partir de ellas se obtiene los valores de las tensiones en los nudos recogidos en la tabla 1.

La tabla número 2 muestra los desplazamientos de los nodos indicados en la figura 3 que se han obtenido al analizar la ménsula por elementos finitos, tal como se ha expuesto más arriba.

Se pide calcular las tensiones en los elementos A y B del modelo y compararlas con las determinadas por la solución analítica.

Punto	X (cm)	Y (cm)	σ_x (kp/cm ²)	σ_y (kp/cm ²)	τ_{xy} (kp/cm ²)
1	87,50	18,75	112,5	0	-2,625
2	100,00	18,75	108,0	0	-2,625
3	112,50	18,75	103,5	0	-2,625
4	87,50	25,00	150,0	0	0
5	100,00	25,00	144,0	0	0
6	112,50	25,00	138,0	0	0

Tabla 1

Nudo	1	2	3	4	5	6
u (cm)	0,03632	0,04079	0,04508	0,04858	0,05454	0,06026
v (cm)	-0,09156	-0,11773	-0,14682	-0,09209	-0,11824	-0,14731

Tabla 2

Resolución

1) Cálculo de las tensiones: resultados auxiliares

Para calcular las tensiones utilizaremos la expresión

$$\hat{\sigma} = \mathbf{D}\hat{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e$$

Las matrices \mathbf{D} y \mathbf{B} se obtuvieron en el ejercicio 1, y los desplazamientos nodales los facilita el enunciado. Recordemos las expresiones de las dos matrices:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,X} & 0 & N_{2,X} & 0 & N_{3,X} & 0 & N_{4,X} & 0 \\ 0 & N_{1,Y} & 0 & N_{2,Y} & 0 & N_{3,Y} & 0 & N_{4,Y} \\ N_{1,Y} & N_{1,X} & N_{2,Y} & N_{2,X} & N_{3,Y} & N_{3,X} & N_{4,Y} & N_{4,X} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} N_{1,X} &= -\frac{1}{4a}(1-\eta) & N_{1,Y} &= -\frac{1}{4b}(1-\xi) \\ N_{2,X} &= \frac{1}{4a}(1-\eta) & N_{2,Y} &= -\frac{1}{4b}(1+\xi) \\ N_{3,X} &= \frac{1}{4a}(1+\eta) & N_{3,Y} &= \frac{1}{4b}(1+\xi) \\ N_{4,X} &= -\frac{1}{4a}(1+\eta) & N_{4,Y} &= \frac{1}{4b}(1-\xi) \end{aligned}$$

Para particularizarlas a nuestro caso hemos de tener en cuenta que las características del material son $E=300.000$ kp/cm² y $\nu=0,2$, y que las dimensiones del elemento finito son $400/32$ cm x $50/8$ cm, es decir, $12,5$ cm x $6,25$ cm. Como las habíamos representado por $2a \times 2b$, tendremos que $a = 6,25$ cm y $b = 3,125$ cm. Así pues

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 312500 & 62500 & 0 \\ 62500 & 312500 & 0 \\ 0 & 0 & 125000 \end{bmatrix} \text{ Kp/cm}^2$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,04(1-\eta) & 0 & 0,04(1-\eta) & 0 & 0,04(1+\eta) & 0 & -0,04(1+\eta) & 0 \\ 0 & -0,08(1-\xi) & 0 & -0,08(1+\xi) & 0 & 0,08(1+\xi) & 0 & 0,08(1-\xi) \\ -0,08(1-\xi) & -0,04(1-\eta) & -0,08(1+\xi) & 0,04(1-\eta) & 0,08(1+\xi) & 0,04(1+\eta) & 0,08(1-\xi) & -0,04(1+\eta) \end{bmatrix}$$

En consecuencia, las deformaciones $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e$ se obtienen como el producto de una matriz cuyas componentes son funciones lineales en (ξ, η) por un vector de constantes, de lo que se deduce que tales deformaciones variarán linealmente en el interior del elemento. Del mismo modo, como las tensiones son el producto de una matriz constante por las deformaciones, también variarán linealmente en el interior del elemento.

2) Cálculo de las tensiones en los nodos

Comenzaremos por el elemento A. En el ejercicio 1 los nodos se numeraron del 1 al 4 empezando por el extremo inferior izquierdo y recorriendo el contorno en sentido contrario a las agujas del reloj; llamaremos a esta secuencia *numeración local*. En la figura 3 del enunciado aparece la numeración adoptada para los seis nudos que intervienen en este ejercicio, que denominaremos *numeración global*. Al elemento A, recorriéndolo como se ha indicado anteriormente, le corresponden los nudos 1, 2, 5 y 4; esto establece la relación entre las numeraciones local y global.

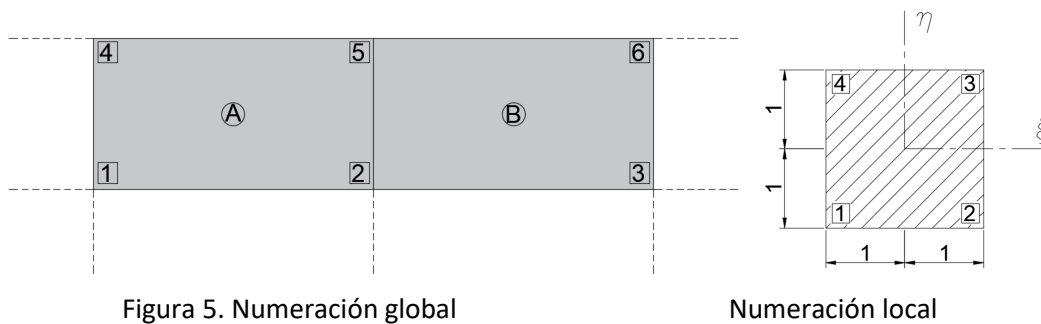


Figura 5. Numeración global

Numeración local

Así pues, el vector de desplazamientos nodales del elemento A será

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4)^T = \\ &= (u'_1 \quad v'_1 \quad u'_2 \quad v'_2 \quad u'_5 \quad v'_5 \quad u'_4 \quad v'_4)^T \end{aligned}$$

donde los elementos sin prima se indican en la numeración local y los que llevan prima en la global. Sustituyendo los valores indicados en la tabla 2 este vector resulta, en centímetros,

$$\mathbf{a}_e = (0,03632 \quad -0,09156 \quad 0,04079 \quad -0,11773 \quad 0,05454 \quad -0,11824 \quad 0,04858 \quad -0,09209)^T$$

Empezaremos calculando las tensiones en el punto 1 (coincide en ambas numeraciones), cuyas coordenadas (ξ, η) son $(-1, -1)$. Sustituyendo estos valores en la expresión genérica de \mathbf{B} obtenemos que la matriz de deformaciones, en este punto, vale

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,08 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,16 \\ -0,16 & -0,08 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0,16 & 0 \end{bmatrix}$$

Así pues, mediante el producto $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e$, cuyos factores ya son todas matrices de coeficientes numéricos conocidos, obtenemos las tensiones en el nudo 1, que resultan

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 106,45 \\ -4,15 \\ 16,15 \end{Bmatrix} \text{ kp/cm}^2$$

Lo único que cambia al pasar a los restantes nodos del elemento es la matriz **B**, que depende de las coordenadas locales del nudo en el que se calcule. Estas son, respectivamente, (1,-1), (1,1) y (-1,1) para los nodos 2, 5 y 4 de la numeración global. Operando del mismo modo obtenemos las tensiones en los restantes nudos, que se resumen en la tabla siguiente

Punto	X (cm)	Y (cm)	σ_x (kp/cm ²)	σ_y (kp/cm ²)	τ_{xy} (kp/cm ²)
1	87,50	18,75	106,5	-4,15	-16,5
2	100,00	18,75	106,7	-3,15	13,3
4	87,50	25,00	143,7	3,3	-16,3
5	100,00	25,00	143,9	4,3	13,5

Comparando estos valores con los de la solución analítica se observa que para σ_x se han obtenido valores más o menos razonables, con errores relativos del -5,37%, -1,25%, -4,20% y -0,07% en los nudos 1, 2, 4 y 5, respectivamente. Los valores de las tensiones σ_y son relativamente pequeños comparados con los anteriores, del orden del 2% al 4% de aquellos, pero no son nulos como indica la solución analítica. En cuanto a las tensiones tangenciales, son diferentes en orden de magnitud, entre 5 y 6 veces mayores que lo esperado.

En el elemento B, el vector de desplazamientos nodales resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4)^T = \\ &= (u'_2 \quad v'_2 \quad u'_3 \quad v'_3 \quad u'_6 \quad v'_6 \quad u'_5 \quad v'_5)^T \end{aligned}$$

es decir

$$\mathbf{a}_e = (0,04079 \quad -0,11773 \quad 0,04508 \quad -0,14682 \quad 0,06026 \quad -0,14731 \quad 0,05454 \quad -0,11824)^T$$

expresado en centímetros. Operando como en el caso anterior obtenemos

Punto	X (cm)	Y (cm)	σ_x (kp/cm ²)	σ_y (kp/cm ²)	τ_{xy} (kp/cm ²)
2	100,00	18,75	102,2	-4,05	-15,9
3	112,50	18,75	102,4	-3,05	12,7
5	100,00	25,00	137,9	3,1	-15,7
6	112,50	25,00	138,1	4,1	12,9

De nuevo los valores de σ_x son aceptables, con errores del -5,4%, -1,1%, -4,2% y 0,07% en los nudos 2, 3, 5 y 6, respectivamente, los de σ_y son pequeños y los de τ_{xy} están fuera de orden de magnitud.

Por lo visto hasta ahora la solución no es muy satisfactoria. Vamos a centrarnos en los nudos 2 y 5, comunes a los elementos A y B. Si promediamos los valores de las tensiones obtenidas para el mismo punto en uno y otro elemento llegamos a

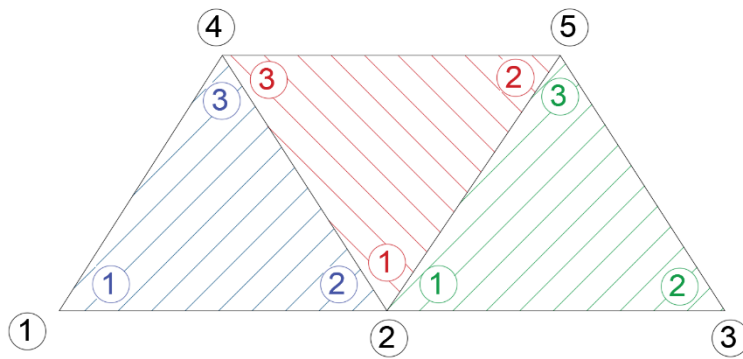
Punto	X (cm)	Y (cm)	σ_x (kp/cm ²)	σ_y (kp/cm ²)	τ_{xy} (kp/cm ²)
2	100,00	18,75	104,4	-3,6	-1,3
5	100,00	25,00	140,9	3,7	-1,1

Donde los valores de σ_x siguen siendo aceptables, con errores del -3,3% en 2 y del -2,2% en 5; los valores de σ_y siguen siendo pequeños y los de τ_{xy} han disminuido drásticamente y ya están en orden de magnitud, aunque sigan sin dar 0 en el borde (nudo 5). Nótese que en 2 el cálculo

es incompleto, puesto que habría que incluir en la media los valores obtenidos en los otros dos elementos que comparten este nudo.

Con esto vemos que los resultados pueden presentar valores diferentes en el mismo punto según en qué elementos se calculen, que además pueden ser muy diferentes a los valores esperados, pero los errores se amortiguan mucho cuando se promedian todos los valores obtenidos en un mismo punto.

Ejercicio nº 4



La figura muestra el área plana objeto de este ejercicio, que se pretende analizar en tensión plana. Se ha dividido en tres elementos finitos triangulares, cuyas matrices de rigidez y vectores de fuerzas nodales se indican más adelante.

La numeración global de los nudos está escrita, en negro, alrededor del cuerpo; la local de cada elemento en el interior de éste, escrita en el mismo color elegido para señalarlo.

El cuerpo tiene impedidos los desplazamientos horizontal y vertical en el nudo 2 y tiene impuesto un movimiento $u = 0,02$ en el nudo 4.

Todos los datos están dados en unidades coherentes.

Se pide:

- 1) Ensamblar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del cuerpo en conjunto
- 2) Sustituir en ellos las condiciones de contorno cinemáticas indicadas más arriba.

Matrices de rigidez y vectores de fuerzas nodales

Elemento 1

Num. Local	1	2	3					
Num. Global	1	2	4					
	13	10	0	7	4	6	1	1
	10	14	9	3	5	5	2	0
	0	9	11	4	10	7	4	5
	7	3	4	15	4	9	3	8
	4	5	10	4	15	3	4	20
	6	5	7	9	3	16		

Elemento 2

Num. Local	1	2	3					
Num. Global	2	5	4					
	17	6	9	5	10	6	2	8
	6	16	2	7	3	6	5	3
	9	2	15	2	10	1	3	0
	5	7	2	16	6	1	4	0
	10	3	10	6	20	9		2
	6	6	1	1	9	17		13

Elemento 3

Num. Local	1	2	3					
Num. Global	2	3	5					
	14	9	6	2	4	9	2	3
	9	18	8	10	5	1	3	1
	6	8	19	5	5	2	4	3
	2	10	5	15	7	7	5	9
	4	5	5	7	17	5	3	9
	9	1	2	7	5	10		19

Resolución

No está escrita. Se expone en

<https://media.upv.es/#/portal/video/d426dee0-6c42-11ea-ab9b-6df6378bebd6>

Ejercicio nº 5

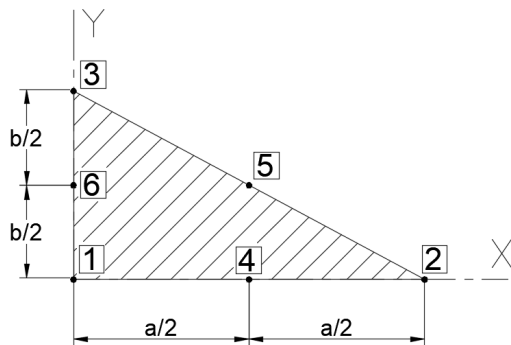


Figura 1

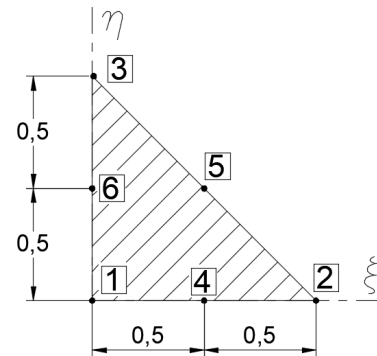


Figura 2

Sea un elemento finito triangular de seis nodos, previsto para estudiar problemas de tensión plana, cuyos lados y espesor miden a , b y h , respectivamente (figura 1). Se basa en las siguientes funciones de interpolación

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2 \\
 N_2(\xi, \eta) &= 2\xi^2 - \xi \\
 N_3(\xi, \eta) &= 2\eta^2 - \eta \\
 N_4(\xi, \eta) &= 4(\xi - \xi\eta - \xi^2) \\
 N_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta \\
 N_6(\xi, \eta) &= 4(\eta - \xi\eta - \eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{E1}$$

definidas en las coordenadas normalizadas descritas en la figura 2, que se relacionan con las coordenadas iniciales mediante

$$\xi = X/a \quad , \quad \eta = Y/b
 \tag{E2}$$

Se pide:

- 1) Determinar las fuerzas nodales que representan la acción del peso propio, sabiendo que el peso específico es g y que la gravedad actúa en la dirección del eje Y y en el sentido negativo de éste.
- 2) Determinar las fuerzas nodales que representan la acción de una fuerza $\bar{\mathbf{t}} = -q_0 \frac{X}{a} \mathbf{j}$ kN/m² que actúa sobre el lado 3-2 del elemento.

Resolución

1) Fuerzas nodales originadas por las fuerzas en el interior del dominio

Según hemos visto en las clases de teoría, las fuerzas nodales (equilibrantes) que representan el efecto de las fuerzas de volumen se determinan como

$$\mathbf{f}_b = - \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV$$

donde, en nuestro caso, $\mathbf{b} = -\gamma \mathbf{j}$ y la matriz de funciones de forma \mathbf{N} ,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

cuyas componentes proporciona el enunciado. Como todas las funciones que intervienen en el problema, por hipótesis, son independientes de Z , tendremos

$$\mathbf{f}_b = - \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV = - \iint_A \left(\mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} \int_{-h/2}^{h/2} dZ \right) dXdY = - \iint_A \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h dXdY$$

Para escribir los límites de integración debemos fijarnos (figura 1) en que, mientras X varía entre 0 y a , Y lo hace entre 0 y el valor de la ordenada que le corresponde a X en la recta 2-3.

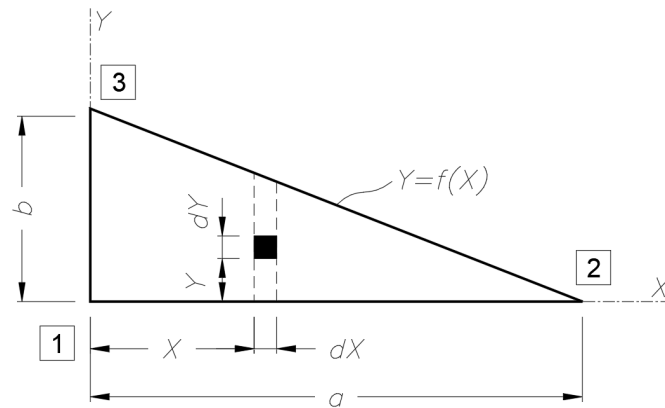


Figura 1

Como la recta 2-3 tiene por ecuación

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1 \Leftrightarrow Y = b \left(1 - \frac{X}{a} \right)$$

podemos escribir la integral anterior como Las transformaciones de las integrales al cambiar a coordenadas generalizadas también se explicaron en dicho ejercicio.

$$\mathbf{f}_b = \iint_A \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h dXdY = - \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{X}{a})} \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h dXdY$$

Dado que \mathbf{b} es constante, ahora bastaría utilizar las ecuaciones (E2) del enunciado para expresar \mathbf{N} en función de X e Y e integrar. Las integrales no tienen ninguna dificultad puesto que el integrando siempre es un polinomio.

No obstante, probablemente es más sencillo plantear el problema usando las coordenadas normalizadas ξ y η . Para ello, en primer lugar, escribiremos la ecuación de la recta 2-3 utilizándolas:

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1 \Leftrightarrow \xi + \eta = 1 \Leftrightarrow \eta = 1 - \xi$$

(nótese que la ecuación de la recta, que hemos hallado sustituyendo la definición de las coordenadas generalizadas en la hallada previamente en función de X e Y , podía haberse deducido directamente de la figura 2 del enunciado). Con esto tenemos resulta la expresión de los límites de integración en coordenadas normalizadas; en cuanto a la diferencial de área tendremos

$$dA = dXdY = |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \text{Abs} \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \right) d\xi d\eta = \text{Abs} \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \right) d\xi d\eta = ab d\xi d\eta$$

con lo que, finalmente, la expresión buscada resulta

$$\mathbf{f}_b = - \iint_A \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h dXdY = - \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} h ab d\eta d\xi$$

Ahora, tras evaluar el integrando

$$\begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_5(\xi, \eta) \\ N_6(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_6(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -N_1(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_2(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_3(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_4(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_5(\xi, \eta) \gamma \\ 0 \\ -N_6(\xi, \eta) \gamma \end{Bmatrix}$$

basta calcular las seis integrales. Desarrollamos, como ejemplo, la segunda de ellas, correspondiente al cuarto término del vector de fuerzas nodales

$$\begin{aligned} f_{b,4} &= - \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (-N_1(\xi, \eta) \gamma) hab d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (2\xi^2 - \xi) \gamma hab d\eta d\xi = \\ &= \gamma hab \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (2\xi^2 - \xi) d\eta d\xi = \gamma hab \int_0^1 (2\xi^2 - \xi) [\eta]_0^{1-\xi} d\xi = \\ &= \gamma hab \int_0^1 (2\xi^2 - \xi)(1 - \xi) d\xi = \gamma hab \int_0^1 (-2\xi^3 + 3\xi^2 - \xi) d\xi = \\ &= \gamma hab \left[-\frac{1}{2}\xi^4 + \xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2 \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

Dejamos al lector el desarrollo de las restantes integrales.

En principio el resultado obtenido para $f_{b,4}$ parece extraño, aunque es correcto. Obtenidas todas las integrales se comprueba que las fuerzas nodales correspondientes al peso propio son nulas en los nodos 1, 2 y 3 (vértices del triángulo) y equilibran la tercera parte del peso cada una en los nodos 4, 5 y 6, centros de los lados.

Nótese que la determinación de la matriz de rigidez de este elemento sería similar a la de la matriz del elemento rectangular desarrollada en el ejercicio 1. Los únicos cambios serían los asociados a la integración sobre un recinto triangular, que se efectuaría como se acaba de exponer.

2) *Fuerzas nodales originadas por las fuerzas en el contorno*

El enunciado indica que las únicas fuerzas de superficie son las que actúan sobre la cara 2-3. Según hemos visto en las clases de teoría, las fuerzas nodales (equilibrantes) que representan el efecto de tales fuerzas se determinan como

$$\mathbf{f}_{\bar{t}} = - \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA$$

donde A representa el área de la cara 2-3. Operando como en el apartado anterior podemos transformar esta expresión en

$$\mathbf{f}_{\bar{t}} = - \int_{2-3} [\mathbf{N}^T(\xi, \eta)]_{2-3} \mathbf{q}(X) h d\ell$$

donde hemos tenido en cuenta que $dA = h d\ell$ donde $d\ell$ representa la diferencial de arco sobre el lado 2-3. Para calcularlo, partiremos de las ecuaciones paramétricas del lado 2-3, que de acuerdo con lo anterior son

$$\left. \begin{array}{l} X = t \\ Y = b \left(1 - \frac{t}{a}\right) \end{array} \right\} \quad \text{o} \quad \left. \begin{array}{l} \xi = t \\ \eta = 1 - t \end{array} \right\}$$

La figura 2 la relación entre $d\ell$, dX y dY

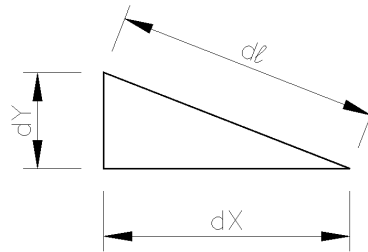


Figura 2

que permite escribir

$$d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2}$$

En nuestro caso, y escogiendo trabajar en las coordenadas normalizadas, sustituiremos en la relación anterior la definición (E2) de estas y, a continuación, recurriremos a las ecuaciones paramétricas de 2-3 expresadas en función de dichas coordenadas para obtener la expresión final de $d\ell$.

$$d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2} = \sqrt{(ad\xi)^2 + (bd\eta)^2} = \sqrt{(adt)^2 + (-bdt)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

(También podríamos haber operado usando X e Y , y procediendo de manera similar. En tal caso, la expresión de $d\ell$ hubiera resultado diferente como también lo hubiera sido el parámetro t .)

Para establecer los límites de integración deberemos fijarnos en el valor que adopta el parámetro t en los extremos del intervalo. En coordenadas normalizadas el punto 3 es (0,1) y

el punto 2 es (1,0). Sustituyendo estos valores en las ecuaciones paramétricas del lado se deduce, para el punto 3

$$\left. \begin{array}{l} 0 = t \\ 1 = 1 - t \end{array} \right\} \rightarrow t = 0$$

y para el 2

$$\left. \begin{array}{l} 1 = t \\ 0 = 1 - t \end{array} \right\} \rightarrow t = 1$$

Luego habrá que integrar entre 0 y 1. Nótese que, en cada caso, basta con sustituir en una de las dos ecuaciones para determinar el valor del parámetro.

Por otra parte, para expresar el integrando en coordenadas normalizadas deberemos expresar la fuerza exterior en función de estas. Sustituyendo en su definición las ecuaciones (E2) del enunciado se obtiene

$$\bar{\mathbf{t}} = -q_0 \frac{X}{a} \mathbf{j} = -q_0 \xi \mathbf{j}$$

Con todo ello, el integrando resulta

$$\left[\begin{array}{cc} N_1(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_5(\xi, \eta) \\ N_6(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_6(\xi, \eta) \end{array} \right]_{\substack{\xi=t \\ \eta=1-t}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -q_0 \xi \end{array} \right\}_{\substack{\xi=t \\ \eta=1-t}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -N_1(\xi, \eta) q_0 \xi \\ 0 \\ -N_2(\xi, \eta) q_0 \xi \\ 0 \\ -N_3(\xi, \eta) q_0 \xi \\ 0 \\ -N_4(\xi, \eta) q_0 \xi \\ 0 \\ -N_5(\xi, \eta) q_0 \xi \\ 0 \\ -N_6(\xi, \eta) q_0 \xi \end{array} \right\}_{\substack{\xi=t \\ \eta=1-t}}$$

donde los subíndices indican que las expresiones se han de particularizar al lado 2-3 sustituyendo en ellas las ecuaciones paramétricas del lado. Como en el caso anterior, vamos a determinar, como ejemplo, la segunda de las integrales que define la componente $f_{\bar{t},4}$ del vector de fuerzas nodales.

$$\begin{aligned} f_{\bar{t},4} &= - \int_0^1 [(2\xi^2 - \xi)(-q_0)]_{\substack{\xi=t \\ \eta=1-t}} \sqrt{a^2 + b^2} dt = q_0 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^1 (2t^3 - t^2) dt = \\ &= q_0 \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{q_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{6} \end{aligned}$$

Capítulo 3.

Método de los Elementos Finitos: elementos isoparamétricos y condensación estática

Los primeros tres ejercicios de este capítulo son la extensión de los tres primeros del capítulo anterior al caso de elementos isoparamétricos. Así pues, se ocupan de la determinación de la matriz de rigidez, el cálculo de las fuerzas nodales y el cálculo de tensiones en los nodos de un elemento finito cuadrangular isoparamétrico del elemento rectangular estudiado en el capítulo anterior. En el tercer ejercicio se muestra, también, el procedimiento de extrapolación a los nodos de las tensiones calculadas en los puntos de Gauss de la integración mínima, donde, como es bien sabido, estos valores alcanzan la mayor precisión.

El cuarto ejercicio muestra la aplicación del procedimiento de condensación estática, en este caso para eliminar un nodo interior de un elemento finito.

Como en el capítulo anterior, todos los ejercicios se plantean en el ámbito de los problemas de tensión plana.

Como alternativa al texto que sigue, la explicación de estos ejercicios puede encontrarse, grabada en vídeo, en <https://media.upv.es/#/portal/channel/ba3dd350-d2aa-11ec-af87-addb6a391635>.

Ejercicio nº 1

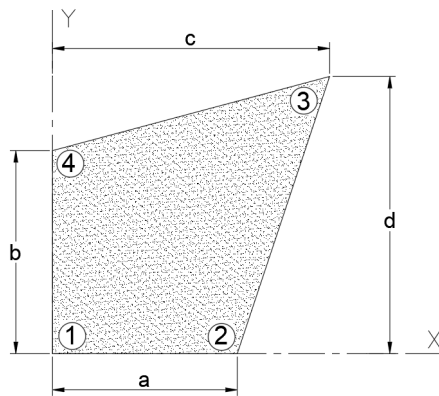


Figura 1

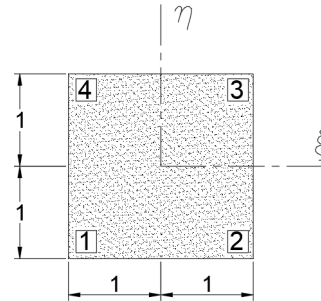


Figura 2

Para resolver ciertos problemas de tensión plana se necesita determinar la matriz de rigidez del elemento finito cuadrangular, de espesor h , representado en la figura 1. La forma cuadrangular se conseguirá mediante la distorsión isoparamétrica de un elemento rectangular basado en las siguientes funciones de interpolación

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned}
 \tag{E1}$$

Se pide:

- 1) Definir la interpolación de la geometría, es decir, relación entre las coordenadas (X, Y) de la geometría real y las (ξ, η) de la forma normalizada. Para visualizarla, determinar las coordenadas (X, Y) de un número de puntos que resulte suficiente para mostrar las líneas coordenadas $\xi = -1; -0,5; 0; 0,5$ y 1 , así como las líneas coordenadas $\eta = -1; -0,5; 0; 0,5$ y 1 .
- 2) Determinar la matriz **B** del elemento cuadrangular isoparamétrico.
- 3) Establecer la estructura de la matriz de rigidez, proponiendo una expresión general que permita determinarla (o programar su determinación).
- 4) Hallar el elemento K_{2-5} de la mencionada matriz de rigidez para un elemento finito de dimensiones $a = b = 2$ m, $c = d = 4$ m y $h = 0,1$ m formado por un material de características $E = 30$ GPa y $\nu = 0,2$.

Resolución

1) Interpolación de la geometría

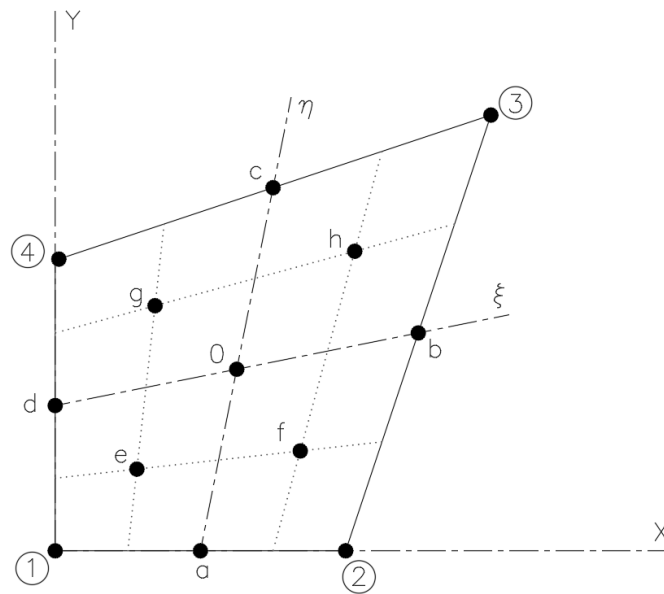
$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix}$$

donde N_i representa las funciones de forma dadas en el enunciado y

X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4
0	0	a	0	c	d	0	b

Así pues:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)a + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)c \\ Y &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)d + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)b \end{aligned} \quad (1)$$



Punto	ξ	η	X	Y
1	-1	-1	0	0
2	1	-1	a	0
3	1	1	c	d
4	-1	1	0	b
a	0	-1	a/2	0
b	1	0	(a+c)/2	d/2
c	0	1	c/2	(b+d)/2
d	-1	0	0	b/2

Punto	ξ	η	X	Y
e	-0,5	-0,5	(3a+c)/16	(d+3b)/16
f	0,5	-0,5	(9a+3c)/16	(3d+b)/16
g	-0,5	0,5	(a+3c)/16	(3d+9b)/16
h	0,5	0,5	(3a+9c)/16	(9d+3b)/16
O	0	0	(a+c)/4	(d+b)/4

2) Determinación de la matriz [B]

Interpolación de los desplazamientos

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e$$

donde N_i representa las funciones de forma dadas en el enunciado.

Determinación de las deformaciones aproximadas

$$\begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}_X \\ \hat{\epsilon}_Y \\ \hat{\gamma}_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N_{1,X} & 0 & N_{2,X} & 0 & N_{3,X} & 0 & N_{4,X} & 0 \\ 0 & N_{1,Y} & 0 & N_{2,Y} & 0 & N_{3,Y} & 0 & N_{4,Y} \\ N_{1,Y} & N_{1,X} & N_{2,Y} & N_{2,X} & N_{3,Y} & N_{3,X} & N_{4,Y} & N_{4,X} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{NB}\mathbf{a}_e$$

siendo

$$N_{i,X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \quad ,, \quad N_{i,Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

Nótese que, hasta este punto, el proceso es idéntico al llevado a cabo en el ejercicio 1 del capítulo anterior para determinar la matriz \mathbf{B} de un elemento finito rectangular basado en las mismas funciones de forma. Sólo cambiará el cálculo de las derivadas de estas.

Como en el caso del elemento rectangular, agrupando de dos en dos las columnas de la matriz \mathbf{B} podemos expresarla como

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad \text{siendo} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,X} & 0 \\ 0 & N_{i,Y} \\ N_{i,Y} & N_{i,X} \end{bmatrix}$$

Cálculo de las derivadas de las funciones de forma respecto de X e Y

Teniendo en cuenta la regla de la cadena podemos establecer

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix}$$

donde la matriz que aparece en el segundo modo de escribir la expresión anterior es el jacobiano de la transformación de (X, Y) en (ξ, η) , traspuesto. La representaremos por \mathbf{J}^T . Invirtiendo la relación anterior se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

que proporciona las componentes de **B** y donde todos los términos del segundo miembro son fáciles de determinar derivando bien las relaciones (E1) del enunciado, bien las relaciones (1) halladas con anterioridad.

Empecemos, pues, calculando las componentes de \mathbf{J}^T a partir de (1). Resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1 - \eta)a + \frac{1}{4}(1 + \eta)c \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1 + \eta)d - \frac{1}{4}(1 + \eta)b \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)a + \frac{1}{4}(1 + \xi)c \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)d + \frac{1}{4}(1 - \xi)b \end{aligned}$$

Análogamente, derivando (E1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{-1}{4}(1 - \eta) & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= \frac{-1}{4}(1 - \xi) \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1 - \eta) & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= \frac{-1}{4}(1 + \xi) \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1 + \eta) & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= \frac{-1}{4}(1 + \eta) & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \end{aligned}$$

Así pues, podemos calcular las componentes de **B** como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - \eta)a + \frac{1}{4}(1 + \eta)c & \frac{1}{4}(1 + \eta)d - \frac{1}{4}(1 + \eta)b \\ \frac{-1}{4}(1 + \xi)a + \frac{1}{4}(1 + \xi)c & \frac{1}{4}(1 + \xi)d + \frac{1}{4}(1 - \xi)b \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde ya son conocidos todos los términos. La única dificultad que puede plantear esta expresión es la inversión de \mathbf{J}^T , no demasiado laboriosa en este caso concreto. No obstante, si recurrimos a la integración numérica, no necesitaremos la expresión simbólica del integrando sino sólo su valor numérico en los puntos de integración, y podemos calcular $N_{i,X}$ y $N_{i,Y}$ en un punto a partir de los valores de $N_{i,\xi}$, $N_{i,\eta}$ y $(\mathbf{J}^T)^{-1}$ en él, y esta última matriz se puede determinar invirtiendo la particularización de \mathbf{J}^T a tal punto, que es una matriz de coeficientes numéricos. Veremos todo esto más adelante, cuando tratemos de determinar una componente de **K**.

3) Expresión genérica de la matriz de rigidez [K]

Diferencial de volumen y límites de integración

Como el espesor de la laja en tensión plana es constante y que todas las funciones que intervienen en un problema de elasticidad bidimensional son constantes en él, podemos expresar el diferencial de volumen como

$$dV = h dXdY$$

y transformar la integral de volumen en una de superficie.

Por otra parte, tenemos que⁵

$$dXdY = |J| d\xi d\eta$$

donde |J| denota el valor absoluto del determinante del jacobiano de la transformación.

Por último, en cuanto a los límites de integración, dado que el cambio (1) transforma el cuadrilátero inicial en el cuadrado limitado por $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, serán, simplemente, -1 y 1 para cada una de las variables.

Matriz constitutiva

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Matriz de rigidez

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) dV = \iint_A \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) h dXdY \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) h |J| d\xi d\eta \end{aligned}$$

donde el producto matricial que aparece en el integrando adopta exactamente la misma expresión formal que en el elemento rectangular estudiado con anterioridad

$$\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_4^T \end{pmatrix} \mathbf{D} (\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j &= \begin{bmatrix} N_{i,X} & 0 & N_{i,Y} \\ 0 & N_{i,Y} & N_{i,X} \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} \\ N_{j,Y} & N_{j,X} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} N_{i,X} & \nu N_{i,X} & \frac{1}{2}(1-\nu) N_{i,Y} \\ \nu N_{i,Y} & N_{i,Y} & \frac{1}{2}(1-\nu) N_{i,X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} \\ N_{j,Y} & N_{j,X} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

⁵ KRASNOV, M., KISELIOV, A. MAKARENKO, G. Y SHIKIN, E. (1990) *Curso de matemáticas superiores para ingenieros*. Vol. 2. Editorial MIR, Moscú, URSS. Página 313.

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} N_{i,X}N_{j,X} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,Y}N_{j,Y} & \nu N_{i,X}N_{j,Y} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,Y}N_{j,X} \\ \nu N_{i,Y}N_{j,X} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,X}N_{j,Y} & N_{i,Y}N_{j,Y} + \frac{1}{2}(1-\nu)N_{i,X}N_{j,X} \end{bmatrix}$$

y, a partir de él, una submatriz genérica de la matriz de rigidez puede determinarse como

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j(\xi, \eta) h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

A partir de la estructura de $\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j$ es inmediato observar que $\mathbf{K}_{ji} = \mathbf{K}_{ij}^T$, es decir, que la matriz de rigidez es simétrica.

4) Elemento (2,5) de la matriz de rigidez

Se pide para el caso particular $a = b = 2$ m, $c = d = 4$ m, $h = 0,1$ m, $E = 30$ GPa y $\nu = 0,2$. Obtendremos el resultado pedido en kN/m.

La componente (2,5) de la matriz de rigidez es la componente (2,1) de la submatriz \mathbf{K}_{13} de ésta.

$$(\mathbf{K}_{13})_{2,1} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\nu N_{1,Y} N_{3,X} + \frac{1}{2}(1-\nu) N_{1,X} N_{3,Y} \right) h |\mathbf{J}| d\xi d\eta =$$

Evaluaremos la integral mediante una cuadratura de Gauss-Legendre de 2x2 puntos. Así pues, tendremos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_i)$$

donde n es el número de puntos de integración, ξ_i y η_i las coordenadas de estos puntos y w_i y w_j los pesos correspondientes. Coordenadas y pesos son características del método y pueden encontrarse tabulados en cualquier libro de cálculo numérico y en nuestro caso son:

$$\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ,, \quad \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ,, \quad w_1 = w_2 = 1$$

La cuadratura de Gauss-Legendre integra exactamente un polinomio de grado $2n-1$ siendo n el número de puntos de integración, como ya se ha mencionado. En los elementos isoparamétricos el integrando no es polinomio sino una función racional, como consecuencia de la inversa de la matriz jacobiana que aparece en la definición de las derivadas de las funciones de forma (2); como norma, se adopta el mismo número de puntos de integración que en elemento finito inicial, sin distorsión isoparamétrica, y por ello no se obtiene el valor exacto de la integral, sino sólo una aproximación suficiente.

Así pues, necesitamos evaluar las derivadas parciales de N_1 y N_3 respecto a X e Y y el determinante de la matriz jacobiana $|\mathbf{J}|$ en cada punto de Gauss. Para hacerlo sabemos que

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{-1}{4}(1 - \eta) \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{-1}{4}(1 - \xi)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)$$

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \eta) + (1 + \eta) & (1 + \eta) - \frac{1}{2}(1 + \eta) \\ \frac{-1}{2}(1 + \xi) + (1 + \xi) & (1 + \xi) + \frac{1}{2}(1 - \xi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{i,X} \\ N_{i,Y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^T]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad ,, \quad \det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}^T)$$

donde la expresión de \mathbf{J}^T se ha obtenido sustituyendo en (2) los valores de a , b , c y d . Con ellas podemos calcular el integrando en cada punto mediante

$$\text{Integrando} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu N_{1,Y} N_{3,X} + \frac{1}{2}(1 - \nu) N_{1,X} N_{3,Y} \right) h |\mathbf{J}|$$

Estas operaciones resultan laboriosas, pero son fáciles de programar en una hoja de cálculo. Operando de este modo se obtiene

Punto 1	$\xi = -0,57735027$	$\eta = -0,57735027$				
$N_{1,\xi}$	-0,39433757	$\mathbf{J}^T =$	1,21132487	0,21132487	$N_{1,X}$	-0,27718528
$N_{1,\eta}$	-0,39433757		0,21132487	1,21132487	$N_{1,Y}$	-0,27718528
$N_{3,\xi}$	0,105662433	$(\mathbf{J}^T)^{-1} =$	0,85145685	-0,14854315	$N_{3,X}$	0,07427157
$N_{3,\eta}$	0,105662433		-0,14854315	0,85145685	$N_{3,Y}$	0,07427157
abs(det (\mathbf{J}^T)) = 1,422649731		Integrando = -54915,1336				

Punto 2	$\xi = 0,57735027$	$\eta = -0,57735027$				
$N_{1,\xi}$	-0,39433757	$\mathbf{J}^T =$	1,21132487	0,21132487	$N_{1,X}$	-0,34150635
$N_{1,\eta}$	-0,10566243		0,78867513	1,78867513	$N_{1,Y}$	0,09150635
$N_{3,\xi}$	0,105662433	$(\mathbf{J}^T)^{-1} =$	0,89433757	-0,10566243	$N_{3,X}$	0,05283122
$N_{3,\eta}$	0,394337567		-0,39433757	0,60566243	$N_{3,Y}$	0,19716878
abs(det (\mathbf{J}^T)) = 2		Integrando = -162292,99				

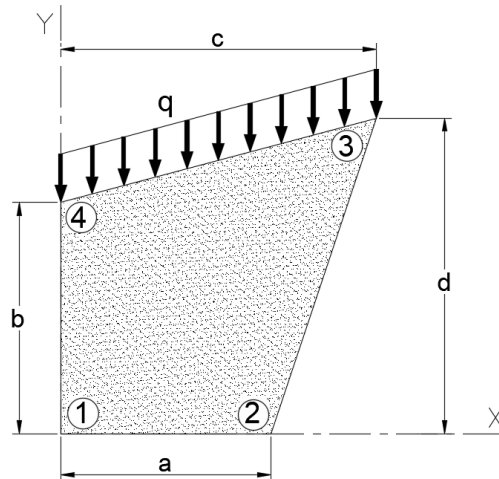
Punto 3	$\xi = 0,57735027$	$\eta = 0,57735027$				
$N_{1,\xi}$	-0,10566243	$\mathbf{J}^T =$	1,78867513	0,78867513	$N_{1,X}$	-0,04099654
$N_{1,\eta}$	-0,10566243		0,78867513	1,78867513	$N_{1,Y}$	-0,04099654
$N_{3,\xi}$	0,394337567	$(\mathbf{J}^T)^{-1} =$	0,69399769	-0,30600231	$N_{3,X}$	0,15300115
$N_{3,\eta}$	0,394337567		-0,30600231	0,69399769	$N_{3,Y}$	0,15300115
abs(det (\mathbf{J}^T)) = 2,577350269		Integrando = -30312,1392				

Punto 4	$\xi = -0,57735027$	$\eta = 0,57735027$				
$N_{1,\xi}$	-0,10566243	$\mathbf{J}^T =$	1,78867513	0,78867513	$N_{1,X}$	0,09150635
$N_{1,\eta}$	-0,39433757		0,21132487	1,21132487	$N_{1,Y}$	-0,34150635
$N_{3,\xi}$	0,394337567	$(\mathbf{J}^T)^{-1} =$	0,60566243	-0,39433757	$N_{3,X}$	0,19716878
$N_{3,\eta}$	0,105662433		-0,10566243	0,89433757	$N_{3,Y}$	0,05283122
$\text{abs}(\det(\mathbf{J}^T)) = 2$			Integrando = -72082,0102			

y, como los pesos valen 1 en todos los casos, la suma de los valores determinados como *integrando* en cada punto determina el valor de la integral

$$(\mathbf{K}_{13})_{2,1} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\nu N_{1,Y} N_{3,X} + \frac{1}{2}(1-\nu) N_{1,X} N_{3,Y} \right) h |\mathbf{J}| d\xi d\eta = -319602 \text{ kN/m}$$

Ejercicio nº 2



Sobre un elemento finito como el estudiado en el ejercicio 1 actúan, exclusivamente, las fuerzas $\mathbf{q} = -q_0\mathbf{j}$ indicadas en la figura. Se pide determinar las fuerzas nodales sobre el elemento, sabiendo que q_0 es una constante con dimensiones de presión.

Resolución

1) Planteamiento y operaciones previas

$$\mathbf{f}_{\bar{t}} = - \int_{\text{Cara } 3-4} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dA = - \int_{s_3}^{s_4} [\mathbf{N}^T(\xi, \eta)]_{\eta=1} \mathbf{q} h ds$$

Teniendo en cuenta que el espesor h es constante y que todas las funciones que intervienen en el problema de tensión plana son constantes en él, la integral sobre la cara 3-4 se transforma en una sobre la arista 3-4 haciendo $dA=hds$, donde s es la longitud de arco sobre 3-4. Además, hay que tener en cuenta que la distorsión isoparamétrica transforma el lado 3-4 del cuadrilátero en el correspondiente a $\eta=1$ en el cuadrado en coordenadas normalizadas, por lo que las funciones de forma se deben particularizar en $\eta = 1$.

Nótese que la presencia de h se debe a que el enunciado nos daba las fuerzas de superficie correspondientes al problema 3D; si nos hubieran dado las fuerzas generalizadas del problema 2D, que son fuerzas por unidad de longitud, hubiéramos tenido

$$\mathbf{f}_{\bar{t}} = - \int_{\mathcal{L}} \mathbf{N}^T \mathbf{q} ds = - \int_{s_3}^{s_4} [\mathbf{N}^T(\xi, \eta)]_{\eta=1} \mathbf{q} ds$$

En primer lugar determinaremos ds :

$$ds = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2}$$

donde

$$dX = \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \quad , , \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Y}{\partial \eta} d\eta$$

que se deben particularizar al lado 3-4, es decir, a $\eta = 1$, imponiendo esta condición y $d\eta = 0$, consecuencia del valor constante de η a lo largo del lado. Con todo ello, estas relaciones quedarán

$$dX = \left[\frac{\partial X}{\partial \xi} \right]_{\eta=1} d\xi \quad , , \quad dY = \left[\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right]_{\eta=1} d\xi$$

Recurriendo ahora a las derivadas de las coordenadas X e Y determinadas en el problema anterior

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial X}{\partial \xi} \right]_{\eta=1} &= \left[\frac{1}{4}(1-\eta)a + \frac{1}{4}(1+\eta)c \right]_{\eta=1} = \frac{1}{2}c \\ \left[\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right]_{\eta=1} &= \left[\frac{1}{4}(1+\eta)d - \frac{1}{4}(1+\eta)b \right]_{\eta=1} = \frac{1}{2}(d-b) \end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$ds = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(d-b)\right)^2} d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + (d-b)^2} d\xi$$

2) Evaluación del integrando

$$\begin{bmatrix} N_1(\xi, 1) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, 1) \\ N_2(\xi, 1) & 0 \\ 0 & N_2(\xi, 1) \\ N_3(\xi, 1) & 0 \\ 0 & N_3(\xi, 1) \\ N_4(\xi, 1) & 0 \\ 0 & N_4(\xi, 1) \end{bmatrix} q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \\ \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{2}(1+\xi) \\ 0 \\ \frac{-1}{2}(1-\xi) \end{Bmatrix}$$

3) Integrales

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{-1}{2}(1+\xi) q_0 h \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + (d-b)^2} d\xi &= -\frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{4} \int_{-1}^1 (1+\xi) d\xi \\ &= -\frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{4} \left[\xi + \frac{\xi^2}{2} \right]_{-1}^1 = -\frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{-1}{2}(1-\xi) q_0 h \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + (d-b)^2} d\xi &= -\frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{4} \int_{-1}^1 (1-\xi) d\xi \\ &= -\frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{4} \left[\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_{-1}^1 = -\frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{2} \end{aligned}$$

4) *Fuerzas nodales*

$$\mathbf{f}_{\bar{t}} = \frac{q_0 h \sqrt{c^2 + (d-b)^2}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Nótese, el signo desaparece porque el que interviene en el integrando se compensa con el que afectaba a toda la integral.

Ejercicio nº 3

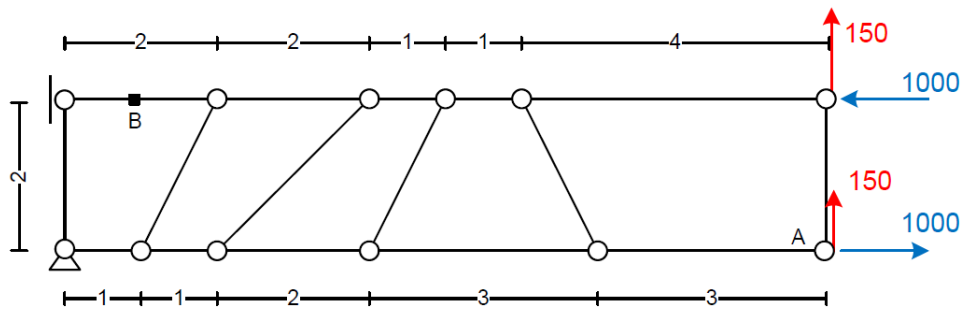


Figura 1: definición del problema

Sea una laja rectangular de 10 x 2 unidades de longitud (udl en adelante) y 1 udl de espesor, formada por un material de Hooke ($E = 1500$ unidades de presión —udp en adelante—, $\nu = 0,25$), sometida al sistema de fuerzas dibujado en azul (el dibujado en rojo no se analizará en este ejercicio). Se discretiza en elementos finitos irregulares como muestra la figura. La laja tiene impedidos los desplazamientos según X en los dos nodos del lado izquierdo y también según Y en el nodo inferior de dicho lado. El ejemplo procede Celigüeta⁶ (2011, pág. 80). En este texto se indica que, al analizar la ménsula utilizando la formulación isoparamétrica del elemento bilineal estándar de 4 nodos, que ya se ha manejado en los problemas anteriores, se obtiene un desplazamiento vertical en A de 45,65 udl y una tensión de -1761 udp en B, punto medio del lado indicado en la figura. Los resultados tienen poca precisión, pues los valores esperados, hallados a partir de la solución teórica del problema, son de 100 udl y -3000 udp, respectivamente. Se debe a que la malla es demasiado burda para obtener resultados precisos con este elemento.

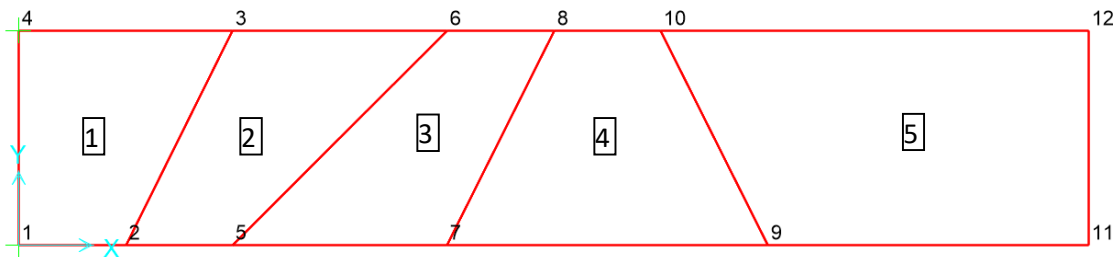


Figura 2: Numeración de nudos y elementos en el modelo de SAP2000

Procesado el modelo con SAP2000 (la figura 2 muestra la numeración de nudos) se han obtenido los valores de desplazamientos y tensiones que figuran tabulados al final del enunciado. (Compruébese que el desplazamiento vertical del nudo 11 es 45,65 udl, como se esperaba.)

Se pide:

- 1) Calcular las tensiones en los cuatro nodos del elemento 1 así como en el punto B. Comparar los resultados con los obtenidos con SAP2000 y el facilitado en Celigüeta (2011).

⁶ CELIGÜETA, J.T. *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural* (4ª ed.). San Sebastián, 2011. <<http://dadun.unav.edu/handle/10171/19069>> [Consulta: marzo 2020]

- 2) Calcular las tensiones en los puntos integración de la cuadratura de Gauss-Legendre de 2 x 2 y extrapolar estos valores a los nodos, por el procedimiento que se indica a continuación. Comparar los resultados con los obtenidos con SAP2000.
- 3) Determinar la matriz de rigidez del elemento 1.

Nudo	U1	U2
1	0	0
2	1,644039	0,820131
3	-2,310706	2,962491
4	0	0,138843
5	2,590682	2,94811
6	-3,435819	8,969528
7	3,619014	8,890421
8	-4,28568	13,013508
9	6,276041	24,010801
10	-5,609374	17,868435
11	8,402564	45,650725
12	-8,402564	45,387063

Elemento	Nodo	S11	S22	S12
1	1	1969,15	596,42	546,7
1	2	2187,62	1470,3	-1003,74
1	3	-2056,1	-0,26	99,19
1	4	-2165,34	-437,2	874,4
2	2	1119,07	189,53	-43,15
2	5	1442,35	1482,63	-879,02
2	6	-1109,9	-367,71	441,76
2	3	-1271,54	-1014,27	859,69
3	5	1039,38	442,96	-446,23
3	7	1237,44	1235,2	-823,96
3	8	-975,19	-60,68	147,95
3	6	-1371,31	-1645,16	903,41
4	7	1551,67	-312,49	336,81
4	9	1521,36	-433,71	-205,49
4	10	-1401,21	-1278	-838,7
4	8	-1310,29	-914,34	788,2
5	9	1221,31	1094,82	940,91
5	11	958,05	41,77	-724,52
5	12	-1262,53	-513,38	-921,97
5	10	-1065,08	276,41	327,11

Tabla 1: desplazamientos y tensiones calculados con SAP2000

Extrapolación de las tensiones de los puntos de integración a los nodos

Es bien conocido que, en cualquier elemento finito, los puntos en los que las tensiones se determinan con mayor precisión (*puntos de colocación óptima*) son los puntos de integración de la cuadratura mínima, la de 2 x 2 en nuestro caso. Por eso muchos programas calculan las tensiones en ellos y las extrapolan a los nodos. Después, si un nodo es común a varios elementos, se promedian los valores hallados en cada uno de ellos para determinar el valor final. En general, los programas proporcionan los valores antes y después de promediar.

Según Felippa⁷ (pág. 28-5), la manera de proceder para extrapolar las tensiones de los puntos de Gauss a los nodos es usar las funciones de forma de la familia lagrangiana, aplicadas a un elemento finito imaginario cuyos nodos son los puntos de Gauss del elemento real (figura 3).

⁷ FELIPPA, C.A. (2004). *Introduction to Finite Element Methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences & Center for Aerospace Structures. University of Colorado. Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

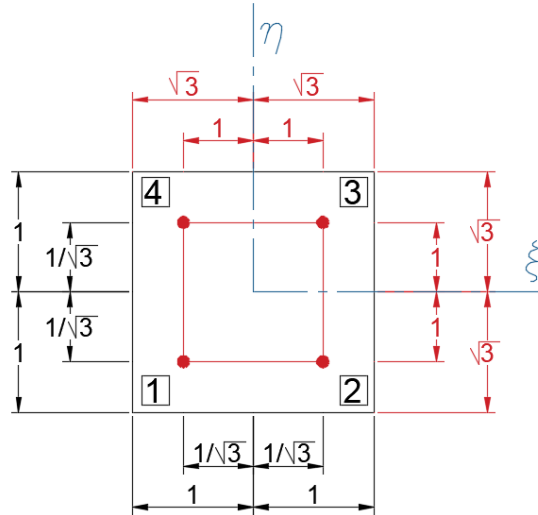


Figura 3. En negro, elemento finito real y cotas correspondientes; en rojo, puntos de Gauss, elemento finito ficticio para la extrapolación y cotas correspondientes.

En nuestro caso, en que la cuadratura ha sido de 2x2 puntos esto conduce a las siguientes relaciones [Felippa (2004, pág. 28-6)]:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \\ \omega'_4 \end{Bmatrix}$$

donde ω_i representa la tensión correspondiente en el nudo i mientras que ω'_i es la misma tensión en el punto de Gauss i .

Resolución

1) Tensiones en los nodos

Para calcular las tensiones utilizaremos la relación

$$\hat{\sigma} = \mathbf{D}\hat{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e$$

donde los desplazamientos nodales los facilita el enunciado y las matrices \mathbf{D} y \mathbf{B} se se expresan como:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,X} & 0 & N_{2,X} & 0 & N_{3,X} & 0 & N_{4,X} & 0 \\ 0 & N_{1,Y} & 0 & N_{2,Y} & 0 & N_{3,Y} & 0 & N_{4,Y} \\ N_{1,Y} & N_{1,X} & N_{2,Y} & N_{2,X} & N_{3,Y} & N_{3,X} & N_{4,Y} & N_{4,X} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Estos resultados son comunes al elemento rectangular inicial y al cuadrangular isoparamétrico derivado de él.

En el elemento isoparamétrico el cambio de variables que transforma el cuadrilátero real (coordenadas cartesianas) en el cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ en coordenadas normalizadas queda definido por la misma expresión que se utiliza para interpolar las incógnitas del problema:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde $N_i(\xi, \eta)$ representa la i -ésima función de forma, dada por

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (4)$$

Así pues, el cambio de variables queda determinado por

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)X_1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)X_2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)X_3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)X_4 \\ Y &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)Y_1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)Y_2 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)Y_3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)Y_4 \end{aligned}$$

Como vimos en el primer ejercicio de este capítulo, las derivadas parciales que aparecen en la matriz de deformaciones \mathbf{B} se calculan mediante

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} N_{i,X} \\ N_{i,Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{,\xi} & Y_{,\xi} \\ X_{,\eta} & Y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Aún con unas funciones de forma tan sencillas como las que estamos manejando, la evaluación de la matriz \mathbf{B} , de las deformaciones y de las tensiones con lápiz, papel y calculadora resulta muy laboriosa. Por ello resulta atractivo organizar su determinación en una hoja de cálculo. Como datos de partida se necesitarían las coordenadas normalizadas (ξ, η) del punto donde se pretende calcular estos valores, las coordenadas cartesianas $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4\}$ de los vértices del cuadrilátero, los desplazamientos nodales $\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}$ y las características elásticas E y ν del material.

Conocidas las coordenadas (ξ, η) del punto de cálculo, el primer paso sería evaluar las funciones N_i y sus derivadas respecto a ξ y a η , las primeras mediante las relaciones (4) y

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= \frac{-1}{4}(1 - \eta) & N_{1,\eta} &= \frac{-1}{4}(1 - \xi) \\ N_{2,\xi} &= \frac{1}{4}(1 - \eta) & N_{2,\eta} &= \frac{-1}{4}(1 + \xi) \\ N_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1 + \eta) & N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \\ N_{4,\xi} &= \frac{-1}{4}(1 + \eta) & N_{4,\eta} &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \end{aligned} \quad (6)$$

En realidad, los valores de las funciones de forma en el punto de cálculo no se necesitan para nada, pero a partir de ellas se pueden determinar, como comprobación, las coordenadas cartesianas del mismo mediante

$$\begin{aligned} X &= N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3 + N_4 X_4 \\ Y &= N_1 Y_1 + N_2 Y_2 + N_3 Y_3 + N_4 Y_4 \end{aligned} \quad (7)$$

A continuación, se programaría de determinación del valor en (ξ, η) de las componentes de la matriz jacobiana, mediante

$$\begin{aligned} X_{,\xi} &= N_{1,\xi} X_1 + N_{2,\xi} X_2 + N_{3,\xi} X_3 + N_{4,\xi} X_4 \\ Y_{,\xi} &= N_{1,\xi} Y_1 + N_{2,\xi} Y_2 + N_{3,\xi} Y_3 + N_{4,\xi} Y_4 \\ X_{,\eta} &= N_{1,\eta} X_1 + N_{2,\eta} X_2 + N_{3,\eta} X_3 + N_{4,\eta} X_4 \\ Y_{,\eta} &= N_{1,\eta} Y_1 + N_{2,\eta} Y_2 + N_{3,\eta} Y_3 + N_{4,\eta} Y_4 \end{aligned} \quad (8)$$

Nótese que estas expresiones se deducen de inmediato de (7) y se evalúan a partir de las coordenadas $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4\}$, que eran datos, y de las derivadas (6) anteriormente programadas en la hoja de cálculo.

Obtenidos estos valores, se puede ensamblar la matriz jacobiana, trasponerla, invertirla y usarla para programar las derivadas de las funciones de forma respecto a X e Y , usando las relaciones (5) para cada una de las citadas funciones. Con ello tendremos los valores de las componentes de la matriz de deformaciones \mathbf{B} en el punto de cálculo, que se creará organizándolas como indica (2).

Por otra parte, a partir de E y ν es inmediato determinar la matriz constitutiva \mathbf{D} mediante (1). Finalmente, se calculará $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e$ [$\mathbf{a}_e = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}$ es dato] y $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$.

La figura 4 muestra esta organización de los cálculos. Se procesa el caso del punto B del enunciado, perteneciente al elemento 1, cuyos nudos se numeran del 1 al 4 comenzando por el vértice inferior izquierdo y rodeando el contorno del mismo en sentido contrario a las agujas del reloj. Las coordenadas normalizadas del punto B son $(\xi, \eta) = (0, 1)$, ya que la arista superior es $\eta = 1$ y la línea que une los puntos medios de las aristas superior e inferior $\xi = 0$.

Las coordenadas de los nudos son

X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4
0	0	1	0	2	2	0	2

y los desplazamientos nodales, que se extraen de la primera de las tablas 1, son

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
0	0	1,64404	0,82013	-2,31071	2,96249	0	0,13884

Con todos estos datos, las tensiones en B resultan

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -1761 \\ -114 \\ 427 \end{bmatrix}$$

y se comprueba que la tensión σ_x en B resulta valer -1761, como indicaba Celigüeta (2011, pág. 80). Este hecho confirma la corrección de los cálculos.

Matriz de deformación en un cuadrilátero isoparamétrico

Coordenadas cartesianas de los vértices

X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4
0	0	1	0	2	2	0	2

Punto donde se evalúan las funciones (coordenadas normalizadas)

ξ	η
0	1

Cálculos auxiliares

N_1	0
N_2	0
N_3	0,5
N_4	0,5

$N_{1,\xi}$	0
$N_{2,\xi}$	0
$N_{3,\xi}$	0,5
$N_{4,\xi}$	-0,5

$N_{1,\eta}$	-0,25
$N_{2,\eta}$	-0,25
$N_{3,\eta}$	0,25
$N_{4,\eta}$	0,25

Coordenadas cartesianas del punto donde se evalúan las funciones

X	Y
1	2

Matriz jacobiana y su inversa

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(J^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

Derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas cartesianas

$N_{1,x}$	0
$N_{2,x}$	0
$N_{3,x}$	0,5
$N_{4,x}$	-0,5

$N_{1,y}$	-0,25
$N_{2,y}$	-0,25
$N_{3,y}$	0,125
$N_{4,y}$	0,375

Matriz B

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0 & -0,25 & 0 & 0,125 & 0 & 0,375 \\ -0,25 & 0 & -0,25 & 0 & 0,125 & 0,5 & 0,375 & -0,5 \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva

E	ν
1,50E+03	0,25

$$D = \begin{bmatrix} 1600 & 400 & 0 \\ 400 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos nodales

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
0	0	1,64404	0,82013	-2,31071	2,96249	0	0,13884

Deformaciones y tensiones

$$\epsilon = \begin{bmatrix} -1,155355 \\ 0,21734375 \\ 0,71197625 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1761,6305 \\ -114,392 \\ 427,18575 \end{bmatrix}$$

Figura 3

Repitiendo el mismo procedimiento para cada uno de los vértices del elemento 1, puntos de coordenadas normalizadas (-1,-1), (1,-1), (1,1) y (-1,1) se obtiene las tensiones recogidas en la mitad izquierda de la tabla 2. Las de la mitad derecha corresponden al elemento 2, para el cual el vector de coordenadas es

X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4
1	0	2	0	4	2	2	2

y el de parámetros nodales

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
1,64404	0,82013	2,590682	2,94811	-3,435819	8,969528	-2,31071	2,96249

Las tensiones mencionadas resultan

Punto	Elemento 1			Elemento 2			Punto
	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	
1	2658,23	768,69	492,08	1517,50	390,16	-193,63	2
2	2894,91	1715,40	-1187,56	1867,72	1791,02	-1099,15	5
3	-1702,46	122,29	7,28	-897,21	-213,52	331,70	6
4	-1820,80	-351,07	847,10	-1072,32	-913,95	784,45	3

Tabla 2: tensiones en los nodos de los elementos 1 y 2. Cálculo directo

Por otra parte, las tensiones en los mismos puntos calculadas con SAP2000, extraídas de la tabla del enunciado, resultan

Punto	Elemento 1			Elemento 2			Punto
	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	
1	1969,1	596,4	546,7	1119,1	189,5	-43,2	2
2	2187,6	1470,3	-1003,7	1442,4	1482,6	-879,0	5
3	-2056,1	-0,3	99,2	-1109,9	-367,7	441,8	6
4	-2165,3	-437,2	874,4	-1271,5	-1014,3	859,7	3

Tabla 3: tensiones en los nodos de los elementos 1 y 2 obtenidas con SAP2000

y muestran diferencias apreciables con las que nosotros hemos calculado. Nuestros cálculos anteriores estaban bien (recuérdese que nos han proporcionado el valor correcto de σ_x en B) y los de SAP2000 se han corroborado procesando la misma laja con ROBOT y comprobando que las tensiones en los nodos coinciden exactamente.

No hay ningún error. Lo que ocurre es que nosotros hemos determinado las tensiones directamente en los nodos y los programas las evalúan en los puntos de integración y las extrapolan a los nodos, lo cual mejora la precisión de los resultados.

2) Tensiones en los puntos de Gauss y extrapolación a los nodos

Repitiendo el procedimiento del apartado anterior en cada uno de los punto de Gauss de los elementos 1 y 2, cuyas coordenadas normalizadas son $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ y $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ se obtiene las tensiones resumidas en la tabla 4.

Punto	Elemento 1			Elemento 2			Punto
	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	
1	1136,72	543,15	322,92	674,97	179,53	-10,34	1
2	1249,5	994,4	-477,6	841,89	847,22	-441,93	2
3	-1187,3	198,7	64,6	-611,92	-142,20	269,63	3
4	-1263,7	-106,9	606,7	-724,97	-594,37	561,91	4

Tabla 4: Tensiones en los puntos de Gauss de los elementos 1 y 2

A continuación, a partir de estos valores y usando la fórmula que aparece en el enunciado,

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \\ \omega'_4 \end{Bmatrix}$$

se determinan las tensiones en los nodos por extrapolación de las anteriores. Los productos matriciales son fáciles de incluir en la hoja de cálculo que se estaba desarrollando. El resultado de este proceso se resume en la tabla 5 y coincide exactamente con los valores de las tensiones calculados con SAP2000 y con ROBOT (tabla 3).

Punto	Elemento 1			Elemento 2			Punto
	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)	
1	1969,15	596,42	546,70	1119,1	189,5	-43,2	2
2	2187,6	1470,3	-1003,7	1442,3	1482,6	-879,0	5
3	-2056,1	-0,3	99,2	-1109,9	-367,7	441,8	6
4	-2165,3	-437,2	874,4	-1271,5	-1014,3	859,7	3

Tabla 5: tensiones en los nodos de los elementos 1 y 2, extrapoladas a partir de los valores en los nodos

Nótese que las tensiones en los puntos 2 y 3 adoptan valores distintos según en qué elemento se hayan calculado, y que las diferencias son significativas. Esta situación es habitual en el método de los elementos finitos, y se resuelve promediando los valores en cada nodo. Al hacerlo se obtienen los resultados que figuran en la tabla 6.

Punto	σ_x (kPa)	σ_y (kPa)	τ_{xy} (kPa)
2	1653,34	829,92	-523,45
3	-1663,8	-507,3	479,4

Tabla 6: tensiones en los nodos 2 y 3, valores promediados entre elementos

Para finalizar este apartado se presentan las figuras 5 y 6. La primera representa la distribución de tensiones σ_x en cada uno de los elementos de la laja, determinadas elemento a elemento y sin promediar en los nodos comunes. Se observan las diferencias de valores entre elementos. La figura 6 muestra la misma distribución, pero dibujada a partir de los valores promediados. Esta es la que se acepta como solución del problema. Una diferencia significativa entre ambas distribuciones (como la que aparece en este caso) indica que la división en elementos finitos es adoptada es insuficiente, que para obtener resultados aceptables deben utilizarse más elementos más pequeños.

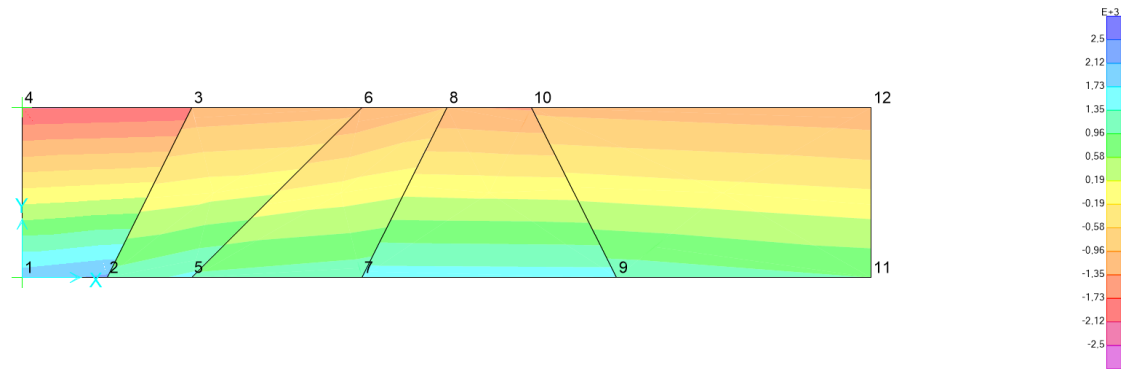


Figura 4

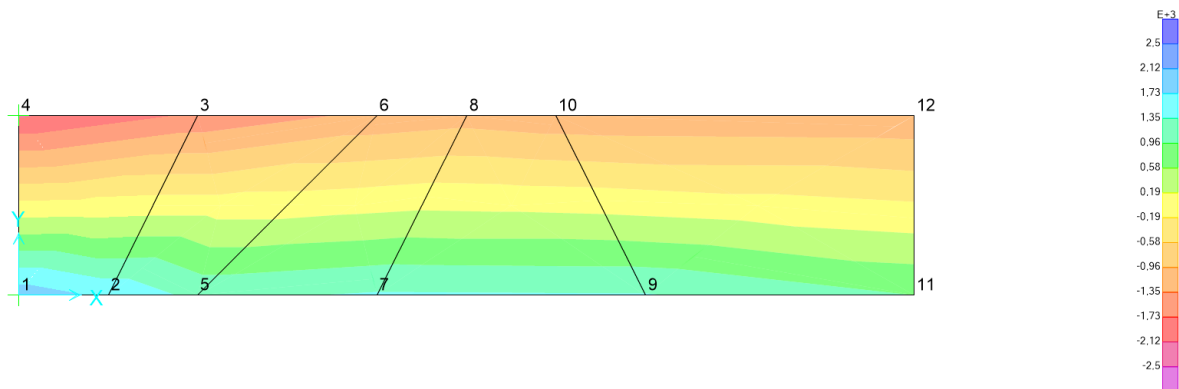


Figura 5

Nótese que, para interpretar los resultados de la distribución de tensiones proporcionada por un programa es muy importante saber si nos da valores calculados elemento a elemento (normalmente, valores en los nudos extrapolados de los correspondientes a los puntos de integración) o bien valores promediados. Lo más habitual es que en los listados o tablas de valores por elemento proporcionen valores calculados elemento a elemento, que las gráficas que muestran por defecto y los valores que se pueden leer en ellas estén promediados y que se pueda forzar una representación gráfica de los valores elemento a elemento. Así sucede, por ejemplo, en SAP2000 y en ROBOT.

3) Matriz de rigidez

Recordemos la expresión que permite calcular la matriz de rigidez mediante una cuadratura de Gauss-Legendre.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \iint_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h dX dY = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j [\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h |\mathbf{J}|]_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_j} \end{aligned}$$

En ella \mathbf{B} , \mathbf{D} , h y \mathbf{J} tienen los significados habituales, n es el número de puntos de integración, ξ_i y η_j las coordenadas de estos puntos y w_i y w_j los pesos correspondientes. En nuestra hoja de cálculo ya habíamos obtenido \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{J} , por lo que bastaría añadir el cálculo de $|\mathbf{J}|$ (son dos instrucciones de Excel), definir h (es un dato), w_i y w_j (valores característicos de la cuadratura) y programar el producto $w_i w_j [\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} h |\mathbf{J}|]_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_j}$ para obtener uno de los sumando de la

expresión final. Tal como tenemos planteada la hoja, podríamos calcularlos uno a uno, copiarlos aparte y sumarlos.

El desarrollo del problema basado en una hoja de cálculo no es importante por sí mismo, sino porque muestra cómo se podrían programar el conjunto de cálculos en un ordenador para evaluar la matriz de rigidez de cada elemento y, una vez conocidos los parámetros nodales, determinar las tensiones en él.

Ejercicio nº 4

Se facilitan la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales de un elemento finito rectangular previsto para resolver problemas de elasticidad bidimensional. Los nodos 1, 2, 4 y 5 son los vértices del rectángulo y el nodo 3 es interior. Se pide eliminar de la formulación el nodo 3 por condensación estática.

Matriz de rigidez y vector de fuerzas nodales											
	1		2		3		4		5		
1	13	10	0	7	0	0	4	6	0	0	7
	10	14	9	3	0	0	5	5	0	0	1
2	0	9	42	19	6	2	20	13	13	14	11
	7	3	19	49	8	10	7	15	7	8	9
3	0	0	6	8	19	5	0	0	5	2	3
	0	0	2	10	5	15	0	0	7	7	9
4	4	5	20	7	0	0	35	12	10	6	10
	6	5	13	15	0	0	12	33	1	1	33
5	0	0	13	7	5	7	10	1	32	7	9
	0	0	14	8	2	7	6	1	7	26	19

Resolución

No está escrita. Se expone en

<https://media.upv.es/#/portal/video/685ee490-7387-11ea-9f14-bd7b18fa79c1>

Capítulo 4:

Flexión de vigas por el M.E.F.

En este capítulo, dedicado a los elementos finitos unidimensionales para analizar vigas, se incluyen dos ejercicios. El primero, más extenso, consta de tres partes:

- La primera aborda, en primer lugar, el ensamblaje de la relación de rigidez de una estructura completa pero muy sencilla, una ménsula, modelada mediante sólo tres elementos finitos; a continuación, la imposición de las condiciones de contorno cinemáticas en ella y, por último, la resolución del sistema de ecuaciones para obtener los desplazamientos y las reacciones.
- La segunda aprovecha la experiencia de la primera parte para desarrollar un algoritmo, implementado como una *macro* de Excel, que realiza el proceso anterior considerando la pieza dividida en un número n cualquiera de elementos.
- La tercera compara los resultados del cálculo de la ménsula modelizada con diferentes elementos finitos y distintas discretizaciones. Para obtener estos resultados, que muestran la sensibilidad al bloqueo o la falta de ésta en los elementos considerados, se usa el programa desarrollado en el apartado 2.

En el segundo ejercicio se desarrolla un elemento finito para el análisis de vigas de Timoshenko, basado en funciones de forma lagrangianas cuadráticas para interpolar la flecha y lineales para interpolar los giros, se muestra que tal elemento es susceptible de sufrir bloqueo por cortante y, finalmente, se condensa el grado de libertad interno para reducir el tamaño de la matriz de rigidez.

La solución que se presenta de este segundo ejercicio es una reelaboración de una previa desarrollada por el profesor D. Carlos R. Sánchez Carratalá, para adaptarla al mismo tipo de presentación de los restantes ejercicios y ampliar algunos aspectos de la misma.

En este segundo ejercicio desarrollan algunos cálculos se desarrollan dos veces, una primera a mano y, a continuación, usando el programa *Mathematica*. En el segundo caso no aparecen demasiadas explicaciones sobre el uso del programa; es así porque las aclaraciones pertinentes se incluyen en la resolución del primer ejercicio del capítulo 5, que aunque corresponda a un capítulo posterior es escribió primero.

Como alternativa al texto que sigue, la explicación de estos ejercicios puede encontrarse, grabada en vídeo, en <https://media.upv.es/#/portal/channel/d9c69c90-d2ad-11ec-af87-addb6a391635>.

Ejercicio nº 1



Una ménsula de longitud L tiene sección rectangular de 0'3 m de ancho y 0'4 m de canto y está formada por un material de Hooke de módulo de elasticidad 25 GPa y coeficiente de Poisson 0'2. Está sometida a una carga puntual de 10 kN que actúa en el extremo libre, como se indica en la figura.

Apartado 1: Resolver a mano, o con una hoja de cálculo, el problema de flexión (sin extensión) de la ménsula por el método de los elementos finitos, dividiéndola en tres elementos finitos lagrangianos con interpolación lineal de flecha y giro (elemento desarrollado en las diapositivas 14 y s.s. del tema 8 de la asignatura), suponiendo que la longitud total de la ménsula es de 3,0 m.

Apartado 2: Aprovechando la experiencia del primer apartado, programar un algoritmo que permita la resolución del problema inicial por el método de los elementos finitos, dividiendo la viga en cualquier número de partes iguales y preparado de manera que sea fácil adaptarlo a cualquier elemento finito cuya matriz de rigidez sea de 4×4 , es decir, que considere como parámetros nodales, exclusivamente, la flecha y el giro en los dos extremos de la barra. Inicialmente, considere el elemento lagrangiano descrito en el párrafo anterior. Puede emplear el lenguaje de programación que le resulte más cómodo.

Apartado 3: Utilizando el programa, se pide estudiar el problema de la ménsula para todas las combinaciones posibles de longitudes, número de elementos y tipos de funciones de forma que se indican a continuación:

- Longitudes de la viga: las deducidas de las siguientes relaciones canto/luz: 5, 10, 15, 20, 25 y 1450 —este último es un caso teórico para evidenciar el problema del bloqueo—.
- Número de elementos: 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 50, 80
- Elementos finitos
 - Elemento lagrangiano con interpolación lineal de flecha y giro, utilizando la integración exacta para obtener la matriz de rigidez.
 - Elemento lagrangiano con interpolación lineal de flecha y giro, utilizando la integración reducida selectiva para obtener la matriz de rigidez.
 - Elemento basado en la función de forma natural de la teoría de Timoshenko.

Lo anterior supone procesar 180 casos distintos. Se sugiere organizarse entre grupos de alumnos para que cada uno procese algunos casos y entre todos cubrir los 180 propuestos para poder analizarlos y extraer conclusiones.

Datos:

Matriz de rigidez del elemento lagrangiano con interpolación lineal de flecha y giro (integración exacta)

$$\mathbf{K} = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Matriz de rigidez del elemento lagrangiano con interpolación lineal de flecha y giro (integración reducida)

$$\mathbf{K} = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2L} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Matriz de rigidez del elemento basado en la función de forma natural de la teoría de Timoshenko.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} & -\frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} \\ \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{4 + \alpha_Y}{1 + \alpha_Y} \frac{EI_Z}{L} & -\frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{2 - \alpha_Y}{1 + \alpha_Y} \frac{EI_Z}{L} \\ \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} & \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{12EI_Z}{L^3} & \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} \\ -\frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} & -\frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{EI_Z}{L} & \frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{6EI_Z}{L^2} & -\frac{1}{1 + \alpha_Y} \frac{EI_Z}{L} \end{bmatrix}$$

Desplazamientos en la punta y reacciones en el empotramiento de la ménsula (solución analítica a efectos de comparación)

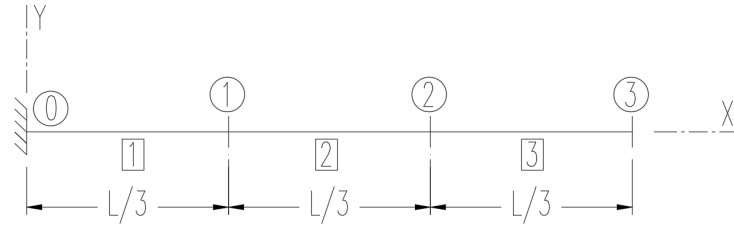
$$v_B = -\frac{PL^3}{3EI_Z} - \frac{PL}{GA_{VY}} = -\frac{PL^3}{3EI_Z} \left(1 + \frac{\alpha_Y}{4} \right)$$

$$\theta_{ZB} = -\frac{PL^2}{2EI_Z} \quad ,, \quad R_{Y,A} = P \quad ,, \quad M_{Z,A} = PL$$

Resolución

1) Apartado 1, modelo de 3 elementos

Discretización de la ménsula



Los números rodeados por una circunferencia son los de nudo, y los encerrados en un rectángulo los de barra. El sistema de referencia global está indicado en la figura del enunciado. Los ejes locales de cada barra son paralelos a los globales, por lo que no hace falta ningún cambio de sistema de referencia.

Esquema de ensamblaje del sistema de ecuaciones de rigidez

La relación de rigidez de cada elemento finito puede escribirse como

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1^m \\ \bar{\mathbf{F}}_2^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^m & \mathbf{K}_{12}^m \\ \mathbf{K}_{21}^m & \mathbf{K}_{22}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^m \\ \mathbf{d}_2^m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^m \\ \mathbf{f}_2^m \end{Bmatrix}$$

donde

$$\bar{\mathbf{F}}_i^m = \begin{Bmatrix} F_{Yi}^m \\ M_{Zi}^m \end{Bmatrix} \quad ,, \quad \mathbf{d}_i^m = \begin{Bmatrix} v_i^m \\ \theta_i^m \end{Bmatrix} \quad ,, \quad \mathbf{f}_i^m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{11}^m = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ,, \quad \mathbf{K}_{22}^m = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{K}_{12}^m = (\mathbf{K}_{21}^m)^T = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

El vector \mathbf{f}_i es nulo en todos los casos porque representa la acción de las fuerzas exteriores repartidas en el interior del dominio, que en nuestro caso son nulas. El superíndice m recuerda que el parámetro corresponde a la barra m .

El esquema de ensamblaje del sistema de ecuaciones, que muestra en qué posiciones de cada matriz o cada vector hemos de sumar la aportación de cada barra, es el siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2^1 + \bar{\mathbf{F}}_1^2 \\ \bar{\mathbf{F}}_2^2 + \bar{\mathbf{F}}_1^3 \\ \bar{\mathbf{F}}_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{F}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 + \mathbf{K}_{11}^3 & \mathbf{K}_{12}^3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^3 & \mathbf{K}_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix}$$

En él se ha sombreado la columna matricial que queda multiplicada por los desplazamientos del empotramiento, punto 0 en nuestra numeración, que procede multiplicarla por tales

movimientos y sumarla al vector de términos independientes. Como $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}$, simplemente podemos eliminar estas columnas. Así mismo, se ha sombreado la fila matricial que resultaría multiplicada por los desplazamientos virtuales (cinemáticamente admisibles) del punto 0, que son nulos. Por lo tanto, la primera fila matricial no interviene en la resolución del problema y se puede eliminar de la formulación. Con ello, el sistema de ecuaciones de rigidez resultará de 6x6.

Determinación de la matriz de rigidez de cada elemento

Características mecánicas de la sección

$$I_Z = \frac{ah^3}{12} = \frac{0,3 \times 0,4^3}{12} = 0,0016 \text{ m}^4 \quad ,, \quad A_{VY} = \frac{5}{6}a \times h = \frac{5}{6}0,3 \times 0,4 = 0,1 \text{ m}^2$$

Características elásticas del material

$$E = 25 \text{ GPa} \quad ,, \quad \nu = 0,2 \quad ,, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 10,41\hat{6} \text{ GPa}$$

Longitud de cada elemento

$$L_e = \frac{L}{N} = \frac{3 \text{ m}}{3 \text{ elementos}} = 1 \text{ m}$$

Factor de cortante de cada elemento (véase la nota sobre el factor de cortante al final del ejercicio)

$$\alpha_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{VY}L_e^2} = \frac{24(1+\nu)I_Z}{A_{VY}L_e^2} = \frac{24 \times 1,2 \times 0,0016}{0,1 \times 1^2} = 0,4608$$

Matriz de rigidez del elemento

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}^m &= \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = 40000 \left\{ \frac{1}{0,0384} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1,041\hat{6} \times 10^6 & 5,208\hat{3} \times 10^5 \\ 5,208\hat{3} \times 10^5 & 3,87\hat{2} \times 10^5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{22}^m = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1,041\hat{6} \times 10^6 & -5,208\hat{3} \times 10^5 \\ -5,208\hat{3} \times 10^5 & 3,87\hat{2} \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12}^m = (\mathbf{K}_{21}^m)^T = \frac{EI_Z}{L} \left\{ \frac{12}{\alpha_Y} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2L} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -1,041\hat{6} \times 10^6 & 5,208\hat{3} \times 10^5 \\ -5,208\hat{3} \times 10^5 & 1,336\hat{1} \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Si hubiera fuerzas repartidas a lo largo de la directriz, ahora se debería calcular las fuerzas nodales correspondientes.

Establecimiento del sistema de ecuaciones de rigidez

Para ensamblar el sistema de ecuaciones de rigidez se parte de una matriz \mathbf{K} y un vector \mathbf{f} con todas sus componentes nulas, de las dimensiones que han de tener la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales, respectivamente. Actuarán como acumuladores sobre los que se irán sumando las aportaciones de los diferentes elementos al sistema de ecuaciones global.

A continuación, mediante de un bucle que los recorre, se realizan las siguientes operaciones para cada elemento:

- 1) Se determina la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y el vector de fuerzas nodales $\mathbf{f}^{(e)}$ del elemento, en los ejes locales correspondientes. En nuestro problema, como todos los elementos son iguales, sus matrices de rigidez también lo son, por lo que basta con determinar una; lo hemos hecho en el apartado anterior. Así mismo, ningún elemento soporta cargas a lo largo de su directriz, por lo que las fuerzas nodales son todas nulas.
- 2) La matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del elemento se expresa en el sistema de referencia global mediante el cambio de base adecuado. En nuestro caso, como los ejes locales y los ejes globales son paralelos, no ha falta ningún cambio de sistema de referencia.
- 3) Se suman en la posición adecuada de la matriz global \mathbf{K} y el vector global \mathbf{f} la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y el vector de fuerzas nodales $\mathbf{f}^{(e)}$ del elemento. En general, se ensamblan divididos en tantas submatrices o subvectores como nodos tiene el elemento. Las posiciones correspondientes se especifican en el esquema de montaje. En general, si los nudos dorsal (1) y frontal (2) del elemento corresponden a los números i y j de la numeración global y hay n grados de libertad por nudo, la submatriz \mathbf{K}_{kl} ($k,l=1,2$) se suma empezando en la posición (Pos_k, Pos_l) y ocupando las $n \times n$ posiciones siguientes, y el subvector \mathbf{f}_i se suma empezando en la fila Pos_i y ocupando las n posiciones. En ambos casos

$$Pos_k = M \times n + 1 \quad , , \quad M = \begin{cases} i & \text{si } k = 1 \\ j & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

si el primer nodo se ha numerado como 0, como hemos hecho en este ejercicio, y

$$Pos_k = (M - 1) \times n + 1 \quad , , \quad M = \begin{cases} i & \text{si } k = 1 \\ j & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

si el primer nodo se ha numerado como 1, que es lo más habitual. En nuestro ejercicio, como los nudos de cada elemento son consecutivos no hace falta ensamblar por submatrices; se puede sumar la matriz completa a partir de la posición (Pos_1, Pos_1) .

- 4) Si se han procesado todos los elementos, termina el bucle; si no, pasa al siguiente elemento y vuelve a la operación 1.

Las figuras 1, 2 y 3 ilustran el ensamblaje en el modelo de tres elementos que estamos estudiando. La figura 1 muestra la matriz de ceros inicial, la matriz de rigidez del elemento 1 en la posición que debe ocupar en la matriz global y el resultado de sumarlas. La figura 2 parte de este último resultado y le suma la matriz de rigidez del elemento 2, en la posición adecuada. Finalmente, la figura 3 parte de la última expresión de \mathbf{K} hallada, le suma la matriz de rigidez del elemento 3 en las posiciones adecuadas y determina, ya, la matriz de rigidez de la estructura completa.

La única diferencia si los números de nudos de cada elemento no hubieran sido consecutivos (esto último es lo que sucede normalmente) hubiera sido que el montaje se debería llevar a cabo submatriz a submatriz, es decir, que en la matriz central de cada figura no hubiera aparecido una matriz de 4x4 consecutiva sino cuatro submatrices de 2x2 empezando \mathbf{K}_{11} en (Pos_1, Pos_1) , \mathbf{K}_{12} en (Pos_1, Pos_2) , \mathbf{K}_{21} en (Pos_2, Pos_1) y \mathbf{K}_{22} en (Pos_2, Pos_2) .

A continuación, crearemos el vector de fuerzas puntuales en los nudos, en el que deberemos incluir todas las que actúan sobre la estructura, que son las reacciones en el empotramiento (nudo 0) y la fuerza vertical de -10 kN en el extremo final, nudo 3 de nuestro modelo. Así pues, este vector, en nuestro caso, resulta:

$$\bar{\mathbf{F}} = \{R_{Y0}, M_{Z0}, 0, 0, 0, 0, -10, 0\}^T$$

Aunque en este ejercicio hubiera resultado fácil determinar las reacciones, no lo hubiera sido en una estructura hiperestática. Afortunadamente, no hacen falta. Por ahora, las hemos representado como R_{Y0} y M_{Z0} ; en seguida veremos que se eliminan de la formulación.

Con esto ya tenemos todos los elementos que determinan la relación de rigidez

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{a} = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{f} = \mathbf{F}^*$$

La hemos escrito agrupando los vectores de fuerzas puntuales exteriores y de fuerzas nodales en uno solo, que podemos llamar, simplemente, de términos independientes.

El último paso antes de abordar la resolución del sistema de ecuaciones es imponer las condiciones de contorno cinemáticas. En nuestro problema, conocemos la flecha y el giro del nudo 0, que son nulos pues está empotrado. Como son los dos primeros grados de libertad del modelo, habría que multiplicar la primera columna por la flecha del nudo 0, la segunda por el giro de este nudo y pasar el resultado al segundo miembro de la última relación obtenida, es decir, restarlas del vector \mathbf{F}^* . Como los desplazamientos impuestos son nulos, no hace falta realizar esta operación que supondría sumar a \mathbf{F}^* un vector de ceros de su misma dimensión, aunque sí que hay que eliminar las dos primeras columnas. También hay que eliminar las dos primeras filas, que habrían resultado multiplicadas por desplazamientos virtuales nulos (por tratarse de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles) y, por ello, no aportan información.

Como eliminar filas y columnas es una operación complicada (el coste computacional en un problema de muchos grados de libertad sería enorme), vamos a imponer las condiciones de contorno de otra manera: sustituiremos todos los elementos de las filas y columna a eliminar por 0, excepto los términos de la diagonal, que sustituiremos por 1, y las componentes correspondientes del vector de términos independientes las sustituiremos por los valores de los desplazamientos a imponer. El siguiente esquema, en el que los términos que no intervienen en este razonamiento se han representado simplemente por x , muestra el resultado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \theta_0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_0 = 0 \\ \bar{\theta}_0 = 0 \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

La figura 4 muestra el resultado de este proceso en el problema que nos ocupa.

Ensamblaje de la matriz de rigidez

0	0	0	0	0	0	0	0		1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0	0	0		1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	0	0		520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0	0	0		-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222	0	0	0	0	=	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 6: Ensamblaje del primer elemento

1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0	0	0
520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	0	0
-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0	0	0		0	0	1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0		-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0	0	0
520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222	0	0	0	0	+	0	0	520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	=	520833,333	133611,111	0	774444,444	-520833,333	133611,111	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0		0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222	0	0		0	0	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 7: ensamblaje del segundo elemento

1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333	0	0	0	0
520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111	0	0	0	0
-1041666,67	-520833,333	1041666,67	0	-1041666,67	520833,333	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0		-1041666,67	-520833,333	1041666,67	0	-1041666,67	520833,333	0	0
520833,333	133611,111	0	774444,444	-520833,333	133611,111	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	=	520833,333	133611,111	0	774444,444	-520833,333	133611,111	0	0
0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0		0	0	0	0	1041666,67	520833,333	-1041666,67	520833,333		0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333	0	0
0	0	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222	0	0		0	0	0	0	520833,333	387222,222	-520833,333	133611,111		0	0	520833,333	133611,111	0	774444,444	-520833,333	133611,111
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333		0	0	0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222		0	0	0	0	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222

Figura 8: ensamblaje del tercer elemento

1	0	0	0	0	0	0	0		0
0	1	0	0	0	0	0	0		0
0	0	208333,33	0	-1041666,67	520833,333	0	0		0
0	0	0	774444,444	-520833,333	133611,111	0	0		0
0	0	-1041666,67	-520833,333	208333,33	0	-1041666,67	520833,333		0
0	0	520833,333	133611,111	0	774444,444	-520833,333	133611,111		0
0	0	0	0	-1041666,67	-520833,333	1041666,67	-520833,333		-10
0	0	0	0	520833,333	133611,111	-520833,333	387222,222		0

Figura 9: matriz de rigidez y vector de términos independientes después de haber impuesto las condiciones de contorno.

Resolución del sistema y cálculo de las fuerzas en los extremos de los elementos

La solución del sistema lineal de ecuaciones especificado en la figura 4 es:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \theta_0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,00010818 \\ -0,00019715 \\ -0,00037407 \\ -0,00031544 \\ -0,00071883 \\ -0,00035487 \end{pmatrix}$$

Para obtener las fuerzas $\bar{\mathbf{F}}_e$ en el extremo de un elemento se utiliza la relación

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}_e - \mathbf{f}_e$$

en la que, por una parte, intervienen la matriz de rigidez del elemento, \mathbf{K}^e , y las fuerzas nodales en él, \mathbf{f}_e , calculadas con anterioridad, y por otra los desplazamientos de los nodos del elemento, hallados al resolver el sistema de rigidez, que se extraen del vector de parámetros nodales recién calculado.

Como ejemplo, se presenta en la figura 5 el cálculo de las fuerzas en los extremos del elemento 1. Las correspondientes al extremo dorsal, que son las dos primeras componentes, corresponden a las reacciones en el empotramiento.

\mathbf{K}^e				\mathbf{a}_e	\mathbf{f}_e	\mathbf{F}_e
1,0417E+06	5,2083E+05	-1,0417E+06	5,2083E+05	0	0	10
5,2083E+05	3,8722E+05	-5,2083E+05	1,3361E+05	0	0	30
-1,0417E+06	-5,2083E+05	1,0417E+06	-5,2083E+05	-0,00010818	0	-10
5,2083E+05	1,3361E+05	-5,2083E+05	3,8722E+05	-0,00019715	0	-20

Figura 10: fuerzas en los extremos del elemento 1

Así pues, la flecha y el giro en el extremo libre, y las reacciones en el empotramiento han resultado

$$\begin{aligned} v_3 &= -0,00071883 \text{ m} & R_{Y0} &= 10 \\ \theta_3 &= -0,00035487 \text{ rad} & M_{Z0} &= 30 \end{aligned}$$

Los valores teóricos de comparación son

$$v_B = -\frac{PL^3}{3EI_Z} \left(1 + \frac{\alpha_Y}{4}\right) = -\frac{10 \times 3^3}{3 \times 25 \times 10^6 \times 0,0016} \left(1 + \frac{0,0512}{4}\right) = -0,0022788 \text{ m}$$

$$\theta_{ZB} = -\frac{PL^2}{2EI_Z} = -\frac{10 \times 3^2}{2 \times 25 \times 10^6 \times 0,0016} = -0,001125$$

$$R_{Y,A} = P = 10 \text{ kN} \quad ,, \quad M_{Z,A} = PL = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

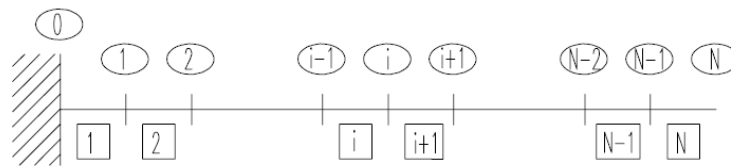
donde se ha utilizado

$$\alpha_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{VY}L^2} = \frac{24(1+\nu)I_Z}{A_{VY}L^2} = \frac{24 \times 1,2 \times 0,0016}{0,1 \times 3^2} = 0,0512$$

Comprobamos que las reacciones son correctas y que los errores en los desplazamientos son enormes, la flecha y el giro en la punta son del 31,5% de los valores esperados. Veremos más adelante que estos errores son los que cabe esperar con esta modelización tan burda y un elemento finito tan poco eficiente como el utilizado. Que las reacciones sean correctas es normal: son de determinación isostática y, a fin de cuentas, las relaciones de rigidez imponen condiciones de equilibrio. Si el problema hubiera sido hiperestático los errores también hubieran sido importantes.

2) Apartado 2, modelo de N elementos

Discretización de la ménsula



Como en el caso anterior, los números rodeados por una elipse son los de nudo, y los encerrados en un rectángulo los de barra. El sistema de referencia global está indicado en la figura del enunciado. Los ejes locales de cada barra son paralelos a los globales, por lo que no hace falta ningún cambio de sistema de referencia.

Ensamblaje del sistema de ecuaciones de rigidez

Todo lo indicado a este respecto en el apartado 1 del ejercicio, salvo el esquema de montaje, sigue siendo válido. Indicamos, pues, sólo el esquema de ensamblaje:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2^1 + \bar{\mathbf{F}}_1^2 \\ \bar{\mathbf{F}}_2^2 + \bar{\mathbf{F}}_1^3 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{F}}_2^{N-1} + \bar{\mathbf{F}}_1^N \\ \bar{\mathbf{F}}_2^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{F}}_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 + \mathbf{K}_{11}^3 & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{K}_{22}^{N-1} + \mathbf{K}_{11}^N & \mathbf{K}_{12}^N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^N & \mathbf{K}_{22}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{N-1} \\ \mathbf{d}_N \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez del elemento

Todo lo desarrollado en el apartado 1 del problema sigue siendo válido.

Algoritmo de creación del sistema de ecuaciones de rigidez

Vamos a resolver el problema mediante una hoja de cálculo *Excel*. En primer lugar, programamos la obtención de los parámetros que determinan la matriz de rigidez, y de la propia matriz, de forma convencional en una hoja del libro *Excel*. También se ha programado la determinación de la flecha y el giro en la punta (v_N y θ_N) y de las reacciones en el empotramiento (R_{y0} y M_{z0}) utilizando las fórmulas que proporcionan los valores exactos dadas en el enunciado. La figura 6 muestra la programación de todo esto adoptada; en ella las casillas con fondo amarillo son datos que debe introducir el usuario, y las que tienen fondo blanco son resultados calculados por el programa.

Datos de la sección transversal				Datos del material			Datos de la ménsula y del modelo			Factor de cortante
Ancho	Canto	M.d.i.	A cortante	E	n	G	L _{Total}	Núm. Partes	L _{Elemento}	$\alpha_{y,elem}$
0,3	0,4	0,0016	0,1	2,50E+07	0,2	1,04E+07	3	3	1	0,4608

Matriz de rigidez					
E _y /L _{elemento}	12 / α_y	1,0417E+06	5,2083E+05	-1,0417E+06	5,2083E+05
4,00E+04	26,0416667	5,2083E+05	3,8722E+05	-5,2083E+05	1,3361E+05
		-1,0417E+06	-5,2083E+05	1,0417E+06	-5,2083E+05
		5,2083E+05	1,3361E+05	-5,2083E+05	3,8722E+05

Resultados de contraste		Resultados				
Factor de cortante	$\alpha_{y,ménsula}$	P	V _{N,analítica}	$\theta_{N,analítico}$	R _{V0,analítica}	M _{Z0,analítico}
	5,12E-02	-10	-2,28E-03	-1,13E-03	10	30

Figura 11: determinación de resultados generales en la hoja Excel

A continuación, pasaremos a definir el algoritmo en *VisualBasic* que generará y resolverá el sistema de ecuaciones de rigidez. Para hacerlo, la primera operación es abrir *VisualBasic*; para ello, iremos a la pestaña *Programador* de *Excel* y pulsaremos el icono *VisualBasic*. Se abrirá una nueva pantalla; en su parte izquierda aparecerá un diagrama en árbol con la identificación de cada libro Excel que tengamos abierto, los nombres de las hojas de cada uno de ellos, etc. Nos situaremos sobre la entrada que ponga *VBAProject (Nombre)*, donde *Nombre* es el que la hayamos dado al libro *Excel*, pulsaremos sobre ella con el botón derecho del ratón y escogeremos *Insertar*→*Módulo* como muestra la figura 7. Se abrirá una nueva ventana, en la que escribiremos *Sub*, el nombre que queramos darle a la subrutina (yo he usado *CrearSistema*) y, a continuación (*.*). En pulsar *Enter* la palabra clave *Sub* pasará al color azul y unas líneas más abajo aparecerá la palabra clave *End Sub*, también en azul. Entre ambas palabras clave hemos de escribir la subrutina.

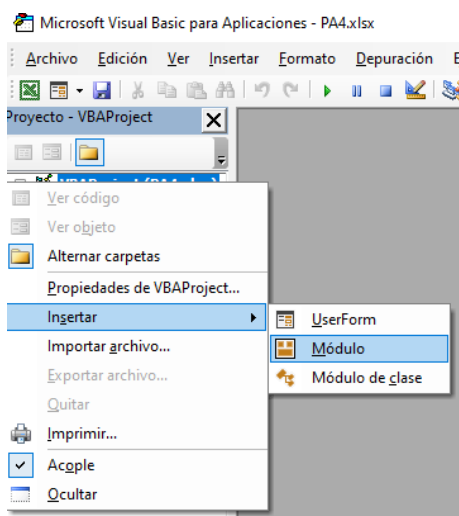


Figura 12: Crear un Módulo para almacenar las subrutinas en VBA dentro de un libro Excel

A continuación escribimos el programa entre las dos palabras citadas. Se han introducido en él los comentarios necesarios para que se explique por sí mismo. La figura 8 muestra la declaración de variables y las instrucciones que asignan a las variables del programa valores que se habían definido en la hoja inicial (representada en la figura 6).

```

Sub CrearSistema()

' DECLARACIÓN DE VARIABLES *****
Dim N As Integer      ' N=número de elementos
Dim P As Double       ' P=valor de la fuerza puntual (con signo)
Dim K(1 To 4, 1 To 4) As Double ' K=matriz de rigidez de cada elemento finito, con índices numerados de 1 a 4
Dim i, j, Ielem As Integer ' Contadores
Dim Pos As Integer    ' La primera componente de la matriz de rigidez de un elemento se debe escribir
                        ' en la posición (Pos+1,Pos+1) de la matriz de rigidez global
Dim Flecha, Giro As Double ' Variables auxiliares

' LECTURA DE DATOS *****

Sheets("Ej1_p2 (datos y resultados)").Select ' Se situa en la hoja donde están los datos del problema.
N = Cells(6, 10)                            ' Lee el número de elementos del problema
P = Cells(17, 3)                            ' Lee el valor de la fuerza puntual en la punta de la ménsula
For i = 1 To 4                               ' Bucles para leer la matriz de rigidez del elemento
    For j = 1 To 4
        K(i, j) = Cells(8 + i, 3 + j)
    Next j
Next i

```

Figura 13: Primera parte del programa

La figura 9 muestra la segunda parte del programa, en la que se crean una matriz y un vector de ceros de las dimensiones adecuadas, se van sumando sobre la primera las matrices de los diferentes elementos, luego se suma en la penúltima posición del vector la fuerza exterior y, por último, se imponen las condiciones de contorno.

Las instrucciones que resuelven el sistema de ecuaciones se muestran en la figura 10. No ha sido posible programarla de forma genérica, por lo que sólo se resuelve automáticamente para determinados números de subdivisiones de la viga: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25 y 30.

```

' CREACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE RIGIDEZ *****
' Inicialización de la matriz y el vector de términos independientes -----
' El modelo consta de N elementos, numerados del 1 al N, y N+1 nudos, numerados del 0 al N.
' La matriz de rigidez global es de 2(N+1) x 2(N+1) elementos, el vector de términos independientes de 2(N+1).

Sheets("Ej1_p2 (sistema ecuaciones)").Select ' Se situa en la hoja donde se escribirá el sistema de ecuaciones
Cells.Select ' Esta y la siguiente borran todo lo que hubiera en la hoja
Selection.Clear
For i = 1 To 2 * (N + 1)
    For j = 1 To 2 * (N + 1)
        Cells(i, j) = 0 ' Crea una tabla de ceros, desde la celda (1,1) a la (2(N+1),2(N+1))
    Next j
    Cells(i, 2 * (N + 1) + 2) = 0 ' Crea una columna de ceros, en la columna 2(N+1)+2, y entre las filas 1 y 2(N+1)
Next i

' Ensamblaje de la matriz de rigidez -----
For Ielem = 1 To N ' Bucle sobre el número de elementos
    Pos = 2 * (Ielem - 1) ' Variable auxiliar para fijar la posición inicial en la que escribir la matriz de rigidez del elemento
    For i = 1 To 4 ' Bucle que suma la matriz de rigidez del elemento en las posiciones adecuadas de la
        For j = 1 To 4 ' matriz de rigidez global.
            Cells(Pos + i, Pos + j) = Cells(Pos + i, Pos + j) + K(i, j)
        Next j
        ' Si hiciera falta, aquí se programaría una instrucción similar que fuera ensamblando el vector de fuerzas nodales.
    Next i
Next Ielem

' Adición de la fuerza puntual al vector de términos independientes -----
Cells(2 * (N + 1) - 1, 2 * (N + 1) + 2) = P

' Sustitución de las condiciones de contorno cinemáticas -----
For i = 1 To 2 * N + 2
    Cells(i, 1) = 0
    Cells(i, 1) = 0
    Cells(2, i) = 0
    Cells(i, 2) = 0
Next i
Cells(1, 1) = 1
Cells(2, 2) = 1

```

Figura 14: Segunda parte del programa:

```

' Resolución del sistema de ecuaciones *****
Select Case N
Case 1
  Range("H1:H4").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:D4),F1:F4)"
Case 2
  Range("J1:J6").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:F6),H1:H6)"
Case 3
  Range("L1:L8").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:H8),J1:J8)"
Case 4
  Range("N1:N10").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:J10),L1:L10)"
Case 5
  Range("O1:O12").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:L12),N1:N12)"
Case 10
  Range("Z1:Z22").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:V22),X1:X22)"
Case 15
  Range("AJ1:AJ32").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:AF32),AH1:AH32)"
Case 20
  Range("AT1:AT42").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:AP42),AR1:AR42)"
Case 25
  Range("BD1:BD52").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:AZ52),BB1:BB52)"
Case 30
  Range("BN1:BN62").Select
  Selection.FormulaArray = "=MMULT(MINVERSE(A1:BJ62),BL1:BL62)"
Case Else
  MsgBox ("La resolución del sistema para este número de elementos no está programada.
  GoTo Fin
End Select

```

Figura 15: tercera parte del programa

Por último, la figura 11 muestra las instrucciones que copian algunos resultados a la hoja inicial, en la que se evalúan las reacciones y se comparan los desplazamientos del extremo libre con los calculados analíticamente a partir de las fórmulas del enunciado (figura 12).

```

'Escribimos en las celdas adecuadas de la primera hoja la flecha y el giro del extremo libre
Flecha = Cells(2 * N + 1, 2 * N + 6)
Giro = Cells(2 * N + 2, 2 * N + 6)
Sheets(2).Cells(22, 7) = Flecha
Sheets(2).Cells(22, 8) = Giro

'Escribimos en las celdas adecuadas de la primera hoja la flecha y el giro del nudo 1
' que se utilizan para calcular las reacciones
Flecha = Cells(3, 2 * N + 6)
Giro = Cells(4, 2 * N + 6)
Sheets(2).Cells(23, 2) = Flecha
Sheets(2).Cells(24, 2) = Giro

Fin:
End Sub

```

Figura 16: cuarta y última parte del programa

Mecánica Computacional de Sólidos. Curso 2019-2010																												
Práctica de aula nº 4, ejercicio 1, parte 2																												
Datos de la sección transversal				Datos del material			Datos de la ménsula y del modelo			Factor de cortante																		
Ancho	Canto	M.d.i.	A cortante	E	n	G	L _{Total}	Núm. Partes	L _{Elemento}	α _{y,elem}																		
0,3	0,4	0,0016	0,1	2,50E+07	0,2	1,04E+07	3	3	1	0,4608																		
Matriz de rigidez																												
E _y /L _{Elemento} 12 / α _y		<table border="1"> <tr><td>1041666,7</td><td>520833,33</td><td>-1041666,7</td><td>520833,33</td></tr> <tr><td>520833,33</td><td>387222,22</td><td>-520833,33</td><td>133611,11</td></tr> <tr><td>-1041666,7</td><td>-520833,33</td><td>1041666,7</td><td>-520833,33</td></tr> <tr><td>520833,33</td><td>133611,11</td><td>-520833,33</td><td>387222,22</td></tr> </table>											1041666,7	520833,33	-1041666,7	520833,33	520833,33	387222,22	-520833,33	133611,11	-1041666,7	-520833,33	1041666,7	-520833,33	520833,33	133611,11	-520833,33	387222,22
1041666,7	520833,33	-1041666,7	520833,33																									
520833,33	387222,22	-520833,33	133611,11																									
-1041666,7	-520833,33	1041666,7	-520833,33																									
520833,33	133611,11	-520833,33	387222,22																									
Resultados de contraste																												
Factor de cortante																												
α _{y,ménsula}		Resultados																										
5,12E-02		P	V _{N,analítica}	θ _{N,analítico}	R _{F0,analítica}	M _{Z0,analítico}																						
		-10	-2,28E-03	-1,13E-03	10	30																						
Resultados del modelo de elementos finitos																												
Desplazamientos elemento 1				Fuerzas extremos elemento 1				Desplazamientos extremo libre y errores																				
V _{0,MEF}	0	R _{F0,MEF}	10	V _{N,MEF}		θ _{N,MEF}	V _{N,MEF} /V _{N,anal.}	θ _{N,MEF} /θ _{N,anal.}																				
θ _{0,MEF}	0	M _{Z0,MEF}	30	-7,19E-04		-3,55E-04	0,315	0,315																				
V _{L,MEF}	-0,0001082	F _{Y1,MEF}	-10																									
θ _{L,MEF}	-0,0001972	M _{Z1,MEF}	-20																									

Figura 17: Hoja inicial del cálculo, completada con los resultados obtenidos por el MEF

3) Apartado 3, análisis de los resultados para varias relaciones canto/luz y varias divisiones en elementos finitos

Utilizando el elemento lagrangiano de dos nodos con integración exacta

La tabla 1 muestra el cociente entre la flecha obtenida por el método de los elementos finitos y la calculada a partir de la expresión analítica exacta para diferentes longitudes de la ménsula y diferentes discretizaciones.

Tabla 7

		CARACTERÍSTICAS DE LES MÈNSULES						
		L = 4,6h α=0,136	L = 5h α=0,115	L = 10h α=0,029	L = 15h α=0,013	L = 20h α=0,007	L = 25h α=0,005	L = 1450h α=1,37×10 ⁻⁶
NOMBRE D'ELEMENTS	1	0,120	0,103	0,028	0,013	0,007	0,005	1,3×10 ⁻⁶
	2	0,353	0,315	0,103	0,049	0,028	0,018	5,5×10 ⁻⁶
	3	0,550	0,509	0,206	0,103	0,061	0,040	1,2×10 ⁻⁵
	5	0,772	0,742	0,419	0,242	0,153	0,103	3,4×10 ⁻⁵
	10	0,932	0,920	0,742	0,561	0,419	0,315	1,4×10 ⁻⁵
	15	0,968	0,963	0,866	0,742	0,618	0,509	3,1×10 ⁻⁴
	20	0,982	0,979	0,920	0,837	0,742	0,648	5,5×10 ⁻⁴
	30	0,992	0,990	0,963	0,920	0,866	0,806	1,2×10 ⁻⁴
	50	0,997	0,997	0,986	0,970	0,947	0,920	3,4×10 ⁻³
	80	0,9988	0,9987	0,995	0,988	0,979	0,967	8,7×10 ⁻²

Taula 1 Fletxes adimensionals (v_{MEF}/v_{exacta}) determinades per a diferents valors de α i diferents nombres de divisions en la ménsula. L és la longitud, h el cantell.

En esta tabla se observa:

- 1) El elemento es muy poco eficiente. Para una ménsula de relación canto/luz de 1/5, en la que la deformación por cortante debe ser significativa, se necesitan entre 20 y 30

elementos para obtener una precisión razonable. Para piezas más esbeltas el, el número de elementos es desmesurado.

- 2) El elemento utilizado presenta bloqueo, como se indicó en las clases de teoría. Si la pieza es esbelta las flechas resultan infravaloradas significativamente; por ejemplo, para $h/L=1/20$ y dividiendo la ménsula en 15 elementos —que es un número elevado de partes— sólo se alcanza el 62% de la flecha esperada. Si vamos al caso extremo de $h/L=1/1450$, que sólo ha considerado con el fin de poner de manifiesto el bloqueo, con 80 elementos —un número enorme de partes— no se llega a la décima parte de la flecha.
- 3) Aumentando suficientemente el número de elementos la solución por elementos finitos va aproximándose a la real, como sabemos que debe suceder con cualquier elemento conforme. Nótese que los elementos de viga de Timoshenko siempre son conformes.

Utilizando el elemento lagrangiano de dos nodos con integración reducida

Para considerar el nuevo elemento finito basta programar, en la hoja de cálculo desarrollada en el apartado 2, la nueva matriz de rigidez —la daba el enunciado— en la posición que le corresponde.

La tabla 2 permite comparar las flechas adimensionales ($v_{MEF}/v_{analítica}$) que se obtienen, para cada relación canto/luz y cada número de divisiones, usando el elemento lagrangiano de dos nodos con integración exacta (primera línea) y con integración reducida (segunda línea, entre paréntesis). Muestra que:

- 1) La integración reducida elimina el bloqueo, ya que la precisión pasa a depender sólo del número de elementos y no de la relación canto/luz. Nótese que incluso para el elemento ficticio de longitud 1450 veces el canto, incluido sólo para verificar la existencia de bloqueo, proporciona resultados satisfactorios.
- 2) Mejora la precisión del elemento, que proporciona resultados satisfactorios con un número de elementos considerablemente menos que el elemento anterior.
- 3) Pese a ello, este elemento finito sigue siendo poco eficiente, ya que necesita dividir la ménsula un número relativamente grande de tramos para alcanzar una buena precisión (5 podría ser un valor adecuado según la tabla).

Tabla 8

		CARACTERÍSTIQUES DE LES MÈNSULES						
		L = 4,6h $\alpha=0,136$	L = 5h $\alpha=0,115$	L = 10h $\alpha=0,029$	L = 15h $\alpha=0,013$	L = 20h $\alpha=0,007$	L = 25h $\alpha=0,005$	L = 1450h $\alpha=1,37 \times 10^{-6}$
NOMBRE D'ELEMENTS	1	0,120 (0,758)	0,103 (0,757)	0,028 (0,752)	0,013 (0,751)	0,007 (0,750)	0,005 (0,750)	$1,3 \times 10^{-6}$ (0,750)
	2	0,353 (0,939)	0,315 (0,939)	0,103 (0,938)	0,049 (0,938)	0,028 (0,938)	0,018 (0,938)	$5,5 \times 10^{-6}$ (0,938)
	3	0,550 (0,973)	0,509 (0,973)	0,206 (0,972)	0,103 (0,972)	0,061 (0,972)	0,040 (0,972)	$1,2 \times 10^{-5}$ (0,972)
	5	0,772 (0,990)	0,742 (0,990)	0,419 (0,990)	0,242 (0,990)	0,153 (0,990)	0,103 (0,990)	$3,4 \times 10^{-5}$ (0,990)
	10	0,932 (0,998)	0,920 (0,998)	0,742 (0,998)	0,561 (0,998)	0,419 (0,998)	0,315 (0,998)	$1,4 \times 10^{-5}$ (0,998)
	15	0,968 (0,9989)	0,963 (0,9989)	0,866 (0,9989)	0,742 (0,9989)	0,618 (0,9989)	0,509 (0,9989)	$3,1 \times 10^{-4}$ (0,9989)
	20	0,982 (0,9994)	0,979 (0,9994)	0,920 (0,9994)	0,837 (0,9994)	0,742 (0,9994)	0,648 (0,9994)	$5,5 \times 10^{-4}$ (0,9994)
	30	0,992 (0,9997)	0,990 (0,9997)	0,963 (0,9997)	0,920 (0,9997)	0,866 (0,9997)	0,806 (0,9997)	$1,2 \times 10^{-4}$ (0,9997)
	50	0,997 (0,9999)	0,997 (0,9999)	0,986 (0,9999)	0,970 (0,9999)	0,947 (0,9999)	0,920 (0,9999)	$3,4 \times 10^{-3}$ (0,9999)
	80	0,9988 (1,0000)	0,9987 (1,0000)	0,995 (1,0000)	0,988 (1,0000)	0,979 (1,0000)	0,967 (1,0000)	$8,7 \times 10^{-2}$ (1,0000)

Taula 2 Fletxes adimensionals (v_{MEF}/v_{exacta}) determinades per a diferents valors de α i diferents nombres de divisions en la mènscula. L és la longitud, h el cantell. A la primera línia de cada casella figuren els resultats obtinguts amb integració exacta; a la segona, entre parèntesis, els obtinguts amb integració reduïda.

Utilizando el elemento finito basado en la función de forma natural de la teoría de Timoshenko

El elemento finito es el desarrollado en las diapositivas 36 y s.s. del tema 8, páginas 208 y s.s. del Cuaderno de Mecánica Computacional de Sólidos. De nuevo, para incorporar el nuevo elemento finito al programa desarrollado en el apartado 2 basta con programar la nueva matriz de rigidez —la daba el enunciado— en la posición que ocupaba la anterior.

La tabla 3 muestra las flechas adimensionales ($v_{MEF}/v_{analítica}$) que se obtienen, para cada relación canto/luz, analizando la mènscula con un solo elemento. Se comprueba que, como vimos en las clases teóricas, el elemento finito basado en la función de forma natural proporciona resultados exactos en los nudos, por lo que basta uno por barra para obtener el resultado correcto. Recordemos que para obtener el valor exacto de los esfuerzos y los desplazamientos en un punto intermedio basta con cortar por esa sección y recurrir a las leyes de la Mecánica en el primer caso, o utilizar los teoremas de Mohr o las fórmulas de Navier-Bresse en el segundo; así mismo, recordemos que también se puede dividir la barra colocando un nodo en el punto donde pretendemos conocer los valores exactos, y que esto último, en general, es mucho menos laborioso que el cálculo previamente descrito.

Tabla 9

	$L=4,6h$ $\alpha=0,136$	$L=5h$ $\alpha=0,115$	$L=10h$ $\alpha=0,029$	$L=15h$ $\alpha=0,013$	$L=20h$ $\alpha=0,007$	$L=25h$ $\alpha=0,005$	$L=1450h$ $\alpha=1,37 \times 10^{-5}$
N=1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

En conclusión, en este ejercicio hemos comprobado varias de las afirmaciones realizadas en el tema 8 de nuestro programa respecto a los elementos finitos tratados y hemos ampliado la información respecto a alguno de ellos. En concreto hemos visto:

- 1) Que el elemento finito lagrangiano de dos nodos, si se recurre a la integración exacta, presenta bloqueo.
- 2) Que la integración reducida resuelve este problema y, además, mejora notablemente la precisión del elemento.
- 3) Que, pese a ello, el mencionado elemento lagrangiano con integración reducida es poco eficiente. Requiere discretizaciones densas para proporcionar buenos resultados.
- 4) Que el elemento basado en la función de forma natural de la teoría de Timoshenko no presenta bloqueo.
- 5) Que este último elemento proporciona valores exactos de esfuerzos y desplazamientos en los nodos y, por ello, es muy eficiente ya que permite modelos de un solo elemento por barra.


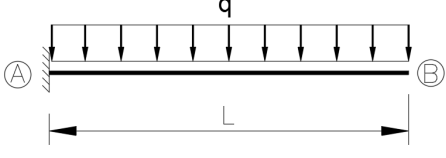
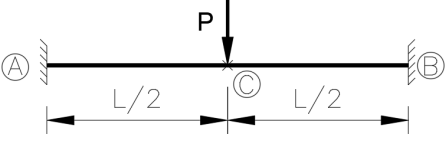
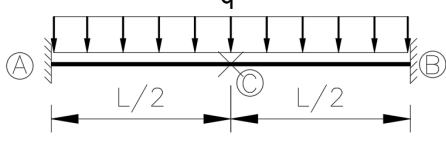
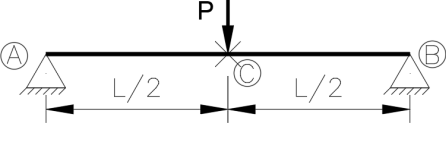
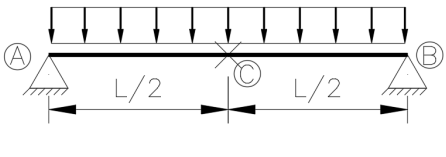
4) Nota sobre el factor de cortante:

Vimos en las clases de teoría que el factor de cortante **de la pieza completa** suele ser del orden de las centésimas. Por eso, quizás, les ha llamado la atención que hayamos calculado un valor de 0,4608 en el primer apartado del problema. Se debe a que es el de un elemento finito, no el de la pieza completa; si calculamos el de la ménsula resulta

$$\alpha_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{YY}L^2} = \frac{24(1+\nu)I_Z}{A_{YY}L^2} = \frac{24 \times 1,2 \times 0,0016}{0,1 \times 3^2} = 0,0512$$

que ya es del orden esperado.

También vimos en dichas clases que el factor de cortante de la pieza completa es una medida del incremento de la flecha que origina la deformación por cortante o, dicho de otro modo, del error en las flechas de la teoría de Navier-Bernoulli respecto a la de Timoshenko. Para aclararlo indicamos las flechas calculadas según esta última teoría en diferentes casos:

Problema	Flecha (expresión 1)	Flecha (expresión 2)
	$v_B = \frac{-PL^3}{3EI_Z} \left(1 + \frac{\alpha_Y}{4}\right)$	$v_B = \frac{-PL^3}{3EI_Z} (1 + \alpha_Y^*)$
	$v_B = \frac{-qL^4}{8EI_Z} \left(1 + \frac{\alpha_Y}{3}\right)$	$v_B = \frac{-qL^4}{8EI_Z} \left(1 + \frac{4}{3}\alpha_Y^*\right)$
	$v_C = \frac{-PL^3}{192EI_Z} (1 + 4\alpha_Y)$	$v_C = \frac{-PL^3}{192EI_Z} (1 + \alpha_Y^*)$
	$v_C = \frac{-5qL^4}{384EI_Z} (1 + 4\alpha_Y)$	$v_C = \frac{-5qL^4}{384EI_Z} (1 + \alpha_Y^*)$
	$v_C = \frac{-PL^3}{48EI_Z} (1 + \alpha_Y)$	$v_C = \frac{-PL^3}{48EI_Z} (1 + \alpha_Y^*)$
	$v_C = \frac{-5qL^4}{384EI_Z} \left(1 + \frac{4}{5}\alpha_Y\right)$	$v_C = \frac{-5qL^4}{384EI_Z} \left(1 + \frac{4}{5}\alpha_Y^*\right)$

En todas las expresiones de la flecha aparece un término como factor común de 1 más un coeficiente por el factor de cortante. El término inicial es, en todos los casos, la flecha determinada según la teoría de Navier-Bernoulli.

En cuanto al factor de cortante (α_Y), en las expresiones 1 de la flecha, es el que se obtiene directamente, el determinado a partir de la longitud total de la viga, L en todos los casos de la figura. Se observa en la tabla que la flecha, por efecto de la deformación por cortante, se incrementa entre $\frac{1}{4}$ y cuatro veces este factor por la flecha de Navier-Bernoulli.

En las expresiones 2 de la flecha se utiliza un factor de cortante modificado (α_Y^*), calculado a partir de una longitud equivalente de la viga, βL , donde β es el mismo factor que se utiliza para determinar la longitud equivalente a efectos de pandeo (2 para una ménsula, 0,5 para la viga biempotrada...). Se comprueba en la tabla que la parte de la flecha debida al cortante es el

producto de un coeficiente en torno a 1 (entre 0,8 y 1,33 en los casos estudiados) por este factor de cortante modificado y por la flecha de la teoría de Navier.

Estos resultados explican por qué decimos que el factor de cortante cuantifica la influencia de la deformación por cortante en los desplazamientos de flexión.

Ejercicio nº 2

Se trata de desarrollar un elemento finito de barra para estudiar el problema de flexión en el plano XY de una viga de Timoshenko, basado en interpolar las flechas y los giros mediante dos familias de polinomios lagrangianos: una de polinomios cuadráticos para la flecha y otra de polinomios lineales para el giro. Esto implica que los parámetros nodales serán las flechas de los dos extremos y del centro del elemento, y los giros de los dos extremos.

Se pide:

- 1) Obtener la matriz de rigidez del elemento.
- 2) Estimar si el elemento presenta bloqueo, analizando si la parte de la matriz de rigidez procedente del cortante es singular en una viga isostática modelizada con un solo elemento. Si se concluye que presenta bloqueo, recurrir a la integración reducida para intentar resolverlo y estimar de la misma manera que antes si se ha resuelto el problema.
- 3) Eliminar de la formulación la flecha del nodo central por condensación estática.
- 4) Repetir el análisis del tercer apartado del ejercicio 1 con el elemento desarrollado, una vez condensado, para comprobar que, efectivamente, el elemento finalmente obtenido no presenta bloqueo y comprobar cómo se comporta dicho elemento en la práctica.

Resolución

1) Obtención de la matriz de rigidez

Coordenada normalizada

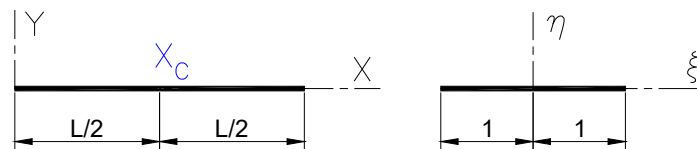


Figura 18: definición coordenada normalizada

El cambio de variable entre la coordenada original X y la coordenada normalizada ξ es el habitual:

$$\xi = \frac{X - L/2}{L/2} = \frac{2}{L} \left(X - \frac{L}{2} \right) \rightarrow \frac{d\xi}{dX} = \frac{2}{L}$$

de donde

$$dX = \frac{L}{2} d\xi$$

Los nodos extremos se numeran como 1 ($X_1 = 0$; $\xi_1 = -1$) y 2 ($X_2 = L$; $\xi_2 = 1$); el nodo central será el 3 ($X_3 = L/2$; $\xi_3 = 0$).

Interpolación de los desplazamientos

Recordemos que el enunciado establece que la flecha debe interpolarse usando polinomios de Lagrange cuadráticos y el giro con polinomios de Lagrange lineales. Así pues, la interpolación resultará

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}(\xi) \\ \hat{\theta}_z(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^v(\xi) & 0 & N_2^v(\xi) & 0 & N_3^v(\xi) \\ 0 & N_1^\theta(\xi) & 0 & N_2^\theta(\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z,1} \\ v_2 \\ \theta_{z,2} \\ v_3 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{a}_e$$

donde

$$N_1^v(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad ,, \quad N_2^v(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad ,, \quad N_3^v(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N_1^\theta(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad ,, \quad N_2^\theta(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

La obtención de las expresiones de los polinomios de Lagrange puede llevarse a cabo recordando que una función lineal que se anula en el punto de abscisa ξ_i puede escribirse como $y = k(\xi_i - \xi)$, y una función cuadrática que se anula en ξ_i y ξ_j puede expresarse como $y = k(\xi_i - \xi)(\xi_j - \xi)$; en cada caso la constante k permite imponer el valor 1 en otro punto. Las figuras 2 y 3 muestran la representación gráfica de las funciones de forma. También podrían haberse determinado a partir de la fórmula general, como figura en el Anexo 1, al final del ejercicio.



Figura 19: funciones de forma $N_1^v(\xi)$ (azul), $N_2^v(\xi)$ (rojo) y $N_3^v(\xi)$ (verde)

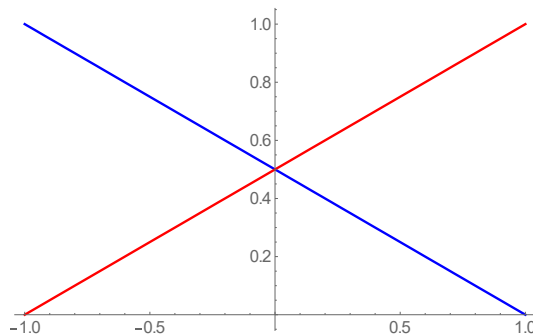


Figura 20: funciones de forma $N_1^\theta(\xi)$ (azul) y $N_2^\theta(\xi)$ (rojo)

Así pues, la expresión explícita de la matriz de funciones de forma es:

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}\xi(1+\xi) & 0 & 1-\xi^2 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de deformación

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{\nu}_{XY}(X) \\ \hat{\chi}_Z(X) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dX} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dX} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\nu}(X) \\ \hat{\theta}_Z(X) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{d}{d\xi} & -1 \\ 0 & \frac{2}{L} \frac{d}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^v(\xi) & 0 & N_2^v(\xi) & 0 & N_3^v(\xi) \\ 0 & N_1^\theta(\xi) & 0 & N_2^\theta(\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{Z,1} \\ v_2 \\ \theta_{Z,2} \\ v_3 \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{dN_1^v(\xi)}{d\xi} & -N_1^\theta(\xi) & \frac{2}{L} \frac{dN_2^v(\xi)}{d\xi} & -N_2^\theta(\xi) & \frac{2}{L} \frac{dN_3^v(\xi)}{d\xi} \\ 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1^\theta(\xi)}{d\xi} & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2^\theta(\xi)}{d\xi} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\xi)} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{Z,1} \\ v_2 \\ \theta_{Z,2} \\ v_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

Para escribir las derivadas respecto de X en función de derivadas respecto de ξ se ha recurrido a la regla de la cadena y la expresión de ξ en función de X hallada más arriba.

$$\frac{d}{dX} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dX} = \frac{2}{L} \frac{d}{d\xi}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{dN_1^v(\xi)}{d\xi} &= -\frac{1}{2}(1-2\xi) \quad ,, \quad \frac{dN_2^v(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2}(1+2\xi) \quad ,, \quad \frac{dN_3^v(\xi)}{d\xi} = -2\xi \\ \frac{dN_1^\theta(\xi)}{d\xi} &= -\frac{1}{2} \quad ,, \quad \frac{dN_2^\theta(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La matriz de deformaciones, finalmente, resulta:

$$\mathbf{B}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(1-2\xi) & -\frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{L}(1+2\xi) & -\frac{1}{2}(1+\xi) & -\frac{4}{L}\xi \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva

$$\begin{Bmatrix} V_Y(X) \\ M_Z(X) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GA_{VY} & 0 \\ 0 & EI_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu_{XY}(X) \\ \chi_Z(X) \end{Bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T(X) \mathbf{D} \mathbf{B}(X) dX = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi$$

Evaluación del producto matricial que aparece en el integrando:

$\mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi)$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(1-2\xi) & 0 \\ -\frac{1}{2}(1-\xi) & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L}(1+2\xi) & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+\xi) & \frac{1}{L} \\ -\frac{4}{L}\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GA_{VY} & 0 \\ 0 & EI_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(1-2\xi) & -\frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{L}(1+2\xi) & -\frac{1}{2}(1+\xi) & -\frac{4}{L}\xi \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{GA_{VY}}{L^2}(1-2\xi)^2 & \frac{GA_{VY}}{2L}(1-\xi)(1-2\xi) & -\frac{GA_{VY}}{L^2}(1-4\xi^2) & \frac{GA_{VY}}{2L}(1+\xi)(1-2\xi) & \frac{4GA_{VY}}{L^2}\xi(1-2\xi) \\ \dots & \frac{GA_{VY}}{4}(1-\xi)^2 + \frac{EI_Z}{L^2} & -\frac{GA_{VY}}{2L}(1-\xi)(1+2\xi) & \frac{GA_{VY}}{4}(1-\xi^2) - \frac{EI_Z}{L^2} & \frac{2GA_{VY}}{L}\xi(1-\xi) \\ \dots & \dots & \frac{GA_{VY}}{L^2}(1+2\xi)^2 & -\frac{GA_{VY}}{2L}(1+\xi)(1+2\xi) & -\frac{4GA_{VY}}{L^2}\xi(1+2\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \frac{GA_{VY}}{4}(1+\xi)^2 + \frac{EI_Z}{L^2} & \frac{2GA_{VY}}{L}\xi(1+\xi) \\ \text{sim.} & \dots & \dots & \dots & \frac{16GA_{VY}}{L^2}\xi^2 \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz de rigidez. Presentamos, como ejemplo, la determinación del elemento K_{11} .

$$K_{11} = \int_{-1}^1 \frac{GA_{VY}}{L^2} (1-2\xi)^2 \frac{L}{2} d\xi = \frac{GA_{VY}}{2L} \int_{-1}^1 (1-4\xi+4\xi^2) d\xi = \frac{GA_{VY}}{2L} \left[\xi - 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{GA_{VY}}{2L} \left[\left(1 - 2 + \frac{4}{3}\right) - \left(-1 - 2 - \frac{4}{3}\right) \right] = \frac{GA_{VY}}{2L} \frac{14}{3} = \frac{7GA_{VY}}{3L}$$

Evaluando del mismo las 15 integrales que aparecen se llegaría a

$$\mathbf{K} = GA_{VY}L \begin{bmatrix} \frac{7}{3L^2} & \frac{5}{6L} & \frac{1}{3L^2} & \frac{1}{6L} & -\frac{8}{3L^2} \\ \dots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6L} & \frac{1}{6} & -\frac{3L}{8} \\ \dots & \dots & \frac{7}{3L^2} & -\frac{5}{6L} & -\frac{3L^2}{8} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{3} & \frac{2}{3L} \\ \text{sim.} & \dots & \dots & \dots & \frac{16}{3L^2} \end{bmatrix} + \frac{EI_Z}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \text{sim.} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EI_Z}{L} \left(\begin{bmatrix} \frac{7}{3L^2} & \frac{5}{6L} & \frac{1}{3L^2} & \frac{1}{6L} & -\frac{8}{3L^2} \\ \dots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6L} & \frac{1}{6} & -\frac{3L}{8} \\ \dots & \dots & \frac{7}{3L^2} & -\frac{5}{6L} & -\frac{3L^2}{8} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{3} & \frac{2}{3L} \\ \text{sim.} & \dots & \dots & \dots & \frac{16}{3L^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \text{sim.} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \right)$$

siendo α_Y el factor de cortante según el eje Y , dado por $\alpha_Y = \frac{12EI_Z}{GA_{VY}L^2}$.

Hoy, esta forma de proceder no tiene sentido. Si se pretendiera plantear un ejercicio de obtención de la matriz de rigidez para desarrollarlo a mano, en la pizarra o en clase, sólo se pedirían una o dos de sus componentes. Si se hubiera pretendido calcular la matriz completa, procedería recurrir a un entorno matemático (*Mathematica*, *Mathcad*, *Derive*, *Maple*, etc.) que facilitara la evaluación de los productos matriciales, las integrales, etc.

Para ilustrar estas posibilidades, supongamos primero que se nos ha pedido calcular el elemento K_{12} de la matriz de rigidez. La evaluación del producto matricial que aparece en el integrando de K podría simplificarse omitiendo todos los términos que no son necesarios para hallar este elemento de la matriz:

$$\mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(1-2\xi) & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GA_{VY} & 0 \\ 0 & EI_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & -\frac{1}{2}(1-\xi) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{1}{L} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dots & \frac{GA_{VY}}{2L}(1-\xi)(1-2\xi) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

y a continuación hallar K_{12} como

$$K_{12} = \int_{-1}^1 \frac{GA_{VY}}{2L}(1-\xi)(1-2\xi) \frac{L}{2} d\xi = \frac{GA_{VY}}{4} \int_{-1}^1 (1-3\xi+2\xi^2) d\xi$$

$$= \frac{GA_{VY}}{4} \left[\xi - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{2}{3}\xi^3 \right]_{-1}^1 = \dots = \frac{5GA_{VY}}{6}$$

Por el contrario, si pretendiéramos calcular toda la matriz podríamos hacerlo, por ejemplo, usando el programa en *Mathematica* que se muestra en la figura 16. Para separar la parte asociada al cortante, \mathbf{K}_V , de la debida al flector, \mathbf{K}_M , basta observar que forman parte de la primera todos los términos que contienen la rigidez G_{AV} en la primera solución obtenida, o dependen de α en la segunda, y forman parte de \mathbf{K}_M los que contienen la rigidez EI en la primera solución o no dependen de α en la segunda.

Determinación de la matriz de rigidez

Definición de las funciones de forma y de sus derivadas

$$\begin{aligned} \text{Nv1}[x_] &:= -x * (1 - x) / 2 \\ \text{Nv2}[x_] &:= x * (1 + x) / 2 \\ \text{Nv3}[x_] &:= 1 - x^2 \\ \text{Ng1}[x_] &:= (1 - x) / 2 \\ \text{Ng2}[x_] &:= (1 + x) / 2 \\ \text{DNv1}[x_] &:= -(1 - 2 * x) / 2 \\ \text{DNv2}[x_] &:= (1 + 2 * x) / 2 \\ \text{DNv3}[x_] &:= -2 * x \\ \text{DNg1}[x_] &:= -1 / 2 \\ \text{DNg2}[x_] &:= 1 / 2 \end{aligned}$$

Definición de la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(x)$

$$\text{In[194]:= } \mathbf{B}[x_] := \begin{pmatrix} \text{DNv1}[x] * 2 / L & -\text{Ng1}[x] & \text{DNv2}[x] * 2 / L & -\text{Ng2}[x] & \text{DNv3}[x] * 2 / L \\ 0 & \text{DNg1}[x] * 2 / L & 0 & \text{DNg2}[x] * 2 / L & 0 \end{pmatrix}$$

Determinación de la matriz de rigidez del elemento

$$\text{In[195]:= } \mathbf{K} = \int_{-1}^1 \left(\text{Transpose}[\mathbf{B}[x]] \cdot \begin{pmatrix} \text{GAV} & 0 \\ 0 & \text{EI} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B}[x] \right) * L / 2 \, dx;$$

MatrixForm[K]

Out[196]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{7 \text{GAV}}{3 L} & \frac{5 \text{GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{3 L} & \frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} \\ \frac{5 \text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{L} + \frac{\text{GAV} L}{3} & -\frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{\text{EI}}{L} + \frac{\text{GAV} L}{6} & -\frac{2 \text{GAV}}{3} \\ \frac{\text{GAV}}{3 L} & -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{GAV}}{3 L} & -\frac{5 \text{GAV}}{6} & -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} \\ \frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{\text{EI}}{L} + \frac{\text{GAV} L}{6} & -\frac{5 \text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{L} + \frac{\text{GAV} L}{3} & \frac{2 \text{GAV}}{3} \\ -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} & -\frac{2 \text{GAV}}{3} & -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} & \frac{2 \text{GAV}}{3} & \frac{16 \text{GAV}}{3 L} \end{pmatrix}$$

Cambio de variable para expresar la matriz de rigidez en función de EI, L y α

$$\text{In[197]:= } \mathbf{K}\alpha = \text{Simplify}[\mathbf{K} /. \text{GAV} \rightarrow \{12 * \text{EI} / (\alpha * L^2)\}];$$

MatrixForm[K α]

Out[198]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{28 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{10 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{4 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{2 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{32 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) \\ \left(\frac{10 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{\text{EI} (4 + \alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{2 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{\text{EI} (-2 + \alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{8 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{4 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{2 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{28 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{10 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{32 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) \\ \left(\frac{2 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{\text{EI} (-2 + \alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{10 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{\text{EI} (4 + \alpha)}{L \alpha} \right) & \left(\frac{8 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) \\ \left(-\frac{32 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{8 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{32 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{8 \text{EI}}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{64 \text{EI}}{L^3 \alpha} \right) \end{pmatrix}$$

Figura 21

2) Previsión del bloqueo

Como es bien sabido, se puede producir bloqueo si la parte de la matriz de rigidez debida al cortante, \mathbf{K}_V , se transforma en una matriz regular al imponerle una sustentación isostática. El

resultado es independiente de la sustentación isostática escogida; para ponerlo de manifiesto, haremos la comprobación dos veces, con dos de estas formas de apoyo diferentes.

a) Viga articulada-articulada



Las condiciones de contorno cinemáticas son:

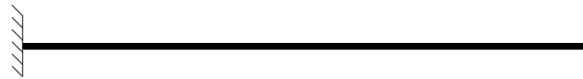
$$v_1 = v_2 = 0$$

y afectan a los grados de libertad 1º y 3º. Para obtener la matriz de rigidez reducida, resultado de imponer estas condiciones de contorno, se eliminan las filas y columnas 1ª y 3ª de \mathbf{K}_V :

$$\mathbf{K}_{V,\text{red}} = GA_{VV}L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3L} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3L} \\ -\frac{2}{3L} & \frac{2}{3L} & \frac{16}{3L^2} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{K}_{V,\text{red}}| = (GA_{VV}L)^3 \left[\frac{16}{27L^2} - 2 \times \frac{2}{27L^2} - \frac{4}{27L^2} - \frac{4}{27L^2} - \frac{4}{27L^2} \right] = 0$$

b) Viga empotrada-libre



Las condiciones de contorno cinemáticas ahora son:

$$v_1 = \theta_{z,1} = 0$$

y afectan a los grados de libertad 1º y 2º, por lo que habrá que eliminar las filas y columnas 1ª y 2ª de \mathbf{K}_V para imponerlas:

$$\mathbf{K}_{V,\text{red}} = GA_{VV}L \begin{bmatrix} \frac{7}{3L^2} & -\frac{5}{6L} & -\frac{8}{3L^2} \\ -\frac{5}{6L} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3L} \\ \frac{8}{3L^2} & \frac{2}{3L} & \frac{16}{3L^2} \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{K}_{V,\text{red}}| = (GA_{VV}L)^3 \left[\frac{112}{27L^4} + 2 \times \frac{40}{27L^4} - \frac{64}{27L^4} - \frac{100}{27L^4} - \frac{28}{27L^4} \right] = 0$$

Como en ambos casos la matriz de rigidez reducida es singular, es de prever que no se producirá bloqueo. Si realizáramos la comprobación para otras condiciones de sustentación isostáticas, obtendríamos el mismo resultado.

Otra forma de verificar si el elemento es susceptible de sufrir bloqueo por cortante es verificar el rango de la matriz de cortante \mathbf{K}_V . La matriz completa es de $NGDL \times NGDL$, siendo $NGDL$ el

número de grados de libertad del elemento finito, y esta siempre es singular. Una vez sustituidas unas condiciones de contorno isostáticas, la matriz reducida $\mathbf{K}_{V,red}$ pasará a ser de $(NGDL-NCI) \times (NGDL-NCI)$, donde NCI es el número de condiciones a imponer para definir una sustentación isostática. En consecuencia, si el rango de \mathbf{K}_V es $(NGDL-NCI)$, la matriz reducida por unas u otras condiciones de sustentación isostática será regular, y si es menor que $(NGDL-NCI)$ será singular⁸. Así pues, usando las instrucciones de un entorno matemático para determinar el rango de la matriz se comprueba fácilmente si es susceptible de sufrir bloqueo.

La figura 17 muestra esta comprobación realizada con *Mathematica*. La primera instrucción determina la matriz \mathbf{K}_V simplemente anulando los términos que dependen de EI_Z en \mathbf{K} , la segunda imprime el resultado y la tercera determina el rango de la matriz y lo imprime. En nuestro caso $(NGDL-NCI) = 5-2 = 3$.

Previsión del boqueo

Determinación de la parte de la matriz de rigidez correspondiente al cortante

```

KV = Simplify[K /. EI -> 0];
Print["KV = ", MatrixForm[KV]]
Print["Rango de la matriz = ", MatrixRank[KV]]

```

$$KV = \begin{pmatrix} \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} \\ \frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{3} & -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{5 \text{ GAV}}{6} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} \\ \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{3} & -\frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} & \frac{16 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} \end{pmatrix}$$

Rango de la matriz = 2

Así pues, como el rango la parte de la matriz de rigidez debida al cortante es menor que 3, el elemento no presentará bloqueo.

Figura 22

3) Condensación estática

Para eliminar el grado de libertad correspondiente a la flecha del nodo central se aplica a la matriz de rigidez completa el procedimiento de condensación estática. Teniendo en cuenta que dicho g.d.l. es el 5º en el vector de parámetros nodales, los grados de libertad a conservar son dellos cuatro primeros y el que procede eliminar es el 5º.

La expresión que determina la matriz de rigidez condensada es:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{CC} - \mathbf{K}_{CE} [\mathbf{K}_{EE}]^{-1} \mathbf{K}_{EC}$$

⁸ En el primer ejercicio del capítulo 5 se justifica este procedimiento, que aquí sólo se describe.

$$\mathbf{K}_{CC} = \begin{bmatrix} \frac{7GA_{YY}}{3L} & \frac{5GA_{YY}}{6} & \frac{GA_{YY}}{3L} & \frac{GA_{YY}}{6} \\ \frac{5GA_{YY}}{6} & \frac{GA_{YY}L}{3} + \frac{EI_Z}{L} & -\frac{GA_{YY}}{6} & \frac{GA_{YY}L}{6} - \frac{EI_Z}{L} \\ \frac{GA_{YY}}{6} & -\frac{GA_{YY}}{6} & \frac{7GA_{YY}}{6} & -\frac{5GA_{YY}}{6} \\ \frac{3L}{GA_{YY}} & \frac{6}{-5GA_{YY}} & \frac{3L}{-5GA_{YY}} & \frac{6}{GA_{YY}L} + \frac{EI_Z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{V,EC} = \mathbf{K}_{V,CE}^T = \begin{bmatrix} -\frac{8GA_{YY}}{3L} & -\frac{2GA_{YY}}{3} & -\frac{8GA_{YY}}{3L} & \frac{2GA_{YY}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{V,EE} = \begin{bmatrix} \frac{16GA_{YY}}{3L} \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$\mathbf{K}_V^* = \begin{bmatrix} \frac{GA_{YY}}{L} & \frac{GA_{YY}}{2} & -\frac{GA_{YY}}{L} & \frac{GA_{YY}}{2} \\ \frac{GA_{YY}}{2} & \frac{GA_{YY}L}{4} + \frac{EI_Z}{L} & -\frac{GA_{YY}}{2} & \frac{GA_{YY}L}{4} - \frac{EI_Z}{L} \\ -\frac{GA_{YY}}{L} & -\frac{GA_{YY}}{2} & \frac{GA_{YY}}{L} & -\frac{GA_{YY}}{2} \\ \frac{GA_{YY}}{2} & \frac{GA_{YY}L}{4} - \frac{EI_Z}{L} & -\frac{GA_{YY}}{2} & \frac{GA_{YY}L}{4} + \frac{EI_Z}{L} \end{bmatrix}$$

Observe que, casualmente, la matriz de rigidez condensada obtenida al eliminar la flecha del nodo central es la misma que se obtuvo en las clases de teoría al plantear el elemento lagrangiano de 2 nodos con interpolación lineal de la flecha y del giro, utilizando integración reducida para calcular \mathbf{K}_V .

NOTA. Si realizáramos la misma prueba que antes para estimar si puede haber bloqueo, pero en este caso sobre la matriz de rigidez condensada, se obtendría el mismo resultado.

Aunque el procedimiento es fácil de aplicar operando a mano, porque la matriz a invertir es de 1x1, el recurso a un entorno matemático facilita mucho el trabajo. La figura 18 muestra la condensación realizada usando *Mathematica*.

Condensación estática

```

In[208]= Kcc = Drop[K, -1, -1]; (*Esta instrucción elimina la última fila y la última columna*)
          |elimina
Kce = Drop[K, -1, 4]; (*Esta instrucción elimina la última fila y las cuatro primeras columnas*)
          |elimina
Kec = Drop[K, 4, -1];
          |elimina
Kee = Drop[K, 4, 4];
          |elimina
Kcond = Simplify[Kcc - Kce.Inverse[Kee].Kec];
          |simplifica      |matriz inversa

Print["Kcc = ", MatrixForm[Kcc]]
|escribe      |forma de matriz
Print["Kce = ", MatrixForm[Kce]]
|escribe      |forma de matriz
Print["Kec = ", MatrixForm[Kec]]
|escribe      |forma de matriz
Print["Kee = ", MatrixForm[Kee]]
|escribe      |forma de matriz
Print["Kcond = ", MatrixForm[Kcond]]
|escribe      |forma de matriz

```

$$K_{cc} = \begin{pmatrix} \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{\text{GAV}}{6} \\ \frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{3} & -\frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{6} \\ \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{5 \text{ GAV}}{6} \\ \frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{6} & -\frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{3} \end{pmatrix}$$

$$K_{ce} = \begin{pmatrix} -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} \\ -\frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} \\ \frac{2 \text{ GAV}}{3} \end{pmatrix}$$

$$K_{ec} = \begin{pmatrix} -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} \end{pmatrix}$$

$$K_{ee} = \begin{pmatrix} \frac{16 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} \end{pmatrix}$$

$$K_{cond} = \begin{pmatrix} \frac{\text{GAV}}{\text{L}} & \frac{\text{GAV}}{2} & -\frac{\text{GAV}}{\text{L}} & \frac{\text{GAV}}{2} \\ \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{4} & -\frac{\text{GAV}}{\text{L}} & -\frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{4} \\ -\frac{\text{GAV}}{\text{L}} & -\frac{\text{GAV}}{4} & \frac{\text{GAV}}{\text{L}} & -\frac{\text{GAV}}{4} \\ \frac{\text{GAV}}{2} & -\frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{4} & -\frac{\text{GAV}}{\text{L}} & \frac{\text{EI}}{\text{L}} + \frac{\text{GAV L}}{4} \end{pmatrix}$$

Figura 23

4) Comportamiento del elemento

Se ha comprobado que la matriz de rigidez condensada obtenida en el apartado anterior coincide con la matriz de rigidez del elemento lagrangiano de 2 nodos con interpolación lineal de flecha y giro, una vez eliminado el bloqueo que presentaba utilizando integración reducida selectiva, que se desarrolló en las clases de teoría y se ha estudiado en el ejercicio 1. Así pues, no es necesario repetir los cálculos; se obtendrán los mismos resultados que en dicho ejercicio.

Anexo 1: Determinación de las funciones de forma

La expresión general del polinomio de Lagrange de n puntos que vale 1 en el punto de abscisa ξ_i es:

$$\mathcal{L}_i^n(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

Dicho polinomio es de grado $(n - 1)$. Recordemos que hemos convenido en identificar a los nodos extremos de la pieza como 1 ($X_1 = 0$; $\xi_1 = -1$) y 2 ($X_2 = L$; $\xi_2 = 1$), y al nodo central ($X_3 = L/2$; $\xi_3 = 0$) como 3.

Las funciones de forma para la interpolación de la flecha son:

$$N_1^v(\xi) = \mathcal{L}_1^3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 1)(\xi - 0)}{(-1 - 1)(-1 - 0)} = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)$$

$$N_2^v(\xi) = \mathcal{L}_2^3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 0)}{[1 - (-1)](1 - 0)} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$$

$$N_3^v(\xi) = \mathcal{L}_3^3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 1)}{[0 - (-1)](0 - 1)} = 1 - \xi^2$$

y las funciones de forma para la interpolación del giro:

$$N_1^\theta(\xi) = \mathcal{L}_1^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2^\theta(\xi) = \mathcal{L}_2^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Anexo 2: Aclaración sobre el proceso de condensación estática

Dado que se ha obtenido la matriz de rigidez expresando por separado la parte debida al flector y la parte debida al cortante, como

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_F + \mathbf{K}_V \quad (\text{A})$$

podríamos pensar que la condensación estática también se puede realizar operando, por separado, con las matrices \mathbf{K}_F y \mathbf{K}_V . En general, esto no es correcto; es válido en algunos casos particulares, pero no es un resultado general. Pasamos a justificar esta afirmación.

Se trata, pues, de condensar una matriz de rigidez que está expresada de la forma (A). Para ello, en primer lugar, se subdivide en las matrices \mathbf{K}_{CC} , \mathbf{K}_{CE} , \mathbf{K}_{EC} y \mathbf{K}_{EE} , del modo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{CC} &= \mathbf{K}_{F,CC} + \mathbf{K}_{V,CC} \\ \mathbf{K}_{CE} &= \mathbf{K}_{F,CE} + \mathbf{K}_{V,CE} \\ \mathbf{K}_{EC} &= \mathbf{K}_{F,EC} + \mathbf{K}_{V,EC} \\ \mathbf{K}_{EE} &= \mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

y, a continuación, se sustituyen estas relaciones en la expresión de la matriz de rigidez condensada

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{CC} - \mathbf{K}_{CE}[\mathbf{K}_{EE}]^{-1}\mathbf{K}_{EC} \quad (\text{C})$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= [\mathbf{K}_{F,CC} + \mathbf{K}_{V,CC}] - [\mathbf{K}_{F,CE} + \mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{F,EC} + \mathbf{K}_{V,EC}] = \\ &= [\mathbf{K}_{F,CC}] - [\mathbf{K}_{F,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{F,EC}] + [\mathbf{K}_{V,CC}] - [\mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{V,EC}] - \\ &\quad - [\mathbf{K}_{F,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{V,EC}] - [\mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{F,EC}] \end{aligned} \quad (\text{D})$$

La obtención de la inversa de la suma de dos matrices no es una cuestión baladí⁹ (aunque en nuestro caso se simplificaría porque las matrices $\mathbf{K}_{F,EE}$ y $\mathbf{K}_{V,EE}$ constan de un solo elemento y, además, $\mathbf{K}_{F,EE} = \mathbf{0}$). Por ahora, por mor de generalidad, vamos a seguir el razonamiento suponiendo tan solo que $[\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}$ existe, ya que, si no fuera así, no podría llevarse a cabo la condensación.

Recordemos que si \mathbf{A} es una matriz nula,

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{AB} = \mathbf{0} \\ \mathbf{CA} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{E})$$

donde \mathbf{B} y \mathbf{C} son matrices cualesquiera con la única restricción de que el número de filas y columnas de cada una permita llevar a cabo los productos matriciales indicados.

⁹ Puede consultarse en

1) <<https://www.i-ciencias.com/pregunta/5081/inversa-de-la-suma-de-matrices>> [consulta 26/05/2020]

2) MILLER, K.S. (1981), On the Inverse of the Sum of Matrices, *Mathematics Magazine*, Vol. 54, No. 2 (Mar., 1981), pp. 67-72

Si $\mathbf{K}_{F,CE} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{K}_{F,EC} = \mathbf{0}$, como ocurre en nuestro caso, teniendo en cuenta (E),

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= [\mathbf{K}_{F,CC}] - \cancel{[\mathbf{K}_{F,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{F,EC}]} + [\mathbf{K}_{V,CC}] - [\mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{V,EC}] - \\ &\quad - \cancel{[\mathbf{K}_{F,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{V,EC}]} - \cancel{[\mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{F,EC}]} \\ &= [\mathbf{K}_{F,CC}] + [\mathbf{K}_{V,CC}] - [\mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{F,EE} + \mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{V,EC}] \end{aligned} \quad (F)$$

Si en lugar de $\mathbf{K}_{F,CE}$ y $\mathbf{K}_{F,EC}$ hubieran sido $\mathbf{K}_{V,CE}$ $\mathbf{K}_{V,EC}$ las matrices nulas hubiéramos llegado a un resultado similar, simplemente intercambiando las F y V de los subíndices.

Por último, si como ocurre en nuestro problema $\mathbf{K}_{E,EE} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{K}^* = \underbrace{[\mathbf{K}_{F,CC}]}_{\mathbf{K}_F^*} + \underbrace{[\mathbf{K}_{V,CC}] - [\mathbf{K}_{V,CE}][\mathbf{K}_{V,EE}]^{-1}[\mathbf{K}_{V,EC}]}_{\mathbf{K}_V^*}$$

que muestra como en un caso como el nuestro sería posible la condensación por separado de \mathbf{K}_F y \mathbf{K}_V .

En conclusión, sólo es posible condensar por separado las dos matrices parciales si $\mathbf{K}_{F,CE} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_{F,EC} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{K}_{F,EE} = \mathbf{0}$, o, alternativamente, $\mathbf{K}_{V,CE} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_{V,EC} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{K}_{V,EE} = \mathbf{0}$.

Como recomendación final, para condensar una matriz de la forma $\mathbf{K} = \mathbf{K}_F + \mathbf{K}_V$ se sugiere operar a partir de la matriz \mathbf{K} completa y, una vez terminado el proceso, separarla como

$$\mathbf{K}^* = \underbrace{\frac{EI}{L} \mathbf{K}_F^*}_{\mathbf{K}_F^*} + \underbrace{GA_V L \mathbf{K}_V^*}_{\mathbf{K}_V^*}$$

Capítulo 5:

Características de los elementos finitos de placa explicadas con ejemplos 1D

Estando dedicadas al tratamiento de las placas por el método de los elementos finitos tanto las últimas lecciones del curso como las últimas prácticas informáticas del mismo, puede sorprender que los ejercicios de este último capítulo traten sobre elementos finitos de viga y no de placa. Por ello es conveniente empezar explicando cuáles son sus objetivos y cómo se pretende alcanzarlos.

La finalidad del capítulo es mostrar ejemplos sencillos que permitan comprender qué es un elemento finito con deformación por cortante impuesta y que es un elemento discreto de Kirchhoff. La búsqueda de la sencillez es la que ha llevado a elegir presentar estas ideas sobre elementos de viga, con un número de grados de libertad mucho menor que en elementos de placa, para evitar que los árboles no nos dejen ver el bosque, que la enorme cantidad de parámetros a manejar en el caso de la placa nos impida seguir el hilo del razonamiento, que es sencillo.

Por este mismo motivo, centrarnos en el hilo del razonamiento y no perdernos por causa del enorme volumen de operaciones que supondría el desarrollo a mano de los cálculos que se van a presentar, se ha escogido desarrollarlos con el programa *Mathematica*, con el cuál los productos de matrices implicados en el integrando de la matriz de rigidez o en la condensación estática, la integración de la matriz de rigidez, la obtención del determinante de la parte de la matriz de rigidez debida al cortante para averiguar si es previsible el bloqueo, etc. suponen una línea de programa en cada caso. En el siglo XXI usar las herramientas del siglo XXI es la opción lógica; lo que no tendría sentido sería ceñirse a las del XIX.

Así pues, en resumen, en esta práctica de aula pretendemos:

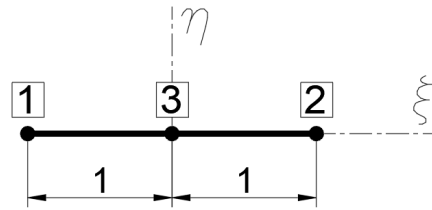
- 1) Plantear la obtención del elemento finito de viga de Timoshenko utilizando como funciones de forma polinomios lagrangianos de tres puntos, es decir, polinomios cuadráticos con grados de libertad en un punto intermedio, que finalmente eliminaremos por condensación estática. El objetivo de este primer ejercicio es doble: determinar una solución de referencia para ver cómo influyen las modificaciones posteriores y establecer la programación en *Mathematica* que permite obtener y condensar la matriz de rigidez.
- 2) Modificar el elemento anterior imponiendo un campo de deformaciones por cortante predeterminado, que nos permita comprender los pasos fundamentales del proceso de determinación de un elemento finito de placa con deformación por cortante impuesta.
- 3) Modificar el elemento obtenido en el punto 1 imponiendo que la distorsión angular sea nula en ciertos puntos, mostrando así los pasos más relevantes de la forma de

operar en la definición de un elemento finito discreto de Kirchhoff para la flexión de placas.

- 4) Comparar los resultados obtenidos en los pasos anteriores para comprobar el efecto de las transformaciones realizadas.

Como alternativa al texto que sigue, la explicación de estos ejercicios puede encontrarse, grabada en vídeo, en <https://media.upv.es/#/portal/channel/33fba690-d2b0-11ec-aed7-c3851556410a>.

Ejercicio nº 1



Determinar la matriz de rigidez de un elemento finito unidimensional previsto para estudiar vigas aplicando la teoría de Timoshenko, basado en usar como funciones de interpolación los polinomios del Lagrange cuadráticos (o de 3 puntos), eliminando los grados de libertad internos por condensación estática. Las funciones de interpolación citadas son:

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$$

$$N_3(\xi) = 1 - \xi^2$$

donde ξ es la coordenada normalizada que utilizamos habitualmente.

La viga tiene longitud L , rigidez a flexión EI y rigidez a cortante GA_v . La figura muestra la numeración de nudos.

Resolución

1) Interpolación de los desplazamientos

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}(\xi) \\ \hat{\theta}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

2) Determinación de las deformaciones aproximadas

$$\begin{Bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2d}{L d\xi} & -1 \\ 0 & \frac{2d}{L d\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2dN_1}{L d\xi} & -N_1 & \frac{2dN_2}{L d\xi} & -N_2 & \frac{2dN_3}{L d\xi} & -N_3 \\ 0 & \frac{2dN_1}{L d\xi} & 0 & \frac{2dN_2}{L d\xi} & 0 & \frac{2dN_3}{L d\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

3) Relación constitutiva

$$\begin{Bmatrix} \hat{V} \\ \hat{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GA_V & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{V} \\ \hat{X} \end{Bmatrix}$$

4) Obtención de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T(X) \mathbf{D} \mathbf{B}(X) dX = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi$$

Con todo esto, ya tenemos la información necesaria para programar en *Mathematica* la obtención de esta matriz. La figura 1 muestra tanto la implementación de este proceso como su resultado, y pone de manifiesto la sencillez de la programación. Sólo ha hecho falta determinar las derivadas de las funciones de forma y programar las expresiones anteriores.

Definición de las funciones de forma y de sus derivadas

```

N1[x_] := -x * (1 - x) / 2
N2[x_] := x * (1 + x) / 2
N3[x_] := 1 - x^2
DN1[x_] := -(1 - 2 * x) / 2
DN2[x_] := (1 + 2 * x) / 2
DN3[x_] := -2 * x
    
```

Definición de la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(x)$

$$\mathbf{B}[x_] := \begin{pmatrix} \text{DN1}[x] * 2 / L & -\text{N1}[x] & \text{DN2}[x] * 2 / L & -\text{N2}[x] & \text{DN3}[x] * 2 / L & -\text{N3}[x] \\ \mathbf{0} & \text{DN1}[x] * 2 / L & \mathbf{0} & \text{DN2}[x] * 2 / L & \mathbf{0} & \text{DN3}[x] * 2 / L \end{pmatrix}$$

Determinación de la matriz de rigidez del elemento

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \left(\text{Transpose}[\mathbf{B}[x]] \cdot \begin{pmatrix} \text{GAV} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{EI} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B}[x] \right) * L / 2 dx;$$

MatrixForm[K]
[forma de matriz]

$$\begin{pmatrix} \frac{7 \text{GAV}}{3 L} & \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{\text{GAV}}{3 L} & -\frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} & \frac{2 \text{GAV}}{3} \\ \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{7 \text{EI}}{3 L} + \frac{2 \text{GAV} L}{15} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{3 L} - \frac{\text{GAV} L}{30} & -\frac{2 \text{GAV}}{3} & -\frac{8 \text{EI}}{3 L} + \frac{\text{GAV} L}{15} \\ \frac{\text{GAV}}{3 L} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{GAV}}{3 L} & -\frac{\text{GAV}}{2} & -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} & -\frac{2 \text{GAV}}{3} \\ -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{3 L} - \frac{\text{GAV} L}{30} & -\frac{\text{GAV}}{2} & \frac{7 \text{EI}}{3 L} + \frac{2 \text{GAV} L}{15} & \frac{2 \text{GAV}}{3} & -\frac{8 \text{EI}}{3 L} + \frac{\text{GAV} L}{15} \\ -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} & -\frac{2 \text{GAV}}{3} & -\frac{8 \text{GAV}}{3 L} & \frac{2 \text{GAV}}{3} & \frac{16 \text{GAV}}{3 L} & \mathbf{0} \\ \frac{2 \text{GAV}}{3} & -\frac{8 \text{EI}}{3 L} + \frac{\text{GAV} L}{15} & -\frac{2 \text{GAV}}{3} & -\frac{8 \text{EI}}{3 L} + \frac{\text{GAV} L}{15} & \mathbf{0} & \frac{16 \text{EI}}{3 L} + \frac{8 \text{GAV} L}{15} \end{pmatrix}$$

Figura 24

Así pues, la matriz de rigidez del elemento es

$$\begin{pmatrix} \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{7 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{2 \text{ GAV L}}{15} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{3 \text{ L}} - \frac{\text{GAV L}}{30} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} \\ \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{\text{GAV}}{2} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{3 \text{ L}} - \frac{\text{GAV L}}{30} & -\frac{\text{GAV}}{2} & \frac{7 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{2 \text{ GAV L}}{15} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} \\ -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} & \frac{16 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & 0 \\ \frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} & 0 & \frac{16 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{8 \text{ GAV L}}{15} \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el enunciado, falta condensar los grados internos, correspondientes a las dos últimas filas y dos últimas columnas de la matriz anterior. No obstante, antes de abordar tal proceso, comprobaremos que no es previsible que este elemento finito presente bloqueo.

5) Previsión de la posibilidad de bloqueo

El elemento finito será susceptible de sufrir bloqueo si la parte de la matriz de rigidez que deriva de la deformación por cortante define una matriz regular una vez se hayan sustituido en ella unas condiciones de contorno isostáticas. Separar las partes de \mathbf{K} derivadas de la flexión y del cortante en la expresión anterior es trivial; las primeras incluyen el término EI y las segundas GA_V . En *Mathematica*, salvo que lo hagamos a mano borrando términos uno a uno, no es tan inmediato. Sin embargo, dándonos cuenta de que la parte debida al cortante se obtiene de la expresión anterior haciendo $EI=0$, encontramos dos modos fáciles de determinar esta matriz \mathbf{K}_Q en el programa: volviendo a evaluar la integral pero considerando $EI=0$ en el integrando o diciéndole al programa que sustituya $EI=0$ en la matriz resultado (con la instrucción /. que volverá a aparecer más adelante). Hemos escogido el primer método.

Una vez determinada la matriz \mathbf{K}_Q le impondremos las condiciones de contorno correspondientes a una viga en voladizo (mediante la instrucción *Drop* que permite eliminar filas y columnas) y calcularemos el determinante de la matriz de rigidez reducida, $\mathbf{K}_{Q,R}$. La figura 2 muestra este proceso¹⁰. Como el determinante de la matriz de rigidez reducida es cero, no es previsible que la viga presente bloqueo por cortante.

Dado que hay otras posibles isostatizaciones de la viga modelada mediante un único elemento, cabría pensar que es necesario comprobar todas las restantes para asegurarnos de que $\mathbf{K}_{Q,R}$ es singular en todos los casos. Afortunadamente, no es necesario. El producto de la matriz de rigidez por el vector de parámetros nodales proporciona un vector de fuerzas generalizadas aplicadas en los nodos, que deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio, ya que la relación de rigidez del elemento deriva de la condición de equilibrio del mismo formulada por trabajos virtuales. Así pues, si el elemento tiene N grados de libertad (y por lo tanto su matriz de rigidez es de $N \times N$) y en el tipo de problema planteado se requiere coartar C g.d.l. para proporcionar una sustentación isostática¹¹, entre las filas de la matriz de rigidez existen C relaciones lineales, determinadas por las C ecuaciones que permiten calcular las reacciones en los grados de libertad coartados. La matriz $\mathbf{K}_{Q,R}$, resultado de haber sustituido en la parte de la matriz de rigidez debida al cortante unas condiciones de contorno isostáticas, es de $(N-C) \times (N-C)$; si para

¹⁰ En adelante entenderemos que las diferentes figuras que muestren parte de un programa en *Mathematica*, dentro de un mismo ejercicio, corresponden al mismo programa y se presentan en el mismo orden en que aparecen en él.

¹¹ C vale 2 para el problema de flexión sin extensión en un plano (XY o XZ), 3 para el problema de pórtico plano o el de emparrillado plano y 6 para el de estructura espacial.

esas condiciones su determinante es nulo, es que entre esas ($N-C$) relaciones al menos una es combinación lineal de las restantes. Eso quiere decir que entre las filas de la matriz K_Q inicial existen, al menos, $C+1$ que pueden escribirse como combinación lineal del resto de ellas; por lo tanto, si eliminamos las C correspondientes a otra sustentación isostática, entre las restantes seguirá existiendo, al menos, una relación lineal, y por lo tanto la matriz K_{QR} correspondiente a esta segunda isostatización también será singular. En nuestro caso, $N=6$, $C=2$ y la matriz K_{QR} correspondiente a las condiciones de contorno de voladizo es de 4×4 . Si el determinante de esta última matriz es nulo, quiere decir que entre las seis filas de la K_Q inicial existen, al menos, 3 relaciones lineales. Si eliminamos 2 filas de esta última matriz por aplicación de otras condiciones de contorno (y con ellas las dos relaciones lineales asociadas a las ecuaciones de equilibrio que permiten calcularlas), aún queda, al menos, una relación lineal entre las filas, por lo que la matriz así generada también será singular. Con ello queda justificado que basta comprobar una isostatización para averiguar si es previsible el bloqueo del elemento finito.

Determinación de la parte de la matriz de rigidez correspondiente al cortante

$$KV = \int_{-1}^1 \left(\underset{\text{transposición}}{\text{Transpose}}[B[x]] \cdot \begin{pmatrix} GAV & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \cdot B[x] \right) * L / 2 dx;$$

MatrixForm[KV]
 [forma de matriz]

$$\begin{pmatrix} 7 \frac{GAV}{3L} & \frac{GAV}{2} & \frac{GAV}{3L} & -\frac{GAV}{6} & -\frac{8 \frac{GAV}{3L}}{3} & \frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} \\ \frac{GAV}{2} & 2 \frac{GAV L}{15} & \frac{GAV}{6} & -\frac{GAV L}{30} & -\frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} & \frac{GAV L}{15} \\ \frac{GAV}{3L} & \frac{GAV}{6} & 7 \frac{GAV}{3L} & -\frac{GAV}{2} & -\frac{8 \frac{GAV}{3L}}{3} & -\frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} \\ -\frac{GAV}{6} & -\frac{GAV L}{30} & -\frac{GAV}{2} & 2 \frac{GAV L}{15} & 2 \frac{GAV}{3L} & \frac{GAV L}{15} \\ -\frac{8 \frac{GAV}{3L}}{3} & -\frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} & -\frac{8 \frac{GAV}{3L}}{3} & 2 \frac{GAV}{3L} & 16 \frac{GAV}{3L} & \emptyset \\ \frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} & \frac{GAV L}{15} & -\frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} & \frac{GAV L}{15} & \emptyset & 8 \frac{GAV L}{15} \end{pmatrix}$$

Sustitución de las condiciones de contorno de viga en voladizo y cálculo del determinante

(*La primera instrucción elimina las dos primeras filas y las dos primeras columnas de KV*)

```
KVreduc = Drop[KV, 2, 2];
```

[elimina]

```
Print["Viga en voladizo"]
```

[escribe]

```
Print["KVreduc = ", MatrixForm[KVreduc]]
```

[escribe] [forma de matriz]

```
Print["Determinante = ", Det[KVreduc]]
```

[escribe] [determinante]

Viga en voladizo

$$KVreduc = \begin{pmatrix} 7 \frac{GAV}{3L} & -\frac{GAV}{2} & -\frac{8 \frac{GAV}{3L}}{3} & -\frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} \\ -\frac{GAV}{6} & 2 \frac{GAV L}{15} & 2 \frac{GAV}{3L} & \frac{GAV L}{15} \\ -\frac{8 \frac{GAV}{3L}}{3} & 2 \frac{GAV}{3L} & 16 \frac{GAV}{3L} & \emptyset \\ -\frac{2 \frac{GAV}{3L}}{3} & \frac{GAV L}{15} & \emptyset & 8 \frac{GAV L}{15} \end{pmatrix}$$

Determinante = \emptyset

Figura 25

El razonamiento anterior implica que si entre las filas de K_Q existen ($N-C$) linealmente independientes el elemento presentará bloqueo, pero que si el número de filas linealmente

independientes es de $N-C-1$ o menor no lo presentará. En Álgebra, a ese número de filas linealmente independientes se le denomina *rango* de la matriz. Por lo tanto, un elemento será susceptible de bloqueo si el rango de la matriz K_Q es $(N-C)$ y no lo será si el rango es menor; por lo expuesto más arriba respecto a las condiciones de equilibrio resulta imposible que el rango sea mayor que $(N-C)$. Esto nos proporciona otra manera de verificar si un elemento es susceptible de sufrir bloqueo, muy fácil si estamos trabajando con *Mathematica*: la instrucción *MatrixRank[M]* que proporciona directamente el rango de la matriz M .

Así pues, una forma de verificar la susceptibilidad al bloqueo de la matriz de rigidez de nuestro elemento finito, alternativa a la descrita en la figura 2, es la que se muestra en la figura 3, donde se comprueba que el rango de K_Q es menor que $(N-C)=6-2=4$, por lo que el elemento no presentará bloqueo.

Determinación de la parte de la matriz de rigidez correspondiente al cortante

$$KV = \int_{-1}^1 \left(\text{Transpose}[B[x]] \cdot \begin{pmatrix} GAV & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B[x] \right) * L / 2 dx;$$

MatrixForm[KV]
|forma de matriz

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{7 GAV}{3 L} & \frac{GAV}{2} & \frac{GAV}{3 L} & -\frac{GAV}{6} & -\frac{8 GAV}{3 L} & \frac{2 GAV}{3} \\ \frac{GAV}{2} & \frac{2 GAV L}{15} & \frac{GAV}{6} & -\frac{GAV L}{30} & -\frac{2 GAV}{3} & \frac{GAV L}{15} \\ \frac{GAV}{3 L} & \frac{GAV}{6} & \frac{7 GAV}{3 L} & -\frac{GAV}{2} & \frac{8 GAV}{3 L} & -\frac{2 GAV}{3} \\ -\frac{GAV}{6} & -\frac{GAV L}{30} & -\frac{GAV}{2} & \frac{2 GAV L}{15} & \frac{2 GAV}{3} & \frac{GAV L}{15} \\ -\frac{8 GAV}{3 L} & -\frac{2 GAV}{3} & -\frac{8 GAV}{3 L} & \frac{2 GAV}{3} & \frac{16 GAV}{3 L} & 0 \\ \frac{2 GAV}{3} & \frac{GAV L}{15} & -\frac{2 GAV}{3} & \frac{GAV L}{15} & 0 & \frac{8 GAV L}{15} \end{pmatrix}$$

MatrixRank[KV]
|rango matricial

3

Figura 26

6) Condensación estática

Se trata de eliminar de la formulación los dos grados de libertad del nodo 3, que ocupan las posiciones 5 y 6 en la ordenación de g.d.l. adoptada al principio del ejercicio. Así pues, deberemos adoptar la división en submatrices de la matriz de rigidez indicada en la figura 4.



Figura 27

En ella, los colores identifican las diferentes submatrices. Así, a \mathbf{K}_{CC} le corresponde fondo blanco, a \mathbf{K}_{CE} azul, a \mathbf{K}_{EC} amarillo y a \mathbf{K}_{EE} verde. Una vez escritas, la matriz de rigidez condensada se obtiene mediante

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{CC} - \mathbf{K}_{CE}[\mathbf{K}_{EE}]^{-1}\mathbf{K}_{EC}$$

La definición de las matrices \mathbf{K}_{CC} , \mathbf{K}_{CE} , \mathbf{K}_{EC} y \mathbf{K}_{EE} es muy fácil en *Mathematica*, recurriendo a la instrucción Drop, que permite eliminar filas y columnas de una matriz. La figura 5 muestra el proceso de condensación de la matriz de rigidez en nuestro caso.

Condensación estática

```

k[104]= Kcc = Drop[K, -2, -2]; (*Esta instrucción elimina las dos últimas filas y las dos últimas columnas*)
      |elimina
Kce = Drop[K, -2, 4]; (*Esta instrucción elimina las dos últimas filas y las cuatro primeras columnas*)
      |elimina
Kec = Drop[K, 4, -2];
      |elimina
Kee = Drop[K, 4, 4];
      |elimina
Kcond = Simplify[Kcc - Kce.Inverse[Kee].Kec];
      |simplifica      |matriz inversa
Print["Kcc = ", MatrixForm[Kcc]]
      |escribe      |forma de matriz
Print["Kce = ", MatrixForm[Kce]]
      |escribe      |forma de matriz
Print["Kec = ", MatrixForm[Kec]]
      |escribe      |forma de matriz
Print["Kee = ", MatrixForm[Kee]]
      |escribe      |forma de matriz
Print["Kcond = ", MatrixForm[Kcond]]
      |escribe      |forma de matriz

```

$$\mathbf{K}_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{\text{GAV}}{6} \\ \frac{\text{GAV}}{2} & \frac{7 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{2 \text{ GAV L}}{15} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{3 \text{ L}} - \frac{\text{GAV L}}{30} \\ \frac{\text{GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{\text{GAV}}{2} \\ -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{EI}}{3 \text{ L}} - \frac{\text{GAV L}}{30} & -\frac{\text{GAV}}{2} & \frac{7 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{2 \text{ GAV L}}{15} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{CE} = \begin{pmatrix} -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} \\ -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ \frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{EC} = \begin{pmatrix} \frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} \\ \frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{\text{GAV L}}{15} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{EE} = \begin{pmatrix} \frac{16 \text{ GAV}}{3 \text{ L}} & \emptyset \\ \emptyset & \frac{16 \text{ EI}}{3 \text{ L}} + \frac{8 \text{ GAV L}}{15} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{cond} = \begin{pmatrix} \frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{60 \text{ EI L} \cdot 6 \text{ GAV L}^3} & \frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} & -\frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{60 \text{ EI L} \cdot 6 \text{ GAV L}^3} & \frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} \\ \frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} & \frac{240 \text{ EI}^2 + 84 \text{ EI GAV L}^2 + \text{GAV}^2 \text{ L}^4}{240 \text{ EI L} \cdot 24 \text{ GAV L}^3} & -\frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} & \frac{-240 \text{ EI}^2 + 36 \text{ EI GAV L}^2 + \text{GAV}^2 \text{ L}^4}{24 (10 \text{ EI L} \cdot \text{GAV L}^3)} \\ -\frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{60 \text{ EI L} \cdot 6 \text{ GAV L}^3} & -\frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} & \frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{60 \text{ EI L} \cdot 6 \text{ GAV L}^3} & -\frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} \\ \frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} & \frac{-240 \text{ EI}^2 + 36 \text{ EI GAV L}^2 + \text{GAV}^2 \text{ L}^4}{24 (10 \text{ EI L} \cdot \text{GAV L}^3)} & -\frac{\text{GAV} (60 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)}{12 (10 \text{ EI} \cdot \text{GAV L}^2)} & \frac{240 \text{ EI}^2 + 84 \text{ EI GAV L}^2 + \text{GAV}^2 \text{ L}^4}{240 \text{ EI L} \cdot 24 \text{ GAV L}^3} \end{pmatrix}$$

Figura 28

Por último, para expresar la matriz de rigidez en una forma más habitual (y más manejable) introducimos la definición del factor de cortante α y expresamos la rigidez frente al cortante, GA_v , en función de EI y α . Se lleva a cabo mediante la instrucción /. de *Mathematica*, que permite asignar un valor (incluso de forma simbólica) a una variable. La figura 6 muestra la forma de proceder y el resultado, con el que termina el desarrollo de este ejercicio.

```
Cambio de variables para expresar la matriz en función de EI, L y  $\alpha$ 

Kcond $\alpha$  = Simplify[Kcond /. GAV  $\rightarrow$  {12 * EI / ( $\alpha$  * L ^ 2)}];
|simplifica
Print["Kcond $\alpha$  = ", MatrixForm[Kcond $\alpha$ ]]
|escribe |forma de matriz

Kcond $\alpha$  =  $\begin{pmatrix} \left( \frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( -\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) \\ \left( \frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{EI (3+21 \alpha+5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( -\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{EI (3+9 \alpha-5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) \\ \left( -\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( -\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( -\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) \\ \left( \frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{EI (3+9 \alpha-5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( -\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left( \frac{EI (3+21 \alpha+5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) \end{pmatrix}$ 
```

Figura 29

Ejercicio nº 2

Determinar la matriz de rigidez de un elemento finito unidimensional, de deformación por cortante impuesta, previsto para estudiar vigas aplicando la teoría de Timoshenko y basado en forzar, en el elemento desarrollado en el ejercicio 1, una variación lineal de la distorsión angular entre los valores calculado en los extremos del elemento.

NOTA: Los elementos de deformación por cortante impuesta se introducen para prevenir el bloqueo (en placas de Reissner-Mindlin). En este ejemplo unidimensional sólo pretendemos mostrar la forma de operar, ya que el elemento finito de partida no presentaba bloqueo y, por lo tanto, no resulta necesaria ninguna modificación de este tipo.

Resolución

1) Cálculos previos

Como primer paso, vamos a separar la matriz de deformaciones \mathbf{B} , hallada en el ejercicio 1, en dos submatrices, \mathbf{B}_Q que agrupa las deformaciones por cortante y \mathbf{B}_F que agrupa las debidas al flector. Corresponden, respectivamente, a la primera y segunda fila de la matriz \mathbf{B} del ejercicio anterior.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_Q \\ \mathbf{B}_F \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} & -N_1 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} & -N_2 & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{d\xi} & -N_3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} & 0 & \frac{2}{L} \frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix}$$

Ello permite escribir el integrando de la matriz de rigidez como

$$\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_Q & \mathbf{B}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GA_V & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_Q \\ \mathbf{B}_F \end{bmatrix} = GA_V \mathbf{B}_Q^T \mathbf{B}_Q + EI \mathbf{B}_F^T \mathbf{B}_F$$

y, por lo tanto, la matriz de rigidez como

$$\mathbf{K} = \underbrace{GA_V \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_Q^T \mathbf{B}_Q) \frac{L}{2} d\xi}_{\mathbf{K}_Q} + \underbrace{EI \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_F^T \mathbf{B}_F) \frac{L}{2} d\xi}_{\mathbf{K}_F}$$

Por ahora no hemos hecho nada nuevo. Esta separación ya la habíamos llevado a cabo, de otra manera menos formal, en el ejercicio 1. La figura 7 muestra la implementación de este procedimiento en *Mathematica*.

A continuación, y todavía sin entrar en la definición del elemento finito con deformación por cortante impuesta, vamos a analizar la expresión de la distorsión angular γ , que queda definida por

$$\gamma = \mathbf{B}_Q \mathbf{a}_e$$

donde α_e es el vector de parámetros nodales. La figura 8 muestra la obtención y factorización de γ llevada a cabo usando *Mathematica*, de donde se tiene que

$$\gamma(\xi) = \left\{ \left(\frac{v_2 - v_1}{L} - \theta_3 \right) + \left(\frac{2v_1 + 2v_2 - 4v_3}{L} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \xi + \left(\frac{2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2}{2} \right) \xi^2 \right\}$$

Determinación de la matriz de rigidez

Definición de las funciones de forma y de sus derivadas

```
In[260]:= N1[x_] := -x * (1 - x) / 2
          N2[x_] := x * (1 + x) / 2
          N3[x_] := 1 - x^2
          DN1[x_] := -(1 - 2 * x) / 2
          DN2[x_] := (1 + 2 * x) / 2
          DN3[x_] := -2 * x
```

Definición de la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(x)$

```
In[266]:= BQ[x_] := ( DN1[x] * 2 / L  -N1[x]  DN2[x] * 2 / L  -N2[x]  DN3[x] * 2 / L  -N3[x] )
          BF[x_] := ( 0  DN1[x] * 2 / L  0  DN2[x] * 2 / L  0  DN3[x] * 2 / L )
```

Determinación de la matriz de rigidez del elemento

```
In[268]:= KQ = GAV * Integrate[Transpose[BQ[x]] . BQ[x] * L / 2 dx, {x, -1, 1},
|transposición]

          KF = EI * Integrate[Transpose[BF[x]] . BF[x] * L / 2 dx, {x, -1, 1},
|transposición]

          K = KQ + KF;
```

Figura 30

Análisis de la expresión de γ

```
In[272]:= gamma[x_] := BQ[x] . { V1
                                G1
                                V2
                                G2
                                V3
                                G3 }
```

Factor[gamma[x]]
|factoriza

```
Out[273]:= { { - ( 2 G3 L + 2 V1 - 2 V2 - G1 L x + G2 L x - 4 V1 x - 4 V2 x + 8 V3 x + G1 L x^2 + G2 L x^2 - 2 G3 L x^2 ) / ( 2 L ) } }
```

Se obtiene a partir de la primera fila de la matriz $\mathbf{B}(x)$.
 $V_1, V_2, V_3, G_1, G_2, G_3$ son los parámetros nodales.

Figura 31

Esta última expresión muestra que la distorsión angular queda determinada por un polinomio de segundo grado, y que cada uno de sus coeficientes es una combinación lineal de, al menos, dos parámetros nodales. Como vimos en la diapositiva 32 del tema 12, esto permite que la distorsión angular pueda hacerse muy pequeña, incluso anularse, sin necesidad de que lo hagan todos los parámetros nodales, y por ello el elemento no presenta bloqueo, como ya comprobamos en el ejercicio 1. Si el coeficiente de algún término del polinomio hubiese dependido de un único parámetro nodal, para hacer muy pequeña o nula la distorsión angular hubiese sido necesario que ese parámetro se hiciese muy pequeño o nulo, y las restantes relaciones hubiesen obligado a que ocurriera lo mismo con otros parámetros nodales, originando así el bloqueo.

La interpolación de las distorsiones angulares en un elemento con deformación por cortante impuesta se escoge de manera que evite este inconveniente, y fijarla constituye una de las dificultades del problema. En nuestro ejemplo se elude porque el propio enunciado indica el tipo de interpolación a adoptar; por otra parte, tampoco era necesario definir un elemento con deformación por cortante impuesta, dado que el inicial no se bloqueaba.

2) Interpolación de las distorsiones angulares. Determinación de la matriz \mathbf{B}_Q modificada

El enunciado indica que se debe adoptar una interpolación lineal de las distorsiones angulares entre los valores que adoptan en los extremos del elemento. Recurriendo a los polinomios de Lagrange lineales para definir la interpolación, esta puede escribirse como

$$\gamma = \left(\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right) \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}$$

donde γ_1 y γ_2 son las distorsiones angulares en los extremos dorsal y frontal, respectivamente. Como

$$\gamma(\xi) = \mathbf{B}_Q(\xi) \mathbf{a}_e$$

entonces

$$\gamma_1 = \gamma(-1) = \mathbf{B}_Q(-1) \mathbf{a}_e \quad y \quad \gamma_2 = \gamma(1) = \mathbf{B}_Q(1) \mathbf{a}_e$$

luego

$$\gamma = \left(\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right) \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_Q(-1) \\ \mathbf{B}_Q(1) \end{Bmatrix} \mathbf{a}_e$$

En consecuencia, la matriz \mathbf{B}_Q modificada, $\tilde{\mathbf{B}}_Q$, que procede utilizar para la determinación de \mathbf{K}_Q es

$$\tilde{\mathbf{B}}_Q = \left(\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_Q(-1) \\ \mathbf{B}_Q(1) \end{Bmatrix}$$

3) Cálculo de la parte de la matriz de rigidez debida al cortante

Se determina sustituyendo $\tilde{\mathbf{B}}_Q$ y en la definición de \mathbf{K}_Q anterior, y resulta

$$\mathbf{K}_Q = GA_V \int_{-1}^1 (\tilde{\mathbf{B}}_Q^T \tilde{\mathbf{B}}_Q) \frac{L}{2} d\xi$$

La obtención de \mathbf{K}_Q usando *Mathematica* y el valor final de la misma se muestran en la figura 9.

Determinación de la nueva matriz de rigidez debida al cortante

Determinación de la matriz $\tilde{\mathbf{B}}_Q$ (matriz \mathbf{B}_Q adaptada para tener en cuenta la deformación por cortante impuesta)

Recuérdese que
$$\tilde{\mathbf{B}}_Q = \begin{pmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_Q(-1) \\ \mathbf{B}_Q(1) \end{pmatrix}}_{\text{AuxB}}$$

La matriz **AuxB** se ha definido elemento a elemento para eludir las dificultades de evaluación de expresiones posteriores que se han detectado en *Mathematica* intentando definirla a partir de **BQ**. Por los mismos motivos se ha obviado la definición de una función matricial `BBQ[x_]:=NLin[x].AuxB` que determine la matriz `BQ_tilde` y se ha preferido trabajar con el producto `NLin[x].AuxB`.

m[471]=
$$\text{AuxB} = \begin{pmatrix} \text{DN1}[-1] * 2 / L & -\text{N1}[-1] & \text{DN2}[-1] * 2 / L & -\text{N2}[-1] & \text{DN3}[-1] * 2 / L & -\text{N3}[-1] \\ \text{DN1}[1] * 2 / L & -\text{N1}[1] & \text{DN2}[1] * 2 / L & -\text{N2}[1] & \text{DN3}[1] * 2 / L & -\text{N3}[1] \end{pmatrix};$$

`NLin[x_]:= ((1-x)/2 (1+x)/2)`

Cálculo de la parte de la matriz de rigidez debida al cortante, con la nueva interpolación de las distorsiones angulares

m[473]=
$$\text{KQ} = \text{GAV} * \int_{-1}^1 (\text{Transpose}[\text{AuxB}] \cdot \text{Transpose}[\text{NLin}[x]] \cdot \text{NLin}[x] \cdot \text{AuxB}) * L / 2 dx;$$

MatrixForm[KQ]
[forma de matriz]

{474}/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{7 \text{ GAV}}{3 L} & \frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV}}{3 L} & \frac{\text{GAV}}{6} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 L} & 0 \\ \frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV} L}{3} & -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{GAV} L}{6} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & 0 \\ \frac{\text{GAV}}{3 L} & -\frac{\text{GAV}}{6} & \frac{7 \text{ GAV}}{3 L} & -\frac{5 \text{ GAV}}{6} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 L} & 0 \\ \frac{\text{GAV}}{6} & \frac{\text{GAV} L}{3} & -\frac{5 \text{ GAV}}{6} & \frac{\text{GAV} L}{6} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} & 0 \\ -\frac{8 \text{ GAV}}{3 L} & -\frac{2 \text{ GAV}}{3} & -\frac{8 \text{ GAV}}{3 L} & \frac{2 \text{ GAV}}{3} & \frac{16 \text{ GAV}}{3 L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 32

4) Determinación de la matriz de rigidez y condensación estática

Para obtener la matriz de rigidez total basta con sumar las partes debidas al flector (calculada al principio) y al cortante (apartado anterior). La figura 10 recoge proceso y resultado.

A continuación, procede condensar los grados de libertad correspondientes al nodo 3. La división en partes de la matriz **K** y el proceso de cálculo son idénticos a los desarrollados en el ejercicio 1, por lo que aquí no se profundiza más en ellos. De nuevo se muestra proceso y resultado en una figura, la 11 en este caso. Por último, la figura 12 muestra el cambio de variable para expresar el resultado en función de *EI* y el factor de cortante α . Con esto termina la resolución del problema.

Obtención de la matriz de rigidez total del elemento finito con deformación por cortante impuesta (dci)

Recuérdese que KF la hemos obtenido al principio del ejercicio

In[475]= $Kdci = KQ + KF;$
MatrixForm[Kdci]
 [forma de matriz]

In[476]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{7 GAV}{3 L} & \frac{5 GAV}{6} & \frac{GAV}{3 L} & \frac{GAV}{6} & -\frac{8 GAV}{3 L} & 0 \\ \frac{5 GAV}{6} & \frac{7 EI}{3 L} + \frac{GAV L}{3} & -\frac{GAV}{6} & \frac{EI}{3 L} + \frac{GAV L}{6} & -\frac{2 GAV}{3} & -\frac{8 EI}{3 L} \\ \frac{GAV}{3 L} & -\frac{GAV}{6} & \frac{7 GAV}{3 L} & -\frac{5 GAV}{6} & -\frac{8 GAV}{3 L} & 0 \\ \frac{GAV}{3 L} & \frac{EI}{3 L} + \frac{GAV L}{6} & -\frac{5 GAV}{6} & \frac{7 EI}{3 L} + \frac{GAV L}{3} & \frac{2 GAV}{3} & -\frac{8 EI}{3 L} \\ -\frac{8 GAV}{3 L} & -\frac{2 GAV}{3} & -\frac{8 GAV}{3 L} & \frac{2 GAV}{3} & \frac{16 GAV}{3 L} & 0 \\ 0 & -\frac{8 EI}{3 L} & 0 & -\frac{8 EI}{3 L} & 0 & \frac{16 EI}{3 L} \end{pmatrix}$$

Figura 33

Condensación estática

In[477]= $Kcc1 = Drop[Kdci, -2, -2];$
 [elimina]

$Kce1 = Drop[Kdci, -2, 4];$
 [elimina]

$Kec1 = Drop[Kdci, 4, -2];$
 [elimina]

$Kee1 = Drop[Kdci, 4, 4];$
 [elimina]

$Kcond1 = Simplify[Kcc1 - Kce1.Inverse[Kee1].Kec1];$
 [simplifica] [matriz inversa]

Print["Kcc1 = ", MatrixForm[Kcc1]]
 [escribe] [forma de matriz]

Print["Kce1 = ", MatrixForm[Kce1]]
 [escribe] [forma de matriz]

Print["Kec1 = ", MatrixForm[Kec1]]
 [escribe] [forma de matriz]

Print["Kee1 = ", MatrixForm[Kee1]]
 [escribe] [forma de matriz]

Print["Kcond1 = ", MatrixForm[Kcond1]]
 [escribe] [forma de matriz]

$$Kcc1 = \begin{pmatrix} \frac{7 GAV}{3 L} & \frac{5 GAV}{6} & \frac{GAV}{3 L} & \frac{GAV}{6} \\ \frac{5 GAV}{6} & \frac{7 EI}{3 L} + \frac{GAV L}{3} & -\frac{GAV}{6} & \frac{EI}{3 L} + \frac{GAV L}{6} \\ \frac{GAV}{3 L} & -\frac{GAV}{6} & \frac{7 GAV}{3 L} & -\frac{5 GAV}{6} \\ \frac{GAV}{3 L} & \frac{EI}{3 L} + \frac{GAV L}{6} & -\frac{5 GAV}{6} & \frac{7 EI}{3 L} + \frac{GAV L}{3} \end{pmatrix}$$

$$Kce1 = \begin{pmatrix} -\frac{8 GAV}{3 L} & 0 \\ -\frac{2 GAV}{3} & -\frac{8 EI}{3 L} \\ 0 & 0 \\ -\frac{8 GAV}{3 L} & -\frac{8 EI}{3 L} \end{pmatrix}$$

$$Kec1 = \begin{pmatrix} -\frac{8 GAV}{3 L} & -\frac{2 GAV}{3} & -\frac{8 GAV}{3 L} & \frac{2 GAV}{3} \\ 0 & -\frac{8 EI}{3 L} & 0 & -\frac{8 EI}{3 L} \end{pmatrix}$$

$$Kee1 = \begin{pmatrix} \frac{16 GAV}{3 L} & 0 \\ 0 & \frac{16 EI}{3 L} \end{pmatrix}$$

$$Kcond1 = \begin{pmatrix} \frac{GAV}{L} & \frac{GAV}{2} & -\frac{GAV}{L} & \frac{GAV}{2} \\ \frac{GAV}{L} & \frac{EI}{L} + \frac{GAV L}{4} & -\frac{GAV}{L} & -\frac{EI}{L} + \frac{GAV L}{4} \\ -\frac{GAV}{L} & -\frac{GAV}{2} & \frac{GAV}{L} & -\frac{GAV}{2} \\ \frac{GAV}{L} & -\frac{EI}{L} + \frac{GAV L}{4} & -\frac{GAV}{L} & \frac{EI}{L} + \frac{GAV L}{4} \end{pmatrix}$$

Figura 34

Cambio de variable para expresar la matriz en función de EI, L y α

```
Kcond1 $\alpha$  = Simplify[Kcond1 /. GAV -> {12 * EI / ( $\alpha$  * L^2)}];  
|simplifica
```

```
MatrixForm[Kcond1 $\alpha$ ]
```

```
|forma de matriz
```

```
MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+\alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{EI (-3+\alpha)}{L \alpha} \right) \\ \left(-\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{EI (-3+\alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+\alpha)}{L \alpha} \right) \end{pmatrix}$$

Figura 35

Ejercicio nº 3

Por analogía a los elementos discretos de Kirchhoff, determinar la matriz de rigidez de un elemento finito unidimensional, basado en una interpolación independiente de las flechas y los giros mediante funciones lagrangianas cuadráticas (eso definiría el elemento desarrollado en el ejercicio 1, que considera la deformación por cortante —teoría de Timoshenko—), pero modificadas de manera que las distorsiones angulares en los puntos de Gauss de la interpolación de 2 puntos sean nulas. Con ello pretendemos obtener un elemento finito válido para calcular vigas mediante la teoría de Navier- Bernoulli. Podríamos llamarle “elemento discreto de Navier”.

NOTAS:

- 1) En el elemento desarrollado en el ejercicio nº 1 las distorsiones angulares son cuadráticas, el trabajo virtual del cortante cuártico y, por lo tanto, la integración numérica exacta requiere utilizar 3 puntos de Gauss.
- 2) El elemento de partida, el estudiado en el ejercicio 1, sólo tienen un nodo interno y, por lo tanto, sólo se puede imponer condiciones que permitan expresar dos parámetros nodales (los correspondientes al nodo interior) en función de los restantes, luego sólo se puede imponer que la distorsión angular se anule en dos puntos.
- 3) Si hubiéramos podido anularla en los puntos de Gauss de la integración exacta resultaría evidente el valor nulo de la energía de deformación por cortante computada. Al no ser así, desaparece la seguridad de anularla.
- 4) Si en lugar de pensar en un único elemento nos fijamos en varios, una viga dividida en 5 o en 10 tramos, nos daremos cuenta de cómo influye en el resultado la anulación de la distorsión angular en varios puntos de cada elemento. En nuestro caso, en una viga dividida en 5 elementos habríamos obligado a que la distorsión angular se anulase en 10 puntos de la misma; eso nos indica que el valor de mencionada distorsión, forzosamente, ha de ser muy bajo a lo largo de toda la viga. (No implica que los cortantes lo sean; en la teoría de Navier- Bernoulli las distorsiones angulares son nulas y los cortantes —que no son esfuerzos coherentes con la teoría y se calculan como derivadas de los flectores usando una condición de equilibrio— pueden considerarse el resultado de multiplicar una distorsión angular nula por una rigidez infinita.)

Resolución

1) *Modificación de las funciones de forma*

La interpolación inicial (ejercicio 1) era

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}(\xi) \\ \hat{\theta}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

a partir de ella se determinan unas distorsiones angulares das por

$$\gamma = \mathbf{B}_Q \mathbf{a}_e$$

$$\mathbf{B}_Q = \left[\frac{2}{L} \frac{dN_1}{d\xi} \quad -N_1 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_2}{d\xi} \quad -N_2 \quad \frac{2}{L} \frac{dN_3}{d\xi} \quad -N_3 \right]$$

En estas expresiones, las funciones de forma son las consideradas en el primer elemento. Están definidas en el enunciado del primer ejercicio; sus derivadas son inmediatas.

Como las abscisas de los puntos de Gauss de la cuadratura de dos puntos son $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, las condiciones a imponer para asegurar que la distorsión angular en ellos es nula son

$$\mathbf{B}_Q \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{a}_e = 0$$

$$\mathbf{B}_Q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{a}_e = 0$$

que forman un sistema de dos ecuaciones con seis funciones incógnitas (los parámetros nodales) que permiten expresar v_3 y θ_3 en función de v_1 , θ_1 , v_2 y θ_2 . La figura muestra la definición en *Mathematica* de las funciones de forma lagrangianas (dadas en el ejercicio 1) y el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones citadas.

```

Definición de las funciones de forma lagrangianas y de sus derivadas
N1[x_] := -x * (1 - x) / 2
N2[x_] := x * (1 + x) / 2
N3[x_] := 1 - x^2
DN1[x_] := -(1 - 2 * x) / 2
DN2[x_] := (1 + 2 * x) / 2
DN3[x_] := -2 * x

Definición de la matriz de deformaciones debidas al cortante, BQ(x)
BQ[x_] := ( DN1[x] * 2 / L -N1[x] DN2[x] * 2 / L -N2[x] DN3[x] * 2 / L -N3[x] )

Coeficientes que determinan las distorsiones angulares en los puntos de GAuss de la cuadratura de 2 puntos

MatrixForm[Simplify[BQ[-1/sqrt(3)]]]
|forma de matriz|simplifica

MatrixForm[Simplify[BQ[1/sqrt(3)]]]
|forma de matriz|simplifica

MatrixForm=
( (-1 - 2/sqrt(3))/L 1/6 (-1 - sqrt(3)) (1 - 2/sqrt(3))/L 1/6 (-1 + sqrt(3)) 4/(sqrt(3)L) -2/3 )

MatrixForm=
( (-1 + 2/sqrt(3))/L 1/6 (-1 + sqrt(3)) (1 + 2/sqrt(3))/L 1/6 (-1 - sqrt(3)) -4/(sqrt(3)L) -2/3 )

```

Figura 36

Así pues, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{3}L}v_3 - \frac{2}{3}\theta_3 &= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}L}v_1 + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\theta_1 + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}L}v_2 + \frac{1-\sqrt{3}}{6}\theta_2 \\ \frac{-4}{\sqrt{3}L}v_3 - \frac{2}{3}\theta_3 &= \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}L}v_1 + \frac{1-\sqrt{3}}{6}\theta_1 - \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}L}v_2 + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\theta_2\end{aligned}$$

Ahora, sumando las dos ecuaciones y operando se obtiene

$$\theta_3 = -\frac{3}{2L}v_1 - \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{3}{2L}v_2 - \frac{1}{4}\theta_2$$

y restándolas

$$v_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{L}{8}\theta_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{L}{8}\theta_2$$

Por último, sustituyendo estos resultados en la interpolación de los desplazamientos inicial

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \hat{v}(\xi) \\ \hat{\theta}(\xi) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{L}{8}\theta_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{L}{8}\theta_2 \\ -\frac{3}{2L}v_1 - \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{3}{2L}v_2 - \frac{1}{4}\theta_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_1(\xi) + \frac{1}{2}N_3(\xi) & \frac{L}{8}N_3(\xi) & N_2(\xi) + \frac{1}{2}N_3(\xi) & -\frac{L}{8}N_3(\xi) \\ -\frac{3}{2L}N_3(\xi) & N_1(\xi) - \frac{1}{4}N_3(\xi) & \frac{3}{2L}N_3(\xi) & N_2(\xi) - \frac{1}{4}N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Podemos escribir esta última expresión como

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}(\xi) \\ \hat{\theta}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1V}(\xi) & N_{2V}(\xi) & N_{3V}(\xi) & N_{4V}(\xi) \\ N_{1G}(\xi) & N_{2G}(\xi) & N_{3G}(\xi) & N_{4G}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

donde las nuevas funciones de forma se definen, a partir de las anteriores, como

$$\begin{aligned}N_{1V}(\xi) &= N_1(\xi) + \frac{1}{2}N_3(\xi) & N_{1G}(\xi) &= -\frac{3}{2L}N_3(\xi) \\ N_{2V}(\xi) &= \frac{L}{8}N_3(\xi) & N_{2G}(\xi) &= N_1(\xi) - \frac{1}{4}N_3(\xi) \\ N_{3V}(\xi) &= N_2(\xi) + \frac{1}{2}N_3(\xi) & N_{3G}(\xi) &= \frac{3}{2L}N_3(\xi) \\ N_{4V}(\xi) &= -\frac{L}{8}N_3(\xi) & N_{4G}(\xi) &= N_2(\xi) - \frac{1}{4}N_3(\xi)\end{aligned}$$

2) *Determinación de la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(\xi)$*

$$\mathbf{B}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{d}{d\xi} & -1 \\ 0 & \frac{2}{L} \frac{d}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1V}(\xi) & N_{2V}(\xi) & N_{3V}(\xi) & N_{4V}(\xi) \\ N_{1G}(\xi) & N_{2G}(\xi) & N_{3G}(\xi) & N_{4G}(\xi) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{dN_{1V}}{d\xi} - N_{1G}(\xi) & \frac{2}{L} \frac{dN_{2V}}{d\xi} - N_{2G}(\xi) & \frac{2}{L} \frac{dN_{3V}}{d\xi} - N_{3G}(\xi) & \frac{2}{L} \frac{dN_{4V}}{d\xi} - N_{4G}(\xi) \\ \frac{2}{L} \frac{dN_{1G}}{d\xi} & \frac{2}{L} \frac{dN_{2G}}{d\xi} & \frac{2}{L} \frac{dN_{3G}}{d\xi} & \frac{2}{L} \frac{dN_{4G}}{d\xi} \end{bmatrix}$$

3) *Matriz de rigidez*

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi) \frac{L}{2} d\xi$$

En este caso ya no es necesaria ninguna condensación estática, pues hemos eliminado los g.d.l. de los nodos interiores imponiendo que la distorsión angular sea nula en un número suficiente de puntos.

Las figura 14 y 15 muestran la programación de los cálculos descritos en las últimas expresiones y el resultado final del ejercicio.

Definición de las funciones de forma y de sus derivadas

$N_{1v}[x_]$:= $N1[x] + N3[x] / 2$
 $N_{2v}[x_]$:= $N3[x] * L / 8$
 $N_{3v}[x_]$:= $N2[x] + N3[x] / 2$
 $N_{4v}[x_]$:= $-N3[x] * L / 8$
 $N_{1g}[x_]$:= $-3 * N3[x] / 2 / L$
 $N_{2g}[x_]$:= $N1[x] - N3[x] / 4$
 $N_{3g}[x_]$:= $3 * N3[x] / 2 / L$
 $N_{4g}[x_]$:= $N2[x] - N3[x] / 4$

$DN_{1v}[x_]$:= $DN1[x] + DN3[x] / 2$
 $DN_{2v}[x_]$:= $DN3[x] * L / 8$
 $DN_{3v}[x_]$:= $DN2[x] + DN3[x] / 2$
 $DN_{4v}[x_]$:= $-DN3[x] * L / 8$
 $DN_{1g}[x_]$:= $-3 * DN3[x] / 2 / L$
 $DN_{2g}[x_]$:= $DN1[x] - DN3[x] / 4$
 $DN_{3g}[x_]$:= $3 * DN3[x] / 2 / L$
 $DN_{4g}[x_]$:= $DN2[x] - DN3[x] / 4$

Definición de la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(x)$

$B[x_]$:= $\begin{pmatrix} DN_{1v}[x] * 2 / L - N_{1g}[x] & DN_{2v}[x] * 2 / L - N_{2g}[x] & DN_{3v}[x] * 2 / L - N_{3g}[x] & DN_{4v}[x] * 2 / L - N_{4g}[x] \\ DN_{1g}[x] * 2 / L & DN_{2g}[x] * 2 / L & DN_{3g}[x] * 2 / L & DN_{4g}[x] * 2 / L \end{pmatrix}$

Figura 37

Determinación de la matriz de rigidez del elemento

$$K = \int_{-1}^1 \left(\underset{\text{transposición}}{\text{Transpose}[B[x]]} \cdot \begin{pmatrix} GAV & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} \cdot B[x] \right) * L / 2 dx;$$

MatrixForm[K]

[forma de matriz]

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{12 EI}{L^3} + \frac{GAV}{5 L} & \frac{GAV}{10} + \frac{6 EI}{L^2} & -\frac{12 EI}{L^3} - \frac{GAV}{5 L} & \frac{GAV}{10} + \frac{6 EI}{L^2} \\ \frac{GAV}{10} + \frac{6 EI}{L^2} & \frac{4 EI}{L} + \frac{GAV L}{20} & -\frac{GAV}{10} - \frac{6 EI}{L^2} & \frac{2 EI}{L} + \frac{GAV L}{20} \\ -\frac{12 EI}{L^3} - \frac{GAV}{5 L} & -\frac{GAV}{10} - \frac{6 EI}{L^2} & \frac{12 EI}{L^3} + \frac{GAV}{5 L} & -\frac{GAV}{10} - \frac{6 EI}{L^2} \\ \frac{GAV}{10} + \frac{6 EI}{L^2} & \frac{2 EI}{L} + \frac{GAV L}{20} & -\frac{GAV}{10} - \frac{6 EI}{L^2} & \frac{4 EI}{L} + \frac{GAV L}{20} \end{pmatrix}$$

Cambio de variables para expresar la matriz en función de EI, L y α

`K α = Simplify[K /. GAV \rightarrow {12 * EI / (α * L^2)}];`
 [simplifica]

`Print["K α = ", MatrixForm[K α]]`

[escribe]

[forma de matriz]

$$K\alpha = \begin{pmatrix} \left(\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+20 \alpha)}{5 L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+10 \alpha)}{5 L \alpha} \right) \\ \left(-\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+10 \alpha)}{5 L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+20 \alpha)}{5 L \alpha} \right) \end{pmatrix}$$

Figura 38

Ejercicio 4

Mediante el programa desarrollado en el primer ejercicio del capítulo 4, procesar la ménsula objeto de aquel ejercicio con los elementos desarrollados en los ejercicios anteriores, considerando longitudes correspondientes a 5, 10, 15, 20, 25 y 1450 veces el canto, y para cada una de ellas modelizando la ménsula mediante 1, 3, 5 y 10 elementos. Analizar los resultados.

Resolución

1) Considerando la matriz de rigidez obtenida en el ejercicio 1

La matriz de rigidez era

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(-\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) \\ \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{EI (3+21 \alpha+5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{EI (3+9 \alpha-5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) \\ \left(-\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{L^3 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) \\ \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{EI (3+9 \alpha-5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{L^2 \alpha (6+5 \alpha)} \right) & \left(\frac{EI (3+21 \alpha+5 \alpha^2)}{L \alpha (6+5 \alpha)} \right) \end{pmatrix}$$

y con ella se han obtenido los resultados resumidos en la tabla 1, que muestra el cociente entre la flecha en la punta de la ménsula calculada por elementos finitos y la determinada con la fórmula dada en el ejercicio 1 del capítulo 4.

Tabla 10: cocientes $v_{punta,MEF}/v_{punta,analitica}$

Número de elementos	$L=5h$ $\alpha=0,115$	$L=10h$ $\alpha=0,029$	$L=15h$ $\alpha=0,013$	$L=20h$ $\alpha=0,007$	$L=25h$ $\alpha=0,005$	$L=1450h$ $\alpha=1,37 \times 10^{-5}$
N=1	0,846	0,783	0,776	0,759	0,756	0,750
N=3	0,996	0,988	0,982	0,979	0,977	0,972
N=5	0,999	0,998	0,996	0,995	0,994	0,990
N=10	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998

El elemento desarrollado es poco eficiente en comparación con el basado en la función de forma natural, pues sigue necesitando entre 3 y 5 elementos para proporcionar un valor bastante aproximado de la flecha cuando el elemento que utiliza la función de forma natural da el valor exacto con uno. No obstante, confrontándolo con otros elementos finitos de viga muestra buen comportamiento: sus resultados son mejores que los obtenidos en el ejercicio 1 de la práctica 4 utilizando el elemento finito basado en la interpolación lineal de flecha y giro con integración reducida.

2) Considerando la matriz de rigidez obtenida en el ejercicio 2

La matriz de rigidez, obtenida por un procedimiento de deformación por cortante impuesta, que no era necesario pues el elemento inicial no presentaba bloqueo, resultó:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+\alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{EI (-3+\alpha)}{L \alpha} \right) \\ \left(-\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{12 EI}{L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{EI (-3+\alpha)}{L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI}{L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+\alpha)}{L \alpha} \right) \end{pmatrix}$$

Con ella se han obtenido los resultados resumidos en la tabla 2, que de nuevo muestra el cociente entre la flecha en la punta de la ménsula calculada por elementos finitos y la determinada con la fórmula que proporciona la Resistencia de Materiales, dada en el ejercicio 1 del capítulo 4.

Tabla 11: cocientes $v_{punta,MEF}/v_{punta,analitica}$

Número de elementos	$L=5h$ $\alpha=0,115$	$L=10h$ $\alpha=0,029$	$L=15h$ $\alpha=0,013$	$L=20h$ $\alpha=0,007$	$L=25h$ $\alpha=0,005$	$L=1450h$ $\alpha=1,37 \times 10^{-5}$
N=1	0,757	0,752	0,751	0,750	0,750	0,750
N=3	0,973	0,972	0,972	0,972	0,972	0,972
N=5	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990
N=10	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998

De nuevo, el elemento desarrollado es poco eficiente en comparación con el basado en la función de forma natural. Observamos que la precisión es ligeramente menor que la del elemento inicial, tabla 1, pero a cambio es prácticamente independiente de la relación luz/canto, cuando en el anterior iba disminuyendo cuando esta relación aumentaba. Como curiosidad, cabe señalar que estos valores coinciden con los obtenidos en el ejercicio 1 del capítulo 4 utilizando el elemento finito basado en la interpolación lineal de flecha y giro con integración reducida.

3) Considerando la matriz de rigidez obtenida en el ejercicio 3

En este caso consideramos un elemento *discreto de Navier*, es decir, impusimos que la distorsión angular fuese nula en dos puntos del elemento, esperando que con ello este resultara adecuado para analizar vigas según la teoría de Navier-Bernoulli. La matriz de rigidez es:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(-\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+20 \alpha)}{5 L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+10 \alpha)}{5 L \alpha} \right) \\ \left(-\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{12 EI (1+5 \alpha)}{5 L^3 \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) \\ \left(\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+10 \alpha)}{5 L \alpha} \right) & \left(-\frac{6 EI (1+5 \alpha)}{5 L^2 \alpha} \right) & \left(\frac{EI (3+20 \alpha)}{5 L \alpha} \right) \end{pmatrix}$$

Utilizándola se han obtenido los resultados resumidos en la tabla 3, en la que aparecen los cocientes entre la flecha en la punta de la ménsula calculada por elementos finitos y la

determinada con la fórmula correspondiente a la teoría de Navier-Bernoulli, que es la indicada en el ejercicio 1 del capítulo 4 haciendo $\alpha=0$.

Tabla 12: : cocientes $v_{punto,MEF}/v_{punto,analítica}$

Número de elementos	$L=5h$ $\alpha=0,115$	$L=10h$ $\alpha=0,029$	$L=15h$ $\alpha=0,013$	$L=20h$ $\alpha=0,007$	$L=25h$ $\alpha=0,005$	$L=1450h$ $\alpha=1,37 \times 10^{-5}$
N=1	0,814	0,781	0,765	0,759	0,756	0,750
N=3	0,996	0,998	0,982	0,979	0,977	0,972
N=5	0,999	0,998	0,996	0,995	0,994	0,990
N=10	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998

Como se ve, el elemento efectivamente proporciona resultados que se ajustan a la teoría de Navier-Bernoulli, aún cuando se ha formulado transformando uno correspondiente a la de Timoshenko, y presenta una precisión similar a la de los ejemplos anteriores. De hecho, con un solo elemento proporciona valores con una precisión parecida a los del elemento de Timoshenko del ejercicio 1 y con más de uno, exactamente la misma precisión (por supuesto, cada uno se compara con la flecha determinada aplicando la teoría correspondiente).