



LECCIONES BREVES DE ESTADÍSTICA

Cristina Estruch Miñana | Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala | Almanzor Sapena Piera

Cristina Estruch Miñana
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

Lecciones breves de Estadística

Colección *Punto de Partida*

Citar como:

Estruch Miñana, Cristina; Gregori Gregori, Valentín; Roig Sala, Bernardino; Sapena Piera, Almanzor (2022). *Lecciones breves de Estadística*. Valencia: edUPV

© Cristina Estruch Miñana
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

© 2022, edUPV

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0368_10_01_01

ISBN: 978-84-1396-040-1

DL: V-1889-2022

edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental

<https://editorialupv.webs.upv.es/compromiso-medioambiental/>

Imprime: Byprint Percom, sl

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Índice

Índice de notaciones	8
Prólogo	9
1 Estadística Descriptiva	11
1.1 Representación de variables estadísticas	11
1.1.1 Población y variable estadística	11
1.1.2 Ejemplo	12
1.1.3 Tablas de frecuencias	12
1.1.4 Ejemplo	12
1.1.5 Ejemplo	13
1.1.6 Representaciones gráficas	13
1.2 Medidas de centralización y de dispersión de una variable es- tadística cuantitativa	17
1.2.1 Medidas de posición central	17
1.2.2 Ejemplo	19
1.2.3 Ejemplo	19
1.2.4 Propiedades de la media aritmética	20
1.2.5 Ejemplo	21
1.2.6 La media ponderada	21
1.2.7 Ejemplo	22
1.2.8 Otras medias	22
1.2.9 Medidas de dispersión de una variable estadística cuan- titativa	24
1.2.10 Ejemplo	25
1.2.11 La varianza para expresiones lineales	26

1.2.12	Estadísticos robustos	27
1.2.13	Ejemplo	27
1.3	Diagrama box-and-whisker	28
1.4	Ejercicios resueltos	29
1.5	Ejercicios propuestos	37
2	Distribuciones bidimensionales	39
2.1	Distribuciones bidimensionales	39
2.1.1	Variable estadística bidimensional	39
2.1.2	Representación gráfica de una distribución bidimensional	40
2.1.3	Ejemplo	40
2.1.4	Medidas de centralización y dispersión	41
2.1.5	Nota	42
2.1.6	Ejemplo	42
2.1.7	Frecuencias marginales	43
2.1.8	Ejemplo	44
2.2	Regresión y correlación	45
2.2.1	Líneas de regresión	45
2.2.2	Rectas de regresión	46
2.2.3	Ejemplo	47
2.2.4	Cálculo de las rectas de regresión con parámetros estadísticos	48
2.2.5	Ejemplo	49
2.2.6	El coeficiente de correlación lineal	49
2.2.7	Ejemplo	50
2.3	Ejercicios resueltos	51
2.4	Ejercicios propuestos	59
3	Probabilidad	61
3.1	Espacios probabilísticos	61
3.1.1	Experimentos aleatorios	61
3.1.2	Ejemplo	62
3.1.3	Nota	62
3.1.4	Álgebra de sucesos	62
3.1.5	Ejemplo	63

3.1.6	Probabilidad	63
3.1.7	Nota	63
3.1.8	Ejemplo	64
3.1.9	Propiedades de una función probabilidad	65
3.1.10	Axiomática de Kolmogorov	65
3.1.11	Probabilidad de Laplace	65
3.1.12	Ejemplo	66
3.1.13	Pruebas repetidas. Espacio producto	66
3.1.14	Ejemplo	67
3.1.15	Probabilidad suma	67
3.1.16	Probabilidad compuesta	67
3.1.17	Nota	68
3.1.18	Ejemplo	69
3.1.19	Ejemplo	69
3.1.20	Diagramas de árbol	70
3.1.21	Ejemplo	70
3.1.22	Probabilidad y porcentaje	71
3.2	Probabilidad condicionada. Teorema de Bayes	71
3.2.1	Probabilidad condicionada	72
3.2.2	Ejemplo	74
3.2.3	Probabilidad total	74
3.2.4	Ejemplo	75
3.2.5	Teorema de Bayes	76
3.2.6	Ejemplo	76
3.2.7	Nota	77
3.2.8	Probabilidad geométrica	77
3.2.9	Ejemplo	77
3.2.10	Nota	78
3.3	Ejercicios resueltos	78
3.4	Ejercicios propuestos	96
4	Variables aleatorias	99
4.1	Variables aleatorias	99
4.1.1	Variables aleatorias discretas	99
4.1.2	Ejemplo	100

4.1.3	Función de distribución de una variable aleatoria discreta	100
4.1.4	Ejemplo	101
4.1.5	Propiedades de la función de distribución F de una variable aleatoria discreta X	102
4.1.6	Elección de la función de probabilidad	102
4.1.7	Esperanza de una variable aleatoria discreta	103
4.1.8	Ejemplo (El dado perfecto)	103
4.1.9	Nota	104
4.1.10	Ejemplo	104
4.1.11	Varianza de una variable aleatoria discreta	105
4.1.12	Nota	106
4.1.13	Ejemplo	106
4.2	Variables aleatorias continuas	106
4.2.1	Variable aleatoria continua	106
4.2.2	Ejemplo	108
4.2.3	Esperanza y varianza de una variable aleatoria continua	109
4.2.4	Ejemplo	109
4.2.5	Algunas propiedades	109
4.2.6	Distribución de una variable	111
4.3	Ejercicios resueltos	111
4.4	Ejercicios propuestos	126
5	Distribuciones discretas	131
5.1	La distribución binomial	131
5.1.1	Distribución binomial	131
5.1.2	Ejemplo	132
5.1.3	Gráfica de una distribución binomial	132
5.1.4	Parámetros fundamentales de la distribución binomial	133
5.1.5	Ejemplo	133
5.1.6	Ajuste de una distribución binomial a una distribución de frecuencias	134
5.1.7	Ejemplo	134
5.2	La distribución de Poisson	135
5.2.1	Ejemplo	136
5.2.2	Ajuste de una distribución de Poisson a una binomial	136

5.3	Ejercicios resueltos	137
5.4	Ejercicios propuestos	148
6	Distribuciones continuas	151
6.1	La distribución uniforme	151
6.2	La distribución normal	152
6.2.1	Distribución normal	152
6.2.2	La distribución normal estándar	153
6.2.3	Ejemplo	156
6.2.4	Ajuste de una distribución normal a una distribución de frecuencias	157
6.2.5	Nota	158
6.2.6	Ejemplo	158
6.2.7	Ajuste de una distribución normal a una binomial . . .	160
6.2.8	Ejemplo	160
6.2.9	Ajuste de una distribución normal a una de Poisson . .	161
6.3	La distribución exponencial	161
6.3.1	Distribución exponencial	161
6.3.2	Ejemplo	162
6.4	Ejercicios resueltos	163
6.5	Ejercicios propuestos	180
	Bibliografía	183
	Índice de materias	184
	Tablas estadísticas	186

Índice de notaciones

$B(n, p)$	distribución binomial
$E(X)$	esperanza de una variable aleatoria X
\emptyset	suceso imposible (conjunto vacío)
\mathbb{N}	conjunto de los números naturales
$N(\mu, \sigma)$	distribución normal
μ	esperanza de una variable aleatoria ($E(X)$)
Ω	suceso seguro (conjunto referencial), espacio muestral
$P_\lambda(k)$	probabilidad de Poisson de esperanza λ
σ_{xy}	covarianza
σ	desviación típica
σ^2	varianza
$\text{var}(X)$	varianza de la variable aleatoria X
\bar{x}	media de x_1, x_2, \dots, x_N
\in	símbolo de pertenencia
\subset	símbolo de inclusión
\cap	símbolo de intersección
\cup	símbolo de unión
$A - B$	diferencia de conjuntos
\bar{A}	suceso contrario (conjunto complementario)
\dot{p}	múltiplo de p
<i>i.e.</i>	id est (expresión latina y se lee “es decir”)
V_m^n	variaciones de m elementos de orden n
RV_m^n	variaciones con repetición de m elementos de orden n
C_m^n	combinaciones de m elementos de orden n
$\binom{m}{n}$	número combinatorio equivalente a C_m^n
$n!$	factorial de n
$Ri.j$	ejercicio resuelto j del capítulo i
$Pi.j$	ejercicio propuesto j del capítulo i

Prólogo

La Universidad Española emprendió hace años una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En el nuevo plan, el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera, la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientadora hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro es un texto elemental de Estadística, y como insinúa su título, es una versión reducida y actualizada del texto *Lecciones de Estadística* (UPV Ref.: 322). El texto está concebido para los alumnos de Ingeniería que se graduarán en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que algunos autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandía (EPSG) en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones, en su sentido más estricto (el capítulo tres podría considerarse una excepción), pues éstas sólo aparecen como tales en la resolución de algunos ejercicios de carácter teórico que se encuentran al final de cada capítulo. Ello permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la redacción matemática del texto es rigurosa en su exposición. Si en algún momento, por motivos que entendemos pedagógicos, hemos relajado el rigor, éste habitualmente se ve reflejado por escritura en cursiva o con la aparición de un epígrafe en letra pequeña (cuya lectura puede omitirse sin perjuicio de comprender el resto del texto), que pone énfasis en el aspecto matemático cuyo rigor había sido *diluido*, a conciencia.

Permítasenos afirmar que, modestamente, es en la exposición didáctica en donde los autores se han esmerado. En efecto, además de las detalladas argumentaciones del contenido a lo largo del texto, éstas van acompañadas de un buen número de ejemplos y tablas diseñadas para cálculos y gráficos. Al final de cada capítulo se ofrece una lista de ejercicios con una resolución detallada de cada uno y después se proponen otros que motiven al estudioso.

Concretando el programa desarrollado, los 6 capítulos seleccionados, por este orden, han sido: Estadística descriptiva, distribuciones bidimensionales, probabilidad, variables aleatorias, distribuciones discretas y distribuciones continuas.

Para la comprensión del texto, además de un conocimiento elemental del cálculo, y de conceptos matemáticos básicos, se requieren del Álgebra conocimientos de combinatoria elemental que se usan en el cálculo de probabilidades y en el estudio de la distribución binomial. Del Análisis Matemático se necesita un conocimiento básico de la integral definida de Riemann, y también de la derivada, para el tratamiento de las variables aleatorias continuas.

Para variables aleatorias discretas se han demostrado algunos resultados que han sido extendidos, de manera natural, para variables aleatorias continuas aunque, como se pone de manifiesto en su momento, las pruebas en este último caso requieren de conocimientos más profundos sobre la integral de Riemann.

Otros aspectos interesantes, como el cálculo del área que encierra la campana de Gauss, o la obtención del sistema normal de ecuaciones de las rectas de regresión, se sugiere desde estas líneas que deben ser considerados como ejercicios en algún curso de Análisis Matemático.

Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar esta nueva edición del texto para ediciones sucesivas.

Los autores

Capítulo 1

Estadística Descriptiva

Se podría entender la Estadística como la ciencia que tiene por objeto el estudio de datos. Los *métodos estadísticos* se aplican a datos generalmente numéricos que proceden de observaciones efectuadas sobre alguna característica de un colectivo o sobre resultados de una experimentación.

La Estadística Descriptiva, de la que nos ocuparemos en el texto básicamente, es el primer paso del estudio del conjunto de datos y se limita a la obtención de gráficos y parámetros representativos de la *serie* de datos. La extrapolación de conclusiones de los datos obtenidos de una parte de un colectivo a todo el colectivo constituye la técnica de la Inferencia Estadística que queda excluida del presente texto.

1.1 Representación de variables estadísticas

1.1.1 Población y variable estadística

Población es un conjunto de elementos (*individuos*) con algún *carácter* común. **Muestra** es un subconjunto *representativo* de dicha población. Nosotros, salvo algún caso aislado, siempre consideraremos poblaciones finitas. En Estadística se consideran dos tipos de caracteres (que se explican por su denominación): *cualitativos* y *cuantitativos*. Al carácter objeto de estudio se le denomina **variable estadística** (cualitativa o cuantitativa), y ésta divide la población, de manera natural, en clases (subconjuntos disjuntos) al considerar los diversos *atributos* de la variable, que a su vez pueden dar lugar a subclases.

1.1.2 Ejemplo

En un aula determinada, los alumnos constituyen la población, el sexo y el lugar de nacimiento son variables cualitativas, mientras que el peso y la talla de cada alumno son cuantitativas. Si escogemos al azar dos filas de alumnos, éstos constituyen una muestra. La población puede quedar dividida en dos clases: la de los chicos y la de las chicas. A su vez, cada clase puede dar lugar a subclases atendiendo a los diversos pesos, por ejemplo.

1.1.3 Tablas de frecuencias

Frecuencia (absoluta) de una clase es el número de elementos de la clase. **Frecuencia relativa** de una clase es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de elementos de la población (supuesto éste finito). La recopilación de los datos de una variable se efectúa disponiéndolos en “tablas de frecuencias”, que se denominan distribuciones unidimensionales o bidimensionales según que intervenga una o dos variables. Por brevedad, denominamos *tabla* a una *tabla de frecuencias* en donde al menos aparecen x_i y las frecuencias absolutas f_i correspondientes. Los N valores numéricos x_i que puede tomar una variable se denominan *serie estadística*, *serie de datos* (o de números) o con otras expresiones alusivas similares, según los autores.

En el caso de una variable cuantitativa, que haya sido ordenada de menor a mayor, se denomina **frecuencia absoluta acumulada** a la suma de las frecuencias absolutas de un determinado valor de la variable y de todos los anteriores. De manera similar se define el concepto de **frecuencia relativa acumulada**. El lector reconocerá algunas propiedades sencillas de estos conceptos observando el siguiente ejemplo.

1.1.4 Ejemplo

Las calificaciones en la asignatura de Física obtenidas por 20 alumnos de una determinada clase, siguiendo el listado, son las siguientes: 6, 4, 5, 8, 7, 3, 4, 5, 5, 10, 9, 7, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 7, 4. Aquí, la población es la clase de 20 alumnos, la variable estadística, “calificación en Física”, es cuantitativa, y sus valores numéricos x_i son los números naturales del 2 al 10.

La recopilación de los datos de este ejemplo da lugar a la siguiente **tabla de frecuencias**, de interpretación obvia, y en donde dejamos constancia de la notación que se empleará en este capítulo, al referirnos a las diversas frecuencias. Cuando recurramos al signo de sumatorio \sum omitiremos el recorrido de los subíndices de éste si no hay posibilidad de confusión. Obsérvese la conveniencia de presentar los valores x_i en forma creciente.

**Para seguir leyendo, inicie el
proceso de compra, click aquí**