El tiempo de vuelo en órbitas hiperbólicas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta la relación que existe entre el tiempo y la posición de un cuerpo que se encuentra orbitando alrededor de otro en una trayectoria hiperbólica. También se muestran algunos casos de aplicación y se incluyen ejemplos de su estudio.

Para este estudio es necesario recordar que **la ecuación orbital** de un satélite que órbita alrededor de un cuerpo central por atracción gravitatoria es:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

donde $h = \|\vec{h}\|$ es el momento angular de la órbita que es constante, μ es el parámetro gravitacional, e es la excentricidad que también es constante y θ es la anomalía verdadera (ángulo entre $\vec{e}$ y $\vec{r}$).

Esta ecuación orbital origina trayectorias que representan curvas cónicas (circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas) según los valores de e. En este artículo se considera el caso en él que la cónica es una hipérbola, es decir, cuando $e > 1$.

Al resolver la ecuación del movimiento y obtener la ecuación orbital se ha eliminado la dependencia del tiempo, sin embargo es necesario poder localizar un cuerpo en su órbita en cualquier instante, (ver figura 1). En este documento vamos a conocer la ecuación del tiempo para órbitas abiertas hiperbólicas.

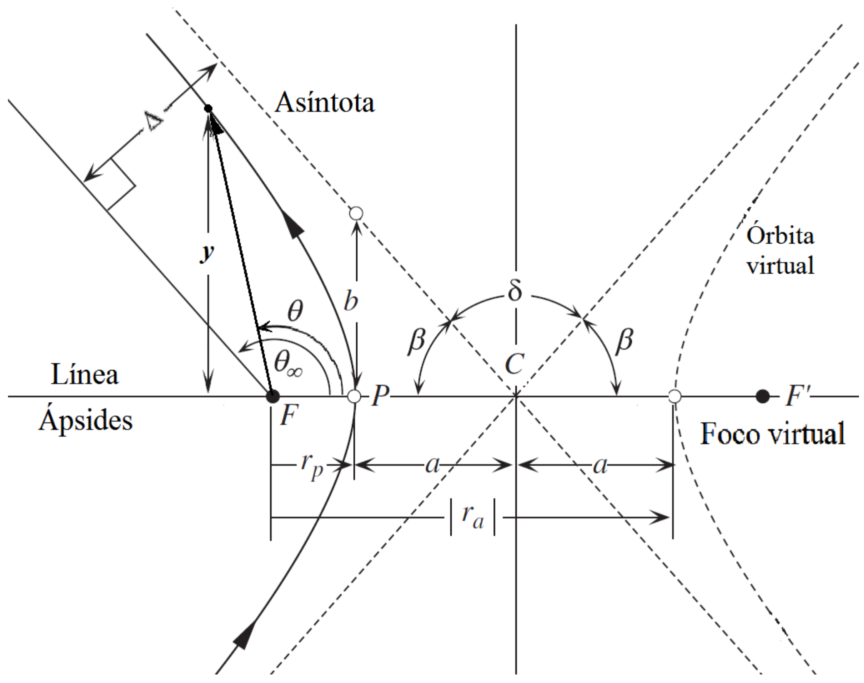

Figura 1: Es necesario relacionar cada posición θ con un instante de tiempo $t - t_p$

Antes de aplicar las ecuaciones conviene recordar algunas constantes y expresiones:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la del Sol o con la de cualquier planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante $\mu = G(M+m) = GM$ y para la Tierra su valor es

$$\mu_T = 398\,600\ km^3/s^2$$

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que sí lo es, se utiliza como radio el ecuatorial
$$R_T = 6378\ km.$$
- El momento angular de cualquier órbita kepleriana verifica:
$$h = r\, v_\perp$$
- La anomalía verdadera de la asíntota en una órbita hiperbólica es:
$$\theta_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$
- El ángulo de vuelo γ viene determinado por la igualdad:
$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$$
- La velocidad radial y la transversal en cualquier posición y órbita son:
$$v_r = \frac{\mu}{h} e \operatorname{sen}\theta \qquad v_\perp = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta).$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Partiendo de una anomalía verdadera que indica la posición en la órbita, obtener la anomalías excéntrica y media hiperbólicas y con la última de éstas, el tiempo transcurrido desde que pasó por el periapsis.
- Conociendo el tiempo desde que pasó por el periapsis, hallar las anomalías media y excéntrica hiperbólicas para con ésta última calcular la anomalía verdadera (posición) en ese instante.
- En el proceso de este último objetivo aprenderás a resolver la ecuación de Kepler para órbitas hiperbólicas utilizando el método de Newton.

3 Integral de $\dot{\theta}$ y el tiempo de paso por el periapsis, (t_p).

Como el momento angular verifica que $h = r\, v_\perp$ y $v_\perp = r\,\dot{\theta}$ la anomalía verdadera de la posición θ está relacionada con el tiempo t mediante la expresión

$$h = r^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h}{\left(\frac{h^2/\mu}{1+e\cos\theta}\right)^2} \tag{2}$$

que separando variables resulta

$$\frac{\mu^2}{h^3}dt = \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

Considerando t_p el **tiempo en el instante de paso por el periapsis**[1] ($\theta = 0°$) e integrando ambos lados se tiene

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \int_0^\theta \frac{d\sigma}{(1 + e\cos\sigma)^2} d\sigma. \tag{3}$$

Esta integral tiene diferentes expresiones según el tipo de cónica que sea.

4 Ecuación de tiempos para órbitas hiperbólicas, ($e > 1$)

Para el caso de órbita hiperbólica, $e > 1$, la integral de la expresión (3) también tiene solución analítica

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \frac{1}{e^2-1}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \frac{1}{(e^2-1)^{3/2}}\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}\right)$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior y simplificando se obtiene:

$$\frac{\mu^2}{h^3}(e^2-1)^{3/2}(t - t_p) = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}\right) \tag{4}$$

Denotando por M_h al término de la izquierda, al que llamamos **Anomalía Media Hiperbólica**

$$\boxed{M_h = \frac{\mu^2}{h^3}(e^2-1)^{3/2}(t - t_p)} \tag{5}$$

resulta la igualdad que relaciona esa anomalía media hiperbólica con la anomalía verdadera:

$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan\frac{\theta}{2}}\right) \tag{6}$$

En la figura 2 se muestra la variación de M_h en función de θ para varias excentricidades.

Para simplificar esta expresión (6) se introduce un ángulo auxiliar (similar a la anomalía excéntrica en las elipses) llamado **Anomalía Excéntrica Hiperbólica** y denotado por **F**. Este ángulo se define de tal forma que[2]

$$\sinh F = \frac{y}{b} = \frac{r\sin\theta}{a\sqrt{e^2-1}} = \frac{1}{a\sqrt{e^2-1}}\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}\sin\theta = \frac{\sqrt{e^2-1}}{1+e\cos\theta}\sin\theta \tag{7}$$

[1] Con frecuencia se toma $t_p = 0$ como tiempo inicial
[2] Considerando $a > 0$

donde y es la distancia del punto a la línea de ápsides (ordenada) y b es el semieje secundario de la hipérbola definida por la trayectoria (ver figura 1) de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Realizando cálculos algebraicos (**Curtis**) también se obtiene la ecuación de Kepler para hipérbolas, similar a la de órbitas elípticas:

$$\boxed{M_h = e \sinh F - F} \tag{8}$$

En la figura 3 se muestra la variación de M_h en función de F para varias excentricidades.

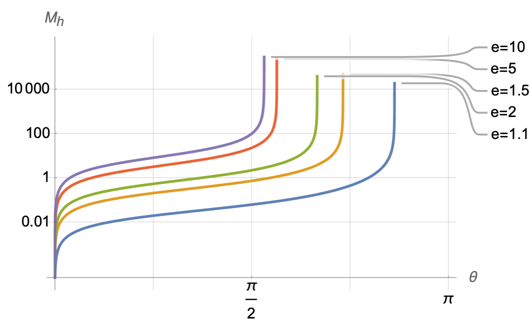

Figura 2: Representación de la anomalía media hiperbólica, M_h, al variar la anomalía verdadera, θ.

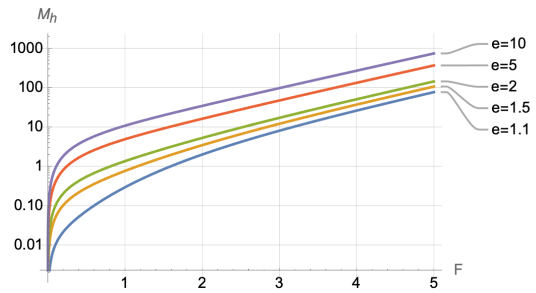

Figura 3: Gráfica de la anomalía media hiperbólica, M_h, al variar la anomalía excéntrica hiperbólica, F.

Por otra parte, como si utilizamos $\cosh^2 F - \sinh^2 F = 1$ la expresión (7) para $\sinh F$ resulta

$$\cosh^2 F = 1 + \left(\frac{\sqrt{e^2-1}}{1+e\cos\theta} \sin\theta \right)^2 = \left(\frac{\cos\theta + e}{1 + e\cos\theta} \right)^2 \begin{cases} \cosh F = \dfrac{\cos\theta + e}{1 + e\cos\theta} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{\cosh F - e}{1 - e\cosh F} \end{cases} \tag{9}$$

Partiendo de estas igualdades y de la expresión de $\tanh \frac{F}{2}$ se obtienen las fórmulas que relacionan la anomalía verdadera con la hiperbólica y viceversa

$$\tanh \frac{F}{2} = \frac{\sinh F}{1 + \cosh F} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\tanh \dfrac{F}{2} = \sqrt{\dfrac{e-1}{e+1}} \tan \dfrac{\theta}{2}} \\[3ex] \boxed{\tan \dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}} \tanh \dfrac{F}{2}} \end{cases} \tag{10}$$

Nota 4.1 *Sustituyendo* $\cos\theta$ *de la expresión* (9) *en la ecuación orbital,* (1) *se obtiene una expresión de la posición orbital en función de la anomalía hiperbólica:*

$$r = a\,(e\,\cosh F - 1)\,.\ \blacksquare$$

Estas ecuaciones tiene muchas aplicaciones que se agrupan en dos tipos de problemas:

Problema 1. Dada una órbita elíptica $(h,\, e)$ determinar el tiempo transcurrido desde que un cuerpo paso por el periapsis, $t - t_p$ para una posición determinada θ. Ver el esquema siguiente:

$$\boxed{\theta} \xrightarrow{(10)} \boxed{F} \xrightarrow{(8)} \boxed{M_h} \xrightarrow{(5)} \boxed{t - t_p}$$

Una aplicación de este caso es la determinación del tiempo en el cual un satélite terrestre pasa de la zona iluminada por el Sol a la sombra proyectada por la Tierra y viceversa. Los puntos donde esto ocurre son obtenidos por la geometrìa de la órbita pero necesitamos conocer ese periodo de sombra para que el satélite funcione solo con sus baterías.

Problema 2. Dada una órbita elíptica $(h,\, e)$ y un tiempo desde el paso por el periapsis, $t - t_p$, determinar la anomalía verdadera θ que indica su posición. Ver el esquema siguiente:

$$\boxed{t - t_p} \xrightarrow{(5)} \boxed{M_h} \xrightarrow{(8)} \boxed{F} \xrightarrow{(10)} \boxed{\theta}$$

Una aplicación de este problema es conocer la posición precisa de un satélite en un instante para comunicarse con él y la realización de aproximaciones a una estación espacial en órbita.

5 Ejemplos

Ejemplo 5.1 *Se detecta un objeto acercándose a la Tierra del que se mide una altitud de* $110\,000\, km$*, una velocidad de* $5.5\, km/s$ *y un ángulo de vuelo de* $-82\,^o$*.*

a) ¿Impactará con la Tierra o la sobrevolará?

b) ¿Cuánto tiempo pasará hasta el impacto o si no impacta hasta que se encuentre en el punto más próximo a la Tierra?

c) ¿Y si en la observación la velocidad fuese de $3\, km/s$

Solución Conociendo el ángulo de vuelo y la velocidad se puede hallar la componente transversal de la velocidad y con ella el momento de la órbita

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} \rightarrow v_r = \tan\gamma\, v_\perp \rightarrow v^2 = v_r^2 + v_\perp^2 = \tan^2\gamma v_\perp^2 + v_\perp^2 = v_\perp^2\left(1 + \tan^2\gamma\right)$$
$$v_\perp = \frac{v}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} = \frac{5.5}{\sqrt{1+\tan^2(-82^o)}} = 0.765\, km/s$$
$$h = r\, v_\perp = 116378 \cdot 0.765 = 89081.8\, km^2/s^2$$

Con los datos disponibles se puede construir un sistema de 2 ecuaciones con $e > 0$ y θ como incógnitas y que se puede resolver analíticamente:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos\theta} \\ \tan\gamma &= \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} e = 1.47266 \\ \theta = -124.26^o \end{cases}$$

a)
Conociendo los parámetros h y e de la órbita se puede determinar el radio del perigeo que si es inferior al radio terrestre indicará que habrá colisión mientras que si es superior se producirá el sobrevuelo o flyby.

$$r_p = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos 0^o} =$$

$$= \frac{89081.8^2/398600.5}{1 + 1.47266} = 8051.5\,km$$

Como es mayor que el radio terrestre no hay colisión (ver figura 4).

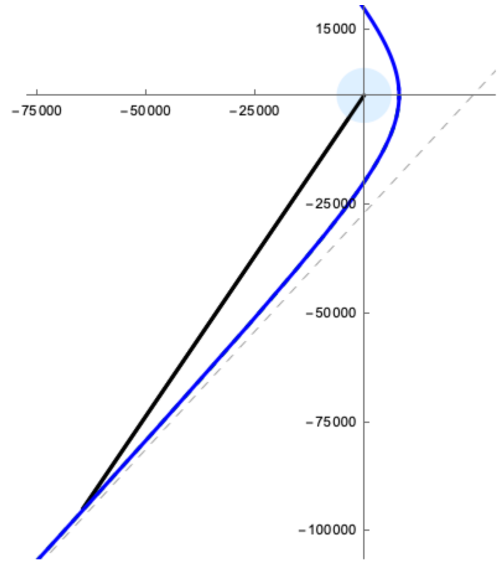

Figura 4: Representación gráfica de la órbita (azul) junto con el radiovector para $\theta = -124.6^o$ (negro) y la asíntota (discontinua)

b)
Para conocer el tiempo que tardará en llegar al perigeo seguimos el procedimiento indicado como problema de tipo 1:

$$F \overset{(10)}{=} 2\,\text{atanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -2.355$$

$$M_h \overset{(8)}{=} e\sinh F - F = -5.337$$

$$t - t_p \overset{(5)}{=} \frac{h^3}{\mu^2}\frac{1}{(e^2-1)^{3/2}}M_h = -18793.6\,s \sim -5.22\,h$$

Es decir que alcanzará el perigeo en algo más de 5 horas.

c)
Repitiendo el proceso del apartado (a) y resolviendo el nuevo sistema con $v = 3\,km/s$ se obtiene

$$h = 48590.1\,km^2/s^2$$
$$e = 1.01585$$
$$\theta = -159.12^\circ$$

Con estos valores resulta un radio del perigeo

$$r_p = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos 0^o} = \frac{48590.1^2/398600.5}{1 + 1.01585} = 2938.3\,km < R_T$$

por lo tanto sí que impactará con la Tierra. El impacto se producirá antes de alcanzar el perigeo, justo cuando su distancia coincida con el radio terrestre $r_{imp} = 6378\,km$ (ver figura 5).

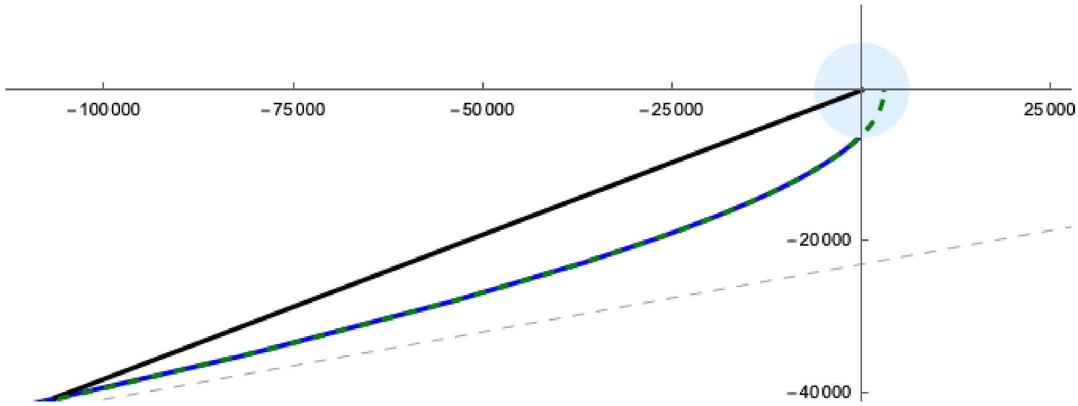

Figura 5: Representación gráfica de las órbita (azul) junto con el radiovector cuando $\theta = -159.12°$ (negro) y la asíntota (discontinua). Puede observarse que el impacto se produce cuando el objeto alcanza la superficie terrestre

Para determinar el instante hay que hallar la anomalía verdadera en el impacto, θ_{imp} y aplicar de nuevo el proceso del problema 1:

$$r_{imp} = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta_{imp})} \quad \rightarrow \quad \cos(\theta_{imp}) = \left(\frac{h^2}{\mu\, r_{imp}} - 1\right)/e = -0.0701$$

$$\rightarrow \quad \theta_{imp} = \arccos(-0.0701) = \pm 94.03\,°$$

Como antes del impacto está acercándose solo se considera el valor negativo

$$F_{imp} \overset{(10)}{=} 2\,\text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\left(\frac{\theta_{imp}}{2}\right)\right) = -0.191$$

$$M_{h_{imp}} \overset{(8)}{=} e\sinh F_{imp} - F_{imp} = -0.0042$$

$$(t - t_p)_{imp} \overset{(5)}{=} \frac{h^3}{\mu^2}\frac{1}{(e^2-1)^{3/2}} M_{h_{imp}} = -531.5\,s$$

Para determinar cuanto tiempo necesitará el objeto para alcanzar la posición de impacto también será necesario estimar el tiempo antes del perigeo en el momento de la observación siguiendo el mismo proceso de antes para $\theta = -159.12\,°$:

$$F \overset{(10)}{=} 2\,\text{arctanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -1.049$$

$$M_h \overset{(8)}{=} e\sinh F - F = -0.223$$

$$t - t_p \overset{(5)}{=} \frac{h^3}{\mu^2}\frac{1}{(e^2-1)^{3/2}} M_h = -28195.4\,s$$

para terminar se halla la diferencia de tiempos

$$(t - t_p)_{imp} - (t - t_p) = -531.5 - (-28195.4) = 27\,664\,s.$$

Ejemplo 5.2 *El día 21 de marzo a las 12:30 UT, el telescopio Hubble tenía las siguientes coordenadas y velocidades:*

$$\vec{r} = 6048.66\vec{i} - 2047.34\vec{j} - 2655.05\vec{k}$$
$$\vec{v} = 3.165\vec{i} + 6.556\vec{j} + 2.157\vec{k}.$$

En ese instante se aplica un impulso en la dirección del movimiento incrementando la magnitud de la velocidad en $5\,km/s$.

a) Determina h y e de la nueva órbita y la anomalía verdadera de la asíntota, θ_∞.
b) Encuentra el radio y el instante en el que la anomalía verdadera alcanza el valor de 110^o?
c) Halla la posición 24 horas después del impulso
d) Determina la velocidad excedente al salir de la influencia de la Tierra

Solución El radio y la velocidad de la nueva órbita son inicialmente:

$$r = \|\vec{r}\| = 6915.72\,km/s \qquad v = \|\vec{v}\| + 5 = 12.59\,km/s$$

Como esa velocidad supera la velocidad de escape a esa distancia, $v_{esc} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = 10.74\,km/s$, por lo que la órbita resultante es hiperbólica y la posición inicial se convierte en el perigeo de la nueva órbita.

a)

$$\left.\begin{aligned} r_p = r = 6915.72\,km \\ v_p = v = 12.59\,km/s \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad h = r_p \cdot v_p = 87088.5\,km^2/s^2$$

$$\theta = 0^o \;\rightarrow r_p = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos 0^o} \rightarrow e = \frac{h^2}{\mu\, r_p} - 1 = 1.75135 > 1$$

$$\theta_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) = 124.8\,^o$$

b)
El radio cuando la anomalía toma el valor $\theta = 110^o$ es

$$r_{110^o} = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(110^o)} = 47451.5\,km$$

Para hallar el instante se aplica el proceso indicado en el problema 1:

$$F \overset{(10)}{=} 2\,\text{atanh}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\left(\frac{110^o}{2}\right)\right) = 1.93$$

$$M_h \overset{(8)}{=} e\sinh F - F = 3.972$$

$$t - t_p \overset{(5)}{=} \frac{h^3}{\mu^2}\frac{1}{(e^2-1)^{3/2}} M_h = 5555\,s \sim 1\,h\,32'\,35''$$

Por tanto el instante será $5555\,s$ después del impulso:

$$12:30:00 + 5555\,s = 14:02:35$$

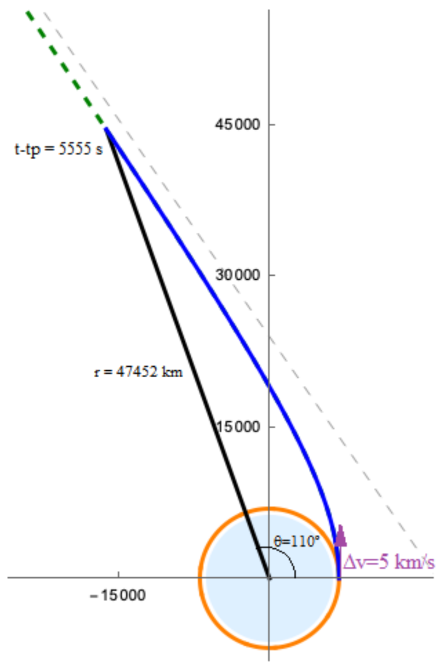

Figura 6: Representación gráfica de las órbitas inicial (naranja) y tras el impulso (azul) junto con el radiovector cuando $\theta = 110^o$ (negro) y la asíntota (discontinua)

c)
Para hallar la distancia será necesario conocer la anomalía verdadera, θ_{24} y aplicar el proceso descrito en problema 2:

$$t - t_p = 86400$$
$$M_h \overset{(5)}{=} \frac{\mu^2}{h^3}\left(e^2-1\right)^{3/2}(t-t_p) = \frac{\mu^2}{h^3}\left(e^2-1\right)^{3/2}(86400) = 61.77$$

Para obtener la anomalía hiperbólica F a partir de M_h hay que resolver la ecuación de Kepler, (5), utilizando un método numérico como por ejemplo Newton:

$$M_h \overset{(8)}{=} e\sinh F - F \rightarrow \{..., 4.51008, 4.34052, 4.32418, 4.32404\} \rightarrow F = 4.32404$$
$$\theta \overset{(10)}{=} 2\arctan\left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\left(\frac{F}{2}\right)\right) = 123.6\,°$$

Ahora se puede calcular la posición

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(123.6°)} = 599\,381\,km$$

d)
Calcular la velocidad excedente al escapar de la Tierra se puede hacer de diferentes formas, una de ellas es hallando la velocidad radial para θ_∞ que se calculó en el primer apartado:

$$v_\infty = \frac{\mu}{h}e\sin(\theta_\infty) = \frac{\mu}{h}e\sin(124.8°) = 6.6\,km/s$$

6 Cierre

Este artículo ha mostrado como se relacionan el tiempo orbital y la posición en una órbita hiperbólica.

Para establecer esa relación se han definido las anomalías media hiperbólica y excéntrica hiperbólica. También se ha mostrado como la ecuación de Kepler para trayectorias hiperbólicas permite obtener cualquiera de esas anomalías a partir de la otra, habiéndose recordado para ello el método de Newton.

Como consecuencia de esas definiciones y expresiones se ha visto como resolver el problema de obtención del tiempo orbital a partir de la anomalía verdadera y viceversa.

Se han incorporado ejemplos de aplicación a posibles situaciones reales para apoyar la explicación de los contenidos.

Referencias

[1] Curtis, Howard D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] Bate, Roger R. et al.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.