UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

La inversa core-EP y la inversa de grupo débil para matrices rectangulares

Autor: Valentina Orquera

Directores: Dr. Néstor Thome Coppo
Dr. David Eduardo Ferreyra

Junio-2022

D. Néstor Thome Coppo, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València; y D. David E. Ferreyra, Investigador de CONICET y Profesor Adjunto Exclusivo de la Facultad de Ciencias Exactas Físco-Química y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto.

CERTIFICAN:

que la presente memoria "La Inversa core-EP y la inversa de grupo débil para matrices rectangulares", ha sido realizada bajo su dirección por Dña. Valentina Orquera, y constituye su tesis para optar al grado de Doctora por la Universitat Politècnica de València.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifican en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València, firmando el presente certificado.

Valencia, Junio de 2022.

Néstor Thome Coppo David Eduardo Ferreyra

Resumen

Durante las primeras décadas del siglo pasado se estudiaron las inversas generalizadas que hoy en día se conocen como inversas generalizadas clásicas. Entre ellas cabe mencionar la inversa de Moore-Penrose (1955) y la inversa de Drazin (1958). Mientras que la inversa de Moore-Penrose se definió originalmente para matrices complejas rectangulares, la inversa de Drazin fue tratada, en un primer momento, únicamente para matrices cuadradas. Más tarde, en 1980, Cline y Greville realizaron la extensión del caso cuadrado al caso rectangular, mediante la consideración de una matriz de ponderación rectangular. Diferentes propiedades, caracterizaciones y aplicaciones fueron obtenidas para estos tipos de inversas generalizadas hasta finales del siglo pasado.

En la última década, han aparecido nuevas nociones de inversas generalizadas. La primera de ellas fue la inversa core, introducida en el año 2010 por los autores Baksalary y Trenkler. La misma tuvo una amplia repercusión en la comunidad matemática debido a la sencillez de su definición, a su aplicación en la resolución de algunos sistemas lineales con restricciones que surgen en la teoría de redes eléctricas y también por su conexión con la inversa de Bott-Duffin. Muchos trabajos de investigación han surgido a partir de la inversa core, incluyendo sus extensiones a conjuntos más generales como el álgebra de

operadores lineales acotados sobre espacios de Hilbert y/o al ámbito de anillos abstractos.

El objetivo principal de esta tesis doctoral es definir y estudiar en profundidad una nueva inversa generalizada para matrices rectangulares, llamada *inversa inversa de grupo débil ponderada*, la cual extiende al caso rectangular la inversa de grupo débil recientemente definida (para el caso cuadrado) por Wang y Chen. También se considera un amplio estudio de la inversa core-EP ponderada definida por Ferreyra, Levis y Thome en el año 2018, y que extiende al caso rectangular inversa core-EP introducida por Manjunatha-Prasad y Mohana en el año 2014. Para ambas inversas generalizadas se obtienen nuevas propiedades, representaciones, caracterizaciones como así también su relación con otras inversas conocidas en la literatura. Además, se presentan dos algoritmos que permiten realizar un cálculo efectivo de las mismas.

Abstract

Generalized inverses, known today as Classical Generalized Inverses, were studied during the first decades of the last century. Two important classical generalized inverses are the Moore-Penrose inverse (1955) and the Drazin inverse (1958). The Moore-Penrose inverse was originally defined for complex rectangular matrices. In turn, the Drazin inverse was studied, at first, only for square matrices. It was in 1980 when Cline and Greville extended the case of square matrices to the case of rectangular matrices by considering a weight rectangular matrix. Throughout the entire past century there appeared different properties, characterizations and applications of these types of generalized inverses.

This last decade gave rise to new notions of generalized inverses. The first of these new notions is known as the core inverse. Core inverses were introduced in 2010 by Baksalary and Trenkler. Their work had a wide repercussion in the mathematical community due to the simplicity of its definition and its application in the solution of some linear systems with restrictions. The core inverse further gain in interest due to their connection to the Bott-Duffin inverse. There is a large body of work on the core inverse, including extensions to more general sets – such as the algebra of bounded linear operators on Hilbert spaces and/or abstract rings.

The main goal of this thesis is to define and study in depth a new generalized inverse for rectangular matrices. This new inverse is called weighted weak group inverse (or weighted WG inverse). Weighted WG inverses extend weak group inverse, recently defined for the square case by Wang and Chen, to the rectangular case. We also consider an extensive study of the weighted core-EP inverse. The latter type of inverse was defined by Ferreyra, Levis, and Thome in 2018. This inverse extends the core-EP inverse introduced by Manjunatha-Prasad and Mohana in 2014 to the rectangular case. This thesis presents new properties, representations, characterizations, as well as their relation with other inverses known in the literature are obtained, for weighted WG inverses and weighted core-EP inverse. In addition, the thesis presents two algorithms that allow for an effective computation weighted WG inverses and weighted core-EP inverse.

Resum

Durant les primeres dècades del segle passat es van estudiar les inverses generalitzades que hui dia es coneixen com a inverses generalitzades clàssiques. Entre elles cal esmentar la inversa de Moore-Penrose (1955) i la inversa de Drazin (1958). Mentre que la inversa de Moore-Penrose es va definir originalment per a matrius complexes rectangulars, la inversa de Drazin va ser tractada, en un primer moment, únicament per a matrius quadrades. Més tard, en 1980, Cline i Greville van realitzar l'extensió del cas quadrat al cas rectangular, mitjançant la consideració d'una matriu de ponderació rectangular. Diferents propietats, caracteritzacions i aplicacions van ser obtingudes per a aquests tipus d'inverses generalitzades fins a finals del segle passat.

En l'última dècada, han aparegut noves nocions d'inverses generalitzades. La primera d'elles va ser la inversa core, introduïda l'any 2010 pels autors Baksalary i Trenkler. La mateixa va tindre una àmplia repercussió en la comunitat matemàtica a causa de la senzillesa de la seua definició, a la seua aplicació en la resolució d'alguns sistemes lineals amb restriccions que sorgeixen en la teoria de xarxes elèctriques i també per la seua connexió amb la inversa de Bott-Duffin. Molts treballs de recerca han sorgit a partir de la inversa core, incloent les seues extensions a conjunts més generals com l'àlgebra d'operadors lineals delimitats sobre espais de Hilbert i/o a l'àmbit d'anells abstractes.

L'objectiu principal d'aquesta tesi doctoral és definir i estudiar en profunditat una nova inversa generalitzada per a matrius rectangulars, anomenada *inversa inversa de grup feble ponderada*, la qual estén al cas rectangular la inversa de grup feble recentment definida (per al cas quadrat) per Wang i Chen. També es considera un ampli estudi de la inversa core-EP ponderada definida per Ferreyra, Levis i Thome l'any 2018, i que estén al cas rectangular inversa core-EP introduïda per Manjunatha-Prasad i Mohana l'any 2014. Per a totes dues inverses generalitzades s'obtenen noves propietats, representacions, caracteritzacions com així també la seua relació amb altres inverses conegudes en la literatura. A més, es presenten dos algorismes que permeten realitzar un càlcul efectiu d'aquestes.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis directores David y Néstor por la confianza depositada en mí para realizar este trabajo. Sin su paciencia, dedicación y compromiso, no hubiese podido realizarlo. ¡GRACIAS!

En segundo lugar me gustaría agradecer a mi querida madre, quién me apoyó constantemente todos estos años para llevar adelante mis estudios, me brindó palabras de aliento cuando más las necesite y sobre todo me acompañó en esta etapa. "Gracias infinitas por tanto amor".

Finamente agradecerle a mi querida abuela, mi segundo pilar. "Tu constante apoyo ha sido fundamental estos años".

Valentina Orquera

Introducción

Los temas desarrollados en esta tesis se enmarcan dentro del área Análisis Matricial, más precisamente en el contexto de Matrices Inversas Generalizadas. En 1920, Moore [**41**] introdujo una extensión de la inversa ordinaria de un operador lineal acotado sobre un espacio de dimensión infinita, usando proyectores ortogonales. En particular, en el caso matricial, estableció la existencia de una única inversa para toda matriz compleja y la denominó *recíproca general*. Sin embargo, esta definición no consiguió gran notoriedad en la comunidad científica, quizás debido a la engorrosa notación utilizada por Moore. Su definición se basaba en los proyectores ortogonales sobre los espacios columnas de la matriz y su traspuesta conjugada, es decir, su definición se realizó desde un punto de vista funcional o geométrico. En 1955, Penrose [**48**] presentó un nuevo concepto de inversa generalizada para matrices rectangulares desde un punto de vista más bien algebraico, en el sentido de que su definición venía dada por cuatro ecuaciones matriciales, conocidas en la actualidad como *ecuaciones de Penrose*. Posteriormente se probó que esta definición era equivalente a la dada por Moore. A partir de allí, esta inversa generalizada es comúnmente conocida como la *inversa de Moore-Penrose* y fue ampliamente estudiada. Una de las principales razones de ello es su utilidad en aplicaciones para tratar diversos problemas, en particular, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que constituye una de las aplicaciones básicas, pero a la vez más importante, de este tipo de inversas generalizadas. Sin embargo, la aplicación de mayor repercusión de la inversa de Moore-Penrose fue establecida por el propio Penrose al resolver el problema de los mínimos cuadrados. Más precisamente, Penrose probó que esta inversa permite encontrar la única solución en mínimos cuadrados de norma mínima de un sistema lineal arbitrario.

En 1958, Drazin [**11**] introdujo una nueva inversa generalizada en el contexto de anillos abstractos y, en particular, para matrices cuadradas, que llamó la atención de la comunidad matemática por sus interesantes propiedades espectrales y la propiedad de conmutatividad. En los años subsiguientes, a partir de las inversas de Moore-Penrose y de Drazin, surgieron diferentes inversas generalizadas como puede observarse en los libros de Rao-Mitra [**49**] y Ben Israel-Greville [**3**].

En las últimas dos décadas surgieron nuevas nociones de inversas generalizadas matriciales. La primera de ellas fue la *inversa core*, introducida en el año 2010 por los autores Baksalary y Trenkler [**1**]. La misma tuvo una amplia repercusión en la comunidad matemática debido a la sencillez de su definición, a su aplicación en la resolución de algunos sistemas lineales con restricciones que surgen en la teoría de redes eléctrica, y también por su conexión con la inversa de Bott-Duffin. Sin embargo esta nueva inversa se limita a matrices cuadradas de índice a lo sumo 1. Esta limitación condujo a que muchos autores intentaran extenderla a matrices de índice arbitrario. La primera de ellas fue la inversa BT (originalmente denominada inversa core generalizada) introducida en el año 2014 por Baksalary y Trenkler [**2**]. En el mismo año, Manjunatha Prasad y Mohana [**36**] consideraron otra definición más general de la inversa core y la llamaron inversa core-EP. Paralelamente, Malik y Thome [**35**] definieron la inversa DMP como otra extensión de para matrices de índice arbitrario. Todas estas inversas siempre existen, son únicas y cada una de ellas está caracterizada por un determinado grupo de ecuaciones matriciales. Muchos trabajos de investigación surgieron a partir de la inversa core y sus extensiones, incluyendo sus extensiones a contextos más generales como álgebra de operadores y/o anillos abstractos [**12**, **13**, **14**, **15**, **16**, **17**, **18**, **25**, **26**, **46**, **65**].

En 1980, Cline y Greville [**7**] extendieron la inversa de Drazin al caso de una matriz rectangular $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mediante una matriz de ponderación no nula $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Probaron que dicha inversa siempre existe y es única. Tal inversa es conocida como la *inversa de Drazin ponderada*. Se puede decir que esta extensión es uno de los primeros antecedentes en el intento de extender una inversa generalizada para matrices cuadradas al caso rectangular. A partir de la inversa de Drazin ponderada surgieron numerosos trabajos de investigación tanto en sus aspectos teóricos como así también en sus aplicaciones [**26**, **28**, **30**, **32**, **33**, **52**, **56**, **60**, **61**]. Siguiendo una técnica similar, en 2017, Meng [**38**] definió la inversa DMP para matrices rectangulares, llamada *inversa DMP ponderada*. Dicha inversa siempre existe, es única y fue representada usando descomposiciones en valores singulares de las matrices A y W.

En 2018, Ferreyra, Levis y Thome [**15**] extendieron la inversa core-EP al caso rectangular (llamada *inversa core-EP ponderada*). Dicha inversa es única, siempre existe y fue representada mediante una descomposición simultánea triangular del tipo Schur, llamada *descomposición core-EP ponderada*. Distintos autores estudiaron nuevas propiedades, representaciones, caracterizaciones y aplicaciones de la inversa core-EP ponderada [**22**, **29**, **42**, **43**, **46**].

Recientemente, Wang y Chen [**55**] introdujeron una extensión alternativa de la bien conocida inversa de grupo, mediante la descomposición core-EP [**54**]. Esta nueva inversa está definida sobre el conjunto de matrices cuadradas, siempre existe y es única. Es conocida como la *inversa de grupo débil* (también llamada *inversa WG*) y a diferencia de la inversa de Drazin no cumple la propiedad de conmutatividad.

Motivados por las extensiones al caso rectangular de las inversas de Drazin, DMP y core-EP, el objetivo principal de esta tesis es definir la inversa WG para una matriz rectangular arbitraria, y estudiar sus propiedades, caracterizaciones y representaciones.

Esta tesis esta organizada en 5 capítulos. En el Capítulo 1 se introducen las notaciones y resultados preliminares necesarios para el desarrollo del resto de los capítulos. Además, se dan las definiciones de las distintas inversas generalizadas clásicas y algunas de sus propiedades más relevantes. También, se presentan las definiciones y principales propiedades de algunas inversas generalizadas definidas recientemente en la literatura.

En el Capítulo 2 se estudian dos inversas generalizadas ponderadas para matrices rectangulares, a saber, las inversas de Drazin y core-EP ponderadas. Se enuncian y, en algunos casos, se demuestran de manera alternativa sus principales propiedades, representaciones y caracterizaciones que serán de utilidad en los próximos capítulos. La herramienta principal para el desarrollo de este capítulo es una descomposición simultánea del tipo Schur para el caso de dos matrices rectangulares, llamada core-EP descomposición ponderada y cuya demostración es realizada en detalle.

En el Capítulo 3 se obtienen nuevas caracterizaciones, representaciones y propiedades para la inversa core-EP ponderada. La herramienta principal para realizar las demostraciones correspondientes es la descomposición core-EP ponderada estudiada en el Capítulo 2. En particular, se presentan nuevas representaciones para la inversa core-EP ponderada, que involucran solamente el uso de la inversa de Moore-Penrose de una cierta matriz, lo cual proporciona una manera más sencilla de calcularla.

En el Capítulo 4 se extiende el concepto de inversa WG de matrices cuadradas a matrices rectangulares. Entre otras cosas, se analizan existencia y unicidad de la inversa WG ponderada como solución de ciertos sistemas de ecuaciones matriciales que requieren el uso de la inversa core-EP ponderada. Además, se da una representación canónica de la inversa WG ponderada usando la descomposición core-EP ponderada. Aplicando dicha forma canónica, se estudian distintas propiedades y representaciones algebraicas de la inversa WG ponderada. En particular, se obtiene una interesante caracterización algebraica mediante una ecuación de rangos.

Finalmente, en el Capítulo 5, se obtienen dos representaciones de las inversas core-EP y WG ponderadas, a partir de dos clásicas descomposiciones matriciales como lo son la descomposición de rango completo y la descomposición en valores singulares. Dichos resultados se utilizan para construir dos algoritmos que permiten calcular de manera sencilla ambas inversas ponderadas. La implementación de dichos algoritmos se muestran mediante ejemplos concretos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y preliminares

En este capítulo se introducen las notaciones y resultados preliminares necesarios para el desarrollo del resto de los capítulos. Además, se dan las definiciones de las distintas inversas generalizadas clásicas y algunas de sus propiedades más relevantes. Finalmente, se presentan las definiciones y principales propiedades de algunas inversas generalizadas definidas recientemente en la literatura, a saber, las inversas core, core-EP, BT, DMP y WG.

1.1 Preliminares

En esta sección se mencionan algunas notaciones básicas de la teoría de matrices y se presentan (sin demostración) algunos resultados que involucran el espacio columna y el espacio nulo de una matriz. Además, se enuncian tres descomposiciones matriciales que permiten obtener distintas representaciones canónicas de las inversas generalizadas.

1.1.1 Notaciones y algunos resultados preliminares

Como es usual, se denota por $\mathbb{C}^{m\times n}$ al conjunto de matrices complejas de tamaño $m \times n$. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathrm{rg}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$ denotan la traspuesta conjugada, la inversa (cuando $m = n$ y existe), el rango, el espacio nulo y el espacio columna de A, respectivamente. El símbolo I_n indica la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Con $S^\perp$ se denota el subespacio ortogonal del subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}^n$ con respecto al producto escalar (canónico) de $\mathbb{C}^n$ definido por $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} = x^*y$, para $x, y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. La ortogonalidad entre los subespacios S_1 y S_2, se denota por $S_1 \perp S_2$. El símbolo $\oplus$ representa la suma directa de dos subespacios de un mismo espacio vectorial y cuando estos subespacios son ortogonales se indicará con $\oplus^\perp$ (suma directa ortogonal). Se denota por P_S al proyector ortogonal sobre S (paralelamente a $S^\perp$) y se recuerda que, como $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$, se puede definir a P_S como el único operador lineal de $\mathbb{C}^n$ tal que para $z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$

$$P_S(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad z \in S, \\ 0 & \text{si} \quad z \in S^\perp. \end{cases}$$

En algunos casos se hará abuso de lenguaje utilizando la misma letra para representar tanto una aplicación lineal $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ como a la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ que la representa con respecto a sus bases canónicas.

A continuación, con la intención de mencionar algunas propiedades relevantes de los subespacios columna y nulo de una matriz, se recuerdan sus definiciones.

Definición 1.1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama espacio columna de A al conjunto*

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{C}^{m\times 1} : y = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^{n\times 1}\}.$$

Definición 1.1.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama espacio nulo de A al conjunto*

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^{n\times 1} : Ax = 0\}.$$

La relación entre dichos subespacios y sus complementos ortogonales viene dada por

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp \qquad \text{y} \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp.$$

Más aún, algunas de las principales propiedades de estos subespacios son enumeradas en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades*

a) $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$ *y* $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$.

b) $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)$ *y* $\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)$.

c) $\mathrm{rg}(AA^*) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A^*A)$.

Otras propiedades útiles que poseen los subespacios columna y nulo pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades*

a) *Si $n = p$ entonces $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$.*

b) *Si $m = p$ se cumple que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ si y sólo si existe una matriz $C \in \mathbb{C}^{q\times n}$ tal que $A = BC$.*

c) *Si $n = q$ se cumple que $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ si y sólo si existe una matriz $D \in \mathbb{C}^{p\times m}$ tal que $B = DA$.*

d) *Si $n = p$ entonces $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$.*

e) $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$.

f) *Si $m = n$ y $n = q$, entonces $\mathcal{R}(A + B) \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$.*

En el siguiente resultado se recuerda cómo es posible caracterizar un proyector ortogonal (pensado como un operador lineal) sobre un subespacio dado, mediante su matriz asociada.

Teorema 1.1.3. *Sea $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$. Entonces, P_S es un proyector ortogonal sobre S si y sólo si P_S es una matriz idempotente y hermítica.*

El *índice* es una característica relevante de las matrices cuadradas y juega un rol importante en el estudio de la inversa de Drazin. Se define de la siguiente manera.

Definición 1.1.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se define el índice de la matriz A, denotado por* $\mathrm{Ind}(A)$, *como el menor entero no negativo k que satisface*

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}).$$

Observación 1.1.1. *Claramente, toda matriz no singular tiene índice 0. Mientras que por convención, la matriz nula tiene índice 1.*

El índice de una matriz permite dar una descomposición del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ como suma directa entre dos subespacios invariantes relativos a A^k.

Proposición 1.1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que* $\mathrm{Ind}(A) = k$. *Entonces, se satisface*

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k). \tag{1.1}$$

En la teoría de matrices existen distintas clases matriciales de especial importancia. Cada una de ellas está determinada por alguna propiedad o característica que cumplen algunas matrices y/o sus respectivas inversas. Por ejemplo, las matrices hermíticas ($A = A^*$), unitarias ($A^{-1} = A^*$), normales ($AA^* = A^*A$). Dichas clases están incluidas todavía en un clase más general de matrices que juegan un importante rol en la teoría de inversas generalizadas, conocidas como matrices rango-hermíticas o matrices EP.

Definición 1.1.4. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz EP (o rango hermítica) si A satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes*

a) $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A) \oplus^{\perp} \mathcal{R}(A)$,

b) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$,

c) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$,

d) $A = CA^*$, *para alguna matriz* $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Observación 1.1.2. *Notar que toda matriz EP tiene índice a lo sumo 1.*

1.1.2 Descomposiciones matriciales

Las descomposiciones matriciales permiten representar una matriz de manera más sencilla (formas canónicas) y, de este modo, obtener más información acerca de sus características. A continuación, se presentan tres descomposiciones matriciales que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, a saber, la descomposición en valores singulares, la descomposición de Hartwig-Spindelböck y la descomposición core-EP. La segunda descomposición es una consecuencia directa de la primera, mientras que la tercera es una consecuencia del bien conocido teorema de triangularización de Schur.

Teorema 1.1.4. *[3, 4, 39](**Descomposición en valores singulares**) Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $r = \mathrm{rg}(A) > 0$. Entonces, existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y una matriz diagonal $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$, tales que*

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \quad con \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0,$$

donde los elementos de la diagonal principal de Σ son los valores singulares de A.

Teorema 1.1.5. *[24](**Descomposición de Hartwig-Spindelböck**) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $r = \mathrm{rg}(A) > 0$. Entonces, existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, una matriz diagonal $\Sigma = diag(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2}, \cdots, \sigma_\ell I_{r_\ell})$, donde los elementos de la diagonal principal son los valores singulares de A satisfaciendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_\ell = r$; y dos matrices $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$, tales que*

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{1.2}$$

con

$$KK^* + LL^* = I_r. \tag{1.3}$$

Usando la descomposición previa se puede establecer una caracterización de las matrices de índice a lo sumo 1.

Lema 1.1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz representada en la forma* (1.2)*. Entonces* $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$ *si y sólo si K es no singular.*

A continuación, se presenta una descomposición triangular del tipo Schur para una matriz cuadrada. Dicha descomposición fue introducida en el año 2016 por Wang [**54**], y es llamada descomposición core-EP. La extensión al caso rectangular de esta descomposición fue realizada recientemente en [**15**] y la misma es una herramienta fundamental para el desarrollo de los capítulos subsiguientes.

Teorema 1.1.6. *[54] **(Descomposición core-EP)** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathrm{Ind}(A) = k$. Entonces, la matriz A admite una descomposición de la forma*

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad A_2 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*, \tag{1.4}$$

donde T es no singular con $\mathrm{rg}(T) = \mathrm{rg}(A^k)$, N nilpotente con índice k y U es unitaria.

Observación 1.1.3. *Notar que las matrices definidas en* (1.4) *satisfacen las siguientes condiciones*

a) $\mathrm{Ind}(A_1) \leq 1$,

b) $A_2^k = 0$,

c) $A_1^* A_2 = 0$ *y* $A_2 A_1 = 0$.

Más aún, las matrices A_1 y A_2 son las únicas que satisfacen estas condiciones.

1.2 Inversas generalizadas clásicas

En esta sección se dan algunas definiciones de las inversas clásicas, a saber, las inversas de Moore-Penrose, de Drazin y de grupo, estableciendo algunas de sus principales propiedades y caracterizaciones.

Se sabe que una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular (o invertible) si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AX = XA = I_n$. En dicho caso, una tal matriz X es única. Es conocido que es suficiente probar que la matriz X cumpla una de las ecuaciones $AX = I_n$ o bien $XA = I_n$, para concluir que X es la inversa (ordinaria) de A.

Los diferentes tipos de matrices inversas generalizadas aparecen cuando se quiere extender el concepto de inversa ordinaria al caso de matrices rectangulares o bien a matrices cuadradas singulares. En este sentido, las inversas laterales de una matriz rectangular constituyen un primer tipo de generalización de la inversa ordinaria.

A continuación se presentan sus definiciones.

Definición 1.2.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama inversa a derecha (resp., a izquierda) de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $AX = I_m$ (resp., $XA = I_n$).*

Las inversas laterales no siempre existen, y en caso de existir, son infinitas, a excepción de los casos en que A sea no singular o bien la matriz nula.

Un resultado bien conocido en la literatura caracteriza la existencia de las inversas laterales de una matriz dada, utilizando el rango de las mismas. Más precisamente, una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admite inversa a derecha (resp., a izquierda) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = m$ (resp., $\mathrm{rg}(A) = n$).

El hecho de que estas inversas laterales no siempre existan, permite introducir nuevos conceptos de inversas generalizadas. Por ejemplo, si en la ecuación $AX = I_m$ se postmultiplica por la matriz A se obtiene una condición más general, que lleva a la siguiente definición.

Definición 1.2.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface*

$$AXA = A, \tag{1.5}$$

se llama una inversa interior o $\{1\}$-inversa de A.

Con un razonamiento análogo, premultiplicando por la matriz X en la ecuación $AX = I_m$, se obtiene un nuevo concepto que se introduce en la siguiente definición.

Definición 1.2.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface*

$$XAX = X, \tag{1.6}$$

se llama una inversa exterior o $\{2\}$-inversa de A.

El conjunto de todas las $\{1\}$-inversas de una matriz A se denota como $A\{1\}$, mientras que el conjunto de todas las $\{2\}$-inversas de una matriz A se denota como $A\{2\}$. Las matrices que verifiquen simultáneamente las ecuaciones (1.5) y (1.6), se llaman $\{1,2\}$-inversas de A y el conjunto de todas las $\{1,2\}$-inversas de una matriz A se denota como $A\{1,2\}$.

Es bien conocido que toda matriz compleja siempre admite una inversa interior y una inversa exterior. Más aún, dichas inversas son infinitas, salvo que la matriz resulte nula o no singular.

En la siguiente proposición se ilustra una propiedad que satisfacen el espacio nulo y el espacio columna de estos tipos de inversas generalizadas, como así también una condición necesaria y suficiente para que una inversa interior (resp., exterior) resulte también una inversa exterior (resp., interior).

Proposición 1.2.1. *[3, 62] Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones*

a) *Si $X \in A\{2\}$, entonces $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(XA)$ y $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(AX)$.*

b) *Si $X \in A\{1\}$, entonces $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(AX)$ y $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(XA)$.*

c) *Si $X \in A\{1\}$ entonces $X \in A\{1,2\}$ si y sólo si $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(A)$.*

d) *Si $X \in A\{2\}$ entonces $X \in A\{1,2\}$ si y sólo si $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(A)$.*

A continuación se recuerda el concepto de inversa generalizada con espacios columna y nulo prescritos. Dicho concepto relaciona dos de los subespacios fundamentales de una matriz arbitraria A, a saber, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$, con una matriz X que satisface ciertas condiciones.

Definición 1.2.4. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = r$, $\mathcal{T}$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión $t \le r$ y S un subespacio de*
$mathbbC^m$ de dimensión $m-t$. Se llama $\{2\}$-inversa generalizada de A con espacio columna $\mathcal{T}$ y espacio nulo $\mathcal{S}$, denotada por $A^{(2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$, a la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ (si existe) tal que

$$XAX = X, \quad \mathcal{R}(X) = \mathcal{T}, \quad \mathcal{N}(X) = \mathcal{S}.$$

Si además, se cumple que $AXA = A$, la única $\{1,2\}$-inversa generalizada de A con espacio columna $\mathcal{T}$ y espacio nulo $\mathcal{S}$, se denotará por $A^{(1,2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$.

El siguiente lema asegura la existencia de la inversa generalizada con espacios columna y nulo prescritos.

Lema 1.2.1. *[**3**] Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = r$, $\mathcal{T}$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión $t \leq r$ y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathbb{C}^m$ de dimensión $m-t$. Entonces existe a lo sumo una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que sea una $\{2\}$-inversa generalizada de A y que tenga espacio columna $\mathcal{T}$ y espacio nulo $\mathcal{S}$.*

1.2.1 La inversa de Moore-Penrose

En el año 1920, Moore [**41**] notó la existencia de una única inversa para cada matriz compleja y la denominó *recíproca general*. Su definición se basaba en los proyectores ortogonales sobre el espacio imagen de A y el de su traspuesta conjugada A^*. Es decir, Moore dio una definición desde un punto de vista funcional o geométrico. En 1955 Penrose [**48**] publicó un escrito con una definición más bien algebraica pero sin embargo equivalente a la dada por Moore. Muchas propiedades y aplicaciones fueron desarrolladas a partir de la inversa de Moore-Penrose, más específicamente, esta inversa juega un papel determinante en la resolución aproximada de sistemas de ecuaciones lineales por el método de mínimos cuadrados y en el análisis de problemas de control óptimo.

Definición 1.2.5. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La inversa de Moore-Penrose de A, denotada por $A^\dagger$, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las siguientes ecuaciones*

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad (XA)^* = XA.$$

La inversa de Moore-Penrose siempre existe y es única para toda matriz compleja, como puede verse en [**3**, **48**, **62**].

A continuación, se enuncian algunas de las principales propiedades de la inversa de Moore-Penrose.

Proposición 1.2.2. *[***3***,* **48***,* **62***] Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades*

a) $(A^\dagger)^\dagger = A$.

b) $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$.

c) $A^* = A^*AA^\dagger = A^\dagger AA^*$.

d) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^*)^\dagger$.

e) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

f) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$.

g) $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*)$.

h) $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$, *siendo $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices unitarias.*

Puesto que la inversa de Moore-Penrose es una inversa interior y exterior, usando los apartados f) y g) de la proposición anterior y el Lema 1.2.1, se puede obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces, se satisface*

$$A^\dagger = A^{(1,2)}_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A^*)}.$$

Observación 1.2.1. *La inversa de Moore-Penrose permite calcular proyectores ortogonales. En efecto, la matriz $AA^\dagger$ es idempotente y hermítica, y por lo tanto resulta ser un proyector ortogonal (ver Teorema 1.1.3). Más aún, como $AA^\dagger A = A$ se sigue que*

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\dagger A) \subseteq \mathcal{R}(AA^\dagger) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

Resulta entonces que $AA^\dagger$ es un proyector ortogonal sobre el espacio columna de A, es decir, $AA^\dagger = P_{\mathcal{R}(A)}$. De ahora en adelante, por sencillez en la notación, se denotará por P_A. Similarmente, el proyector ortogonal sobre $\mathcal{R}(A^*)$ se denotará por Q_A en lugar de P_{A^*}.

Mediante los proyectores ortogonales P_A y Q_A, se pueden obtener explícitamente las matrices C y D, mencionadas en el Teorema 1.1.2.

Proposición 1.2.3. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{m\times q}$. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones*

a) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ *si y sólo si* $P_B A = A$.

b) $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ *si y sólo si* $BQ_A = B$.

1.2.2 La inversa de Drazin

En el año 1958 Drazin [**11**] introdujo una nueva inversa generalizada en el contexto de anillos abstractos. Ésta inversa tomó gran notoriedad por sus interesantes propiedades espectrales. La inversa de Drazin permite resolver ecuaciones diferenciales (y en diferencias) matriciales cuyos coeficientes sean matrices singulares.

Definición 1.2.6. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) = k$. La inversa de Drazin de A, denotada por A^d, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las siguientes ecuaciones*

$$XAX = X, \quad AX = XA, \quad A^{k+1}X = A^k.$$

La inversa de Drazin para toda matriz cuadrada compleja siempre existe y es única, como puede verse en [**3**, **62**].

Una conexión entre la inversa de Drazin y la inversa de Moore-Penrose puede ser resumida en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) = k$. Entonces, se satisface*

$$A^d = A^\ell \left(A^{2\ell+1}\right)^\dagger A^\ell, \tag{1.7}$$

para cualquier entero $\ell \geq k$.

A continuación se enuncian, las principales propiedades que satisface la inversa de Drazin.

Proposición 1.2.5. *[**3**, **39**, **62**] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que* $\text{Ind}(A) = k$*. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades*

a) $(A^*)^d = (A^d)^*$.

b) $(A^m)^d = (A^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

1. $AA^d = A^m(A^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

c) $(A^d)^d = A$ *si y sólo si* $\text{Ind}(A) \leq 1$.

d) $\text{Ind}(A^d) \leq 1$ *y* $(A^d)^\# = A^2A^d$.

e) $\mathcal{R}(A^d) = \mathcal{R}(A^k)$.

f) $\mathcal{N}(A^d) = \mathcal{N}(A^k)$.

Puesto que la inversa de Drazin de una matriz cuadrada es una inversa exterior, usando los apartados f) y g) de la proposición anterior y el Lema 1.2.1, se puede obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que* $\text{Ind}(A) = k$*. Entonces, se satisface*

$$A^d = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^k)}.$$

1.2.3 La inversa de grupo

Tal como se mencionó en la introducción histórica de este trabajo, la inversa de grupo surge como un caso particular de la inversa de Drazin. No obstante, la inversa de grupo es utilizada en muchas aplicaciones interesantes y es por eso que se la considera como una entidad separada. Una de las aplicaciones más importantes se puede encontrar en el trabajo de C.D. Meyer titulado *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains* [**39**], donde hizo una importante contribución a la teoría de las inversas generalizadas mostrando la aplicación de la inversa de grupo a las cadenas de Markov.

Definición 1.2.7. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La inversa de grupo de A, denotada por $A^{\#}$, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las siguientes ecuaciones*

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad AX = XA.$$

La inversa de grupo, a diferencia de las inversas de Moore-Penrose y de Drazin, no siempre existe. El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para su existencia.

Teorema 1.2.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) *La inversa de grupo $A^{\#}$ de A existe,*

b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$,

c) $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$.

Por lo tanto, la inversa de grupo de una matriz A de índice a lo sumo 1 siempre existe. Más aún, es única como puede verse en [**3**, **39**].

A continuación, se enuncian algunas de las principales propiedades que satisface la inversa de grupo.

Proposición 1.2.6. *[**3**, **39**, **62**] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades*

a) $(A^{\#})^{\#} = A$.

b) $(A^{\#})^{*} = (A^{*})^{\#}$.

c) $(A^{m})^{\#} = (A^{\#})^{m}$, $m \in \mathbb{N}$.

d) $A^{\#} = A(A^3)^{\dagger}A$.

e) $\mathcal{R}(A^{\#}) = \mathcal{R}(A)$.

f) $\mathcal{N}(A^{\#}) = \mathcal{N}(A)$.

Puesto que la inversa de grupo es una inversa interior y exterior, de los apartados e) y f) de la proposición anterior y el Lema 1.2.1, se puede obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.2.4. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\operatorname{Ind}(A) \leq 1$. *Entonces, se satisface*

$$A^{\#} = A^{(1,2)}_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A)}.$$

1.3 Inversas generalizadas recientes

En esta sección se presentan las definiciones y principales propiedades de algunas inversas generalizadas definidas recientemente en la literatura. Además, se recuerdan sus formas canónicas mediante la descomposición de Hartwig-Spindelböck y la descomposición core-EP. En primer lugar, se define la inversa core, la cual existe solamente para matrices de índice a lo sumo 1. Seguidamente, se definen tres de sus primeras extensiones para el caso de matrices de índice arbitrario, a saber, las inversas core-EP, BT y DMP. Finalmente, se define la inversa WG de una matriz cuadrada.

1.3.1 La inversa core

A partir de las inversas de grupo y de Moore-Penrose, es posible considerar una nueva inversa generalizada, llamada inversa core. Dicha inversa, fue introducida en el año 2010 por los autores Baksalary y Trenkler [**1**].

Definición 1.3.1. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *La inversa core de* A*, denotada por* $A^{\textcircled{\#}}$*, es la única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *que satisface las siguientes ecuaciones*

$$AX = P_A, \quad \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

Una condición necesaria para que la inversa core de una matriz A exista es que $\operatorname{Ind}(A) \leq 1$. En efecto, de la igualdad $AX = P_A$, se tiene que

$$AXA = AA^{\dagger}A = A.$$

Luego, a partir el Teorema 1.1.2, se sigue que

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AXA) \leq \operatorname{rg}(AX) \leq \operatorname{rg}(A),$$

de donde,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AX). \tag{1.8}$$

Por otro lado, de la segunda ecuación de la Definición 1.3.1 y el Teorema 1.1.2, se obtiene que $X = AY$, para alguna matriz $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Así,

$$AX = A^2Y,$$

lo cual a su vez implica que

$$\operatorname{rg}(AX) = \operatorname{rg}(A^2Y) \leq \operatorname{rg}(A^2) \leq \operatorname{rg}(A),$$

es decir,

$$\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(AX). \tag{1.9}$$

Finalmente, de (1.8) y (1.9) se deduce que

$$\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A),$$

o equivalentemente, $\operatorname{Ind}(A) \leq 1$.

Teorema 1.3.1. *[1] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) \leq 1$. Entonces, la inversa core de A existe y es única.*

Proposición 1.3.1. *[1] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) \leq 1$. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades*

a) $A^{\textcircled{\#}} = A^{\#}P_A$.

b) $(A^{\textcircled{\#}})^{\dagger} = AP_A$.

c) $(A^{\textcircled{\#}})^{\#} = (A^{\textcircled{\#}})^{\dagger}$.

d) $(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = AP_A$.

e) $(A^{\textcircled{\#}})^2A = A^{\#}$.

f) $(A^{\textcircled{\#}})^m = (A^m)^{\textcircled{\#}}$, $m \in \mathbb{N}$.

g) $A^{\textcircled{\#}}A = A^{\#}A$.

h) $(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = (A^{\textcircled{\#}})^{\dagger}$.

i) $\mathcal{R}(A^{\textcircled{\#}}) = \mathcal{R}(A)$.

j) $\mathcal{N}(A^{\textcircled{\#}}) = \mathcal{N}(A^*)$.

Puesto que la inversa core es una inversa interior y exterior, de los apartados i) y j) de la proposición anterior y El Lema 1.2.1, se puede obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\text{Ind}(A) \leq 1$. *Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\#}} = A^{(1,2)}_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^*)}.$$

El siguiente resultado permite obtener una representación canónica de la inversa core a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck.

Proposición 1.3.2. *[**1**] Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *representada en la forma* (1.2) *tal que* $\text{Ind}(A) \leq 1$. *Entonces, la inversa core de* A *viene dada por*

$$A^{\textcircled{\#}} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{1.10}$$

1.3.2 La inversa core-EP: una primera extensión de la inversa core

Como se mencionó en la sección anterior, la inversa core existe solamente para matrices cuadradas de índice a lo sumo 1. Esta limitación condujo a que en el año 2013, los autores Manjunatha Prasad y Mohana [**36**], presentaran la inversa core-EP como una extensión de la inversa core para el caso de matrices de índice arbitrario.

En esta sección se hará un breve repaso de algunos resultados relevantes de la inversa core-EP estudiados en [**36**] como así también de algunas caracterizaciones y representaciones de esta inversa analizadas recientemente en [**15**, **54**].

Definición 1.3.2. *[**36**] Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\text{Ind}(A) = k$. *La inversa core-EP de* A*, denotada por* $A^{\textcircled{\dagger}}$*, es la única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *que satisface las siguientes ecuaciones*

$$XAX = X, \quad \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k). \tag{1.11}$$

Observación 1.3.1. *Se observa que la Definición 1.3.2 fue dada para matrices definidas sobre un cuerpo arbitrario.*

La siguiente caracterización fue dada en [**36**] y es un resultado fundamental para probar la existencia y unicidad de la inversa core-EP. A continuación, se presenta una demostración más detallada, adaptada al caso de matrices cuadradas complejas. Antes, se recuerda un lema auxiliar.

Lema 1.3.1. *[47] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $X \in A\{2\}$. Si AX es EP entonces AX es un proyector ortogonal.*

Teorema 1.3.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que* $\operatorname{Ind}(A) = k$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $XAX = X$ *y* $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k)$,

b) $XA^{k+1} = A^k$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$ *y* $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Sea $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz que satisface a). Claramente, se tiene que $XAX = X$ y $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$. Además, como $\mathcal{R}(A^k) \subseteq \mathcal{R}(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} A^k &= P_X A^k \\ &= XX^\dagger A^k \\ &= (XAX)X^\dagger A^k \\ &= XAP_X A^k \\ &= XA^{k+1}. \end{aligned}$$

Sólo resta probar la ecuación $AX = (AX)^*$. En efecto,

$$\mathcal{R}((AX)^*) \subseteq \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(AXA^{k+1}) \subseteq \mathcal{R}(AX). \quad (1.12)$$

Más aún,

$$\mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}(AP_{A^k}X) = \mathcal{R}(AA^k(A^k)^\dagger X) \subseteq \mathcal{R}(A^k). \quad (1.13)$$

De las inclusiones dadas en (1.12) y (1.13), se tiene que $\mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}((AX)^*)$, es decir, AX es EP.
Además, como X es una $\{2\}$-inversa de A, de la Proposición 1.3.1 se tiene que AX es un proyector ortogonal es decir, $AX = (AX)^*$.
b) $\Rightarrow$ a) Puesto que $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$ y $XA^{k+1} = A^k$, claramente

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(X). \quad (1.14)$$

Por otro lado, de (1.14) y el apartado c) del Teorema 1.1.1 se tiene que $\text{rg}(A^k) = \text{rg}(X) = \text{rg}(X^*)$. Además,

$$\mathcal{R}(X^*) \subseteq \mathcal{R}((AX)^*) = \mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}(AP_{A^k}X) \subseteq \mathcal{R}(A^k), \tag{1.15}$$

es decir,

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(X^*). \tag{1.16}$$

De las igualdades (1.14) y (1.16), se concluye que $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(X)$. $\square$

A partir de la Observación 1.2.1, no es difícil probar el siguiente lema, que versa acerca de la igualdad de ciertos proyectores ortogonales.

Lema 1.3.2. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\text{Ind}(A) = k$. *Entonces, para todo entero* $\ell \geq k$ *se satisface* $P_{A^\ell} = P_{A^k}$ *y* $Q_{A^\ell} = Q_{A^k}$.

La caracterización obtenida en el Teorema 1.3.3 permite probar existencia y unicidad de la inversa core-EP. A continuación, se presenta una demostración detallada de este resultado.

Teorema 1.3.4. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\text{Ind}(A) = k$. *Entonces, la inversa core-EP de* A *siempre existe y es única. Más aún, viene dada por* $A^{\textcircled{\dagger}} = A^k(A^{k+1})^\dagger$.

Demostración. Existencia: Sea $X := A^k(A^{k+1})^\dagger$. A continuación se verifica que dicha matriz satisface las ecuaciones del apartado b) del Teorema 1.3.3. En efecto, del Lema 1.3.2 y el hecho de que la inversa Moore-Penrose es una inversa interior, se sigue que

$$\begin{aligned} XA^{k+1} &= A^k(A^{k+1})^\dagger A^{k+1} \\ &= A^k(A^k)^\dagger A^k \\ &= A^k. \end{aligned}$$

Puesto que la inversa de Moore-Penrose es una inversa exterior, se tiene que

$$\begin{aligned} XAX &= A^k(A^{k+1})^\dagger AA^k(A^{k+1})^\dagger \\ &= A^k(A^{k+1})^\dagger A^{k+1}(A^{k+1})^\dagger \\ &= A^k(A^{k+1})^\dagger \\ &= X. \end{aligned}$$

Por otro lado, notar que $AX = A^{k+1}(A^{k+1})^{\dagger} = P_{A^{k+1}}$, de donde claramente resulta $AX = (AX)^*$. Además, $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A^k(A^{k+1})^{\dagger}) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$.
Unicidad: Sean X_1 y X_2, dos matrices satisfaciendo el sistema de ecuaciones $XA^{k+1} = A^k$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$ y $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$. Notar que dicho sistema conduce a las siguientes dos condiciones $AX = P_{A^k}$ y $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$. En efecto, la segunda condición es trivial. También es claro que AX es un proyector ortogonal pues es una matriz hermítica e idempotente. Por otro lado, usando la prueba de b) $\Rightarrow$ a) del Teorema 1.3.3 se sigue que $\mathcal{R}(AX) = \mathcal{R}(A^k)$. Además, como P_{A^k} es el único proyector ortogonal sobre $\mathcal{R}(A^k)$, se tiene que $AX = P_{A^k}$. Por lo tanto, las matrices X_1 y X_2 satisfacen las siguientes ecuaciones

$$AX_1 = P_{A^k} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X_1) \subseteq \mathcal{R}(A^k). \tag{1.17}$$

$$AX_2 = P_{A^k} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k). \tag{1.18}$$

Usando las dos primeras condiciones de (1.17) y (1.18), se sigue que $A(X_1 - X_2) = 0$, de donde resulta

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^k). \tag{1.19}$$

Por otro lado, usando las condiciones sobre los espacios columnas de X_1 y X_2, dadas en (1.17) y (1.18), se obtiene que

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k). \tag{1.20}$$

Por lo tanto, (1.18) y (1.20) implican que $X_1 - X_2 \in \mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$, donde la última igualdad se debe a que $k = \text{Ind}(A)$. Así resulta $X_1 = X_2$. $\square$

Notar que si $k \leq 1$, de (1.11) es fácil ver que $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Sin embargo, no es trivial deducir que $AX = P_A$. En la siguiente observación se muestra que efectivamente, la inversa core-EP coincide con la inversa core cuando el índice de A es a lo sumo 1.

Observación 1.3.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $k = \text{Ind}(A) \leq 1$. Si $k = 0$, entonces A es no singular y así $A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\#}} = A^{-1}$. Si $k = 1$, del Teorema 1.3.3 se tiene que $AA^{\textcircled{\dagger}}$ es idempotente y hermítica, y por lo tanto resulta un proyector ortogonal. Más aún, $\mathcal{R}(AA^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{R}(A)$. En efecto, si $k = 1$ como*

$\mathcal{R}(AA^{\textcircled{\dagger}}) \subseteq \mathcal{R}(A)$, *de* $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^{\textcircled{\dagger}}A^2) = \text{rg}(A^{\textcircled{\dagger}}AA^{\textcircled{\dagger}}A^2) \leq \text{rg}(AA^{\textcircled{\dagger}}) \leq \text{rg}(A)$, *se deduce que* $\mathcal{R}(AA^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{R}(A)$. *Luego, como* P_A *es el único proyector ortogonal sobre el espacio columna de* A, *se sigue que* $AA^{\textcircled{\dagger}} = P_A$. *Por lo tanto,* $A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\#}}$.

Como puede observarse en la prueba del Teorema 1.3.4, la inversa core-EP satisface las siguientes dos ecuaciones $AX = P_{A^k}$ y $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$. En el año 2018, en [**15**] los autores probaron que dichas ecuaciones caracterizan a la inversa core-EP. Su demostración está basada en una descomposición matricial adecuada, más precisamente la descomposición core-EP. Recientemente, en [**16**] los autores probaron que las cuatro ecuaciones que caracterizan a la inversa core-EP dada por Manjunatha Prasad y Mohana, se pueden reducir a tres ecuaciones. Más aún, obtuvieron algunas nuevas caracterizaciones de la inversa core-EP, que posteriormente fueron profundizadas en [**65**]. En el siguiente teorema se resumen algunas de las más relevantes.

Teorema 1.3.5. *[***15**, **16**, **36**, **65***] Sean* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\text{Ind}(A) = k$ *y* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) X *es la inversa core-EP de* A.

b) $XA^{k+1} = A^k$, $(AX)^* = AX$ *y* $\text{rg}(X) = \text{rg}(A^k)$.

c) $XA^{k+1} = A^k$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$ *y* $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$.

d) $XA^{k+1} = A^k$, $AX^2 = X$ *y* $(AX)^* = AX$.

e) $XAX = X$, $(AX)^* = AX$ *y* $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A^k)$.

f) $AX = P_{A^k}$ *y* $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$.

g) $AX = P_{A^k}$ *y* $AX^2 = X$.

Como se mencionó en la sección anterior (véase Teorema 1.3.2), la inversa core puede ser expresada como una inversa exterior con espacios columna y núcleo prescritos. Un resultado similar para la inversa core-EP puede ser obtenido. Antes, se necesita la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\mathrm{Ind}(A) = k$. *Entonces, se satisface*

a) $\mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{R}(A^k)$.

b) $\mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{N}((A^k)^*)$.

Puesto que la inversa core-EP es una inversa exterior, de la proposición anterior y el Lema 1.2.1, se puede obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.6. *[16] Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\mathrm{Ind}(A) = k$. *Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger}} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}((A^k)^*)}.$$

El siguiente resultado, permite obtener una representación de la inversa core-EP a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck.

Teorema 1.3.7. *[15] Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *expresada en una descomposición core-EP de la forma* (1.2). *Entonces, la inversa core-EP de* A *viene dada por*

$$A^{\textcircled{\dagger}} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\textcircled{\dagger}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{1.21}$$

Si se aplica la descomposición core-EP a la matriz A, es posible obtener una representación canónica de la inversa core-EP de A, como se enuncia a continuación.

Teorema 1.3.8. *[54] Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *representada en la forma* (1.4). *Se tiene que*

$$A^{\textcircled{\dagger}} = A_1^{\textcircled{\#}} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{1.22}$$

1.3.3 Otras extensiones de la inversa core

En el año 2014 surgieran paralelamente y en forma independiente, otras dos extensiones alternativas de la inversa core para el caso de matrices cuadradas de índice arbitrario, a saber, la inversa BT y la inversa DMP.

Una de esas extensiones fue realizada por Bakasalary y Trenkler. Más precisamente, estos autores definieron la *inversa core generalizada* de una matriz cuadrada de índice arbitrario, en la actualidad más conocida como inversa BT, en honor a sus autores.

Definición 1.3.3. *[2] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. La inversa BT de A es la matriz dada por*

$$A^{\diamond} = (AP_A)^{\dagger}.$$

Como la inversa Moore-Penrose de una matriz arbitraria siempre existe y es única, es claro de la definición que la inversa de BT de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siempre existe y es única.

De forma similar, como se realizó en la inversa core-EP, se presenta una representación canónica de la inversa BT a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck y otra a partir de la descomposición core-EP.

Teorema 1.3.9. *[2] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representada en la forma* (1.2). *Entonces la inversa BT de A viene dada por*

$$A^{\diamond} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{1.23}$$

Teorema 1.3.10. *[57] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ expresada en una descomposición core-EP de la forma*(1.4). *Se tiene que*

$$A^{\diamond} = U \begin{bmatrix} T^*\Delta & -T^*\Delta S N^{\diamond} \\ TT^* & -(P_N - P_{N^{\diamond}})S^*\Delta S N^{\diamond} \end{bmatrix} U^*,$$

donde $\Delta := (TT^* + S(P_N - P_{N^{\diamond}})S^*)^{-1}$.

Finalmente, existe otra extensión de la inversa core, la inversa DMP. Esta inversa fue definida por Malik y Thome en [**35**], tal como se enuncia a continuación.

Definición 1.3.4. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que* $\operatorname{Ind}(A) = k$. *La inversa DMP de A, denotada por $A^{d,\dagger}$, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las siguientes ecuaciones*

$$XAX = X, \quad XA = A^dA, \quad A^kX = A^kA^{\dagger}.$$

Como fue probado en [**35**], la inversa de DMP de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siempre existe y es única.

A partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck y la descomposición core-EP de la matriz A, es posible obtener dos representaciones canónicas de la inversa DMP y se enuncian en los siguientes resultados.

Teorema 1.3.11. *[**35**] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representada en la forma* (1.2)*. Entonces, la inversa DMP de A viene dada por*

$$A^{d,\dagger} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{1.24}$$

Teorema 1.3.12. *[**16**] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\operatorname{Ind}(A) = k$ expresada en una descomposición core-EP de la forma* (1.4)*. Entonces, la inversa DMP de A viene dada por*

$$A^{d,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\tilde{T}P_N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

donde $\tilde{T} := \sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j}$.

1.3.4 La inversa WG

En el año 2018 Wang y Chen [**55**], a partir de la inversa core-EP, presentaron una nueva inversa generalizada para matrices cuadradas, la cual resulta una extensión alternativa de la inversa de grupo. Dicha inversa posee propiedades similares a la inversa de Drazin pero carece de la propiedad de conmutatividad. En esta sección se mencionan sus principales propiedades, caracterizaciones y representaciones canónicas, las cuales serán extendidas al caso de matrices rectangulares en el Capítulo 4.

Definición 1.3.5. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se llama inversa de grupo débil (ó WG) de A, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las siguientes ecuaciones*

$$AX^2 = X, \quad AX = A^{\textcircled{\dagger}}A.$$

La inversa WG siempre existe y es única para toda matriz cuadrada compleja, como puede verse en [**55**] y se denotará por $A^{\textcircled{w}}$.

A continuación, se enuncian algunas de sus principales propiedades. Notar que muchas de ellas son similares a las que satisface la inversa de Drazin.

Teorema 1.3.13. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\mathrm{Ind}(A) = k$. *Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades*

a) $A^{\textcircled{w}} = (AA^{\textcircled{\dagger}}A)^{\#}$.

b) $A^{\textcircled{w}} = (A^{\textcircled{\dagger}})^2 A$.

c) $A^{\textcircled{w}} = (A^2)^{\textcircled{\dagger}} A$.

d) $\mathrm{rg}(A^{\textcircled{w}}) = \mathrm{rg}(A^k)$.

e) $A^{\textcircled{w}} = A^k (A^{k+1})^{\textcircled{\#}} A$.

f) $A^{\textcircled{w}} = (A^2 P_{A^k})^{\dagger} A$.

g) $\mathcal{R}(A^{\textcircled{w}}) = \mathcal{R}(A^k)$.

h) $\mathcal{N}(A^{\textcircled{w}}) = \mathcal{N}((A^k)^* A)$.

Puesto que la inversa WG de una matriz cuadrada es una inversa exterior, de los apartados g) y h) de la proposición anterior y el Lema 1.2.1, se puede obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.14. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\mathrm{Ind}(A) = k$. *Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{w}} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}((A^k)^* A)}.$$

Es bien conocido que la inversa de grupo de A conmuta con A, al igual que la inversa de Drazin. Sin embargo, la inversa WG pierde esta propiedad. El siguiente teorema muestra condiciones necesarias y suficientes, bajo las cuales la inversa WG conmnuta con la propia a matriz A.

Teorema 1.3.15. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *expresada en una descomposición core-EP de la forma* (1.4). *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $AA^{\textcircled{w}} = A^{\textcircled{w}} A$,

b) $(A^2)^{\textcircled{w}} = (A^{\textcircled{w}})^2$,

c) $A^{\textcircled{w}} = A^D$,

d) $SN = 0$.

A partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck de una matriz, se tiene la siguiente representación canónica de la inversa WG.

Teorema 1.3.16. *[18] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representada en la forma (1.2). Entonces, la inversa WG de A viene dada por*

$$A^{ⓦ} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{ⓦ} & ((\Sigma k)^{†})^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Similarmente, la descomposición core-EP de una matriz conduce a la siguiente forma canónica de la inversa de grupo débil.

Teorema 1.3.17. *[55] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ expresada en una descomposición core-EP de la forma (1.4). Entonces, la inversa WG de A viene dada por*

$$A^{ⓦ} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-2}S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{1.25}$$

Capítulo 2

Las inversas de Drazin y core-EP ponderadas

En este capítulo se estudian dos inversas generalizadas ponderadas para matrices rectangulares, a saber, las inversas de Drazin y core-EP ponderadas. Se enuncian y en algunos casos se demuestran sus principales propiedades, representaciones y caracterizaciones que serán de utilidad en los próximos capítulos. La herramienta principal para el desarrollo de este capítulo es una descomposición simultánea del tipo Schur para el caso de dos matrices rectangulares, la cual es tratada en la primera sección.

2.1 Descomposición core-EP ponderada

En esta sección se extiende a matrices rectangulares la descomposición core-EP establecida en el Teorema 1.1.6, la cual es conocida como la *descomposición core-EP ponderada*. Esta descomposición es una triangularización simultánea del tipo Schur para el caso de dos matrices rectangulares.

Debido a la importancia de este resultado para la representación canónica de las inversas generalizadas ponderadas que se estudiarán en profundidad en esta tesis, a continuación, se presenta una demostración detallada del mismo. Esta prueba fue presentada por primera vez en [**15**].

Teorema 2.1.1. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*,* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *una matriz no nula y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$*. Entonces, existen dos matrices unitarias* $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *y* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, dos matrices no singulares* $A_1, W_1 \in \mathbb{C}^{t\times t}$*, y dos matrices* $A_2 \in \mathbb{C}^{(m-t)\times(n-t)}$ *y* $W_2 \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(m-t)}$ *tales que* A_2W_2 *y* W_2A_2 *son nilpotentes de índice* $\mathrm{Ind}(AW)$ *e* $\mathrm{Ind}(WA)$*, respectivamente, donde*

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^* \quad y \quad W = V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*. \tag{2.1}$$

Demostración. Claramente, $AW \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $WA \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Por lo tanto, el teorema de triangularización de Schur implica que las matrices AW y WA pueden escribirse respectivamente, de la siguiente manera

$$AW = U \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & N \end{bmatrix} U^* \quad y \quad WA = V \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & S \end{bmatrix} V^*, \tag{2.2}$$

donde $C \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $E \in \mathbb{C}^{t\times t}$ son matrices triangulares superiores, cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios no nulos (contando multiplicidades) de AW y WA, respectivamente; mientras que $N \in \mathbb{C}^{(m-s)\times(m-s)}$ y $S \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(n-t)}$ son matrices triangulares superiores que tienen en su diagonal principal los valores propios nulos de AW y WA, respectivamente.
Resulta entonces, que C y E son matrices no singulares de igual tamaño, debido a que tienen los mismos valores propios no nulos (contando multiplicidades); es decir $t = s$. Mientras que N y S son matrices nilpotentes con índices de nilpotencia $\mathrm{Ind}(AW)$ e $\mathrm{Ind}(WA)$, respectivamente.
Sea $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$, entonces $N^k = 0$ y $S^k = 0$, y así

$$(AW)^k = U \begin{bmatrix} C^k & \widehat{D} \\ 0 & N^k \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} C^k & \widehat{D} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.3}$$

$$(WA)^k = V \begin{bmatrix} E^k & \widehat{F} \\ 0 & S^k \end{bmatrix} V^* = V \begin{bmatrix} E^k & \widehat{F} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{2.4}$$

para ciertas matrices $\widehat{D}$ y $\widehat{F}$.
Por otro lado, se consideran las siguientes particiones

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} V^*, \quad W = V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.5}$$

de acuerdo a los bloques de AW y WA. En consecuencia, de (2.3)-(2.5), se sigue que

$$(AW)^k A = U \begin{bmatrix} C^k A_1 + \widehat{D} A_{21} & C_k A_{12} + \widehat{D} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{2.6}$$

$$A(WA)^k = U \begin{bmatrix} A_1 E^k & A_1 \widehat{F} \\ A_{21} E^k & A_{21} \widehat{F} \end{bmatrix} V^*. \tag{2.7}$$

Es fácil ver que $(WA)^k A = A(WA)^k$. Luego, igualando bloque a bloque, se tiene que $A_{21}E^k = 0$, lo cual implica $A_{21} = 0$, pues E es no singular.
También, de (2.2) y (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned} AW &= U \begin{bmatrix} A_1 W_1 + A_{12} W_{21} & A_1 W_{12} + A_{12} W_2 \\ A_2 W_{21} & A_2 W_2 \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*, \\ WA &= V \begin{bmatrix} W_1 A_1 & W_1 A_{12} + W_{12} A_2 \\ W_{21} A_1 & W_{21} A_{12} + W_2 A_2 \end{bmatrix} V^* = V \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & S \end{bmatrix} V^*, \end{aligned}$$

de donde, $W_{21}A_1 = 0$, $A_2W_2 = N$, $W_1A_1 = E$ y $W_{21}A_{12} + W_2A_2 = S$. Por lo tanto, como $E \in \mathbb{C}^{t\times t}$ es no singular y $A_1, W_1 \in \mathbb{C}^{t\times t}$, de la ecuación $W_1A_1 = E$ se sigue que A_1 y W_1 son no singulares. En consecuencia, de $W_{21}A_1 = 0$ se deduce que $W_{21} = 0$, y por lo tanto $W_2A_2 = S$. Así, A_2W_2 y W_2A_2 son matrices nilpotentes de índices $\mathrm{Ind}(AW)$ y $\mathrm{Ind}(WA)$, respectivamente. $\square$

Como puede observarse en el teorema anterior, la extensión de la descomposición core-EP requiere de una matriz de ponderación no nula W tal que AW y WA, estén bien definidas (cuadradas) y donde al menos una de las matrices tenga índice arbitrario.

Observación 2.1.1. *De ahora en adelante, la matriz de ponderación W asociada a la matriz A será una matriz fija no nula.*

De la prueba del Teorema 2.1.1, se sabe que AW y WA se pueden expresar de la forma

$$AW = U \begin{bmatrix} A_1W_1 & A_1W_{12} + A_{12}W_2 \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.8}$$

$$WA = V \begin{bmatrix} W_1A_1 & W_1A_{12} + W_{12}A_2 \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^*. \tag{2.9}$$

Es de interés en los capítulos subsiguientes conocer una forma canónica de las inversas core-EP de los productos AW y WA. En el siguiente resultado se aplica el Teorema 2.1.1 para dicho propósito.

Corolario 2.1.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, se satisface*

$$(AW)^{\textcircled{\dagger}} = (AW)_1^{\textcircled{\#}} = U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.10}$$

$$(WA)^{\textcircled{\dagger}} = (WA)_1^{\textcircled{\#}} = V \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{2.11}$$

Demostración. Por el Teorema 2.1.1, las matrices A y W pueden ser representadas como

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^*, \quad W = V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} U^*,$$

donde A_1 y W_1 son dos matrices no singulares de igual tamaño y los productos A_2W_2 y W_2A_2 son nilpotentes de índices $\mathrm{Ind}(AW)$ e $\mathrm{Ind}(WA)$, respectivamente. Ahora, basta observar que la representación dada en (2.8) y (2.9) son las descomposiciones core-EP de $AW \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $WA \in \mathbb{C}^{n\times n}$, respectivamente. En efecto, las matrices A_1W_1 y W_1A_1 son no singulares de rango $\mathrm{rg}((AW)^k)$, y las matrices A_2W_2 y W_2A_2 verifican que $(A_2W_2)^k = 0$ y $(W_2A_2)^k = 0$. Luego, a partir del Teorema 1.3.8, se obtienen (2.10) y (2.11). $\square$

2.2 La inversa de Drazin ponderada

La inversa de Drazin de una matriz rectangular también fue definida en 1980 por los autores R.E. Cline and T.N. Greville en [7]. A diferencia de la inversa de Moore-Penrose, para definir la inversa de Drazin de una matriz rectangular fue necesario el uso de una matriz (no nula) de ponderación. Más precisamente los autores dieron la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. La inversa de Drazin ponderada de A, denotada por $A^{d,W}$, es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ que satisface las siguientes ecuaciones*

$$AWX = XWA, \quad XWAWX = X, \quad XW(AW)^{k+1} = (AW)^k.$$

Cuando $k \leq 1$, la inversa de Drazin ponderada es llamada la inversa de grupo ponderada y se denotará $A^{\#,W}$.

Observación 2.2.1. a) *Se observa que, a partir de la primera ecuación de la definición anterior, la ecuación $XW(AW)^{k+1} = (AW)^k$ puede ser expresada de manera equivalente como $(WA)^{k+1}WX = (WA)^k$.*

b) *Cuando $m = n$ y $W = I_n$ la inversa de Drazin ponderada coincide con la inversa de Drazin, es decir, $A^{d,W} = A^d$.*

Es bien conocido que la inversa de Drazin ponderada siempre existe y es única, tal como fue demostrado en [7]. En el mismo trabajo los autores probaron el siguiente resultado que permite calcular la inversa de Drazin ponderada en función de la inversa de Drazin de las matrices cuadradas AW y WA.

Teorema 2.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

$$A^{d,W} = A[(WA)^d]^2 = [(AW)^d]^2 A. \tag{2.12}$$

Corolario 2.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

$$A^{d,W} W = (AW)^d. \tag{2.13}$$

$$WA^{d,W} = (WA)^d. \tag{2.14}$$

$$A^{d,W} = (AW)^d A (WA)^d. \tag{2.15}$$

A continuación, se establece una representación canónica de la inversa de Drazin ponderada usando la descomposición core-EP ponderada. Esta representación motiva la definición de *la inversa de WG ponderada*, la cual se define y estudia en profundidad en el Capítulo 4. Para ello se utilizará la siguiente representación de la inversa de Drazin de una matriz cuadrada A mediante la descomposición core-EP dada en (1.22), obtenida por Ferreyra, Levis y Thome en [**16**]:

$$A^d = U \begin{bmatrix} T^{-1} & (T^{k+1})^{-1}\widetilde{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad \text{donde} \quad \widetilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-k-1} S N^{k-1-j}. \tag{2.16}$$

Teorema 2.2.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, se satisface*

$$\begin{aligned} A^{d,W} &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & A_1R_{WA} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* & (2.17)\\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}A_{12} + R_{AW}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, & (2.18)\end{aligned}$$

donde

$$R_{WA} = \sum_{j=0}^{k-1} (W_1A_1)^{j-k-2}(W_1A_{12} + W_{12}A_2)(W_2A_2)^{k-1-j},$$

$$R_{AW} = \sum_{j=0}^{k-1} (A_1W_1)^{j-k-2}(A_1W_{12} + A_{12}W_2)(A_2W_2)^{k-1-j}.$$

Demostración. A partir de las representaciones para los productos AW y WA, dadas en (2.8) y (2.9), respectivamente, se calcula la inversa de Drazin de ambos productos aplicando la representación (2.16)

$$(AW)^d = U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & \widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad (WA)^d = V \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & \widetilde{T}_{WA} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{2.19}$$

donde

$$\widetilde{T}_{AW} = \sum_{j=0}^{k-1} (A_1W_1)^{j-k-1}(A_1W_{12} + A_{12}W_2)(A_2W_2)^{k-1-j}$$

y

$$\widetilde{T}_{WA} = \sum_{j=0}^{k-1} (W_1A_1)^{j-k-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2)(W_2A_2)^{k-1-j}.$$

Por otro lado, si se define $R_{AW} := (A_1W_1)^{-1}\widetilde{T}_{AW}$ y $R_{WA} := (W_1A_1)^{-1}\widetilde{T}_{WA}$, la expresión dada en (2.18) se obtiene de manera sencilla aplicando (2.12). $\square$

Corolario 2.2.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*, con $k \le 1$. Entonces, se satisface*

$$\begin{aligned} A^{\#,W} &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}[A_{12} + (A_1W_1)^{-1}GA_2] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \end{aligned}$$

donde $G = A_1W_{12} + A_{12}W_2$.

Observación 2.2.2. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{Ind}(A) = 1$ y $W = I_n$, la representación de la inversa de grupo dada en el Corolario 2.2.2 se reduce a la siguiente representación*

$$A^{\#} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-2}S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.20}$$

*la cual fue obtenida en el Teorema 1.3.17. Se puede decir, que esta expresión fue la que motivó a los autores Wang y Chen [**55**] a dar una extensión alternativa de la inversa de grupo para el caso de matrices cuadradas de índice arbitrario, a la que denominaron inversa de grupo débil (inversa WG). En el Capítulo 4 se extiende dicha inversa al caso rectangular.*

2.3 La inversa core-EP ponderada

En esta sección se define la inversa core-EP para matrices rectangulares y se enuncian distintas propiedades, representaciones y caracterizaciones de esta inversa que serán de utilidad en los próximos capítulos.

La inversa core-EP de una matriz rectangular fue definida en 2018 por los autores Ferreyra, Levis y Thome [**15**], extendiendo la definición de inversa core-EP de una matriz cuadrada dada por Manjunatha Prasad y Mohana en [**36**]. Antes de dar la definición de esta inversa, los autores dieron una representación canónica para los proyectores ortogonales $P_{(AW)^k}$ y $P_{(WA)^k}$, usando la descomposición core-EP ponderada respecto del par $\{A, W\}$. Para dar dicha representación es necesario enunciar el siguiente lema cuya demostración puede ser consultada en [**15**].

Lema 2.3.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ expresada en una descomposición core-EP de la forma* (1.4) *tal que* $\mathrm{Ind}(A) = k$. *Entonces, se satisface*

$$P_{A^\ell} = U \begin{bmatrix} I_{\mathrm{rg}(A^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{2.21}$$

para cualquier entero $\ell \geq k$.

Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Si se considera una representación core-EP ponderada respecto del par $\{A, W\}$ de la forma (2.1), del Lema 2.3.1 se obtiene que

$$P_{(AW)^k} = U \begin{bmatrix} I_{\mathrm{rg}((AW)^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad \text{y} \quad P_{(WA)^k} = U \begin{bmatrix} I_{\mathrm{rg}((WA)^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{2.22}$$

Por otro lado, si en el apartado f) del Teorema 1.3.5 se adaptan las ecuaciones que caracterizan a la inversa core-EP para matrices cuadradas a matrices rectangulares de índice arbitrario se puede plantear el siguiente sistema:

$$WAWX = P_{((WA)^k)} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \tag{2.23}$$

En [**15**], Ferreyra, Levis y Thome, demostraron que el sistema dado en (2.23) siempre tiene solución y además es única. A continuación, por una cuestión de completitud se demuestra dicho resultado.

Teorema 2.3.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Si el sistema dado en* (2.23) *admite solución, entonces dicha solución es única.*

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos matrices satisfaciendo el sistema (2.23). Es decir,

$$WAWX_1 = WAWX_2 = P_{(WA)^k)^*}, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{R}(X_1) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X_2) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \tag{2.25}$$

De (2.24), se tiene que $WAW(X_1 - X_2) = 0$, lo cual es equivalente a $\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(WAW)$. Luego, por el apartado d) del Teorema 1.1.2, se obtiene que

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(WAW) \subseteq \mathcal{N}(AWAW) \subseteq \mathcal{N}((AW)^k). \tag{2.26}$$

Por otro lado, las inclusiones en (2.25) implican que

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \tag{2.27}$$

Luego, de (2.26), (2.27) y la Proposición 1.1.1, se tiene que

$$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k) \cap \mathcal{N}((AW)^k) = \{0\},$$

de donde $X_1 = X_2$. □

Para demostrar la existencia de la solución del sistema (2.23), en **[15]** los autores, utilizaron la descomposición core-EP ponderada tratada en la sección anterior. De esta forma, se obtiene una representación canónica de la inversa core-EP ponderada como puede verse en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP de la forma* (2.1)*. El sistema dado en* (2.23) *admite una única solución, la cual viene dada por*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{2.28}$$

Demostración. Sea X la matriz del lado derecho en (2.28), la cual claramente está bien definida por el Teorema 2.1.1. A continuación, se demuestra que tal matriz X satisface las ecuaciones dadas en (2.23). En efecto, si se denota

$M := W_1A_1W_{12} + (W_1A_{12} + W_{12}A_2)W_2)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} WAWX &= V\begin{bmatrix} W_1A_1W_1 & M \\ 0 & W_2A_2W_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= V\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)(W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= V\begin{bmatrix} I_{\mathrm{rg}((WA)^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \qquad (2.29) \\ &= P_{(WA)^k}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de (2.22).
Por otro lado, aplicando el Corolario 2.1.1, se obtiene que

$$\begin{aligned} (AW)^{\textcircled{\dagger}}A(WA)^{\textcircled{\dagger}} &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1}A_1(W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= X. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}((AW)^{\textcircled{\dagger}}A(WA)^{\textcircled{\dagger}}) \subseteq \mathcal{R}((AW)^{\textcircled{\dagger}}). \qquad (2.30)$$

Sea $s := \mathrm{Ind}(AW)$. Como $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$, entonces $k \geq s$. Así, de (2.30) y la Proposición 1.3.3, se tiene que

$$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}((AW)^{\textcircled{\dagger}}) \subseteq \mathcal{R}((AW)^s) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \qquad (2.31)$$

Finalmente, de (2.29), (2.31) y el Teorema 2.3.1, se tiene que $X = A^{\textcircled{\dagger},W}$. $\square$

Inspirados en la caracterización de la inversa core-EP de una matriz cuadrada, mencionada en el apartado b) del Teorema 1.3.3, en **[15]** se probó el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces,* X *es la inversa core-EP ponderada de* A *si y sólo si* X *satisface las siguientes ecuaciones*

$$\begin{aligned} XWA(WA)^{k+1} &= A(WA)^k, \qquad & XWAWX &= X, \\ (WAWX)^* &= WAWX, \qquad & \mathcal{R}(X) &\subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Posteriormente, los autores Gao, Chen y Patricio [**22**] dieron una caracterización alternativa para la inversa core-EP ponderada, esta vez basada en la caracterización dada en el apartado d) del Teorema 1.3.5.

Teorema 2.3.4. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces,* X *es la inversa core-EP ponderada de* A *si y sólo si* X *satisface las siguientes ecuaciones*

$$XW(AW)^{k+1} = (AW)^k, \quad AWXWX = X, \quad (WAWX)^* = WAWX. \tag{2.33}$$

Ejemplo 2.3.1. *A continuación, se muestra a través de un ejemplo la aplicación del Teorema 2.3.3 para obtener la inversa core-EP ponderada.*
Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que, $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\} = \max\{1, 2\} = 2$.
Ahora se plantea una matriz genérica $X \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ *que satisfaga las ecuaciones del Teorema 2.3.3. Es decir,*

$$X := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

De $A(WA)^2 = XA(WA)^3$, *se obtiene que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 & a+b \\ d+e & 0 & d+e \end{bmatrix}.$$

Entonces, $a + b = 1$ *y* $d + e = 0$. *Al remplazar en* (2.34), *se obtiene*

$$X = \begin{bmatrix} a & 1-a & c \\ -e & e & f \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Ahora, de la ecuación $WAWX = (WAWX)^*$, *se tiene que*

$$\begin{bmatrix} a-e & 1-a+e & c+f \\ a-e & 1-a+e & c+f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a-e} & \overline{a-e} & 0 \\ \overline{1-a+e} & \overline{1-a+e} & 0 \\ \overline{c+f} & \overline{c+f} & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual implica $c = -f$ *y* $a - e = \frac{1}{2}$. *Así, remplazando dichos valores en* (2.35), *se obtiene que*

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+e & \frac{1}{2}-e & -f \\ -e & e & f \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Finalmente, de la ecuación $XWAWX = X$, *se obtiene que* $e = 0$ *y* $f = 0$, *de esta forma se concluye que*

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

En ocasiones, este procedimiento para encontrar la inversa core-EP pondera para matrices de tamaños grandes, puede resultar muy difícil. En el próximo capítulo se dará un método más sencillo de obtener la inversa core-EP ponderada a partir del cálculo de la inversa Moore-Penrose que se encuentra programada en los distintos paquetes informáticas actualmente disponibles.

Capítulo 3

La inversa core-EP ponderada

En este capítulo se obtienen nuevas caracterizaciones, representaciones y propiedades para la inversa core-EP ponderada. La herramienta principal para realizar las demostraciones correspondientes es la descomposición core-EP ponderada estudiada en el Capítulo 2. En particular, se presentan nuevas representaciones para la inversa core-EP ponderada, que involucran solamente el uso de la inversa de Moore-Penrose de una cierta matriz, lo cual proporciona una manera más sencilla de calcularla.

3.1 Caracterizaciones de la inversa core-EP ponderada

En esta sección se presentan nuevas caracterizaciones algebraicas de la inversa core-EP ponderada.

Ferreyra, Levis y Thome [**15**], extendieron al caso rectangular la caracterización de la inversa core-EP dada en el apartado c) del Teorema 1.3.5. Esta extensión fue demostrada en el Teorema 2.3.3. De la misma manera, es posible extender las restantes caracterizaciones obtenidas en el Teorema 1.3.5 al caso de matrices rectangulares.

Teorema 3.1.1. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) X *es la inversa core-EP ponderada de* A*,*

b) $XW(AW)^{k+1} = (AW)^k$*,* $(WAWX)^* = WAWX$ *y* $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}((AW)^k)$*,*

c) $XWAWX = X$*,* $(WAWX)^* = WAWX$ *y* $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}((AW)^k)$*,*

d) $AWXWX = X$*,* $(WAWX)^* = WAWX$ *y* $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}((AW)^k)$*.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Si X es la inversa core-EP ponderada de A, entonces del Teorema 2.3.4 se tiene que $XW(AW)^{k+1} = (AW)^k$, $X = AWXWX$ y $(WAWX)^* = WAWX$. Más aún, de la primera ecuación, se obtiene que $\mathrm{rg}((AW)^k) \leq \mathrm{rg}(X)$. Además, puesto que $X = AWXWX$, al sustituir X en la misma expresión se obtiene que $X = (AW)^2X(WX)^2$. Siguiendo este procedimiento $k-1$ veces se obtiene que $X = (AW)^kX(WX)^k$, de donde $\mathrm{rg}(X) \leq \mathrm{rg}((AW)^k)$. De esta forma se obtiene que $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}((AW)^k)$.
b) $\Rightarrow$ c) Puesto que $XW(AW)^{k+1} = (AW)^k$, se tiene que $\mathcal{R}((AW)^k) \subseteq \mathcal{R}(X)$. Además, como $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}((AW)^k)$ se obtiene $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}((AW)^k)$. En consecuencia, como $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k)$, se tiene que $X = P_{(AW)^k}X$. Premultiplicando la igualdad anterior por la matriz $XWAW$ y usando el hecho que $XW(AW)^{k+1} = (AW)^k$, se sigue que

$$\begin{aligned} XWAWX &= XWAWP_{(AW)^k)}X \\ &= XWAW(AW)^k((AW)^k)^\dagger X \\ &= XW(AW)^{k+1}((AW)^k)^\dagger X \\ &= (AW)^k((AW)^k)^\dagger X \\ &= P_{(AW)^k}X \\ &= X. \end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ a) Sea X particionada de la siguiente forma

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{bmatrix} V^*,$$

donde el tamaño de sus bloques son de acuerdo a la partición de A dada en (2.1). Puesto que $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}((AW)^k)$, se sigue que $P_{(AW)^k}X = X$. Luego de (2.22), la ecuación anterior es equivalente a

$$\begin{bmatrix} I_{rk((AW)^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde $X_{21} = 0$ y $X_2 = 0$. En consecuencia, de la ecuación $WAWX = (WAWX)^*$, se sigue que

$$\begin{bmatrix} W_1A_1W_1X_1 & W_1A_1W_1X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1X_1)^* & 0 \\ (W_1A_1W_1X_{12})^* & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Por lo tanto, de (3.1) se obtiene $(W_1A_1W_1X_{12})^* = 0$ y así, la no singularidad de $W_1A_1W_1$ implica que $X_{12} = 0$.
Ahora, de la ecuación $X = XWAWX$, se sigue que

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1W_1A_1W_1X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, de la igualdad anterior se obtiene que $X_1 = X_1W_1A_1W_1X_1$. Además, utilizando nuevamente la relación de los espacios columnas $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}((AW)^k)$, se tiene que $P_X(AW)^k = (AW)^k$, es decir

$$XX^\dagger(AW)^k = (AW)^k.$$

Como

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

por apartado h) de la Proposición 1.2.2, es claro que

$$X^\dagger = V \begin{bmatrix} X_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

De esta manera, aplicando (2.8), la igualdad $P_X(AW)^k = (AW)^k$ es equivalente a

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & Z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & Z \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para alguna matriz Z. Es claro que $X_1X_1^\dagger(A_1W_1)^k = (A_1W_1)^k$ o equivalentemente $X_1X_1^\dagger = I_{\mathrm{rg}((AW)^k)}$, pues A_1W_1 es no singular. Así, como X_1 es una matriz cuadrada, claramente resulta no singular. De esta forma, retomando la ecuación $X_1W_1A_1W_1X_1 = X_1$, se sigue que $X_1 = (W_1A_1W_1)^{-1}$. Luego, se tiene que

$$X = U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{3.2}$$

Finalmente, la unicidad y representación de la inversa core-EP ponderada dada en el Teorema 2.3.2 implica que $X = A^{\textcircled{\dagger},W}$.
d) $\Leftrightarrow$ a) Sea X particionada de la siguiente forma

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{bmatrix} V^*,$$

donde el tamaño de sus bloques se toman de acuerdo a la partición de A dada en (2.1). Puesto que $AWXWX = X$, sustituyendo $k-1$ veces la matriz X en dicha ecuación, se obtiene que $(AW)^kX(WX)^k = X$, de donde $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k)$. Así, como $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}((AW)^k)$, se sigue que $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}((AW)^k)$. De esta forma, al igual que en la demostración c) $\Rightarrow$ a) se obtiene que

$$X = U \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{3.3}$$

Ahora, de (3.3) y de la ecuación $(WAWX)^* = WAWX$, de la misma forma que en (3.1), se obtiene que $X_{12} = 0$.
Finalmente, como la ecuación $AWXWX = X$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1W_1 & A_1W_{12} + A_{12}W_2 \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1W_1X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_1W_1X_1W_1X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

se obtiene que $A_1W_1X_1W_1X_1 = X_1$. Luego, utilizando técnicas similares a la demostración c) $\Rightarrow$ a), se tiene que X_1 es no singular. De esta forma, se obtiene que $X_1 = (W_1A_1W_1)^{-1}$. Es decir,

$$X = U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{3.4}$$

Finalmente, la unicidad y representación de la inversa core-EP ponderada dada en el Teorema 2.3.2 implican que $X = A^{\textcircled{\dagger},W}$. $\square$

Observación 3.1.1. *Notar que en la demostración anterior las dos primeras implicaciones sólo requirieron técnicas algebraicas, mientras que c) $\Rightarrow$ a) y a) $\Leftrightarrow$ d), se realizaron usando descomposiciones matriciales. En este sentido, se destaca que hasta el momento se desconoce una demostración algebraica, aún en el caso cuadrado.*

Si en el Teorema 3.1.1, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $W = I_n$, entonces se recuperan las caracterizaciones b) y c) dadas en el Teorema 1.3.5. Sin embargo, en el apartado d) se obtuvo una nueva caracterización para la inversa core-EP ponderada desconocida hasta el momento en el caso de matrices cuadradas. Más precisamente se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) = k$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) *X es la inversa core-EP de A,*

b) $AX^2 = X$, $(AX)^* = AX$, $\operatorname{rg}(X) = \operatorname{rg}(A^k)$.

Observación 3.1.2. *Se observa que la caracterización dada en el corolario anterior debilita las condiciones requeridas en [**16**] pues se requiere la condición $\operatorname{rg}(X) = \operatorname{rg}(A^k)$ en lugar de $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A^k)$.*

3.2 Propiedades de la inversa core-EP ponderada

En esta sección se demuestran algunas nuevas propiedades para la inversa core-EP ponderada, publicadas recientemente en [**19**].

En el siguiente resultado se muestra una conexión entre la inversa core-EP ponderada de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ respecto de la matriz de ponderación $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, y las inversas core-EP de las matrices cuadradas AW y WA.

Teorema 3.2.1. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*,* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$*. Entonces, se satisface*

a) $WA^{\textcircled{\dagger},W} = (WA)^{\textcircled{\dagger}}$.

b) $WAWA^{\textcircled{\dagger},W} = WA(WA)^{\textcircled{\dagger}}$.

c) $A^{\textcircled{\dagger},W} = (AW)^{\textcircled{\dagger}}A(WA)^{\textcircled{\dagger}}$.

d) $A^{\textcircled{\dagger},W} = A[(WA)^{\textcircled{\dagger}}]^2$.

e) $A^{\textcircled{\dagger},W} = A[(WA)^2]^{\textcircled{\dagger}}$.

f) $A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{\textcircled{\dagger},W}WAWA^{\textcircled{\dagger},W}$.

g) $A^{\textcircled{\dagger},W} = A[(WA)^{\textcircled{\dagger}}]^3WA$.

Demostración. Basta considerar la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1 y aplicar el Corolario 2.1.1 y el Teorema 2.3.2. $\square$

Como puede verse en (2.12) y (2.14), la inversa de Drazin ponderada satisface las siguientes propiedades duales:

$$WA^{d,W} = (WA)^d, \quad A^{d,W}W = (AW)^d \quad \text{y} \quad A^{d,W} = A[(WA)^d]^2 = [(AW)^d]^2A.$$

Sin embargo, la inversa core-EP ponderada solamente cumple las propiedades

$$WA^{\textcircled{\dagger},W} = (WA)^{\textcircled{\dagger}} \quad \text{y} \quad A^{\textcircled{\dagger},W} = A[(WA)^{\textcircled{\dagger}}]^2$$

tal como se demostró en los apartados a) y d) del Teorema 3.2.1. A continuación, se muestran algunos ejemplos que ilustran los casos en los cuales la inversa core-EP ponderada no satisface las propiedades restantes.

Ejemplo 3.2.1. *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que

$$(AW)^{\textcircled{\dagger}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A^{\textcircled{\dagger},W} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, se sigue que

$$A^{\textcircled{\dagger},W}W = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq (AW)^{\textcircled{\dagger}}.$$

Además,

$$[(AW)^{\textcircled{\dagger}}]^2 A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A^{\textcircled{\dagger},W}.$$

Tiene sentido indagar qué condiciones deben cumplir las matrices A y W para que la inversa core-EP ponderada satisfaga las igualdades anteriores. En los dos siguientes teoremas se dan condiciones necesarias y suficientes para que la inversa core-EP ponderada cumpla dichas igualdades.

Teorema 3.2.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, $A^{\textcircled{\dagger},W}W = (AW)^{\textcircled{\dagger}}$ si y sólo si $W_{12} = 0$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.2 y la representación dada en (2.10), se obtienen respectivamente, las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W}W &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & (W_1A_1W_1)^{-1}W_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*, \\ (AW)^{\textcircled{\dagger}} &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A^{\textcircled{\dagger},W}W = (AW)^{\textcircled{\dagger}}$ si y sólo si $(W_1A_1W_1)^{-1}W_{12} = 0$, de donde claramente $W_{12} = 0$. □

Teorema 3.2.3. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, $A^{\textcircled{\dagger},W} = [(AW)^{\textcircled{\dagger}}]^2A$ si y sólo si $A_{12} = 0$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.2, se tiene que

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*.$$

Además, del Corolario 2.1.1, se sigue que

$$[(AW)^{\textcircled{\dagger}}]^2A = U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (W_1A_1)^{-2}A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*.$$

Por lo tanto, de las dos expresiones anteriores, es claro que $A^{\textcircled{\dagger},W} = [(AW)^{\textcircled{\dagger}}]^2A$ si y sólo si $A_{12} = 0$. □

La inversa de Drazin ponderada tiene la propiedad de ser conmutativa respecto de una matriz de ponderación W, es decir $A^{d,W}WA = AWA^{d,W}$. No obstante, la inversa core-EP ponderada no cumple esta propiedad, como se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.2.2. *Retomando las matrices del Ejemplo 3.2.1, se tiene que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A^{\textcircled{\dagger},W} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, se calculan los productos $AWA^{\textcircled{\dagger},W}$ *y* $A^{\textcircled{\dagger},W}WA$ *y se obtiene que*

$$AWA^{\textcircled{\dagger},W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A^{\textcircled{\dagger},W}WA = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El siguiente teorema muestra bajo qué condiciones la inversa core-EP ponderada conmuta con la matriz A respecto de la matriz de ponderación W.

Teorema 3.2.4. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces,* $A^{\textcircled{\dagger},W}WA = AWA^{\textcircled{\dagger},W}$ *si y sólo si* $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$*.*

Demostración. De las representaciones obtenidas en (2.8) y (2.9) para los productos AW y WA, respectivamente, y la forma canónica de $A^{\textcircled{\dagger},W}$ obtenida en el Teorema 2.3.2, se sigue que

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W}WA &= U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & (W_1A_1W_1)^{-1}(W_1A_{12}+W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*, \\ AWA^{\textcircled{\dagger},W} &= U\begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A^{\textcircled{\dagger},W}WA = AWA^{\textcircled{\dagger},W}$ es equivalente a $(W_1A_1W_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) = 0$, que a su vez equivale a $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$. □

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es llamada *bi-dagger* si satisface la propiedad $(A^2)^\dagger = (A^\dagger)^2$. Es bien conocido que la inversa de Drazin ponderada cumple con una propiedad de este tipo respecto de la matriz de ponderación W. Más precisamente, si se definen el W-producto de A y B como $A \star B = AWB$ y además una norma dada por $\|A\|_W = \|A\|\|W\|$, resulta que la terna $(\mathbb{C}^{m\times n}, \star, \|.\|_W)$ es un álgebra de Banach, donde $\|.\|$ denota cualquier norma matricial en $\mathbb{C}^{m\times n}$. Dentro de dicha álgebra, se puede analizar la siguiente propiedad de tipo bi-dagger para la inversa de Drazin ponderada: $(A \star A)^{d,W} = A^{d,W} \star A^{d,W}$. El siguiente resultado refleja que la inversa core-EP ponderada también satisface una propiedad de este tipo.

Lema 3.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

$$(AWA)^{\textcircled{\dagger},W} = A^{\textcircled{\dagger},W} W A^{\textcircled{\dagger},W}.$$

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Por lo tanto, del Teorema 2.3.2, se sigue que

$$A^{\textcircled{\dagger},W} W A^{\textcircled{\dagger},W} = U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1}(W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Por otro lado, de (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned} AWA &= U \begin{bmatrix} A_1W_1 & A_1W_{12} + A_{12}W_2 \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} A_1W_1A_1 & A_1W_1A_1 + (A_1W_{12} + A_{12}W_2)A_2 \\ 0 & A_2W_2A_2 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Ahora, si se denota por $A_1' := A_1W_1A_1$, $A_2' := A_2W_2A_2$ y $A_{12}' := A_1W_1A_1 + (A_1W_{12} + A_{12}W_2)A_2$, se tiene que

$$(AWA)W = U \begin{bmatrix} A_1'W_1 & A_1'W_{12} + A_{12}'W_2 \\ 0 & A_2'W_2 \end{bmatrix} V^*,$$

$$W(AWA) = U \begin{bmatrix} W_1A_1' & W_1A_{12}' + W_{12}A_2' \\ 0 & W_2A_2' \end{bmatrix} V^*.$$

Notar que las matrices $A_1'W_1$ y W_1A_1' son no singulares mientras que las matrices $A_2'W_2$ y W_2A_2' son nilpotentes de índices $\mathrm{Ind}((AW)^2)$ e $\mathrm{Ind}((WA)^2)$, respectivamente. De esta forma, la matriz AWA está expresada en una descomposición core-EP ponderada. Luego, por el Teorema 2.3.2, se obtiene que

$$\begin{aligned} (AWA)^{\textcircled{\dagger},W} &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1'W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1(A_1W_1A_1)W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1}(W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por (3.5) y (3.6), la prueba está completa. $\square$

Recientemente en **[22]**, se calcularon los subespacios $\mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger},W})$ y $\mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger},W})$. A continuación, se enuncian dichas propiedades y se da una demostración alternativa.

Teorema 3.2.5. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces, se satisface*

a) $\mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathcal{R}((AW)^k)$.

b) $\mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathcal{N}(((WA)^k)^*)$.

Demostración. a) Por el Teorema 2.3.2, se tiene que

$$\mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger},W}) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \tag{3.7}$$

Más aún, de (2.28) se sigue que

$$\mathrm{rg}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathrm{rg}((W_1A_1W_1)^{-1}) = \mathrm{rg}(A_1W_1). \tag{3.8}$$

Por otro lado, como

$$(AW)^k = U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & \widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{3.9}$$

donde, $\widetilde{T}_{AW} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (A_1W_1)^{j-k-1}(A_1W_{12} + A_{12}W_2)(A_2W_2)^{k-1-j}$, es claro que $\mathrm{rg}((AW)^k) = \mathrm{rg}((A_1W_1)^k) = \mathrm{rg}(A_1W_1)$. En consecuencia, de (3.8) se obtiene $\mathrm{rg}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathrm{rg}((AW)^k)$. Así, de (3.7), se concluye que $\mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathcal{R}((AW)^k)$.

b) A partir del apartado a) del Teorema 3.2.1, del apartado b) de la Proposición 1.3.3 y del apartado d) del Teorema 1.1.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger},W}) &= \mathcal{N}(WA^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathcal{N}((WA)^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{N}(((WA)^k)^*) \\ &= \mathcal{N}((WA)^{\textcircled{\dagger}}) \subseteq \mathcal{N}(A[(WA)^{\textcircled{\dagger}}]^2) = \mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger},W}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue del apartado e) del Teorema 3.2.1. $\square$

El siguiente resultado es una versión ponderada del Teorema 1.3.6 que permite obtener una representación con espacios columna y núcleo prescritos de la inversa core-EP ponderada.

Teorema 3.2.6. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = (WAW)^{(2)}_{\mathcal{R}((AW)^k))\mathcal{N}(((WA)^k)^*)}. \tag{3.10}$$

Demostración. Por el Teorema 2.3.2, la inversa core-EP ponderada $A^{\textcircled{\dagger},W}$ de A siempre existe. Más aún, por el apartado f) del Teorema 3.2.1 y el Teorema 3.2.5, es claro que $A^{\textcircled{\dagger},W}$ es una $\{2\}$-inversa de WAW que satisface $\mathcal{R}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathcal{R}((AW)^k)$ y $\mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger},W}) = \mathcal{N}(((WA)^k)^*)$. Así, de la Definición 1.2.1 se sigue (3.10). $\square$

Hasta el momento, se han estudiado las inversas de Drazin y core-EP ponderadas. Como puede observarse tanto en el Capítulo 2 como en las secciones anteriores, ambas inversas ponderadas tienen propiedades comunes como, por ejemplo, comparten el mismo espacio columna, ambas son inversas exteriores de la matriz WAW. Sin embargo, se sabe que son inversas ponderadas distintas y por lo tanto tiene sentido preguntarse bajo qué condiciones dichas inversas coinciden. El siguiente resultado aclara esta situación. Antes, se demuestra un lema auxiliar.

Lema 3.2.2. *Sean* T, S *y* N *matrices de tamaños adecuados tales que* T *es no singular y* N *es una matriz nilpotente de índice* k. *Entonces se cumple que* $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j} = 0$ *si y sólo si* $S = 0$.

Demostración. Sea $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j} = 0$. Reescribiendo la sumatoria en la igualdad anterior, se tiene que

$$SN^{k-1} + TSN^{k-2} + \cdots + T^{k-1}S = 0, \tag{3.11}$$

Postmultiplicando la ecuación (3.11) por N^{k-1}, usando el hecho que $N^k = 0$ y la no singularidad de T, se sigue que $SN^{k-1} = 0$. Sustituyendo esta igualdad en

(3.11) se obtiene que $SN^{k-2} + \cdots T^{k-2}S = 0$. Nuevamente postmultiplicando por N^{k-2} en ambos lados de la ecuación anterior, se deduce que $SN^{k-2} = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene que $T^{k-1}S = 0$. Así, usando nuevamente la no singularidad de T, se concluye que $S = 0$.

Recíprocamente, si $S = 0$ claramente se sigue que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j} = 0$. □

Teorema 3.2.7. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W}$,

b) $AWA^{\textcircled{\dagger},W} = A^{\textcircled{\dagger},W}WA$,

c) $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$.

Demostración. a) ⇔ c) A partir de las representaciones de $A^{\textcircled{\dagger},W}$ y $A^{d,W}$, obtenidas en los Teoremas 2.3.2 y 2.2.2, respectivamente, es claro que $A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W}$ si y sólo si $A_1 \sum_{j=0}^{k-1} (W_1A_1)^{j-k-2}(W_1A_{12}+W_{12}A_2)(W_2A_2)^{k-1-j} = 0$, lo cual es equivalente a

$$\sum_{j=0}^{k-1}(W_1A_1)^j(W_1A_{12} + W_{12}A_2)(W_2A_2)^{k-1-j} = 0.$$

Además, por el Teorema 2.1, se sabe que W_1A_1 es no singular y que W_2A_2 es nilpotente de índice k. Así, aplicando el Lema 3.2.2 con $T = W_1A_1$, $S = W_1A_{12} + W_{12}A_2$ y $N = W_2A_2$, se sigue que $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$.
b) ⇔ c) Esto sigue directamente del Teorema 3.2.4. □

Corolario 3.2.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ expresada en una descomposición core-EP de la forma* (1.4)*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $A^{\textcircled{\dagger}} = A^d$,

b) $AA^{\textcircled{\dagger}} = A^{\textcircled{\dagger}}A$,

c) $S = 0$.

Demostración. Sigue directamente del Teorema 3.2.7 con $W = I_n$. $\square$

3.3 Representaciones de la inversa core-EP ponderada

En esta sección se presentan nuevas representaciones para la inversa core-EP ponderada, las cuales involucran solamente el cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una cierta matriz.

En el año 2016, Stanimirović, Katsikis y Ma [**52**], dieron nuevas representaciones de la inversa de Drazin ponderada expresadas en términos de la inversa de Moore-Penrose, que permiten calcular de manera más sencilla la inversa de Drazin ponderada. A continuación, se recuerdan dichos resultados.

Teorema 3.3.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Para cualquier entero $\ell \geq k$, se satisfacen las siguientes igualdades*

a) $A^{d,W} = (AW)^{\ell+2}\left((AW)^{3\ell+6}\right)^{\dagger}(AW)^{2\ell+2}A = (WA)^{\ell+2}\left((WA)^{3\ell+6}\right)^{\dagger}(WA)^{2\ell+2}$.

b) $A^{d,W} = \left((AW)^{\ell}((AW)^{2\ell\mathrm{a})+1})^{\dagger}(AW)^{\ell}\right)^2 A = A\left((WA)^{\ell}((WA)^{2\ell+1})^{\dagger}(WA)^{\ell}\right)^2$.

c) $A^{d,W} = (AW)^{\ell}A\left((AW)^{2\ell+2}A\right)^{\dagger}(AW)^{\ell}A = A(WA)^{\ell}\left(A(WA)^{2\ell+2}\right)^{\dagger}A(WA)^{\ell}$.

Por otro lado, en [**15**], los autores dieron la siguiente expresión para la inversa core-EP ponderada

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = \left(WAWP_{(AW)^k}\right)^{\dagger} = \left[W(AW)^{k+1}\left((AW)^k\right)^{\dagger}\right]^{\dagger}. \tag{3.12}$$

Posteriormente Gao, Chen y Patrício [**22**], notaron que dicha expresión tiene una desventaja computacional, ya que deben calcularse las inversas de Moore-Penrose de dos matrices distintas. Uno de sus principales resultados muestra una conexión entre la inversa de Drazin ponderada y la inversa core-EP ponderada, que permite usar las representaciones del Teorema 3.3.1. A continuación, se presenta dicho resultado con una ligera modificación en el enunciado y con una demostración alternativa.

Teorema 3.3.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W} P_{(WA)^\ell},$$

para cualquier entero $\ell \geq k$.

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Por lo tanto, de las representaciones dadas en (2.18), (2.22) y el Teorema 2.3.2, se tiene que

$$\begin{aligned} A^{d,W} P_{(WA)^\ell} &= A^{d,W} (WA)^\ell \left[(WA)^\ell\right]^\dagger \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & A_1 R_{WA} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathrm{rg}((WA)^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= A^{\textcircled{\dagger},W}. \end{aligned}$$

□

A partir del teorema anterior se pueden obtener varios resultados que involucren el cálculo de la inversa Moore-Penrose de una única matriz, y por lo tanto se requerirán menos operaciones en el cálculo.

Corolario 3.3.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = (AW)^\ell A \left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger = A(WA)^\ell \left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger, \tag{3.13}$$

para cualquier entero $\ell \geq k$.

Demostración. A partir del Teorema 3.3.2 y de la igualdad dada en (2.13), se satisface

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W} &= A^{d,W} (WA)^{\ell+2} \left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger \\ &= [A^{d,W} W][A(WA)^{\ell+1}] \left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger \\ &= (AW)^d (AW)^{\ell+1} A \left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por otro lado, de la Definición 1.2.6, se sigue que $(AW)^d(AW)^{\ell+1} = (AW)^\ell$, para cualquier entero $\ell \geq \mathrm{Ind}(AW)$. Luego de (3.14), se obtiene que

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = (AW)^d(AW)^{\ell+1}A\left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger = (AW)^\ell A\left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger. \qquad (3.15)$$

Finalmente, la igualdad $A^{\textcircled{\dagger},W} = A(WA)^\ell\left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger$ sigue de aplicar en (3.15) la identidad $A(WA)^n = (AW)^n A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo 3.3.1. *Mediante el Coralario 3.3.1 resulta sencillo obtener la inversa core-EP ponderada puesto que ésta queda expresada en función de la inversa Moore-Penrose. Retomando las matrices del Ejemplo 2.3.1, se tiene que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\} = 2.$$

A partir de la ecuación (3.13)*, se tiene que para cualquier entero $\ell \geq k$, se cumple*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = (AW)^\ell A\left((WA)^{\ell+2}\right)^\dagger.$$

Luego, se considera $\ell = 2$ y se obtiene que

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W} &= (AW)^2 A\left((WA)^4\right)^\dagger \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la cual coincide con la expresión obtenida en (2.37).

Corolario 3.3.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Entonces, se satisface*

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W} &= \left[(AW)^\ell\left((AW)^{2\ell+1}\right)^\dagger (AW)^\ell\right]^2 A(WA)^\ell\left((WA)^\ell\right)^\dagger && (3.16) \\ &= A\left[(WA)^\ell\left((WA)^{2\ell+1}\right)^\dagger (WA)^\ell\right]^2 (WA)^\ell\left((WA)^\ell\right)^\dagger, && (3.17) \end{aligned}$$

para cualquier entero $\ell \geq k$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3.3.2 y la igualdad (2.12), se sigue que

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W} &= A^{d,W}(WA)^{\ell}\left((WA)^{\ell}\right)^{\dagger} \\ &= \left[((AW)^{d})^{2}A\right](WA)^{\ell}\left((WA)^{\ell}\right)^{\dagger}. \end{aligned}$$

Luego, como el producto AW es una matriz cuadrada, es posible aplicar (1.7) para calcular la inversa de Drazin. Así, (3.16) sigue inmediatamente.
La demostración de (3.17) es análoga aplicando la identidad $A^{d,W} = A[WA)^{d}]^{2}$.
□

Corolario 3.3.3. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = A\left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{2\ell+1}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}, \qquad (3.18)$$

para cualquier entero $\ell \geq k$.

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. De esta forma, la demostración es inmediata aplicando (2.22) y (3.17). □

En el Corolario 3.3.2 es necesario computar la inversa de Moore-Penrose de dos matrices. Se puede observar que el Coralario 3.3.3 presenta un resultado más simétrico con la ventaja de requerir el cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una única matriz.

Cuando A es cuadrada, tal que ante un caso particular de la inversa core-EP ponderada, donde $W = I_n$. Las propiedades y representaciones, demostradas anteriormente se pueden adaptar al siguiente corolario.

Corolario 3.3.4. *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $k = \mathrm{Ind}(A)$. Entonces, para cualquier entero $\ell \geq k$, la inversa core-EP $A^{\textcircled{\dagger}}$ satisface*

a) $A^{\textcircled{\dagger}} = A^{d}A^{\ell}(A^{\ell})^{\dagger}$.

b) $A^{\textcircled{\dagger}} = A^\ell (A^{\ell+1})^\dagger$.

c) $A^{\textcircled{\dagger}} = \left[A^\ell \left(A^{2\ell+1}\right)^\dagger A^\ell\right]^2 A^{\ell+1} (A^\ell)^\dagger$.

c) $A^{\textcircled{\dagger}} = A \left[A^\ell \left(A^{2\ell+1}\right)^\dagger A^\ell\right]^2 A^{2\ell+1} (A^{2\ell+1})^\dagger$.

Demostración. Para la demostración de este coralario, basta con tomar $W = I_n$ en el Teorema 3.3.2 y en los Corolarios 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3. $\square$

Capítulo 4

La inversa WG ponderada

En este capítulo se extiende el concepto de la inversa WG de matrices cuadradas a matrices rectangulares. Entre otras cosas, se analizan existencia y unicidad de la inversa WG ponderada como solución de ciertos sistemas de ecuaciones matriciales que requieren el uso de la inversa core-EP ponderada definida en el Capítulo 3. Además, se da una representación canónica de la inversa WG ponderada usando la descomposición core-EP ponderada. También, se estudian distintas propiedades, representaciones y caracterizaciones algebraicas de dicha inversa.

4.1 Existencia y unicidad de la inversa WG ponderada

Siguiendo la definición de la inversa WG de una matriz cuadrada (véase Definición 1.3.5) es posible plantear una versión ponderada de la forma

$$AWXWX = X, \quad AWX = A^{\textcircled{\dagger},W}WA. \tag{4.1}$$

Antes de analizar el sistema anterior, se recuerdan las expresiones de las matrices AW y WA, mediante la descomposición core-EP ponderada.

$$AW = U \begin{bmatrix} A_1W_1 & F \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} U^*, \quad WA = V \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^*, \tag{4.2}$$

donde $F := A_1W_{12} + A_{12}W_2$ y $G := W_1A_{12} + W_{12}A_2$.

Observación 4.1.1. *De ahora en adelante, las matrices F y G definidas anteriormente se usarán con frecuencia a lo largo de este capítulo.*

Teorema 4.1.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, el sistema dado en* (4.1) *es compatible y tiene una única solución.*

Demostración. Unicidad: Sean X_1 y X_2 dos matrices que satisfacen el sistema (4.1). Es decir,

$$AWX_1WX_1 = X_1 \quad \text{y} \quad AWX_1 = A^{\textcircled{\dagger},W}WA,$$

$$AWX_2WX_2 = X_2 \quad \text{y} \quad AWX_2 = A^{\textcircled{\dagger},W}WA.$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} X_1 &= AWX_1WX_1 \\ &= (A^{\textcircled{\dagger},W}WA)WX_1 \\ &= A^{\textcircled{\dagger},W}W(AWX_1) \\ &= A^{\textcircled{\dagger},W}W(AWX_2) \\ &= (A^{\textcircled{\dagger},W}WA)WX_2 \\ &= AWX_2WX_2 \\ &= X_2. \end{aligned}$$

Existencia: En primer lugar, se considera la matriz

$$X := A^{\textcircled{\dagger},W}WA^{\textcircled{\dagger},W}WA. \tag{4.3}$$

Claramente, la matriz X está bien definida puesto que queda expresada en términos de la inversa core-EP ponderada, la cual siempre existe. Ahora, se considera la descomposición core-EP ponderada respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Reemplazando en (4.3), la expresión de $A^{\textcircled{\dagger},W}$ dada en el Teorema 2.3.2 y la expresión de WA dada en (4.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} X &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1 & F \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1}(W_1A_1)^{-1}(W_1A_1) & (W_1A_1W_1)^{-1}(W_1A_1)^{-1}F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(W_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Usando la expresión para la matriz X obtenida anteriormente, a continuación se verifica que dicha matriz satisface el sistema (4.1). En efecto,

$$\begin{aligned} AWX &= U \begin{bmatrix} A_1W_1 & F \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & (A_1W_1)^{-1}F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $D = A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2$.
Por otro lado, de las representaciones (2.28) y (4.2), se tiene que

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W}WA &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1 & F \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & (A_1W_1)^{-1}F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned} \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) se concluye que $AWX = A^{\textcircled{\dagger},W}WA$.
Por otro lado, es fácil ver que

$$WX = V \begin{bmatrix} W_1(W_1A_1W_1)^{-1} & W_1(A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{4.7}$$

Así, de (4.5) y (4.7), se obtiene que

$$\begin{aligned} AWXWX &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= X, \end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue de (4.4). Ahora, la prueba está completa. □

Observación 4.1.2. *De ahora en adelante la matriz* $D := A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2$ *se usará con frecuencia a a lo largo de este capítulo.*

El resultado anterior permite dar la siguiente definición.

Definición 4.1.1. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *La única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *que satisface las ecuaciones del sistema* (4.1) *se llama inversa WG ponderada y se denota por* $A^{ⓦ,W}$.

Una consecuencia del Teorema 4.1.1 es que la inversa WG ponderada siempre existe y es única. Más aún, de (4.4) se obtiene una representación canónica de dicha inversa, como se estable a continuación.

Corolario 4.1.1. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. *Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W} = A^{ⓣ,W}WA^{ⓣ,W}WA.$$

En particular, si A *y* W *son expresadas mediante una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1), *entonces la inversa WG ponderada de* A *viene dada por*

$$A^{ⓦ,W} = U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \qquad (4.8)$$

El Corolario 4.1.1 proporciona una forma sencilla de obtener la inversa WG ponderada a partir de la inversa core-EP ponderada, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1. *Retomando el Ejemplo 2.3.1, se tiene que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A^{ⓣ,W} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, es posible obtener la inversa WG ponderada al realizar los siguientes productos

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= A^{\text{†},W} W A^{\text{†},W} W A \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La inversa WG ponderada es fácil de obtener, siempre que se conozca la inversa core-EP ponderada. No obstante, cuando no se tiene información de tal inversa, los cálculos no resultan tan sencillos. Por lo cual se trata de representar la inversa WG ponderada en términos de la inversa Moore-Penorse como se hará en las próximas secciones.

4.2 Propiedades de la inversa WG ponderada

En la sección anterior se obtuvo una representación de la inversa WG ponderada en función de la inversa core-EP ponderada. Por esta razón, las diferentes representaciones de esta última, inducen diferentes representaciones para la inversa WG ponderada.

Teorema 4.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W} = (AWA)^{\text{†},W} WA.$$

Demostración. Sigue inmediatamente del Lema 3.2.1 y del Corolario 4.1.1. □

También se puede obtener una representación de la inversa WG ponderada que involucra el cálculo de la inversa de grupo ponderada de una cierta matriz.

Teorema 4.2.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W} = (AWA^{\text{†},W} WA)^{\#,W}.$$

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Así, de la expresión para $A^{\textcircled{\dagger},W}$ dada en el Teorema 2.3.2 y (4.2), se obtiene que

$$\begin{aligned}
B := \; & AWA^{\textcircled{\dagger},W}WA \\
= \; & U \begin{bmatrix} A_1W_1 & F \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\
= \; & U \begin{bmatrix} A_1(W_1A_1)^{-1}(W_1A_1) & A_1(W_1A_1)^{-1}G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
= \; & U \begin{bmatrix} A_1 & W_1^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
= \; & U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.
\end{aligned}$$

Ahora se calcula la inversa de grupo ponderada de B, usando una descomposición core-EP ponderada del par $\{B, W\}$. En efecto, en primer lugar notar que

$$BW = U \begin{bmatrix} A_1W_1 & A_1W_{12} + W_1^{-1}FW_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad \text{y} \quad WB = V \begin{bmatrix} W_1A_1 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

de donde, es claro que $\mathrm{Ind}(WB) = \mathrm{Ind}(BW) = 1$.
Notar también que B puede escribirse como

$$B = U \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} V^*.$$

Así, del Corolario 2.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
B^{\#,W} = \; & U \begin{bmatrix} (W_1B_1W_1)^{-1} & (B_1W_1)^{-2}(B_{12} + W_1^{-1}W_{12}B_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
= \; & U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\
= \; & A^{\textcircled{w},W},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce del Corolario 4.1.1. $\square$

En el siguiente teorema se establece una representación de la inversa WG ponderada en términos de la inversa de Moore Penrose. Esta representación es útil para computar en los distintos paquetes informáticos disponibles en la actualidad la inversa WG ponderada.

Teorema 4.2.3. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W} = \left(W(AW)^2 P_{(AW)^k}\right)^{\dagger} WA.$$

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. A partir de la representación del proyector $P_{(AW)^k}$ dada en (2.22), se sigue que la matriz $B := \left(W(AW)^2 P_{(AW)^k}\right)^{\dagger} WA$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} B &= \left(V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1W_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right)^{\dagger} V \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= \left(V \begin{bmatrix} W_1(A_1W_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*\right)^{\dagger} V \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-2}W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} W_1A_1 & W_1A_{12} + W_{12}A_2 \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Ahora, por el Corolario 4.1.1, se tiene que $B = A^{ⓦ,W}$. □

A partir de las definiciones de las inversas de Drazin y WG ponderadas, se sabe que ambas son extensiones de la inversa de grupo ponderada. Por lo tanto, tiene sentido preguntarse qué propiedades comunes preservan. En el siguiente teorema se muestra como la inversa WG ponderada satisface una propiedad similar a la que satisface la inversa de Drazin ponderada.

Teorema 4.2.4. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W} W(AW)^{k+1} = (AW)^k. \tag{4.9}$$

Demostración. Se considera la descomposición core-EP ponderada respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Ahora, se recuerda la representación dada para $(AW)^k$ en (3.9):

$$(AW)^k = U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & \widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{4.10}$$

donde, $\widetilde{T}_{AW} = \sum_{j=0}^{k-1}(A_1W_1)^{j-k-1}(A_1W_{12} + A_{12}W_2)(A_2W_2)^{k-1-j}$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} (AW)^{k+1} &= U \begin{bmatrix} A_1W_1 & A_1W_{12} + A_{12}W_2 \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & \widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{k+1} & A_1W_1\widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por otro lado, de (4.8), se sigue que

$$A^{ⓦ,W}W = U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{4.12}$$

De (4.10), (4.11) y (4.12), cálculos sencillos muestran que $A^{ⓦ,W}W(AW)^{k+1} = (AW)^k$. $\square$

A continuación, se demuestra que la inversa WG ponderada es una inversa exterior de WAW.

Teorema 4.2.5. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W}WAWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}.$$

Demostración. Se considera la descomposición core-EP ponderada respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Entonces, es fácil ver que

$$WAW = V \begin{bmatrix} W_1A_1W_1 & W_1A_1W_{12} + GW_2 \\ 0 & W_2A_2W_2 \end{bmatrix} U^*. \tag{4.13}$$

Si se denotan por $H := (A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2)$, $J := W_1A_1W_{12}+GW_2$ y $K := W_2A_2W_2$, de (4.8) y (4.13), se sigue que la matriz $B := A^{ⓦ,W}WAWA^{ⓦ,W}$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} B &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1A_1W_1 & J \\ 0 & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= A^{ⓦ,W}. \end{aligned}$$

□

Observación 4.2.1. *Cuando una matriz X satisface $XA^{k+1} = A^k$ y $X = XAX$, se dice que la matriz X es una inversa de Drazin débil. Como consecuencia del Teorema 4.2.4 y del Teorema 4.2.5, se obtiene que $A^{ⓦ,W}$ es una inversa de Drazin débil ponderada respecto de la matriz de ponderación W.*

Puesto que la inversa WG ponderada es una extensión de la inversa WG de una matriz cuadrada, tiene sentido extender algunos de los resultados del Capítulo 1 al caso de matrices rectangulares, como por ejemplo los apartados e) y f) del Teorema 1.3.13.

Teorema 4.2.6. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Entonces, se satisface*

$$A^{ⓦ,W} = (AW)^k[(AW)^{k+1}A]^{\#,W}WA.$$

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. A partir de la representación dada en (4.11), es sencillo verificar que

$$\max\{\mathrm{Ind}(AW)^{k+2}, \mathrm{Ind}(WA)^{k+2}\} = 1.$$

Este hecho asegura que existe la inversa core ponderada de la matriz $(AW)^{k+1}A$. Así, de (2.28), (2.9) y (4.10), la matriz $B := (AW)^k[(AW)^{k+1}A]^{\#,W}WA$, puede ser expresada como

$$\begin{aligned} B &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & \widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [W_1(A_1W_1)^{k+2}]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix}V^* \\ &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-2}W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix}V^* \\ &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\ &= A^{ⓦ,W}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce del Corolario 4.1.1. □

Es bien conocido que el espacio columna de la inversa de Drazin ponderada coincide con el espacio columna de la matriz $(AW)^k$ (véase por ejemplo [**60**]). El siguiente teorema muestra que la inversa WG ponderada preserva dicha propiedad. Más aún, se obtiene una conexión con la matriz $AWA^{ⓦ,W}$.

Teorema 4.2.7. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *y* $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. *Entonces, se satisface*

$$\mathcal{R}(A^{ⓦ,W}) = \mathcal{R}(A^{d,W}) = \mathcal{R}((AW)^k) = \mathcal{R}(AWA^{ⓦ,W}).$$

Demostración. A partir del del Teorema 4.2.1, se sigue que

$$\mathcal{R}(A^{ⓦ,W}) = \mathcal{R}(A^{†,W}WA^{†,W}WA) \subseteq \mathcal{R}(A^{†,W}) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k), \tag{4.14}$$

donde la última inclusión es consecuencia del Teorema 2.3.2.
Además, del Teorema 4.2.4, se tiene que $\mathcal{R}((AW)^k) = \mathcal{R}(A^{ⓦ,W}W(AW)^{k+1}) \subseteq \mathcal{R}(A^{ⓦ,W})$. Por lo tanto, de (4.14) resulta

$$\mathcal{R}(A^{ⓦ,W}) = \mathcal{R}(A^{d,W}) = \mathcal{R}((AW)^k). \tag{4.15}$$

Sólo resta probar que $\mathcal{R}((AW)^k) = \mathcal{R}(AWA^{ⓦ,W})$. En efecto, de la Definición 4.1.1, se tiene que $AWA^{ⓦ,W} = A^{†,W}WA$. Luego, se sigue que

$$\mathcal{R}(AWA^{ⓦ,W}) \subseteq \mathcal{R}(A^{†,W}) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k). \tag{4.16}$$

Por otro lado, del Teorema 2.3.3, se tiene que

$$(AW)^k = A^{\textcircled{\dagger},W}W(AW)^{k+1} = A^{\textcircled{\dagger},W}WAW(AW)^k = AWA^{\textcircled{w},W}W(AW)^k,$$

lo que implica

$$\mathcal{R}((AW)^k) \subseteq \mathcal{R}(AWA^{\textcircled{w},W}). \tag{4.17}$$

Así, de (4.16) y (4.17), se obtiene que

$$\mathcal{R}(AWA^{\textcircled{w},W}) = \mathcal{R}((AW)^k). \tag{4.18}$$

Finalmente, (4.15) y (4.18) completan la prueba. $\square$

Siguiendo el comentario previo al Lema 3.2.1, la inversa core-EP ponderada satisface una propiedad de tipo bi-dagger. No obstante, la inversa WG ponderada no satisface esta propiedad. En el siguiente resultado se demuestra bajo qué condiciones la inversa WG ponderada cumple una propiedad de este tipo, utilizando como herramienta principal la descomposición core-EP ponderada.

Corolario 4.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1). *Entonces,* $(AWA)^{\textcircled{w},W} = A^{\textcircled{w},W}WA^{\textcircled{w},W}$ *si y sólo si* $(W_1A_{12} + W_{12}A_2)W_2A_2 = 0$.

Demostración. En primer lugar, se calcula el producto AWA a partir de las representaciones (2.1) y (2.8), es decir

$$AWA = U\begin{bmatrix} A_1W_1A_1 & A_1W_1A_{12} + FA_2 \\ 0 & A_2W_2A_2 \end{bmatrix}V^*. \tag{4.19}$$

Como puede observarse en (4.19), la matriz AWA admite una descomposición core-EP ponderada respecto del par $\{AWA, W\}$. Luego, se puede calcular la inversa WG ponderada de dicha matriz, utilizando la representación (4.8). En efecto,

$$(AWA)^{\textcircled{w},W} = U\begin{bmatrix} W_1^{-1}(W_1A_1)^{-2} & Z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*, \tag{4.20}$$

donde $Z = (A_1W_1)^{-4}(A_1W_1A_{12} + FA_2 + W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2)$.
Por otro lado, aplicando el Corolario 4.1.1, es fácil obtener

$$A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W} = U \begin{bmatrix} W_1^{-1}(W_1A_1)^{-2} & (A_1W_1)^{-3}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{4.21}$$

Por lo tanto, de (4.20) y (4.21), se sigue que $(AWA)^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W}$ si y sólo si

$$(A_1W_1)^{-4}(A_1W_1A_{12}+FA_2+W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2) = (A_1W_1)^{-3}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2).$$

La expresión anterior puede ser simplificada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_1W_1A_{12} + FA_2 + W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2 &= A_1W_1(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ FA_2 + W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2 &= A_1W_1W_1^{-1}W_{12}A_2 \\ (A_1W_{12} + A_{12}W_2)A_2 + W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2 &= A_1W_{12}A_2 \\ A_1W_{12}A_2 + A_{12}W_2A_2 + W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2 &= A_1W_{12}A_2 \\ A_{12}W_2A_2 + W_1^{-1}W_{12}A_2W_2A_2 &= 0 \\ (A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2)W_2A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, premultiplicando W_1 en la última igualdad se deduce que
$(AWA)^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W}$ si y sólo si $(W_1A_{12} + W_{12}A_2)W_2A_2 = 0$. □

Por Definición 2.2.1, se sabe que una matriz A conmuta (respecto de la matriz de ponderación W) con su inversa de Drazin ponderada $A^{d,W}$. Sin embargo, la inversa WG ponderada no cumple dicha propiedad, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. *Retomando las matrices del Ejemplo 2.3.1, se tiene que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A^{ⓦ,W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mediante simples cálculos, se obtienen los productos $AWA^{ⓦ,W}$ *y* $A^{ⓦ,W}WA$

$$AWA^{ⓦ,W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{ⓦ,W}WA.$$

A partir del ejemplo anterior, tiene sentido indagar bajo qué condiciones la inversa WG ponderada conmuta con la matriz A respecto de la matriz de ponderación W. En el siguiente resultado, se establecen dichas condiciones.

Corolario 4.2.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, $AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA$ si y sólo si $(W_1A_{12} + W_{12}A_2)W_2A_2 = 0$.*

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Así, de (2.8) y (4.8) se tiene que

$$\begin{aligned} AWA^{ⓦ,W} &= U \begin{bmatrix} A_1W_1 & F \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & (A_1W_1)^{-1}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Por otro lado, de (2.9) y (4.8), se sigue que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W}WA &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} W_1^{-1} & (A_1W_1)^{-1}A_{12} + (A_1W_1)^{-2}DW_2A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por lo tanto, de (4.22) y (4.23), se tiene que $AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA$ si y sólo si

$$(A_1W_1)^{-1}D = (A_1W_1)^{-1}A_{12} + (A_1W_1)^{-2}DW_2A_2,$$

o equivalentemente, $(W_1A_{12} + W_{12}A_2)W_2A_2 = 0$. □

Corolario 4.2.3. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, $(AWA)^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W}$ si y sólo si $AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de los corolarios 4.2.1 y 4.2.2. □

En el Capítulo 3 (véase Teorema 3.2.7) se dieron condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales la inversa de Drazin ponderada coincide con la inversa core-EP ponderada. De la misma manera, es natural preguntarse bajo qué condiciones la inversa WG ponderada coincide con ambas inversas. Los siguientes cuatro corolarios aclaran esta situación.

Corolario 4.2.4. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, $AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA$ si y sólo si $A^{ⓦ,W} = A^{d,W}$.*

Demostración. Si $A^{ⓦ,W} = A^{d,W}$, entonces por la Definición 2.2.1 claramente se cumple que $AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA$.
Para probar la condición suficiente, se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1. Como $AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA$, del Corolario 4.2.2, se sigue que $(W_1A_{12}+W_{12}A_2)W_2A_2 = 0$. En consecuencia, de la representación de la inversa de Drazin ponderada dada en el Teorema 2.2.2, se obtiene que

$$\begin{aligned}
A^{d,W} &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & A_1\sum\limits_{j=0}^{k-1}(W_1A_1)^{j-k-2}G(W_2A_2)^{k-1-j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\
&= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & A_1(W_1A_1)^{-3}(W_1A_{12}+W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\
&= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \\
&= A^{ⓦ,W},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es deducida del Corolario 4.1.1. □

Corolario 4.2.5. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, $A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W} = (AWA)^{ⓦ,W}$ si y sólo si $A^{ⓦ,W} = A^{d,W}$.*

Demostración. Si $A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W} = (AWA)^{ⓦ,W}$ del Corolario 4.2.3 se sigue que

$$AWA^{ⓦ,W} = A^{ⓦ,W}WA.$$

Luego, por el Corolario 4.2.4, se concluye que $A^{ⓦ,W} = A^{d,W}$.
Recíprocamente, si $A^{ⓦ,W} = A^{d,W}$ entonces $A^{ⓦ,W}WA^{ⓦ,W} = (AWA)^{ⓦ,W}$ por **[9]**. □

Corolario 4.2.6. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, $A^{\textcircled{w},W} = A^{\textcircled{\dagger},W}$ si y sólo si $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$.*

Demostración. La demostración de este coralario es consecuencia inmediata de las representaciones de la inversa core-EP ponderada y la inversa WG ponderada dadas en el Teorema 2.3.2 y el Teorema 4.1.1, respectivamente. □

Corolario 4.2.7. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, $A^{\textcircled{w},W} = A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W}$ si y sólo si $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$.*

Demostración. Si $A^{\textcircled{w},W} = A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W}$, la condición explícita sigue inmediatamente del Corolario 4.2.6.
Recíprocamente, si $W_1A_{12} + W_{12}A_2 = 0$, del Teorema 3.2.7 se deduce que $A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W}$. Más aún, por el Corolario 4.2.6, también se cumple que $A^{\textcircled{w},W} = A^{\textcircled{\dagger},W}$. Así, la prueba está completa. □

Es de interés conocer una forma canónica de las inversas WG de los productos AW y WA, mediante la descomposición core-EP ponderada, pues permiten obtener nuevas propiedades para la inversa de WG ponderada.

Lema 4.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*. Entonces, se satisface*

$$(AW)^{\textcircled{w}} = U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_1W_{12} + A_{12}W_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{4.24}$$

$$(WA)^{\textcircled{w}} = V \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & (W_1A_1)^{-2}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{4.25}$$

Demostración. Aplicando el apartado b) del Teorema 1.3.13, se obtiene que

$$(AW)^{\textcircled{w}} = ((AW)^{\textcircled{\dagger}})^2 AW.$$

De las representaciones dadas en (2.8) y (2.10), se obtiene que

$$\begin{aligned}(AW)^{ⓦ} &= ((AW)^{\dagger})^2 AW \\ &= U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1W_1 & F \\ 0 & A_2W_2 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_1W_{12} + A_{12}W_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.\end{aligned}$$

Así queda probada la igualdad (4.24). Similarmente, la igualdad (4.25) puede ser obtenida mediante las representaciones (2.9) y (2.11). □

Teorema 4.2.8. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces, se satisface*

a) $WA^{ⓦ,W} = (WA)^{ⓦ}$.

b) $A^{ⓦ,W} = A[(WA)^{ⓦ}]^2$.

b) $A^{ⓦ,W} = (AW)^{ⓦ} A (WA)^{ⓦ}$.

d) $A^{ⓦ,W} = A[(WA)^{\dagger}]^3 WA$.

Demostración. Se considera la descomposición core-EP respecto del par $\{A, W\}$ dada en el Teorema 2.1.1.

a) A partir de las representación obtenida en (4.8), se tiene que

$$\begin{aligned}WA^{ⓦ,W} &= V \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= V \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & (W_1A_1)^{-2}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= (WA)^{ⓦ},\end{aligned}$$

donde la última igualdad es deducida de (4.25).
b) De (4.25), se tiene que

$$\begin{aligned} A[(WA)^{ⓦ}]^2 &= U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^* \left(V \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & (W_1A_1)^{-2}G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right)^2 \\ &= U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-2} & (W_1A_1)^{-3}G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= A^{ⓦ,W}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es deducida del Corolario 4.1.1.
c) A partir de las representaciones dadas en (4.24) y (4.25), se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} (AW)^{ⓦ}A(WA)^{ⓦ} &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= A^{ⓦ,W}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es deducida del Corolario 4.1.1.
d) De (2.9) y (2.11), se tiene que

$$\begin{aligned} A[(WA)^{†}]^3WA &= U \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= A^{ⓦ,W}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es deducida del Corolario 4.1.1. □

En los primeros tres apartados del Teorema 4.2.8, se establecieron propiedades de la inversa WG ponderada que resultan similares a propiedades que satisface la inversa de Drazin ponderada (véase Teorema 2.2.1 y Corolario 2.2.1). No obstante, algunas de esas propiedades dejan de ser válidas para la inversa WG ponderada.

Ejemplo 4.2.2. *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar que $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\} = \max\{1, 2\} = 2$. *Más aún, es fácil ver que*

$$A^{\circledS,W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [(AW)^{\circledS}]^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la inversa WG ponderada no satisface la igualdad $A^{\circledS,W} = [(AW)^{\circledS}]^2 A$. *Similarmente, como*

$$A^{\circledS,W} W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (AW)^{\circledS} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se concluye que la inversa WG ponderada tampoco satisface la propiedad $A^{\circledS,W} W = (AW)^{\circledS}$.

A continuación, se establecen condiciones necesarias y suficientes para que la inversa WG ponderada recupere dichas propiedades.

Teorema 4.2.9. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1). *Entonces,* $A^{\circledS,W} = [(AW)^{\circledS}]^2 A$ *si y sólo si* $A_{12}W_2A_2 = 0$.

Demostración. De (4.24), se obtiene que

$$\begin{aligned} [(AW)^{\circledS}]^2 A &= U \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-2} & (A_1W_1)^{-3}F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}A_{12} + (A_1W_1)^{-3}FA_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Luego, comparando la expresión anterior con la representación de la inversa de WG ponderada obtenida en (4.8), y usando la no singularidad de W_1 y A_1, se obtiene que $A^{ⓦ,W} = [(AW)^{ⓦ}]^2 A$ es equivalente a

$$(A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2) = (A_1W_1)^{-2}A_{12}+(A_1W_1)^{-3}(A_1W_{12}+A_{12}W_2)A_2.$$

Más aún, la expresión anterior puede ser simplificada de la siguiente manera:

$$(A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2) = (A_1W_1)^{-2}A_{12}+(A_1W_1)^{-3}(A_1W_{12}+A_{12}W_2)A_2,$$

de donde

$$(A_1W_1)^{-2}W_1^{-1}W_{12}A_2 = (A_1W_1)^{-3}(A_1W_{12}+A_{12}W_2)A_2,$$

con lo cual

$$W_1^{-1}W_{12}A_2 = (A_1W_1)^{-1}(A_1W_{12}+A_{12}W_2)A_20 = (A_1W_1)^{-1}A_{12}W_2A_2,$$

en definitiva

$$0 = A_{12}W_2A_2.$$

Así, la prueba está completa. □

Teorema 4.2.10. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1). *Entonces, $A^{ⓦ,W}W = (AW)^{ⓦ}$ si y sólo si $W_{12}A_2W_2 = 0$.*

Demostración. De (4.8), se obtiene que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W}W &= U\begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}U^* \\ &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & (W_1A_1W_1)^{-1}W_{12}+(A_1W_1)^{-2}DW_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* \\ &= U\begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^*. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Luego, comparando (4.26) con la representación de la inversa WG de la matriz cuadrada AW obtenida en (4.24), y usando la no singularidad de W_1 y A_1, se obtiene que $A^{ⓦ,W}W = (AW)^{ⓦ}$ es equivalente a

$$(W_1A_1W_1)^{-1}W_{12} + (A_1W_1)^{-2}(A_{12}+W_1^{-1}W_{12}A_2)W_2 = (A_1W_1)^{-2}G. \tag{4.27}$$

El primer miembro de la ecuación (4.27) es equivalente a

$$\begin{aligned} (W_1A_1W_1)^{-1}W_{12} + (A_1W_1)^{-2}(A_{12} + W_1^{-1}W_{12}A_2)W_2 &= \\ (W_1A_1W_1)^{-1}W_{12} + (W_1A_1W_1)^{-1}(A_1^{-1}A_{12} + A_1^{-1}W_1^{-1}W_{12}A_2)W_2 &= \\ (W_1A_1W_1)^{-1}\left(W_{12} + (A_1^{-1}A_{12} + A_1^{-1}W_1^{-1}W_{12}A_2)W_2\right). \end{aligned}$$

Mientras que, el segundo miembro es equivalente a

$$(A_1W_1)^{-2}(A_1W_{12} + A_{12}W_2) = (W_1A_1W_1)^{-1}(W_{12} + A_1^{-1}A_{12}W_2).$$

Remplazando ambas expresiones en (4.27) y premultiplicando por $(W_1A_1W_1)^{-1}$, se sigue que

$$W_{12} + A_1^{-1}A_{12}W_2 + A_1^{-1}W_1^{-1}W_{12}A_2W_2 = W_{12} + A_1^{-1}A_{12}W_2,$$

de donde

$$(W_1A_1)^{-1}W_{12}A_2W_2 = 0,$$

con lo cual

$$W_{12}A_2W_2 = 0.$$

Así, la prueba está completa. $\square$

4.3 Representaciones para la inversa WG ponderada

En la Sección 3 del Capítulo 3 se dieron diferentes representaciones de la inversa core-EP ponderada expresadas solamente en términos de la inversa de Moore-Penrose, que permiten calcularla de manera más sencilla. Por otro lado, en la sección anterior de este capítulo, se estableció un resultado (véase Corolario 4.1.1) que muestra una conexión entre la inversa core-EP ponderada y la inversa WG ponderada. En base a dicha relación, es posible encontrar representaciones para la inversa WG ponderada, las cuales involucran solamente el cálculo de la inversa de Moore-Penrose de una matriz concreta.

Teorema 4.3.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Entonces, para cualquier entero $\ell \geq k$, se satisface*

a) $A^{Ⓦ,W} = A(WA)^{\ell}\left((WA)^{\ell+2}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell+1}\left((WA)^{\ell+2}\right)^{\dagger}WA.$

b) $A^{ⓦ,W} = A\left[\left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{\ell}\left((WA)^{\ell}\right)^{\dagger}WA\right]^{2}.$

c) $A^{ⓦ,W} = A\left[\left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{2\ell+1}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}WA\right]^{2}.$

Demostración. a) Aplicando el Corolario 3.3.1 y el Corolario 4.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= A^{\textcircled{\dagger},W}WA^{\textcircled{\dagger},W}WA \\ &= [A(WA)^{\ell}((WA)^{\ell+2})^{\dagger}W][A(WA)^{\ell}((WA)^{\ell+2})^{\dagger}W]A \\ &= A(WA)^{\ell}\left((WA)^{\ell+2}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell+1}\left((WA)^{\ell+2}\right)^{\dagger}WA. \end{aligned}$$

b) Del Corolario 3.3.2 y el Corolario 4.1.1, se obtiene que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= A^{\textcircled{\dagger},W}WA^{\textcircled{\dagger},W}WA \\ &= A[(WA)^{\ell}((WA)^{\ell+2})^{\dagger}(WA)^{\ell}]^{2}(WA)^{\ell}((WA)^{\ell})^{\dagger}WA[(WA)^{\ell} \\ &\quad ((WA)^{\ell+2})^{\dagger}(WA)^{\ell}]^{2}(WA)^{\ell}((WA)^{\ell})^{\dagger}WA \\ &= A\left[\left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{\ell}\left((WA)^{\ell}\right)^{\dagger}WA\right]^{2}. \end{aligned}$$

c) Similarmente, los Corolarios 3.3.3 y 4.1.1 implican

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= A^{\textcircled{\dagger},W}WA^{\textcircled{\dagger},W}WA \\ &= A\left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{2\ell+1}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}WA \\ &\quad \left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{2\ell+1}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}A \\ &= A\left[\left[(WA)^{\ell}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}(WA)^{\ell}\right]^{2}(WA)^{2\ell+1}\left((WA)^{2\ell+1}\right)^{\dagger}WA\right]^{2}. \end{aligned}$$

□

Como la inversa WG de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es un caso particular de la inversa WG ponderada cuando $W = I_n$, del teorema anterior se deducen inmediatamente las siguientes representaciones para la inversa WG de A.

Corolario 4.3.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $k = \mathrm{Ind}(A)$. Entonces, para cualquier entero $\ell \geq k$, se satisface*

a) $A^{ⓦ} = \left[A^{\ell+1}\left(A^{\ell+2}\right)^{\dagger}\right]^2 A.$

b) $A^{ⓦ} = A\left[\left[A^{\ell}\left(A^{2\ell+1}\right)^{\dagger} A^{\ell}\right]^2 A^{\ell}\left(A^{\ell}\right)^{\dagger} A\right]^2.$

c) $A^{ⓦ} = A\left[\left[A^{\ell}\left(A^{2\ell+1}\right)^{\dagger} A^{\ell}\right]^2 A^{2\ell+1}\left(A^{2\ell+1}\right)^{\dagger} A\right]^2.$

4.4 Caracterización mediante una ecuación de rango

Es bien conocido que si la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular, su inversa ordinaria A^{-1} es la única matriz que satisface la siguiente ecuación de rangos

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A).$$

Una primera generalización de la caracterización anterior para el caso de una matriz A rectangular fue estudiada por M. Fiedler y T. Markham [**21**] en 1993. Más precisamente, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, los autores propusieron el problema de hallar una matriz X que satisfaga con la ecuación de rangos

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & AA^{\dagger} \\ A^{\dagger}A & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A), \tag{4.28}$$

En dicho trabajo los autores probaron que la ecuación anterior se satisface si y sólo si $X = A^{\dagger}$. Similarmente, el problema de hallar las matrices X que cumplen la ecuación de rango

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A), \tag{4.29}$$

fue estudiado cuando B y C son ciertas matrices particulares que involucran alguna inversa generalizada de A. Concretamente, en el año 1996, Wei [**58**] demostró que (4.29) es válida si y sólo si $X = A^d$, para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B = AA^d$ y $C = A^dA$. Dos años después, el mismo autor en [**59**] generalizó todos los trabajos previos, considerando $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B = AA^{(2)}_{T,S}$ y $C = A^{(2)}_{T,S}A$.

Por otro lado, un problema recíproco de la ecuación de rango (4.29) fue tratado en 1999 por Grob [**23**]. Este autor, estudió qué propiedades deben tener las matrices B y C para que X resulte la inversa de Moore-Penrose $A^\dagger$ de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. En la misma dirección, en 2003, Thome y Wei [**53**] obtuvieron resultados que caracterizan cuando X es la inversa de grupo $A^\#$ de A. Más tarde, en el año 2005, Cvetković-Ilić [**8**] generalizó dicho trabajo para el caso de la inversa de Drazin A^d de A.

En todos los trabajos mencionados anteriormente, no se consideró una caracterización para inversas generalizadas ponderadas. En esta sección se estudia una variante de la ecuación de rango dada en (4.29) cuando $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $X = A^{ⓦ,W}$.

Para comenzar esta sección es necesario repasar algunos resultados ya demostrados por distintos autores.

Lema 4.4.1. *[**58**] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $M \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ particionada como*

$$M = \begin{bmatrix} A & AQ \\ PA & B \end{bmatrix},$$

donde P, Q y B son matrices de tamaños adecuados. Entonces, se satisface $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - PAQ)$.

Lema 4.4.2. *Sean P, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $M \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ particionada como*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & PQ \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

Entonces, se satisface $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(Q)$.

Demostración. La prueba sigue inmediatamente aplicando operaciones elementales por bloques. $\square$

A continuación, se presenta una caracterización de la inversa WG ponderada mediante una ecuación de rangos.

Teorema 4.4.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1), *con $t = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(W_1)$. Entonces, existe una única matriz X que satisface*

$$X(WA)^k = 0, \quad X^2 = X, \quad ((WA)^k)^* WAX = 0, \quad \mathrm{rg}(X) = n - t, \tag{4.30}$$

una única matriz Y que satisface

$$Y(AW)^k = 0, \quad Y^2 = Y, \quad ((WA)^k)^*(WA)^2 WY = 0, \quad \mathrm{rg}(Y) = m - t, \tag{4.31}$$

y una única matriz Z que satisface

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} WAW & I_n - X \\ I_m - Y & Z \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(WAW). \tag{4.32}$$

Más aún, se tiene que

$$X = I_n - WAWA^{ⓦ,W}, \quad Y = I_m - (A)^{ⓦ,W}WAW, \quad Z = A^{ⓦ,W}. \tag{4.33}$$

Demostración. Se considera la matriz $X := I_n - WAWA^{ⓦ,W}$. Aplicando el apartado a) del Teorema 4.2.8, y las representaciones (2.9) y (4.25), se tiene que

$$\begin{aligned} X &= I_n - WAWA^{ⓦ,W} \\ &= I_n - WA(WA)^{ⓦ} \\ &= I_n - V\begin{bmatrix} W_1A_1 & W_1A_{12} + W_{12}A_2 \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-1} & (W_1A_1)^{-2}G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= V\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} V^* - V\begin{bmatrix} I_t & (W_1A_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= V\begin{bmatrix} 0 & -(W_1A_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} V^*. \end{aligned} \tag{4.34}$$

A continuación se verifica que X satisface las ecuaciones dadas en (4.30). En efecto, de (2.9) resulta

$$(WA)^k = V\begin{bmatrix} (W_1A_1)^k & \widetilde{T}_{WA} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{4.35}$$

donde $\widetilde{T}_{WA} = \sum_{j=0}^{k-1} (W_1A_1)^{j-k-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2)(W_2A_2)^{k-1-j}$.
Así, de (4.34) y (4.35),

$$\begin{aligned} X(WA)^k &= V \begin{bmatrix} 0 & -(W_1A_1)^{-1}G \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1)^k & \widetilde{T}_{WA} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} X^2 &= V \begin{bmatrix} 0 & -(W_1A_1)^{-1}G \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -(W_1A_1)^{-1}G \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} V^* \\ &= V \begin{bmatrix} 0 & -(W_1A_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} V^* \\ &= X. \end{aligned}$$

Por otro lado, de las representaciones (2.9), (4.34) y (4.35), se sigue que

$$\begin{aligned} ((WA)^k)^*WAX &= V \begin{bmatrix} ((W_1A_1)^k)^* & 0 \\ (\widetilde{T}_{WA})^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, si se aplica el Lema 4.4.2 a la representación de X dada en (4.34), se tiene que $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(I_{n-t}) = n - t$.
Para probar la unicidad, se considera una matriz X_0 que satisface (4.30), particionada de la siguiente forma

$$X_0 = V \begin{bmatrix} E & J \\ K & H \end{bmatrix} V^*, \tag{4.36}$$

donde, E y H son bloques de tamaño $t \times t$ y $(n-t) \times (n-t)$, respectivamente.
De las representaciones (4.35) y (4.36), se tiene que

$$\begin{aligned} X_0(WA)^k &= V \begin{bmatrix} E & J \\ K & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (W_1A_1)^k & \widetilde{T}_{WA} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= V \begin{bmatrix} E(W_1A_1)^k & E\widetilde{T}_{WA} \\ K(W_1A_1)^k & K\widetilde{T}_{WA} \end{bmatrix} V^*, \end{aligned}$$

de donde la ecuación $X_0(WA)^k = 0$ implica que $E(W_1A_1)^k = 0$ y $K(W_1A_1)^k = 0$. Así, como W_1A_1 es no singular, se concluye que $E = 0$ y $K = 0$.
Por otro lado, $X_0^2 = X_0$ es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & HJ \\ 0 & H^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & H \end{bmatrix},$$

lo cual implica que $HJ = J$ y $H^2 = H$. Además, puesto que $\mathrm{rg}(X_0) = n - t$, se concluye que $H = I_{n-t}$.
También, de (2.9) y (4.35), se tiene que

$$\begin{aligned} ((WA)^k)^* WAX_0 &= V \begin{bmatrix} ((W_1A_1)^k)^* & 0 \\ (\widetilde{T}_{WA})^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1 & G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} V^* \\ &= V \begin{bmatrix} ((W_1A_1)^k)^* & 0 \\ (\widetilde{T}_{WA})^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W_1A_1J + G \\ 0 & W_2A_2 \end{bmatrix} V^* \\ &= V \begin{bmatrix} 0 & ((W_1A_1)^k)^*(W_1A_1J + W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & (\widetilde{T}_{WA})^*(W_1A_1J + W_1A_{12} + W_{12}A_2) \end{bmatrix} V^*. \end{aligned}$$

Así, la igualdad $((WA)^k)^* WAX_0 = 0$ es equivalente a
$((W_1A_1)^k)^*(W_1A_1J + W_1A_{12} + W_{12}A_2) = 0$ y $(\widetilde{T}_{WA})^*(W_1A_1J + W_1A_{12} + W_{12}A_2) = 0$.
Más aún, como W_1A_1 es no singular, de la primera ecuación se deduce que $J = -(W_1A_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2)$.
De esta manera, la matriz X_0 queda univocamente determinada por

$$X_0 = V \begin{bmatrix} 0 & -(W_1A_1)^{-1}(W_1A_{12} + W_{12}A_2) \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} V^* = X.$$

Similarmente, se considera la matriz $Y := I_m - A^{\textcircled{w},W} WAW$. De las representaciones (4.13) y (4.24), se tiene que

$$
\begin{aligned}
Y &= I_m - A^{ⓦ,W} WAW \\
&= I_m - U \begin{bmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & (A_1W_1)^{-2}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1A_1W_1 & W_1A_1W_{12}+G \\ 0 & W_2A_2W_2 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_{m-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t & (W_1A_1W_1)^{-1}[GW_2] + D(W_2A_2W_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & I_{m-t} \end{bmatrix} U^*.
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

donde $M = -[W_1^{-1}W_{12} + (W_1A_1W_1)^{-1}W_{12}A_2]W_2 - (A_1W_1)^{-2}D(W_2A_2W_2)$.
A continuación se verifica que la matriz Y satisface las ecuaciones dadas en (4.31). En efecto, de (4.10) y (4.37), se tiene que

$$
\begin{aligned}
Y(AW)^k &= U \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & I_{m-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1W_1)^k & \widetilde{T}_{AW} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde $\widetilde{T}_{AW} = \sum_{j=0}^{k-1} (A_1W_1)^{j-k-1}(A_1W_{12} + A_{12}W_2)(A_2W_2)^{k-1-j}$.
Además, de (4.37), se tiene que

$$
\begin{aligned}
Y^2 &= U \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & I_{m-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & I_{m-t} \end{bmatrix} U^* \\
&= U \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & I_{m-t} \end{bmatrix} U^* \\
&= Y.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si se aplica el Lema 4.4.2 a la representación de Y dada en (4.37), se tiene que $\mathrm{rg}(Y) = \mathrm{rg}(I_{m-t}) = m - t$.
Además, del apartado f) del Teorema 1.3.5, la Definición 1.3.5 y del apartado

a) del Teorema 4.2.8, se obtiene que

$$\begin{aligned}
((WA)^k)^*(WA)^2WY &= ((WA)^k)^*(WA)^2W(I_m - A^{\textcircled{w},W}WAW) \\
&= ((WA)^k)^*(WA)^2(W - WA^{\textcircled{w},W}WAW) \\
&= ((WA)^k)^*(WA)^2(I_m - (WA)^{\textcircled{w}}WA)W \\
&= ((WA)^k)^*WA(WA - WA(WA)^{\textcircled{w}}WA)W \\
&= ((WA)^k)^*WA(I_m - WA(WA)^{\textcircled{w}})WAW \\
&= ((WA)^k)^*WA(I_m - (WA)^{\textcircled{\dagger}}WA)WAW \\
&= ((WA)^k)^*(WA - WA(WA)^{\textcircled{\dagger}}WA)WAW \\
&= ((WA)^k)^*(I_m - WA(WA)^{\textcircled{\dagger}})(WA)^2W \\
&= ((WA)^k)^*(I_m - P_{(AW)^k})(WA)^2W \\
&= \left[((WA)^k)^* - (P_{(AW)^k}(WA)^k)^*\right](WA)^2W \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La unicidad de la matriz Y se prueba de manera similar a la unicidad de X. Se finaliza la prueba de este teorema considerando la ecuación de rangos (4.32). Al reemplazar las expresiones de X e Y dadas en (4.41) en dicha ecuación se sigue que

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} WAW & I_n - (I_n - WAWA^{\textcircled{w},W}) \\ I_m - (I_m - A^{\textcircled{w},W}WAW) & Z \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(WAW).$$

Aplicando el Lema 4.4.1 en el lado izquierdo de la igualdad anterior y simplificando ambos lados de la ecuación, se obtiene que

$$\mathrm{rg}(Z - A^{\textcircled{w},W}WAWA^{\textcircled{w},W}) = 0.$$

Así, del Teorema 4.2.5, se sigue que $\mathrm{rg}(Z - A^{\textcircled{w},W}WAWA^{\textcircled{w},W}) = \mathrm{rg}(Z - A^{\textcircled{w},W}) = 0$, o equivalentemente $Z = A^{\textcircled{w},W}$. $\square$

Corolario 4.4.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ expresada en una descomposición core-EP de la forma (1.4), con $t = \mathrm{rg}(T)$. Entonces, existe una única matriz X que satisface*

$$XA^k = 0, \quad X^2 = X, \quad (A^k)^*AX = 0, \quad \mathrm{rg}(X) = n - t, \tag{4.38}$$

una única matriz Y que satisface

$$YA^k = 0, \quad Y^2 = Y, \quad (A^k)^* A^2 Y = 0, \quad \mathrm{rg}(Y) = n - t, \tag{4.39}$$

y una única matriz Z que satisface

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & I_n - X \\ I_n - Y & Z \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A). \tag{4.40}$$

Más aún, se tiene que

$$X = I_n - AA^{ⓦ}, \quad Y = I_n - A^{ⓦ}A, \quad Z = A^{ⓦ}. \tag{4.41}$$

Como consecuencia inmediata del Teorema 4.4.1, se obtiene una nueva caracterización mediante una ecuación de rangos para la inversa de grupo ponderada $A^{\#,W}$ de la matriz A.

Corolario 4.4.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en una descomposición core-EP ponderada de la forma* (2.1)*, con $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\} = 1$. Entonces, existe una única matriz X tal que*

$$XWA = 0, \quad X^2 = X, \quad (WA)^* WAX = 0, \quad \mathrm{rg}(X) = n - t,$$

una única matriz Y tal que

$$YAW = 0, \quad Y^2 = Y, \quad (WA)^*(WA)^2 WY = 0, \quad \mathrm{rg}(Y) = m - t,$$

y una única matriz Z tal que

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} WAW & I_m - X \\ I_n - Y & Z \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(WAW).$$

La matriz Z es la inversa de grupo ponderada de A, es decir $Z = A^{\#,W}$. Además, se tiene que

$$X = I_n - WAWA^{\#,W}, \quad Y = I_m - A^{\#,W}WAW.$$

Demostración. La prueba se sigue directamente tomando $k = 1$ en el Teorema 4.4.1. $\square$

Observación 4.4.1. *Dado que la inversa de grupo ponderada es un caso particular de la inversa de Drazin ponderada para el caso* $\max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\} = 1$*, si se aplica la propiedad dada en* (2.14) *a las ecuaciones dadas en (4.4.2), se obtiene que*

$$X = I_n - WA(WA)^{\#}, \quad Y = I_m - (AW)^{\#}AW.$$

Corolario 4.4.3. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$ *y* $t = \mathrm{rg}(A)$*. Entonces, existe una única matriz* Y *tal que*

$$YA = 0, \quad AY = 0, \quad Y^2 = Y, \quad \mathrm{rg}(Y) = n - t,$$

y una única matriz X *tal que*

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & I_n - Y \\ I_n - Y & X \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A).$$

La matriz X *es la inversa de grupo* $A^{\#}$ *de* A*. Además, se tiene que* $Y = I_n - AA^{\#}$*.*

Demostración. La prueba sigue inmediatamente tomando $W = I_n$ en el Coralario 4.4.2. $\square$

Capítulo 5

La inversa core-EP y WG ponderadas mediante descomposiciones

En este capítulo se obtienen dos representaciones de las inversas core-EP y la inversa WG ponderadas, a partir de dos descomposiciones clásicas, como lo son la descomposición de rango completo y la descomposición en valores singulares. A partir de dichas descomposiciones, se presentan dos algoritmos para calcular estas inversas y se muestra su implementación mediante ejemplos numéricos concretos.

5.1 La descomposición de rango completo y el cálculo de $A^{\textcircled{\dagger},W}$ y $A^{\textcircled{w},W}$

Las representaciones obtenidas para la inversa core-EP ponderada (Sección 3.3) y la inversa WG ponderada (Sección 4.3), involucran potencias de las matrices WA (o AW). En particular, cuando WA (o AW) está mal condicionada, el cálculo de dichas potencias puede tener ciertas imprecisiones numéricas. Para resolver este tipo de problema, en **[6]**, Cline estableció un método secuencial que involucra la descomposición de rango completo de ciertas matrices de orden sucesivamente menor, hasta que se obtiene una matriz no singular. A continuación se presenta, una expresión para la inversa de Drazin de la matriz (no nula) WA mediante el uso del método de Cline.

Se considera la siguiente factorización

$$\begin{aligned} WA &= P_1Q_1, \\ Q_iP_i &= P_{i+1}Q_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, k-1, \end{aligned}$$

donde $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$ y $P_{i+1}Q_{i+1}$ es una descomposición de rango completo del producto Q_iP_i y P_1Q_1 es una factorización. Así, si $(WA)^k \neq 0$ entonces Q_kP_k será no singular, y más aún

$$(WA)^d = P(Q_kP_k)^{-k-1}Q, \tag{5.1}$$

donde $P = P_1P_2 \cdots P_k$ y $Q = Q_k \cdots Q_2Q_1$.

El siguiente resultado proporciona una descomposición de tipo de rango completo para calcular la inversa core-EP ponderada.

Teorema 5.1.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Sea $0 \neq WA = P_1Q_1$ una factorización, donde $P_{i+1}Q_{i+1}$ es la descomposición de rango completo de Q_iP_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, y tal que Q_kP_k no singular. Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = A[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2P(P^*P)^{-1}P^*, \tag{5.2}$$

donde $P = P_1P_2 \cdots P_k$ y $Q = Q_k \cdots Q_2Q_1$.

Demostración. Del Teorema 3.3.2 y (2.12) se tiene que

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = A^{d,W} P_{(WA)^k} = A[(WA)^d]^2 (WA)^k ((WA)^k)^\dagger. \tag{5.3}$$

Luego, al remplazar (5.1) en (5.3), se obtiene que

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = A[P(Q_k P_k)^{-k-1} Q]^2 (WA)^k ((WA)^k)^\dagger. \tag{5.4}$$

Por hipótesis, es claro que $(WA)^k = PQ$, donde $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ y $Q = Q_k \cdots Q_2 Q_1$. Más aún, dicha factorización es una descomposición de rango completo de $(WA)^k$. En efecto, como $\mathrm{rg}(WA) = \mathrm{rg}(P_1) = \mathrm{rg}(Q_1)$, P_1 admite una inversa a izquierda $P_1^{(\ell)}$ y Q_1 admite una inversa a derecha $Q_1^{(r)}$. Si $P_2 \in \mathbb{C}^{n\times s}$, la desigualdad de rangos

$$\mathrm{rg}(P_2 Q_2) \geq \mathrm{rg}(P_2) + \mathrm{rg}(Q_2) - s = \mathrm{rg}(P_2) = \mathrm{rg}(Q_2),$$

implica que

$$\mathrm{rg}(P_2) = \mathrm{rg}(Q_2) = \mathrm{rg}(P_2 Q_2) = \mathrm{rg}(P_1^{(\ell)} (WA)^2 Q_1^{(r)}) \leq \mathrm{rg}((WA)^2) \leq \mathrm{rg}(P_2 Q_2),$$

donde la última desigualdad es debido al hecho que $(WA)^2 = P_1 P_2 Q_2 Q_1$. Siguiendo un razonamiento similar, se arriba a $\mathrm{rg}((WA)^k) = \mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}(Q)$. Por otro lado, es bien conocido que si una matriz B admite una descomposición de rango completo MN, entonces su inversa de Moore-Penrose viene dada por $B^\dagger = N^*(NN^*)^{-1}(M^*M)^{-1}M^*$ **[3]**. En consecuencia,

$$P_{(WA)^k} = (PQ)Q^*(QQ^*)^{-1}(PP^*)^{-1}P^* = P(PP^*)^{-1}P^*. \tag{5.5}$$

Finalmente, (5.6) se obtiene de (5.4) y (5.5). □

Teorema 5.1.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Sea $0 \neq WA = P_1 Q_1$ una factorización, donde $P_{i+1} Q_{i+1}$ es la descomposición de rango completo de $Q_i P_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, y tal que $Q_k P_k$ no singular. Entonces, se satisface*

$$A^{\textcircled{w},W} = A\left[[P(Q_k P_k)^{-k-1} Q]^2 P(P^*P)^{-1} P^* P_1 Q_1\right]^2, \tag{5.6}$$

donde $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ y $Q = Q_k \cdots Q_2 Q_1$.

Demostración. Del Corolario 4.1.1 y el Teorema 5.1.1, se sigue que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= [A^{\textcircled{\dagger},W}W]^2A \\ &= A[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2RWA[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2P(P^*P)^{-1}P^*WA \\ &= A[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2RP_1Q_1[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2P(P^*P)^{-1}P^*P_1Q_1 \\ &= A\left[[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2RP_1Q_1\right]^2, \end{aligned}$$

donde $R = P(P^*P)^{-1}P^*$.
Es decir, $A^{ⓦ,W} = A\left[[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2P(P^*P)^{-1}P^*P_1Q_1\right]^2$. □

Corolario 5.1.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Si PQ es una descomposición de rango completo de $(AW)^kA$, entonces se satisface*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = PQ(WPQWA)^\dagger.$$

Demostración. Como $(AW)^kA = PQ$, del Coralario 3.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\dagger},W} &= (AW)^kA((WA)^{k+2})^\dagger \\ &= (AW)^kA(W(AW)^kWA)^\dagger \\ &= PQ(WPQWA)^\dagger. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.1.2. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(AW), \mathrm{Ind}(WA)\}$. Si PQ es una descomposición rango completo de $(AW)^kA$, entonces se satisface*

$$A^{ⓦ,W} = [PQ(WPQWA)^\dagger W]^2A.$$

Demostración. El resultado sigue inmediatamente de la aplicación de los Corolarios 4.1.1 y 5.1.1. □

A continuación, se construye un algoritmo para obtener la inversa WG ponderada usando el Teorema 5.1.2.

Algoritmo

Entrada: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Salida: $A^{\textcircled{w},W}$.

Paso 1 Calcule $k = \max\{\mathrm{Ind}(WA), \mathrm{Ind}(AW)\}$.

Paso 2 Calcular la descomposición de rango completo P_1Q_1 del producto WA.

Paso 3 Para $i = 1$ hasta $k-1$, calcular el producto Q_iP_i y luego obtener la descomposición rango completo $P_{i+1}Q_{i+1}$ de Q_iP_i.

Paso 4 Calcular $P = P_1P_2\cdots P_k$ y $Q = Q_k\cdots Q_2Q_1$.

Paso 5 Calcular $A^{\textcircled{w},W} = A\left[[P(Q_kP_k)^{-k-1}Q]^2P(P^*P)^{-1}P^*P_1Q_1\right]^2$.

Fin

En el siguiente ejemplo se aplica el algoritmo anterior para calcular $A^{\textcircled{w},W}$.

Ejemplo 5.1.1. *Se consideran las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se comienza calculando el índice de WA y AW para obtener k. Así, se tiene que $k = \max\{\mathrm{Ind}(WA), \mathrm{Ind}(AW)\} = 3$.
Luego, se calcula la descomposición de rango completo de la matriz

$$WA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, $WA = P_1Q_1$*, donde*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $k = 3$*, para aplicar el Paso 3 es necesario calcular la descomposición de rango completo de* Q_1P_1 *y* Q_2P_2*, respectivamente. En efecto, para* $i = 1$*, se obtiene que*

$$Q_1P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P_2Q_2,$$

donde

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $i = 2$*, se tiene que*

$$Q_2P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_3Q_3,$$

donde,

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, el Paso 4, consiste en calcular las matrices P *y* Q *de la siguiente manera*

$$P = P_1P_2P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad Q = Q_3Q_2Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, en el Paso 5, se calcula $A\left[[P(Q_3P_3)^{-3-1}Q]^2P(P^*P)^{-1}P^*P_1Q_1\right]^2$, *y se concluye que*

$$A^{\textcircled{w},W} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2 La descomposición en valores singulares y el cálculo de $A^{\textcircled{\dagger},W}$ y $A^{\textcircled{w},W}$

En esta sección se presenta una representación canónica de la inversa WG ponderada mediante una descomposición en valores singulares simultánea de las matrices A y W.

Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\mathrm{rg}(A) = r$ y $\mathrm{rg}(W) = s$. Por el Teorema 1.1.4, se sabe que las matrices A y W pueden ser expresadas como

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \quad W = \tilde{V} \begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{U}^*, \tag{5.7}$$

donde $U, V, \tilde{U}$ y $\tilde{V}$ son matrices unitarias, $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$ y $\Sigma_2 = diag(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s)$, donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ y $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_s > 0$, son los valores singulares de A y W, respectivamente.

Recientemente en [**22**], los autores dieron una representación canónica de la inversa core-EP ponderada, usando la descomposición (5.7).

Teorema 5.2.1. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ expresadas en la forma* (5.7)*. Entonces, la inversa core-EP ponderada de A viene dada por*

$$A^{\textcircled{\dagger},W} = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 H_1[(\Sigma_2 R_1 \Sigma_1 H_1)^{\textcircled{\dagger}}]^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{V}^*,$$

donde, $\tilde{U}^*U = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}$ *y* $V^*\tilde{V} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{bmatrix}$, *con* $R_1 \in \mathbb{C}^{s\times r}$ *y* $H_1 \in \mathbb{C}^{r\times s}$.

Puesto que la inversa WG ponderada puede escribirse en función de la inversa core-EP ponderada (véase Corolario 4.1.1), usando el teorema anterior se obtiene una representación análoga para la inversa WG ponderada.

Teorema 5.2.2. *Sean* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *y* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *expresadas en la forma* (5.7). *Entonces, la inversa WG ponderada viene dada por*

$$A^{ⓦ,W} = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 H_1[(\Sigma_2 R_1 \Sigma_1 H_1)^{\dagger\!\!\!\bigcirc}]^3 \Sigma_2 R_1 \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*,$$

donde, U, V, R_1 *y* H_1 *son como en el Teorema 5.2.1.*

Demostración. Por Corolario 4.1.1 se sabe que $A^{ⓦ,W} = A^{\dagger\!\!\!\bigcirc,W} W A^{\dagger\!\!\!\bigcirc,W} W A$. Así, del Teorema 5.2.1, se sigue que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= A^{\dagger\!\!\!\bigcirc,W} W A^{\dagger\!\!\!\bigcirc,W} W A \\ &= U \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{U}^* U \begin{bmatrix} M\Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{U}^* U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} M\Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M\Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} M\Sigma_2 R_1 M \Sigma_2 R_1 \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $M = \Sigma_1 H_1 [(\Sigma_2 R_1 \Sigma_1 H_1)^{\dagger\!\!\!\bigcirc}]^2$.
Por otro lado, usando la caracterización de la inversa core-EP dada en el apartado d) del Teorema 1.3.5, se sabe que $B(B^{\dagger\!\!\!\bigcirc})^2 = B^{\dagger\!\!\!\bigcirc}$, donde B es una matriz cuadrada compleja arbitraria. En consecuencia, de (5.8) se obtiene que

$$\begin{aligned} A^{ⓦ,W} &= U \begin{bmatrix} \Sigma_1 H_1 (N^{\dagger\!\!\!\bigcirc})^2 N (N^{\dagger\!\!\!\bigcirc})^2 \Sigma_2 R_1 \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} \Sigma_1 H_1 (N^{\dagger\!\!\!\bigcirc})^3 \Sigma_2 R_1 \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \end{aligned}$$

donde $N = \Sigma_2 R_1 \Sigma_1 H_1$. $\square$

A partir del resultado anterior se puede construir un algoritmo, del mismo modo que en la descomposición de rango completo, para encontrar la inversa WG ponderada de una cierta matriz utilizando la descomposición en valores singulares.

Algoritmo

Entrada: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $k = \max\{\mathrm{Ind}(WA), \mathrm{Ind}(AW)\}$

Salida: $A^{\textcircled{w},W}$.

Paso 1 Calcular la descomposición en valores singulares de las matrices A y W obteniendo U,V $\tilde{V}$, $\tilde{U}$, Σ_1 y Σ_2 como en (5.7)).

Paso 2 Calcular $r := \mathrm{rg}(A)$ y $s := \mathrm{rg}(W)$.

Paso 3 Calcular $\tilde{U}^* U$ y $V^* \tilde{V}$ y particionarlos en bloques como en el Teorema 5.2.2.

Paso 4 Denotar Σ_1' y Σ_2' a las submatrices de Σ_1 y Σ_2 de tamaños $r \times r$ y $s \times s$, respectivamente.

Paso 5 Computar $\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1$ y calcular la inversa core-EP.

Paso 6 Computar el producto $\Sigma_1' H_1[(\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1)^{\textcircled{\dagger}}]^3 \Sigma_2' R_1 \Sigma_1'$ y denotar B a la matriz diagonal por bloque $B := diag(\Sigma_1' H_1[(\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1)^{\textcircled{\dagger}}]^3 \Sigma_2' R_1 \Sigma_1', 0)$.

Paso 7 Computar $A^{\textcircled{w},W} = UBV^*$.

Fin

A continuación se muestra cómo el algoritmo anterior puede ser computado mediante un ejemplo. Para esto, se retoma el Ejemplo 5.1.1.

Ejemplo 5.2.1. *Para las matrices del Ejemplo 5.1.1. Se comienza calculando la descomposición en valores singulares de A y se obtiene que*

$$U = \begin{bmatrix} -0.6565 & -0.4285 & 0.2280 & 0 & 0.5523 & 0.1683 \\ -0.4285 & 0.2280 & 0.6565 & 0 & -0.5523 & -0.1683 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2915 & -0.9566 \\ 0.2280 & 0.6565 & 0.4285 & 0 & 0.5523 & 0.1683 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1.9696 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2856 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6840 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y \quad V = \begin{bmatrix} -0.8440 & 0.2931 & 0.4491 & 0 & 0 \\ 0.2931 & -0.4491 & 0.8440 & 0 & 0 \\ -0.4491 & -0.8440 & -0.2931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De la misma forma, para la matriz W, se obtiene que

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0.4082 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.5774 \\ 0.8165 & 0 & 0 & 0 & 0.5774 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.4082 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.5774 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1.7321 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 0 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}.$$

Luego, se aplica el Paso 2 y se obtiene que $\mathrm{rg}(A) = r = 3$ *y* $\mathrm{rg}(W) = s = 4$.

Ahora, para el Paso 3, se calculan los productos $\tilde{U}^*U$ *y* $V^*\tilde{V}$. *Luego se particionan en bloques como en el Teorema 5.2.2.*

$$\tilde{U}^*U = \begin{bmatrix} -0.3030 & 0.1612 & 0.4642 & 0 & 0.7810 & 0.2380 \\ 0.1052 & -0.2470 & 0.8725 & 0 & -0.3905 & -0.1190 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.6255 & -0.7673 & -0.1418 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2915 & -0.9566 \\ 0.7113 & -0.5695 & -0.0560 & 0 & 0.3905 & 0.1190 \end{bmatrix}$$

y de esta forma, se obtiene el bloque R_1

$$R_1 = \begin{bmatrix} -0.3030 & 0.1612 & 0.4642 \\ 0.1052 & -0.2470 & 0.8725 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.6255 & -0.7673 & -0.1418 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$V^*\tilde{V} = \begin{bmatrix} -0.1052 & 0 & -0.4491 & -0.5968 & 0.6565 \\ -0.2470 & 0 & -0.8440 & 0.2073 & -0.4285 \\ 0.8725 & 0 & -0.2931 & 0.3176 & 0.2280 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4082 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

y de esta forma, se obtiene el bloque H_1

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.1052 & 0 & -0.4491 & -0.5968 \\ -0.2470 & 0 & -0.8440 & 0.2073 \\ 0.8725 & 0 & -0.2931 & 0.3176 \end{bmatrix}$$

Para el Paso 4 se denotan $\Sigma_1' \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ *y* $\Sigma_2' \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ *a las submatrices de* Σ_1 *y* Σ_2, *respectivamente. De esta forma*

$$\Sigma_1' = \begin{bmatrix} 1.9696 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2856 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6840 \end{bmatrix} \quad y \quad \Sigma_2' = \begin{bmatrix} 1.7321 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego en el Paso 5 se realiza el producto $\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1$ *y se calcula la inversa core-EP, obteniendo*

$$\begin{aligned}(\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1)^{\textcircled{\dagger}} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.8660 \\ 0.8165 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2887 & 0 & 1.4142 & 0.5 \end{bmatrix}^{\textcircled{\dagger}} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4082 & 0 & 0.2887 \\ 0.4082 & 0.3333 & 0 & 0.2357 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2887 & 0.2357 & 0 & 0.1667 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Para el Paso 6, se realiza el producto $\Sigma_1' H_1[(\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1)^{\textcircled{\dagger}}]^3 \Sigma_2' R_1 \Sigma_1'$*, de esta forma se obtiene que*

$$\Sigma_1' H_1[(\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1)^{\textcircled{\dagger}}]^3 \Sigma_2' R_1 \Sigma_1' = \begin{bmatrix} 0.6670 & 0.2557 & -0.5241 \\ 0.1232 & 0.0472 & -0.0969 \\ -0.5437 & -0.2084 & 0.4273 \end{bmatrix}.$$

Luego, se denota la matriz $B := diag(\Sigma_1' H_1[(\Sigma_2' R_1 \Sigma_1' H_1)^{\textcircled{\dagger}}]^3 \Sigma_2' R_1 \Sigma_1', 0)$ *y se obtiene*

$$B = \begin{bmatrix} 0.6670 & 0.2557 & -0.5241 & 0 & 0 \\ 0.1232 & 0.0472 & -0.0969 & 0 & 0 \\ -0.5437 & -0.2084 & 0.4273 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para el Paso 7 se calcula $A^{\textcircled{w},W} = UBV^*$ *y se obtiene*

$$A^{\textcircled{w},W} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que claramente coincide con el resultado del Ejemplo 5.1.1.

A continuación, para finalizar esta sección se muestra cómo es posible ejecutar este algoritmo en Matlab. Para esto se ha diseñado el siguiente programa:

```
%Se introducen las matrices A,W y el índice k
A=input('Ingrese la matriz A=')
W=input('Ingrese la matriz W=')
k=input('Ingrese el índice k=')
[m,n]=size(A);
%Paso 1: Se calculan las descomposiciones SVD de A y W
[U,D1,V]=svd(A);
[S,D2,T]=svd(W);
% Paso 2: Se calculan los rangos de A y W
r=rank(A);
s=rank(W);
%Paso 3: Se calculan los productos entre las matrices unitarias
p1=T'*U;
p2=V'*S;
%Se construyen las submatrices de p1 y p2 (como en el Teorema)
r1=p1(1:s,1:r);
h1=p2(1:r,1:s);
%Paso 4: Se construyen las submatrices diagonales
S1=D1(1:r,1:r);
S2=D2(1:s,1:s);
% Paso 5: Se computa el producto
C=S2*r1*S1*h1;
% luego, se calcula la inversa core-EP del producto denotado C
CEP=C^k*pinv(C^(k+1));
% Paso 6: Se computa el producto
B=S1*h1*(CEP)^3*S2*r1*S1;
% luego, se construye la matriz diagonal por bloque
[l,q]=size(B);
for i=1:m
for j=1:n
if i<=l && j<=q
B(i,j)=B(i,j);
else
B(i,j)=0;
end
end
```

```
end
% Paso 7: Se computa la inversa WG ponderada.
WG=U*B*V'
```

Conclusiones y líneas futuras

Se puede decir de manera muy simplificada que el Análisis Matricial es el estudio de las matrices y sus propiedades. Constituye un área muy importante de las matemáticas y es una herramienta fundamental en la resolución de problemas de naturaleza teórica como de índole aplicada. La Teoría de Inversas Generalizadas se encuadra dentro del Análisis Matricial y se ocupa fundamentalmente de problemas que involucran matrices singulares y/o rectangulares, en los cuales el uso de diferentes tipos de inversas generalizadas permite abordarlos de manera satisfactoria. En la presente tesis se estudiaron fundamentalmente dos tipos de inversas generalizadas ponderadas definidas para matrices rectangulares. Más precisamente, en primer lugar se estudió en profundidad la inversa core-EP ponderada aparecida recientemente en la literatura. Dicho estudio permitió definir una nueva inversa generalizada de una matriz rectangular A respecto de una matriz de ponderación W, llamada inversa WG ponderada.

A continuación, se indican los principales resultados obtenidos en esta tesis.

En el Capítulo 2 se presentaron dos inversas generalizadas ponderadas para matrices rectangulares, a saber, las inversas de Drazin y core-EP ponderadas. Para ello, en primer lugar, se realizó en detalle la demostración de la descomposición core-EP ponderada que permite una triangularización simultánea del tipo Schur para el caso de dos matrices rectangulares (véase el Teorema 2.1.1). El resultado principal de este capítulo es el Teorema 2.2.2 en el que se obtuvo una representación canónica para la inversa de Drazin ponderada usando la descomposición core-EP ponderada.

En el Capítulo 3 se obtuvieron nuevas caracterizaciones, representaciones y propiedades de la inversa core-EP ponderada. Más precisamente, las principales caracterizaciones de la inversa core-EP ponderada se probaron en el Teorema 3.1.1. Algunas de dichas caracterizaciones eran desconocidas aún en el caso de matrices cuadradas. Por otro lado, las principales propiedades de la inversa core-EP ponderada se establecieron en la Sección 3.2. En particular, una cuestión analizada fue acerca de su coincidencia con la inversa de Drazin ponderada. Esta cuestión fue resuelta en el Teorema 3.2.7 en el que se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales ambas inversas coinciden. En cuanto a las representaciones de la inversa core-EP ponderada, en la Sección 3.3 se obtuvieron interesantes expresiones que involucran solamente el uso de la inversa de Moore-Penrose de ciertas matrices, lo cual facilita la manera de obtener dicha inversa desde un punto de vista numérico además del interés teórico. Estos resultados fueron establecidos en los Corolarios 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3.

En el Capítulo 4 se extendió el concepto de inversa WG de una matriz cuadrada al caso rectangular. Entre los principales resultados obtenidos se menciona el Teorema 4.1.1, en el cual se establece existencia, unicidad y caracterización de la inversa WG ponderada como solución de ciertos sistemas de ecuaciones matriciales. Además, en el Corolario 4.1.1 se obtuvo una representación canónica de dicha inversa utilizando la descomposición core-EP ponderada. También en el Teorema 4.2.3 se estableció una expresión de la inversa WG ponderada en términos de la inversa de Moore Penrose, que a su vez permite calcularla utilizando los distintos paquetes informáticos disponibles. Este capítulo finaliza con la Sección 4.4 en la que se presenta una caracterización de la inversa WG ponderada mediante una ecuación de rangos (véase el Teorema 4.4.1).

Finalmente, en el Capítulo 5, se estudiaron dos representaciones de las inversas core-EP y WG ponderadas, utilizando la descomposición de rango completo y la descomposición en valores singulares. A partir de dichas descomposiciones, se construyeron dos algoritmos que se aplicaron en dos ejemplos numéricos concretos y permitieron mostrar la efectividad de los mismos. Uno de los algoritmos, para la descomposición en valores singulares, fue implementados en MATLAB.

Los resultados más relevantes de esta tesis fueron publicados recientemente en [**19**, **20**].

Además de lo expuesto anteriormente, se puede decir, que durante el desarrollo de la tesis surgieron nuevos problemas relacionados al tema en estudio. Algunos de ellos se resolvieron y otros serán considerados como líneas futuras de investigación.

A continuación se presenta un breve descripción de algunos posibles problemas de investigación para continuar este trabajo.

En 2010, los autores indios Mitra, Bhimasankaram y Malik publican el libro *Matrix partial orders, shorted operators and applications* (véase [**40**]) donde realizan una compilación detallada de la mayoría de los órdenes y pre-órdenes matriciales conocidos hasta ese momento como así también presentaron resultados inéditos acerca del tema. En la última década se ha incrementado notablemente el estudio de órdenes parciales sobre diferentes conjuntos de matrices. En esta dirección se pretende:

- Revisar la bibliografía relativa a inversas generalizadas recientemente definidas en la literatura y su conexión con las estructuras ordenadas, especialmente pre-órdenes y órdenes parciales inducidos por dichas inversas sobre el conjunto de matrices complejas.
- Analizar la relación binaria inducida por la inversa WG ponderada sobre el conjunto de matrices rectangulares.
- Estudiar la conexión entre la inversa WG ponderada y otras inversas generalizadas ponderadas definidas recientemente en la literatura, por ejemplo las inversas BT y DMP ponderadas.

- Construir e implementar algoritmos sobre el conjunto de matrices complejas que permiten calcular las distintas inversas generalizadas completando los aspectos numéricos que resulten de ellos.

En los últimos años se incrementó de manera significativa el número de publicaciones que extienden el estudio de inversas generalizadas matriciales y el de órdenes y pre-órdenes sobre conjuntos de matrices a contextos más generales como el álgebra de operadores lineales sobre espacios de dimensión infinita y/o al ámbito de anillos abstractos. En este sentido se pretende:

- Abordar las posibles extensiones de los resultados matriciales al caso de operadores lineales acotados sobre un espacio de dimensión infinita (Hilbert/Banach).
- Extender las nociones investigadas en esta tesis al caso de anillos con involución (o subclases de ellos).

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (sin incluir el cero).
$\mathbb{C}^n$	Espacio vectorial de n-uplas complejas (de dimensión n).
$\mathbb{C}^{m\times n}$	Anillo de matrices complejas de tamaño $m \times n$.
I_n	Matriz identidad de tamaño $n \times n$.
A^*	Traspuesta conjugada de la matriz A.
A^{-1}	Inversa (ordinaria) de la matriz cuadrada A.
$A^\dagger$	Inversa de Moore-Penrose de A.
A^d	Inversa de Drazin de A.
$A^{d,W}$	Inversa de Drazin ponderada de A.
$A^{\textcircled{\#}}$	Inversa core de A.
$A^\#$	Inversa de grupo de A.
$A^{\#,W}$	Inversa de grupo ponderada de A.
$A^{\textcircled{\dagger}}$	Inversa core-EP de A.
$A^{\textcircled{\dagger},W}$	Inversa core-EP ponderada de A.
$A^\diamond$	Inversa BT de A.
$A^{d,\dagger}$	Inversa DMP de A.
$A^{\textcircled{w}}$	Inversa de grupo débil de A.
$A^{\textcircled{w},W}$	Inversa de grupo débil ponderada de A.
$\mathcal{R}(A)$	Espacio columna de la matriz A.
$\mathcal{N}(A)$	Núcleo de la matriz A.

$\mathrm{rg}(A)$	Rango de la matriz A.
$\dim(S)$	Dimensión de un subespacio S.
$\mathrm{Ind}(A)$	Índice de la matriz A.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto escalar canónico en $\mathbb{C}^n$.
$M^{\perp}$	Subespacio ortogonal del subespacio M.
$M \perp N$	M y N son subespacios ortogonales.
$\mathbb{C}^n = M \oplus N$	$\mathbb{C}^n$ es suma directa de los subespacios M y N.
P_L	Proyector ortogonal sobre el subespacio L.

Bibliografía

[1] O.M, Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear Multilinear Algebra. 58 (6) 681-697 (2010)

[2] O.M, Baksalary, G. Trenkler, *On a generalized core inverse*, Appl. Math. Comput. 236 450-457 (2014)

[3] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses, Theory and Applications*, Second Ed, Springer-Verlag, New York (2003)

[4] S.L. Campbell, *Recent Applications of Generalized Inverses*, Pitman, London, (1982)

[5] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear transformations*, SIAM, Philadelphia, (2009)

[6] R.E. Cline, *Inverses of rank invariant powers of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal. 5 182-197 (1968)

[7] R.E. Cline, T.N.E. Greville, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra and its Applications. 29 53-62 (1980)

[8] D. Cvetković-Ilić, *On a problem of N. Thome and Y. Wei*, Appl. Math. Comput. 166 1 233-236 (2005)

[9] A. Dajić, J.J. Koliha, *The weighted g-Drazin inverse for operators*, J.Aust. Math. Soc. 2 163?181 (2007)

[10] K.L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento, *A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics*, Int. J. Rob.Res. 12 1-19 (1993)

[11] M.P. Drazin, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, The American Mathematical Monthly. 65 506-514 (1958)

[12] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, *Relative EP matrices*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. 116, 69 (2022)

[13] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, *Some new results on the core partial order*, Linear Multilinear Algebra (2020) https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1841078

[14] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, *Core and strongly core ortogonal matrices*, Linear Multilinear Algebra (2021) https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1902923

[15] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, *Revisiting of the core EP inverse and its extension to rectangular matrices*, Quaest. Math. 41 (2) 265-281 (2018)

[16] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, *Characterizations of k-commutative equalities for some outer generalized inverses*, Linear Multilinear Algebra. 68 (1) 177-192 (2020)

[17] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, *Maximal classes of matrices determining generalized inverses*, Appl. Math. Comput. 333 42-52 (2018)

[18] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, A.N. Priori, N. Thome, *The weak core inverse.* Aequat. Math. (2020) https://doi.org/10.1007/s00010-020-00752-z

[19] D.E. Ferreyra, V. Orquera, N. Thome, *A weak group inverse for rectangular matrices*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. 113 3727-3740 (2019)

[20] D.E. Ferreyra, V. Orquera, N. Thome, *Representations of the weighted WG inverse and a rank equation's solution*, Linear Multilinear Algebra (2021) https://doi.org/10.1080/03081087.2021.2023449

[21] M. Fiedler, T.L. Markham, *A Characterization of the Moore-Penrose Inverse*, Linear Algebra and its Applications. 179 129-133 (1993)

[22] Y. Gao, J. Chen, P. Patricio, *Representations and properties of the W-weighted core-EP inverse*, Linear Multilinear Algebra. 68 (6) 1160-1174 (2020)

[23] J. Grob, *Solution to a rank equation*, Linear Algebra and its Applications. 289 127-130 (1999)

[24] R.E. Hartwig, K. Spindelböck, *Matrices for which A^* and A^+ commute*, Linear Multilinear Algebra. 14 241-256 (1984)

[25] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome, *Weighted binary relations involving the Drazin inverse*, Appl. Math. Comput. 253 215-223 (2015)

[26] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome, *On some new pre-orders defined by weighted Drazin inverses*, Appl. Math. Comput. 282 108-116 (2015).

[27] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome, *On a partial order defined by the weighted Moore-Penrose inverse*, Appl. Math. Comput. 219 7310-7318 (2013)

[28] K.M. Hocine, M. Benharrat, B. Messirdi, *Left and right generalized Drazin invertible operators*, Linear Multilinear Algebra. 63 (8) 1635-1648 (2015)

[29] J. Ji, Y. Wei, *The Core-EP, Weighted Core-EP Inverse of Matrices and Constrained Systems of Linear Equations*, Commun. Math. Res. 37 88-112 (2021)

[30] S.J. Kirkland, M. Neumann, *Group Inverses of M-Matrices and Their Applications*, Chapman and Hall/CRC, London (2013)

[31] I. Kyrchei, *Determinantal representations of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field*, Appl. Math. Comput. 264 453-465 (2015)

[32] J.J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasg. Math. J. (38) 367-381 (1996)

[33] H. Kurata, *Some theorems on the core inverse of matrices and the core partial ordering*, Appl. Math. Comput. 316 43-51 (2018)

[34] T. Li, J. Chen, *Characterizations of core and dual core inverses in rings with involution*, Linear Multilinear Algebra. 66 (4) 717-730 (2018)

[35] S.B. Malik, N. Thome, *On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index*, Appl. Math. Comput. 226 575-580 (2014)

[36] K. Manjunatha Prasad, K.S. Mohana, *Core EP inverse*, Linear Multilinear Algebra. 62 (3) 792-802 (2014)

[37] G. Marsaglia, G.P.H Styan, *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Linear Multilinear Algebra. 2 269-292 (1974)

[38] L.S. Meng, *The DMP inverse for rectangular matrices*, Filomat. 31 (19) 6015-6019 (2017)

[39] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM. Universidad Estatal de Carolina del Norte (2000)

[40] S.K. Mitra, P. Bhimasankaram, Saroj B. Malik, *Matrix partial orders, shorted operators and applications*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2010.

[41] E.H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bulletin of the American Mathematical Society. 26 394-395 (1920)

[42] D. Mosić, *The CMP inverse for rectangular matrices*, Aequaetiones Math. 92 649-659 (2018)

[43] D. Mosić, *Weighted core-EP inverse of an operator between Hilbert spaces*, Linear Multilinear Algebra. 67 (2) 278-298 (2019)

[44] D. Mosić, M.Z Kolundzija, *Weighted CMP inverse of an operator between Hilbert spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. 113 2155-2173 (2019)

[45] D. Mosić, D. Zhang, *Weighted weak group inverse for Hilbert space operators*, Front. Math. China. 15 709?726 (2020)

[46] D. Mosić, P. Stanimirović, V. Katsikis, *Solvability of some constrained matrix approximation problems using core-EP inverses*, Comp. Appl. Math. 39 (2020) https://doi.org/10.1007/s40314-020-01360-y

[47] V. Orquera, *Sobre la inversa generalizada core y algunos resultados relacionados*, Tesis de Maestría, Universitat Politècnica de València, 2019.

[48] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 51 466-473 (1955)

[49] D.S. Rakić, *A note on Rao and Mitra's constrained and Drazin's* (b, c) *inverse*, Linear Algebra and its Applications. 523 102-108 (2017)

[50] D.S. Rakić, D.S. Djordjevic, *Core inverse and core partial order of Hilbert space operators*, Appl. Math. Comput. 244 283-302 (2014)

[51] F. Soleimani, P.S. Stanimirović, F. Soleymani,*Some marix iterations for computing generalized inverses and balancing chemical equations*, Algorithms. 8 982-998 (2015)

[52] P.S. Stanimirović, V.N. Katsikis, H. Ma, *Representations and properties of the* W*-weighted Drazin inverse*, Linear Multilinear Algebra. 65 (6) 1080-1096 (2017)

[53] N. Thome, Y. Wei, *Generalized inverses and a block-rank equation*, Appl. Math. Comput. 141 471-476 (2003)

[54] H. Wang, *Core-EP decomposition and its applications*, Linear Algebra Appl. 508 289-300 (2016)

[55] H. Wang, J. Chen, *Weak group inverse*, Open Math. 16 1218-1232 (2018)

[56] X. Wang, H. Ma, P.S. Stanimirović, *Recurrent neural network for computing the* W*-weighted Drazin inverse*, Appl. Math. Comput. 300 1-20 (2017)

[57] J. Wanlin, Z. Kezheng, *Revisiting of the* BT*-inverse of matrices*, AIMS Mathematics. 6 (3) 2607?2622 (2020)

[58] Y. Wei, *A characterization and representation of the Drazin inverse*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 17 (4) 744-747 (1996)

[59] Y. Wei, *A characterization and representation of the generalized inverse* $A^{(2)}_{T,S}$, Linear Algebra and its Applications. 280 87-96 (1998)

[60] Y. Wei, *A characterization for the W-weighted Drazin inverse and a Crammer rule for the W-weighted Drazin inverse solution*, Appl. Math. Comput. 125 303-310 (2002)

[61] Y. Wei, *Integral Representation of the W-Weighted Drazin Inverse.* Appl. Math. Comput. 144 3-10 (2003)

[62] G. Wang, Y. Wei, S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, Nueva York, (2004).

[63] G.Z.Xiao, B.Z. Shen, C.K. Wu, C.S. Wong, *Some spectral techniques in coding theory*, Discrete Math. 87 181-186 (1991)

[64] G.F. Zhuang, J.L. Chen, D.S. Cvetkovic-Ilic, Y.M. Wei, *Additive property of Drazin invertibility of elements in a ring*, Linear Multilinear Algebra. 60 901-910 (2012).

[65] K.Z. Zu, Y.J Chenga, *The new revisitation of core EP inverse of matrices*, Filomat. 33 (10) 3061-3072 (2019)