



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Aplicadas y Calidad

Gráficos de control para la monitorización conjunta del
tiempo entre eventos y su amplitud con amplitudes
multidimensionales

Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos, Mejora de
Procesos y Toma de Decisiones

AUTOR/A: Secaduras López, Nuria

Tutor/a: Giner Bosch, Vicent

Cotutor/a externo: CASTAGLIOLA, PHILIPPE

CURSO ACADÉMICO: 2021/2022

Resumen

En este trabajo, se aborda el diseño, implementación y análisis de gráficos de control para la monitorización del tiempo entre eventos o sucesos y, al mismo tiempo, la amplitud o tamaño de dichos eventos (lo cual se conoce en inglés como "*time between events and amplitude*", TBEA). Concretamente, se estudia el caso, inédito en la literatura, en que la amplitud tiene carácter multidimensional. Esto puede ser de interés en muchos contextos reales (por ejemplo, medir el tiempo entre incendios y, al mismo tiempo, su gravedad, etc.).

Se proponen tres modelos para la monitorización conjunta del tiempo y la amplitud. Para cada uno de ellos, se obtiene de manera analítica la función de distribución del estadístico monitorizado. A partir de esto, se diseñan gráficos de control unilaterales para detectar el empeoramiento o degradación del fenómeno objeto de interés (en concreto, la disminución del tiempo entre sucesos y/o incrementos de la amplitud de dichos sucesos).

El diseño de los gráficos propuestos se implementa en lenguaje R. Posteriormente, se realizan pruebas computacionales orientadas a valorar la aptitud de estos gráficos para detectar diferentes situaciones de degradación o falta de control. De esta forma, y mediante tanto técnicas de diseño de experimentos clásicas como métodos robustos frente a las condiciones que presente la batería de pruebas generada, se puede analizar el comportamiento de los tres modelos propuestos en diversos escenarios.

Así, en base a los resultados obtenidos, se llega a conclusiones que permiten conocer qué parámetros son más influyentes en el rendimiento del gráfico y cuál de los tres enfoques planteados resulta más conveniente en función del contexto y de los requerimientos del usuario final.

Por último, se ejemplifica la aplicación del gráfico de control diseñado mediante la simulación de un caso práctico basado en datos reales.

Palabras clave: Gráficos de control; tiempo entre eventos; procesos multivariantes; distribución gamma; distribución Weibull.

Abstract

In this paper, we address the design, implementation and analysis of control charts for joint monitoring the time between events or occurrences and the amplitude or size of these events (known as *time between events and amplitude*, TBEA). In particular, we study the case —unprecedented in the literature— where amplitude has a multidimensional character. This may be of interest in many real-world contexts (e.g. measuring the time between fires and, at the same time, their severity, etc.).

We propose three models for the joint monitoring of time and amplitude. For each of them, the distribution function of the monitored statistic is obtained analytically. From this, one-sided control charts are designed to detect the worsening or deterioration of the phenomenon of interest (specifically, the decrease in the time between events and/or increases in the amplitude of these events).

The design of the proposed graphs is implemented in software R. Subsequently, computational tests are performed to evaluate the aptitude of these graphs to detect different situations of degradation or lack of control. In this way, and by means of classical design of experiments techniques and robust methods that consider the conditions presented in the battery of tests generated, the behaviour of the three proposed models can be analysed in different scenarios.

Therefore, based on the results obtained, conclusions can be drawn as to which parameters are most influential in the performance of the graph and which of the three proposed approaches is most suitable depending on the context and the requirements of the end user.

Finally, we present an example about the application of the designed control chart by simulating a practical case based on real data.

Keywords: Control charts; time between events; multivariate processes; gamma distribution; Weibull distribution.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes y motivación	1
1.2. Objetivos y alcance	2
1.3. Estructura del trabajo	3
2. Marco teórico	4
2.1. Control estadístico de la calidad	4
2.1.1. Gráficos de control	5
2.1.2. Medidas de desempeño de un gráfico de control	6
2.1.3. Gráficos de control unilaterales	7
2.2. Gráficos de control para TBE	7
2.3. Gráficos de control para TBEA	8
3. Metodología	10
3.1. Gráfico de control TBEA. Amplitud multidimensional	10
3.2. Distribución en el muestreo de Z_1 , Z_2 y Z_3	13
3.2.1. Distribución en el muestreo de M'	14
3.2.2. Distribución en el muestreo de T'	16
3.2.3. Función de distribución del estadístico Z_1	16
3.2.4. Función de distribución del estadístico Z_2	18
3.2.5. Función de distribución del estadístico Z_3	19
3.3. Obtención del límite de control del gráfico	20
3.4. Medidas de desempeño del gráfico	21
4. Experiencias numéricas	23
4.1. Implementación en lenguaje R	23
4.2. Diseño de Experimentos	27
4.2.1. Resultados de la Etapa 1	28
4.2.2. Resultados de la Etapa 2	30
4.3. Etapa 3: Resultados y discusión	31
4.3.1. Análisis descriptivo	32
4.3.2. ANOVA	43
4.3.3. Validación del ANOVA paramétrico	45

4.3.4. Inferencia sobre los factores: Games-Howell	47
5. Ejemplo numérico	51
5.1. Proceso bajo control	51
5.2. Proceso fuera de control	53
5.2.1. Incremento en la amplitud	53
5.2.2. Disminución en el tiempo	54
6. Conclusiones y trabajo futuro	56
6.1. Conclusiones	56
6.2. Trabajo futuro	57
Anexos	60
A. Algoritmos	61
A.1. Cálculo límite de control superior	61
A.2. Cálculo del rendimiento del gráfico	61
A.3. Resultados y discusión	62
A.4. Ejemplo numérico	62
B. Tablas y gráficos	63
B.1. Tablas de datos completas	63
B.1.1. Límites de control superiores (UCL)	63
B.1.2. Medidas del rendimiento del gráfico	63
B.2. Gráficas de interacciones	64
C. Games-Howell	70
C.1. Combinaciones dos a dos niveles del factor	70
C.2. Combinaciones entre los estadísticos	78

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes y motivación

Un gráfico de control es una de las técnicas más eficaces que se puede utilizar para la supervisión estadística de procesos, los cuales pueden tratarse de procesos industriales relacionados con la fabricación o la ocurrencia de eventos no deseados. Sin embargo, otro posible uso de estos gráficos se da en procesos geológicos (terremotos, tsunamis) o en aplicaciones sanitarias (epidemiología).

La definición de un evento E depende de la situación considerada. Por ejemplo, en la industria manufacturera, significa la aparición de un producto no conforme; en la ingeniería de la fiabilidad, significa el fallo de un sistema específico, etc. En general, si se produce un acontecimiento no deseado, debemos tener en cuenta dos características importantes:

- El intervalo de tiempo T , medido por la duración entre dos sucesivas ocurrencias del evento E .
- La amplitud X (coste, número de víctimas, etc.), que refleja la gravedad del efecto correspondiente.

Una disminución del tiempo T y/o un aumento de la amplitud X conducen a una consecuencia negativa, peligrosa o desastrosa. Por ello, tanto el tiempo entre eventos como la amplitud necesitan ser supervisados simultáneamente con gráficos de control denotados como gráficos TBEA (*time between events and amplitude*).

El primer problema de monitorización de un gráfico TBE (*time between events*), el cual no tenía en cuenta la amplitud entre los eventos considerados, lo planteó Calvin (1983) [1]. En este trabajo, se pretendía encontrar un método para mejorar el rendimiento de los gráficos de control de atributos tradicionales, conocidos

por su ineficacia en el caso de procesos de alta calidad.

Sin embargo, en muchos casos reales, tanto el tiempo entre dos sucesivas ocurrencias de un evento como la amplitud correspondiente, deben ser controlados simultáneamente. No fue hasta 2009 cuando Wu et al. [2] planteó monitorizar de manera conjunta el tiempo T entre eventos E y su amplitud X , apareciendo entonces por primera vez el término de gráfico TBEA.

En todos los trabajos realizados hasta la fecha sobre este tipo de gráficos de control, se plantea que el tiempo entre eventos T y la amplitud X son variables aleatorias univariantes. En cambio, esta suposición no resulta razonable si tenemos en cuenta que la amplitud puede estar condicionada por muchas características. Por ejemplo, los daños provocados por un huracán se pueden cuantificar en función del número de muertos y el coste de las reparaciones. De la misma forma, los daños causados por una erupción volcánica se pueden medir en base a la superficie cubierta por la lava y los costes de destrucción, etc. Esto nos lleva a la necesidad de plantear un gráfico TBEA en el que se considere la amplitud X como un vector aleatorio multivariante.

En la presente memoria nos proponemos extender el trabajo preliminar de Rahali et al. (2019) [3], estudiando el rendimiento de los gráficos de Shewhart TBEA unilaterales para el caso en el que la amplitud pueda ser multidimensional. Para ello, se plantean tres modelos basados en tres estadísticos diferentes denominados Z_1 , Z_2 y Z_3 que dependen tanto del tiempo entre diversos sucesos como de la amplitud de los mismos.

1.2. Objetivos y alcance

El objetivo general de este trabajo consiste en desarrollar y validar un gráfico de control para la monitorización conjunta del tiempo entre eventos o sucesos y la amplitud en un proceso multivariante.

Más concretamente, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Realizar el desarrollo y estudio de las propiedades teóricas necesarias para la construcción del gráfico de control TBEA en el caso en el que la amplitud sea multidimensional.
- Desarrollar e implementar informáticamente a través del *software R* las herramientas de control de calidad planteadas.
- Validar la eficiencia de dicho gráfico a través del análisis y comparación numérica de los tres métodos propuestos distintos.

Cabe decir que abordaremos el caso en el que la amplitud se supone una variable continua normal multivariante. A su vez, asumiremos que el tiempo entre sucesos y la amplitud se comportan de manera independiente desde el punto de vista estadístico. Con respecto a los ejemplos numéricos, se desarrollarán para el caso en el que el tiempo T sigue una distribución gamma o Weibull, y la amplitud X se trata de una variable bidimensional.

1.3. Estructura del trabajo

A partir de este punto, el trabajo consta de cinco capítulos más.

En el segundo capítulo, se introducen los conceptos teóricos necesarios para la comprensión de la propuesta de trabajo.

En el tercer capítulo, se presenta y se desarrolla la metodología realizada en el trabajo con el fin de obtener un gráfico de control que monitorice de manera conjunta el tiempo entre eventos y su amplitud. En concreto, se obtienen las expresiones analíticas de las funciones de distribución correspondientes a los estadísticos considerados, se detalla el procedimiento para el cálculo del límite de control del gráfico y se describen las medidas utilizadas para el cálculo del desempeño del gráfico.

En el cuarto capítulo, se muestran los resultados de aplicar la metodología planteada para diferentes condiciones iniciales fijadas, y se evalúa el efecto que provocan los diversos factores sobre la medida del rendimiento del gráfico.

En el quinto capítulo, se realiza un ejemplo numérico de un gráfico de control donde se aplica la metodología planteada para el cálculo del límite de control y se estima la eficiencia del mismo.

En el sexto y último capítulo, se muestran las conclusiones que pueden extraerse del trabajo realizado.

Capítulo 2

Marco teórico

Antes de comenzar con el desarrollo de la metodología, se introducen algunos fundamentos teóricos necesarios para la comprensión de la misma. En particular, en este capítulo se presentan conceptos básicos del control estadístico de la calidad, los gráficos de control y el cálculo del desempeño de estos. Además, se comentan los aspectos de estudios previos realizados sobre los gráficos de control TBE y TBEA que se tomarán como referencia en el presente trabajo.

2.1. Control estadístico de la calidad

El control estadístico de la calidad tiene sus orígenes en la Revolución Industrial (1760-1840), donde aumentó considerablemente la demanda de determinados productos, surgiendo de esta forma la producción en línea junto con nuevos sistemas de fabricación. En este punto, se produjo una disminución de la calidad del producto elaborado, ya que los requerimientos de producción en masa descuidaban las características que satisfacían las necesidades de los consumidores.

En la década de 1920, Walter Shewhart indicó que la variación en la fabricación de productos era inevitable. Sin embargo, desarrolló una gráfica simple que permitía determinar cuándo la variación en un proceso de fabricación excedía los límites aceptables, la cual denominó como *carta de control*. [4]

A día de hoy, definimos el *control estadístico de procesos* como el área que permite la aplicación de técnicas estadísticas al control de calidad en procesos industriales, administrativos o de servicios. Su objetivo principal consiste en reducir o suprimir sistemáticamente la variabilidad de los procesos, para mejorar la calidad de los productos o servicios, o como apoyo en la toma de decisiones dentro de una organización. Además, es fácil de usar, tiene un impacto significativo y puede aplicarse a cualquier proceso. [5]

Las siete herramientas principales que utiliza el control estadístico de procesos, son: el histograma o diagrama de tallo y hoja, la hoja de control, el gráfico de Pareto, el diagrama de causa y efecto, el diagrama de concentración de defectos, el diagrama de dispersión, y el gráfico de control. De aquí en adelante, nos centramos en desarrollar la última de las herramientas mencionadas.

2.1.1. Gráficos de control

Los gráficos de control se crearon a partir de Walter A. Shewhart, es por esto que también se conocen como diagramas de Shewhart. Estas representaciones, suponen una de las herramientas más útiles durante el proceso de fabricación de un producto o de prestación de un servicio para mejorar la calidad y la productividad. Se basan en la monitorización de un estadístico muestral a lo largo del tiempo, con el fin de asegurar la estabilidad y si el comportamiento del proceso es predecible o si, por el contrario, es necesario analizar o corregir alguna variación. Más concretamente, los gráficos de control pueden ser utilizados para la detección rápida de causas asignables, la estimación de los parámetros del proceso de producción o la obtención de información para la mejora del proceso.

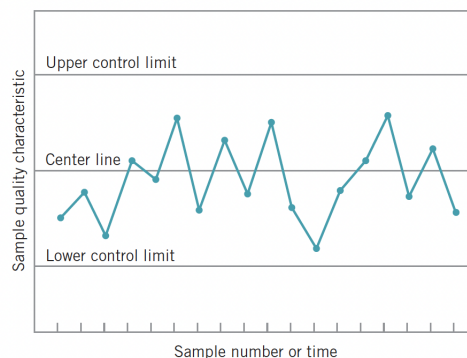


Figura 2.1: Ejemplo típico de gráfico de control. (Montgomery, 2012)

En la Figura 2.1 podemos ver un ejemplo típico de un gráfico de control. Se trata de una representación gráfica de una característica de calidad que se ha medido o calculado a partir de una muestra. Este gráfico contiene una línea central (*center line*, CL) que representa el valor medio de la característica de calidad correspondiente al estado de control. Además, cuenta con otras dos líneas, denominadas límite de control superior (*upper control limit*, UCL) y límite de control inferior (*lower control limit*, LCL), respectivamente. Estos límites de control se eligen de forma que, si el proceso está bajo control, la mayor parte de los puntos de la muestra se sitúen entre ellos. Debe entenderse por proceso *bajo control* (o proceso *estable*) aquel cuya característica de calidad objeto de

estudio presenta una distribución de probabilidad constante a lo largo del tiempo.

Mientras que los puntos se encuentran dentro de los límites de control, se asume que el proceso está bajo control. Por el contrario, el hecho de que un punto se sitúe fuera de estos límites, se considera una *señal de falta de control*; esto requiere una investigación y una acción correctiva para encontrar y eliminar la causa o causas asignables o no aleatorias responsables de este comportamiento. Así, el uso sistemático de un gráfico de control es una excelente manera de reducir la variabilidad. [5]

Nótese la relación existente entre este tipo de representaciones gráficas y los contrastes de hipótesis. Para cada punto del gráfico obtenido a partir de una nueva muestra se está contrastando la hipótesis de que el proceso se encuentra bajo el estado de control estadístico. Contamos así con el riesgo de *error de tipo I* (probabilidad de concluir que el proceso está fuera de control cuando no lo está, también conocido como *tasa de falsas alarmas*), y el riesgo de *error de tipo II* (probabilidad de concluir que el proceso está bajo control cuando no lo está).

2.1.2. Medidas de desempeño de un gráfico de control

Una forma de evaluar el rendimiento de un gráfico de control es a través de la *longitud promedio por racha* o ARL (*average run length*). Esta medida representa el promedio de puntos que deben trazarse en el gráfico antes de que el primero salga fuera de los límites de control. En un gráfico de Shewhart, en el que las muestras tomadas se consideran de tamaño constante e independientes entre sí, el ARL se puede calcular a través de la siguiente fórmula:

$$ARL = \frac{1}{p},$$

donde p es la probabilidad de que cualquier punto supere los límites de control. [5]

De esta forma, si el proceso se encuentra bajo control, esta probabilidad p se corresponde con la tasa de falsas alarmas (α). Así, el ARL *bajo control* se define como:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Por el contrario, cuando el proceso se encuentra fuera de control, la probabilidad de que el punto salga fuera del gráfico es la probabilidad de detectar un cambio de cierta magnitud en el proceso; es decir, lo que se conoce como la *potencia* del gráfico, equivalente a la probabilidad complementaria a cometer un error de tipo II (β). Por tanto, se tiene que:

$$ARL_1 = \frac{1}{Potencia} = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Por otro lado, cuando el intervalo entre muestras no es constante en el tiempo, es más conveniente medir la aptitud del gráfico de control en términos del *tiempo promedio hasta la señal*, lo que se conoce como ATS (*average time to signal*) y se calcula con la siguiente expresión:

$$ATS = ARL \cdot t,$$

donde t se corresponde con la medida de tiempo que transcurre entre muestras consecutivas.

2.1.3. Gráficos de control unilaterales

Lo más usual resulta estar interesados en detectar tanto aumentos como disminuciones del valor de la característica de calidad que estamos controlando, de ahí el uso de un límite de control superior y uno inferior en el gráfico de control. Sin embargo, existen gráficos que solo tienen uno de los dos límites de control.

La ventaja de diseñar un gráfico con un único límite de control es que se tiene mayor potencia, es decir, menor ARL, para detectar los cambios que puedan surgir. Sin embargo, evidentemente, es un gráfico incapaz de detectar cambios en la otra dirección puesto que no presenta límite de control en ese sentido. [6]

Un posible ejemplo en el que nos puede interesar utilizar este tipo de gráficos es aquel que monitoriza la resistencia a la rotura de un pieza concreta. En este caso, una disminución de la resistencia supone un problema de calidad. En cambio, un aumento de la resistencia indica una mejora que, por tanto, no nos interesa detectar.

2.2. Gráficos de control para TBE

Como ya hemos comentado con anterioridad, los gráficos de control para monitorizar el tiempo entre eventos (TBE) tienen su origen en 1983, cuando Calvin [1] pretendía mejorar los gráficos de control de atributos tradicionales, los cuales eran ineficaces para controlar procesos con una proporción de defectos o número de piezas defectuosas muy pequeña y en los que la aparición de productos no conformes era muy rara. Para ello, propuso controlar el número acumulado de artículos conformes entre dos no conformes. Este trabajo fue estudiado por primera vez por Lucas (1985) [7] y por Vardeman y Ray (1985) [8], los cuales proponen nuevos gráficos de control para supervisar los datos del TBE en este

tipo de procesos.

Posteriormente, el control estadístico del TBE ha sido objeto de estudio de varios investigadores. Chan et al. (2000) [9] y Xie et al. (2002) [10] realizaron un estudio del gráfico exponencial TBE. Más adelante, Bourke (2001) [11] diseñó un gráfico geométrico de sumas acumuladas (*cumulative sum*, CUSUM) para controlar los datos de TBE. A su vez, Borrór et al. (2003) [12] y Shafae et al. (2014) [13] también investigaron un gráfico CUSUM exponencial de TBE. Xie et al. (2010) [14] estudiaron la aplicación de los gráficos de control TBE para la gestión sanitaria. Un segundo modelo económico fue desarrollado por Zhang, Xie, et al. (2011) [15] para analizar un gráfico de control TBE exponencial basado en el desplazamiento aleatorio del proceso. Ese mismo año, se propuso un diseño de gráficos de control TBE con reglas de ejecución por primera vez por Cheng y Chen (2011) [16]. Por otro lado, Qu et al. (2014) [17] estudiaron algunos gráficos de control TBE para la inspección por muestreo. Ali et al. (2016) [18] introdujeron una visión general de los procesos de control de alta calidad. Un gráfico de control de medias móviles ponderadas exponencialmente (*exponentially weighted moving average*, EWMA) unilateral para supervisar el tiempo entre eventos ha sido propuesto por Chakraborty et al. (2017) [19]. Otro ejemplo se da en 2018, cuando Huang et al. [20] desarrollaron dos esquemas EWMA no paramétricos para monitorizar gráficos de TBE y la magnitud de los eventos.

2.3. Gráficos de control para TB EA

La frecuencia y la amplitud son características importantes de un evento. Lo más habitual, resulta que la frecuencia se mida como la duración entre dos ocurrencias sucesivas de un acontecimiento concreto en una escala de tiempo, y su amplitud refleje la intensidad, tamaño o gravedad de dicho acontecimiento. Por lo tanto, el efecto de un evento depende tanto del intervalo de tiempo T entre dos sucesos consecutivos como de la amplitud X de cada suceso. En el control estadístico de procesos tradicional, los gráficos \bar{X} & R y \bar{X} & S están diseñados para controlar la media y la variabilidad de una variable. Por ello, el primer trabajo que consta sobre los gráficos de control para TB EA (*time between events and amplitude*), lo realizaron Wu et al. (2009) [2] proponiendo un esquema combinado de T & X para supervisar el tiempo a través de un gráfico TBE y la amplitud mediante un gráfico X .

Posteriormente, se han desarrollado varios gráficos de control TB EA, véase Wu et al. (2010) [21], Qu et al. (2013) [22], Qu et al. (2014) [23], Qu et al. (2018) [24]. Resulta interesante el trabajo realizado por Ali y Pievatolo (2018) [25], quienes introdujeron un nuevo gráfico de control basado en el supuesto de un proceso de renovación con recompensas, donde la recompensa representa la amplitud. Por

otro lado, Qu et al. (2017) [26] propusieron un gráfico CUSUM (denominado gráfico UCUSUM) para controlar simultáneamente el tamaño N y el intervalo de tiempo T de un evento, suponiendo N una variable aleatoria discreta de Poisson.

Una observación importante sobre los artículos que tratan de gráficos de control TBEA es que la mayoría de ellos asumen que:

- El tiempo entre eventos T sigue una distribución exponencial.
- La amplitud X sigue una distribución normal.
- El estadístico para controlar simultáneamente T y X es la relación $\frac{X}{T}$.

Sin embargo, la base de nuestra propuesta se encuentra en el estudio realizado por Rahali et al. (2019) [3], donde se propone una comparación de la eficacia de tres estadísticos diferentes para controlar conjuntamente el tiempo y la magnitud en el caso en el que esta última es unidimensional. En particular, las hipótesis que se asumen en ese trabajo, las cuales tomaremos como referencia en la presente memoria, son las dos siguientes:

- Existen cuatro posibles distribuciones (gamma, lognormal, normal y Weibull), tanto para el tiempo T como para la amplitud X .
- Se consideran tres estadísticos diferentes Z_1 , Z_2 y Z_3 para controlar simultáneamente T y X , los cuales se basan en una versión estandarizada de X y T .

Capítulo 3

Metodología

Tras haber expuesto en el capítulo anterior los conceptos teóricos previos a tener en cuenta, nos disponemos a desarrollar la metodología llevada a cabo con el fin de diseñar un gráfico de control que permita monitorizar de manera conjunta el tiempo entre eventos y su amplitud, siendo esta multidimensional. Más concretamente, en este capítulo nos centraremos en el primer objetivo expuesto al principio de la memoria, a través de la obtención de las expresiones teóricas necesarias para la monitorización del tiempo y la amplitud entre eventos de gráficos de control TBEA en procesos multivariantes. Además, indicaremos la manera en la que se puede medir la eficiencia de este tipo de gráficos.

3.1. Gráfico de control TBEA. Amplitud multidimensional

En este punto nos disponemos a plantear en qué consiste el gráfico de control TBEA para amplitudes multidimensionales, explicando las hipótesis de partida que asumiremos y detallando qué se pretende monitorizar a través de este gráfico.

En primer lugar, entendemos que D_0, D_1, D_2, \dots , se corresponden con las duraciones que presenta el acontecimiento del evento E a lo largo del tiempo. En general, vamos a denotar por $D_i, i = 0, 1, 2, \dots$, a los tiempos en los que está ocurriendo un evento E específico que se considera negativo. Consecuentemente, $T_i = D_i - D_{i-1}, i = 1, 2, \dots$, comprenderán los intervalos de tiempo entre dos ocurrencias consecutivas del suceso E . Por lo tanto, se tiene que $T_i, i = 1, 2, \dots$ son variables aleatorias continuas definidas en el intervalo $[0, +\infty)$. A continuación, introducimos la notación que utilizaremos en relación con estas variables:

- Denotamos μ_T y σ_T a la media y la desviación típica de T_i , respectivamente. De esta forma, cuando el proceso está bajo control se tendrá que $\mu_T = \mu_{T0}$,

3.1. GRÁFICO DE CONTROL TBEA. AMPLITUD MULTIDIMENSIONAL11

$\sigma_T = \sigma_{T_0}$ y, por el contrario, cuando el proceso está fuera de control,
 $\mu_T = \mu_{T_1}$, $\sigma_T = \sigma_{T_1}$.

- $F_T(t|(\mu_T, \sigma_T))$ se corresponderá con la función de distribución acumulativa de T (*cumulative distribution function*, CDF), la cual dependerá de los parámetros (μ_T, σ_T) , que podrán estar bajo o fuera de control. De forma abreviada, denotaremos al vector de parámetros $(\mu_T, \sigma_T) = \boldsymbol{\theta}_T$; así, $\boldsymbol{\theta}_T = \boldsymbol{\theta}_{T_0}$ o $\boldsymbol{\theta}_T = \boldsymbol{\theta}_{T_1}$.
- $f_T(t|(\mu_T, \sigma_T))$ se asociará a la función de densidad de probabilidad de T (*probability distribution function*, PDF), la cual también dependerá de los parámetros $(\mu_T, \sigma_T) = \boldsymbol{\theta}_T$, que podrán estar bajo o fuera de control.

Entonces, en este trabajo se considerará que T es una variable aleatoria continua que sigue una distribución concreta la cual se mantiene constante a lo largo del tiempo; es decir, que es estable.

Por otro lado, denotamos $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, a los vectores de magnitud asociados al suceso E que ocurre en el tiempo D_1, D_2, \dots . Con respecto a las amplitudes, vamos a considerar las siguientes hipótesis de partida:

- Las magnitudes \mathbf{X}_i , $i = 1, 2, \dots$, se asumen independientes con respecto a los tiempos T_i , $i = 1, 2, \dots$.
- En este trabajo, se supondrá que, para cada $i = 1, 2, \dots$,

$$\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,p})^T \sim MNOR(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X).$$

Es decir, que la amplitud sigue una distribución normal multivariante en \mathbb{R}^p , para un $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Nótese, además, que estamos suponiendo que la amplitud puede tomar valores negativos, al contrario que T_i (si bien, en la práctica, que la amplitud tome valores negativos es una situación poco probable).

Además, se tiene que $\boldsymbol{\mu}_X$ se corresponde con el vector de medias, y $\boldsymbol{\Sigma}_X$ hace referencia a la matriz de varianzas-covarianzas correspondiente. De esta forma, cuando el proceso esté bajo control se tendrá que $\boldsymbol{\mu}_X = \boldsymbol{\mu}_{X_0}$ y $\boldsymbol{\Sigma}_X = \boldsymbol{\Sigma}_{X_0}$ y, cuando el proceso esté fuera de control, $\boldsymbol{\mu}_X = \boldsymbol{\mu}_{X_1}$ y $\boldsymbol{\Sigma}_X = \boldsymbol{\Sigma}_{X_1}$.

Para hacernos una idea más clara, vemos una representación gráfica de los aspectos que estamos considerando. Hay que tener en cuenta que $D_0 = 0$ es la fecha de un evento “virtual” que no tendrá ninguna amplitud asociada.

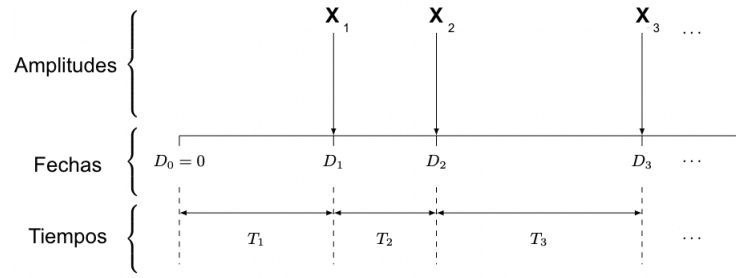


Figura 3.1: Fechas de ocurrencia $D_0 = 0, D_1, D_2, \dots$; intervalos de tiempo $T_1 = D_1 - D_0, T_2 = D_2 - D_1, \dots$; y amplitudes multidimensionales $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ de un evento negativo E .

Recordamos que el objetivo de un gráfico de control consiste en detectar un cambio en el proceso a peor. En este contexto, el gráfico de control TBEA pretende detectar una disminución significativa entre los intervalos de tiempo que miden las ocurrencias consecutivas de un evento E y/o un aumento significativo de las amplitudes correspondientes. Nótese que, en nuestro caso, en lo que respecta al intervalo de tiempo $T_i, i = 1, 2, \dots$, la situación está clara ya que se trata de una variable aleatoria univariante. Sin embargo, un aumento del vector de magnitudes \mathbf{X}_i supone un “aumento global” en las componentes de este vector. Proponemos, por tanto, resumir la información de nuestro vector de magnitudes a través del siguiente estadístico:

$$M_i = \text{mín}(\mathbf{X}_i) = \text{mín}(X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,p}), \text{ donde } i = 1, 2, \dots$$

De esta forma, contamos con una variable aleatoria unidimensional que verifica la siguiente propiedad:

$$M_i \text{ aumenta} \iff X_{i,1} \wedge X_{i,2} \wedge \dots \wedge X_{i,p} \text{ aumentan, para todo } i.$$

Cabe destacar que la utilización de este estimador resulta consistente a pesar de que contenga características tomadas en diferentes escalas, puesto que se entiende que dichas unidades de medida no varían a lo largo del proceso. Por lo tanto, basaremos nuestro gráfico de control TBEA en T_i y M_i .

Sin embargo, tal y como sugiere Rahali et al. (2019) [3], las escalas entre las variables aleatorias T_i y M_i pueden ser muy diferentes entre ellas. Por ello, con el fin de no favorecer a una variable sobre la otra, se decide trabajar con la estandarización de estas últimas, las cuales denotamos como sigue:

- $T'_i = \frac{T_i}{\mu_{T_0}}$, donde μ_{T_0} será la media de T_i cuando el proceso esté bajo control.
- $M'_i = \frac{M_i}{\mu_{M_0}}$, donde μ_{M_0} será la media de M_i cuando el proceso esté bajo control.

Suponiendo que $\mu_{T_0} \neq 0$, $\mu_{M_0} \neq 0$ para todos los casos. De esta forma, cuando el proceso está bajo control, se tendrá que:

- $E[T'_i] = E\left[\frac{T_i}{\mu_{T_0}}\right] = \frac{E[T_i]}{\mu_{T_0}} = \frac{\mu_{T_0}}{\mu_{T_0}} = 1.$
- $E[M'_i] = E\left[\frac{M_i}{\mu_{M_0}}\right] = \frac{E[M_i]}{\mu_{M_0}} = \frac{\mu_{M_0}}{\mu_{M_0}} = 1.$

Siguiendo a Rahali et al. (2019) [3], con el fin de controlar simultáneamente el tiempo T entre un evento E y su amplitud multidimensional \mathbf{X} , se propone monitorizar tres estadísticos diferentes que dependan tanto del tiempo como de la amplitud $Z = Z(T', M')$, denotados Z_1, Z_2 y Z_3 . Más concretamente, los tres estadísticos de los que estamos hablando se definen como sigue:

- $Z_1 = M' - T'.$
- $Z_2 = \frac{M'}{T'}.$
- $Z_3 = M' + \frac{1}{T'}.$

Todos ellos, satisfacen las dos propiedades siguientes:

- $Z \uparrow$ si $T' \downarrow$ o $M' \uparrow$.
- $Z \downarrow$ si $T' \uparrow$ o $M' \downarrow$.

Por último, indicamos que el gráfico de control que se plantea en este trabajo es de tipo Shewhart con tamaño de muestra constante, ya que tomamos una única observación en cada caso y todas las observaciones se consideran independientes entre ellas.

3.2. Distribución en el muestreo de Z_1 , Z_2 y Z_3

En esta sección, buscamos encontrar la expresión analítica de la función de distribución acumulativa de los tres estadísticos que queremos monitorizar en nuestro gráfico de control, Z_1, Z_2 y Z_3 . Para ello, es necesario hallar previamente la CDF de las variables aleatorias T' y M' , como indicaremos a continuación.

Cabe destacar que no se va a poder llegar a una solución cerrada para las expresiones de las funciones de distribución para cada uno de los tres estadísticos descritos. Sin embargo, estas funciones sí que podrán proporcionar resultados numéricos a través de técnicas numéricas que detallaremos más adelante.

3.2.1. Distribución en el muestreo de M'

Recordamos que $M' = \frac{M}{\mu_{M_0}}$, luego para poder averiguar la distribución en el muestreo que sigue M' , necesitamos conocer la función de distribución $F_M(m)$ y cuál es la expresión analítica de μ_{M_0} . Lo vemos:

Por hipótesis, sabemos que $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,p})^T \sim MNOR(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$ y estamos considerando que $M_i = \text{mín}(\mathbf{X}_i) = \text{mín}(X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,p})$, para todo i . Por tanto,

$$\begin{aligned} F_M(m) &:= Pr(M \leq m) = 1 - Pr(M > m) = 1 - Pr(\text{mín}(X_1, X_2, \dots, X_p) > m) = \\ &= 1 - Pr(X_1 > m, X_2 > m, \dots, X_p > m) = * \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ahora, como X_1, \dots, X_p no son independientes entre sí y considerando que $\mathbf{1}_p$ se corresponde con un vector p -dimensional en el que cada posición tiene el valor 1, se tiene que:

$$\begin{aligned} * &= 1 - Pr((X_1, X_2, \dots, X_p) > m \cdot \mathbf{1}_p) = \\ &= 1 - Pr(X_1 > m \wedge X_2 > m \wedge \dots \wedge X_p > m) = \\ &= 1 - Pr(-X_1 < -m \wedge -X_2 < -m \wedge \dots \wedge -X_p < -m) \end{aligned} \quad (3.2)$$

En este punto, denotamos $\mathbf{Y} = (-X_1, \dots, -X_p)$ y tenemos en cuenta que estamos hablando de distribuciones continuas. Entonces, finalmente:

$$\begin{aligned} F_M(m) &= 1 - Pr(\mathbf{Y} < -m \cdot \mathbf{1}_p) = 1 - Pr(\mathbf{Y} \leq -m \cdot \mathbf{1}_p) = \\ &= 1 - F_Y(-m \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{Y} = (-X_1, \dots, -X_p) = -\mathbf{X} \sim MNOR(-\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$; luego el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}_Y = (-\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$.

Consecuentemente, por definición de función de densidad de probabilidad, se tendrá que:

$$\begin{aligned} f_M(m) &:= F'_M(m) = \frac{\partial}{\partial m} (1 - F_Y(-m \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y)) = \\ &= -(-\mathbf{1}_p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_1} F_Y(-m \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y), \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} F_Y(-m \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial y_i} F_Y(-m \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta que la CDF de una distribución normal (univariante o multivariante) no tiene expresión analítica. Entonces, para hallar resultados numéricos en la expresión de la ecuación (3.4), los cálculos se realizan a través de la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} F_Y(y_1, \dots, y_i, \dots, y_p) &= \\ &= \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_{i-1}} \int_{-\infty}^{y_{i+1}} \dots \int_{-\infty}^{y_p} f_Y(t_1, \dots, t_{i-1}, y_i, t_{i+1}, \dots, t_n) dt_n \dots dt_{i+1} dt_{i-1} \dots dt_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

En particular, veamos una aplicación de la ecuación (3.4) para un caso concreto con el fin de clarificar la ecuación (3.5).

Ejemplo 3.1. Para el caso bidimensional ($p = 2$), dada $\mathbf{Y} \sim MNOR(-\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} f_M(m) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} F_Y(-m, -m) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} F_Y(-m, -m) + \frac{\partial}{\partial y_2} F_Y(-m, -m) = \\ &= \int_{-\infty}^{-m} f_Y(-m, t_2) dt_2 + \int_{-\infty}^{-m} f_Y(t_1, -m) dt_1 \end{aligned}$$

Ahora, ya podemos indicar la expresión analítica de μ_{M_0} :

$$E[M] = \mu_{M_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} m \cdot f_M(m) dm = \int_{-\infty}^{+\infty} m \cdot \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial y_i} F_Y(-m \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y). \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, desarrollamos las expresiones de $F_{M'}(m)$ y $f_{M'}(m)$, ya que son una consecuencia inmediata de las halladas previamente. En primer lugar, veamos $F_{M'}(m)$:

$$\begin{aligned} F_{M'}(m) &:= Pr(M' \leq m) = Pr\left(\frac{M}{\mu_{M_0}} \leq m\right) = Pr(M \leq m \cdot \mu_{M_0}) = \\ &= 1 - Pr(M > m \cdot \mu_{M_0}) = \\ &= 1 - Pr(X_1 > (m \cdot \mu_{M_0}) \wedge X_2 > (m \cdot \mu_{M_0}) \wedge \dots \wedge X_p > (m \cdot \mu_{M_0})) = \\ &= 1 - Pr(-X_1 < -(m \cdot \mu_{M_0}) \wedge -X_2 < -(m \cdot \mu_{M_0}) \wedge \dots \wedge -X_p < -(m \cdot \mu_{M_0})) = \\ &= 1 - Pr(\mathbf{Y} < -(m \cdot \mu_{M_0}) \cdot \mathbf{1}_p) = 1 - F_Y(-(m \cdot \mu_{M_0}) \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y), \end{aligned} \quad (3.7)$$

con $\mathbf{Y} = (-X_1, \dots, -X_p) = -\mathbf{X} \sim MNOR(-\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$.

Ahora, de forma análoga al desarrollo para $f_M(m)$, obtenemos $f_{M'}(m)$:

$$\begin{aligned}
 f_{M'}(m) &:= F'_{M'}(m) = \frac{\partial}{\partial m} (1 - F_Y(-(m \cdot \mu_{M_0}) \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y)) = \\
 &= (\mu_{M_0} \cdot \mathbf{1}_p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_1} F_Y(-(m \cdot \mu_{M_0}) \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y), \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} F_Y(-(m \cdot \mu_{M_0}) \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y) \right) = \\
 &= \mu_{M_0} \cdot \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial y_i} F_Y(-(m \cdot \mu_{M_0}) \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2.2. Distribución en el muestreo de T'

Recordando que $T' = \frac{T}{\mu_{T_0}}$ y que T es una variable aleatoria unidimensional y continua que se supone que sigue una distribución conocida determinada, se tiene que:

$$F_{T'}(t) := Pr(T' \leq t) = Pr\left(\frac{T}{\mu_{T_0}} \leq t\right) = Pr(T \leq (\mu_{T_0} \cdot t)) = F_T(\mu_{T_0} \cdot t | \boldsymbol{\theta}_T), \tag{3.9}$$

con F_T asociada a la distribución concreta que siga T y $\boldsymbol{\theta}_T = (\mu_T, \sigma_T)$. Por otro lado:

$$f_{T'}(t) := F'_{T'}(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_T(\mu_{T_0} \cdot t | \boldsymbol{\theta}_T) = \mu_{T_0} \cdot f_T(\mu_{T_0} \cdot t | \boldsymbol{\theta}_T), \tag{3.10}$$

para la expresión de f_T relacionada con la forma en la que se distribuya T .

3.2.3. Función de distribución del estadístico Z_1

Considerando todo lo anterior, ya podemos desarrollar la función de distribución acumulativa que caracteriza al estadístico $Z_1 = M' - T'$. Para ello, recordamos los siguientes aspectos a tener en cuenta para hallarla:

- $M' = \frac{M}{\mu_{M_0}}$ y $T' = \frac{T}{\mu_{T_0}}$.
- $F_{M'}(m) = 1 - F_Y(-(\mu_{M_0} \cdot m) \cdot \mathbf{1}_p | \boldsymbol{\theta}_Y)$, con $\mathbf{Y} \sim MNOR(-\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$.
- $F_{T'}(t) = F_T(\mu_{T_0} \cdot t | \boldsymbol{\theta}_T)$, con T una distribución unidimensional y continua concreta.
- Estamos suponiendo que $M' \in \mathbb{R}$ y $T' \in \mathbb{R}^+$, luego $Z_1 \in (-\infty, +\infty)$.
- Se asume independencia entre \mathbf{X} y T .

Entonces, buscamos la expresión para $F_{Z_1}(z)$:

$$\begin{aligned}
 F_{Z_1}(z) &= Pr(Z_1 \leq z) \stackrel{Z_1 = M' - T'}{=} Pr(M' - T' \leq z) = \\
 &= \int_{A = \{(m, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid m - t \leq z\}} f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) \cdot f_{T'}(t | \boldsymbol{\theta}_{T'}) d(m, t) = \quad (3.11) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\max\{0, m-z\}}^{+\infty} f_{T'}(t | \boldsymbol{\theta}_{T'}) dt f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \dagger
 \end{aligned}$$

En este punto, veamos en qué se diferencia la gráfica de la región $T' \geq M' - z$ cuando $z \geq 0$ en comparación a cuando $z < 0$, teniendo en cuenta que $T' \geq 0$:

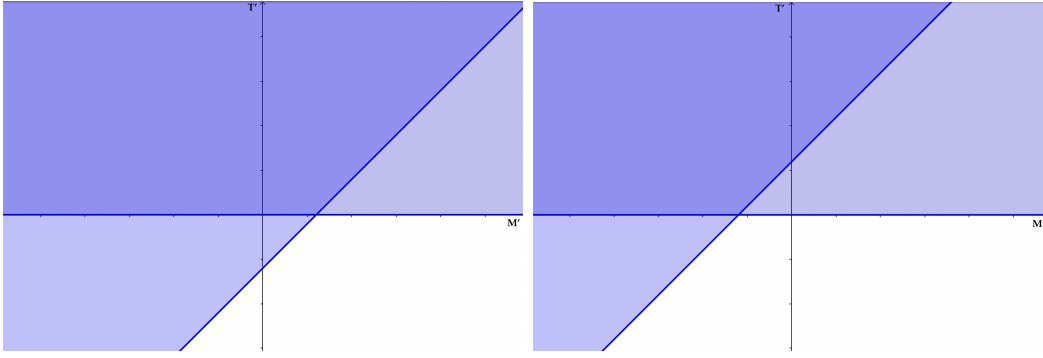


Figura 3.2: Región $T' \geq M' - z$, con $z \geq 0$ & Región $T' \geq M' - z$, con $z < 0$

Decidimos dividir la expresión \dagger en dos integrales, diferenciando entre el caso en el que $m < z$ y cuando $m \geq z$:

$$\begin{aligned}
 \dagger &= \int_{-\infty}^z \int_0^{+\infty} f_{T'}(t | \boldsymbol{\theta}_{T'}) dt f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm + \int_z^{+\infty} \int_{m-z}^{+\infty} f_{T'}(t | \boldsymbol{\theta}_{T'}) dt f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
 &= (1 - \underbrace{F_{T'}(0 | \boldsymbol{\theta}_{T'})}_0) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^z f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm}_{F_{M'}(z | \boldsymbol{\theta}_{M'})} + \int_z^{+\infty} (1 - F_{T'}(m - z | \boldsymbol{\theta}_{T'})) \cdot f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
 &= F_{M'}(z | \boldsymbol{\theta}_{M'}) + \underbrace{\int_z^{+\infty} f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm}_{1 - F_{M'}(z | \boldsymbol{\theta}_{M'})} - \int_z^{+\infty} F_{T'}(m - z | \boldsymbol{\theta}_{T'}) \cdot f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
 &= 1 - \int_z^{+\infty} F_{T'}(m - z | \boldsymbol{\theta}_{T'}) \cdot f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Es decir, se concluye que

$$F_{Z_1}(z) = 1 - \int_z^{+\infty} F_{T'}(m - z | \boldsymbol{\theta}_{T'}) \cdot f_{M'}(m | \boldsymbol{\theta}_{M'}) dm, \quad (3.13)$$

sin importar si $z \geq 0$ o $z \leq 0$.

3.2.4. Función de distribución del estadístico Z_2

Considerando las mismas hipótesis planteadas en la sección anterior, nos disponemos a hallar la expresión de la función de distribución acumulativa para el estadístico $Z_2 = \frac{M'}{T'} \in (-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 F_{Z_2}(z) &= Pr(Z_2 \leq z) = Pr\left(\frac{M'}{T'} \leq z\right) = \\
 &= \int_{A = \{(m,t) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}^+ \mid \frac{m}{t} \leq z\}} f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) \cdot f_{T'}(t|\boldsymbol{\theta}_{T'}) d(m,t) = \ddagger
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ahora, veamos en qué se diferencia la gráfica de la región $T' \geq \frac{M'}{z}$ cuando $z \geq 0$ en comparación a cuando $z < 0$, teniendo en cuenta que $T' \geq 0$:

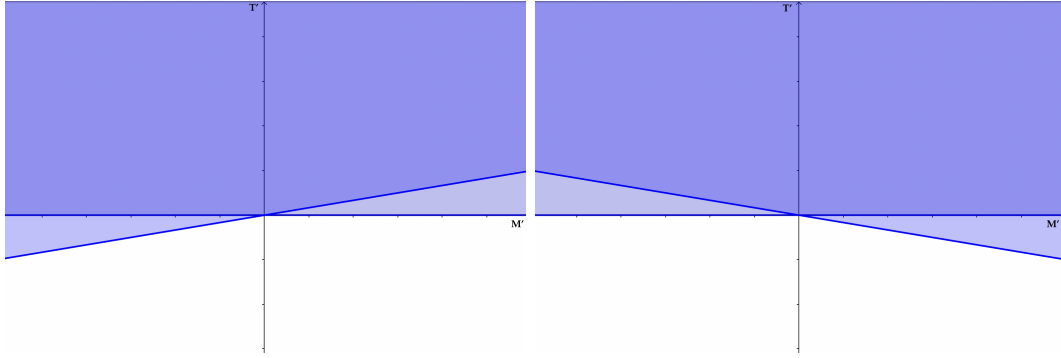


Figura 3.3: Región $T' \geq \frac{M'}{z}$, con $z \geq 0$ & Región $T' \geq \frac{M'}{z}$, con $z < 0$

Por tanto, por las gráficas obtenidas en la Figura (3.3), se decide dividir la expresión \ddagger en dos casos diferentes, en función de si $z \geq 0$ o $z < 0$:

- Caso $z \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \ddagger &= \int_{-\infty}^0 \underbrace{\int_0^{+\infty} f_{T'}(t|\boldsymbol{\theta}_{T'}) dt}_{1} f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm + \int_0^{+\infty} \int_{\frac{m}{z}}^{+\infty} f_{T'}(t|\boldsymbol{\theta}_{T'}) dt f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
 &= \int_{-\infty}^0 f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm + \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right)\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
 &= F_{M'}(0|\boldsymbol{\theta}_{M'}) + (1 - F_{M'}(0|\boldsymbol{\theta}_{M'})) - \int_0^{+\infty} F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
 &= 1 - \int_0^{+\infty} F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

- Caso $z < 0$:

$$\begin{aligned}
\ddagger &= \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{m}{z}}^{+\infty} f_{T'}(t|\boldsymbol{\theta}_{T'}) dt f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm + \int_0^{+\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} f_{T'}(t|\boldsymbol{\theta}_{T'}) dt}_{1} f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
&= \int_{-\infty}^0 \left(1 - F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right)\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm + 1 - F_{M'}(0|\boldsymbol{\theta}_{M'}) = \\
&= F_{M'}(0|\boldsymbol{\theta}_{M'}) - \int_{-\infty}^0 F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm + 1 - F_{M'}(0|\boldsymbol{\theta}_{M'}) = \\
&= 1 - \int_{-\infty}^0 F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Es decir, se concluye que:

- Si $z \geq 0$,

$$F_{Z_2}(z) = 1 - \int_0^{+\infty} F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm. \tag{3.17}$$

- Si $z < 0$,

$$F_{Z_2}(z) = 1 - \int_{-\infty}^0 F_{T'}\left(\frac{m}{z}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm. \tag{3.18}$$

3.2.5. Función de distribución del estadístico Z_3

Tomando las mismas hipótesis de partida que en los casos anteriores, busquemos la expresión de la función de distribución acumulativa del tercer estadístico a considerar $Z_3 = M' + \frac{1}{T'} \in (-\infty, +\infty)$.

$$F_{Z_3}(z) = Pr(Z_3 \leq z) = Pr\left(M' + \frac{1}{T'} \leq z\right) = \S \tag{3.19}$$

Ahora, veamos qué región de la gráfica comprende $T' \geq \frac{1}{z-M'}$ cuando $z \geq 0$ en comparación a cuando $z < 0$, teniendo en cuenta que $T' \geq 0$:

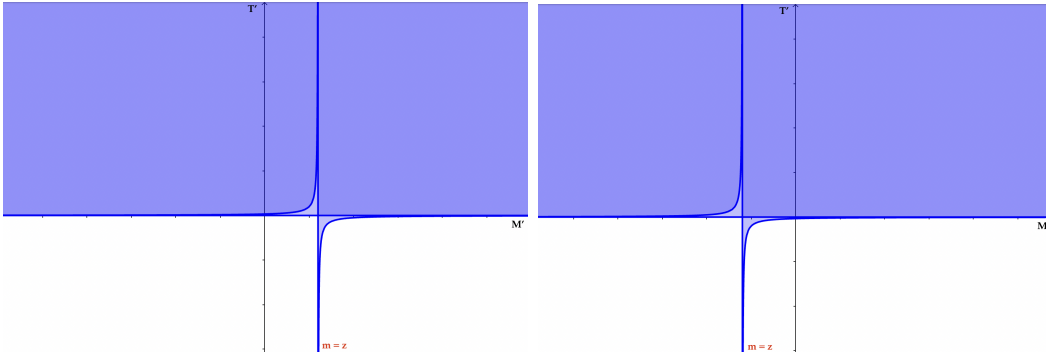


Figura 3.4: Región $T' \geq \frac{1}{z-M'}$, con $z \geq 0$ & Región $T' \geq \frac{1}{z-M'}$, con $z < 0$

Observando la Figura (3.4), podemos ver que nos encontramos con una asíntota vertical para el caso en el que $m = z$, tanto si $z \geq 0$ como si $z < 0$. Por tanto, continuamos desarrollando la expresión teniendo esto en cuenta:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} &= \int_{-\infty}^z \int_{\frac{1}{z-m}}^{+\infty} f_{T'}(t|\boldsymbol{\theta}_{T'}) dt f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
&= \int_{-\infty}^z \left(1 - F_{T'}\left(\frac{1}{z-m}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right)\right) \cdot f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
&= \int_{-\infty}^z f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm - \int_{-\infty}^z F_{T'}\left(\frac{1}{z-m}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) \cdot f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm = \\
&= F_{M'}(z|\boldsymbol{\theta}_{M'}) - \int_{-\infty}^z F_{T'}\left(\frac{1}{z-m}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) \cdot f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Es decir, se concluye que, sin importar si $z \geq 0$ o $z < 0$,

$$F_{Z_3}(z) = F_{M'}(z|\boldsymbol{\theta}_{M'}) - \int_{-\infty}^z F_{T'}\left(\frac{1}{z-m}|\boldsymbol{\theta}_{T'}\right) \cdot f_{M'}(m|\boldsymbol{\theta}_{M'}) dm. \tag{3.21}$$

3.3. Obtención del límite de control del gráfico

En primer lugar, empezamos planteando la definición que caracteriza a los límites de control inferior y superior de los gráficos TBEA, LCL_Z y UCL_Z , siendo Z cualquiera de los tres estadísticos planteados y previamente definidos, Z_1 , Z_2 y Z_3 .

$$LCL_Z = F_Z^{-1}(\alpha_L|\mu_{T_0}, \mu_{M_0}) \tag{3.22}$$

$$UCL_Z = F_Z^{-1}(1 - \alpha_U|\mu_{T_0}, \mu_{M_0}), \tag{3.23}$$

donde la notación hace referencia a los siguientes aspectos:

- $F_Z^{-1}(\dots|\mu_{T_0}, \mu_{M_0})$ es la inversa de la función de distribución de Z (Z_1 , Z_2 o Z_3), con los valores bajo control de $\mu_T = \mu_{T_0}$ y $\mu_M = \mu_{M_0}$.
- α_L y α_U se corresponden con la proporción del lado inferior y superior del error de tipo I, α , respectivamente. En particular, se definen como sigue:

$$\alpha_L = \xi \cdot \alpha$$

$$\alpha_U = (1 - \xi) \cdot \alpha$$

Siendo, a su vez, ξ un *factor de detección de potencia* definido como

$$\xi = \frac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_U}.$$

Como ya se ha comentado anteriormente, en nuestro caso nos interesa detectar aumentos en Z (Z_1 , Z_2 o Z_3). Por ello, se considera $\xi = 0$. Consecuentemente, se tiene que $\alpha_L = 0$, $\alpha_U = 1 - \alpha$. Entonces, volviendo a las ecuaciones (3.22) y (3.23), nos queda que:

$$LCL_Z = -\infty \quad (3.24)$$

$$UCL_Z = F_Z^{-1}(1 - \alpha | \mu_{T_0}, \mu_{M_0}), \quad (3.25)$$

Es decir, nuestro gráfico de control, tal y como habíamos adelantado ya, presenta un único límite de control, que será el superior UCL_Z .

Por otro lado, también hay que tener en cuenta que la función de distribución inversa $F_Z^{-1}(1 - \alpha | \mu_{T_0}, \mu_{M_0})$ con $Z \in \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ no tiene forma analítica. Sin embargo, se pueden obtener resultados numéricos a partir de *métodos de búsqueda de raíces univariantes*; en particular, utilizaremos el método híbrido de *Brent*, [27], que combina el método de la bisección y el de la secante con una interpolación cuadrática inversa. Así, buscamos que, sea $F_Z(z | \mu_{T_0}, \mu_{M_0})$, con $z \in (-\infty, +\infty)$ y dada una probabilidad $p \in [0, 1]$, se encuentre el valor de z que verifica la ecuación

$$F_Z(z | \mu_{T_0}, \mu_{M_0}) = p (= 1 - \alpha).$$

De esta forma, se tendrá que

$$(UCL_Z =) z = F_Z^{-1}(1 - \alpha | \mu_{T_0}, \mu_{M_0}).$$

Nótese que para el diseño del gráfico solamente se necesitará como entrada numérica (*input*) un valor prefijado del error de tipo I, α , pues, como es habitual, el límite de control se establece para asegurarnos de que, dentro de control, se verifique que la probabilidad de falsa alarma sea α . Más adelante explicaremos qué valor se suele fijar para esta probabilidad.

3.4. Medidas de desempeño del gráfico

A la hora de medir la eficiencia de un gráfico de control TBEA, como consecuencia de no estar monitorizando algo constante, se suelen utilizar la cantidad de unidades de tiempo que tarda el gráfico en detectar una anomalía o empeoramiento en el tiempo entre sucesos y/o la amplitud de estos sucesos, en lugar de emplear el número de puntos que se dan hasta que se produce una señal. Es decir, se utiliza el tiempo medio hasta la señal (*ATS*) como unidad de medida de la aptitud del gráfico.

El ATS bajo control, ATS_0 , es empleado como medida de la tasa de falsas alarmas. Por otro lado, cuando el proceso está fuera de control, el ATS_1 nos indica el tiempo necesario para detectar esa salida de control.

El error de tipo II, β , de los gráficos de control TBEA, se basa en el estadístico $Z \in \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ y se define como sigue:

$$\beta = F_Z(UCL_Z | \mu_T, \mu_M) - F_Z(LCL_Z | \mu_T, \mu_M). \quad (3.26)$$

Es decir, en el caso concreto del gráfico de control TBEA con amplitudes multidimensionales que estamos planteando, se tendría que:

$$\beta = F_Z(UCL_Z | \mu_T, \mu_M). \quad (3.27)$$

Además, como el gráfico TBEA es un gráfico de tipo Shewhart, su longitud de ejecución (*run length*, RL) se trata de una variable aleatoria geométrica de parámetro $1 - \beta$. Se verifica entonces que:

$$ARL = E(RL) = \frac{1}{1 - \beta} \quad (3.28)$$

Por otro lado, el tiempo hasta la señal (*time to signal*, TS), se trata de una variable aleatoria compuesta que se define como sigue:

$$TS = \sum_{l=1}^{RL} T_l, \quad (3.29)$$

donde T_l , $l \in \{1, \dots, RL\}$ hace referencia a los tiempos que transcurren entre las ocurrencias sucesivas de un mismo evento E .

De esta forma, a partir de las fórmulas de la esperanza y la varianza de una variable aleatoria compuesta, se tiene que:

$$ATS = E(TS) = E(T) \cdot E(RL) = \mu_T \cdot ARL = \frac{\mu_T}{1 - \beta} \quad (3.30)$$

Consecuentemente, cuando el proceso está bajo control, $1 - \beta = \alpha$, luego:

$$ATS_0 = \frac{\mu_{T_0}}{\alpha} \iff \alpha = \frac{\mu_{T_0}}{ATS_0} \quad (3.31)$$

Por otro lado, cuando el proceso está fuera de control, se tendrá que:

$$ATS_1 = \frac{\mu_{T_1}}{1 - \beta} \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Experiencias numéricas

En este capítulo, hablaremos de los resultados que se obtienen al aplicar la metodología expuesta en el capítulo anterior para unos casos concretos con el fin de poder medir la eficiencia del gráfico de control para monitorizar el tiempo entre eventos y su amplitud multidimensional, y ser capaces de comparar entre ellos los tres modelos que se plantean.

Para ello, se decide agrupar las tareas o fases específicas a realizar en tres etapas diferentes.

- **Etapa 1:** Calcular de forma exacta el límite de control superior del gráfico, UCL_Z , para cada uno de los tres estadísticos a monitorizar. Se consideran diversas situaciones en las que varían las entradas numéricas (*inputs*) .
- **Etapa 2:** Medir el comportamiento del gráfico de control (ATS_1) a través de Simulación Montecarlo considerando diversas posibles disminuciones en la media de la distribución del tiempo y/o aumentos en la media de al menos una de las componentes de la amplitud.
- **Etapa 3:** Estudiar el efecto que puede tener cada factor (lo cual incluye tanto parámetros de diseño del gráfico, como parámetros del proceso) en la medida del rendimiento del gráfico, ATS_1 , a través de un ANOVA sobre un diseño de experimentos con factores cruzados y mediante pruebas *post-hoc* de Games-Howell. A su vez, analizar cuál de los tres gráficos diseñados resulta más apto en función de la situación que se esté produciendo.

4.1. Implementación en lenguaje R

Basándonos en la propuesta explicada en el capítulo (3), procedemos a detallar en qué consisten las experiencias numéricas realizadas y qué cálculos son necesarios para poder llevarlas a cabo. Estas pruebas se desarrollan en su mayor

parte en *software estadístico R*, aunque también se hará uso del *software Mathematica*.

En primer lugar, hay que tener en cuenta los tipos de entradas numéricas (*inputs*) con los que vamos a contar:

- Con respecto al caso considerado como bajo control, con el fin de calcular el límite de control superior, UCL_Z , para Z_1, Z_2 y Z_3 , y recordando la ecuación (3.25) correspondiente, contaremos con las siguientes entradas:
 - Distribución que sigue la variable aleatoria T .
 - Media bajo control de la variable T , μ_{T_0} .
 - Desviación típica bajo control de la variable T , σ_{T_0} .
 - Vector de medias bajo control de la variable \mathbf{X} , $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}_0} = (\mu_{X_{10}}, \mu_{X_{20}}, \dots, \mu_{X_{p0}})$.
 - Vector de desviaciones típicas bajo control de la variable \mathbf{X} , $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{X}_0} = (\sigma_{X_{10}}, \sigma_{X_{20}}, \dots, \sigma_{X_{p0}})$.
 - Vector de coeficientes de correlación para cada par de componentes de \mathbf{X} , $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \dots, \rho_{1,p}, \dots, \rho_{p-1,p})$. Es decir, $\rho_{1,2}$ nos indica el nivel de correlación existente entre las componentes X_1 y X_2 del vector de amplitudes \mathbf{X} , y así sucesivamente.
 - Valor del parámetro de diseño del gráfico, ATS_0 .
- En cuanto al caso considerado como fuera de control, con el fin de medir el tiempo que tarda el gráfico en detectar un determinado cambio, ATS_1 , se plantean las siguientes variaciones:
 - Como nos interesa detectar disminuciones en el tiempo entre eventos E , se consideran valores de $\delta_T = \frac{\mu_T}{\mu_{T_0}}$ que supongan disminuciones en la media de T fuera de control con respecto a la media μ_{T_0} correspondiente.
 - Por otro lado, queremos averiguar cuándo se ha producido un incremento en el mínimo M . Consecuentemente, se busca detectar un incremento en la amplitud \mathbf{X} . Entonces, se plantean casos en los que $\delta_{X_i} = \frac{\mu_{X_i}}{\mu_{X_{i0}}}$, con $X_i \in \mathbf{X}$ para todo $i = 1, \dots, p$, suponga un aumento de la media μ_{X_i} con respecto a $\mu_{X_{i0}}$.

Cabe destacar que, en caso de encontrarnos fuera de control, los cambios que se buscan detectar suponen variaciones en el tiempo y/o en la amplitud, luego se plantearán los casos en los que solamente varíe una de las dos componentes (T , M), y el caso en el que ambas cambien.

En segundo lugar, con respecto a la distribución que sigue la variable aleatoria T , la cual recordamos que mide el tiempo que transcurre entre dos ocurrencias consecutivas de un evento negativo E , asumiremos que puede ser gamma o Weibull. La elección de estas distribuciones se debe a que son las más habituales a la hora de modelizar variables aleatorias orientadas al tiempo. Además, se tratan de distribuciones de dos parámetros, los cuales son calculados en función de las entradas que se asumen conocidas (μ_T, σ_T) , tal y como se indica en Castagliola et al. (2022) [28]. Veamos la forma en la que se pueden hallar estos valores.

- Cuando T sigue una distribución gamma, se tiene que depende de dos parámetros (k, θ) , siendo $k > 0$ el parámetro de *forma* y $\theta > 0$ el parámetro de *escala*. A su vez, esta distribución presenta:

- Media = $\mu_T = k \cdot \theta$.
- Desviación típica = $\sigma_T = \sqrt{k} \cdot \theta$.

Por lo tanto, si buscamos obtener los parámetros (k, θ) en función de (μ_T, σ_T) , tanto dentro como fuera de control, debemos resolver las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_T = \sqrt{k} \cdot \theta \implies \sigma_T = \sqrt{k} \cdot \frac{\mu_T}{k} \implies \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sigma_T}{\mu_T} \implies k = \left(\frac{\mu_T}{\sigma_T} \right)^2 \quad (4.1)$$

$$\mu_T = k \cdot \theta \implies \theta = \frac{\mu_T}{k} \xrightarrow{\text{Por ec. (4.1)}} \theta = \frac{\mu_T}{\left(\frac{\mu_T}{\sigma_T} \right)^2} = \frac{\sigma_T^2}{\mu_T} \quad (4.2)$$

- Por otro lado, cuando T sigue una distribución Weibull, se tiene que depende de los parámetros (λ, k) , con $\lambda > 0$ el parámetro de *escala* y $k > 0$ el parámetro de *forma*. Además, esta distribución presenta:

- Media = $\mu_T = \lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
- Desviación típica = $\sigma_T = \lambda \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2}$.

Por lo tanto, si buscamos obtener los parámetros (λ, k) en función de los parámetros que tenemos de entrada (μ_T, σ_T) , tanto dentro como fuera de control, debemos resolver las siguientes ecuaciones:

$$\mu_T = \lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \implies \lambda = \frac{\mu_T}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_T &= \lambda \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \implies \frac{\sigma_T}{\lambda} = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \implies \\
&\stackrel{\text{Por ec. (4.3)}}{\implies} \frac{\sigma_T \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\mu_T} = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \implies \\
&\implies \left(\frac{\sigma_T}{\mu_T}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - 1 \implies \\
&\implies \left(\frac{\sigma_T}{\mu_T}\right)^2 + 1 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Es decir, se tiene que hallar la solución al sistema de ecuaciones formado por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\mu_T}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \\ \left(\frac{\sigma_T}{\mu_T}\right)^2 + 1 &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \end{aligned} \right\} \tag{4.5}$$

Ahora, en cuanto a la distribución que sigue nuestra variable aleatoria multidimensional de amplitud \mathbf{X} , nos limitaremos a plantear el caso bidimensional ($p = 2$), aunque el desarrollo teórico en la propuesta del capítulo 3 se ha realizado para un caso genérico $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. En base a las expresiones a las que hemos llegado previamente, se necesitará conocer la distribución $\mathbf{Y} \sim MNOR(-\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$, siendo $\boldsymbol{\Sigma}_X$ la matriz de varianzas-covarianzas. Teniendo en cuenta las entradas con las que contamos, se tendrá que:

- $\boldsymbol{\mu}_Y = -\boldsymbol{\mu}_X = (-\mu_{X_1}, -\mu_{X_2})$, tanto dentro como fuera de control.
- Para hallar la matriz de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}_X$, tenemos que, por definición,

$$\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1 X_2}},$$

siendo la covarianza $\sigma_{X_1 X_2} = \sigma_{X_2 X_1} = \rho_{1,2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}$. Entonces,

$$\boldsymbol{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \rho_{1,2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \\ \rho_{1,2} \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

De esta forma, podemos calcular fácilmente la matriz $\boldsymbol{\Sigma}_X$ a partir de $\boldsymbol{\sigma}_X = (\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2})$ y $\rho_{1,2}$.

4.2. Diseño de Experimentos

En esta sección, vamos a describir en profundidad los niveles de los factores que se toman en consideración en la experiencia computacional que se lleva a cabo. En particular, nos referimos a los parámetros del diseño del gráfico y los parámetros del proceso.

Por un lado, en cuanto a parámetro del diseño del gráfico, el único a tener en cuenta es el ATS_0 . En particular, se considerará este factor al nivel $ATS_0 = 370,4$; pues se trata del valor más habitual utilizado en la literatura para este tipo de gráficos. Recordando la ecuación (3.31), sabemos que este parámetro nos permitirá obtener α .

Por otro lado, con respecto a parámetros del proceso, nos encontramos con los siguientes:

- Factor $\mu_{X_{10}}$ a 1 nivel: $\mu_{X_{10}} = 10$.
- Factor $\mu_{X_{20}}$ a 1 nivel: $\mu_{X_{20}} = 10$.
- Factor $\sigma_{X_{10}}$ a 3 niveles: $\sigma_{X_{10}} = (1; 2; 5)$.
- Factor $\sigma_{X_{20}}$ a 3 niveles: $\sigma_{X_{20}} = (1; 2; 5)$.
- Factor ρ_{X_0} a 3 niveles: $\rho_{X_0} = (-0,5; 0; 0,5)$.
- Factor distribución de T a 2 niveles: $T \sim Gamma, T \sim Weibull$.
- Factor μ_{T_0} a 1 nivel: $\mu_{T_0} = 10$.
- Factor σ_{T_0} a 3 niveles: $\sigma_{T_0} = (1; 2; 5)$.
- Factor δ_{X_1} a 4 niveles: $\delta_{X_1} = (1,1; 1,2; 1,5; 2)$. De esta forma, simulamos que los cambios en la media que se producen son incrementos.
- Factor δ_{X_2} a 4 niveles: $\delta_{X_2} = (1,1; 1,2; 1,5; 2)$. Análogamente, consideramos situaciones en las que la media aumenta en comparación con la media bajo control correspondiente.
- Factor δ_T a 4 niveles: $\delta_T = (0,5; 0,75; 0,9; 0,95)$. Así, se plantean cambios en los que la media del tiempo entre eventos sufre una disminución con respecto a la media bajo control.

De esta forma se tienen en cuenta todos los factores que pueden influir en nuestra unidad de medida de la aptitud del gráfico, el ATS_1 . Además, los niveles para cada factor han sido seleccionados de manera que sean representativos y

suficientemente distintos entre sí.

De este modo, acabamos de definir una batería de ejemplos que, desde el punto de vista del Diseño de Experimentos, representa un diseño factorial cruzado, ya que se obtiene un valor de la que se considera nuestra variable respuesta (ATS_1) para cada combinación de los factores considerados. Posteriormente, como se ha indicado ya, se utilizarán técnicas descriptivas y ANOVA para analizar los resultados de este experimento (Etapa 3).

4.2.1. Resultados de la Etapa 1

Recordamos que el objetivo de la primera etapa consiste en obtener el valor del límite de control superior (UCL_Z) para cada uno de los tres estadísticos $Z \in \{Z_1, Z_2, Z_3\}$, en las diferentes situaciones bajo control planteadas.

Inicialmente, se utilizó el *software R* para el cálculo exacto de los límites de control superiores para cada caso. Sin embargo, utilizando Simulación Monte-carlo (algoritmo en Anexo A.1), la cual consiste en obtener de manera empírica aproximaciones a distribuciones de variables aleatorias, se observaron ciertas discrepancias y se volvió a programar en *Mathematica* (algoritmo en Anexo A.1), aprovechando la mejor precisión que ofrece este software en cuanto a cálculos numéricos. Estos últimos resultados se dieron por válidos por su cercanía con la simulación.

En el Cuadro 4.1 se muestran algunos de los valores obtenidos. Para observar todos los límites de control calculados, se puede acceder a las hojas Excel correspondientes a través de los enlaces presentes en el Anexo B.1.1.

Además, al realizar las 162 combinaciones posibles de datos de entrada bajo control, nos encontramos con casos duplicados en cuanto a valores del límite de control superior cuando se producen situaciones en las que $\sigma_{X_{10}} > \sigma_{X_{20}}$. Es decir, a igualdad del resto de factores, el límite de control para el caso ($\sigma_{X_{10}} = 1, \sigma_{X_{20}} = 2$) es igual al límite de control para ($\sigma_{X_{10}} = 2, \sigma_{X_{20}} = 1$), y así sucesivamente. Se supone que esto tiene sentido debido a que no estamos considerando ninguna diferencia entre las componentes X_1 y X_2 del vector de amplitudes \mathbf{X} ; por ello, de ahora en adelante, nos limitamos a considerar los casos en los que $\sigma_{X_{10}} \leq \sigma_{X_{20}}$.

ATS_0	$\mu_{X_{10}}$	$\mu_{X_{20}}$	$\sigma_{X_{10}}$	$\sigma_{X_{20}}$	ρ_{X_0}	μ_{T_0}	σ_{T_0}	T	UCL_{Z_1}	UCL_{Z_2}	UCL_{Z_3}
370,4	10	10	1	1	-0,5	10	1	G	0,2331854	1,2755566	2,2648521
370,4	10	10	1	1	-0,5	10	1	W	0,2608461	1,3260009	2,3165238
370,4	10	10	1	1	-0,5	10	2	G	0,3794027	1,5660857	2,5514671
370,4	10	10	1	1	-0,5	10	2	W	0,4418326	1,745325	2,7336351
370,4	10	10	1	1	-0,5	10	5	G	0,7406652	3,6019312	4,5849995
370,4	10	10	1	1	-0,5	10	5	W	0,8121879	4,9241316	5,9105556
370,4	10	10	1	1	0	10	1	G	0,2485332	1,2906864	2,2778722
370,4	10	10	1	1	0	10	1	W	0,2729453	1,3375104	2,3258712
370,4	10	10	1	1	0	10	2	G	0,3889057	1,5754488	2,5569919
370,4	10	10	1	1	0	10	2	W	0,4486694	1,7519014	2,7370127
370,4	10	10	1	1	0	10	5	G	0,7462646	3,6073818	4,5859011
370,4	10	10	1	1	0	10	5	W	0,8166367	4,9282778	5,9110672
370,4	10	10	1	1	0,5	10	1	G	0,2610137	1,30311	2,2887581
370,4	10	10	1	1	0,5	10	1	W	0,2832087	1,3473353	2,3340649
370,4	10	10	1	1	0,5	10	2	G	0,3970469	1,583575	2,5618678
370,4	10	10	1	1	0,5	10	2	W	0,4546624	1,7577052	2,7400259
370,4	10	10	1	1	0,5	10	5	G	0,7512503	3,6122727	4,9320103
370,4	10	10	1	1	0,5	10	5	W	0,8206856	4,9320103	5,9115269
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	1	G	0,2834705	1,3291002	2,310291
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	1	W	0,3042627	1,3716639	2,3526395
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	2	G	0,4184712	1,6107654	2,5776553
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	2	W	0,4732343	1,7804767	2,7512763
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	5	G	0,7705675	3,6382457	4,5907112
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	5	W	0,8390135	4,9529531	5,9139045
370,4	10	10	1	2	0	10	1	G	0,3070355	1,3524202	2,3314924
370,4	10	10	1	2	0	10	1	W	0,3245672	1,3909747	2,3696034
370,4	10	10	1	2	0	10	2	G	0,4346618	1,6270453	2,587977
370,4	10	10	1	2	0	10	2	W	0,4856887	1,7925678	2,7578307
370,4	10	10	1	2	0	10	5	G	0,7809502	3,6488179	4,5924878
370,4	10	10	1	2	0	10	5	W	0,8477206	4,961111	5,9149149
370,4	10	10	1	2	0,5	10	1	G	0,3218973	1,3676864	2,3452498
370,4	10	10	1	2	0,5	10	1	W	0,3378993	1,4042501	2,3811279
370,4	10	10	1	2	0,5	10	2	G	0,4460622	1,6392595	2,5956956
370,4	10	10	1	2	0,5	10	2	W	0,4948875	1,8020524	2,7629362
370,4	10	10	1	2	0,5	10	5	G	0,7891747	3,6578619	4,5939795
370,4	10	10	1	2	0,5	10	5	W	0,8549593	4,9681909	5,9157735
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	1	G	0,4682501	1,5334574	2,4895953
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	1	W	0,4812861	1,5698454	2,5180945
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	2	G	0,5875278	1,829059	2,7206539
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	2	W	0,6294805	1,9871434	2,8650316
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	5	G	0,923809	3,9340746	4,6400669
370,4	10	10	1	2	-0,5	10	5	W	0,9868674	5,2320584	5,9446497

Cuadro 4.1: Límite de control superior (UCL) para los estadísticos Z_1 , Z_2 y Z_3

4.2.2. Resultados de la Etapa 2

Ahora, tras haber calculado el desempeño del gráfico bajo control, procedemos a mostrar los resultados de la segunda etapa, la cual consiste en evaluar la aptitud del gráfico para detectar una falta de control de diversas maneras. Recordamos que esta falta de control va a estar determinada por los diferentes valores que pueden tomar δ_{X_1} , δ_{X_2} y δ_T .

Al ejecutar el algoritmo presente en el Anexo A.2, obtenemos en primer lugar el error de tipo II, β . Una vez calculado este, siguiendo las fórmulas expuestas en el capítulo 3, se calcula la unidad de medida del rendimiento del gráfico ATS_1 para distintas situaciones. Estos resultados se han realizado a través de Simulación Montecarlo con el fin de disminuir considerablemente el tiempo computacional necesario para la realización de todas las pruebas. En este punto, recordamos que con el cálculo de los límites de control superiores en la etapa anterior, se ha comprobado que la simulación proporciona unos resultados bastante próximos a los cálculos exactos.

Como nos interesa detectar disminuciones en el tiempo entre eventos y/o incrementos en la amplitud de los mismos, se plantean tres tipos de situaciones:

- Caso $\delta_T = 1$ y $\delta_{X_i} \neq 1$, para al menos un $i = 1, 2$. Es decir, se modifica al menos un aspecto de la amplitud, sin que haya ninguna variación con respecto a la media de T .
- Caso $\delta_{X_i} = 1$, con $i = 1, 2$ y $\delta_T \neq 1$. Es decir, la media de T varía, pero no lo hace la amplitud (X_1, X_2) .
- Caso $\delta_T \neq 1$ y $\delta_{X_i} \neq 1$, para al menos un $i = 1, 2$. Es decir, se produce una salida de control tanto en el tiempo T como en la amplitud (X_1, X_2) .

Nótese que, al estar contemplando salidas de control, no se considera el caso en el que $(\delta_{X_1} = 1, \delta_{X_2} = 1, \delta_T = 1)$, ya que esto implicaría que no se ha producido ningún cambio con respecto a la situación bajo control. Por otro lado, por analogía al comentario realizado en la sección anterior sobre los casos duplicados, nos limitamos a considerar las combinaciones en las que $\sigma_{X_{10}} < \sigma_{X_{20}}$ y, cuando $\sigma_{X_{10}} = \sigma_{X_{20}}$, solamente se ejecutan los casos en los que $\delta_{X_1} \leq \delta_{X_2}$.

Mostramos a continuación algunos de los valores obtenidos, distinguiendo en tres tablas en función de si el estadístico a graficar resulta Z_1 , Z_2 o Z_3 . Omitimos las columnas relativas a los factores $ATS_0 (= 370,4)$, $\mu_{X_{10}} (= 10)$ y $\mu_{X_{20}} (= 10)$, ya que no varían en ninguna combinación. Para observar todos los ATS_1 , se pueden consultar las hojas Excel correspondientes a través de los enlaces presentes en el Anexo B.1.2.

$\sigma_{X_{10}}$	$\sigma_{X_{20}}$	ρ_{X_0}	μ_{T_0}	σ_{T_0}	T	δ_{X_1}	δ_{X_2}	δ_T	UCL_{Z_1}	β_{Z_1}	ATS_{1,Z_1}
1	2	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	0,28347046	0,919598	124,375016
1	5	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	0,46825008	0,898824	98,837669
2	5	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	0,58723881	0,936856	158,368174
1	2	0	10	1	G	1,1	1	1	0,30703549	0,925872	134,901791
1	5	0	10	1	G	1,1	1	1	0,49742988	0,90711	107,654215
2	5	0	10	1	G	1,1	1	1	0,64741398	0,942962	175,321715

Cuadro 4.2: Valores β y ATS_1 para el estadístico Z_1

$\sigma_{X_{10}}$	$\sigma_{X_{20}}$	ρ_{X_0}	μ_{T_0}	σ_{T_0}	T	δ_{X_1}	δ_{X_2}	δ_T	UCL_{Z_2}	β_{Z_2}	ATS_{1,Z_2}
1	2	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	1,32910016	0,930636	144,167003
1	5	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	1,53345738	0,92032	125,502008
2	5	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	1,64545975	0,94303	175,530981
1	2	0	10	1	G	1,1	1	1	1,3524202	0,935438	1154,889873
1	5	0	10	1	G	1,1	1	1	1,56197578	0,924226	131,971389
2	5	0	10	1	G	1,1	1	1	1,70463394	0,94839	193,760899

Cuadro 4.3: Valores β y ATS_1 para el estadístico Z_2

$\sigma_{X_{10}}$	$\sigma_{X_{20}}$	ρ_{X_0}	μ_{T_0}	σ_{T_0}	T	δ_{X_1}	δ_{X_2}	δ_T	UCL_{Z_3}	β_{Z_3}	ATS_{1,Z_3}
1	2	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	2,31029097	0,929912	142,67777
1	5	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	2,48959527	0,909138	110,05701
2	5	-0,5	10	1	G	1,1	1	1	2,60306022	0,938416	162,379839
1	2	0	10	1	G	1,1	1	1	2,33149241	0,934	151,515152
1	5	0	10	1	G	1,1	1	1	2,51728504	0,914288	116,6697778
2	5	0	10	1	G	1,1	1	1	2,66211838	0,944292	179,507432

Cuadro 4.4: Valores β y ATS_1 para el estadístico Z_3

4.3. Etapa 3: Resultados y discusión

El objetivo de esta sección consiste en analizar los resultados de la experiencia computacional con el fin de estudiar la influencia que tiene cada factor en el ATS_1 , es decir, en la medida de desempeño del gráfico de control. Para ello, comenzaremos con un análisis descriptivo en el que observaremos a través de gráficas tanto el efecto que puede tener cada factor simple sobre el ATS_1 , como

la posible existencia de interacciones entre los factores implicados; seguidamente, realizaremos un ANOVA paramétrico con el fin de corroborar las conclusiones que se derivan del análisis descriptivo; procederemos después a validar las hipótesis de este ANOVA; por último, estudiaremos la inferencia sobre los factores a través del método no paramétrico de Games-Howell.

Todo lo anterior se realiza de forma separada para los 3 enfoques considerados (Z_1, Z_2, Z_3).

4.3.1. Análisis descriptivo

En primer lugar, nos centramos en realizar un diagrama de Box-Whisker múltiple que represente todos los niveles para cada uno de los factores que se considera que pueden influir sobre el ATS_1 . Estos factores están comprendidos por aquellos cuyos valores hemos ido modificando en la experiencia computacional, es decir:

- El valor que toma la desviación típica bajo control de las componentes de la amplitud $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Teniendo en cuenta que para el par de factores $(\sigma_{X_{10}}, \sigma_{X_{20}})$ no estamos considerando todos los niveles conjuntamente como consecuencia de que se producen casos duplicados, de aquí en adelante se hablará de un nuevo factor, $\sigma_{\mathbf{X}_0}$, que representa cada par de valores contemplado.
- El coeficiente de correlación existente entre las componentes X_1 y X_2 de la amplitud \mathbf{X} , $\rho_{\mathbf{X}_0}$.
- La desviación típica bajo control de la variable tiempo T , σ_{T_0} .
- La distribución que sigue la variable tiempo T , que puede ser *gamma* o *Weibull*.
- La medida de cambio que presenta la amplitud $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ con respecto a la media cuando se produce una salida de control. Aquí tampoco se han considerado todas las combinaciones posibles por la presencia de casos duplicados, luego se considera un nuevo factor que engloba cada par de valores $(\delta_{X_1}, \delta_{X_2})$, $\delta_{\mathbf{X}}$.
- La medida de cambio que presenta el tiempo T con respecto a la media cuando se produce una salida de control, δ_T .

Factores simples

Comenzamos, por tanto, con las representaciones gráficas de estos factores en función de si el estadístico monitorizado se trata de $Z_1 = M' - T'$, $Z_2 = \frac{M'}{T'}$ o

$$Z_3 = M' + \frac{1}{T'}.$$

Para el factor σ_{X_0} , se tiene que:

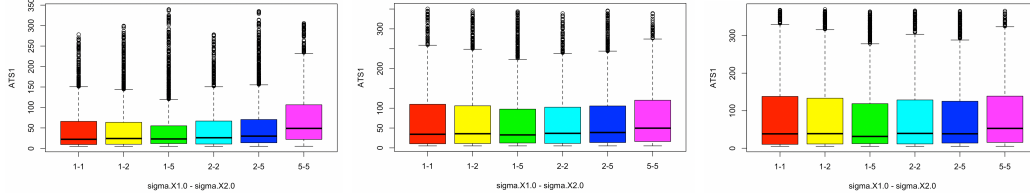


Figura 4.1: Comportamiento factor σ_{X_0} para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Como se puede observar en la Figura 4.1, vemos que las cajas que representan los niveles del factor se solapan considerablemente entre ellas, lo que significa que σ_{X_0} no va a resultar muy significativo estadísticamente hablando. En general, se aprecia que la mayor dispersión de la amplitud hace que se produzcan valores más dispersos del ATS_1 ; sin embargo, a igualdad del resto de factores, el nivel en el que menos dispersión hay de los valores del ATS_1 es aquel en el que $\sigma_{X_{10}} = 1$ y $\sigma_{X_{20}} = 5$. Esto nos lleva a pensar que la dispersión y, consecuentemente, el comportamiento de la componente X_2 , no resulta tan influyente en nuestro gráfico como el comportamiento de la variable X_1 . Más adelante comentaremos esto en profundidad.

Con respecto a los diferentes resultados que proporcionan los tres estadísticos planteados, se puede observar que Z_1 es el que menos dispersión contempla, seguido de Z_2 , quedando Z_3 en último lugar.

Ahora, para el factor simple ρ_{X_0} :

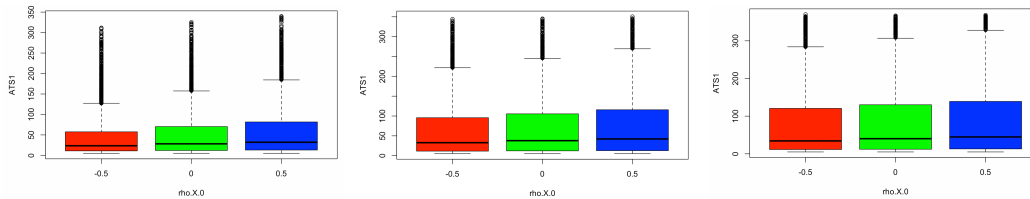


Figura 4.2: Comportamiento factor ρ_{X_0} para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

La Figura 4.2 nos muestra que cuando la correlación entre las variables (X_1, X_2) es positiva ($\rho_{X_0} = 0,5$), se producen valores más dispersos del ATS_1 en comparación a cuando la correlación resulta negativa ($\rho_{X_0} = -0,5$). Sin embargo, notar que la mediana para todos los niveles es prácticamente la misma.

Al igual que ocurría con el factor anterior, se observa una clara diferencia con respecto a la dispersión que generan los tres estadísticos considerados, resultando Z_1 el que proporciona valores del ATS_1 más próximos entre ellos.

Con respecto a los valores de σ_{T_0} :

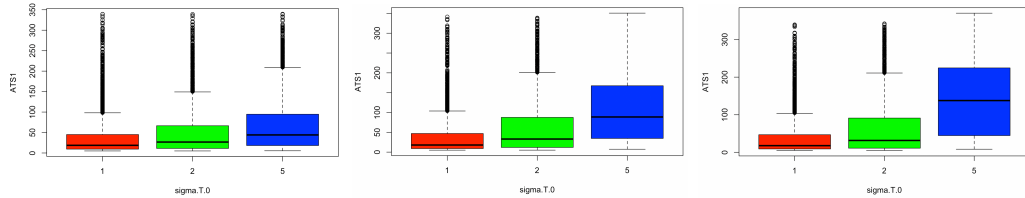


Figura 4.3: Comportamiento factor σ_{T_0} para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

En este caso, a pesar de que se sigue produciendo solape entre las cajas, se observa que, conforme aumenta la desviación σ_{T_0} , se dificulta que el TBEA detecte cambios, generando valores del ATS_1 mayores y más dispersos entre ellos. Además, a igualdad del resto de factores, cuando $\sigma_{T_0} = 5$, hay una notable diferencia entre los resultados que proporcionan los estadísticos Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Por otro lado, sobre el factor simple que determina la distribución de T , se tiene que:

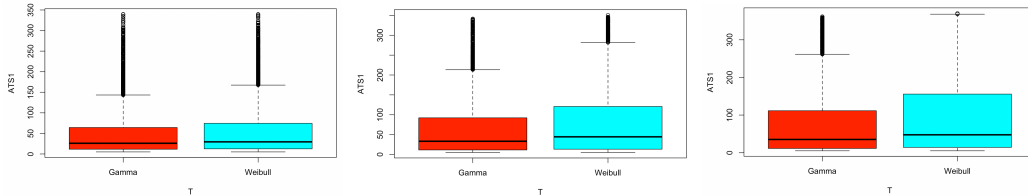


Figura 4.4: Comportamiento factor T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

La Figura 4.4 nos muestra que no se aprecian grandes diferencias cuando la variable T sigue una distribución *gamma* con respecto a cuando sigue una distribución *Weibull*, sobretodo en el caso de la monitorización de Z_1 . En cuanto a los resultados para Z_2 y Z_3 , se observa una mayor dispersión del ATS_1 cuando la variable en cuestión sigue una distribución *Weibull*.

Con respecto al factor δ_X , en la Figura 4.6 observamos una disminución de los valores y la dispersión del ATS_1 conforme aumenta el valor de δ_X . Esto tiene sentido ya que, cuanto mayor sea el cambio, menos tiempo le costará al gráfico detectarlo. Consecuentemente, podemos ver que los casos en los que más tiempo tarda en saltar la alarma (luego se dan valores más altos del ATS_1), son

aqueellos en los que al menos una de las $(\delta_{X_1}, \delta_{X_2})$ es igual a 1; es decir, no cambia.

Sin embargo, se puede observar que el caso en el que $(\delta_{X_1} = 2, \delta_{X_2} = 1)$ produce valores menores y menos dispersos para el ATS_1 que el caso $(\delta_{X_1} = 1, \delta_{X_2} = 2)$. Esto es una consecuencia de que, como ya hemos comentado anteriormente, estamos considerando que $\sigma_{X_1} \leq \sigma_{X_2}$. Por ello, tendremos en cuenta que el gráfico que estamos diseñando resulta más sensible a un cambio en X_1 que a un cambio en X_2 , pues X_1 siempre va a presentar menor desviación que X_2 .

Al igual que para el resto de factores, se tiene que Z_1 genera valores menos dispersos que Z_2 y Z_3 , en ese orden.

Por último, veamos qué ocurre con el factor δ_T :

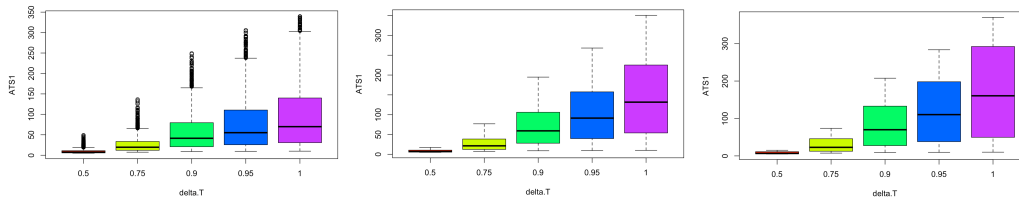


Figura 4.5: Comportamiento factor δ_T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

En este caso, la Figura 4.5 nos muestra un claro aumento de dispersión y de los valores del ATS_1 conforme el valor de δ_T se hace mayor. Es decir, cuanto más pequeño sea δ_T y, consecuentemente, más esté disminuyendo la media de T con respecto al caso bajo control, más fácil resultará detectar el cambio. Cabe destacar que este factor es el que menos solapamiento muestra entre las cajas que conforman sus diversos niveles.

Luego concluimos que, a simple vista, δ_T y δ_X son los factores simples que más influyen sobre el ATS_1 de nuestro gráfico, seguidos del factor que determina la desviación típica de T , σ_{T_0} .

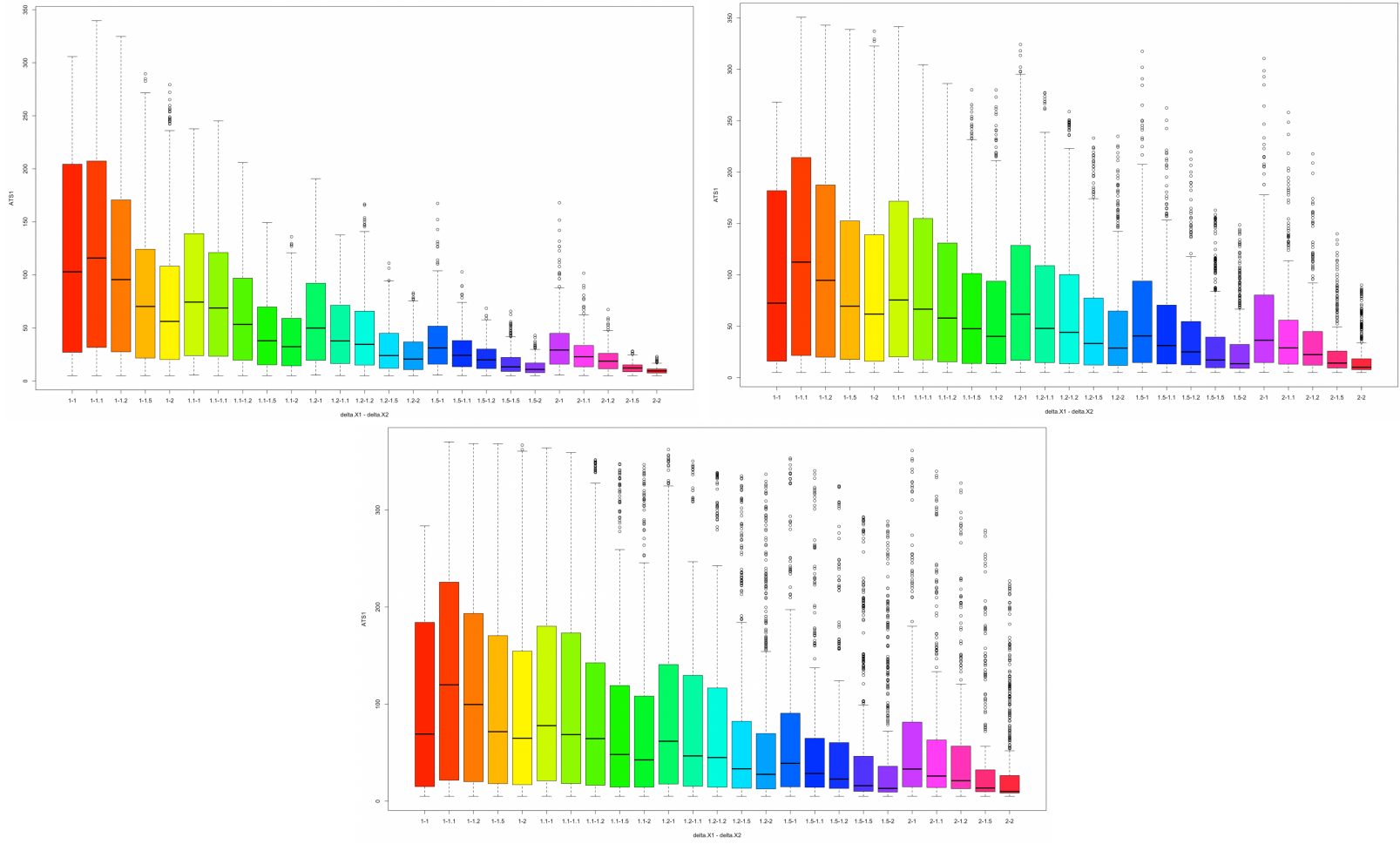


Figura 4.6: Comportamiento factor δ_X para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Interacciones

A continuación, pasamos a hablar de los gráficos de interacciones. A través de estos se pretende observar si, al menos de manera visual, el comportamiento de un factor cualquiera sobre el ATS_1 varía en función del nivel que presente otro de los factores implicados. Por tanto, se entiende que existe interacción si las líneas que aparecen en estos gráficos son secantes entre ellas.

Para los tres estadísticos monitorizados en nuestro gráfico de control (Z_1 , Z_2 y Z_3), nos encontramos con la aparente existencia de interacción en los mismos casos, los cuales mostraremos a continuación. El resto de gráficas de interacción se pueden observar en el Anexo B.2.

En primer lugar, se comenta la gráfica de interacción entre los factores σ_{X_0} y δ_X en los casos en los que el estadístico a monitorizar es Z_1 , Z_2 o Z_3 , respectivamente.

En este punto cabe recordar que, en realidad, tanto el factor δ_X como σ_{X_0} no consideran todas las combinaciones posibles para los valores de $(\delta_{X_1}, \delta_{X_2})$ y $(\sigma_{X_{10}}, \sigma_{X_{20}})$, de ahí que nos encontremos con algunas líneas no continuas a lo largo de la gráfica.

Sin embargo, se pueden observar en la Figura 4.7 dos tipos de rectas. Por un lado, en los casos en los que $\delta_{X_1} = \delta_{X_2}$, se aprecia una tendencia ascendente con respecto al ATS_1 conforme aumenta la dispersión σ_{X_0} . Sin embargo, cuando $\delta_{X_1} \neq \delta_{X_2}$, este comportamiento es más variable y no sigue un patrón concreto.

Por otro lado, con respecto a la gráfica de interacción entre factor el ρ_{X_0} y el factor δ_X , Figura 4.8, también se pueden apreciar dos tipos de tendencias. Por una parte, cuando $\delta_{X_1} = \delta_{X_2}$, se produce un comportamiento bastante lineal del ATS_1 en el que no parece influir demasiado el valor de ρ_{X_0} . Sin embargo, cuando $\delta_{X_1} = 1$ y $\delta_{X_2} \neq 1$, nos encontramos con que la correlación positiva entre las variables influye negativamente sobre el ATS_1 , generando valores más altos que los que produce la correlación negativa.

También observamos cómo se cortan las líneas en la gráfica de interacción del factor σ_{T_0} con el factor δ_X . La Figura 4.9 nos muestra que los casos en los que $\sigma_{T_0} = 1$ o $\sigma_{T_0} = 2$ no resultan tan influyentes sobre el factor δ_X como el caso en el que $\sigma_{T_0} = 5$, ya que es en este punto donde las rectas abandonan su tendencia paralela para ser más secantes entre ellas. Cabe destacar que esta interacción representa un comportamiento más diferente entre los diversos estadísticos estudiados (Z_1, Z_2, Z_3).

Por último, vemos el comportamiento de los factores δ_T y $\delta_{\mathbf{X}}$ conjuntamente sobre el ATS_1 . La interacción representada por la Figura 4.10 es la que más información nos aporta sobre nuestro gráfico. Si nos fijamos en la línea roja discontinua (caso en el que $\delta_T = 0,5$), podemos observar que, cuanto más se reduce la media de T , menos influye el hecho de que la amplitud aumente o no sobre el comportamiento del gráfico (valores del ATS_1). Análogamente, cuanto mayor es el incremento que se da en la amplitud, menor importancia tiene el tamaño del cambio del tiempo entre eventos a la hora de medir la eficiencia de nuestro gráfico. Es decir, tenemos un gráfico de control en el que un cambio brusco de cualquiera de las dos dimensiones consideradas (T, \mathbf{X}), se detecta rápidamente independientemente del correspondiente cambio que se produzca en la otra dimensión.

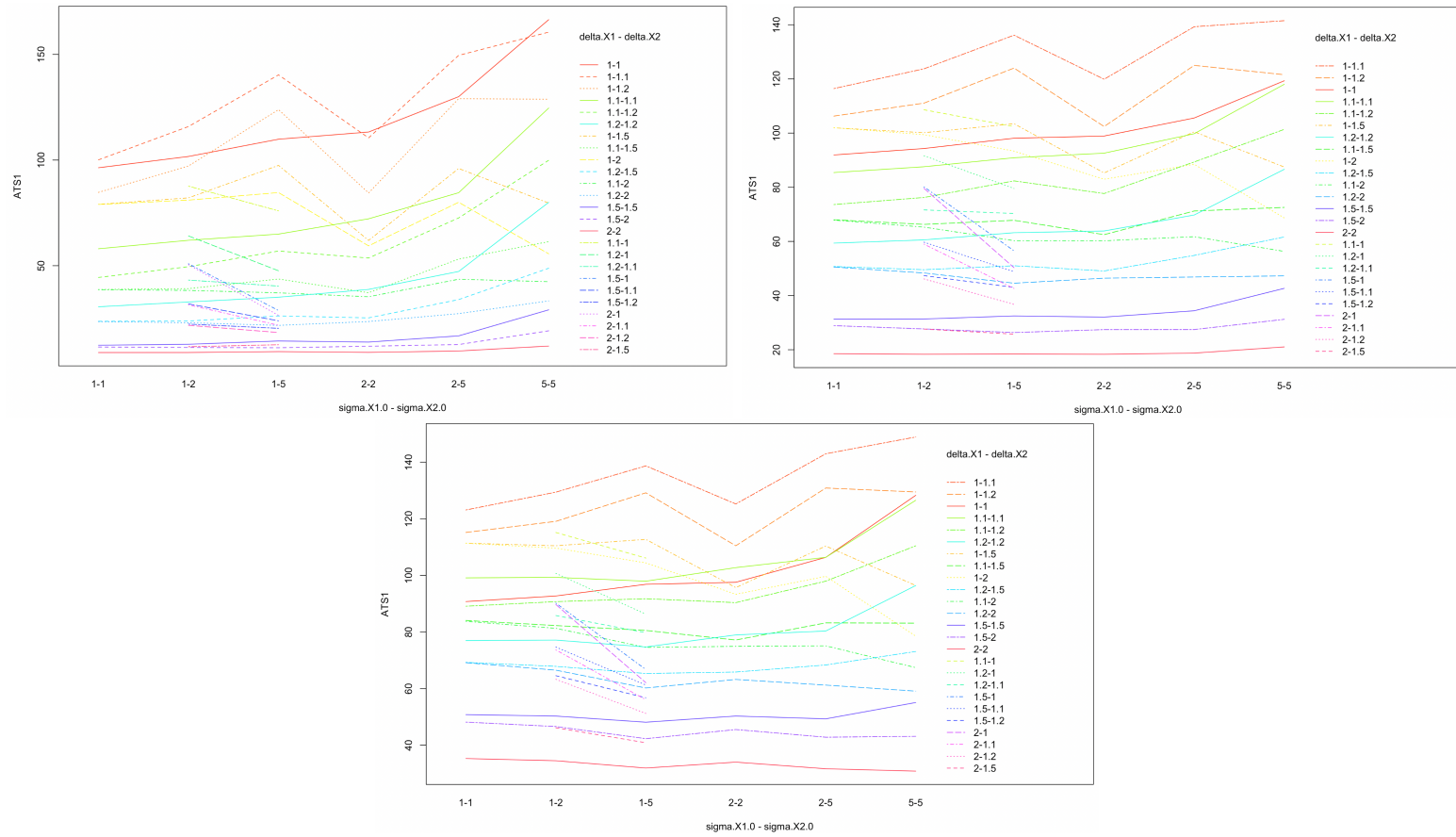


Figura 4.7: Interacción de σ_{X_0} con δ_X para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

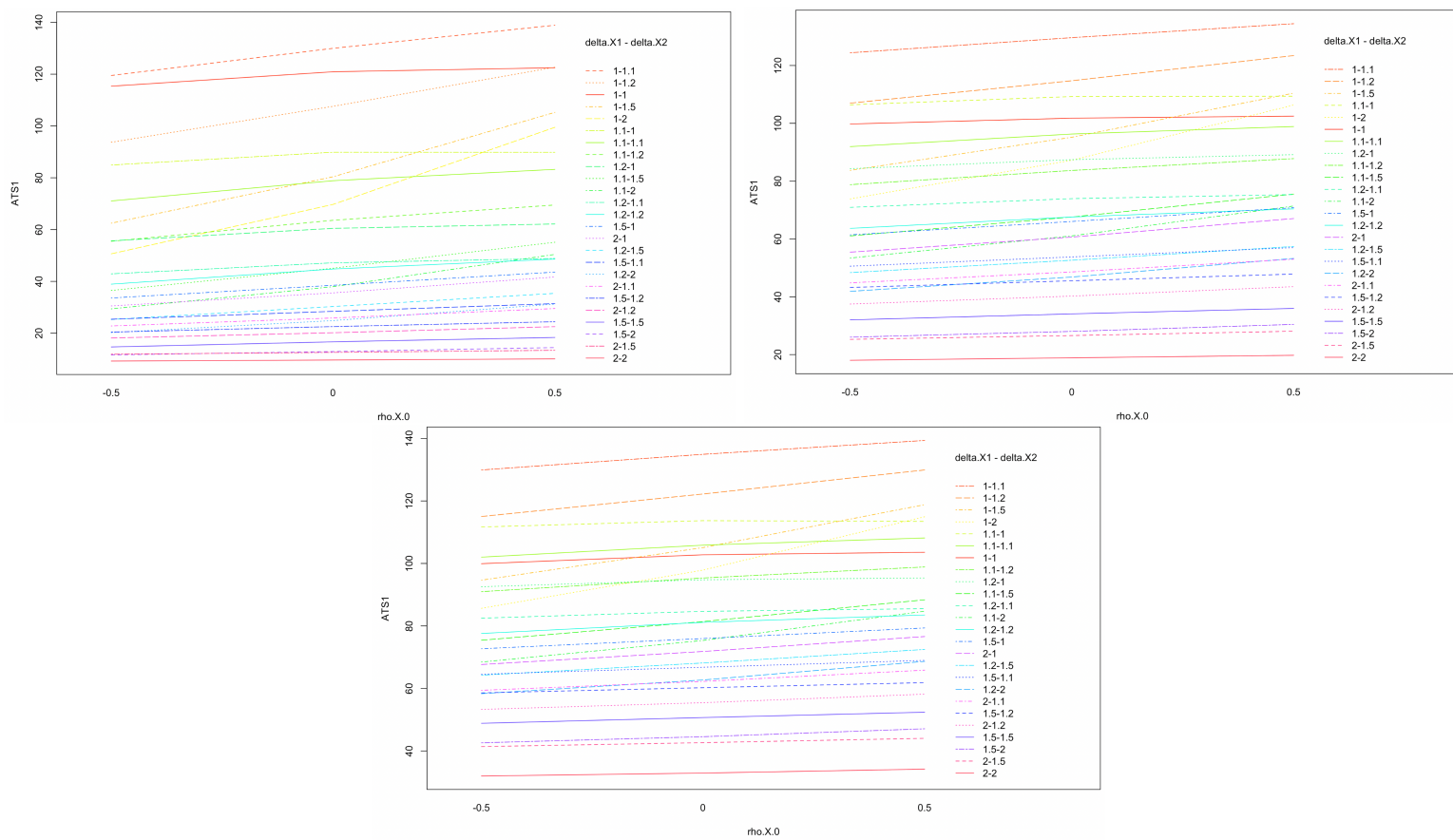


Figura 4.8: Interacción de ρ_{X_0} con δ_X para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

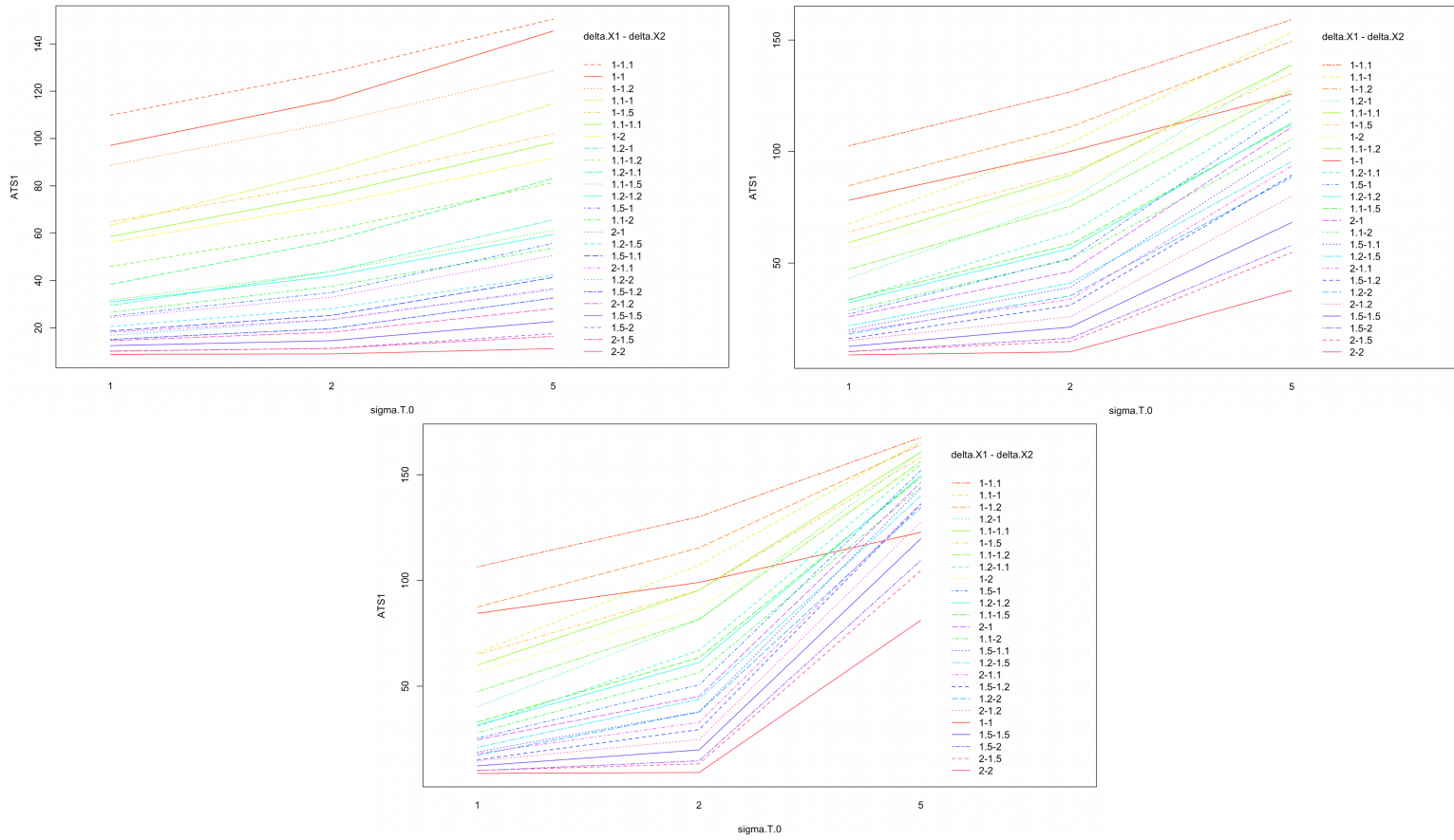


Figura 4.9: Interacción de σ_{T_0} con δ_X para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

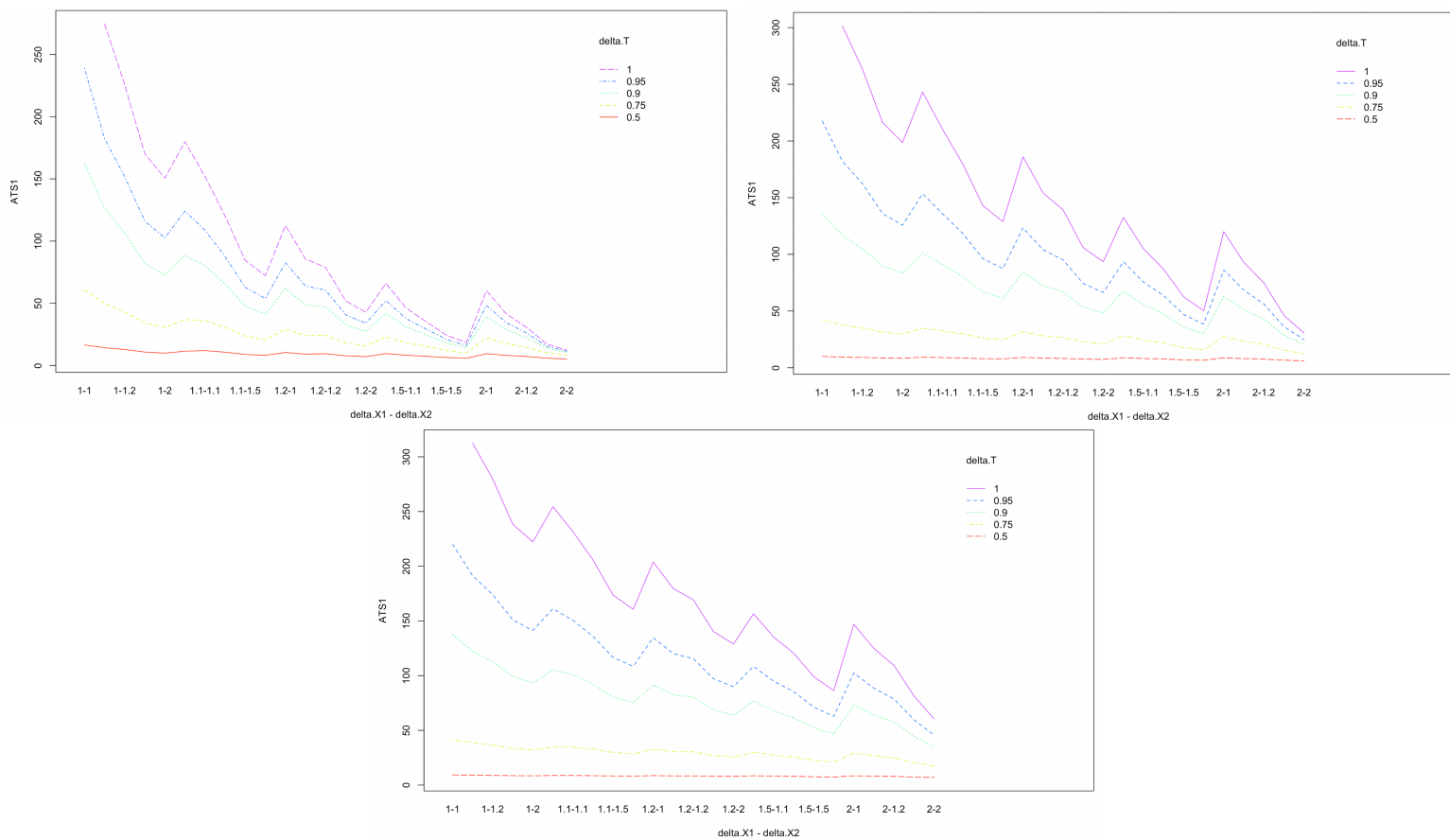


Figura 4.10: Interacción de δ_T con δ_X para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

4.3.2. ANOVA

Ahora, con el fin de validar las conclusiones que se derivan del análisis descriptivo y valorar la importancia relativa de cada factor junto con la posible existencia de interacciones, vamos a analizar los datos anteriores mediante un ANOVA. En concreto, se trata de un ANOVA sin repetición, ya que hay una única observación de la variable dependiente (ATS_1) para cada combinación de factores.

A pesar de que, como veremos después, este análisis no será válido a nivel inferencial, pues no se van a verificar las hipótesis necesarias, sí que nos sirve a nivel descriptivo, ya que en la tabla ANOVA podremos fijarnos en los valores que presenta la Suma de Cuadrados total (*Sum of Squares*, SS), la cual cuantifica la variabilidad total de la variable respuesta representada por cada factor. De igual forma, el Cuadrado Medio (*Mean Square*, MS) también es aprovechable de estas tablas.

Se comienza con el ANOVA relativo a los datos obtenidos al monitorizar el estadístico $Z_1 = M' - T'$. Inicialmente, consideramos los factores simples junto con todas las interacciones posibles. Mostramos a continuación el ANOVA resultante de haber eliminado las interacciones claramente no significativas, pues presentaban una baja Suma de Cuadrados (SS). Recordamos que no debemos fijarnos en los p-valores marcados en rojo.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
sigma.X.0	5	843765	168753	1033,70	<2e-16	***
rho.X.0	2	357320	178660	1094,39	<2e-16	***
sigma.T.0	2	1380915	690457	4229,42	<2e-16	***
T	1	74389	74389	455,67	<2e-16	***
delta.X	24	12940253	539177	3302,75	<2e-16	***
delta.T	4	11342503	2835626	17369,73	<2e-16	***
sigma.X.0:delta.X	90	1012525	11250	68,91	<2e-16	***
rho.X.0:delta.X	48	295298	6152	37,69	<2e-16	***
sigma.T.0:delta.X	48	307680	6410	39,27	<2e-16	***
sigma.T.0:delta.T	8	329091	41136	251,98	<2e-16	***
delta.X:delta.T	95	8177583	86080	527,28	<2e-16	***
Residuals	10364	1691934	163			
Signif. codes:	0 "****"	0,001 "***"	0,01 "**"	0,05 "."	0,1	1

Cuadro 4.5: Tabla ANOVA sobre el ATS_1 para Z_1

Como se puede observar en el Cuadro 4.5, se corroboran las conclusiones que habíamos sacado gráficamente con respecto a los factores simples más significati-

vos, resultando estos δ_T , σ_{T_0} y δ_X , mientras que la distribución de T es el factor menos influyente sobre el ATS_1 . Por otro lado, las interacciones con mayor Suma de Cuadrados se corresponden con las interacciones que hemos considerado significativas previamente en el análisis gráfico. Además, la interacción del factor σ_{T_0} con el factor δ_T representa una alta proporción de la variabilidad del ATS_1 , lo cual no habíamos detectado gráficamente (Figura B.9, Anexo B.2).

Pasamos ahora a observar el ANOVA realizado para los datos que nos proporciona el estadístico $Z_2 = \frac{M'}{T'}$. Al igual que para el caso anterior, mostramos la tabla una vez eliminadas las interacciones con una baja Suma de Cuadrados (SS).

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
sigma.X.0	5	133058	26612	118,00	<2e-16	***
rho.X.0	2	189873	94936	420,96	<2e-16	***
sigma.T.0	2	8973004	4486502	19893,63	<2e-16	***
T	1	533996	533996	2367,80	<2e-16	***
delta.X	24	9557110	398213	1765,72	<2e-16	***
delta.T	4	26564269	6641067	29447,21	<2e-16	***
sigma.X.0:delta.X	90	440453	4894	21,70	<2e-16	***
sigma.T.0:delta.X	48	515970	10749	47,66	<2e-16	***
sigma.T.0:delta.T	8	3783991	472999	2097,33	<2e-16	***
delta.X:delta.T	95	8049981	84737	375,73	<2e-16	***
Residuals	10412	2348161	226			
Signif. codes:	0 "****"	0,001 "***"	0,01 "**"	0,05 "."	0,1	1

Cuadro 4.6: Tabla ANOVA sobre el ATS_1 para Z_2

Se tiene entonces que los factores simples que mayor proporción de variabilidad recogen sobre la medida de aptitud de nuestro gráfico resultan δ_T , seguido de σ_{T_0} , siendo esta proporción mayor que la explicada para el caso de Z_1 . Sin embargo, δ_X es menos influyente en esta ocasión. Por su parte, la interacción del factor ρ_{X_0} con δ_X no ha resultado significativa por presentar una baja Suma de Cuadrados, a pesar de que sí habíamos considerado que existía interacción gráficamente. Por el contrario, y análogo a lo sucedido con el estadístico Z_1 , la interacción del factor σ_{T_0} con el factor δ_T representa una alta proporción de la variabilidad del ATS_1 , mientras que gráficamente se había supuesto que no era significativa, como se puede observar en la Figura B.9 del Anexo B.2.

Se ven, por último, los resultados que nos proporciona la tabla ANOVA para el estadístico monitorizado $Z_3 = M' + \frac{1}{T'}$ sobre la variable respuesta ATS_1 , una vez eliminadas las interacciones claramente no significativas.

Tal y como nos muestra el Cuadro 4.7, en este caso, el factor simple que más variabilidad recoge sobre el ATS_1 resulta σ_{T_0} , seguido de δ_T . Sin embargo, al igual que pasaba con Z_2 , δ_X no parece tan significativo como lo era para Z_1 . Además, se observa que para el estadístico Z_3 ocurre lo mismo que para Z_2 con respecto a las interacciones significativas.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
sigma.X.0	5	127922	25584	67,39	<2e-16	***
rho.X.0	2	149406	74703	196,75	<2e-16	***
sigma.T.0	2	20363361	10181681	26816,71	<2e-16	***
T	1	861715	861715	2269,60	<2e-16	***
delta.X	24	7487269	311970	821,67	<2e-16	***
delta.T	4	37877459	9469365	24940,60	<2e-16	***
sigma.X.0:delta.X	90	440743	4897	12,90	<2e-16	***
sigma.T.0:delta.X	48	1267346	26403	69,54	<2e-16	***
sigma.T.0:delta.T	8	10596795	1324599	3488,76	<2e-16	***
delta.X:delta.T	95	6661816	70124	184,69	<2e-16	***
Residuals	10412	3953194	380			
Signif. codes:	0 "****"	0,001 "***"	0,01 "**"	0,05 "."	0,1	1

Cuadro 4.7: Tabla ANOVA sobre el ATS_1 para Z_3

4.3.3. Validación del ANOVA paramétrico

Como ya hemos comentado previamente, resulta necesario validar las hipótesis del ANOVA de independencia, normalidad y homocedasticidad de los residuos. Vemos a continuación que estas no se cumplen para ninguno de los tres estudios que hemos realizado mediante un análisis de los residuos de cada modelo.

Independencia de los residuos

A través de un gráfico de dispersión de los residuos, veamos si se cumple o no la hipótesis de independencia.

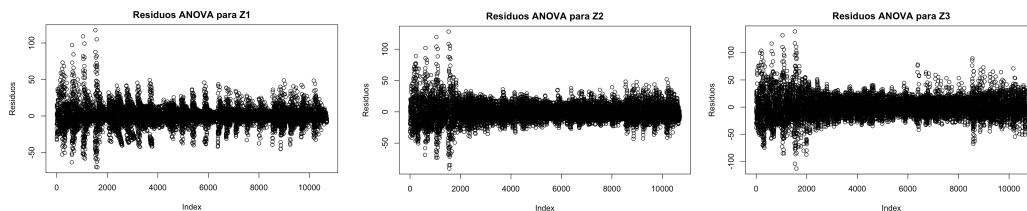


Figura 4.11: Gráfico de dispersión de los residuos para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

En la Figura 4.11 se comprueba que no se puede asumir que los residuos no sigan un patrón determinado, luego no se cumple la independencia de los mismos.

Normalidad de los residuos

Ahora, veamos si se verifica que los residuos siguen una distribución normal.

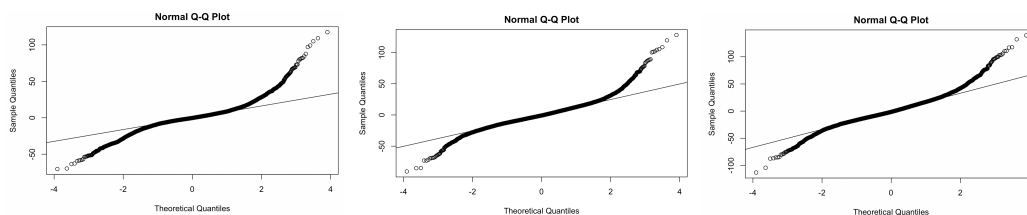


Figura 4.12: Papel Probabilístico normal de los residuos para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Mediante la Figura 4.12 vemos cómo los residuos no se ajustan lo suficiente a la recta como para poder considerar que siguen una distribución normal en ninguno de los tres posibles casos.

Homocedasticidad

Se analiza a continuación si la varianza de los residuos es constante en los diferentes niveles de los factores. Para ello, vamos a realizar un ANOVA sobre los *Residuos*² de cada modelo; de esta forma, obtendremos si los diferentes factores influyen o no significativamente sobre la varianza de la variable respuesta original, el ATS_1 . Las tablas ANOVA resultantes para cada caso, son:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
sigma.X.0	5	3,694e + 07	7388904	40,682	< 2e - 16	***
rho.X.0	2	2,043e + 07	10216982	56,253	< 2e - 16	***
sigma.T.0	2	1,743e + 07	8717090	47,995	< 2e - 16	***
T	1	7,004e + 05	700431	3,856	0,0496	*
delta.X	24	2,960e + 08	12332746	67,902	< 2e - 16	***
delta.T	4	1,187e + 08	29676197	163,392	< 2e - 16	***
Residuals	10653	1,935e + 09	181626			
Signif. codes:	0 "***"	0,001 "***"	0,01 "**"	0,05 "."	0,1	1

Cuadro 4.8: Tabla ANOVA sobre los *Residuos*² para Z_1

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
sigma.X.0	5	2,805e + 07	5610900	19,210	< 2e - 16	***
rho.X.0	2	1,327e + 07	6635925	22,719	1,43e - 10	***
sigma.T.0	2	2,027e + 07	10135771	34,701	9,51e - 16	***
T	1	2,442e + 05	244162	0,836	0,361	
delta.X	24	1,890e + 08	7875277	26,962	< 2e - 16	***
delta.T	4	3,718e + 08	92945364	318,212	< 2e - 16	***
Residuals	10653	3,112e + 09	292086			
Signif. codes:	0 "****"	0,001 "***"	0,01 "**"	0,05 "."	0,1	1

Cuadro 4.9: Tabla ANOVA sobre los *Residuos*² para Z_2

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
sigma.X.0	5	1,229e + 08	24570014	41,512	< 2e - 16	***
rho.X.0	2	1,898e + 07	9488985	16,032	1,12e - 07	***
sigma.T.0	2	9,939e + 06	4969349	8,396	0,000227	***
T	1	2,898e + 06	2897980	4,896	0,026936	*
delta.X	24	2,960e + 08	12332601	20,836	< 2e - 16	***
delta.T	4	9,304e + 08	232590642	392,970	< 2e - 16	***
Residuals	10653	6,305e + 09	591879			
Signif. codes:	0 "****"	0,001 "***"	0,01 "**"	0,05 "."	0,1	1

Cuadro 4.10: Tabla ANOVA sobre los *Residuos*² para Z_3

Como se puede observar en los Cuadros 4.8, 4.9 y 4.10, todos los factores, a excepción de la distribución que sigue el tiempo (T), resultan altamente influyentes sobre la varianza del ATS_1 , luego no se cumple la hipótesis de homocedasticidad en ninguno de los tres casos.

4.3.4. Inferencia sobre los factores: Games-Howell

En este punto, teniendo en cuenta los factores que resultan significativos, procedemos a realizar el análisis post-hoc. Dado que nos encontramos ante un caso de no normalidad y heterocedasticidad, se decide aplicar el método de Games - Howell [29] que resulta robusto frente a estas situaciones.

El objetivo de esta sección consiste en hacer inferencia con un método válido sobre las comparaciones dos a dos entre los grupos definidos por cada factor. Posteriormente, realizaremos las comparaciones entre los tres estadísticos monitorizados para cada grupo concreto en todos los factores. De esta forma, se

pretende sacar conclusiones acerca del rendimiento de nuestro gráfico que puedan ayudar al lector a identificar cómo de conveniente puede resultar el gráfico de control que estamos tratando en función de la situación que le interese detectar.

Comparaciones entre los grupos de cada factor

A través del algoritmo del Anexo A.3, obtenemos los resultados de las comparaciones dos a dos entre todos los grupos que generan cada uno de los seis factores implicados: σ_{X_0} , ρ_{X_0} , σ_{T_0} , T , δ_X , δ_T .

Con respecto al factor σ_{X_0} , podemos observar a través del Anexo C.1 las comparaciones dos a dos que resultan no significativas tanto para $Z_1 = M' - T'$, como para $Z_2 = \frac{M'}{T'}$ y $Z_3 = M' + \frac{1}{T'}$, respectivamente.

En cuanto a Z_1 , en general, nos encontramos con que los pares de situaciones que no se consideran significativamente diferentes son aquellas en las que la desviación de X_1 es muy baja ($\sigma_{X_{10}} = 1$) y no varía, o lo hace muy poco, mientras que $\sigma_{X_{20}}$ varía considerablemente. Sin embargo, el estadístico Z_1 contempla el mayor número de combinaciones significativas en comparación con el resto de estadísticos. De hecho, la única diferencia significativa que se detecta para el estadístico Z_3 se da cuando $\sigma_{X_{10}}$ pasa de valer 1 a 5, valiendo $\sigma_{X_{20}} = 5$ en ambos casos.

Por otro lado, el factor ρ_{X_0} presenta todas las pares de combinaciones significativas tanto para Z_1 como para Z_2 ; sin embargo, en la tabla C.4 del Anexo C.1 se indica cuál es el único par significativo para Z_3 .

En cuanto a los factores relacionados con el tiempo entre eventos, σ_{T_0} , T y δ_T , todos los pares de combinaciones resultan significativas para los tres estadísticos considerados.

Por último, con respecto al factor δ_X , en las tablas C.5, C.6, C.7, C.8, C.9 y C.10 del Anexo C.1 se muestran los pares de combinaciones no significativas.

Tras observarlas, se ha llegado a la conclusión de que se consideran no significativos los casos en los que se comparan situaciones donde la media X_1 no varía o lo hace muy poco (es decir, δ_{X_1} se mantiene igual o su cambio es pequeño), y el cambio que se produce con respecto a X_2 no es demasiado grande en comparación con la primera situación o, de hecho, es un cambio a mejor. Es decir, en general, no hay diferencias significativas entre los casos en los que se produce una ligera compensación entre el cambio a peor que sufre una de las componentes de la amplitud X con respecto al cambio a mejor que presenta la otra. Todo esto, teniendo en cuenta que nuestro gráfico de control resulta más sensible a los cambios en la primera componente, X_1 , que en la segunda, X_2 , por la forma en

la que hemos diseñado nuestra batería de ejemplos.

Por otro lado, es muy destacable la diferencia entre la cantidad de pares de casos que resultan no significativos al monitorizar el estadístico Z_1 , con respecto a la monitorización de Z_2 y Z_3 . En concreto, Z_1 presenta la mayor parte de sus combinaciones significativas, mientras que Z_3 es el estadístico que proporciona más diferencias no significativas.

De esta forma, podríamos concluir que nuestro gráfico resulta apto a la hora de detectar cambios en el tiempo entre eventos, T , se use el estadístico que se use para su monitorización (Z_1, Z_2, Z_3). Sin embargo, para cambios en la amplitud X , Z_1 resulta más adecuado, seguido de Z_2 , dejando a Z_3 en último lugar. De hecho, notar que Z_3 es el único que contempla un caso de diferencia no significativa a la hora de hablar del factor simple ρ_{X_0} . Desarrollamos esto en detalle a continuación.

Comparaciones entre los estadísticos para cada grupo

Ahora, vamos a aplicar el test no paramétrico de Games-Howell a todos los niveles de todos los factores planteados con el fin de identificar si se pueden considerar las diferencias significativas entre los valores del ATS_1 que obtenemos para Z_1, Z_2 y Z_3 . De esta forma, podremos recomendar el uso de un estadístico concreto en función de la situación que interese detectar. Estos resultados se pueden observar a través de las diversas tablas del Anexo C.2.

Con respecto al factor σ_{X_0} , nos encontramos con que el estadístico Z_1 se comporta de forma estadísticamente diferente tanto a Z_2 como a Z_3 en todos los casos, a excepción del caso de máxima dispersión en el que ($\sigma_{X_{10}} = 5, \sigma_{X_{20}} = 5$), donde no se puede identificar una diferencia significativa en el rendimiento del gráfico de Z_1 en comparación al rendimiento que proporciona Z_2 . Por su parte, los estadísticos Z_2 y Z_3 también se comportan de forma significativamente diferente entre ellos, aunque esta diferencia no es tan notable como la que presentan con Z_1 .

Por otro lado, en cuanto al factor ρ_{X_0} , la eficiencia de los tres gráficos de control es altamente diferente al compararlos entre ellos para todos los niveles considerados.

Al hablar de la desviación típica de T , σ_{T_0} , nos encontramos con que los tres gráficos se comportan de igual manera en el caso en el que $\sigma_{T_0} = 1$, pues no existen diferencias significativas entre los estadísticos. Sin embargo, cuando $\sigma_{T_0} = 2$, el rendimiento del gráfico para Z_1 sí que es diferente al que proporcionan Z_2 y Z_3 , los cuales no presenta diferencias significativas entre ellos. Por el contrario, para el caso de máxima dispersión ($\sigma_{T_0} = 5$), existen diferencias significativas tanto para Z_1 con respecto a Z_2 y Z_3 , como entre Z_2 y Z_3 .

Por otra parte, hay diferencias significativas en la aptitud del gráfico para los tres estadísticos en los dos casos considerados de la distribución del tiempo T . Aunque se recuerda que este factor simple se había concluido como poco significativo sobre el ATS_1 .

Procedemos a comentar si existen diferencias entre Z_1 , Z_2 y Z_3 a la hora de detectar los diversos cambios en el tiempo o en la amplitud. En primer lugar, a la hora de medir la eficiencia del gráfico para detectar cambios en la amplitud (factor δ_X), en general, no existen diferencias significativas en el comportamiento de Z_2 con respecto al comportamiento de Z_3 . Sin embargo, Z_1 sí que se considera estadísticamente diferente tanto a Z_2 como a Z_3 ; aunque cabe destacar que en casos en los que la amplitud de la primera componente, X_1 , no cambia y el cambio de X_2 no es demasiado grande, la diferencia entre el comportamiento que presenta Z_1 es menor con Z_2 que con Z_3 .

Por último, con respecto a los posibles cambios que puede sufrir el tiempo entre eventos (factor δ_T), se tiene que para una disminución pequeña del tiempo existen diferencias significativas en el comportamiento de los gráficos para los tres estadísticos. Sin embargo, si el tiempo se reduce a la mitad ($\delta_T = 0,5$), los gráficos para Z_2 y Z_3 se comportan de la misma forma, siendo esta diferente a la que presenta Z_1 . Sin embargo, en el caso en el que $\delta_T = 0,75$, no existen diferencias significativas entre Z_1 y Z_2 , mientras que sí que las hay entre Z_2 y Z_3 , y entre Z_1 y Z_3 .

Gracias a este otro análisis hemos logrado corroborar la conclusión a la que ya habíamos llegado de que el gráfico más apto a la hora de detectar cambios en la amplitud \mathbf{X} resulta aquel que monitoriza a Z_1 , seguido del enfoque que proporciona el estadístico Z_2 . Sin embargo, se ha descubierto que, en caso de estar hablando de cambios producidos únicamente en el tiempo, es decir, sin modificaciones en la amplitud, la monitorización más adecuada resultaría la del estadístico Z_3 , seguida del estadístico Z_2 . En este punto, cabe destacar que la diferencia existente entre la capacidad de detección de cambios del estadístico Z_1 con respecto a la del Z_2 a la hora de hablar de incrementos en la amplitud es mucho mayor que la diferencia en rendimiento que muestran los gráficos de control para Z_2 y Z_3 a la hora de detectar disminuciones en el tiempo, respectivamente.

Capítulo 5

Ejemplo numérico

En este capítulo se va a proporcionar un ejemplo numérico con el fin de mostrar una posible aplicación real del gráfico de control que hemos diseñado. Este ejemplo se obtiene a través de datos simulados inspirados en datos reales relacionados con este contexto. Los resultados provienen de la ejecución del algoritmo presente en el Anexo A.4

Buscamos monitorizar incendios forestales en una determinada área que, en concreto, se trata de España. Las variables a considerar, son las siguientes:

- T = Tiempo entre incendios, medido en horas. Donde T sigue una distribución *Weibull*, con una media de $\mu_{T_0} = 0,6$ horas entre incendios y una desviación típica de $\sigma_{T_0} = 0,5$.
- Se considera que la amplitud \mathbf{X} es bidimensional y sigue una distribución normal multivariante, donde:
 - X_1 = Superficie arbolada quemada en el incendio, medida en hectáreas. Se tiene que $\mu_{X_1} = 15$ y $\sigma_{X_1} = 5$.
 - X_2 = Superficie no arbolada quemada en el incendio, medida en hectáreas. Se tiene que $\mu_{X_2} = 20$ y $\sigma_{X_2} = 5$.

El coeficiente de correlación entre las variables X_1 y X_2 será de $\rho_{1,2} = 0,5$.

5.1. Proceso bajo control

Comenzaremos analizando el comportamiento del gráfico de control cuando el proceso está bajo control. Al igual que para el resto de ocasiones, fijaremos el parámetro $ATS_0 = 370,4$.

A través de simulación, obtenemos los límites de control superiores correspondientes en función de si el estadístico a monitorizar se trata de Z_1 , Z_2 o Z_3 . Se muestran a continuación estos valores:

UCL_{Z_1}	UCL_{Z_2}	UCL_{Z_3}
1,625842	244,1806	189,0743

Cuadro 5.1: Valores UCL del ejemplo numérico

Una vez establecidos los límites de control superiores, se han simulado 10000 incendios independientes. Sobre estos incendios, se ha calculado la media de tiempos entre incendios que transcurren hasta que uno de estos eventos se considera fuera de control. Los valores obtenidos se reflejan en la siguiente tabla:

$ATS_0(Z_1)$	$ATS_0(Z_2)$	$ATS_0(Z_3)$
211,7612	325,7663	367,4407

Cuadro 5.2: Valores ATS_0 real del ejemplo numérico

Nótese que el ATS_0 observado correspondiente resulta menor que el ATS_0 esperado de 370,4. Se entiende que con un tamaño muestral suficientemente grande, el valor del ATS_0 observado convergerá al teórico.

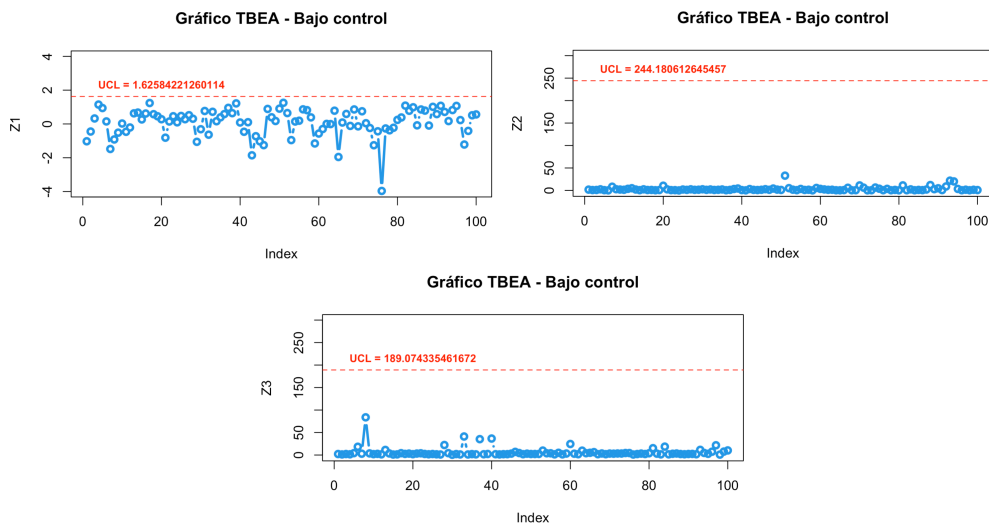


Figura 5.1: Gráfico bajo control para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Cada punto en el gráfico representa la ocurrencia de un incendio. Podemos

ver que, en efecto, todos los puntos se sitúan debajo de los límites de control superiores, pues el proceso se encuentra bajo control.

5.2. Proceso fuera de control

Ahora vamos a ver cómo se comporta el gráfico cuando se produce una salida de control. En particular, vamos a considerar dos posibles salidas de control. En la primera, se producirá un incremento en la amplitud del incendio, y en la segunda se dará una disminución del tiempo entre incendios.

5.2.1. Incremento en la amplitud

Se supone que aumenta la media de la superficie arbolada quemada en el incendio; en concreto, $\delta_{X_1} = 1,7$. A través de simulación, y estableciendo los límites de control superiores indicados en la sección anterior, comparamos a través de la siguiente tabla la diferencia entre el ATS_1 que cabe esperar y el ATS_1 real, en función del enfoque para Z_1 , Z_2 o Z_3 .

	$ATS_1(Z_1)$	$ATS_1(Z_2)$	$ATS_1(Z_3)$
Teórico	25,00000	315,7895	315,7895
Observado	25,44942	266,4990	382,7473

Cuadro 5.3: Valores ATS_1 del ejemplo numérico

En este caso, llama la atención la proximidad entre el ATS_1 esperado y el observado para el estadístico Z_1 . Por el contrario, el ATS_1 esperado coincide para Z_2 y Z_3 , mientras que el gráfico para Z_2 detecta mucho antes el cambio que el gráfico para Z_3 en el caso real.

A su vez, nótese que el gráfico que más rápido detectaría el cambio simulado se trata de aquel que monitoriza a Z_1 , presentando una eficiencia mucho mayor a la que proporcionan los gráficos para Z_2 y Z_3 . Esta observación es coherente con las conclusiones a las que hemos llegado sobre este tipo de gráficos de control.

Veamos qué forma adopta el gráfico de control en este caso si graficamos los puntos relativos a los 100 primeros incendios simulados. Véase que no se observan puntos fuera de control, a excepción del caso para Z_1 . Esto es así porque estamos graficando los 100 primeros incendios, y el ATS_1 correspondiente para esta situación resulta superior a 100 en todos los casos excepto para la monitorización del primero de los estadísticos, cuyo ATS_1 es de 25.

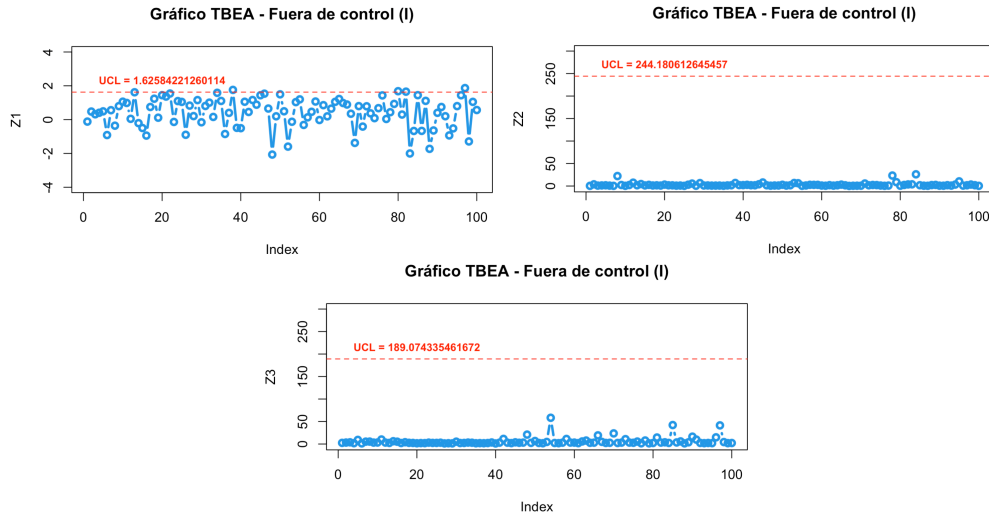


Figura 5.2: Gráfico fuera de control (I) para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

5.2.2. Disminución en el tiempo

Ahora, suponemos que disminuye el tiempo entre incendios en España; concretamente, $\delta_T = 0,9$. Análogo al caso anterior, se obtienen a través de simulación los valores del ATS_1 esperado y observado para los estadísticos Z_1 , Z_2 y Z_3 , manteniendo los límites de control superiores ya establecidos.

	$ATS_1(Z_1)$	$ATS_1(Z_2)$	$ATS_1(Z_3)$
Teórico	186,2069	180,0000	163,6364
Observado	221,5336	226,8406	124,3874

Cuadro 5.4: Valores ATS_1 del ejemplo numérico

En este otro caso, el único gráfico cuya eficiencia real supera el valor teórico, pues presenta un ATS_1 menor, es aquel en el que se monitoriza a Z_3 . Además, este es el gráfico que más rápidamente detectaría la salida de control, lo cual tiene sentido en base a las conclusiones a las que hemos llegado a través del análisis de la experiencia numérica de este tipo de gráficos de control.

Por último, veamos la forma que tiene el gráfico de control en este segundo caso representando los puntos referentes a los 100 primeros incendios simulados. Análogo a lo que ocurría en la primera situación fuera de control planteada, en este caso, nos encontramos con valores ATS_1 superiores a 100 tanto para Z_1 como para Z_2 . Por otro lado, el ATS_1 para Z_3 es de 124,3874, de ahí que la gráfica sí que muestre salidas de control en este caso.

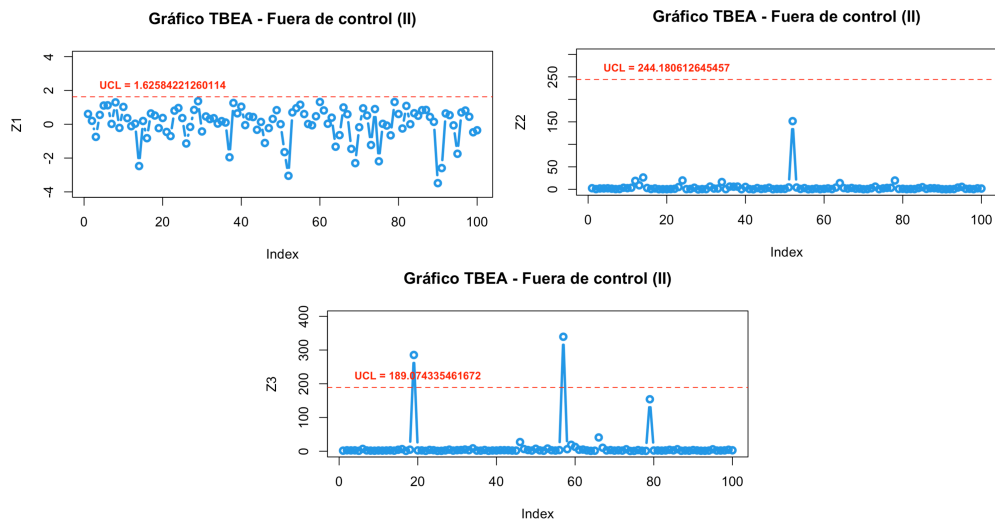


Figura 5.3: Gráfico fuera de control (II) para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

En este último capítulo, se exponen las conclusiones a las que se ha llegado a través de este trabajo, relacionando estas con el cumplimiento de los objetivos propuestos al principio del mismo.

En la presente memoria, se ha logrado desarrollar teóricamente la construcción de un gráfico de control TBEA para casos en los que la amplitud es multivariante. Para ello, se ha recurrido al estadístico M que supone el mínimo de las componentes del vector de amplitudes \mathbf{X} como forma de resumir la información con la que se cuenta. A su vez, se ha llegado a las expresiones analíticas de las funciones de distribución que caracterizan a tres estadísticos distintos que pueden ser monitorizados en este tipo de gráficos de control (Z_1 , Z_2 y Z_3), las cuales son necesarias para el diseño de este.

A través de la aplicación de la metodología expuesta, se ha conseguido implementar informáticamente una serie de experiencias numéricas en las que se han considerado diversos escenarios posibles, tanto bajo control como fuera de control. De esta forma, se han proporcionado resultados numéricos con los valores del límite de control superior para el diseño del gráfico y las respectivas medidas de desempeño del mismo para todas las combinaciones posibles.

Mediante análisis descriptivos, ANOVA y el método inferencial de Games-Howell, se ha realizado un análisis del rendimiento de este gráfico de control a través del comportamiento que presenta el ATS_1 . Así, se ha observado que los factores que más influyen sobre la aptitud resultan las disminuciones en la media del tiempo T (factor δ_T), seguido de los incrementos en la media de la amplitud \mathbf{X} (factor δ_X) y la desviación típica que presenta el tiempo T (factor σ_{T_0}). Por otro lado, se ha comprobado que las diferencias que proporcionan los resultados

cuando la variable tiempo T sigue una distribución *gamma* en comparación a cuando sigue una distribución *Weibull* no resultan demasiado significativas.

A su vez, a través del análisis gráfico de las interacciones entre factores, se concluye que este gráfico de control detecta rápidamente un cambio brusco tanto en el tiempo entre eventos T como en la amplitud del evento \mathbf{X} , independientemente del correspondiente cambio que se produzca en la otra dimensión.

Se ha comparado el desempeño del gráfico de control para tres estadísticos diferentes (Z_1 , Z_2 y Z_3) con el fin de poder aconsejar a un futuro usuario la monitorización de uno de ellos en función de la situación que se espere o interese detectar. De esta manera, se ha deducido que:

- Para un cambio solo en la amplitud \mathbf{X} o un cambio simultáneo de la amplitud \mathbf{X} y el tiempo entre eventos T , el enfoque más adecuado lo proporciona el estadístico Z_1 . La monitorización de Z_2 sería la segunda opción más idónea.
- Para un cambio solo en el tiempo T , la mejor opción resulta la monitorización del estadístico Z_3 , quedando el uso de Z_2 en segundo lugar.

Por último, para ilustrar el trabajo realizado, se ha generado un gráfico de control TBEA como ejemplo de aplicación en un contexto real, simulando dos tipos de salidas de control, cuyos resultados han sido coherentes con las conclusiones sacadas a través de la batería de pruebas.

6.2. Trabajo futuro

A partir del estudio llevado a cabo con este trabajo, se podrían afrontar las siguientes líneas futuras de investigación:

- Plantear una monitorización en la que el tiempo entre un evento concreto T y su amplitud multidimensional \mathbf{X} correspondiente estén correladas entre ellas.
- Estudiar los gráficos de control TBEA a través del uso de otros métodos estadísticos. Por ejemplo, mediante esquemas EWMA o CUSUM.

Bibliografía

- [1] T. Calvin, 1983, *Quality Control Techniques for “Zero Defects”*. IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, 6(3):323–328.
- [2] Z. Wu, J. Jiao, and H. Zhen, 2009, *A Control Scheme for Monitoring the Frequency and Magnitude of an Event*. International Journal of Production Research, 47(11):2887–2902.
- [3] D. Rahali, P. Castagliola, H. Taleb, and M.B.C. Khoo, 2019, *Evaluation of Shewhart Time-Between-Events-and-Amplitude Control Charts for Several Distributions*. Quality Engineering, doi: 10.1080/08982112.2018.1479036.
- [4] A. Rodríguez and J. Rodríguez, 2009, *Control estadístico de la calidad de un servicio mediante Gráficas X y R*. Política y Cultura, pages 151–169.
- [5] Douglas C. Montgomery., 2012, *Introduction to Statistical Quality Control*, volume 7, Wiley.
- [6] F. Aparisi, 2022, “Control Estadístico de la Calidad”, *Gráficos de control con un solo límite* (Tema 5), Valencia. Universitat Politècnica de València.
- [7] J.M. Lucas, 1985, *Counted Data CUSUM’s*. Technometrics, 27(2):129-144.
- [8] Vardeman, S., and D. O. Ray, 1985, *Average run lengths for CUSUM schemes when observations are exponentially distributed*. Technometrics, 27(2):145–50.
- [9] L.Y. Chan, M. Xie, and T.N. Goh, 2000, *Cumulative Quantity Control Charts for Monitoring Production Processes*. International Journal of Production Research, 38(2):397-408. doi: 10.1080/002075400189482.
- [10] M. Xie, T.N. Goh and P. Ranjan, 2002, *Some Effective Control Chart Procedures for Reliability Monitoring*. Reliability Engineering & System Safety, 77(2):143-150.

- [11] P.D. Bourke, 2001, *The Geometric CUSUM Chart with Sampling Inspection for Monitoring Fraction Defective*. Journal of Applied Statistics, 28(8):951-972.
- [12] C.M. Borrór, J.B. Keats, and D.C. Montgomery, 2003, *Robustness of the Time Between Events CUSUM*. International Journal of Production Research, 41(15):3435-3444.
- [13] M.S. Shafae, R.M. Dickinson, W.H. Woodall, and J.A. Camelio, 2014, *Cumulative Sum Control Charts for Monitoring Weibull-Distributed Time Between Events*. Quality and Reliability Engineering International.
- [14] Y.J. Xie, K.L. Tsui, M. Xie, and T.N. Goh, 2010. *Monitoring Time-Between-Events for Health Management*. Prognostics and Health Management Conference, 2010. PHM10., pages 1-8. IEEE.
- [15] Zhang, H. Y., M. Xie, T. N. Goh, and M. Shamsuzzaman, 2011, *Economic design of time-between-events control chart system*. Computers & Industrial Engineering, 60(4):485–92.
- [16] Cheng, C. S., and P. W. Chen, 2011, *An ARL-unbiased design of time-between-events control charts with runs rules*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(7):857–71.
- [17] L. Qu, Z. Wu, M. B. C. Khoo and A. Rahim, 2014, *Timebetween- event control charts for sampling inspection*. Technometrics, 56(3):336–46.
- [18] S. Ali, A. Pievatolo, and R. Göb, 2016. *An Overview of Control Charts for High- Quality Processes*. Quality and reliability engineering international, 32(7):2171-2189.
- [19] N. Chakraborty, S.W. Human and N. Balakrishnan, 2017. *A Generally Weighted Moving Average Chart for Time Between Events*. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(10):7790-7817.
- [20] S. Huang, J. Yang and A. Mukherjee, 2018. *Distribution-Free EWMA Schemes for Simultaneous Monitoring of Time Between Events and Event Magnitude*. Computers & Industrial Engineering, 126(10):317-336.
- [21] Z. Wu and L. Qu, 2010, *A Single Chart for Monitoring Frequency and Magnitude of Events*. In Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM). IEEE International Conference, pages 1416-1420.
- [22] L. Qu, Z. Wu, M.B.C. Khoo, and P. Castagliola, 2013, *A CUSUM Scheme for Event Monitoring*. International Journal of Production Economics, 145(1):268-280.

- [23] L. Qu, Z. Wu, M.B.C. Khoo and A. Rahim, 2014. *Time-Between-Event Control Charts for Sampling Inspection*. *Technometrics*, 56(3):336-346.
- [24] L. Qu, S. He, M.B.C. Khoo and P. Castagliola, 2018, *A CUSUM Chart for Detecting the Intensity Ratio of Negative Events*. *International Journal of Production Research*, 56(19):6553-6567.
- [25] S. Ali and A. Pievatolo, 2018, *Time and Magnitude Monitoring Based on the Renewal Reward Process*. *Reliability Engineering & System Safety*.
- [26] Qu, L., S. He, M. B. C. Khoo and P. Castagliola, 2017, *A CUSUM chart for detecting the intensity ratio of negative events*. *International Journal of Production Research* 1–15. doi:10.1080/00207543.2017.1398423.
- [27] R.P. Brent, 1971, *An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function*. *The Computer Journal*, 14(4):422-425.
- [28] P. Castagliola, G. Celano, D. Rahali and S. Wu, 2022, *Control Charts for Monitoring Time-Between-Events-and-Amplitude Data*. *Control Charts and Machine Learning for Anomaly Detection in Manufacturing*, pp.43-76, ff10.1007/978-3-030-83819-5_3ff. fhal-03328534f
- [29] P.A. Games, H.J. Keselman and J.J. Clinch, 1979, *Tests for homogeneity of variance in factorial designs*. *Psychological Bulletin*, 86(5):978-984

Anexos A

Algoritmos

A.1. Cálculo límite de control superior

El cálculo del límite de control superior a través de Simulación Montecarlo se ha realizado mediante software R con el siguiente algoritmo: https://drive.google.com/file/d/1TVvIsA7newAH0go3cVSzMfmc0h4y_iT1/view?usp=sharing.

El cálculo exacto del límite de control superior se ha realizado mediante software Mathematica a través del algoritmo: https://drive.google.com/file/d/1HoP_OYEm8q_4MQCReYe0ZnKX750vsGM8/view?usp=sharing.

Este último código también se puede observar a través del siguiente documento: https://drive.google.com/file/d/1YCtbEhu167_A2ky0IqEP9yY8ZGdCQtP/view?usp=sharing

A.2. Cálculo del rendimiento del gráfico

El algoritmo utilizado para medir la eficiencia del gráfico de control en la experiencia computacional que se ha implementado a través del software R es el siguiente: <https://drive.google.com/file/d/1jjW5-SBUwCrKejS2dlLuYBwzJsPFS4Px/view?usp=sharing>

A.3. Resultados y discusión

A través del software R, se ha utilizado el siguiente algoritmo para la Sección 4.3 de la memoria: https://drive.google.com/file/d/1TUFsVyy1ChLp5Agakx6VHr1EB_V3sg6C/view?usp=sharing.

A.4. Ejemplo numérico

A través del software R, se ha utilizado el siguiente algoritmo para realizar el ejemplo numérico del trabajo: <https://drive.google.com/file/d/1B-01PZ5S3-PvdI1DntGvpTN1r2FDaQb7/view?usp=sharing>

Anexos B

Tablas y gráficos

B.1. Tablas de datos completas

B.1.1. Límites de control superiores (UCL)

Los archivos que contienen todos los UCL calculados se encuentran en los siguientes enlaces:

- Para Z_1 :
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vNJWyOfgzwwSErV-3K_KpY8xlovU1gtv/edit?usp=sharing&ouid=100093196156776886782&rtpof=true&sd=true
- Para Z_2 :
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1M-sEsoQbimb6SrDXtBbubm7GSMcqs2pG/edit?usp=sharing&ouid=100093196156776886782&rtpof=true&sd=true>
- Para Z_3 :
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1EdoGGdWl3VgRL6RXZwuwqJZxRq-1zu02/edit?usp=sharing&ouid=100093196156776886782&rtpof=true&sd=true>

B.1.2. Medidas del rendimiento del gráfico

Los archivos que contienen todos los casos considerados en la experiencia computacional para medir la eficiencia del gráfico de control, con sus correspondientes datos, se encuentran en los siguientes enlaces:

- Para Z_1 :
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1ofqDG1GrpLrzG4_

h1woa-60yg9-NrN_w/edit?usp=sharing&oid=100093196156776886782&rtpof=true&sd=true

- Para Z_2 :
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1aaf9krgezUMIyHmE39gPQV7_J9qt0YpHn/edit?usp=sharing&oid=100093196156776886782&rtpof=true&sd=true
- Para Z_3 :
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1PH0vn3PPzGe2NY1DBMRAL4o38z0A2nti/edit?usp=sharing&oid=100093196156776886782&rtpof=true&sd=true>

B.2. Gráficas de interacciones

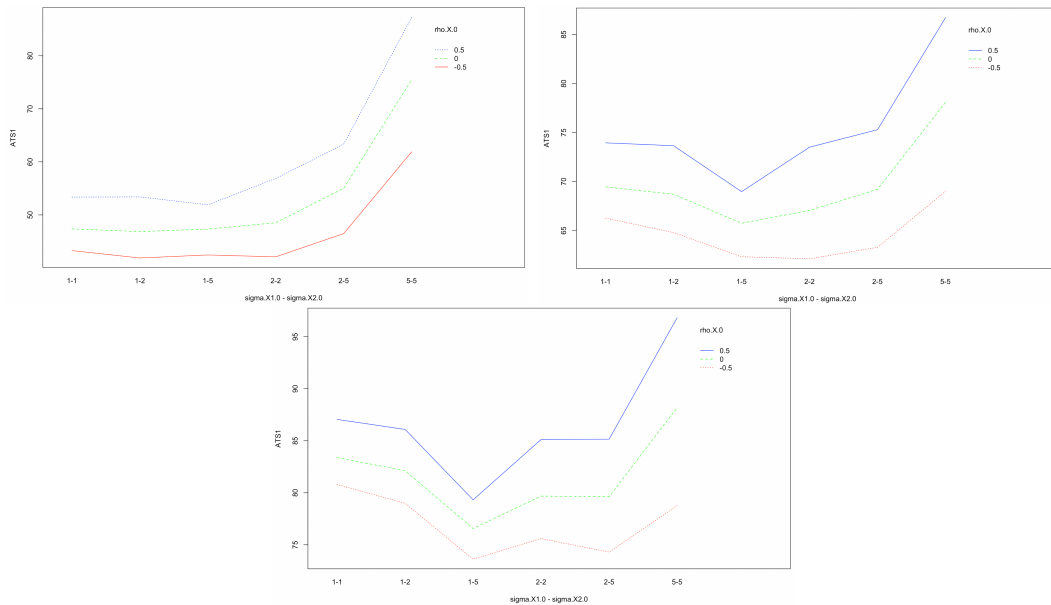


Figura B.1: Interacción de σ_{X_0} con ρ_{X_0} para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

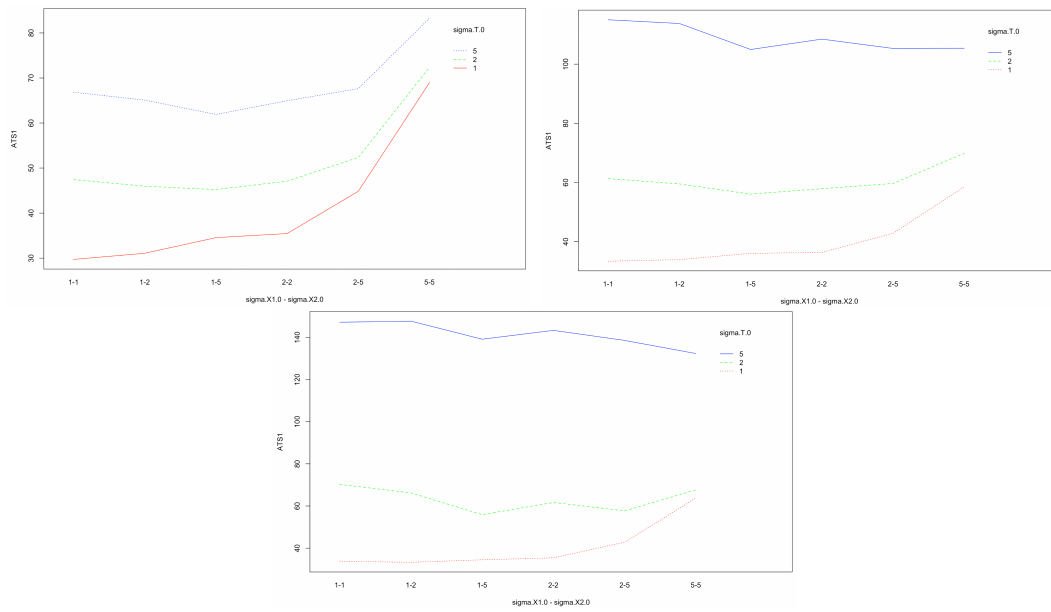


Figura B.2: Interacción de σ_{X_0} con σ_{T_0} para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

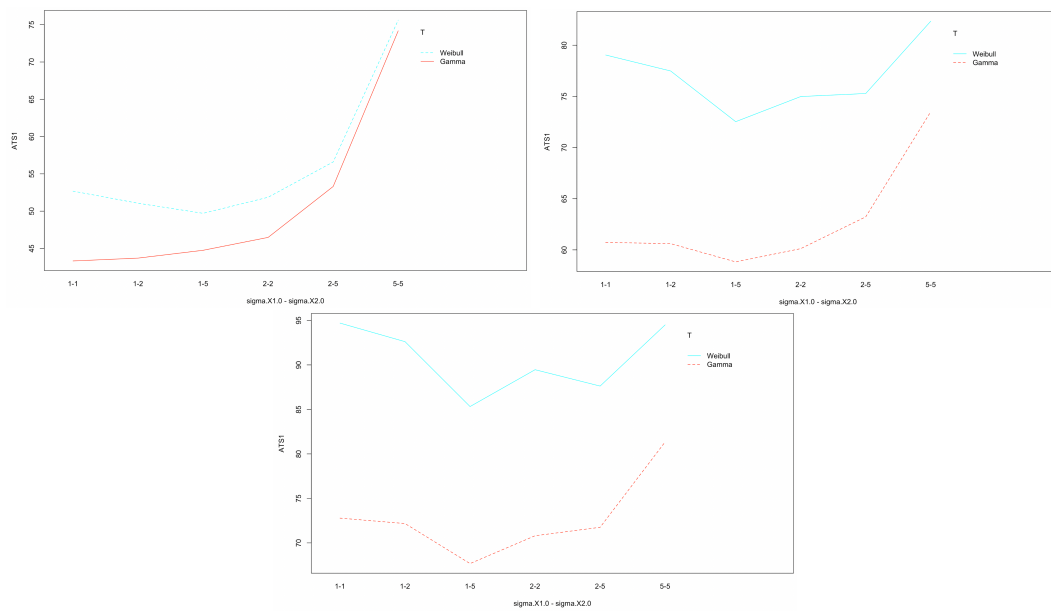


Figura B.3: Interacción de σ_{X_0} con T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

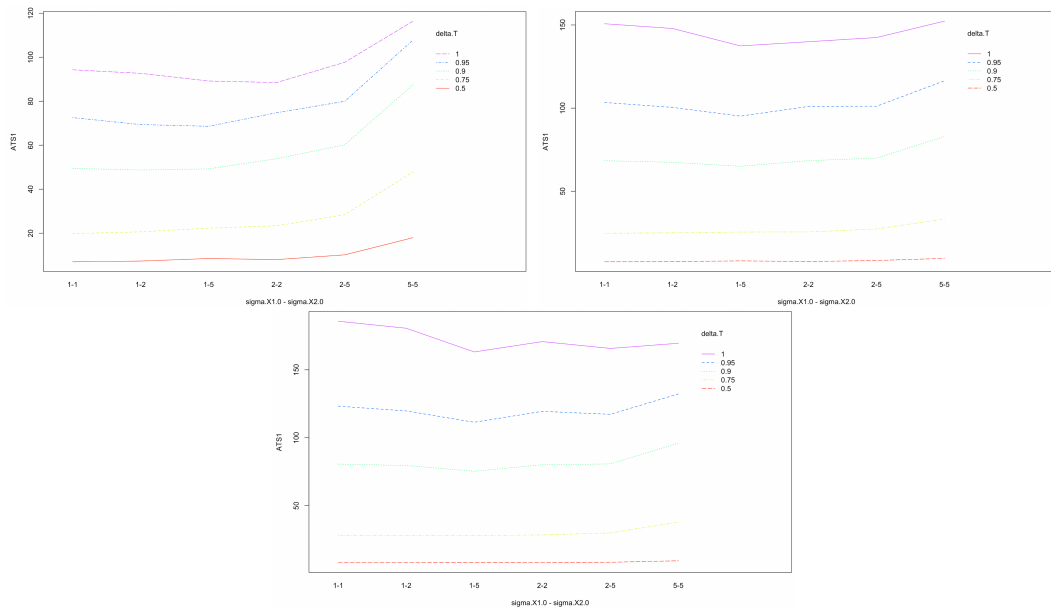


Figura B.4: Interacción de σ_{X_0} con δ_T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

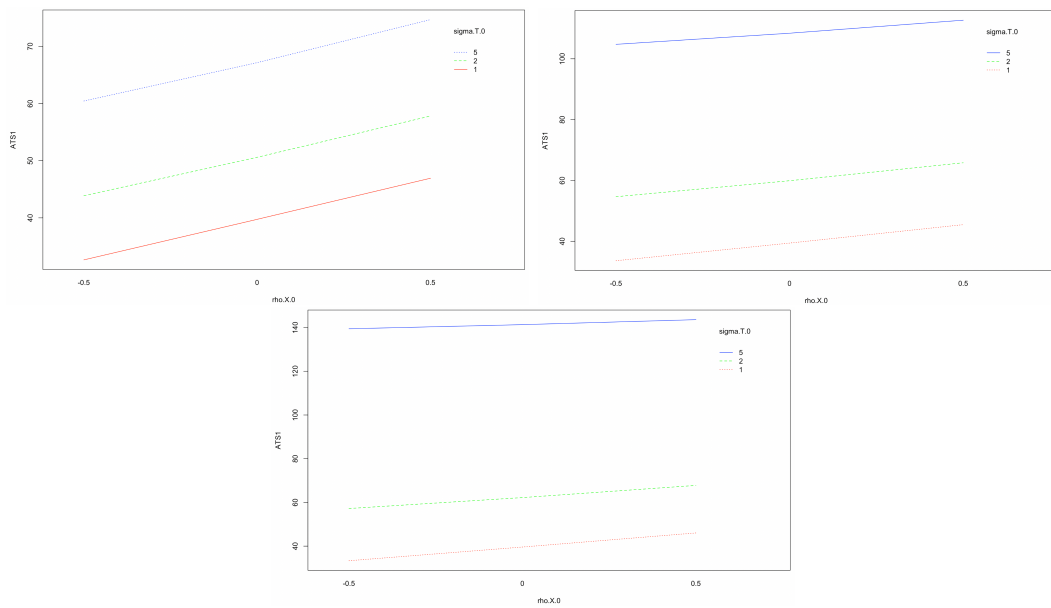


Figura B.5: Interacción de ρ_{X_0} con σ_{T_0} para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

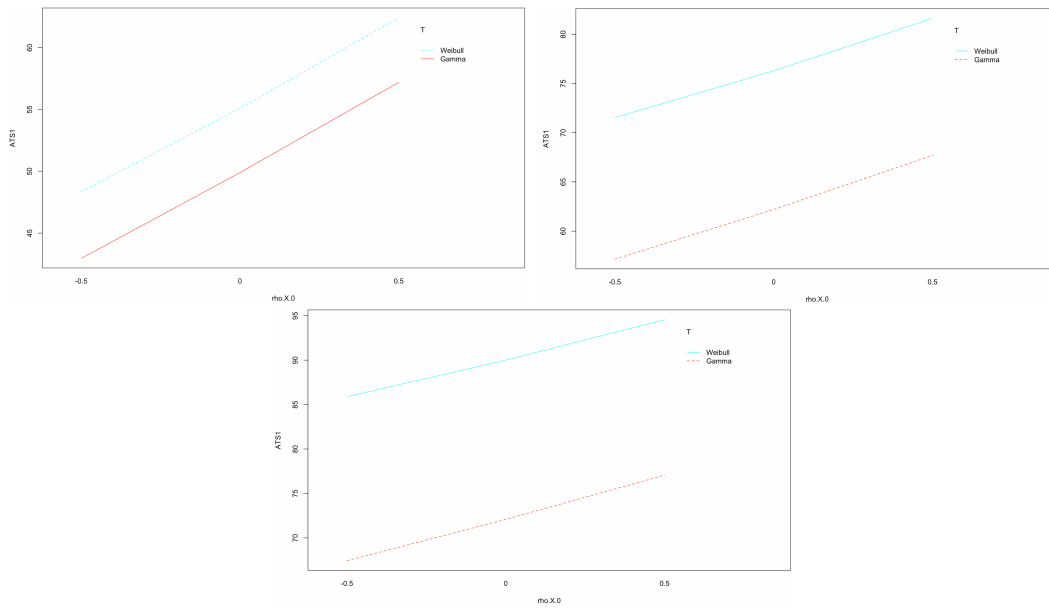


Figura B.6: Interacción de ρ_{X_0} con T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

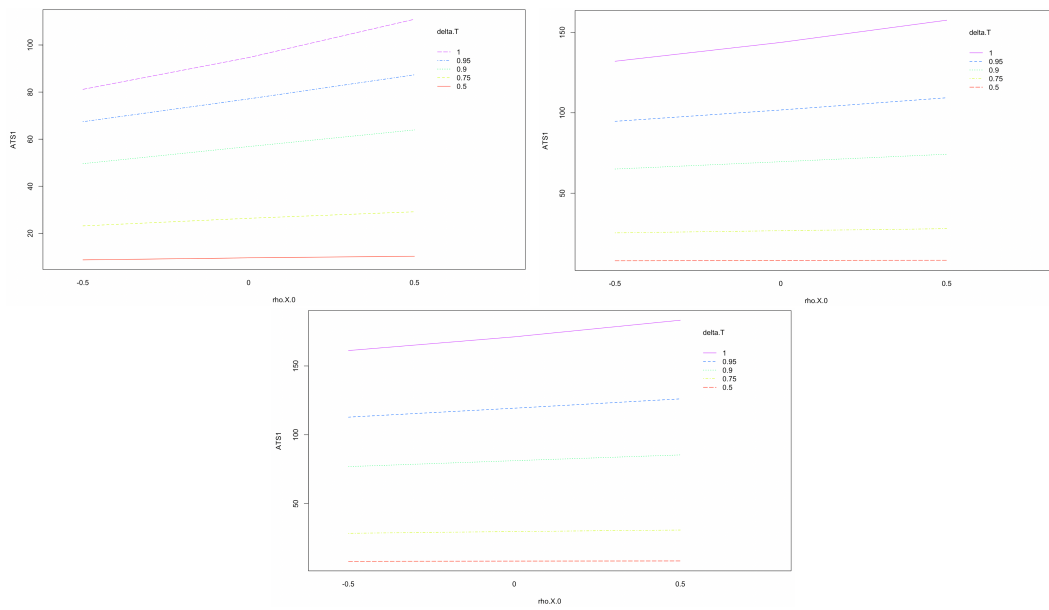


Figura B.7: Interacción de ρ_{X_0} con δ_T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

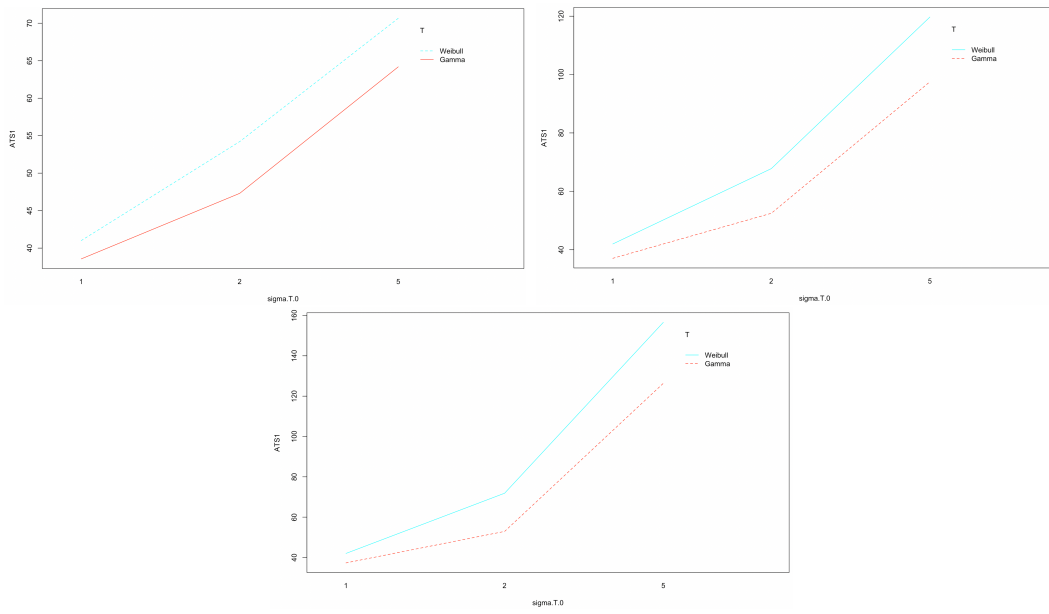


Figura B.8: Interacción de σ_{T_0} con T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

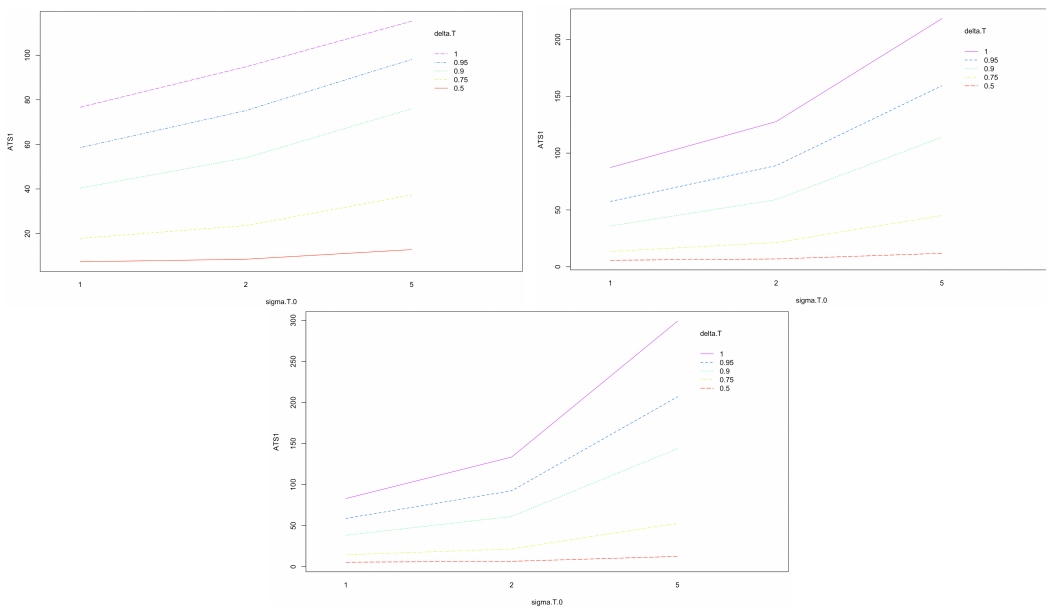


Figura B.9: Interacción de σ_{T_0} con δ_T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

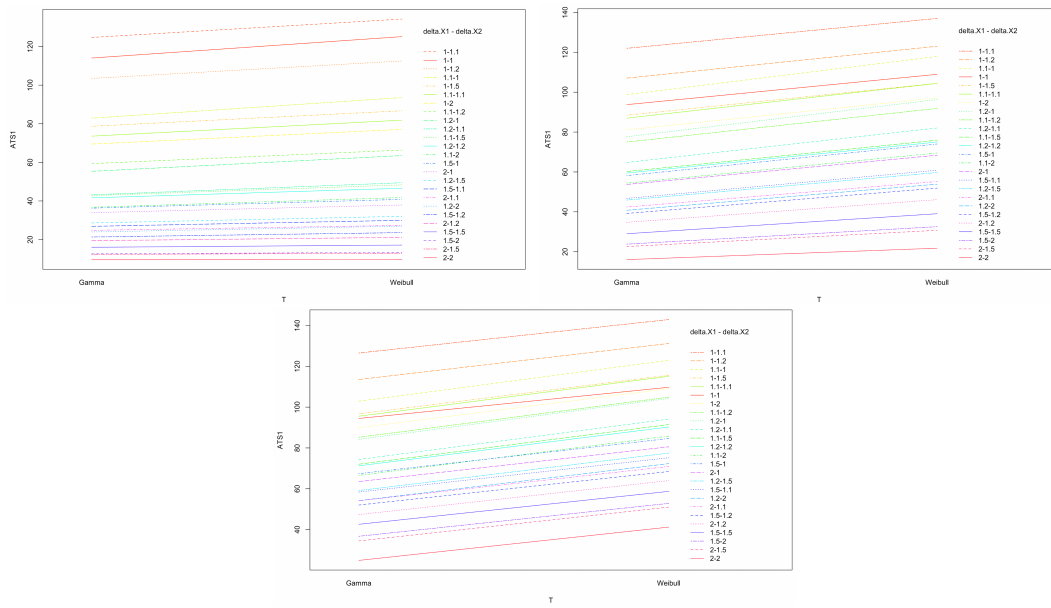


Figura B.10: Interacción de T con δ_X para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

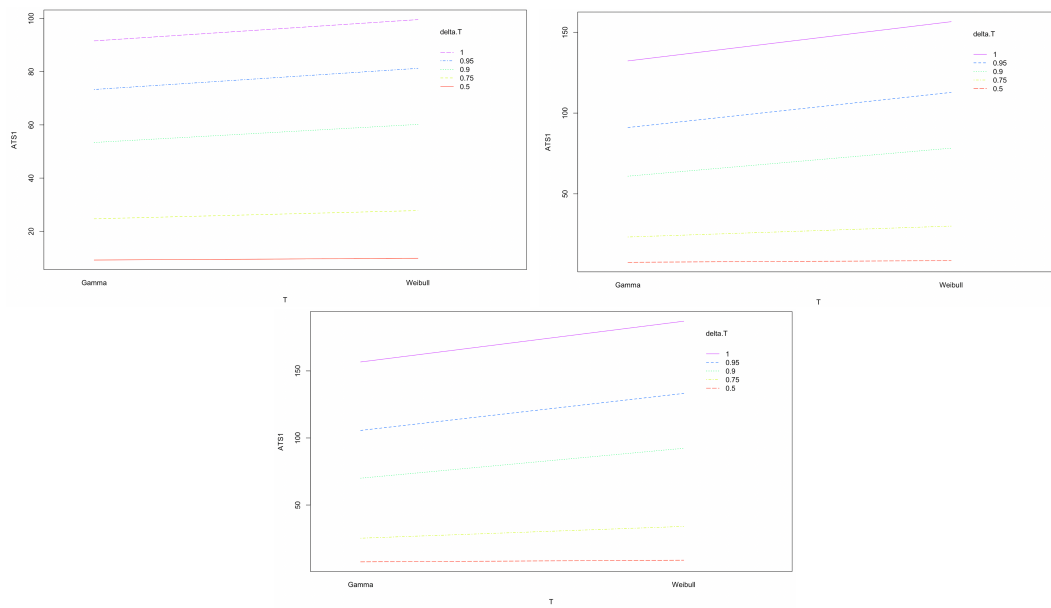


Figura B.11: Interacción de T con δ_T para Z_1 , Z_2 y Z_3 , respectivamente.

Anexos C

Games-Howell

C.1. Combinaciones dos a dos niveles del factor

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1 – 1	1 – 2	-0,6206663	-6,1972970	4,955964	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 – 1	1 – 5	-0,7728358	-6,5068639	4,961192	$9,99e - 01$	ns
ATS_1	1 – 1	2 – 2	1,1688506	-5,0344943	7,372196	$9,95e - 01$	ns
ATS_1	1 – 2	1 – 5	-0,1521695	-5,0473848	4,743046	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 – 2	2 – 2	1,7895169	-3,6486398	7,227674	$9,37e - 01$	ns
ATS_1	1 – 5	2 – 2	1,9416864	-3,6577786	7,541151	$9,22e - 01$	ns

Cuadro C.1: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor σ_{X_0} para Z_1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1 - 1	1 - 2	-0,8423815	-8,6302022	6,945439	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	1 - 5	-4,2115291	-11,8822987	3,459240	$6,21e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1	2 - 2	-2,3353700	-10,8438323	6,173092	$9,70e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1	2 - 5	-0,6322715	-8,2973357	7,032793	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	5 - 5	8,0422838	-0,5120936	16,596661	$7,90e - 02$	ns
ATS_1	1 - 2	1 - 5	-3,3691477	-9,8256993	3,087404	$6,72e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	2 - 2	-1,4929885	-8,9266058	5,940629	$9,93e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	2 - 5	0,2101100	-6,2396549	6,659875	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 5	2 - 2	1,8761592	-5,4347128	9,187031	$9,78e - 01$	ns
ATS_1	1 - 5	2 - 5	3,5792577	-2,7285107	9,887026	$5,87e - 01$	ns
ATS_1	2 - 2	2 - 5	1,7030985	-5,6017858	9,007983	$9,86e - 01$	ns

Cuadro C.2: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor σ_{X_0} para Z_2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1 - 5	5 - 5	11,4239488	2,7154158	20,132482	0,003	**

Cuadro C.3: Games-Howell par de combinaciones significativa factor σ_{X_0} para Z_3

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	-0,5	0,5	9,153887	4,0588713	14,248904	$7,61e - 05$	****

Cuadro C.4: Games-Howell par de combinaciones significativa factor ρ_{X_0} para Z_3

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1 - 1	1 - 1,1	9,86596	-12,97527	32,70720	$9,98e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1	1 - 1,2	-11,59996	-32,83149	9,63156	$9,52e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,2	1,1 - 1	-19,77970	-39,75116	0,19175	$5,60e - 02$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1 - 2	-9,42309	-23,94465	5,09846	$7,81e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1	5,51412	-12,79776	23,82600	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1,1	-4,97696	-19,15153	9,19760	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1	14,93721	-3,004233	32,87865	$2,74e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,1	4,44612	-9,241457	18,13371	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,2	-10,43096	-22,94138	2,07943	$2,74e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,2 - 1	-13,85381	-27,88577	0,17814	$5,80e - 02$	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,1 - 1,1	-10,49108	-28,15554	7,17336	$8,89e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,2 - 1	-3,42284	-15,92190	9,07621	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,1 - 2	-6,31049	-13,37835	0,75736	$1,62e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1,1	0,74523	-8,488910	9,97938	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1,2	-1,46760	-9,113932	6,17871	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,5 - 1	-7,00992	-15,43834	1,41849	$2,77e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,2 - 1,1	7,05573	-1,796654	15,90811	$3,60e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,2 - 1,2	4,84288	-2,333351	12,01911	$7,14e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,5 - 1	-0,69943	-8,706580	7,30771	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 2	2 - 1	-3,33491	-11,11048	4,44065	$9,98e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,1	1,2 - 1,2	-2,21284	-11,52938	7,10368	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,1	1,5 - 1	-7,75516	-17,71499	2,20467	$4,10e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,2	1,5 - 1	-5,54231	-14,06116	2,97652	$7,73e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,2	2 - 1	-8,17779	-16,47977	0,12417	$6,00e - 02$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	1,5 - 1,1	-1,90659	-7,361172	3,54797	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	2 - 1	5,60341	-1,563482	12,77031	$4,00e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	2 - 1,1	-4,26036	-9,403758	0,88303	$2,85e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,1	2,96202	-2,066474	7,99051	$8,97e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,2	-2,98555	-7,112511	1,14139	$5,72e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1,1	0,60825	-4,079943	5,29645	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1	2 - 1	-2,63548	-11,65804	6,38706	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1,1	-2,35376	-7,974260	3,26672	$9,98e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,1	3,59381	-1,242842	8,43047	$5,11e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,2	-2,18514	-6,149026	1,77873	$9,46e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 2	2 - 1,5	-0,36661	-1,973142	1,23990	$1,00e + 00$	ns

Cuadro C.5: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor δ_X para Z_1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1 - 1	1 - 1,2	13,69315	-8,126591	35,51290	98,29e - 01	ns
ATS_1	1 - 1	1 - 1,5	-4,89726	-25,298736	15,50419	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 1	1 - 2	-12,21638	-32,246070	7,81329	8,64e - 01	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1	6,99360	-19,210475	33,19768	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1,1	-5,64498	-25,894286	14,60432	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1,2	-17,93163	-37,284922	1,42165	1,15e - 01	ns
ATS_1	1 - 1	1,2 - 1	-14,38576	-38,132659	9,36113	8,70e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,1	1 - 1,2	-14,44554	-37,854567	8,96347	8,51e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,1	1,1 - 1	-21,14509	-48,678042	6,38785	4,41e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,2	1 - 1,5	-18,59042	-39,315955	2,13510	1,55e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,2	1,1 - 1	-6,69954	-33,156736	19,75763	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 1,2	1,1 - 1,1	-19,33813	-39,913828	1,23755	1,00e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,5	1 - 2	-7,31911	-26,147013	11,50877	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1	11,89087	-13,419162	37,20091	9,92e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1,1	-0,74771	-19,809581	18,31415	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1,2	-13,03436	-31,139347	5,07061	5,85e - 01	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,2 - 1	-9,48849	-32,241011	13,26402	9,98e - 01	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1	19,20999	-5,804001	44,22398	4,39e - 01	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,1	6,57140	-12,091081	25,23388	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,2	-5,71524	-23,398774	11,96827	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 2	1,2 - 1	-2,16937	-24,591111	20,25235	1,00e + 00	ns
ATS_1	1 - 2	1,2 - 1,1	-15,72553	-36,232680	4,78160	4,44e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,1 - 1,1	-12,63858	-37,827215	12,55003	9,81e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,2 - 1	-21,37936	-49,425669	6,66693	4,56e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,1	1,1 - 1,2	-12,28665	-30,219411	5,64610	6,86e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,1	1,2 - 1	-8,74077	-31,357755	13,87619	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,1 - 1,5	-15,36810	-31,091335	0,35512	6,50e - 02	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,2 - 1	3,54587	-18,277566	25,36931	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,2 - 1,1	-10,01028	-29,859714	9,83913	9,80e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,5 - 1	-17,33139	-36,743450	2,08065	1,61e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,1 - 2	-6,10618	-20,132129	7,91976	9,97e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1	18,91397	-2,012870	39,84082	1,43e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1,1	5,35781	-13,498666	24,21429	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1,2	-0,82967	-15,287256	13,62790	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,5 - 1	-1,96329	-20,358103	16,43151	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,5 - 1,1	-14,26762	-30,598247	2,06300	1,92e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	2 - 1	-7,00511	-24,676351	10,66611	9,99e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,2 - 1,1	11,46399	-7,083669	30,01166	8,44e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,2 - 1,2	5,27650	-8,771425	19,32444	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,2 - 1,5	-9,14317	-21,950616	3,66426	6,03e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,5 - 1	4,14289	-13,935006	22,22079	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 2	1,5 - 1,1	-8,16143	-24,132984	7,81010	9,77e - 01	ns
ATS_1	1,1 - 2	2 - 1	-0,89893	-18,239659	16,44178	1,00e + 00	ns
ATS_1	1,1 - 2	2 - 1,1	-13,14651	-28,317090	2,02406	2,05e - 01	ns
ATS_1	1,2 - 1	1,2 - 1,1	-13,55616	-37,697525	10,58519	9,35e - 01	ns

Cuadro C.6: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor δ_X para Z_2 (Parte I)

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1,2 - 1	1,2 - 1,2	-19,74365	-40,685040	1,19773	$9,60e - 02$	ns
ATS_1	1,2 - 1	1,5 - 1	-20,87726	-44,663839	2,90929	$1,85e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,1	1,2 - 1,2	-6,18749	-25,060149	12,68516	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,1	1,5 - 1	-7,32110	-29,319803	14,67759	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,1	1,5 - 1,1	-19,62543	-39,946313	0,69543	$7,50e - 02$	ns
ATS_1	1,2 - 1,1	2 - 1	-12,36293	-33,765552	9,03968	$9,14e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,2	1,5 - 1	-1,13361	-19,545021	17,27778	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,2	1,5 - 1,1	-13,43794	-29,787325	2,91143	$3,00e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,2	2 - 1	-6,17544	-23,863967	11,51308	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	1,2 - 2	-5,47844	-17,003078	6,04618	$9,91e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	1,5 - 1	13,28606	-4,207965	30,78009	$4,62e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	1,5 - 1,1	0,98173	-14,323460	16,28693	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	1,5 - 1,2	-7,26799	-21,170629	6,63464	$9,70e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	2 - 1	8,24424	-8,486226	24,97470	$9,85e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	2 - 1,1	-4,00333	-18,469579	10,46290	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 1,5	2 - 1,2	-12,39477	-25,379837	0,59027	$8,50e - 02$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,1	6,46018	-8,512505	21,43287	$9,97e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,2	-1,78954	-15,324232	11,74514	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1	13,72268	-2,704851	30,15022	$2,67e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1,1	1,47510	-12,638305	15,58852	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1,2	-6,91633	-19,505799	5,67313	$9,48e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1	1,5 - 1,1	-12,30433	-32,199241	7,59058	$8,44e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1	2 - 1	-5,04182	-26,041335	15,95768	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1	2 - 1,1	-17,28940	-36,554367	1,97555	$1,53e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	1,5 - 1,2	-8,24972	-25,097670	8,59821	$9,86e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1	7,26250	-11,968286	26,49329	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1,1	-4,98507	-22,296850	12,32669	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1,2	-13,37651	-29,483376	2,73034	$2,79e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	1,5 - 1,5	-11,50476	-24,017017	1,00748	$1,22e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1	15,51223	-2,634993	33,65945	$2,27e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,1	3,26465	-12,828974	19,35827	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,2	-5,12678	-19,912070	9,65849	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	1,5 - 2	-5,86827	-13,534915	1,79837	$4,52e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	2 - 1,2	6,37797	-5,102711	17,85866	$9,41e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	2 - 1,5	-7,38489	-16,143961	1,37417	$2,52e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 2	2 - 1,5	-1,51662	-9,688550	6,65530	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	2 - 1	2 - 1,1	-12,24757	-30,824955	6,32979	$7,50e - 01$	ns
ATS_1	2 - 1,1	2 - 1,2	-8,39144	-23,705940	6,92305	$9,49e - 01$	ns

Cuadro C.7: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor δ_X para Z_2 (Parte II)

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	1 - 1	1 - 1,2	20,28241	-2,685420	43,250247	$1,77e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1	1 - 1,5	4,08007	-17,941584	26,101740	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	1 - 2	-2,60896	-24,401927	19,183994	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1	10,83856	-17,020957	38,698090	$9,99e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1,1	3,24705	-18,640897	25,135003	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1,2	-7,03316	-28,378046	14,311708	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	1,1 - 1,5	-20,36453	-41,105940	0,376870	$6,20e - 02$	ns
ATS_1	1 - 1	1,2 - 1	-7,86999	-34,372916	18,632926	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1	1,2 - 1,1	-17,86700	-43,486595	7,752588	$6,46e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,1	1 - 1,2	-12,34704	-37,232604	12,538523	$9,84e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,1	1,1 - 1	-21,79088	-51,240161	7,658386	$5,22e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,2	1 - 1,5	-16,20233	-39,260610	6,855938	$6,36e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,2	1,1 - 1	-9,44384	-38,124143	19,236448	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1,2	1,1 - 1,1	-17,03536	-39,966010	5,895288	$5,17e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1 - 2	-6,68904	-28,576677	15,198586	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1	6,75848	-21,176574	34,693551	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1,1	-0,83302	-22,815292	21,149241	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,1 - 1,2	-11,11324	-32,554499	10,328004	$9,74e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,2 - 1	-11,95007	-38,532117	14,631970	$9,95e - 01$	ns
ATS_1	1 - 1,5	1,2 - 1,1	-21,94708	-47,648304	3,754140	$2,29e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1	13,44753	-14,309262	41,204329	$9,88e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,1	5,85601	-15,896970	27,609009	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,2	-4,42420	-25,630201	16,781796	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 2	1,1 - 1,5	-17,75556	-38,353460	2,842322	$2,15e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,2 - 1	-5,26102	-31,655401	21,133344	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1 - 2	1,2 - 1,1	-15,25803	-40,764913	10,248839	$8,83e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,2 - 1,2	-18,72896	-39,359963	1,902035	$1,39e - 01$	ns
ATS_1	1 - 2	1,5 - 1	-23,47968	-48,787105	1,827741	$1,13e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,1 - 1,1	-7,59151	-35,422260	20,239233	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,1 - 1,2	-17,87173	-45,281459	9,537987	$7,67e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,2 - 1	-18,70856	-50,255813	12,838688	$8,91e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1	1,2 - 1,1	-28,70557	-59,520755	2,109614	$1,08e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,1	1,1 - 1,2	-10,28022	-31,583950	11,023505	$9,89e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,1	1,2 - 1	-11,11704	-37,589289	15,355192	$9,98e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,1	1,2 - 1,1	-21,11405	-46,701582	4,473469	$2,92e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,1 - 1,5	-13,33136	-33,453654	6,790921	$7,47e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,1 - 2	-18,88875	-38,780979	1,003459	$9,00e - 02$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,2 - 1	-0,83682	-26,865445	25,191792	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,2 - 1,1	-10,83383	-35,961659	14,293990	$9,98e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,2 - 1,2	-14,30476	-34,460955	5,851432	$6,15e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	1,5 - 1	-19,05547	-43,980728	5,869768	$4,50e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,2	2 - 1	-23,02891	-47,451404	1,393567	$9,60e - 02$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,1 - 2	-5,55739	-24,7991	13,684318	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1	12,49453	-13,045704	38,034784	$9,86e - 01$	ns
ATS_1	1,1 - 1,5	1,2 - 1,1	2,49753	-22,123543	27,118606	$1,00e + 00$	ns

Cuadro C.8: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor δ_X para Z_3 (Parte I)

ATS_1	1,1 – 1,5	1,2 – 1,2	-0,97339	-20,488072	18,541281	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	1,2 – 1,5	-13,44201	-32,330286	5,446256	$6,10e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	1,2 – 2	-18,49369	-37,107693	0,120305	$5,40e - 02$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	1,5 – 1	-5,72411	-30,138286	18,690058	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	1,5 – 1,1	-14,96062	-38,363771	8,442531	$7,99e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	1,5 – 1,2	-21,50812	-44,159742	1,143495	$8,90e - 02$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	2 – 1	-9,69755	-33,597896	14,202790	$9,99e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 1,5	2 – 1,1	-19,22620	-41,948380	3,495962	$2,45e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,2 – 1	18,05193	-7,309281	43,413148	$6,03e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,2 – 1,1	8,05492	-16,380200	32,490050	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,2 – 1,2	4,58399	-14,693202	23,861198	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,2 – 1,5	-7,88462	-26,527265	10,758023	$9,98e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,2 – 2	-12,93629	-31,300925	5,428325	$6,31e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,5 – 1	-0,16671	-24,393310	24,059870	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,5 – 1,1	-9,40322	-32,610386	13,803933	$9,99e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	1,5 – 1,2	-15,95072	-38,399600	6,498140	$6,08e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	2 – 1	-4,14015	-27,848739	19,568421	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,1 – 2	2 – 1,1	-13,66881	-36,188892	8,851261	$8,67e - 01$	ns
ATS_1	1,1 – 2	2 – 1,2	-20,53575	-42,169700	1,098191	$9,00e - 02$	ns
ATS_1	1,2 – 1	1,2 – 1,1	-9,99700	-39,597723	19,603706	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1	1,2 – 1,2	-13,46793	-39,034634	12,098763	$9,67e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1	1,5 – 1	-18,21865	-47,648984	11,211677	$8,43e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1	1,5 – 1,1	-27,45515	-56,060082	1,149762	$8,00e - 02$	ns
ATS_1	1,2 – 1	2 – 1	-22,19209	-51,201410	6,817225	$4,48e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	1,2 – 1,2	-3,47092	-28,119470	21,177616	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	1,2 – 1,5	-15,93954	-40,100145	8,221052	$7,48e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	1,2 – 2	-20,99122	-44,940238	2,957787	$1,87e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	1,5 – 1	-8,22164	-36,863446	20,420156	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	1,5 – 1,1	-17,45815	-45,250116	10,333812	$8,24e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	1,5 – 1,2	-24,00565	-51,173320	3,162009	$1,75e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	2 – 1	-12,19508	-40,403596	16,013428	$9,97e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,1	2 – 1,1	-21,72374	-48,949730	5,502249	$3,58e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	1,2 – 1,5	-12,46861	-31,393056	6,455817	$7,56e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	1,2 – 2	-17,52029	-36,171006	1,130409	$1,00e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	1,5 – 1	-4,75071	-29,192598	19,691161	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	1,5 – 1,1	-13,98722	-37,419314	9,444864	$8,85e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	1,5 – 1,2	-20,53472	-43,216273	2,146816	$1,42e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	2 – 1	-8,72415	-32,652820	15,204505	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,2	2 – 1,1	-18,25281	-41,004815	4,499188	$3,48e - 01$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	1,2 – 2	-5,05167	-23,045265	12,941907	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	1,5 – 1	7,71790	-16,231707	31,667508	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	1,5 – 1,1	-1,51860	-24,436113	21,398902	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	1,5 – 1,2	-8,06610	-30,215119	14,082900	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	2 – 1	3,74446	-19,680840	27,169763	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	2 – 1,1	-5,78419	-28,005400	16,437011	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 – 1,5	2 – 1,2	-12,65113	-33,973412	8,671144	$8,91e - 01$	ns

Cuadro C.9: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor δ_X para Z_3 (Parte II)

ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1	12,76958	-10,966511	36,505671	$9,58e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,1	3,53307	-19,160939	26,227085	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,2	-3,01443	-24,931883	18,903022	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 2	1,5 - 1,5	-12,59153	-29,406522	4,223460	$5,00e - 01$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1	8,79614	-14,410690	32,002971	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1,1	-0,73251	-22,722946	21,257915	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,2 - 2	2 - 1,2	-7,59945	-28,680825	13,481915	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1	1,5 - 1,1	-9,23650	-36,846435	18,373422	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1	1,5 - 1,2	-15,78401	-42,765248	11,197227	$9,03e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1	2 - 1	-3,97343	-32,002736	24,055857	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1	2 - 1,1	-13,50209	-40,542077	13,537886	$9,82e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1	2 - 1,2	-20,36903	-46,682506	5,944436	$4,22e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	1,5 - 1,2	-6,54750	-32,622433	19,527425	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	1,5 - 1,5	-16,12460	-38,138530	5,889322	$5,41e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1	5,26306	-21,896397	32,422531	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1,1	-4,26558	-30,401386	21,870209	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,1	2 - 1,2	-11,13252	-36,514827	14,249770	$9,97e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	1,5 - 1,5	-9,57710	-30,788893	11,634691	$9,95e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	1,5 - 2	-15,46874	-36,261799	5,324313	$5,07e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1	11,81057	-14,709064	38,330206	$9,96e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,1	2,28191	-23,187223	27,751052	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,2	-4,58502	-29,279442	20,109392	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	2 - 1,5	-17,52707	-40,385780	5,331638	$4,43e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,2	1,5 - 2	-5,89164	-21,194785	9,411500	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	2 - 1	21,38767	-1,154953	43,930296	$9,00e - 02$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	2 - 1,1	11,85901	-9,428241	33,146272	$9,39e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	2 - 1,2	4,99207	-15,353815	25,337967	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 1,5	2 - 1,5	-7,94997	-25,999225	10,099284	$9,97e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 2	2 - 1,1	17,75065	-3,119415	38,620730	$2,35e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 2	2 - 1,2	10,88371	-9,024743	30,792179	$9,50e - 01$	ns
ATS_1	1,5 - 2	2 - 1,5	-2,05832	-19,611265	15,494609	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	1,5 - 2	2 - 2	-11,71870	-24,717202	1,279794	$1,48e - 01$	ns
ATS_1	2 - 1	2 - 1,1	-9,52865	-36,108099	17,050786	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	2 - 1	2 - 1,2	-16,39559	-42,235028	9,443836	$8,10e - 01$	ns
ATS_1	2 - 1,1	2 - 1,2	-6,86693	-31,625768	17,891888	$1,00e + 00$	ns
ATS_1	2 - 1,1	2 - 1,5	-19,80898	-42,737486	3,119514	$2,10e - 01$	ns
ATS_1	2 - 1,2	2 - 1,5	-12,94204	-35,002766	9,118673	$9,01e - 01$	ns
ATS_1	2 - 1,5	2 - 2	-9,66037	-25,819548	6,498796	$8,81e - 01$	ns

Cuadro C.10: Games-Howell pares de combinaciones no significativas factor δ_X para Z_3 (Parte III)

C.2. Combinaciones entre los estadísticos

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	21,89000	15,579188	28,20081	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	35,74197	28,543762	42,94019	$6,40e - 11$	****
ATS_1	Z2	Z3	13,85197	5,816134	21,88781	$1,61e - 04$	***

Cuadro C.11: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor σ_{X_0} , caso 1 – 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	21,66829	16,95555	26,38102	$2,73e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	35,01403	29,56682	40,46123	$5,29e - 09$	****
ATS_1	Z2	Z3	13,34574	7,27315	19,41833	$8,44e - 07$	****

Cuadro C.12: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor σ_{X_0} , caso 1 – 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	18,45131	13,740776	23,16184	$3,89e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	29,27255	23,895446	34,64966	$1,70e - 08$	****
ATS_1	Z2	Z3	10,82125	5,017014	16,62548	$3,77e - 05$	****

Cuadro C.13: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor σ_{X_0} , caso 1 – 5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	18,38578	12,456874	24,31469	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	30,96398	24,105881	37,82208	$6,34e - 11$	****
ATS_1	Z2	Z3	12,57820	5,016205	20,14019	$2,90e - 04$	***

Cuadro C.14: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor σ_{X_0} , caso 2 – 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	14,30615	9,536634	19,07566	$4,10e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	24,73682	19,355714	30,11793	$2,29e - 08$	****
ATS_1	Z2	Z3	10,43067	4,681343	16,18001	$6,38e - 05$	****

Cuadro C.15: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor σ_{X_0} , caso 2 – 5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	3,033393	-3,525054	9,59184	$5,24e - 01$	ns
ATS_1	Z1	Z3	13,024777	5,890088	20,15947	$5,73e - 05$	****
ATS_1	Z2	Z3	9,991384	2,625466	17,35730	$4,00e - 03$	**

Cuadro C.16: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor σ_{X_0} , caso 5 – 5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	18,68392	15,163259	22,20458	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	31,00477	26,908130	35,10140	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z2	Z3	12,32085	7,810617	16,83108	$4,85e - 10$	****

Cuadro C.17: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor ρ_{X_0} , caso -0,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	16,74289	12,990407	20,49537	$2,10e - 13$	****
ATS_1	Z1	Z3	28,54480	24,274666	32,81493	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z2	Z3	11,80191	7,163956	16,43986	$7,69e - 09$	****

Cuadro C.18: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor ρ_{X_0} , caso 0

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	14,84425	10,782891	18,90562	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	26,00082	21,484924	30,51671	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z2	Z3	11,15656	6,330312	15,98281	$1,86e - 07$	****

Cuadro C.19: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor ρ_{X_0} , caso 0,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	-0,2815249	-3,179081	2,616032	0,972	ns
ATS_1	Z1	Z3	-0,1373613	-3,061119	2,786397	0,993	ns
ATS_1	Z2	Z3	0,1441636	-2,771113	3,059440	0,993	ns

Cuadro C.20: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor σ_{T_0} , caso 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	9,364288	5,903297	12,825279	$7,23e - 10$	****
ATS_1	Z1	Z3	11,636133	8,046471	15,225795	$7,20e - 13$	****
ATS_1	Z2	Z3	2,271845	-1,490354	6,034043	$3,33e - 01$	ns

Cuadro C.21: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor σ_{T_0} , caso 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	41,18830	36,90433	45,47227	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	74,05161	69,07327	79,02995	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z2	Z3	32,86331	27,39122	38,33540	$7,52e - 12$	****

Cuadro C.22: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor σ_{T_0} , caso 5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	12,327641	9,406200	15,24908	0	****
ATS_1	Z1	Z3	22,177052	18,890985	25,46312	0	****
ATS_1	Z2	Z3	9,849411	6,334755	13,36407	0	****

Cuadro C.23: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor T , caso *Gamma*

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	21,18640	17,938793	24,43401	0	****
ATS_1	Z1	Z3	34,85654	31,149866	38,56321	0	****
ATS_1	Z2	Z3	13,67014	9,621593	17,71868	0	****

Cuadro C.24: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor T , caso *Weibull*

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	-18,2377658	-32,62505	-3,850481	0,008	**
ATS_1	Z1	Z3	-17,4926806	-32,00772	-2,977645	0,013	*
ATS_1	Z2	Z3	0,7450852	-13,14989	14,640061	0,991	ns

Cuadro C.25: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1 - 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	0,03496689	-14,97934	15,04927	1,000	ns
ATS_1	Z1	Z3	5,27080723	-10,13324	20,67485	0,701	ns
ATS_1	Z2	Z3	5,23584034	-10,89431	21,36599	0,727	ns

Cuadro C.26: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1 - 1,1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	7,055355	-6,0733456	20,18406	0,417	ns
ATS_1	Z1	Z3	14,389699	0,6151087	28,16429	0,038	*
ATS_1	Z2	Z3	7,334344	7,4233184	22,09201	0,474	ns

Cuadro C.27: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1 - 1,2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	13,758759	2,729957	24,78756	$1,00e - 02$	**
ATS_1	Z1	Z3	23,481191	11,392126	35,57026	$1,73e - 05$	****
ATS_1	Z2	Z3	9,722432	-3,537014	22,98188	$1,98e - 01$	ns

Cuadro C.28: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1 - 1,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	15,86273	5,378717	26,34675	$1,00e - 03$	***
ATS_1	Z1	Z3	26,21524	14,532118	37,89836	$5,15e - 07$	****
ATS_1	Z2	Z3	10,35250	-2,513706	23,21872	$1,42e - 01$	ns

Cuadro C.29: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1 - 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	20,135513	3,504364	36,76666	0,013	*
ATS_1	Z1	Z3	24,725558	7,136351	42,31477	0,003	**
ATS_1	Z2	Z3	4,590046	-15,503021	24,68311	0,853	ns

Cuadro C.30: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,1 - 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	17,988009	7,524864	28,45116	$1,74e - 04$	***
ATS_1	Z1	Z3	27,625130	16,043711	39,20655	$8,57e - 08$	****
ATS_1	Z2	Z3	9,637121	-3,434569	22,70881	$1,94e - 01$	ns

Cuadro C.31: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,1 - 1,1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	20,57845	11,508781	29,64812	$3,78e - 07$	****
ATS_1	Z1	Z3	32,22200	21,644681	42,79933	$5,78e - 12$	****
ATS_1	Z2	Z3	11,64355	-0,467484	23,75459	$6,30e - 02$	ns

Cuadro C.32: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,1 - 1,2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	22,49961	15,125750	29,87347	$4,74e - 12$	****
ATS_1	Z1	Z3	36,17990	26,720412	45,63939	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z2	Z3	13,68029	2,708074	24,65250	$1,00e - 02$	**

Cuadro C.33: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,1 - 1,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	22,70392	15,86759	29,54024	0,000	****
ATS_1	Z1	Z3	36,93300	27,83027	46,03572	0,000	****
ATS_1	Z2	Z3	14,22908	3,65377	24,80439	0,005	**

Cuadro C.34: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,1 - 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	27,547170	14,27710	40,81724	$4,46e - 06$	****
ATS_1	Z1	Z3	34,808022	19,67720	49,93885	$3,30e - 07$	****
ATS_1	Z2	Z3	7,260852	-10,73934	25,26105	$6,10e - 01$	ns

Cuadro C.35: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,2 - 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	27,11219	15,89893	38,32544	$7,60e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	37,93219	24,02701	51,83738	$1,36e - 09$	****
ATS_1	Z2	Z3	10,82001	-5,67245	27,31246	$2,72e - 01$	ns

Cuadro C.36: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,2 - 1,1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	23,13754	15,704124	30,57096	$1,86e - 12$	****
ATS_1	Z1	Z3	36,67411	27,151997	46,19623	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z2	Z3	13,53657	2,527392	24,54575	$1,10e - 02$	**

Cuadro C.37: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,2 - 1,2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	22,49907	16,637369	28,36078	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	37,98671	29,408554	46,56486	$2,69e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	15,48763	5,602427	25,37284	$7,27e - 04$	***

Cuadro C.38: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,2 - 1,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	21,88925	16,564902	27,21359	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	37,80365	29,586132	46,02116	$4,85e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	15,91440	6,462515	25,36629	$2,46e - 04$	***

Cuadro C.39: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,2 - 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	27,546240	16,915504	38,17698	$8,22e - 09$	****
ATS_1	Z1	Z3	37,465708	23,919005	51,01241	$8,47e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	9,919468	-6,233842	26,07278	$3,19e - 01$	ns

Cuadro C.40: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,5 - 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	25,38741	16,805350	33,96947	$5,55e - 11$	****
ATS_1	Z1	Z3	38,37470	25,977367	50,77203	$9,38e - 12$	****
ATS_1	Z2	Z3	12,98729	-1,583307	27,55789	$9,20e - 02$	ns

Cuadro C.41: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,5 - 1,1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	23,08526	15,761419	30,40910	$4,44e - 12$	****
ATS_1	Z1	Z3	37,77478	26,101298	49,44825	$1,89e - 12$	****
ATS_1	Z2	Z3	14,68952	1,210595	28,16844	$2,90e - 02$	*

Cuadro C.42: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,5 - 1,2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	17,47037	13,559075	21,38167	$7,71e - 11$	****
ATS_1	Z1	Z3	34,08756	26,813400	41,36171	$4,76e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	16,61718	8,509738	24,72463	$5,31e - 06$	****

Cuadro C.43: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,5 - 1,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	15,19403	11,954151	18,43390	$4,88e - 10$	****
ATS_1	Z1	Z3	31,78784	25,086429	38,48925	$4,20e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	16,59381	9,221727	23,96590	$4,82e - 07$	****

Cuadro C.44: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 1,5 - 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	25,13990	15,094492	35,18530	$2,63e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	36,12775	23,015622	49,23988	$9,82e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	10,98786	-4,513476	26,48919	$2,19e - 01$	ns

Cuadro C.45: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 2 - 1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	22,75610	14,87287781	30,63932	$1,56e - 10$	****
ATS_1	Z1	Z3	36,46288	24,64949738	48,27626	$1,05e - 11$	****
ATS_1	Z2	Z3	13,70678	-0,05679416	27,47035	$5,10e - 02$	ns

Cuadro C.46: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 2 - 1,1

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	20,14362	13,627991	26,65924	$9,48e - 12$	****
ATS_1	Z1	Z3	35,37490	24,397705	46,35209	$1,88e - 12$	****
ATS_1	Z2	Z3	15,23128	2,697968	27,76459	$1,20e - 02$	*

Cuadro C.47: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 2 - 1,2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	14,04402	9,808864	18,27918	$1,01e - 12$	****
ATS_1	Z1	Z3	30,09613	21,014118	39,17813	$5,60e - 13$	****
ATS_1	Z2	Z3	16,05211	6,103017	26,00120	$5,01e - 04$	***

Cuadro C.48: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 2 - 1,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	9,258451	7,301101	11,21580	$4,90e - 10$	****
ATS_1	Z1	Z3	23,398531	18,395923	28,40114	$3,80e - 10$	****
ATS_1	Z2	Z3	14,140080	8,790327	19,48983	$2,85e - 10$	****

Cuadro C.49: Games-Howell entre Z_1 , Z_2 y Z_3 . Factor δ_X , caso 2 - 2

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	-1,3788380	-1,7060352	-1,0516408	$0,00e + 00$	****
ATS_1	Z1	Z3	-1,2729046	-1,6073905	-0,9384187	$2,64e - 09$	****
ATS_1	Z2	Z3	0,1059334	-0,1238263	0,3356930	$5,26e - 01$	ns

Cuadro C.50: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_T , caso 0,5

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	0,4200974	-0,898415	1,738610	$7,35e - 01$	ns
ATS_1	Z1	Z3	3,4401521	2,028240	4,852065	$7,64e - 08$	****
ATS_1	Z2	Z3	3,0200547	1,722604	4,317506	$1,90e - 07$	****

Cuadro C.51: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_T , caso 0,75

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	12,82695	9,481287	16,17262	$4,09e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	24,37674	20,680854	28,07262	$3,47e - 08$	****
ATS_1	Z2	Z3	11,54979	7,842787	15,25678	$3,52e - 08$	****

Cuadro C.52: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_T , caso 0,9

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	24,64663	19,84714	29,44612	$4,05e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	42,13974	36,82246	47,45702	$3,13e - 08$	****
ATS_1	Z2	Z3	17,49311	12,06938	22,91684	$3,53e - 08$	****

Cuadro C.53: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_T , caso 0,95

y	group1	group2	estimate	conf.low	conf.high	p.adj	p.adj.signif
ATS_1	Z1	Z2	48,87622	42,34225	55,41020	$2,25e - 08$	****
ATS_1	Z1	Z3	76,28885	68,77073	83,80696	$4,35e - 09$	****
ATS_1	Z2	Z3	27,41262	19,36072	35,46453	$2,09e - 08$	****

Cuadro C.54: Games-Howell entre Z_1, Z_2 y Z_3 . Factor δ_T , caso 1