

Projeto MathE: uma reflexão sobre questões e recursos de geometria elementar

Paula Maria Barros^a, Cristina Martins^b, Manuel Vara Pires^c, Marcela Seabra^d

^aEscola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal, pbarros@ipb.pt, ^bCentro de Investigação em Educação Básica (CIEB), Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal, mcesm@ipb.pt, ^cCentro de Investigação em Educação Básica (CIEB), Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal, mvp@ipb.pt, ^dEscola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal, cseabra@ipb.pt

Resumo

O projeto MathE envolve a colaboração entre várias instituições europeias, sendo o Instituto Politécnico de Bragança uma delas. Tem como objetivo principal melhorar as competências em matemática no ensino superior, essencialmente através da disponibilização de recursos pedagógicos na plataforma MathE (mathe.pixel-online.org). Esta plataforma é uma ferramenta online que pode ser utilizada por estudantes e professores. Os estudantes têm acesso a diversos recursos pedagógicos disponíveis gratuitamente, tais como vídeos e documentos, com informação sobre temas específicos e testes de autoavaliação com perguntas de escolha múltipla. A variedade de recursos disponibilizados contribui para tornar os estudantes mais autónomos, permitindo-lhes diagnosticar, melhorar e aprofundar os seus conhecimentos matemáticos. Ao professor permite a utilização de ferramentas educacionais digitais e recursos para a avaliação do progresso dos conhecimentos dos alunos, bem como a discussão com outros professores e investigadores sobre práticas no ensino da matemática. De entre os quinze domínios matemáticos que a plataforma abrange, e dada a nossa forte ligação profissional à formação de educadores de infância e de professores da educação básica, temos dedicado uma atenção particular ao domínio da Matemática elementar, subtópico Geometria elementar. Neste texto, além de contextualizar o projeto, pretende-se refletir sobre as questões propostas para resolução e avaliação apresentadas em Geometria elementar, bem como sobre os materiais de apoio (Teaching Materials) concebidos para ajudar a colmatar dificuldades de aprendizagem e a valorizar uma melhor compreensão dos conceitos ou procedimentos matemáticos envolvidos.

Palavras-chave: *Plataforma MathE, questões, materiais de apoio, geometria elementar.*

Introdução

As plataformas e outros recursos digitais conquistaram um lugar de destaque no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente no ensino superior. No âmbito da matemática, as ferramentas digitais específicas da área, para além do seu papel motivacional, podem constituir um importante facilitador da aprendizagem. O projeto MathE, que tem a sua expressão numa plataforma *online* (mathe.pixel-online.org), insere-se neste domínio, tendo como objetivo predominante melhorar as competências em matemática dos estudantes, colocando à sua disposição e dos professores uma série de recursos pedagógicos que podem ser usados tanto no contexto de aula (presencialmente ou a distância) como em trabalho autónomo extra-aula.

No ensino superior, nos cursos ligados à formação de professores, é importante que os estudantes conheçam e tenham ao seu dispor meios tecnológicos que possam servir a sua aprendizagem e, simultaneamente, lhes permitam desenvolver capacidades e motivação para a utilização futura com os seus alunos. Estando os autores deste artigo envolvidos na formação de professores, e como membros do projeto MathE, consideraram que seria pertinente que, entre outros, o tema de Geometria elementar fosse integrado na plataforma. Para a proposta dessa inclusão também concorreu o facto de estarem a trabalhar conjuntamente no projeto “EGID3: ensino da geometria, investindo no diagnóstico, dificuldades e desafios” (Seabra, Barros, Pires, & Martins, 2019a; Seabra, Barros, Pires, & Martins, 2019b) e terem detetado que os estudantes do seu estudo (Seabra, Barros, Pires, & Martins, *in press*) continuam a revelar algumas dificuldades em conceitos geométricos que trabalharam ao longo da sua escolaridade não superior e a recorrer a uma linguagem pouco rigorosa quando comunicam as suas ideias. Por exemplo, para se referirem ao conceito de figura geométrica (2D), os estudantes recorrem a vocabulário muito associado às figuras poligonais mais trabalhadas, como triângulos e quadriláteros, com algumas ligações a formas do meio envolvente (chegando a confundir-se com sólidos geométricos (3D)). Da mesma forma, o conceito de polígono é também identificado por alguns estudantes como um sólido geométrico. Quanto ao conceito de ângulo, muitos deles exprimem ideias pouco seguras e consolidadas, reveladoras de alguma confusão e mistura do conceito de ângulo com a sua amplitude, ou seja, entre ângulo e um seu atributo. Todos os estudantes revelam alguns conhecimentos sobre o conceito de retângulo, mas poucos associam o conceito de retângulo apenas à congruência dos ângulos internos, sendo mais frequente a consideração desta congruência acompanhada de outras suas propriedades. Estas dificuldades em conceitos geométricos elementares de futuros professores também são relatadas em alguns estudos

(Couto & Vale, 2014; Menezes et al., 2014; Brunheira, 2019). Por exemplo, Couto e Vale (2014) mencionam dificuldades na aquisição e utilização de conceitos e procedimentos geométricos, como a identificação de propriedades associadas a triângulos e quadriláteros, na classificação de polígonos ou no uso de linguagem matemática específica.

A Geometria oferece ferramentas poderosas para representar e resolver problemas em todas as áreas da matemática, em outras disciplinas escolares e em aplicações quotidianas (NCTM, 2014), ocupando assim naturalmente um lugar de grande relevância na educação em geral, pelo que, como referem Rodrigues e Branco (2017), é essencial proporcionar uma formação de qualidade aos professores [e aos futuros professores] neste domínio. Assim, tendo como base a preocupação com o ensino e aprendizagem da Geometria, para além de se apresentar a plataforma MathE, exploram-se algumas questões e recursos mais diretamente relacionados com o subtópico de Geometria elementar.

A plataforma MathE

A plataforma MathE é o resultado de um trabalho em equipa de várias instituições europeias, entre as quais o Instituto Politécnico de Bragança, estando disponível de forma gratuita para estudantes e professores.

A plataforma abarca quinze domínios da matemática (álgebra linear, probabilidades, números complexos, geometria analítica, etc.) alguns dos quais com subtópicos. Por exemplo, o tópico Matemática fundamental (Fundamental Mathematics) engloba os subtópicos Geometria elementar (Elementary Geometry) e Expressões e equações (Expressions and equations).

Em termos gerais, pode-se considerar que a plataforma incide em quatro importantes componentes:

- (a) Autoavaliação – *Self Need Assessment* – Permite a realização de testes de autoavaliação sobre o tópico/subtópico desejado;
- (b) Avaliação final – *Final Assessment* – Permite que os professores elaborem testes de avaliação relativos aos tópicos desejados. Embora já existam propostas de questões relativas a cada tema, os professores podem elaborar e inserir na plataforma as suas próprias questões;
- (c) Aquisição de conhecimentos/Esclarecimento de dúvidas – *MathE library: Video Collection or Teaching Material* – Conjunto de vídeos ou documentos informativos com explicações sobre resolução de tarefas ou suporte teórico sobre os temas;
- (d) Partilha – *Community of practice* – Os estudantes são convidados a discutir no fórum (MathE Student Forum) questões e desafios sobre os tópicos e os professores (MathE Lecturers' Forum) podem partilhar ideias e experiências entre si.

Nos testes de autoavaliação pode-se seleccionar o seu grau de dificuldade, isto é, básico ou avançado. Em ambos os casos, o teste gerado é constituído por sete questões de escolha múltipla, existindo quatro opções com respostas efetivas e, ainda, a opção “Não sei”. No final do teste, o estudante tem acesso a todas as perguntas e às respostas que deu, sendo-lhe pedido que as confirme ou que responda a eventuais questões ainda sem resposta. Após esta retificação, submete as respostas dadas e recebe *feedback* sobre a sua correção: número de respostas que acertou/errou e qual a resposta correta. Para cada resposta incorreta é recomendada a consulta de recursos – *Video Collection* ou *Teaching Material* – alusivos aos conceitos/procedimentos envolvidos nas questões.

De acordo com o *feedback* dos professores, sobre as experiências já realizadas em sala de aula, a plataforma MathE surge como uma boa opção para explorar e rever conteúdos de disciplinas matemáticas específicas. Percebeu-se que as propostas de trabalho mediadas por esta plataforma aumentam o envolvimento dos estudantes (Pereira et al., 2020).

Já do ponto de vista dos estudantes, de acordo com Pereira et al. (2020), é indicado como benefícios da plataforma a possibilidade de elaborar o seu próprio caminho ao longo dos tópicos disponíveis. Barros, Cordeiro e Silva (2021), a partir de uma experiência com a plataforma no domínio da álgebra linear com estudantes do ensino superior, concluíram que a opinião dos estudantes relativamente à plataforma é bastante positiva, tanto no que diz respeito à acessibilidade, como pelo seu contributo do ponto de vista motivacional, da aprendizagem e do desenvolvimento da sua autonomia. Salienta-se, ainda, que o facto da componente de Autoavaliação fornecer *feedback* sobre as respostas dadas, pode incentivar os estudantes a identificar os seus erros e a procurar informação (é recomendada a consulta de documentos informativos e vídeos) para esclarecer as suas dúvidas e, assim, ultrapassar as suas dificuldades. Note-se que, de acordo com Barros (2018), estratégias que permitam que os estudantes identifiquem e corrijam os seus próprios erros podem ser um importante auxiliar no combate ao insucesso da álgebra linear no ensino superior, mas que se considera poderem também ser eficazes para outros domínios matemáticos e outros níveis de ensino.

Um dos aspetos menos favorável à utilização da plataforma por estudantes portugueses é o facto da língua inglesa ser a predominante. Na perspetiva dos estudantes do estudo de Barros et al. (2021) esse aspeto não torna inviável a sua utilização (59,5% dos estudantes), mas pode dificultar a compreensão das questões (57,1% dos estudantes) ou constituir um obstáculo relevante (40,5% dos estudantes). Cabe aos professores ajudarem a gerir o processo e auxiliarem os estudantes que têm mais dificuldades nesse aspeto, podendo como alternativa elaborar um glossário com a tradução dos termos matemáticos específicos dos temas que vão trabalhar.

As questões de Geometria e os materiais de apoio

Esta secção centra-se no subtópico Geometria elementar, debruçando-se, mais diretamente, sobre as questões relativas à autoavaliação e sobre os materiais de apoio à aprendizagem disponíveis na plataforma.

As questões de geometria elementar da componente autoavaliação são 47 e focam-se, essencialmente, em três categorias: figuras geométricas (conceitos, classificação e propriedades), sólidos geométricos (conceitos, classificação e propriedades) e transformações geométricas (homotetias e isometrias). Algumas das questões envolvem vários conceitos em simultâneo, como se pode constatar pelos exemplos apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Exemplos de questões da componente autoavaliação

Questões	
<p>The number of diagonals of an n-sided polygon is: Answer 1: $n(n - 3)$ Answer 2: $2n - 2$ Answer 3: $2n(n - 3)$ Answer 4: $\frac{n(n-3)}{2}$ Answer 5: I don't know</p>	<p>In a isosceles trapezoid: Answer 1: The straight line which crosses the median points is a line of symmetry. Answer 2: The sides are congruent two by two. Answer 3: There are two lines of symmetry. Answer 4: Diagonals bisect. Answer 5: I don't know</p>
<p>The sum of the number of the faces and the number of the vértices of a solid is 17. Choose the correct answer. Answer 1: The solid is a hexagonal prism Answer 2: The solid is a hexagonal pyramid Answer 3: The solid is a pentagonal pyramid Answer 4: The solid is a pentagonal prism Answer 5: I don't know</p>	<p>Consider that T is a right-angled triangle. Choose the true statement. Answer 1: T has three sides with lengths 4cm, 3cm and 5cm. Answer 2: T has three sides with lengths 4cm, 3cm and 6cm. Answer 3: T may have an obtuse angle. Answer 4: The amplitude of the other angles of T is 45°. Answer 5: I don't know</p>
<p>Considering the similarity criteria of triangles, choose the correct statement. Answer 1: Two scalene triangles are similar if two internal angles of one of them are congruent to two of the internal angles of the other. Answer 2: Two isosceles triangles are similar if the length of two sides of one of them is directly proportional to the length of two sides of the other. Answer 3: Two right triangles are always similar. Answer 4: Two scalene triangles are never similar. Answer 5: I don't know</p>	

Fonte: mathe.pixel-online.org

Simulando um teste de autoavaliação do nível avançado na plataforma, respondendo às questões e submetendo as respostas, obtém-se o *feedback* correspondente, representando a Fig. 1. um extrato dessa componente. Como se pode verificar, quando se erra é indicada a resposta correta e sugestões de material a consultar (presentes na *MathE library*), que pertencem ajudar a identificar os erros e a ultrapassar eventuais dificuldades.

Topic: Fundamental Mathematics
Subtopic: Elementary Geometry
Level: Advanced



The number of correct answers is 4 on a total number of 7 questions.
Your performance is good but you still have room for improvement

Question 1

In a rectangle:

Your answer is WRONG:



There are four symmetry axes and their diagonals are congruent and intersect in the median point which is a symmetry centre.

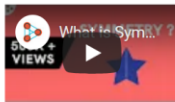
[Report an error](#)

The correct answer is:



There are two symmetry axes and their diagonals are congruent and intersecting the median point which is a symmetry centre.

You might want to have a look at



What is Symmetry? - Basics

Don't Memorise

In this video, the author presents a way to check geometrically if a figure presents reflection symmetry and analyses the number of symmetry axes of various geometric figures.

Languages: English

Question 6

Choose the true statement.

Your answer is CORRECT:



A scalene triangle can have three acute angles.

[Report an error](#)

Fig. 1. Extrato do feedback de um teste de autoavaliação

Fonte: mathe.pixel-online.org

Os recursos de consulta recomendados ou foram produzidos no âmbito do projeto ou são materiais já existentes na internet (ver o recomendado na Fig. 1), que se consideraram que correspondiam aos objetivos desejados. Como se pretende que sejam um auxílio para responder às questões da plataforma, os recursos centram-se nos mesmos temas, isto é, figuras e sólidos geométricos e transformações geométricas. Na Fig. 2 apresentam-se alguns extratos dos documentos produzidos para *Teaching Material*. Estes recursos, assim como os materiais da *Video Collection*, para além de incluírem abordagens teóricas dos conceitos,

pretendem, em alguns casos, abordar os temas numa perspetiva mais dinâmica similar à resolução de tarefas.

A união entre a teoria e a prática é fundamental para cimentar todo o processo de ensino e aprendizagem. Os materiais de apoio disponibilizados fomentam essa união e possibilitam a personalização de itinerários de aprendizagem adaptados às necessidades de cada estudante.

The screenshot shows a page from a teaching material titled "Fundamental Mathematics Elementary Geometry". It includes logos for "mae" and "pb" (Portugal). The main heading is "Triangles Congruence | Similarity". Below this, it states "Congruence of Triangles Criteria" and "SSS criterion – Side, Side, Side". The text reads: "Two triangles are congruent if they have, from one to the other, the three sides congruent." Below the text are two triangles, ABC and DEF, with their side lengths labeled: AB=3.81, BC=4.92, AC=2.16 for triangle ABC; and DE=4.92, EF=2.16, FD=3.81 for triangle DEF. A conclusion states: "The triangles [ABC] and [DEF] are congruent because $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FD}$ and $\overline{CA} = \overline{DE}$."

The screenshot shows a page titled "Classifying quadrilaterals" with the question "How can we classify the quadrilaterals of the picture?". It displays ten quadrilaterals labeled A through J on a grid. Each quadrilateral has its side lengths and interior angles labeled. For example, quadrilateral A has sides 2.24, 2.24, 4.11, 4.11 and angles 90°, 90°, 90°, 90°. Quadrilateral J has sides 6.13, 6.13, 2.46, 2.46 and angles 108.43°, 108.43°, 71.57°, 71.57°.

Fig. 2. Extratos de três Teaching Material
Fonte: mathe.pixel-online.org

Algumas reflexões

Como reflexão final, quer sobre o exposto, quer sobre a nossa própria experiência como elementos do projeto MathE e como formadores de professores, destacamos dois aspetos.

O primeiro aspeto respeita ao *feedback* que a plataforma retribui ao estudante, após a realização de um teste. A indicação de certo ou errado em cada uma das questões permite-lhe identificar os seus pontos fortes e fracos. A orientação para materiais de apoio, disponíveis na própria plataforma, no caso das respostas erradas, dá-lhe pistas conducentes à superação das suas dificuldades e à melhoria das suas competências matemáticas. Desta forma, consideramos que a plataforma promove a autonomia do estudante, respeita o seu ritmo de estudo e norteia-o na construção do seu próprio saber.

Euler's formula

What relationship exists between the number of faces, vertices, and edges of a convex polyhedron?

Consider the models of the geometric solids represented in Figure 1.

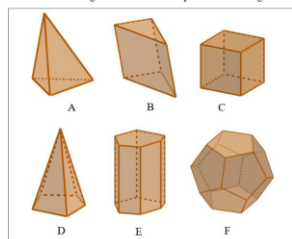


Figure 1

Count the number of faces, vertices, and edges of each of these solids.

Confirm that your results match those in the Table 1.

Geometric solid	Number of faces (F)	Number of vertices (V)	Number of edges (E)
A	4	4	6
B	5	6	9
C	6	8	12
D	6	6	10
E	8	12	18
F	12	20	30

Table 1

O segundo aspeto dirige-se ao papel do professor. Reconhecemos a enorme importância de uma prática de sala de aula sustentada na diversificação de tarefas matemáticas estimulantes, de modo envolver todos os estudantes no processo de ensino e aprendizagem (NCTM, 2014). Ainda que consideremos que, por si só, um recurso didático não determine mais ou melhores aprendizagens, a forma como é utilizado e aproveitado dentro e fora de sala de aula é um garante para que tal se verifique. Neste âmbito, sugerimos a utilização e exploração de questões da plataforma em sala de aula. A promoção de debate sobre conceitos ou procedimentos, tendo por base questões sobre os conteúdos abordados, permite ao professor (e aos próprios estudantes) averiguar as dificuldades e erros dos seus alunos e desenvolver o seu espírito crítico. É, também, papel do professor incitar os estudantes a trazerem as suas dúvidas/dificuldades sobre as questões e partilharem-nas com os restantes colegas, de forma a potenciar discussões coletivas. Deste modo, saem reforçadas as interações entre professores e estudantes, permitindo que estes estabeleçam vínculos às tarefas e às aprendizagens e compreendam o valor do(s) outro(s) para a edificação conjunta do saber.

Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto UIDB/05777/2020.

Referências

- Barros, P. M. P. (2018). *O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Portugal. Disponível em <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/56688>
- Barros, P. M., Silva, F., & Cordeiro, E. (2021). Contributions to the learning in linear algebra: an experience with the MathE platform. In L. G. Chova et al. (Eds.), *INTED2021 Proceedings* (pp. 9906–9915). IATED Academy.
- Brunheira, L. (2019). *O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos*. Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. Disponível em <http://hdl.handle.net/10451/38922>
- Couto, A., & Vale, I. (2014). Pre-service teachers' knowledge on elementary geometry concepts. *Journal of European Teacher Education Network*, 9, 57–73.
- Menezes, L. et al. (2014). Conhecimento de geometria de estudantes da Licenciatura em Educação Básica. In M. H. Martinho et al. (Eds.), *Atas do XXV SIEM* (pp. 243–261). APM.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles for actions: ensuring mathematical success for all*. NCTM.

- Pereira, A. I., Fernandes, F. P., Pacheco et al. (2020). Developing tools for the e-learning platform MathE. In *10th International Conference The Future of Education* (pp. 327–332). Pixel.
- Rodrigues, M., & Branco, N. (2017). Formação de professores em ensino da geometria,. In H. Oliveira et al. (Eds.), *Livro de atas do EIEM 2017* (pp. 139–143). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Seabra, M., Barros, P. M., Pires, M. V., & Martins, C. (*in press*). EGID3 Project: Prior knowledge of future teachers in geometry. In *EDULEARN21 Proceedings*. IATED Academy.
- Seabra, M., Barros, P. M., Pires, M. V., & Martins, C. (2019a). Projeto EGID3: perceções dos estudantes sobre a geometria e o seu ensino. In M. Peralbo et al. (Eds.), *Actas del XV Congreso internacional gallego-portugués de psicopedagogia* (pp. 1851–1861). ACIP.
- Seabra, M., Barros, P. M., Pires, M. V., & Martins, C. (2019b). Projeto EGID3: ensino da geometria, investindo no diagnóstico, dificuldades e desafios. In *INNODOCT/19 Proceedings* (pp. 1089–1097). Editorial Universitat Politècnica de València.