

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

MODELADO ACÚSTICO DE SILENCIADORES CON MATERIAL ABSORBENTE

Presentada por: María Isabel Torres Picazo
Dirigida por: Dr. Francisco Javier Fuenmayor Fernández
Dr. José Albelda Vitoria

Valencia, Enero de 2006

TESIS DOCTORAL

MODELADO ACÚSTICO DE SILENCIADORES CON
MATERIAL ABSORBENTE

que para optar al grado de doctor Ingeniero Industrial

presenta

María Isabel Torres Picazo

Ingeniero Industrial

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

de la Universidad Politécnica de Valencia

Directores: Dr. Francisco Javier Fuenmayor Fernández

Dr. José Albelda Vitoria

Valencia, Enero de 2006

TESIS DOCTORAL

MODELADO ACÚSTICO DE SILENCIADORES CON
MATERIAL ABSORBENTE

Presentada por: María Isabel Torres Picazo
Dirigida por: Dr. Francisco Javier Fuenmayor Fernández
Dr. José Albelda Vitoria

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. _____
VOCALES: Dr. D. _____
Dr. D. _____
Dr. D. _____
Dr. D. _____
SECRETARIO: Dr. D. _____

En Valencia, a ____ de _____ de 2006

Resumen

Esta Tesis se centra en el desarrollo e implementación de métodos para el diseño y modelado acústico de silenciadores de motores de combustión interna, a través de herramientas basadas en soluciones analíticas y numéricas de la ecuación de ondas. La necesidad de técnicas de diseño que proporcionen rápida y eficazmente resultados precisos incluso a altas frecuencias ha aumentando con el tiempo, debido a que el ruido de los vehículos se ha convertido en una fuente importante de contaminación ambiental.

El principal objetivo de la Tesis es la extensión y aplicación del método de ajuste modal, en combinación con el método de subestructuración, para modelar el comportamiento acústico de silenciadores disipativos. Una contribución importante es la asociada con la obtención de los modos transversales de los silenciadores, para los cuales ha sido desarrollada con éxito una nueva técnica para silenciadores disipativos que incluyen materiales absorbentes de tipo fibroso.

Se han estudiado experimentalmente elementos relevantes de los silenciadores, como las características de comportamiento de los materiales absorbentes o los elementos perforados, para obtener datos más precisos sobre ellos. Validando o mejorando los modelos encontrados en la bibliografía con estas medidas experimentales.

Han sido evaluados varios métodos para la caracterización de materiales absorbentes. Como conclusión, se ha observado que no hay importantes diferencias entre las técnicas estudiadas. Se ha tomado el método de las dos fuentes como el más conveniente debido a que los resultados son independientes de las condiciones aguas abajo de la muestra. Se han caracterizado dos materiales con esta técnica, obteniendo los parámetros semi-empíricos del modelo de Delany y Bazley. Además, el método de las dos fuentes ha sido utilizado para la caracterización de elementos perforados, adaptando experimentalmente los resultados del modelo de Sullivan.

Para llevar a cabo el análisis acústico de silenciadores disipativos, se ha extendido el método de ajuste modal al caso de materiales absorbentes, combinándolo con el método de subestructuración para calcular los modos transversales. Para definir el comportamiento del material, se ha tomado un modelo basado en dos parámetros, impedancia y número de onda. Se ha preferido el método de subestructuración por su versatilidad y por presentar menos problemas de índole matemática en la obtención de las frecuencias naturales y sus correspondientes modos, en comparación con el método directo.

Finalmente, diversas geometrías de silenciadores han sido analizadas experimentalmente para validar los modelos desarrollados en esta Tesis. Algunas configuraciones específicas se han analizado para observar la influencia de parámetros relevantes en el diseño de silenciadores que incluyen materiales absorbentes.

Abstract

This Thesis is focused on the development and implementation of efficient methods for the acoustic modeling and design of exhaust mufflers for internal combustion engines, by means of tools based on analytical and numerical solutions of the governing wave equation. There is an increasing need for design techniques that lead to fast, accurate and reliable results even in the high frequency range, due to the fact that vehicle noise has become one of the major sources of environmental pollution.

The main core of the Thesis deals with the extension and application of the Mode Matching Technique, in combination with a novel Substructuring Method, to compute the acoustic attenuation of exhaust dissipative mufflers. A relevant contribution is associated with the computation of the transverse eigenfunctions of the muffler, for which a new technique has been developed and successfully applied to dissipative mufflers that include fibrous absorbent material.

In addition, relevant muffler components have been measured experimentally to provide accurate data, such as the perforate impedance and the bulk properties of absorbent materials. The models found in the literature have been validated or improved with these measurements.

Several methods have been evaluated for the characterization of absorbent materials. As a conclusion, it has been found that there are not substantial differences between these techniques. The most suitable approach is the two-source method since the results are independent from the condition downstream the sample. Two materials have been characterized by this technique, and the parameters of the Delany and Bazley semi-empirical model have been fitted. In addition, the two-source method has been used for characterizing perforated elements, fitting the experimental results to the Sullivan's model.

To perform the acoustic analysis of dissipative mufflers, the Mode Matching technique has been extended to the case of absorbent materials in combination with a Substructuring Method to calculate the transversal

pressure modes. To define the material, a model based on two parameters – impedance and wavenumber– has been used. The Substructuring Method has been preferred because it is versatile and presents less mathematical problems in comparison with the Direct Method in obtaining the natural frequencies and the corresponding modes.

Several geometries of mufflers have been experimentally tested to validate the models developed in the Thesis. Finally, a specific configuration has been analyzed to show how the relevant parameters of the design –including absorbent material– have an influence on the muffler.

Resum

Aquesta Tesis es centra en el desenvolupament e implementació de mètodes per al disseny i modelat acústic de silenciadors de motors de combustió interna, a través d'utils basats en solucions analítiques i numèriques de l'equació d'ones. La necessitat de tècniques de disseny que proporcionen ràpida i eficaçment resultats precisos inclús a altes freqüències ha augmentat amb el temps, degut a que el soroll dels vehicles s'ha convertit en una font important de contaminació ambiental.

El principal objectiu de la Tesis és l'extensió i aplicació del mètode d'ajustament modal, en combinació amb el mètode de subestructuració, per tal d'obtenir l'atenuació acústica de silenciadors dissipatius. Una contribució important és l'associada amb l'obtenció dels modes transversals dels silenciadors, per als quals una nova tècnica ha segut desenvolupada amb èxit per a silenciadors dissipatius que inclouen materials absorbents de tipus fibrós.

S'han estudiat experimentalment elements rellevants dels silenciadors, com les característiques de comportament dels materials absorbents o els elements perforats, per tal d'obtenir dades més precises sobre ells. Alguns models cercats en la bibliografia s'han validat o millorat amb aquestes mesures experimentals.

Diferents mètodes per a la caracterització de materials absorbents han segut avaluats. Com a conclusió, s'ha observat que no hi ha diferències importants entre les tècniques estudiades. S'ha determinat que el mètode de les dues fonts és el més convenient degut a que els resultats són independents de les condicions aigües avall de la mostra. Dos materials han segut caracteritzats amb esta tècnica, i s'han obtingut els paràmetres semi-empírics del model de Delany i Bazley. A més, el mètode de les dues fonts ha segut utilitzat per a la caracterització d'elements perforats, i s'han adaptat experimentalment els resultats del model de Sullivan.

Per a dur endavant l'anàlisi acústic de silenciadors dissipatius, s'ha estès el mètode d'ajustament modal al cas de materials absorbents, combinant-lo

amb el mètode de subestructuració per tal de calcular els modes transversals. Per a definir el material, s'ha pres un model basat en dos paràmetres, impedància i nombre d'ona. S'ha preferit el mètode de subestructuració per la seva versatilitat i per presentar menys problemes d'índole matemàtica en l'obtenció de les freqüències naturals i els seus corresponents modes, en comparació amb el mètode directe.

Finalment, diverses geometries de silenciadors han segut analitzades experimentalment a fi de validar els models desenvolupats en aquesta Tesis. Algunes configuracions específiques s'han analitzat amb la finalitat d'observar la influència de paràmetres rellevants en el disseny de silenciadors que inclouen materials absorbents.

A mis padres y hermanos

Agradecimientos

A Pepe Albelda y Javier Fuenmayor, por su orientación, sus enseñanzas y su inestimable ayuda, sin ellos esta Tesis aún no estaría acabada.

A todos mis compañeros de la Sala de Becarios por su compañía y apoyo. En especial a Roberto por ser como un hermano al que siempre podía acudir, a Iñaki por su ayuda durante los ensayos y por escucharme cuando lo necesitaba, a Octavio Andrés por soportarme y por los momentos de relajación deportiva, a Manolo Martínez por su optimismo, y a Andrés Rovira por su compromiso con los Becarios Precarios.

Agradecer también a Paco Denia su colaboración en mis primeros pasos en el mundo de la acústica, y a Manolo Tur sus organizaciones de cenas de esas que crean espíritu de equipo.

A mis padres y hermanos les quiero agradecer estar siempre ahí, y no tenerme en cuenta el poco tiempo que les dedico, ni mi humor de estos últimos meses.

A Lucía, Inma, Esther, Anapi, y en general a todos mis amigos les doy las gracias por escucharme, entenderme, ayudarme a superar los baches que se presentan, y sobretodo, por hacerme disfrutar de los buenos momentos que nos brinda la vida.

Y finalmente a todos aquellos que en mayor o menor medida han colaborado a que esta Tesis sea tal y como es ahora, estando conmigo durante la realización de la misma.

Índice General

Capítulo 1. Introducción	3
1.1. Motivación y antecedentes.....	3
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructura de la Tesis.....	3
Capítulo 2. Fundamentos acústicos	3
2.1. Introducción.....	3
2.2. Ecuación de ondas	3
2.2.1. Medio móvil	3
2.2.2. Medio en reposo	3
2.3. Materiales absorbentes	3
2.3.1. Introducción	3
2.3.2. Caracterización del material	3
2.4. Acústica unidimensional de conductos	3
2.4.1. Medio móvil	3
2.4.2. Medio en reposo	3
2.5. Modelos de onda plana. Representación matricial.....	3
2.5.1. Generalidades.....	3
2.5.2. Conductos	3
2.5.3. Expansiones y contracciones	3
2.5.4. Conductos extendidos.....	3
2.6. Placas y tubos perforados.	3
2.6.1. Impedancia acústica.....	3
2.6.2. Efecto del material absorbente en la impedancia de conductos perforados	3
2.7. Silenciadores.....	3
2.7.1. Configuraciones sin disipación	3
2.7.2. Configuraciones con disipación.....	3
2.8. Atenuación sonora en silenciadores	3
2.8.1. Consideraciones energéticas.....	3
2.8.2. Índices de atenuación sonora en silenciadores.....	3
2.9. Aplicaciones	3
2.9.1. Configuraciones sin disipación	3
2.9.2. Configuraciones con disipación.....	3
2.10. Limitaciones	3
2.11. Conclusiones.....	3

Capítulo 3. Modelado acústico mediante técnicas modales multidimensionales de silenciadores reactivos.....	3
3.1. Introducción.....	3
3.2. Acústica tridimensional en conductos de sección constante.....	3
3.2.1. Medio en reposo.....	3
3.2.2. Medio móvil.....	3
3.3. Condiciones de contorno en secciones de acoplamiento.....	3
3.3.1. Cambio de sección.....	3
3.3.2. Cambio de sección con extendido.....	3
3.3.3. Placa perforada.....	3
3.3.4. Sección de entrada y de salida.....	3
3.4. Cálculo de modos transversales.....	3
3.4.1. Método directo.....	3
3.4.2. Método de subestructuración o síntesis modal.....	3
3.5. Método de ajuste modal.....	3
3.5.1. Antecedentes.....	3
3.5.2. Obtención del sistema de ecuaciones.....	3
3.5.3. Obtención del índice de pérdidas por transmisión (TL).....	3
3.6. Ejemplos.....	3
3.6.1. Resonador concéntrico circular.....	3
3.6.2. Resonador excéntrico de sección oval.....	3
3.7. Conclusiones.....	3
Capítulo 4. Caracterización experimental de materiales absorbentes y elementos perforados.....	3
4.1. Introducción.....	3
4.2. Caracterización de material absorbente.....	3
4.2.1. Impedancia superficial de una muestra según la norma UNE-EN ISO 10534-2.....	3
4.2.2. Método de las dos cavidades.....	3
4.2.3. Método de las dos fuentes.....	3
4.2.4. Método de la matriz de transferencia.....	3
4.2.5. Corrección de los micrófonos.....	3
4.2.6. Comparación de los métodos.....	3
4.2.7. Caracterización experimental.....	3
4.2.8. Medida de perforados.....	3
4.3. Caracterización del silenciador.....	3
4.4. Conclusiones.....	3

Capítulo 5. Modelado acústico de silenciadores disipativos mediante técnicas modales multidimensionales..... 3

5.1. Introducción.....	3
5.2. Modelo de material absorbente	3
5.3. Solución en un conducto de sección constante relleno de material absorbente	3
5.3.1. Medio en reposo	3
5.4. Condiciones de contorno en secciones de acoplamiento	3
5.4.1. Cambio de medio	3
5.4.2. Placa perforada entre medios diferentes	3
5.4.3. Sección de entrada y de salida.....	3
5.5. Cálculo de modos transversales	3
5.5.1. Método directo	3
5.5.2. Método de subestructuración o síntesis modal.....	3
5.6. Método de ajuste modal	3
5.7. Ejemplos.....	3
5.7.1. Resonador concéntrico de sección circular	3
5.7.2. Resonador concéntrico de sección circular descentrado.....	3
5.7.3. Cámara circular con extendidos	3
5.7.4. Cámara circular con extendidos descentrados	3
5.7.5. Resonador excéntrico de sección oval.....	3
5.8. Ejemplos de localización del material absorbente dentro del silenciador	3
5.8.1. Introducción 3	
5.8.2. Silenciador reactivo de referencia	3
5.8.3. Tubos extendidos llenos de material absorbente.....	3
5.8.4. Tubos extendidos sin material absorbente	3
5.9. Conclusiones	3

Capítulo 6. Conclusiones y líneas de investigación futuras. 3

6.1. Conclusiones y aportaciones.....	3
6.2. Líneas de investigación futuras.....	3

BIBLIOGRAFÍA 3

Capítulo 1. Introducción

1.1. Motivación y antecedentes

Actualmente el interés de la sociedad en la contaminación ambiental y concretamente en la contaminación acústica, hace necesaria la mejora de los elementos utilizados para su control. En el caso de los vehículos que utilizan motores de combustión interna alternativos, el sistema de escape es uno de los principales elementos generadores de ruido.

Durante mucho tiempo, el único requisito impuesto a estos sistemas ha sido que fueran capaces de mantener los niveles de ruido emitido por debajo de ciertos límites. Más recientemente, se ha comenzado a tener en cuenta, por parte de los fabricantes, no solamente estos niveles límite, sino también el concepto de calidad sonora, esto es, la valoración más subjetiva que hace un usuario.

La incorporación de materiales absorbentes en los silenciadores mejora la atenuación sonora en tanto que elimina las bandas de paso del TL (índice de pérdidas por transmisión) y mejora su comportamiento a altas frecuencias. Pero su utilización en vehículos siempre ha presentado problemas de pérdida y contaminación de material, y restricciones con la temperatura de trabajo. Los sistemas de aire acondicionado no tienen asociados estos problemas y en ellos se han utilizado absorbentes de forma extendida. Hoy en día la incorporación de materiales absorbentes en sistemas de escape de vehículos vuelve a tener interés con el fin de mejorar la calidad sonora. Para facilitar la evacuación de los gases de escape y disminuir el arrastre de material absorbente se evitan disposiciones del material normales al flujo.

Cuando existe material absorbente las ondas acústicas se propagan de diferente manera que en el aire. Si puede asumirse que la fase sólida del material es rígida, sólo una onda de compresión se propaga y el material puede caracterizarse desde un punto de vista macroscópico mediante su número de onda y su impedancia compleja (Morse [45]). Sin embargo, si

la fase sólida tiene una rigidez finita, dos ondas de compresión y una onda transversal se propagan a través del material y se suele utilizar el modelo poroelástico de Biot [13] adaptado al problema acústico por Allard [4]. El primer modelo es eficaz para materiales fibrosos, mientras que el modelo poroelástico tiene en cuenta la interacción entre la estructura sólida y espacios de aire, siendo adecuado para materiales porosos.

El modelo macroscópico ha sido utilizado satisfactoriamente en muchos trabajos, y su única restricción es que el tipo de absorbente empleado cumpla la hipótesis de fase sólida de alta rigidez o que sea de tipo fibroso. Astley [5] estudió el comportamiento acústico de un conducto rectangular con material localmente situado en sus cuatro lados, considerando la existencia de flujo medio y resolviendo mediante elementos finitos. Observó una buena concordancia entre su predicción y la medida experimental. Más tarde, Bies [12] presentó un esquema modal general para abordar el comportamiento acústico de secciones arbitrarias constantes con flujo medio en el conducto central. Aplicó este esquema al caso circular y rectangular obteniendo gráficas de diseño. Para el caso de un resonador circular concéntrico con material poroso en la cámara y flujo medio en el tubo central Kirby [42] presentó una solución analítica simplificada analizando el efecto de la porosidad del perforado en el comportamiento del silenciador. Más tarde, se propone una metodología general, [43], para predecir el comportamiento acústico de silenciadores disipativos de sección arbitraria constante en presencia de flujo medio basada en el cálculo de los modos transversales combinada con elementos finitos.

Delany y Bazley [24] realizaron un estudio experimental sobre un amplio rango de materiales absorbentes y obtuvieron una serie de relaciones entre la impedancia del material, y la resistencia al flujo estacionario del mismo. Para obtener la resistencia al flujo, Ren [57] propuso un método basado en la medida de la función de transferencia entre las señales de dos micrófonos situados uno a cada lado de la muestra de ensayo. Woodcock [83] utilizó los métodos de las dos cavidades y de los dos espesores para determinar la resistencia de flujo en materiales poroelásticos. Attenborough [6] presenta una revisión de diferentes teorías con que pueden caracterizarse los materiales. Algunas de ellas consideran al material como poroso y rígido, y otras como poroso y elástico, en función de la elasticidad de la fase sólida que envuelve los

poros. Los primeros pueden dividirse entre absorbentes casi homogéneos o adoptar un modelo de fibras paralelas, como también proponen Cummings [19] y Kirby [40]. En el trabajo de Tao [77] se comparan los métodos de las dos fuentes y de las dos cavidades para la obtención de las propiedades absorbentes de los materiales en estudio, llegando a la conclusión de que ambos métodos dan buenos resultados en general, pero a pesar de que el método de las dos cavidades es más simple (necesitando una única muestra), el de las dos fuentes es más preciso en el caso de materiales con absorciones bajas. Éste a su vez puede adaptarse a la utilización de una sola fuente si se consigue materializar una salida anecoica tras el tubo de impedancia.

Algunos autores han estudiado el comportamiento concreto de ciertos materiales. Picard [54] estudió muestras de lana de roca estratificada y la influencia de la densidad, porosidad y diámetro de poro en la resistencia de flujo del material. Este autor se basa en el método propuesto por Woodcock. Ballagh [7] estudió las propiedades de otro tipo de lana, comparando su coeficiente de absorción acústica en función de la densidad, el diámetro de fibra y la resistencia al flujo. Tarnow [78] trabajó como Picard con lana de roca, calculando el coeficiente de atenuación y la velocidad de fase para la propagación de ondas no isotrópicas. Bauer [8] a su vez abordó el estudio del comportamiento acústico en dirección normal al material de diferentes materiales porosos.

Cuando el espesor del absorbente es relativamente pequeño, la propagación de las ondas en el material puede modelarse mediante una impedancia local. Este modelo ha sido aplicado mediante análisis modal en conductos rectangulares [18] y mediante elementos finitos para otros casos más generales. Esta manera sencilla de considerar la presencia de absorbentes, permite su incorporación de una forma simple pero sólo es válido para disposiciones superficiales del material. Astley [5] estudió el comportamiento de un conducto cuadrado o circular recubierto de absorbente mediante elementos finitos. Los resultados experimentales, en el caso de sección cuadrada, fueron utilizados para validar el modelo presentado. El autor analiza el comportamiento en el caso que haya material en dos caras opuestas o en todas las caras del conducto. Craggs [16] estudió mediante elementos finitos una cámara de expansión simple con recubrimiento de absorbente en diferentes posiciones de las paredes de la cámara.

Cuando el espesor del material absorbente es más elevado o la disposición del material no es superficial, el modelo de impedancia localmente reactiva ya no es válido y deben considerarse modelos tridimensionales que tengan en cuenta la propagación de las ondas en el volumen del material. Cummings [22] estudió un conducto relleno de material absorbente pero que puede tener una o más zonas de aire entre el material y la pared del conducto. Este mismo autor [23] propuso un método para el estudio de conductos rectangulares rellenos de capas alternativas de aire y absorbente obteniendo resultados en función del número de capas. Munjal [48] analizó el caso de silenciadores rectangulares con capas de aire y absorbente (se puede aplicar a silenciadores circulares con anillos concéntricos de aire y absorbente) trabajando con matrices de 4 polos. Kirby [43] centró su estudio en los resonadores de sección arbitraria y lo aplicó a una sección elíptica considerando flujo medio en el tubo central. Peat [52] analizó un resonador de sección arbitraria con absorbente y flujo medio en el interior del tubo perforado. Selamet [66] estudió un resonador concéntrico con absorbente pero sin flujo medio, ampliando el estudio al caso de silenciadores híbridos (combinando resonadores con absorbente y una cámara de expansión simple con extendidos). Xu [84] abordó el problema de una cámara de expansión simple con espesor de absorbente variable mediante ajuste modal, sin tener en cuenta el flujo medio pero sí la existencia o no de perforado.

En los últimos años, la aplicación de métodos de base modal, tales como el método de ajuste modal, al análisis acústico de silenciadores, ha cobrado un interés creciente. La posibilidad de contar con soluciones analíticas que permitan, con un coste computacional razonable, la obtención de soluciones con mucha precisión, aún a costa de ser válidas para tipologías concretas de silenciadores, parece muy atractiva. Además, la utilización de algunas metodologías numéricas de aplicación general como el método de los elementos finitos o el de los elementos de contorno, de uso muy extendido por su versatilidad, ha encontrado algunas limitaciones en problemas tridimensionales debido al gran número de elementos necesarios para modelar razonablemente el comportamiento a frecuencias medias o altas, debido a la aparición de error de polución.

Desde el comienzo de su estudio se han aplicado los métodos analíticos con base modal al problema acústico. En la bibliografía pueden

encontrarse referencias que utilizan métodos modales multidimensionales en los que se ha simplificado la excitación. Kim [38] [39] y Denia [26] supusieron que los tubos de entrada pueden ser sustituidos por velocidades puntuales. Por otro lado, Ih [33] [34], Kim [37] y Yi [85] sustituyeron los tubos de entrada y salida por un pistón obteniendo una mayor aproximación a la solución correcta. El desarrollo de metodologías que utilizasen hipótesis más realistas condujo a la aplicación del método de ajuste modal, válido cuando la sección de cada subdominio es constante. Este método está basado en los denominados modos de propagación que son los asociados a conductos de longitud infinita. Esta técnica comenzó a utilizarse en guías de onda electromagnéticas aunque su uso también ha sido extenso en acústica. Cummings [18] resolvió el caso de un retorno a través de una sección anular, mientras que Peat [53] estudió la discontinuidad en el caso de tubos extendidos concéntricos y Selamet [61] [62] [63] [64] abordó la solución acústica de diversos tipos de cámara de expansión y su validación experimental. Todos estos trabajos se han aplicado al caso de conductos de sección circular aunque recientemente Denia [27] resolvió el problema de una cámara de expansión elíptica concéntrica. El método es susceptible de extenderse al caso en el que se considera la presencia de flujo medio uniforme en la dirección axial o al caso de materiales absorbentes. Así Cummings [21] abordó el estudio de un resonador concéntrico con absorbente en la cámara exterior y flujo medio axial uniforme en el tubo central, mientras que Peat [51] evaluó el campo de presiones en una discontinuidad de sección en presencia de flujo medio uniforme. Por último señalar que el método puede combinarse con otras técnicas para obtener los modos transversales y así, como se señaló al comentar las aplicaciones del método de los elementos finitos, Kirby [43] lo utilizó junto con el método de elementos finitos para analizar resonadores concéntricos disipativos con flujo medio.

Las ventajas que presentan los métodos modales frente a los basados en funciones de prueba polinómicas son que la solución exacta del problema es de tipo modal y por tanto es más fácil de plantear, y los resultados son más sencillos de interpretar. Este último aspecto se debe a que los modos están asociados a la geometría del problema y a que los factores de participación modales establecen cual es la contribución de cada modo a la respuesta del sistema. Así pues, con esta información, se pueden tomar decisiones para la modificación de la geometría del silenciador de forma controlada.

Las metodologías más adecuadas para resolver el problema acústico de silenciadores deben ser lo suficientemente versátiles para poder utilizarse en casos de interés práctico que involucran usualmente geometrías complejas, y deben tener un coste computacional bajo comparado con los métodos actualmente utilizados. El método de los elementos finitos cumple el primer requisito pero su coste computacional para geometrías tridimensionales es elevado. Los métodos modales se basan en el conocimiento de los modos transversales de las correspondientes secciones. Para la obtención de dichos modos puede utilizarse el método directo [21] [36], el método de subestructuración [1], o el método de los elementos finitos [29].

El método directo parte de las expresiones analíticas de los modos transversales en cada subdominio en que se divide la sección transversal. Estos modos se combinan imponiendo las condiciones de contorno en la interfase entre subdominios y se obtienen los modos de la sección transversal completa. El planteamiento de este método no es sistemático y la resolución del problema no lineal que resulta puede presentar problemas a la hora de obtener todos los modos.

El método de subestructuración parte del conocimiento de los modos transversales de cada subdominio obtenidos para dos condiciones de contorno en la interfase, usualmente presión cero y velocidad cero. Posteriormente se imponen las condiciones de contorno en la frontera entre subdominios, obteniendo un problema de autovalores que se resuelve mediante métodos sistemáticos perfectamente establecidos. La solución de este problema permite obtener los modos de la sección completa como combinación lineal de los modos de partida. Este método es versátil y sistemático si se utilizan bases modales de tipo numérico, y además permite la interpretación modal del resultado.

1.2. Objetivos

A continuación se presentan los objetivos generales que se pretende abarcar con esta Tesis:

- Extender la aplicación de los métodos modales basados en subestructuración de las secciones transversales, desarrollados para silenciadores reactivos, al caso de silenciadores disipativos.

El objeto es aprovechar las buenas características que presenta esta metodología y aplicarla a sistemas disipativos que involucran en su resolución ecuaciones de mayor complejidad. El método directo para el cálculo de los modos transversales puede presentar dificultades de convergencia al resolver la ecuación no lineal asociada a los números de onda. Por ello, en ocasiones es difícil obtener todos los modos de una banda de frecuencias preestablecida. El método de subestructuración de las secciones transversales permite una buena sistematización del problema aunque debe adaptarse a los sistemas disipativos.

- Validación de los modelos utilizados en el análisis de silenciadores con material absorbente frente a los resultados experimentales.

Se pretende realizar una validación de los modelos utilizados en el análisis de silenciadores disipativos de modo que se verifique la correspondencia con la realidad de los resultados obtenidos con la metodología presentada. En concreto se establecen los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterización experimental de las propiedades acústicas de diversos materiales absorbentes de tipo fibroso.
Llevar a cabo la puesta a punto del banco de ensayos del Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales para el estudio experimental de las características acústicas de diversos materiales absorbentes. Se tratará de obtener los parámetros del modelo de Delany y Bazley para diversos materiales fibrosos disponibles y validar nuestro modelo con dichos parámetros.
2. Validación de expresiones de cálculo de impedancias recogidas en la bibliografía. Para mantener el material absorbente en su posición es usual utilizar elementos perforados y se quiere contrastar si el modelo de Sullivan con la modificación de Kirby es válido. Se realizarán ensayos de caracterización y se verificara en silenciadores.

3. Validar experimentalmente resultados del índice de pérdidas por transmisión (TL) obtenidos con los modelos utilizados con silenciadores de geometrías y complejidades diversas.
Se llevarán a cabo pruebas experimentales en un banco de ensayos con el fin de contrastar la metodología presentada y los modelos de material absorbente y de perforados.

4. Como ejemplo de aplicación, se llevará a cabo el estudio de la influencia de la localización del material absorbente en las características acústicas de un resonador circular concéntrico, de amplia utilización práctica.

1.3. Estructura de la Tesis

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos de la teoría acústica aplicada a conductos y silenciadores, haciendo especial énfasis en los modelos tradicionales de onda plana. En este capítulo se define gran parte de la nomenclatura utilizada a lo largo de la Tesis. Se describen las propiedades básicas de las tipologías de silenciador más comunes como son las expansiones y contracciones, los conductos extendidos y las placas y tubos perforados. También se introducen las ecuaciones básicas en medios materiales diferentes del aire. Además, se aborda la cuantificación de la atenuación sonora en base a diferentes índices, especialmente mediante el índice de pérdidas por transmisión (TL). Finalmente se aplican los modelos expuestos a casos sencillos de silenciadores y se destacan las limitaciones de estos modelos unidimensionales.

El Capítulo 3 está dedicado al modelado multidimensional de silenciadores mediante técnicas modales. En él se presenta el tratamiento analítico modal de la ecuación de ondas en conductos. Se consideran geometrías con sección transversal constante y se plantean las ecuaciones necesarias para diversas condiciones de cambio entre secciones. Posteriormente se presentan y comparan dos métodos modales multidominio para la obtención de los modos de las diferentes secciones: el método directo y el método de síntesis modal o de subestructuración. El objetivo es obtener los modos transversales asociados a los modos de propagación en cada conducto. A continuación estos métodos se

combinan con el método de ajuste modal para la obtención de la respuesta del silenciador. Finalmente se analizan algunos ejemplos concretos que se comparan con resultados experimentales y donde se analizan como afecta el modelado de tubos perforados.

En el Capítulo 4 se presentan los modelos de caracterización de elementos disipativos como materiales absorbentes o tubos perforados. Se exponen diversos métodos de obtención de las características de dichos elementos. Se lleva a cabo el estudio experimental para varios materiales absorbentes disponibles en el mercado. Con los resultados experimentales obtenidos se extrapolan las curvas teóricas de comportamiento de los materiales estudiados para ser utilizadas en los modelos de análisis del comportamiento acústico de silenciadores disipativos. Por otro lado, se muestran resultados de caracterización experimental de placas perforadas y se discute la aproximación del comportamiento obtenido mediante el modelo de Sullivan.

El Capítulo 5 está dedicado al modelado modal multidimensional de silenciadores disipativos. Se analiza la obtención de modos transversales para diferentes tipos de secciones y con combinación de diferentes medios de propagación. Posteriormente se presenta el método de ajuste modal, adaptado a las características y condiciones de contorno del problema con materiales absorbentes, con la finalidad de obtener el comportamiento de silenciadores disipativos. Finalmente se aplican estas técnicas al estudio de silenciadores disipativos de geometrías complejas y se estudia como influye la disposición del material absorbente en el caso de un resonador circular concéntrico.

En el Capítulo 6 se recogen las conclusiones del trabajo realizado y se indican las posibles líneas de investigación futuras.

Capítulo 2. Fundamentos acústicos

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones que se utilizan para la caracterización de los fenómenos acústicos en el marco de esta Tesis. Estas ecuaciones conllevan una serie de hipótesis necesarias para simplificarlas y hacerlas prácticas a la hora de modelar el comportamiento acústico de los silenciadores. A lo largo del capítulo se especificarán las hipótesis que se irán asumiendo. Se pueden utilizar expresiones analíticas o numéricas para caracterizar el comportamiento acústico. Las primeras son más precisas y suponen, en general, menor tiempo de cálculo, pero sólo pueden obtenerse para geometrías relativamente sencillas de los silenciadores. Las segundas son más versátiles pero requieren mayor coste computacional.

2.2. Ecuación de ondas

Un sistema fluido-dinámico puede definirse a través de tres ecuaciones [46]:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.1)$$

siendo u , v , w las componentes de la velocidad \vec{u} en x , y y z , respectivamente, ρ la densidad, y t el tiempo.

Ecuación de equilibrio dinámico

$$\begin{aligned} \mathbf{r}a_x = \mathbf{r}B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mathbf{m} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\mathbf{z} - \frac{2}{3} \mathbf{m} \right) \nabla^T \bar{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{m} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{m} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}a_y = \mathbf{r}B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mathbf{m} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\mathbf{z} - \frac{2}{3} \mathbf{m} \right) \nabla^T \bar{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{m} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}a_z = \mathbf{r}B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mathbf{m} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\mathbf{z} - \frac{2}{3} \mathbf{m} \right) \nabla^T \bar{u} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{m} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{m} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

siendo \mathbf{m} la viscosidad dinámica, \mathbf{z} el segundo coeficiente de viscosidad, $\nabla^T = \{ \bar{i} \partial/\partial x \ \bar{j} \partial/\partial y \ \bar{k} \partial/\partial z \}$, B_x , B_y , y B_z son fuerzas volumétricas, $a_x = Du/Dt$, $a_y = Dv/Dt$ y $a_z = Dw/Dt$ las aceleraciones en x , y y z respectivamente, y D/Dt la derivada total o material definida como

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.5)$$

Ecuación de la energía

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \Phi_d - \nabla^T \bar{q}_r \\ = \frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) + \frac{\partial}{\partial z} (pw) + \frac{\mathbf{r}}{2} \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2 + w^2) + \mathbf{r} \frac{DE}{Dt} \end{aligned} \quad (2.6)$$

siendo K la conductividad térmica, T la temperatura, Q el calor generado por el fluido por unidad de volumen, E la energía interna, \vec{q}_r el vector flujo de radiación de claro y Φ_d la función de disipación.

2.2.1. Medio móvil

Se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis:

- Se supone que el fluido por el que se propagan las ondas es un gas perfecto, y por tanto un fluido no viscoso (ideal).
- El proceso de propagación de las ondas se considera adiabático. Suposición aceptable en el caso de frecuencias audibles por el hombre.
- De la hipótesis anterior si además se considera proceso reversible, se concluye que el proceso es también isoentrópico.
- Se asumen pequeñas variaciones de las funciones de presión, densidad y velocidad de partícula. Lo que permite linealizar el sistema.

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$$

$$p_T = p_0 + p$$

$$\vec{u}_T = \vec{u}_0 + \vec{u}$$

siendo \mathbf{r} , p y \vec{u} pequeñas frente a los valores medios \mathbf{r}_0 , p_0 y \vec{u}_0 .

Con estas hipótesis las ecuaciones de Navier-Stokes (2.2)-(2.4) quedarían como

$$\mathbf{r}_T \frac{Du_T}{Dt} = \mathbf{r}_T B_x - \frac{\partial p_T}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{r}_T \frac{Dv_T}{Dt} = \mathbf{r}_T B_y - \frac{\partial p_T}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{r}_T \frac{Dw_T}{Dt} = \mathbf{r}_T B_z - \frac{\partial p_T}{\partial z} \quad (2.9)$$

y que se conocen como ecuaciones de Euler.

A partir de ciertas consideraciones termodinámicas [17], puede deducirse que

$$\frac{Dp_T}{Dt} = c_0^2 \frac{\partial \mathbf{r}_T}{\partial z} \quad (2.10)$$

donde c_0 es la velocidad de propagación del sonido en aire, y viene dada por

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p_T}{\partial \mathbf{r}_T} \right)_S \quad (2.11)$$

siendo S la entropía y realizando la derivada para entropía constante. Así pues para un gas perfecto, $p_T = cte \mathbf{r}_T^{\mathbf{g}}$, la ecuación anterior queda como

$$c_0^2 = \frac{\mathbf{g} p_0}{\mathbf{r}_0} \quad (2.12)$$

La ecuación de continuidad (2.1) y de Euler (2.10) pueden escribirse, teniendo en cuenta la definición de derivada total, como

$$\frac{D\mathbf{r}_T}{Dt} + \mathbf{r}_T \nabla^T \vec{u}_T = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{Dp_T}{Dt} = c_0^2 \frac{D\mathbf{r}_T}{Dt} \quad (2.14)$$

Combinándolas obtenemos

$$\frac{Dp_T}{Dt} + \mathbf{r}_T c_0^2 \nabla^T \vec{u}_T = 0 \quad (2.15)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación anterior tenemos

$$\frac{D^2 p_T}{Dt^2} + \frac{D}{Dt} \left(\mathbf{r}_T c_0^2 \nabla^T \vec{u}_T \right) = 0 \quad (2.16)$$

Las ecuaciones lineales se obtienen despreciando los términos de orden superior al primero. Para las ecuaciones (2.7)-(2.9) resulta

$$\mathbf{r}_0 \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_0 \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{r}_0 \left(u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

Si \mathbf{r}_0 y c_0 se consideran constantes y, el campo de flujo medio es uniforme y estacionario, puede combinarse la ecuación (2.16) con las ecuaciones (2.17)-(2.19), resultando la ecuación de ondas convectiva

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (2.20)$$

en la que la variable es la perturbación acústica de presión p , supuesto conocido el campo de velocidades de flujo medio, y donde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.21)$$

Los inconvenientes derivados de las ecuaciones (2.17)-(2.19) para flujo medio no uniforme, debidos a la presencia de los términos de velocidad, pueden ser evitados mediante una formulación en potencial de velocidad acústica [15] [55] definiendo un potencial \mathbf{f} que cumpla

$$\vec{u} = \nabla \mathbf{f} \quad p = -\mathbf{r}_0 \frac{D\mathbf{f}}{Dt} \quad (2.22)$$

llegamos a la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{f} - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \mathbf{f}}{Dt^2} = 0 \quad (2.23)$$

en la que la única variable es el potencial de velocidad acústica \mathbf{f} .

El campo de velocidades de flujo medio puede obtenerse a partir del potencial de velocidad de flujo medio \mathbf{f}_0 , mediante una expresión similar a la dada en la ecuación (2.22)

$$\vec{u}_0 = \nabla \mathbf{f}_0 \quad (2.24)$$

2.2.2. Medio en reposo

Se considera la velocidad del medio nula y, por tanto, puede considerarse que $\vec{u}_T = \vec{u}$. Para este caso la forma lineal de la ecuación (2.15) queda como

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{r}_0 c_0^2 \nabla^T \vec{u} = 0 \quad (2.25)$$

y la ecuación de Euler (2.10) como

$$\mathbf{r}_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.26)$$

combinando las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de ondas sin flujo

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.27)$$

que depende únicamente de la variable p , la perturbación acústica de presión siendo $\vec{u}_0 = 0$.

Si se considera que la solución es de tipo armónico, la presión podría expresarse como $p = Pe^{j\omega t}$, quedando la ecuación de ondas previa como la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 P + k_0^2 P = 0 \quad (2.28)$$

donde $k_0 = \omega/c_0$ es el número de onda, P la amplitud (compleja) de la presión acústica (función de las coordenadas), y ω la frecuencia angular.

En ausencia de flujo medio, la formulación en potencial de velocidad acústica proporciona una expresión similar a la dada en (2.27)

$$\nabla^2 \mathbf{f} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.29)$$

2.3. Materiales absorbentes

La incorporación de materiales absorbentes en sistemas de escape de vehículos ha presentado tradicionalmente problemas de degradación de sus propiedades con el tiempo debido sobretodo a las altas temperaturas que deben soportar y a la contaminación con partículas procedentes de los gases de escape, y problemas de pérdida de material a causa del arrastre sufrido por el flujo de gas, por lo que no se habían utilizado masivamente en los silenciadores. Hoy día sin embargo, las mejoras de las propiedades de los materiales y el interés creciente por la calidad sonora y no sólo por reducir los niveles de ruido por debajo de los límites legales, ha recuperado la utilización de materiales absorbentes como parte de los silenciadores. Se evitan las configuraciones con el material en posición normal al flujo, para disminuir el efecto de contaminación y arrastre del mismo.

2.3.1. Introducción

En algunos casos el material absorbente puede considerarse como un sólido poroso que se opone al movimiento del fluido y que además modifica la compresibilidad del mismo. Supongamos que los poros del

material están interconectados de forma isótropa, y que la fracción de volumen no ocupada por el sólido es \mathcal{S} , que llamaremos porosidad. Supongamos también al sólido rígido e incompresible. En el límite entre material poroso y aire, la componente normal del volumen de fluido por segundo que pasa por un área normal al flujo, u , será continua. La ecuación de continuidad para u seguirá siendo válida si consideramos un volumen de fluido lo bastante grande como para poder tomar la media de las irregularidades del tamaño de poro. Consideremos la densidad del fluido $\mathbf{r}_0 + \delta$ como la masa de fluido que ocupa la fracción disponible de poros. La ecuación de continuidad de primer orden quedaría como [45]

$$\mathcal{S} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - \mathbf{r}_0 \nabla u = 0 \quad (2.30)$$

La aceleración del fluido en función de las fuerzas actuantes, debe ser modificada para incluir el cambio de inercia y el arrastre de fricción sufrido por el fluido en su movimiento a través de los poros. Algunas fibras de material pueden moverse con el fluido, añadiéndose a la masa efectiva. Por tanto para expresar las propiedades inerciales del fluido en los poros, usamos la densidad efectiva \mathbf{r}_p , mayor que la densidad \mathbf{r}_0 del fluido libre. En materiales acústicos \mathbf{r}_p suele estar entre 1,5 y 5 veces \mathbf{r}_0 .

Expresamos el retraso de fricción del fluido entre los poros en términos de la resistencia de flujo Ω , que se define como la caída de presión requerida para forzar una unidad de flujo a través del material. En muchos materiales usados en atenuación acústica la cantidad $\Omega/\mathbf{r}_0 c_0$ está entre 50 y 500 m^{-1} . Así la ecuación de movimiento es

$$\mathbf{r}_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{S} u + \nabla p = 0 \quad (2.31)$$

o para ondas armónicas simples en materiales uniformes e isótropos

$$j\omega \mathbf{r}_p \left(1 + j \frac{\Omega}{\mathbf{r}_p \omega} \right) u = \nabla p \quad (2.32)$$

Notar que el efecto de la resistencia de flujo es mayor a bajas frecuencias.

Para obtener la ecuación de onda se define la velocidad potencial de manera que $u = -\nabla f$, luego

$$p = r_p \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega f \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 f = k_p r_p \Omega \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k_p \Omega s \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.34)$$

siendo k_p el número de onda efectivo del aire de los poros.

La expresión (2.34) es como la usual pero con una velocidad de onda

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{k_p r_p \Omega}} \quad (2.35)$$

en lugar de

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{r_0 k_0}} \quad (2.36)$$

(la velocidad de propagación en aire) a la hora de obtener la constante de propagación $k_p = \omega/c_p$, y a excepción del último término que representa las pérdidas por fricción. La velocidad c_p es mayor que c_0 porque $r_p \Omega$ es normalmente mayor que r_0 .

Como k_p y r_p dependen de la frecuencia, podemos expresar la ecuación (2.34) de manera armónica mediante ondas con factor de tiempo $e^{-j\omega t}$, utilizando la descomposición según la transformada de Fourier para ondas no armónicas.

Las ecuaciones básicas

$$\mathbf{r} \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta p \quad \text{y} \quad k \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla u \quad (2.37)$$

pueden escribirse para ondas armónicas, considerando $p = P e^{j\omega t}$ y $u = U e^{j\omega t}$, como

$$\frac{j\omega P}{\mathbf{r}c^2} = \nabla U \quad \text{y} \quad j\omega \mathbf{r} U = \nabla P \quad (2.38)$$

La ecuación (2.32) puede escribirse también definiendo una densidad del fluido efectiva \mathbf{r}_e , una compresibilidad k_e efectiva, y una velocidad de onda c_e efectiva, quedando las ecuaciones para el fluido en los poros como

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_p \left(1 + \frac{j\Omega(\mathbf{w})}{\mathbf{r}_p \mathbf{w}} \right)$$

$$k_e = \Omega k_p$$

$$c_e = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_e k_e}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}_p k_p \mathbf{s}}} = c_p \left(1 + \frac{j\Omega}{\mathbf{r}_p \mathbf{w}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $c_p = 1/\sqrt{\mathbf{r}_p k_p \mathbf{s}}$.

Por tanto $u = -\nabla \mathbf{f}$, $p = j\omega \mathbf{r}_e \mathbf{f}$ y $\frac{j\omega}{\mathbf{r}_e c_e^2} p = \Delta u$

llegando a
$$\nabla^2 \mathbf{f} + \left(\frac{\mathbf{w}}{c_e} \right)^2 \mathbf{f} = 0 \quad (2.39)$$

que es la ecuación de onda para ondas armónicas simples.

La velocidad efectiva y la densidad efectiva son cantidades complejas debido al término de fricción. A muy altas frecuencias ambos se vuelven

reales. Así una onda plana de frecuencia $w/2p$, viajando en la dirección positiva de x , se representa por la expresión

$$f = Ae^{\frac{jwx}{c_e} - jw t} \quad (2.40)$$

Esta manera de representar el efecto de los poros en términos de una densidad efectiva y una velocidad de onda efectiva es posible sólo para ondas armónicas simples, pero se puede extender su utilización por medio de la transformada de Fourier a otros tipos de onda, puesto que cualquier onda puede expresarse como sumatorio de ondas armónicas simples.

2.3.2. Caracterización del material

Como ya se comentó anteriormente, para la caracterización de materiales absorbentes pueden utilizarse varios modelos. El modelo de Biot [13] adaptado por Allard [4] al problema acústico es adecuado para materiales porosos, mientras que el modelo macroscópico [45], más sencillo y práctico, es adecuado para materiales cuya parte sólida tiene alta rigidez o para materiales de tipo fibroso. El modelo macroscópico ha sido utilizado en muchos trabajos [5][16][22][42][66][84], y puesto que los materiales utilizados en esta Tesis son de tipo fibroso y cumplen las hipótesis necesarias, se trabajará con el modelo macroscópico.

Para disposiciones superficiales del material con bajo espesor, su comportamiento puede modelarse como una impedancia sin necesidad de tener en cuenta de manera tridimensional la propagación de la onda. Algunos autores han empleado este modelo mediante elementos finitos [5] o en conductos rectangulares [16]. Para espesores mayores de material el modelo de impedancia ya no es válido y ha de considerarse la propagación tridimensional por el interior del mismo.

El modelo macroscópico considera que el material puede caracterizarse a través de dos parámetros, que suelen ser el número de onda y la impedancia compleja. Estos parámetros se pueden determinar de manera experimental mediante diversos procedimientos. Delany y Bazley [24] realizaron un estudio experimental sobre un amplio rango de

materiales absorbentes y obtuvieron una serie de relaciones para definir la impedancia del material en función de la frecuencia y la resistencia al flujo estacionario. Para obtener la resistencia al flujo Ren [57] propone un método basado en la medida de la función de transferencia entre las señales de dos micrófonos situados uno a cada lado de la muestra de ensayo para la obtención del número de onda dinámico, mientras que Woodcock y Hodgson [83] proponen el método de las dos cavidades y el de los dos espesores para materiales poroelásticos. Estos métodos se explicarán con más detalle en el Capítulo 4.

2.4. Acústica unidimensional de conductos

2.4.1. Medio móvil

Consideraremos una única dirección de propagación que tomaremos como z , y la presencia de flujo medio uniforme definido por la velocidad U_{fm} . La velocidad relativa de propagación de la onda respecto al medio sigue siendo c_0 . Así pues la onda progresiva se mueve con una velocidad $U_{fm} + c_0$, mientras que para la onda regresiva se tiene una velocidad de $U_{fm} - c_0$. En este caso se dice que las ondas son arrastradas aguas abajo por el fluido en movimiento, lo que se conoce como efecto convectivo.

La ecuación convectiva clásica (2.20) puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (2.41)$$

Teniendo en cuenta la derivada total para este caso concreto

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_{fm} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.42)$$

la ecuación queda como

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.43)$$

donde $M=U_{fm}/c_0$ es el número de Mach. Considerando una perturbación armónica la ecuación anterior queda

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2jk_0 M \frac{\partial P}{\partial z} + k_0^2 P = 0 \quad (2.44)$$

La solución de esta ecuación viene dada por

$$P(z) = P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} z} + P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} z} \quad (2.45)$$

La velocidad acústica axial está relacionada con la presión por medio de

$$\mathbf{r}_0 \left(j\omega U + U_{fm} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.46)$$

de manera que se puede expresar como

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} \left(P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} z} + P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} z} \right) \quad (2.47)$$

y el flujo másico como

$$V(z) = \frac{1}{Y_0} \left(P^+ e^{-j \frac{k_0}{1+M} z} - P^- e^{j \frac{k_0}{1-M} z} \right) \quad (2.48)$$

donde Z_0 es la impedancia característica dada por $Z_0 = \mathbf{r}_0 c_0$ e Y_0 la correspondiente admitancia $Y_0 = 1/Z_0$.

2.4.2. Medio en reposo

Partiendo de la ecuación (2.27), asumiendo una solución de tipo armónico $p = P e^{j\omega t}$ y que la propagación sólo depende de la coordenada z , obtenemos

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (2.49)$$

cuya solución es del tipo

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z} \quad (2.50)$$

siendo P^+ y P^- las amplitudes complejas asociadas a la onda progresiva y regresiva, respectivamente.

A partir de la ecuación de Euler (2.26) la velocidad acústica puede escribirse como

$$U = \frac{-1}{j \rho_0 \omega} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.51)$$

con lo que teniendo en cuenta (2.50) quedaría como

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 z} - P^- e^{jk_0 z}) \quad (2.52)$$

donde la impedancia característica Z_0 se define igual que para medio móvil. Los coeficientes de propagación P^+ y P^- se determinan a partir de las condiciones de contorno aplicadas.

2.5. Modelos de onda plana. Representación matricial

En esta sección se pretende llevar a cabo la caracterización de la respuesta acústica de los distintos elementos que forman parte del silenciador, en base a la teoría unidimensional desarrollada previamente, con vistas a obtener posteriormente el comportamiento del silenciador completo. La respuesta acústica global de un sistema de escape depende de las condiciones de funcionamiento, de manera que para su evaluación debe incluirse la fuente de generación de ruido, la influencia de las condiciones externas y los elementos que se dispongan en el sistema de evacuación de gases de escape. Por tanto, con el fin de obtener parámetros que de alguna forma sólo se refieren al

comportamiento del elemento bajo estudio, es decir, que den una idea de sus características intrínsecas, se recurre a la utilización de métodos matriciales que permiten obtener la definición de cada elemento por separado, en base a lo que se denomina matriz de cuatro polos [46]. Así, un sistema acústico complejo, puede descomponerse en diversos subcomponentes, cada uno de los cuales tienen asociada su correspondiente matriz de comportamiento. La respuesta global del sistema se obtiene a través de la combinación de todas las matrices involucradas. Esta filosofía es aplicable al propio silenciador, que puede ser modelado como una serie de discontinuidades geométricas conectadas por conductos. Se supone que, aunque el campo acústico sea multidimensional en el interior de los distintos subcomponentes, en la zona de unión entre éstos la onda es plana.

2.5.1. Generalidades

La Figura 1 muestra un sistema acústico en el que aparecen la fuente de ruido, el silenciador o filtro acústico, y la salida, es decir, los elementos conectados aguas abajo.

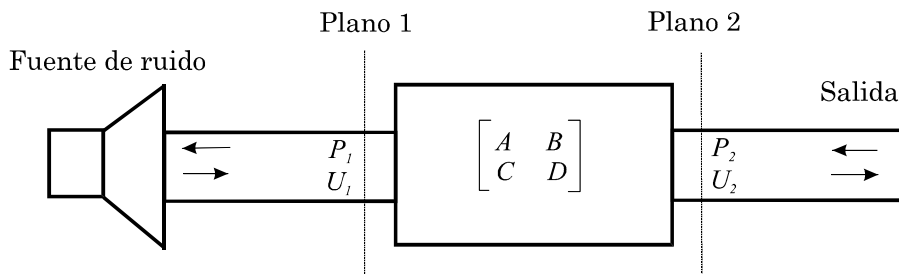


Figura 1. Esquema de un sistema acústico.

Para considerar la definición matricial de un elemento cualquiera (en nuestro caso el silenciador) debemos elegir las variables que vamos a considerar a la entrada (Plano 1) y a la salida (Plano 2). Una posibilidad es considerar las variables presión y velocidad en los planos 1 y 2. Así escribimos la presión y velocidad del plano 1 en función de las del plano 2, obteniendo

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Esta formulación constituye la base del formalismo de las matrices de transferencia: la perturbación acústica en un punto de un conducto, definida por el vector de estado $\{P_1 \ U_1\}^T$, está relacionada con la perturbación en otro punto, aguas abajo del primero, definida por el vector de estado $\{P_2 \ U_2\}^T$, mediante una matriz $[T]$ denominada matriz de transferencia del elemento comprendido entre los planos 1 y 2.

La matriz de transferencia de la ecuación (2.53) puede definirse de cualquier sistema cuya entrada y salida (planos 1 y 2 de la Figura 1) cumplan la condición de onda plana. En este apartado además, se deducirá para el caso concreto de considerar propagación unidimensional a través del sistema en estudio.

La obtención de los cuatro polos del sistema $[T]$ es relativamente simple, se realiza imponiendo dos conjuntos independientes de condiciones de contorno al sistema acústico de la Figura 1. Normalmente se impone la condición $P_2=0$, equivalente a que en el plano 2 tenemos presión atmosférica, y la condición $U_2=0$, equivalente a un extremo cerrado. Dichas condiciones llevan a la obtención de cada uno de los términos de la matriz a partir de la ecuación (2.53) según

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} & B &= \left. \frac{P_1}{U_2} \right|_{P_2=0} \\ C &= \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} & D &= \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{P_2=0} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Es posible obtener la matriz de transferencia de un sistema completo a partir de las matrices de cada subsistema, sin más que llevar a cabo la multiplicación ordenada de éstas, ya que relacionan dos vectores de estado asociados a puntos concretos.

A continuación se procede a evaluar las matrices de transferencia de diversos elementos relevantes que comúnmente forman parte del silenciador.

2.5.2. Conductos

Considérese un conducto de longitud L y sección transversal uniforme S como el mostrado en la Figura 2

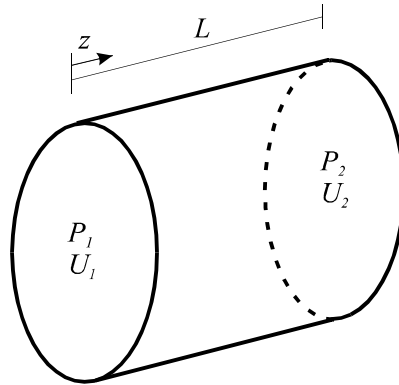


Figura 2. Conducto de sección constante arbitraria.

Como se vio anteriormente, la amplitud de la presión y la velocidad acústica (para ondas armónicas en el tiempo) vienen dadas por las expresiones

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z} \quad (2.55)$$

$$U(z) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z}) \quad (2.56)$$

Para obtener la matriz de cuatro polos deben realizarse dos análisis con las condiciones de contorno $P_2=0$ y $U_2=0$ respectivamente. Considerando una excitación P_e arbitraria, que tomaremos por comodidad de valor unidad, y teniendo en cuenta $U_2=0$, tenemos que

$$P(z=0) = P_1 = P^+ + P^- = P_e = 1 \quad (2.57)$$

$$U(z=L) = U_2 = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 L} + P^- e^{jk_0 L}) = 0 \quad (2.58)$$

cuya solución es

$$P^+ = \frac{1 \cos(k_0 L) + j \operatorname{sen}(k_0 L)}{2 \cos(k_0 L)} \quad (2.59)$$

$$P^- = \frac{1 \cos(k_0 L) - j \operatorname{sen}(k_0 L)}{2 \cos(k_0 L)} \quad (2.60)$$

Estas ecuaciones definen la presión $P(z)$ y la velocidad $U(z)$ en el conducto a través de (2.57) y (2.58).

Los términos A y C de la matriz de transferencia serán pues

$$A = \left. \frac{P_1}{P_2} \right|_{U_2=0} = \cos(k_0 L) \quad (2.61)$$

$$C = \left. \frac{U_1}{P_2} \right|_{U_2=0} = \frac{j}{Z_0} \operatorname{sen}(k_0 L) \quad (2.62)$$

Considerando la condición $P_2=0$ tenemos que

$$P(z=0) = P_1 = P^+ + P^- = P_e = 1 \quad (2.63)$$

$$P(z=L) = P_2 = P^+ e^{-jk_0 L} + P^- e^{jk_0 L} = 0 \quad (2.64)$$

de donde obtenemos

$$P^+ = \frac{-j \cos(k_0 L) + j \operatorname{sen}(k_0 L)}{2 \operatorname{sen}(k_0 L)} \quad (2.65)$$

$$P^- = \frac{1 \operatorname{sen}(k_0 L) + j \cos(k_0 L)}{2 \operatorname{sen}(k_0 L)} \quad (2.66)$$

Así pues podemos calcular B y D como

$$B = \frac{P_1}{U_2} \Big|_{P_2=0} = jZ_0 \text{sen}(k_0L) \quad (2.67)$$

$$D = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{P_2=0} = \cos(k_0L) \quad (2.68)$$

La matriz de transferencia para un conducto queda por tanto como

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0L) & jZ_0 \text{sen}(k_0L) \\ \frac{j}{Z_0} \text{sen}(k_0L) & \cos(k_0L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

2.5.3. Expansiones y contracciones

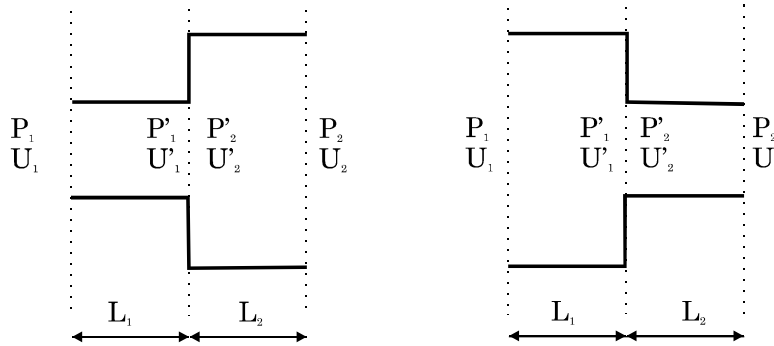


Figura 3. Esquemas de expansión y contracción de un conducto.

La Figura 3 muestra la expansión y la contracción de un conducto. En ausencia de flujo,

$$P'_1 = P'_2 \quad (2.70)$$

$$r_0 S_1 U'_1 = r_0 S_2 U'_2 \quad (2.71)$$

Expresando estas relaciones matricialmente se tiene

$$\begin{Bmatrix} P'_1 \\ U'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_2 \\ U'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

Esta representación es aproximada, puesto que el campo de presiones y velocidades debe ser continuo, lo que lleva a la aparición de fenómenos multidimensionales en la discontinuidad. Estos fenómenos tienen más importancia a medida que aumenta la frecuencia, de manera que las matrices previas son válidas únicamente en el rango de baja frecuencia. Para transiciones con mayor diferencia de sección las frecuencias de validez de la fórmula (2.72) disminuyen.

Una vez tenemos la matriz de transferencia del cambio de sección, podemos obtener la relación entre las variables acústicas en 1 en función del valor de dichas variables en 2 (ver Figura 3), sin más que multiplicar ordenadamente las matrices correspondientes a cada elemento, es decir

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jZ_0 \sin(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jZ_0 \sin(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Z_0} \sin(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

2.5.4. Conductos extendidos

Se considera un conducto extendido al mostrado en la Figura 4. La región 2 es como un conducto con un extremo cerrado que actúa como un resonador a ciertas frecuencias que dependen de la longitud L_2 . Cuando se produce una resonancia, gran parte de la energía acústica que entra al sistema se invierte en el movimiento de las partículas contenidas en el interior de la zona extendida.

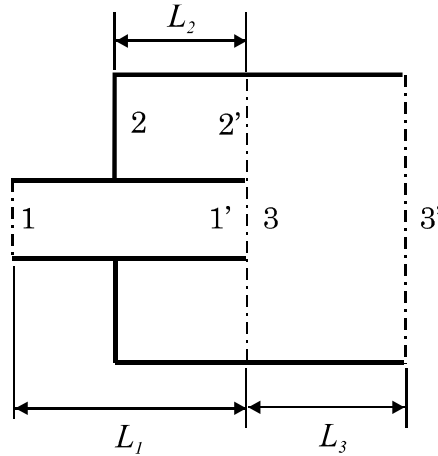


Figura 4. Detalle de un conducto extendido.

Con el fin de simplificar la obtención de la matriz de transferencia asociada a este sistema, se utiliza el flujo másico en lugar de la velocidad acústica. Supuesto que se satisface la condición de onda plana, la presión es la misma en todos los puntos de la zona de transición, de manera que puede escribirse

$$P_1 = P_2 = P_3 \quad (2.74)$$

La continuidad de flujo másico implica que

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad (2.75)$$

El comportamiento de la región 2 puede representarse por medio de una impedancia equivalente en la zona de transición sin más que tener en cuenta que se trata de un conducto cerrado en un extremo, y por tanto la velocidad acústica es cero en éste. Se introduce la impedancia de dicha región como

$$Z_2 = \frac{P_2}{V_2} \quad (2.76)$$

Considerando ahora la matriz de transferencia de un conducto, definida mediante la ecuación (2.69), y adaptándola para flujo másico se tiene

$$\begin{Bmatrix} P_{2'} \\ V_{2'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_2) & jY_2 \operatorname{sen}(k_0 L_2) \\ \frac{j}{Y_2} \operatorname{sen}(k_0 L_2) & \cos(k_0 L_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

donde $Y_2 = c_0/S_2$. Teniendo en cuenta que $V_2 = 0$ debido al extremo cerrado, resulta

$$Z_2 = \frac{P_{2'}}{V_{2'}} = \frac{\cos(k_2 L_2) P_2}{\frac{j}{Y_2} \operatorname{sen}(k_2 L_2) P_2} = -jY_2 \cot(k_2 L_2) \quad (2.78)$$

La matriz de transferencia del sistema completo queda entonces como

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_1) & jY_1 \operatorname{sen}(k_0 L_1) \\ \frac{j}{Y_1} \operatorname{sen}(k_0 L_1) & \cos(k_0 L_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_0 L_3) & jY_3 \operatorname{sen}(k_0 L_3) \\ \frac{j}{Y_3} \operatorname{sen}(k_0 L_3) & \cos(k_0 L_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

donde $Y_1 = c_0/S_1$ e $Y_3 = c_0/S_3$.

La condición de resonancia del conducto extendido se produce para aquellas frecuencias que hacen que la impedancia sea nula, es decir, $\cot(k_2 L_2) = 0$ lo cual ocurre cuando

$$k_0 L_2 = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

o lo que es lo mismo

$$L_2 = \frac{(2n+1)l}{4} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.81)$$

La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia de excitación es tal que en la longitud del extendido cabe un cuarto de onda, tres cuartos, etc. Por ello esta disposición se conoce como resonador de cuarto de onda.

2.6. Placas y tubos perforados.

Los elementos perforados forman parte de los silenciadores en gran número de ocasiones [44][46][74], y se presentan con disposiciones diversas, como pueden ser conductos perforados, completa o parcialmente, y placas. Los tubos perforados son un ejemplo concreto de una impedancia en paralelo, y las placas de una impedancia en serie.

La impedancia que caracteriza a los perforados puede, en general, describirse en base al diámetro de los orificios d_h , el espesor t_p y la porosidad \mathcal{S} , que no es más que la relación entre el área perforada y el área total [10]. Los fenómenos de atenuación acústica involucran efectos diversos asociados al cambio de sección por el que circula el fluido al pasar de un lado al otro de las perforaciones, que implica reflexiones de las ondas y también disipación de energía debido a la fricción. El campo acústico en las inmediaciones del elemento perforado puede ser relativamente complejo, sobre todo en presencia de flujo medio [59][76], de manera que el tratamiento que se le da en la bibliografía es siempre simplificado, en base al concepto de impedancia que se presenta a continuación.

2.6.1. Impedancia acústica

La impedancia de un elemento perforado es la relación que existe entre la presión acústica a ambos lados de dicho elemento y la velocidad con que es atravesado,

$$Z_p = \frac{P_e - P_s}{U} \quad (2.82)$$

En general se considera U como la velocidad media de toda la superficie de los orificios.

La impedancia acústica depende de diversos factores como la porosidad (la relación entre la superficie de orificios y la superficie total), el diámetro de los orificios y el espesor de los mismos, así como de la frecuencia y de la velocidad del flujo medio tangente y normal a la superficie del perforado [46]. Además, también incluye el hecho de que la distribución de los orificios sea o no uniforme [36]. La mayor parte de las veces se utilizan medidas experimentales para modelar el comportamiento flujo-onda acústica en la región de los orificios debido a su dificultad de obtención. Estas medidas proporcionan modelos empíricos de la impedancia.

Existen muchos modelos de impedancia disponibles, cuyos resultados presentan en ocasiones discrepancias entre sí. Aquí haremos referencia sólo a los utilizados en esta Tesis. El primer caso, el más simple, corresponde a un elemento perforado dentro de un medio de propagación en reposo. En las referencias [73] [75] encontramos la expresión

$$Z_p = r_0 c_0 \frac{6 \cdot 10^{-3} + j k_0 (t_p + 0.75 d_h)}{\mathbf{s}} \quad (2.83)$$

En este modelo, la parte resistiva, asociada a las pérdidas, es de valor absoluto pequeño frente a la parte reactiva (parte imaginaria) que aumenta con la frecuencia, con el espesor y el diámetro de orificio. En general, la impedancia depende de manera inversamente proporcional a la porosidad, que tiene un efecto importante, dado que puede variar en un amplio rango. Esta expresión ha sido utilizada por varios autores [32] [46][47][67] y será la base de partida para el modelo utilizado en esta Tesis y que se explica en el apartado 4.2.8.

Si tenemos un elemento perforado con flujo medio tangente a su superficie definido por el número de Mach M , podemos utilizar la expresión [56]

$$Z_p = r_0 c_0 \frac{7.337 \cdot 10^{-3} (1 + 72.23M) + j2.2245 \cdot 10^{-5} (1 + 51t_p)(1 + 204d_h) \frac{w}{2p}}{s} \quad (2.84)$$

que considera la impedancia función de la frecuencia y donde el número de Mach sólo afecta a la parte resistiva. Esta tendencia se ajusta a las observaciones experimentales que indican que la parte resistiva de la impedancia aumenta debido al flujo, mientras que la parte reactiva es menos sensible disminuyendo ligeramente. Este modelo ha sido utilizado de forma satisfactoria por varios autores [32] [82].

2.6.2. Efecto del material absorbente en la impedancia de conductos perforados

La impedancia de un conducto perforado, como ya se vio en el apartado 2.6.1, viene definida por la relación entre la caída de presión y la velocidad con que es atravesado

$$Z_p = \frac{P_e - P_s}{U} \quad (2.85)$$

Al modelar un perforado con diferentes tipos de material a cada uno de sus lados, hay que tener en cuenta que las presiones a ambos lados del perforado se ven afectadas por el medio en que se propagan modificando la impedancia del perforado. Kirby y Cummings [40] proponen corregir la fórmula de Sullivan (2.83) obteniendo finalmente

$$Z_p = \frac{0.006 + jk \left[t_w + 0.375d_h \left(1 + \frac{Z_a k_a}{Z_0 k_0} \right) \right]}{s} \quad (2.86)$$

donde [24]

$$\frac{Z_a}{Z_0} = \left[1 + a_5 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_6} \right] + j \left[a_7 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_8} \right] \quad (2.87)$$

$$\frac{k_a}{k_0} = \left[1 + a_3 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_4} \right] + j \left[a_1 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_2} \right] \quad (2.88)$$

siendo $Z_0 = \mathbf{r}_0 c_0$ la impedancia característica del aire, $f = \mathbf{w}/2\mathbf{p}$ y donde los coeficientes a_1, \dots, a_8 se ajustan experimentalmente.

2.7. Silenciadores

Un silenciador es un elemento generalmente pasivo, conectado a una fuente de ruido, cuya función es disminuir el nivel sonoro de éste hasta valores aceptables. La respuesta acústica de los silenciadores depende de los fenómenos que producen la atenuación sonora [9].

Podemos agrupar los silenciadores en dos grandes grupos atendiendo a los distintos fenómenos que originan la atenuación sonora:

2.7.1. Configuraciones sin disipación

Son los silenciadores normalmente llamados reactivos, puesto que la atenuación es producida principalmente por fenómenos de tipo reactivo en los que parte de la energía incidente retorna a la fuente debido a la reflexión que se produce como consecuencia de cambios de sección y otras particularidades geométricas. Un ejemplo típico es un cámara de expansión simple (Figura 5 a)), formada por un tubo de entrada, una cámara de expansión central, y un tubo de salida. La energía disipada en este caso es pequeña.

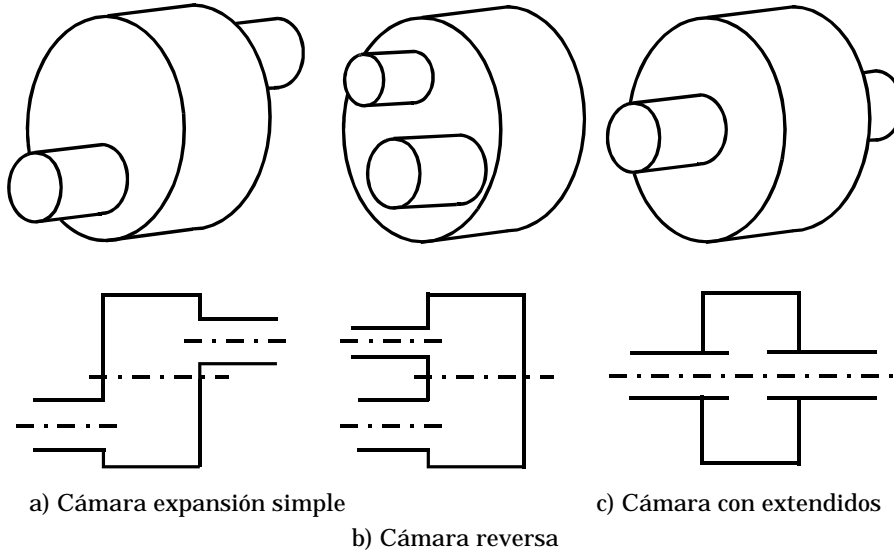


Figura 5. Ejemplos de configuraciones sin disipación.

Otro caso interesante de este tipo de silenciadores son los llamados resonadores. Su funcionamiento se basa en la presencia de cavidades y zonas de discontinuidad geométrica donde el fluido puede entrar en resonancia, absorbiendo gran parte de la energía e impidiendo que ésta se propague. Estos silenciadores presentan frecuencias propias donde la atenuación es elevada, aunque para otras frecuencias de excitación este mecanismo no entra en funcionamiento y se debe recurrir a otros medios de atenuación. Un ejemplo claro lo constituyen los resonadores de Helmholtz y los silenciadores con tubos extendidos (figura c)), en los que los conductos de entrada y salida penetran parcialmente en el interior de la cámara central.

2.7.2. Configuraciones con disipación

En los silenciadores disipativos, los fenómenos de atenuación, además de los debidos a las discontinuidades geométricas, son producidos por la utilización de materiales absorbentes de gran superficie específica (en forma de fibra, generalmente). También pueden conseguirse características disipativas (aunque en mucho menor grado) mediante la introducción de placas y tubos perforados que favorecen la disipación de energía durante la propagación de la onda acústica, aunque estas

últimas geometrías es frecuente encontrarlas en la literatura como reactivas.

La Figura 6 muestra un silenciador con tubo perforado y material absorbente.

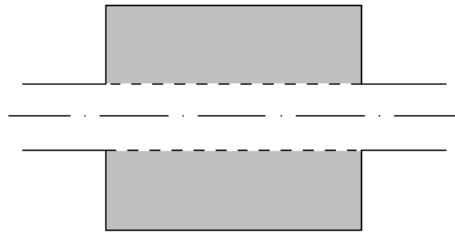


Figura 6. Resonador concéntrico con material absorbente.

Realmente todos los silenciadores reactivos producen algo de disipación como consecuencia de las pérdidas asociadas a todo fluido real cuando éste circula por conductos, cambios de sección, etc. Igualmente, los silenciadores disipativos tienen asociados efectos reactivos debido a la presencia de expansiones y contracciones.

2.8. Atenuación sonora en silenciadores

Antes de definir los índices básicos que se utilizan en la medida de la atenuación de silenciadores, se introducen a continuación algunos conceptos relacionados con la energía asociada a la onda acústica [46].

2.8.1. Consideraciones energéticas

Sea un conducto en el que se propaga una onda acústica con velocidad U_{fm} en presencia de flujo medio. Se asume comportamiento armónico, con lo que los valores de interés se obtienen a partir del promediado temporal de los campos acústicos instantáneos a lo largo de un periodo. La intensidad acústica I , definida como la energía que atraviesa la sección transversal del conducto por unidad de tiempo y superficie viene dada por

$$I = \langle pu \rangle + \frac{U_{fm}}{r_0} \langle p\mathbf{r} \rangle + U_{fm} r_0 \langle u^2 \rangle + U_{fm}^2 \langle u\mathbf{r} \rangle \quad (2.89)$$

donde $\langle \rangle$ indica el promediado temporal. Utilizando la expresión (2.11), puede eliminarse la perturbación de densidad en la ecuación anterior, resultando

$$I = \langle pu \rangle + \frac{M}{r_0 c_0} \langle p^2 \rangle + M r_0 c_0 \langle u^2 \rangle + M^2 \langle pu \rangle \quad (2.90)$$

La potencia acústica W se obtiene integrando la intensidad en la sección transversal,

$$W = \int_s IdS = \int_s \left(\langle pu \rangle + \frac{M}{r_0 c_0} \langle p^2 \rangle + M r_0 c_0 \langle u^2 \rangle + M^2 \langle pu \rangle \right) dS \quad (2.91)$$

Como supusimos comportamiento armónico entonces

$$P e^{j\omega t} = (P^+ + P^-) e^{j\omega t} = \left(|P^+| e^{ja_p} + |P^-| e^{ja_r} \right) e^{j\omega t} \quad (2.92)$$

$$U e^{j\omega t} = \frac{1}{r_0 c_0} (P^+ - P^-) e^{j\omega t} = \frac{1}{r_0 c_0} \left(|P^+| e^{ja_p} - |P^-| e^{ja_r} \right) e^{j\omega t} \quad (2.93)$$

Integrando a lo largo de un periodo, la potencia acústica quedaría

$$W = \frac{S}{2 r_0 c_0} \left(|P^+|^2 (1+M)^2 - |P^-|^2 (1-M)^2 \right) \quad (2.94)$$

En esta última expresión se observa claramente la distinción entre la potencia asociada a la onda progresiva y la regresiva. En ausencia de flujo medio, basta considerar $M=0$.

2.8.2. Índices de atenuación sonora en silenciadores

La caracterización de los silenciadores se lleva a cabo mediante su atenuación sonora. Esta atenuación puede ser evaluada a través de diferentes índices, de los que cabe destacar los siguientes:

Índice de pérdidas de inserción (IL).

Se define como la diferencia en decibelios entre los niveles de potencia sonora medidos en un punto antes y después de que el silenciador sea insertado entre el punto de medida y la fuente de ruido. Este indicador proporciona información sobre el comportamiento acústico de un silenciador cuando éste se encuentra acoplado a una fuente acústica y a una terminación. Por tanto su valor está determinado por las características de todo el sistema. Así, si W_2 corresponde a la potencia acústica con el silenciador en el sistema y W_1 corresponde al caso con el silenciador sustituido por un tubo de igual longitud, se tiene

$$IL = 10 \log \left(\frac{W_1}{W_2} \right) \quad (2.95)$$

Diferencia de Nivel (LD):

Se define como la diferencia de niveles de presión sonora aguas arriba y aguas abajo del silenciador. Este índice, al igual que la pérdida de inserción, depende de la fuente y la terminación empleadas. Si se denota mediante P_1 la presión aguas arriba y P_2 la presión aguas abajo, se tiene

$$LD = 20 \log \left(\left| \frac{P_1}{P_2} \right| \right) \quad (2.96)$$

Índice de pérdidas de transmisión (TL).

Se define como la relación entre la potencia acústica que incide en el silenciador respecto a la que es transmitida por éste, considerando terminación anecoica (sin reflexión de la onda). Proporciona información del comportamiento acústico del silenciador con independencia de la fuente de ruido, por lo que resulta de gran utilidad. Si P_1^+ es la presión incidente y P_2^+ la transmitida, en ausencia de flujo resulta

$$TL = 10 \log \left(\frac{S_1 |P_1^+|^2}{S_2 |P_2^+|^2} \right) \quad (2.97)$$

Debido al carácter intrínseco del índice de pérdidas de transmisión, será el utilizado para caracterizar los silenciadores a lo largo de la Tesis.

2.9. Aplicaciones

En esta sección se obtendrá el TL de diversas tipologías de silenciador con el fin de mostrar sus características básicas. Como la descripción del comportamiento se realiza en base al método de las matrices de transferencia, se procede inicialmente a la evaluación del TL a partir de los cuatro polos del silenciador.

La matriz que relaciona las variables a la entrada y la salida del silenciador, denotadas con subíndices 1 y 2 respectivamente, la representaremos como

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

De las ecuaciones (2.50) y (2.52), puede escribirse para $z = 0$

$$P_1 = P_1^+ + P_1^- \quad (2.99)$$

$$U_1 = \frac{1}{\mathbf{r}_0 c_0} (P_1^+ + P_1^-) \quad (2.100)$$

y por tanto

$$P_1^+ = \frac{P_1 + \mathbf{r}_0 c_0 U_1}{2} \quad (2.101)$$

Además puesto que la salida es anecoica, en $z = 0$

$$P_2 = P_2^+ = \mathbf{r}_0 c_0 U_2 \quad (2.102)$$

De la definición del TL (2.97), se obtiene

$$TL = 10 \log \left(\frac{S_1 |P_1^+|^2}{S_2 |P_2^+|^2} \right) = 20 \log \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{P_1 + \mathbf{r}_0 c_0 U_1}{2 \mathbf{r}_0 c_0 U_2} \right| \right] \quad (2.103)$$

de manera que considerando ahora la expresión (2.98), se llega a

$$TL = 20 \log \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{A + \frac{B}{\mathbf{r}_0 c_0} + \mathbf{r}_0 c_0 C + D}{2} \right| \right] \quad (2.104)$$

que es la expresión buscada.

2.9.1. Configuraciones sin disipación

Consideremos primero un silenciador formado por un conducto de entrada, una cámara central y un conducto de salida, lo que normalmente se conoce como una cámara de expansión simple (ver Figura 7).

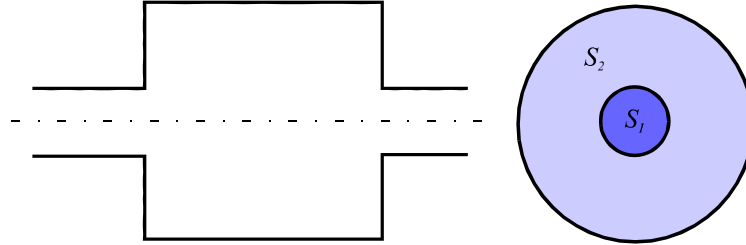


Figura 7. Cámara de expansión simple.

Sus secciones transversales serán S_1 en el tubo de entrada, S_2 en la cámara y S_3 en el tubo de salida. La matriz de transferencia global se obtiene multiplicando las matrices de los conductos y cambios de sección dados por las expresiones (2.69) y (2.72) respectivamente, de manera que

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{S_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_1}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

Operando y aplicando la definición del TL dada por la ecuación (2.104), se llega a

$$TL = 10 \log \left[\frac{m_2}{4m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{m_2}{4m_1} (m_1^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{m_2^2} \right) \text{sen}^2(k_0 L_0) \right] \quad (2.106)$$

con $m_1 = S_2/S_1$ y $m_2 = S_2/S_3$.

Para esta configuración el TL es una sucesión de cúpulas de atenuación de anchura constante y bandas de paso (ver Figura 10). Los valores máximos de atenuación de dichas cúpulas aparecen a frecuencias

$$f = \frac{(2n+1)c_0}{4L_2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

debido a la existencia de $(2n + 1)$ cuartos de onda en la cámara. Las bandas de paso tienen una frecuencia asociada de valor

$$f = \frac{nc_0}{2L_2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

lo cual implica que cuanto mayor es la longitud, mayor es el número de cúpulas presentes en un mismo intervalo de frecuencias. A su vez, la amplitud máxima de atenuación es proporcional a la relación de secciones cámara-tubo, de manera que mayores cambios de sección implican valores de atenuación sonora también mayores.

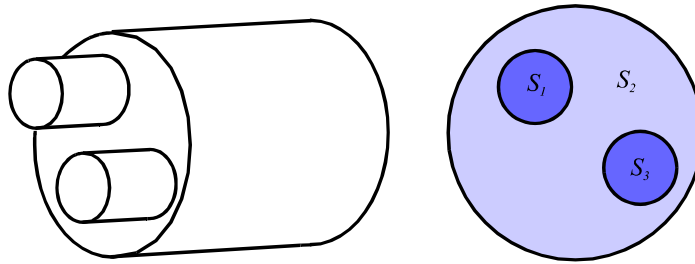


Figura 8. Cámara de expansión reversa.

Para el caso de un silenciador de cámara reversa, cuya diferencia respecto al caso anterior radica en que los conductos de entrada y salida se encuentran en el mismo lado (ver Figura 8), las ecuaciones de continuidad de presión y flujo másico son las mismas que las planteadas en el punto 2.5.3, y por consiguiente la expresión (2.79) es aplicable. Así resulta,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_2}{-jc_0 \cot(k_0 L_2)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

De manera que se puede calcular el TL aplicando la expresión (2.104). Si $S_1 = S_3$ entonces se obtiene

$$TL = 10 \log \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \tan^2(k_0 L_2) \right] \quad (2.108)$$

Para estas geometrías se observa también un comportamiento repetitivo, pero en lugar de cúpulas se presentan picos de resonancia. Aparecen igualmente las bandas de paso a las mismas frecuencias que para la cámara simple (ver Figura 10). La longitud y el cambio de sección afectan de igual modo que en el caso anterior.

Por último como configuración sin disipación analizaremos el caso de silenciadores con tubos extendidos. La Figura 9 muestra un silenciador formado por una cámara en la que entran dos conductos extendidos. Se consideran cinco regiones, las regiones 2 y 4 (asociadas a las extensiones) se modelan como se explicó en el apartado 2.5.3.

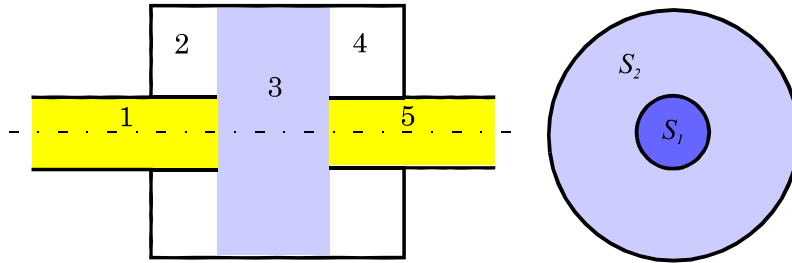


Figura 9. Cámara de expansión simple con extendidos.

La matriz de transferencia queda como

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_2}{-jc_0 \cot(k_0 L_2)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{S_4}{-jc_0 \cot(k_0 L_4)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_5 & B_5 \\ C_5 & D_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_5 \\ V_5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.109)$$

donde $S_2 = S_3 - S_1$ y $S_4 = S_3 - S_5$. El TL asociado se obtiene de la expresión (2.104).

En la Figura 10 se representa el TL obtenido mediante la matriz de transferencia (suponiendo onda unidimensional), para unas dimensiones concretas de cada uno de los casos expuestos anteriormente.

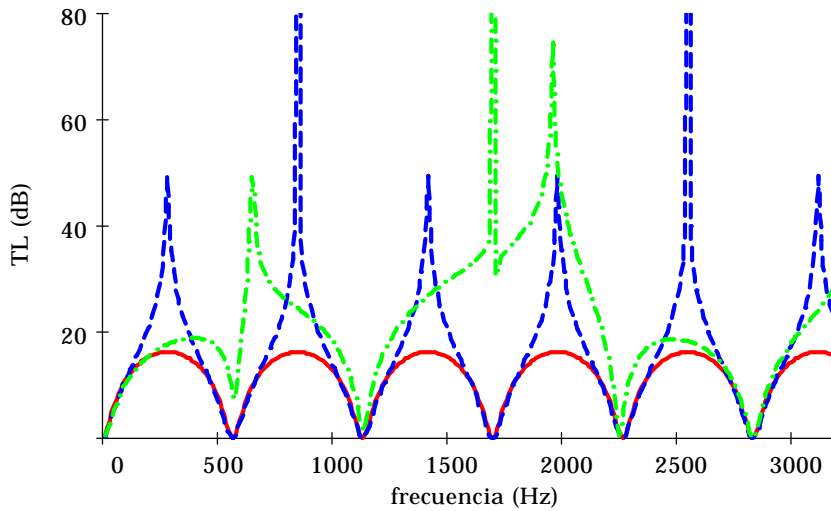


Figura 10. TL para una cámara de expansión simple, una cámara reversa y una con tubos extendidos. $\frac{3}{4}$ TL de una cámara simple, $-$ TL de una cámara reversa, $- \cdot -$ TL de una cámara con extendidos.

2.9.2. Configuraciones con disipación

2.9.2.1. Resonador concéntrico

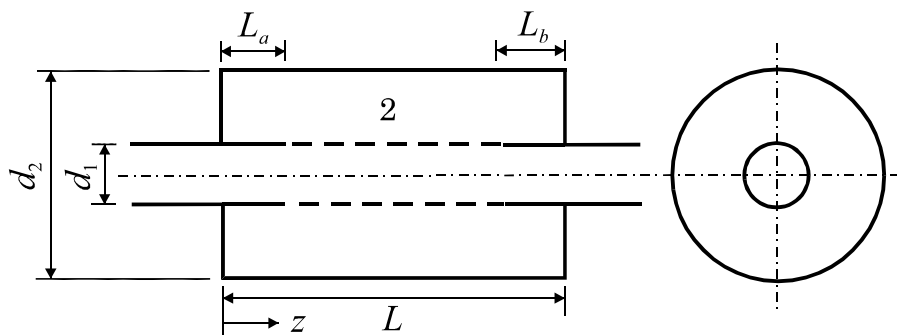


Figura 11. Resonador concéntrico.

Consideremos ahora el silenciador de la Figura 11. La impedancia de su conducto perforado central se denotará mediante Z_p . En este caso tenemos un carácter distribuido de las perforaciones a lo largo de la dirección de propagación lo que hace su análisis diferente de los anteriores. Se incluye la presencia de flujo medio y se asume que los conductos son circulares.

Para este caso seguiremos en general el modelado de Munjal [46]. En una sección cualquiera en la que el conducto y la cámara están comunicados por medio del elemento perforado, las ecuaciones (2.13) y (2.9) de continuidad y equilibrio dinámico se pueden expresar para el conducto como [73]

$$U_{fm1} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial z} + \mathbf{r}_0 \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{4\mathbf{r}_0}{d_1} U = -j\omega \mathbf{r}_1 \quad (2.110)$$

$$\mathbf{r}_0 \left(j\omega U_1 + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (2.111)$$

y para la cámara como

$$U_{fm2} \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial z} + \mathbf{r}_0 \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{4d_1 \mathbf{r}_0}{d_2^2 - d_1^2} U = -j\omega \mathbf{r}_2 \quad (2.112)$$

$$\mathbf{r}_0 \left(j\omega U_2 + U_{fm2} \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.113)$$

donde d_1 y d_2 son los diámetros de conducto y cámara respectivamente, \mathbf{r}_0 , U_{fm1} y U_{fm2} son valores promedio de densidad y velocidad de flujo medio, U_1 , U_2 , P_1 , P_2 , \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son las perturbaciones acústicas y U es la velocidad acústica radial en la superficie del conducto perforado. Se asume la condición de continuidad de velocidad radial. Podría asumirse continuidad de desplazamiento o de gradiente radial de presión, pero se observa que la continuidad de velocidad radial da buena concordancia con resultados experimentales [25]. En base a la sección 2.6.1, puede escribirse

$$U(z) = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{Z_p} \quad (2.114)$$

La condición de isoentropía utilizada en la deducción de la ecuación de ondas permite eliminar las densidades \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . También pueden eliminarse las velocidades U_1 , U_2 y U resultando finalmente

$$\begin{bmatrix} D^2 + \mathbf{a}_1 D + \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 D + \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_5 D + \mathbf{a}_6 & D^2 + \mathbf{a}_7 D + \mathbf{a}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Donde $D = \partial/\partial z$ y se ha introducido la siguiente notación

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= -\frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \mathbf{a}_2 &= \frac{k_a^2}{1-M_1^2} \\ \mathbf{a}_3 &= -\frac{jM_1}{1-M_1^2} \left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \mathbf{a}_4 &= -\left(\frac{k_a^2 - k_0^2}{1-M_1^2} \right) \\ \mathbf{a}_5 &= -\frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{k_0} \right) & \mathbf{a}_6 &= -\left(\frac{k_b^2 - k_0^2}{1-M_2^2} \right) \\ \mathbf{a}_7 &= -\frac{jM_2}{1-M_2^2} \left(\frac{k_b^2 + k_0^2}{k_0} \right) & \mathbf{a}_8 &= \frac{k_b^2}{1-M_2^2} \\ k_a^2 &= k_0^2 - \frac{j4k_0 \mathbf{r}_0 c_0}{d_1 Z_p} & k_b^2 &= k_0^2 - \frac{j4k_0 d_1 \mathbf{r}_0 c_0}{(d_2^2 - d_1^2) Z_p} \end{aligned}$$

Por ser lineal, podemos desacoplar el sistema de ecuaciones (2.115). Separando la matriz del sistema en dos quedaría una matriz con las derivadas de primer y segundo orden, y otra matriz con las de orden cero y primer orden. El sistema sería equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \\ 0 & 1 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_4 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.116)$$

que es un sistema de ecuaciones de tipo $[A]\{P'\}+[B]\{P\}=0$. Asumiendo soluciones exponenciales, se convierte en un problema de valores y vectores propios donde la matriz correspondiente es $-[A]^{-1}[B]$. La solución buscada $\{P\}$ expresada en variables propias (G_1 , G_2 , G_3 y G_4) es

$$\{P\} = [\mathbf{y}]\{\Gamma\} \quad (2.117)$$

donde $[\mathbf{y}]$ es la matriz que contiene los vectores propios. Considerando que $\Gamma_i = C_i e^{b_i z}$, puede escribirse

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{1,i} C_i e^{b_i z} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{b_i z} \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{2,i} C_i e^{b_i z} \quad (2.119)$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{3,i} C_i e^{b_i z} \quad (2.120)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{4,i} C_i e^{b_i z} \quad (2.121)$$

donde los vectores propios se han normalizado a primera componente unidad.

Para hallar U_1 y U_2 en función de las presiones, se recurre a las ecuaciones (2.111) y (2.113), que establecen la relación entre ambos campos acústicos. Escribiendo

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{b_i z} \quad (2.122)$$

sólo se deben evaluar los coeficientes K_i . Realizando la sustitución de las ecuaciones (2.122) y (2.118) en la ecuación de equilibrio dinámico (2.111) se obtiene

$$K_i = -\frac{C_i}{j\mathbf{r}_0 \mathbf{w} + \mathbf{r}_0 U_{fm1} \mathbf{b}_i} \quad (2.123)$$

Así, la velocidad en el conducto quedaría como

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{j\mathbf{r}_0 \mathbf{w} + \mathbf{r}_0 U_{fm1} \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.124)$$

De igual modo se repite el desarrollo para la velocidad de la cámara, teniendo en cuenta que las componentes de la segunda columna de la matriz de vectores propios ya no son la unidad. Finalmente resulta

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\mathbf{y}_{2,i} C_i}{j\mathbf{r}_0 \mathbf{w} + \mathbf{r}_0 U_{fm2} \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.125)$$

Por conveniencia en los cálculos posteriores, se multiplican las velocidades por la impedancia característica del medio

$$\mathbf{r}_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{jk_0 + M_1 \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.126)$$

$$\mathbf{r}_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{\mathbf{y}_{2,i} C_i}{jk_0 + M_2 \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.127)$$

Para obtener la matriz de transferencia del conducto perforado sólo es necesario conocer la relación entre las variables en los extremos del

conducto. Puede expresarse la dependencia en z en función de las constantes C_j

$$\begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(z) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(z) \end{Bmatrix} = [A(z)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.128)$$

donde, la matriz $|A(z)|$ se calcula a partir de la expresiones (2.120), (2.121), (2.126) y (2.127). En la sección inicial ($z = 0$) y final ($z = L$) del conducto perforado tendríamos pues

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [A(L)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

de donde se deduce la igualdad

$$[A(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.129)$$

y finalmente se llega a

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)][A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.130)$$

Pretendemos obtener la matriz de transferencia entre las variables acústicas de la entrada y la salida del silenciador, es decir, $\{P_1(0) U_1(0)\}^T$ y $\{P_2(L) U_2(L)\}^T$. Para ello se deben imponer las condiciones adecuadas. Utilizando la información de la sección 2.5.4 para conductos extendidos, tenemos

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = j r_0 c_0 \cot(k_0 L_a) \quad (2.131)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{-U_2(L)} = j r_0 c_0 \cot(k_0 L_b) \quad (2.132)$$

donde se ha tenido en cuenta el sentido de la velocidad utilizado. La relación buscada es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a & r_0 c_0 T_b \\ \frac{T_c}{r_0 c_0} & T_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.133)$$

donde cada término de la matriz de transferencia se obtiene mediante las igualdades que siguen

$$T_a = T_{11} + A_1 A_2 \quad T_b = T_{13} + B_1 A_2$$

$$T_c = T_{31} + A_1 B_2 \quad T_d = T_{33} + B_1 B_2$$

$$A_1 = \frac{X_1 T_{21} - T_{41}}{F_1} \quad B_1 = \frac{X_1 T_{23} - T_{43}}{F_1}$$

$$A_2 = T_{21} + X_2 T_{14} \quad B_2 = T_{32} + X_2 T_{34}$$

$$F_1 = T_{42} + X_2 T_{44} - X_1 (T_{22} + X_2 T_{24})$$

$$X_1 = -j \tan(k_0 L_a) \quad X_2 = j \tan(k_0 L_b)$$

siendo T_{ij} $i,j=1,\dots,4$ los términos de la matriz $[T]$ definida en la expresión (2.130). A partir de la matriz de transferencia (2.133) se obtiene el TL de forma inmediata considerando la fórmula (2.104).

2.9.2.2. Silenciador con material absorbente

Consideraremos ahora el caso de un resonador concéntrico como el del caso anterior, pero con material absorbente en la zona exterior al perforado y a los extendidos (zona 2 en la Figura 11). Se seguirá un procedimiento similar al caso del resonador concéntrico pues también tenemos carácter distribuido del material a la largo de la dirección de propagación.

En una sección cualquiera, las ecuaciones (2.13) y (2.9) de continuidad y equilibrio dinámico se pueden expresar para el conducto como

$$U_{fm1} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial z} + \mathbf{r}_0 \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{4\mathbf{r}_0}{d_1} U = -j\omega \mathbf{r}_1 \quad (2.134)$$

$$\mathbf{r}_0 \left(j\omega U_1 + U_{fm1} \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_1}{\partial z} \quad (2.135)$$

y para la cámara como [81]

$$U_{fm2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_2}{\partial z} + \tilde{\mathbf{r}}_a \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{4d_1 \tilde{\mathbf{r}}_a}{d_2^2 - d_1^2} U = -j\omega \tilde{\mathbf{r}}_2 \quad (2.136)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_a \left(j\omega U_2 + U_{fm2} \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.137)$$

donde d_1 y d_2 son los diámetros de conducto y cámara respectivamente, \mathbf{r}_0 y $\tilde{\mathbf{r}}_a$ son valores promedio de densidad en el aire y en el material absorbente respectivamente, U_{fm1} y U_{fm2} son las velocidades de flujo medio, y U_1 , U_2 , P_1 , P_2 , \mathbf{r}_1 y $\tilde{\mathbf{r}}_2$ son las perturbaciones acústicas. Al igual que en el caso anterior se asume la condición de continuidad de

velocidad radial, teniendo la misma condición en el perforado que para el caso anterior

$$U(z) = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{Z_p} \quad (2.138)$$

Con la salvedad que la Z_p debe adaptarse para considerar la presencia de material absorbente [84].

De un análisis análogo al resonador concéntrico pero con las nuevas expresiones [81], llegamos a

$$\begin{bmatrix} D^2 + \mathbf{a}_1 D + \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 D + \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_5 & D^2 + \mathbf{a}_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.139)$$

donde $y D = \partial/\partial z$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= -\frac{1}{1-M_1^2} \left(j2kM_1 + \frac{4M\mathbf{r}_0c_0}{d_1Z_p} \right) & \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{1-M_1^2} \left(k_0^2 - \frac{4j\mathbf{w}\mathbf{r}_0}{d_1Z_p} \right) \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{1-M_1^2} \left(\frac{4M_1\mathbf{r}_0c_0}{d_1Z_p} \right) & \mathbf{a}_4 &= \frac{1}{1-M_1^2} \left(\frac{j4k\mathbf{r}_0c_0}{d_1Z_p} \right) \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} \left(\frac{j\tilde{\mathbf{r}}_a\mathbf{w}}{Z_p} \right) & \mathbf{a}_6 &= \tilde{k}_a^2 - \frac{4d_1}{d_2^2 - d_1^2} \left(\frac{j\tilde{\mathbf{r}}_a\mathbf{w}}{Z_p} \right) \end{aligned}$$

siendo $k_0 = \mathbf{w}/c_0$ y $\tilde{k}_a = \mathbf{w}/\tilde{c}_a$ los números de onda en el aire y en el material absorbente respectivamente.

El sistema sería equivalente a

$$\begin{Bmatrix} D^2 P_1 \\ D^2 P_2 \\ DP_1 \\ DP_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_3 & -\mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_4 \\ 0 & 0 & -\mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} DP_1 \\ DP_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (2.140)$$

que es un sistema de ecuaciones de tipo $\{P'\}=[A]\{P\}$.

La solución buscada $\{P\}$ expresada en variables propias (G_1, G_2, G_3 y G_4) es

$$\{P\}=[\mathbf{y}]\{\Gamma\} \quad (2.141)$$

donde $[\mathbf{y}]$ es la matriz que contiene los vectores propios. Considerando que $\Gamma_i = C_i e^{b_i z}$, puede escribirse

$$P_1 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{1,i} C_i e^{b_i z} = \sum_{i=1}^4 C_i e^{b_i z} \quad (2.142)$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{2,i} C_i e^{b_i z} \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{3,i} C_i e^{b_i z} \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_{4,i} C_i e^{b_i z} \quad (2.145)$$

donde los vectores propios se han normalizado a primera componente unidad.

Para hallar U_1 y U_2 en función de las presiones, se recurre a las ecuaciones (2.135) y (2.137), que establecen la relación entre ambos campos acústicos. Escribiendo

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 K_i e^{b_i z} \quad (2.146)$$

sólo se deben evaluar los coeficientes K_j . Realizando la sustitución de las ecuaciones (2.142) y (2.146) en la ecuación de equilibrio dinámico (2.135) se obtiene

$$K_i = -\frac{C_i}{j\mathbf{r}_0 \mathbf{w} + \mathbf{r}_0 U_{fm1} \mathbf{b}_i} \quad (2.147)$$

Así, la velocidad en el conducto quedaría como

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{j\mathbf{r}_0 \mathbf{w} + \mathbf{r}_0 U_{fm1} \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.148)$$

De igual modo se repite el desarrollo para la velocidad de la cámara, teniendo en cuenta que las componentes de la segunda columna de la matriz de vectores propios ya no son la unidad. Finalmente resulta

$$U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{y_{2,i} C_i}{j\mathbf{r}_a \mathbf{w} + \mathbf{r}_a U_{fm2} \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.149)$$

Por conveniencia en los cálculos posteriores, se multiplican las velocidades por la impedancia característica del aire, despreciando el flujo medio en el interior del material

$$\mathbf{r}_0 c_0 U_1 = \sum_{i=1}^4 -\frac{C_i}{jk_0 + M_1 \mathbf{b}_i} e^{b_i z} \quad (2.150)$$

$$\mathbf{r}_0 c_0 U_2 = \sum_{i=1}^4 -\frac{y_{2,i} C_i \mathbf{r}_0 c_0}{jk_a} e^{b_i z} \quad (2.151)$$

Para obtener la matriz de transferencia del conducto perforado sólo es necesario conocer la relación entre las variables en los extremos del conducto. Puede expresarse la dependencia en z en función de las constantes C_j

$$\begin{Bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(z) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(z) \end{Bmatrix} = [A(z)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (2.152)$$

donde, la matriz $[A(z)]$ se calcula a partir de la expresiones (2.142)-(2.145). De plantear esta ecuación para la sección inicial ($z = 0$) y final ($z = L$) podemos deducir

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ P_2(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(0) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(0) \end{Bmatrix} = [A(0)][A(L)]^{-1} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ P_2(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_1(L) \\ \mathbf{r}_0 c_0 U_2(L) \end{Bmatrix} \quad (2.153)$$

De las condiciones de contorno, tenemos

$$Z_2(0) = \frac{P_2(0)}{-U_2(0)} = j \tilde{\mathbf{r}}_a \tilde{c}_a \cot(\tilde{k}_a L_a) \quad (2.154)$$

$$Z_2(L) = \frac{P_2(L)}{-U_2(L)} = j \tilde{\mathbf{r}}_a \tilde{c}_a \cot(\tilde{k}_a L_b) \quad (2.155)$$

donde se ha tenido en cuenta el sentido de la velocidad utilizado. La relación buscada entre las variables acústicas a la entrada y la salida del elemento en estudio es

$$\begin{Bmatrix} P_1(0) \\ U_1(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(L) \\ U_1(L) \end{Bmatrix} \quad (2.156)$$

donde cada término de la matriz de transferencia se obtiene mediante las siguientes expresiones

$$A = T_{11} + (T_{12} + T_{14}X_1) \frac{X_2 T_{21} - T_{41}}{F} \quad B = T_{13} + (T_{12} + T_{14}X_1) \frac{X_2 T_{23} - T_{43}}{F}$$

$$C = T_{31} + (T_{32} + T_{34}X_1) \frac{X_2 T_{21} - T_{41}}{F} \quad D = T_{33} + (T_{32} + T_{34}X_1) \frac{X_2 T_{23} - T_{43}}{F}$$

siendo

$$X_1 = -j \tan(k_a L_a)$$

$$X_2 = -j \tan(k_a L_b)$$

$$F = T_{42} + X_1 T_{44} - X_2 (T_{22} + X_1 T_{24})$$

y donde T_{ij} $i,j=1,\dots,4$ son los términos de la matriz $[T]$ definida en la expresión (2.153). A partir de la matriz de transferencia (2.156) se obtiene el TL de forma inmediata considerando la fórmula (2.104).

2.10. Limitaciones

Como ya se comentó en el apartado 2.5, para tipologías de cambio de sección transversal, el campo acústico en la discontinuidad geométrica no puede ser unidimensional si ha de ser continuo. Por tanto en este tipo de elementos la solución del modelo de onda plana es siempre aproximada. Además, el modelo de onda plana proporciona los mismos resultados con independencia de la geometría de la sección transversal, mientras ésta sea uniforme en dirección axial, y no se tienen en consideración tampoco la posición transversal de los diferentes conductos (por ejemplo, el descentrado de un tubo). Esto supone una limitación importante de los modelos de onda plana, sobre todo al aumentar la frecuencia, puesto que las imprecisiones se acentúan.

2.11. Conclusiones

En este capítulo se han introducido las ecuaciones fundamentales del comportamiento acústico de un fluido y los modelos lineales asociados, resultantes de aplicar ciertas hipótesis que permiten simplificar considerablemente el desarrollo matemático. Además se han presentado diferentes representaciones matriciales existentes en la literatura y como han sido aplicadas a ciertos elementos de los silenciadores (tubos, cambios de sección, etc.) para cuantificar su comportamiento acústico. Posteriormente se han estudiado los modelos para caracterizar elementos perforados y la presencia de material absorbente, presentando los que se utilizarán a lo largo de esta Tesis.

Se han presentado algunas configuraciones de silenciador y los índices que se suelen considerar para la cuantificación de los fenómenos que originan la atenuación que proporcionan los mismos. Se ha evaluado la atenuación acústica que producen determinadas geometrías en base a la representación matricial. En concreto geometrías reactivas, y silenciadores con perforados y material absorbente.

Por último, se han presentado los problemas que conllevan las hipótesis de onda plana. Cabe destacar el que no tengan en consideración la geometría de la sección transversal, prediciendo los mismos resultados para secciones de las que se tiene sobrado conocimiento de que la atenuación proporcionada es diferente en cada una de ellas. Así pues se justifica la necesidad de buscar modelos más precisos que tengan en cuenta fenómenos tridimensionales.

Capítulo 3. Modelado acústico mediante técnicas modales multidimensionales de silenciadores reactivos

3.1. Introducción

En el Capítulo 2 se presentaron los modelos unidimensionales que tienen la ventaja de tener un bajo coste computacional, pero la desventaja de que sólo son válidos a bajas frecuencias. Uno de los aspectos más importantes en los silenciadores de motores de combustión interna alternativos es la utilización de cambios de sección. En la proximidad de los cambios de sección el campo acústico es necesariamente tridimensional, incluso a baja frecuencia, dado que tiene lugar la generación de modos evanescentes [35] [60]. El campo de presiones y velocidades acústicas ha de ser continuo, pero un modelo de onda plana es incapaz de satisfacer esta continuidad. La aplicación de modelos de onda plana se generalizó durante décadas por su sencillez, pero los resultados sólo son válidos por debajo de la primera frecuencia de corte e incluso, a menudo, un valor menor debido a la presencia de modos evanescentes. El método de los elementos finitos es una alternativa completa en cuanto a versatilidad en geometrías y condiciones de contorno, pero tiene un coste computacional demasiado elevado en el caso tridimensional.

Así pues se presentan en este capítulo modelos acústicos tridimensionales que permiten resolver los problemas partiendo de la solución analítica en conductos, elementos que comúnmente integran el conjunto del silenciador. Se considera pues inicialmente la descripción de la solución analítica tridimensional en geometrías habituales y se aplican posteriormente los resultados obtenidos a la búsqueda de la caracterización completa del silenciador.

Existe variedad de material bibliográfico que estudia la solución analítica para el caso de conductos de sección transversal rectangular [17] [46], sección circular [45], ampliamente utilizada en silenciadores de

escape, y sección elíptica [25]. El problema puede implicar orden creciente de dificultad a medida que se incluyen fenómenos como la presencia de flujo medio [33] [46], conducto revestido de material absorbente [17] [21] e incluso acoplamiento fluido-estructura [49]. Para secciones transversales arbitrarias, en general no es posible disponer de una solución analítica y puede recurrirse a una técnica de tipo numérica, como el método de los elementos finitos.

Entre las técnicas que pueden encontrarse en la bibliografía [2] [26] [28] [30] [33] [61], la de ajuste modal ha recibido gran atención debido a su mayor precisión. Cabe destacar trabajos como el de El-Sharkawy y Nayfeh [30], relacionado con la cámara de expansión simple, y el de Åbom [2] aplicado a cámaras con conductos extendidos. Un grupo de investigación relevante que trabaja de forma intensa en la aplicación de la técnica de ajuste modal a silenciadores circulares es el del profesor Selamet [61]-[64].

En este capítulo se procede a la resolución de la ecuación de ondas en ausencia de flujo medio, y la ecuación de ondas con flujo medio uniforme en dirección axial, para el caso de conductos de sección transversal rectangular y circular. Posteriormente se aplican estos resultados en la obtención de los modos transversales necesarios para aplicar el método de ajuste modal y resolver así el conjunto del silenciador. Finalmente se proponen algunos ejemplos prácticos que ilustran todo lo anterior.

3.2. Acústica tridimensional en conductos de sección constante

En general los silenciadores pueden considerarse formados por diferentes conductos, es por tanto importante conocer como se propagan las ondas acústicas dentro de cada tipo de conducto. Existen estudios sobre el comportamiento de las ondas en secciones de conductos relativamente sencillas, como son rectangulares, circulares o elípticas. Además de la geometría también se puede considerar la presencia de flujo medio o de material absorbente, lo que aumenta la dificultad del problema.

En este apartado se estudiarán secciones rectangulares y cilíndricas. Para secciones transversales arbitrarias no es posible disponer de su solución analítica, por lo que se recurre a métodos de elementos finitos. Se considerarán en todo momento conductos de paredes rígidas.

3.2.1. Medio en reposo

Supongamos por ahora que el fluido no tiene movimiento neto [46], o sea, que las partículas se mueven alrededor de una posición de equilibrio que no varía en el tiempo. La ecuación del movimiento viene dada por (2.27)

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

3.2.1.1. Conductos rectangulares

Considérese el conducto rectangular mostrado en la Figura 12, con su sistema cartesiano de coordenadas asociado.

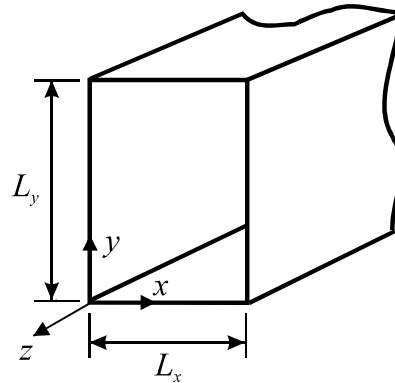


Figura 12. Conducto con sección transversal rectangular.

La ecuación de ondas (2.27), en su versión armónica (2.28), puede ser expresada como

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (3.1)$$

Podemos aplicar el método de separación de variables [79] si las condiciones de contorno también son separables. Esto se cumple cuando dichas condiciones son constantes para alguna coordenada del sistema de referencia. Aplicando separación de variables es posible escribir

$$P(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.2)$$

y combinando (3.2) con (3.1), resulta

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 = 0 \quad (3.3)$$

El primer término es solamente función de x , el segundo de y y el tercero de z , con lo que cada uno de ellos ha de ser constante, y por tanto se cumple

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (3.6)$$

donde k_x , k_y y k_z son los números de onda en las direcciones x , y y z . A partir de la ecuación (3.3), se deduce que debe satisfacerse la relación

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.7)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.4)-(3.6) pueden escribirse respectivamente como

$$X(x) = B_1 \cos(k_x x) + B_2 \operatorname{sen}(k_x x) \quad (3.8)$$

$$Y(y) = C_1 \cos(k_y y) + C_2 \operatorname{sen}(k_y y) \quad (3.9)$$

$$Z(z) = A^+ e^{-jk_z z} + A^- e^{jk_z z} \quad (3.10)$$

Aunque estas tres soluciones son equivalentes, las ecuaciones (3.8) y (3.9) son más adecuadas considerando las condiciones de contorno que la solución (3.10). Para el caso de conducto rígido, la velocidad acústica normal al contorno es nula, de modo que considerando las ecuaciones de Euler (2.7)-(2.9), pueden expresarse como

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{dP}{dx} \right|_{x=L_x} = 0 \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{dP}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad \left. \frac{dP}{dy} \right|_{y=L_y} = 0 \quad (3.12)$$

De donde se deduce que $B_2=C_2=0$, y que los números de onda vienen dados por $k_x = m\mathbf{p}/L_x$ y $k_y = n\mathbf{p}/L_y$ con $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Los valores de m y n indican el número de veces que se anula la distribución de presión (nodos de presión) en la sección transversal del conducto según las direcciones x e y , respectivamente. Así pues, puede escribirse que

$$\begin{aligned} X(x)Y(y)Z(z) &= A_{m,n}^+ \cos\left(\frac{m\mathbf{p}x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\mathbf{p}y}{L_y}\right) e^{-jk_{z,m,n}z} \\ &+ A_{m,n}^- \cos\left(\frac{m\mathbf{p}x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\mathbf{p}y}{L_y}\right) e^{jk_{z,m,n}z} \end{aligned} \quad (3.13)$$

siendo

$$k_{z,m,n} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\mathbf{p}}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\mathbf{p}}{L_y}\right)^2} \quad (3.14)$$

el número de onda axial.

La solución general de la ecuación de Helmholtz (3.1), una vez impuestas las condiciones de contorno, viene dada por

$$P(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{m,n}^+ \cos\left(\frac{m\mathbf{p}x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\mathbf{p}y}{L_y}\right) e^{-jk_{z,m,n}z} + A_{m,n}^- \cos\left(\frac{m\mathbf{p}x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\mathbf{p}y}{L_y}\right) e^{jk_{z,m,n}z} \right] \quad (3.15)$$

Si definimos los modos transversales como las funciones que dependen de las coordenadas x e y pero no de la z , tendríamos la siguiente solución general

$$P(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{m,n}^+ \Psi^+(x, y) e^{-jk_{z,m,n}z} + A_{m,n}^- \Psi^-(x, y) e^{jk_{z,m,n}z} \right] \quad (3.16)$$

siendo $\Psi^{\pm}(x, y)$ en este caso

$$\Psi^{\pm}(x, y) = \cos\left(\frac{m\mathbf{p}x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\mathbf{p}y}{L_y}\right) \quad (3.17)$$

Para $m = n = 0$, la distribución de presión en cada sección transversal es constante, siendo el modo de propagación de una onda plana. Para el resto de modos, se utiliza la denominación de modo de alto orden [46].

La propagación de un modo concreto (m, n) tiene lugar cuando su número de onda $k_{z,m,n}$ es real. En caso contrario el modo sufre una atenuación exponencial, y recibe el nombre de modo evanescente [53]. Para una frecuencia angular dada ω se propagaran los modos que cumplan

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - \left(\frac{m\mathbf{p}}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\mathbf{p}}{L_y}\right)^2 > 0 \quad (3.18)$$

siendo el resto de tipo evanescente.

Es fácil comprobar que el modo de onda plana siempre se propaga, y que la propagación de los modos de alto orden depende de la frecuencia y las dimensiones del conducto. Para un conducto de dimensiones dadas, la frecuencia a la que un modo empieza a propagarse sin amortiguación se denomina frecuencia de corte f_c . La frecuencia de corte puede obtenerse a través de

$$f_c = \frac{c_0}{2p} \sqrt{\left(\frac{mp}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{np}{L_y}\right)^2} \quad (3.19)$$

3.2.1.2. Conductos circulares

Los conductos de sección circular son ampliamente utilizados en los silenciadores de escape, por lo que es importante conocer su comportamiento acústico. La Figura 13 muestra una sección transversal circular, con el sistema de coordenadas cilíndrico asociado.

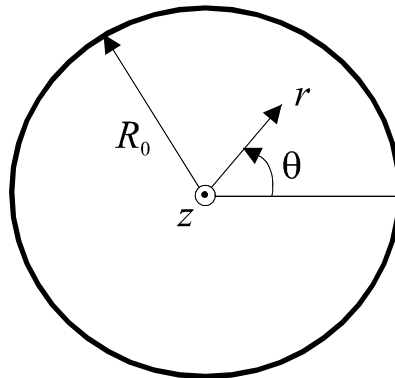


Figura 13. Sección transversal circular y coordenadas cilíndricas.

Con el fin de facilitar la solución de la ecuación de Helmholtz, es conveniente que las condiciones de contorno asociadas a la pared del conducto puedan imponerse de manera sencilla. En coordenadas cilíndricas, la ecuación de Helmholtz (2.28) viene dada por

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{q}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 P = 0 \quad (3.20)$$

Considerando condiciones de contorno separables podemos aplicar el método de separación de variables obteniendo

$$P(r, \mathbf{q}, z) = R(r) \Theta(\mathbf{q}) Z(z) \quad (3.21)$$

Introduciendo la expresión (3.21) en (3.20), resulta

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\mathbf{q}^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 = 0 \quad (3.22)$$

Como en el caso del conducto rectangular, la componente axial es,

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2$$

cuya solución viene dada por la ecuación (3.10). Para el campo circunferencial [17] se obtiene

$$\Theta = e^{\pm jm\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

siendo m el número modal circunferencial, que indica el número de líneas nodales diametrales. Los signos $+$ y $-$ de la ecuación anterior corresponden a la rotación definida por θ en sentido negativo y positivo, respectivamente. Introduciendo en la ecuación (3.22) las soluciones axial y circunferencial, se obtiene

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_0^2 - k_z^2 - \left(\frac{m}{r} \right)^2 \right) R = 0 \quad (3.24)$$

Definiendo el número de onda radial como $k_r^2 = k_0^2 - k_z^2$ tenemos

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_r^2 - \left(\frac{m}{r} \right)^2 \right) R = 0 \quad (3.25)$$

Realizando el cambio de variable $r \rightarrow k_r r$ y asumiendo sección circular, resulta la ecuación de Bessel de orden m en su forma estándar [58], siendo m entero, cuya solución puede expresarse como

$$R(r) = C_1 J_m(k_r r) + C_2 Y_m(k_r r) \quad (3.26)$$

donde J_m e Y_m son las funciones de Bessel de orden m de primera y segunda especie, respectivamente. La función Y_m tiende a infinito cuando su argumento es nulo. Puesto que se espera una presión acotada en toda la sección, si esta incluye el origen de coordenadas necesariamente $C_2 = 0$. En (3.26) no se considera el término de Y_m para secciones circulares que contienen el origen de coordenadas, no así en el caso de conductos anulares. Para evaluar k_r se considera la condición de pared rígida (velocidad acústica radial nula en $r=R_0$), de manera que a partir de la ecuación de Euler (2.10), queda

$$\left. \frac{dJ_m(k_r r)}{dr} \right|_{r=R_0} = 0 \quad (3.27)$$

La solución de esta ecuación no lineal proporciona los números de onda radiales $k_{r,m,n}$, para $m, n = 0, 1, 2, \dots$. El entero n denota el número modal radial, que indica el número de circunferencias nodales. Llamando

$$\mathbf{a}_{m,n} = k_{r,m,n} R_0 \quad (3.28)$$

el cálculo de raíces quedaría como

$$\left. \frac{dJ_m(\mathbf{a}_{m,n} r/R_0)}{dr} \right|_{r=R_0} = 0 \quad (3.29)$$

de manera que los valores $\mathbf{a}_{m,n}$, para $m, n = 0, 1, 2, \dots$, son constantes independientes de R_0 . Para $m = n = 0$, se tiene que $\mathbf{a}_{0,0} = 0$ y $J_0(0) = 1$, con lo que la distribución de presión es constante, y tenemos propagación de onda plana.

En base a los resultados anteriores, la solución general de la ecuación de Helmholtz (3.20), a falta de imponer las condiciones de contorno, viene dada por

$$P(r, \mathbf{q}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_m \left(\frac{\mathbf{a}_{m,n}}{R_0} r \right) \left((A_{m,n}^+ e^{-jm\mathbf{q}} + A_{m,n}^- e^{jm\mathbf{q}}) e^{-jk_{z,m,n}z} + (B_{m,n}^+ e^{-jm\mathbf{q}} + B_{m,n}^- e^{jm\mathbf{q}}) e^{jk_{z,m,n}z} \right) \quad (3.30)$$

Expresando la solución en función de los modos transversales $\Psi^{\pm}(x,y)$ quedaría la expresión (3.91) en coordenadas cilíndricas

$$P(r, \mathbf{q}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A^+ \Psi^+(r, \mathbf{q}) e^{-jk_{z,m,n}z} + A^- \Psi^-(r, \mathbf{q}) e^{-jk_{z,m,n}z} + B^+ \Psi^+(r, \mathbf{q}) e^{jk_{z,m,n}z} + B^- \Psi^-(r, \mathbf{q}) e^{jk_{z,m,n}z} \right] \quad (3.31)$$

donde

$$\Psi^{\pm}(r, \mathbf{q}) = J_m \left(\frac{\mathbf{a}_{m,n}}{R_0} r \right) e^{\mp jm\mathbf{q}} \quad (3.32)$$

De forma similar al caso rectangular se obtienen las condiciones a satisfacer para que se produzca la propagación de un modo (m,n) . El número de onda axial $k_{z,m,n}$ debe ser real, y por tanto

$$k_{z,m,n}^2 = k_0^2 - k_{r,m,n}^2 > 0 \quad (3.33)$$

de donde se deduce que

$$k_0 = \frac{2\mathbf{p}f}{c_0} > k_{r,m,n} = \frac{\mathbf{a}_{m,n}}{R_0} \quad f_c = \frac{c_0}{2\mathbf{p}} \frac{\mathbf{a}_{m,n}}{R_0} \quad (3.34)$$

Cabe considerar en este caso dos posibilidades:

- El conducto, por la excitación a la que se ve sometido y/o por su conexión a otros elementos, no presenta simetría de revolución. En

este caso, el primer modo de alto orden que se propaga es el modo $(m,n) = (1,0)$.

- Existe axisimetría, y por tanto la propagación de los modos con $m \neq 0$ no es posible. En esta caso, el primer modo de alto orden que se propaga viene dado por $(m,n) = (0,1)$.

3.2.2. Medio móvil

Analizaremos ahora el efecto del flujo medio en conductos considerando la onda acústica como tridimensional. Por simplicidad, sólo se considerará el efecto convectivo de este fenómeno. La búsqueda de soluciones analíticas computacionalmente eficaces lleva a la suposición de campos de flujo medio relativamente sencillos. En el caso de conductos de sección transversal uniforme, es usual suponer que el campo de flujo medio es también uniforme [17] [33] [46].

Consideremos un conducto de sección transversal uniforme en el que el medio se mueve con velocidad axial constante U_{fm} . Este flujo puede definirse también en base al número de Mach M , dado por $M = U_{fm}/c_0$.

A partir de lo desarrollado en el capítulo 2, la ecuación de ondas con flujo medio uniforme viene dada por (2.20),

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (3.35)$$

Como sólo existe flujo medio en la dirección axial z , la derivada total viene dada por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_{fm} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.36)$$

Aplicando el método de separación de variables obtenemos la solución de la ecuación de ondas anterior. En general, a partir de la condición de

conducto rígido, se calcula la solución transversal y el número de onda transversal asociado k_t . Para la solución axial tenemos

$$(1-M^2)\frac{d^2Z}{dz^2} - 2jk_0M\frac{dZ}{dz} + (k_0^2 - k_t^2)Z = 0 \quad (3.37)$$

De manera análoga a casos anteriores, pueden considerarse soluciones de tipo progresivo, $Z^+(z) = A^+e^{-jk_zz}$, y de tipo regresivo, $Z^-(z) = A^-e^{jk_zz}$, cuya sustitución en la ecuación (3.37) permite obtener

$$k_z^\pm = \frac{-Mk_0 \pm \sqrt{k_0^2 - (1-M^2)k_t^2}}{1-M^2} \quad (3.38)$$

Lógicamente, para $M=0$ se obtiene el resultado esperado, que corresponde al caso de ausencia de flujo medio

$$k_z^\pm = k_z^- = k_z = \pm\sqrt{k_0^2 - k_t^2}$$

En el caso simple de onda plana, resulta $k_t = 0$, y se recuperan los resultados del Capítulo 2, es decir, $k_z^+ = k_0/(1+M)$ (mayor longitud de onda) y $k_z^- = k_0/(1-M)$ (menor longitud de onda). De la expresión (3.38) se deduce que el número de onda axial es real, y por tanto existe propagación, cuando se verifica que

$$k_0^2 > (1-M^2)k_t^2 \quad (3.39)$$

lo que implica que en presencia de flujo medio la frecuencia de corte se ve reducida por un factor igual a la raíz de $1-M^2$.

Para el caso de conducto rectangular, las frecuencias de corte resultan

$$f_c = \frac{c_0\sqrt{1-M^2}}{2h} \quad (3.40)$$

donde h es la dimensión mayor de los dos lados del rectángulo.

Para el caso de conducto circular, resultan las frecuencias de corte

$$f_{c,1,0} = \frac{1.84c_0\sqrt{1-M^2}}{\rho 2R_0} \quad \text{Modos azimutales} \quad (3.41)$$

$$f_{c,0,1} = \frac{3.83c_0\sqrt{1-M^2}}{\rho 2R_0} \quad \text{Modos axisimétricos} \quad (3.42)$$

Cabe destacar que para valores usuales del número de Mach en el caso de silenciadores de escape de motores alternativos ($M \leq 0,2$) la reducción asociada es relativamente pequeña.

En base a los resultados obtenidos previamente, la solución general armónica en presión de la ecuación de ondas (2.20) con flujo medio uniforme vendrá dada por una expresión similar al caso de medio estacionario, pero sustituyendo el número de onda axial por los correspondientes números de ondas axiales en el sentido del flujo y en sentido contrario. En general podemos escribir en función de los modos transversales que

$$P(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^+ \Psi_n^+(x, y) e^{-jk_{z,n}^+ z} + A_n^- \Psi_n^-(x, y) e^{jk_{z,n}^- z} \right] \quad (3.43)$$

donde los modos transversales dependerán de la frecuencia debido al flujo medio uniforme, y donde $k_{z,n}^{\pm}$ vienen definidas según (3.38).

La ecuación de Navier-Stokes permite relacionar la velocidad y la presión mediante

$$-j\omega r_0 U_x - r_0 U_{fm} \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.44)$$

$$-j\omega r_0 U_y - r_0 U_{fm} \frac{\partial U_y}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.45)$$

$$-j\omega r_0 U_z - r_0 U_{fm} \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.46)$$

Si tenemos en cuenta que la ecuación de ondas en presiones tiene una forma dual en velocidades, se puede demostrar que la solución para cada una de las componentes de la velocidad acústica satisface la misma ecuación pero con las condiciones de contorno adecuadas. Por esto, es posible utilizar una representación igual a la dada por (3.43) para cada una de las componentes de la velocidad acústica pero con diferentes coeficientes, es decir

$$U_x(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n^+ \Psi_n^+(x, y) e^{-jk_{z,n}^+ z} + B_n^- \Psi_n^-(x, y) e^{jk_{z,n}^- z} \right) \quad (3.47)$$

$$U_y(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^+ \Psi_n^+(x, y) e^{-jk_{z,n}^+ z} + C_n^- \Psi_n^-(x, y) e^{jk_{z,n}^- z} \right) \quad (3.48)$$

$$U_z(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(D_n^+ \Psi_n^+(x, y) e^{-jk_{z,n}^+ z} + D_n^- \Psi_n^-(x, y) e^{jk_{z,n}^- z} \right) \quad (3.49)$$

Sustituyendo la presión dada por (3.43) y la componente de la velocidad acústica según z (3.49) en la ecuación de Euler (3.46) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[D_n^+ (k - Mk_{z,n}^+) \Psi_n^+ e^{-jk_{z,n}^+ z} + D_n^- (k - Mk_{z,n}^-) \Psi_n^- e^{jk_{z,n}^- z} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^+ k_{z,n}^+ \Psi_n^+ e^{-jk_{z,n}^+ z} + A_n^- k_{z,n}^- \Psi_n^- e^{jk_{z,n}^- z} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

La solución de (3.50) puede obtenerse asumiendo convergencia uniforme de las series involucradas, lo que permite igualar los coeficientes de los modos asociados a las dos series de cada ecuación obteniendo

$$D_n^+ = A_n^+ \frac{k_{z,n}^+}{k - Mk_{z,n}^+} \frac{1}{\mathbf{r}_0 c_0} \quad (3.51)$$

$$D_n^- = A_n^- \frac{k_{z,n}^-}{k - Mk_{z,n}^-} \frac{1}{\mathbf{r}_0 c_0} \quad (3.52)$$

lo que conduce a

$$U_z(x, y, z) = \frac{1}{r_0 c_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k_{z,n}^+}{k_0 - M k_{z,n}^+} A_n^+ \Psi_n^+ e^{-j k_{z,n}^+ z} + \frac{k_{z,n}^-}{k_0 + M k_{z,n}^-} A_n^- \Psi_n^- e^{j k_{z,n}^- z} \right) \quad (3.53)$$

3.3. Condiciones de contorno en secciones de acoplamiento

La ecuación de ondas (2.20) es una ecuación de segundo orden, por lo que es necesario conocer dos campos de variables para obtener la solución exacta. Para plantear de forma adecuada las condiciones de contorno entre tramos, es necesario utilizar además del campo acústico de presión (que se ha estudiado en el apartado anterior) otro campo adicional. Se utiliza como condición de contorno adicional la continuidad del gradiente axial de presión, que en ausencia de flujo es equivalente a considerar la continuidad del campo de velocidades axial.

El gradiente de presión en la dirección axial en función de los modos transversales vendrá dado por

$$\frac{\partial P_i}{\partial z_i} = -j \sum_{n=0}^N \left(k_{i,n} C_{i,n}^+ \Psi_{i,n}^+ e^{-j k_{i,n} z_i} - k_{i,n} C_{i,n}^- \Psi_{i,n}^- e^{j k_{i,n} z_i} \right) \quad (3.54)$$

3.3.1. Cambio de sección

Para un cambio de sección definido entre las secciones S_i y S_j , se debe garantizar la continuidad de presión en la superficie común a ambas secciones, la continuidad del gradiente de presiones en la misma zona, y que la velocidad axial fuera de la superficie común sea igual a cero, pues es la condición de pared rígida.

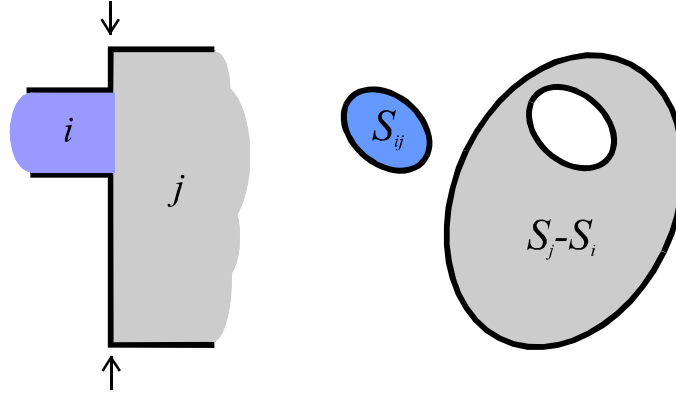


Figura 14. Cambio de sección.

Así pues las ecuaciones resultantes para definir esta condición de contorno serían

$$P_i(x_i, y_i, z_i) = P_j(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{ij} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial P_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i} = \frac{\partial P_j(x_j, y_j, z_j)}{\partial z_j} \quad \text{en } S_{ij} \quad (3.56)$$

$$U_{z,j}(x_j, y_j, z_j) = 0 \quad \text{en } S_j - S_i \quad (3.57)$$

siendo S_{ij} , y $S_j - S_i$ las secciones representadas en la Figura 14.

3.3.2. Cambio de sección con extendido

Para un cambio de sección con extendido definido entre las secciones S_i y S_j , se debe garantizar la continuidad de presión en la superficie común a ambas secciones, la continuidad del gradiente de presiones en la misma zona, y que la velocidad en la superficie del fondo del extendido sea igual a cero, pues es la condición de pared rígida.

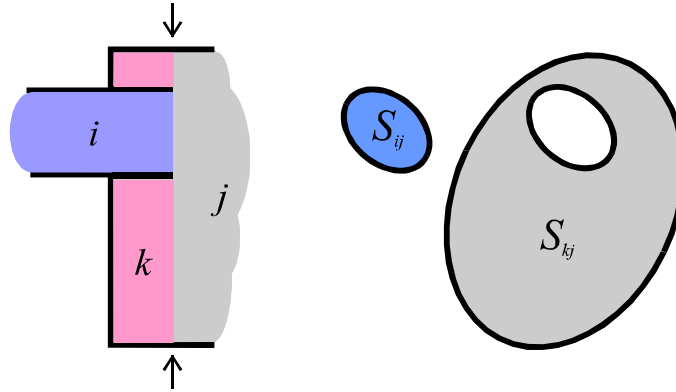


Figura 15. Cambio de sección con extendido.

Así pues las ecuaciones resultantes para definir esta condición de contorno serían

$$P_i(x_i, y_i, z_i) = P_j(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{ij} \quad (3.58)$$

$$P_k(x_k, y_k, z_k) = P_j(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{kj} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial P_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i} = \frac{\partial P_j(x_j, y_j, z_j)}{\partial z_j} \quad \text{en } S_{ij} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial P_k(x_k, y_k, z_k)}{\partial z_k} = \frac{\partial P_j(x_j, y_j, z_j)}{\partial z_j} \quad \text{en } S_{kj} \quad (3.61)$$

$$U_{z,k}(x_k, y_k, z_k) = 0 \quad \text{en } S_k \quad (3.62)$$

siendo S_{ij} , y S_{kj} las secciones representadas en la Figura 15, y S_k la sección en el fondo del extendido.

3.3.3. Placa perforada

Para dos tramos conectados por una impedancia Z_p se debe garantizar la continuidad de la velocidad axial, y la condición con la cual se ha definido la impedancia, que en nuestro caso será

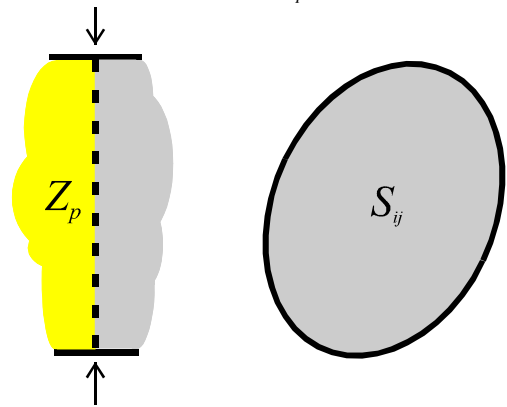
$$U = \frac{\Delta P}{Z_p} \quad (3.63)$$


Figura 16. Relación de secciones mediante una impedancia.

Así pues tendríamos las siguientes expresiones para las condiciones de contorno

$$U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) = U_{z,j}(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{ij} \quad (3.64)$$

$$U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) = \frac{P_j(x_j, y_j, z_j) - P_i(x_i, y_i, z_i)}{Z_p} \quad \text{en } S_{ij} \quad (3.65)$$

3.3.4. Sección de entrada y de salida

En base al tipo de caracterización buscada para el silenciador, se aplican las condiciones de contorno oportunas, tal como se ha visto previamente en el modelado de silenciadores mediante onda plana. Si se quieren obtener los cuatro polos del silenciador (con vista a utilizar éstos en un modelo más completo de la línea de escape o bien a cuantificar a partir de ellos la atenuación acústica) se deben considerar dos análisis diferentes con condiciones de contorno independientes. Una posibilidad para obtener soluciones que sean funciones de respuesta en frecuencia (como lo es el TL) consiste en aplicar como primer análisis una excitación de presión con forma de onda plana de valor arbitrario P_{exc} en la sección de entrada (normalmente 1 por simplicidad) y de presión nula

en la salida. Como segundo análisis se toma de nuevo una onda plana de presión arbitraria en la entrada y velocidad axial nula en la salida.

Así considerando la sección de entrada como S_1 y la de salida como S_T , tendríamos para el primer análisis

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (3.66)$$

$$P_T(x_T, y_T, z_T) = 0 \quad \text{en } S_T \quad (3.67)$$

y para el segundo análisis

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (3.68)$$

$$U_T(x_T, y_T, z_T) = 0 \quad \text{en } S_T \quad (3.69)$$

Otra posibilidad para obtener directamente el TL sin necesidad de obtener la matriz de cuatro polos, consiste en suponer la existencia de una terminación anecoica en la sección de salida lo que implica una impedancia de valor $\mathbf{r}_0 c_0$. De nuevo se considera además para la sección de entrada una presión de valor P_{exc} . Así las condiciones de contorno para este caso quedarían

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (3.70)$$

$$P_T(x_T, y_T, z_T) = \mathbf{r}_0 c_0 U_T(x_T, y_T, z_T) \quad \text{en } S_T \quad (3.71)$$

y no sería necesario un segundo análisis.

3.4. Cálculo de modos transversales

Para secciones sencillas como son las rectangulares o circulares, se conocen sus modos transversales de manera analítica, como se puso de manifiesto en el apartado 3.2., pero para muchas otras secciones estos modos deben ser calculados de manera numérica. En este caso pueden utilizarse bien el método de los elementos finitos, o bien otras técnicas numéricas. A continuación se presentará una metodología que reduce el coste computacional que supone la utilización directa del método de los elementos finitos en ciertas geometrías. El método de los elementos

finitos se basa en funciones polinómicas, como se ve en la Figura 17, mientras que el método de Ajuste Modal se basa en la combinación de modos, lo que permite la interpretación de los mismos en función de la geometría en estudio. El método directo se basa en la formulación que utiliza los modos de propagación para cada conducto (ver Figura 17), mientras que el método de subestructuración expande bases naturales de modos para condiciones de presión y velocidad cero en los contornos, lo que permite trabajar de una manera más sistemática.

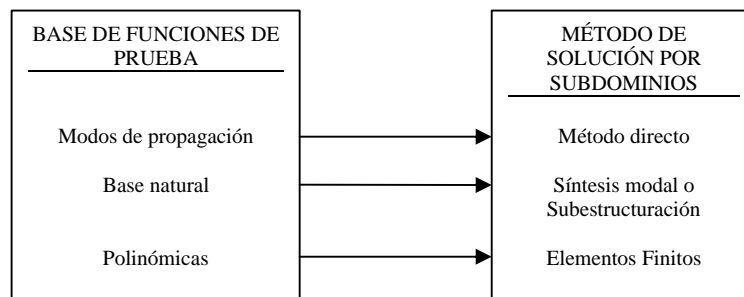


Figura 17. Esquema de relación entre métodos y las funciones de prueba que utilizan.

3.4.1. Método directo

El método directo consiste en la obtención de los modos de una sección completa a partir de los modos de los subdominios que forman la sección y de las condiciones de contorno que los relacionan. Es necesario conocer analíticamente los modos para plantear este método lo que implica que sólo puede utilizarse con geometrías sencillas.

Lo primero que habrá que tenerse en cuenta es que la sección debe ser dividida en subdominios cuyos modos transversales se conozcan analíticamente. Después estos subdominios se relacionaran unos con otros imponiendo las condiciones de contorno adecuadas. Dado que estas condiciones varían de un caso a otro, este método no puede sistematizarse fácilmente.

Para ilustrar mejor este método, lo aplicaremos al caso concreto de un resonador circular concéntrico como el de la Figura 21.

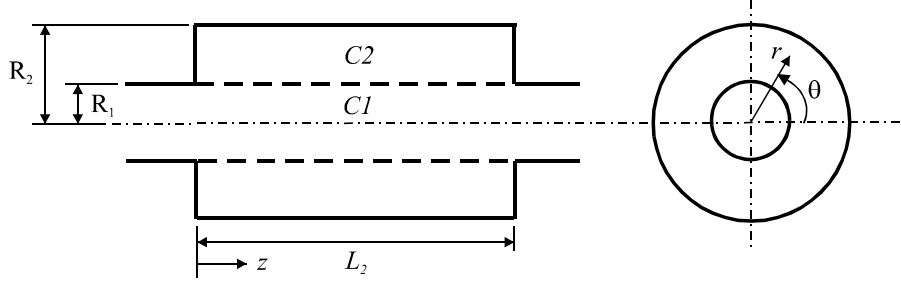


Figura 18. Resonador concéntrico de sección circular.

En la región central la presión acústica podemos escribirla como

$$P_C(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^+ e^{-jk_{z,C,n}z} + C_n^- e^{jk_{z,C,n}z} \right) \Psi_{C,n,P}(r) \quad (3.72)$$

quedando dos partes diferenciadas, el tubo central a un lado del perforado y el anillo exterior de la cámara al otro lado, o lo que es lo mismo, podemos escribir

$$P_C(r, z) = \begin{cases} P_{C1}(r, z) & 0 \leq r \leq R_1 \\ P_{C2}(r, z) & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (3.73)$$

siendo el modo de presión transversal

$$\Psi_{C,n,P}(r) = \begin{cases} \Psi_{C1,n,P}(r) & 0 \leq r \leq R_1 \\ \Psi_{C2,n,P}(r) & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (3.74)$$

El número de onda axial $k_{z,C,n}$ está relacionado con el número de onda radial según

$$k_{r,C,n}^2 = k_0^2 - k_{z,C,n}^2 \quad (3.75)$$

La evaluación de los números de onda y de los modos transversales se puede llevar a cabo según se muestra en [42] [70] estableciendo las siguientes condiciones de contorno:

1. Presión finita en $r = 0$
2. Velocidad radial nula en $r = R_2$
3. Velocidad radial continua en $r = R_1$
4. Relación de impedancia en el perforado dada por

$$Z_p = \frac{P_{C1}(R_1, z) - P_{C2}(R_1, z)}{r_0 c_0 U_r} \quad (3.76)$$

siendo U_r la velocidad acústica radial en la superficie del perforado.

Los números de onda pueden ser obtenidos de la ecuación característica (derivada de las condiciones 1 y 2)

$$\frac{J_0(k_{r,C,n}R_1)}{J_1(k_{r,C,n}R_1)} + \frac{jZ_p k_{r,C,n}}{k_0} = \frac{J_0(k_{r,C,n}R_1)Y_1(k_{r,C,n}R_2) - Y_0(k_{r,C,n}R_1)J_1(k_{r,C,n}R_2)}{J_1(k_{r,C,n}R_1)Y_1(k_{r,C,n}R_2) - Y_1(k_{r,C,n}R_1)J_1(k_{r,C,n}R_2)} \quad (3.77)$$

que debe ser resuelta para cada frecuencia, puesto que interviene la impedancia Z_p que es función de la frecuencia ω .

Finalmente los modos transversales vienen dados por

$$\Psi_{C,n,p}(r) = \begin{cases} J_0(k_{r,C,n}r) & 0 \leq r \leq R_1 \\ F \left(J_0(k_{r,C,n}r) - \frac{J_1(k_{r,C,n}R_2)}{Y_1(k_{r,C,n}R_2)} Y_0(k_{r,C,n}r) \right) & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (3.78)$$

con

$$F = \left(J_0(k_{r,c,n}R_1) + \frac{jZ_p k_{r,c,n}}{k_0} J_1(k_{r,c,n}R_1) \right) \cdot \frac{Y_1(k_{r,c,n}R_2)}{J_0(k_{r,c,n}R_1)Y_1(k_{r,c,n}R_2) - J_1(k_{r,c,n}R_2)Y_0(k_{r,c,n}R_1)} \quad (3.79)$$

Al tratarse de un problema no lineal y no sistemático, los ceros del sistema resultante deben buscarse con métodos como el de la secante o el de Newton-Rapson utilizado por Cummings [21]. Estos métodos no garantizan la obtención de todos los ceros, sino que pueden saltarse alguno de ellos, sobretodo en casos en los que varios ceros consecutivos estén próximos entre sí. Esto implica que el sistema resultante puede estar mal condicionado o incluso que no sea posible su resolución de forma satisfactoria. Los detalles de la solución pueden encontrarse en los trabajos de Kirby [42] y Selamet [70]. Kirby resalta que para obtener una solución adecuada es necesario una estimación inicial suficientemente aproximada para cada uno de los modos buscados, y que trabajando con silenciadores disipativos este método no garantiza la omisión de algunas soluciones consecutivas o la aparición de otros problemas de convergencia.

3.4.2. Método de subestructuración o síntesis modal

Al igual que en el caso anterior, se divide la sección en estudio en diferentes subdominios. Aquí sin embargo, en lugar de resolver la ecuación característica planteada a partir de los modos de propagación de cada subdominio, se busca una solución aproximada a partir de unas bases modales de los mismos. Las bases modales utilizadas se obtienen con condiciones de contorno de presión cero y velocidad cero en los contornos conectados, y de velocidad cero en los contornos no conectados. Para cada una de estas dos condiciones de contorno, se obtiene una base modal, y a partir de éstas se expresan los modos de la sección como una combinación lineal de los elementos de las bases, como se muestra en la Figura 19.

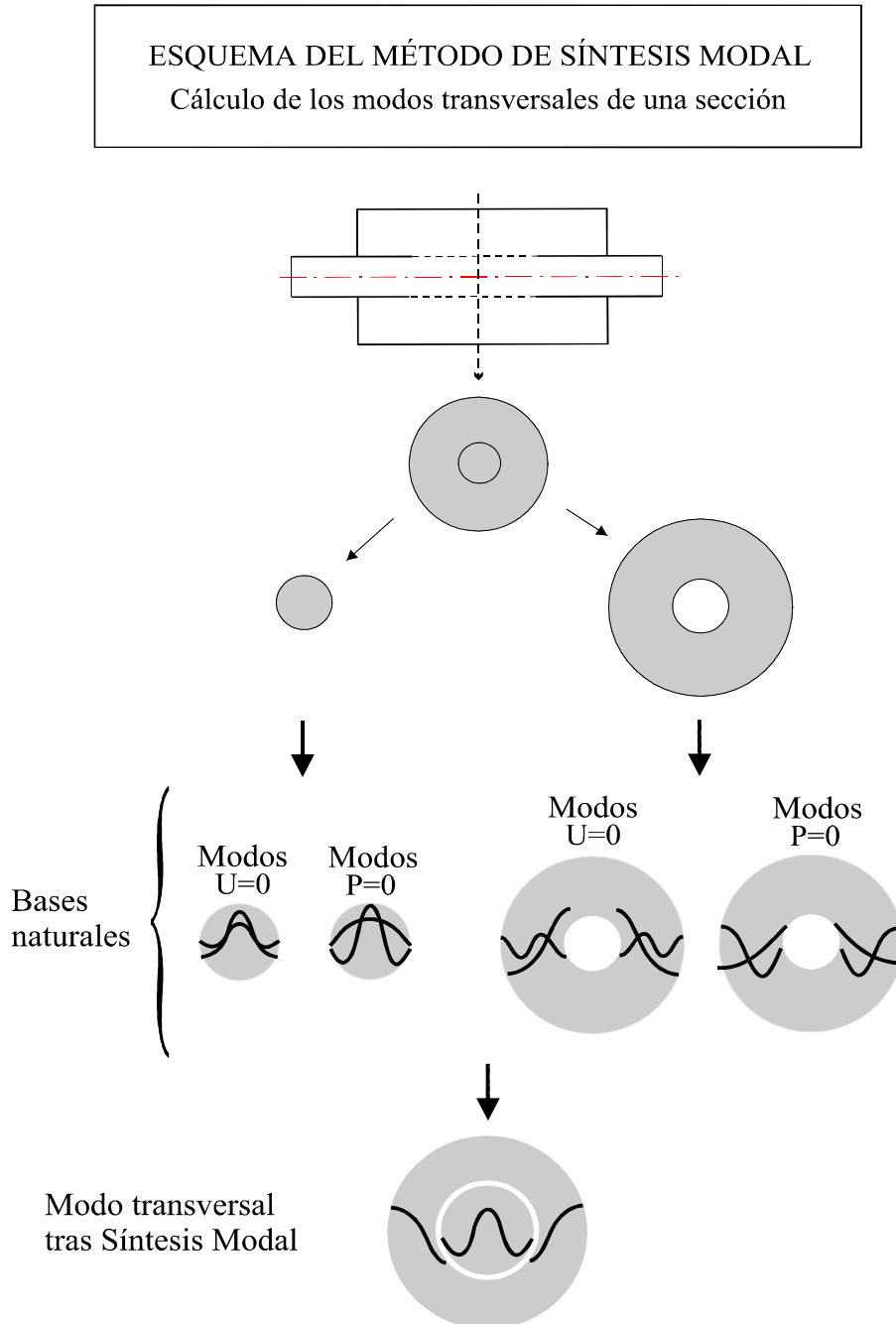


Figura 19. Esquema de funcionamiento del Método de Síntesis Modal o Subestructuración.

Como hipótesis de partida adicionales se tendrán en cuenta las siguientes:

- Para subdominios transversales que estén directamente conectados su relación de impedancia es nula. En la práctica, y debido a problemas de resolución, esta hipótesis se lleva a cabo mediante la imposición de un valor de impedancia suficientemente pequeño. Es decir, se aplicará el método de penalización con un valor de penalización de la impedancia suficientemente pequeño.
- Si existe una impedancia entre dos subdominios, ésta será constante a lo largo de la longitud axial del tramo considerado. Puesto que en todo momento trabajamos con las ecuaciones desarrolladas para conductos de sección constante, las condiciones de contorno también deberán ser constantes a lo largo de la sección axial.

Suponiendo comportamiento armónico, la presión acústica y la velocidad axial en un conducto se pueden expresar como

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (3.80)$$

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (3.81)$$

Considerando que existe flujo medio uniforme según z y eliminando la componente temporal, la ecuación de onda en el interior de un conducto [46] queda como

$$k^2 P - 2jMk \frac{\partial P}{\partial z} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (3.82)$$

siendo j la unidad imaginaria, M el número de Mach del flujo medio en la dirección axial y k el número de onda.

La solución en presión puede expresarse asumiendo separación de variables como

$$P(x, y, z) = \Psi(x, y) e^{-jk_z z} \quad (3.83)$$

donde el número de onda axial k_z debe ser el mismo para cada uno de los subdominios de que consta la sección completa.

Sustituyendo (3.83) en (3.82) se llega a

$$\left[k^2 - 2Mkk_z - (1 - M^2)k_z^2 \right] \Psi + \Delta \Psi = 0 \quad (3.84)$$

La solución transversal en cada dominio se puede expandir mediante una serie modal. Introduciendo la solución modal de Ψ en (3.83) se llega a la solución de (3.82) del tipo

$$P = \sum_{s=0}^{\infty} \left(C_s e^{-jk_z s z} \Psi_s \right) \quad (3.85)$$

donde k_z^\pm es el número de onda axial asociado a la sección en estudio y a las ondas incidentes y reflejadas cuyos modos son Ψ^+ y Ψ^- , respectivamente.

Dos problemas modales independientes pueden considerarse en cada subdominio, correspondientes a las condiciones de presión nula y velocidad nula en el contorno. Estos problemas tienen solución analítica para el caso de secciones circulares y elípticas, que son ampliamente utilizadas en silenciadores de automación. Para geometrías más complejas, es posible utilizar soluciones de tipo numérico, como el método de los elementos finitos.

Los modos en cada subdominio pueden obtenerse como una combinación lineal de las bases modales obtenidas con las condiciones de presión nula y velocidad nula. Así, expresamos la presión en la sección transversal en cada subdominio i mediante

$$\Psi_i = \sum_{r=0}^{\infty} q_{i,r}^v \mathbf{f}_{i,r}^v + \sum_{r=1}^{\infty} q_{i,r}^p \mathbf{f}_{i,r}^p \quad (3.86)$$

donde $\mathbf{f}_{i,r}^v$ y $\mathbf{f}_{i,r}^p$ son modos que conforman las bases para la condición de velocidad nula y de presión nula respectivamente, y donde $q_{i,r}^v$ y $q_{i,r}^p$ son los factores de participación de cada modo. Desde un punto de vista práctico, se puede emplear una nomenclatura que unifique ambas bases

$$\Psi_i = \sum_{r=0}^{\infty} q_{i,r} \mathbf{f}_{i,r} \quad (3.87)$$

Además se truncan las series (3.86) hasta un número finito de modos N_i

$$\Psi_i = \sum_{r=0}^{N_i} q_{i,r} \mathbf{f}_{i,r} \quad (3.88)$$

Se introduce a continuación la siguiente notación matricial donde el modo de la sección transversal global vendrá dado en cada subdominio por

$$\Psi_i = \sum_{r=0}^{N_i} \mathbf{f}_{i,r} q_r = \{\mathbf{f}_i\}^T \{q^i\} \quad (3.89)$$

Una vez obtenidos los modos de presión asociados a cada subdominio de la sección, puede utilizarse el método de residuos ponderados, junto con el planteamiento de Galerkin, para resolver (3.84) y así obtener los números de onda y modos asociados a la sección transversal completa. En el planteamiento propuesto se utilizarán como funciones de ponderación los propios modos de la sección transversal. Multiplicando por dichos modos, integrando en la sección transversal Ω y anulando el residuo ponderado se llega a

$$\left[k^2 - 2Mkk_z - (1 - M^2)k_z^2 \right] \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \Psi_i d\Omega + \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \Delta \Psi_i d\Omega = 0 \quad (3.90)$$

Integrando por partes se reduce el orden de derivación necesario

$$\begin{aligned} & \left[k^2 - 2Mkk_z - (1 - M^2)k_z^2 \right] \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \Psi_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega_i} \nabla \{\mathbf{f}_i\} \nabla \Psi_i d\Omega = \int_{\Gamma_i} \{\mathbf{f}_i\} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.91)$$

Todos los modos de los subdominios satisfacen automáticamente la condición de pared rígida en el contorno exterior (no es necesaria imponerla). El término de excitación asociada a la integral sobre el contorno del tramo de unión con otros subdominios de la sección debe obtenerse a partir de la impedancia entre los mismos.

Definiendo las siguientes matrices

$$\begin{aligned}
[K_{\Omega}^i] &= \int_{\Omega_i} \nabla \{\mathbf{f}_i\} \nabla \{\mathbf{f}_i\}^T d\Omega - k^2 \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T d\Omega \\
[C_{\Omega}^i] &= 2Mk \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T d\Omega \\
[M_{\Omega}^i] &= (1 - M^2) \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T d\Omega \\
\{F^i\} &= \int_{\Gamma_i} \{\mathbf{f}_i\} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.92}$$

y teniendo en cuenta (3.89) podemos escribir la ecuación (3.91) como

$$\left([K_{\Omega}^i] + k_z [C_{\Omega}^i] + k_z^2 [M_{\Omega}^i] \right) \{q^i\} = \{F^i\} \tag{3.93}$$

Ensamblando la ecuación (3.93) para todos los subdominios que forman una sección, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} [K_{\Omega}^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [K_{\Omega}^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [K_{\Omega}^s] \end{bmatrix} + k_z \begin{bmatrix} [C_{\Omega}^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [C_{\Omega}^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [C_{\Omega}^s] \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + k_z^2 \begin{bmatrix} [M_{\Omega}^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [M_{\Omega}^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [M_{\Omega}^s] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \\ \vdots \\ \{q^s\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \vdots \\ \{F^s\} \end{pmatrix} \tag{3.94}
\end{aligned}$$

Se observa que las matrices obtenidas son matrices diagonales con submatrices en su diagonal, es decir, no existen matrices de acoplamiento entre subdominios puesto que todavía no se han impuesto las condiciones de contorno.

Estudiemos ahora como obtener las $\{F^i\}$ en función de los acoplamientos entre los diferentes subdominios. Partimos de dos subdominios (i y j), entre los cuales existe una impedancia Z_{ij} . Para establecer el gradiente de la presión normal en el tramo común entre subdominios, se puede partir de la ecuación de Euler evaluada en uno de los subdominios. Para el subdominio i tenemos

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = -\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j U_{i,n} \quad (3.95)$$

siendo $U_{i,n}$ la velocidad acústica normal al contorno Γ entre ambos subdominios. Utilizando la definición de impedancia

$$Z_{ij} = \frac{\Psi_j - \Psi_i}{U_{i,n}} \quad (3.96)$$

se puede eliminar la velocidad $U_{i,n}$ quedando

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \mathbf{r}_0 \mathbf{w} j \frac{\Psi_i - \Psi_j}{Z_{ij}} \quad (3.97)$$

Sustituyendo la presión según (3.89) nos queda

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_{ij}} \left(\{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} - \{\mathbf{f}_j\}^T \{q_j\} \right) \quad (3.98)$$

Incorporando (3.89) y (3.98) en la ecuación (3.91) tendríamos

$$\begin{aligned} & \left[k^2 - 2Mk k_z - (1 - M^2) k_z^2 \right] \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega_i} \nabla \{\mathbf{f}_i\} \nabla \{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} d\Omega = \\ & = \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \{\mathbf{f}_i\} \left(\{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} - \{\mathbf{f}_j\}^T \{q_j\} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.99)$$

Cambiando la notación quedaría como

$$\begin{aligned}
& \left([K_{\Omega}^i] - k^2 [M_{\Omega}^i] + k_z (2Mk [M_{\Omega}^i]) + \right. \\
& \left. + k_z^2 [(1-M^2) [M_{\Omega}^i]] \right) \{q_i\} = \\
& = \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{W}^j}{Z_{ij}} [M_{\Gamma}^{ii}] \{q_i\} - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{W}^j}{Z_{ij}} [M_{\Gamma}^{ij}] \{q_j\}
\end{aligned} \quad (3.100)$$

donde las matrices anteriores se definen según

$$\begin{aligned}
[K_{\Omega}^i] &= \int_{\Omega_i} \nabla \{\mathbf{f}_i\} \nabla \{\mathbf{f}_i\}^T d\Omega & [M_{\Gamma}^{ii}] &= \int_{\Gamma_{ij}} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T d\Gamma \\
[M_{\Omega}^i] &= \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T d\Omega & [M_{\Gamma}^{ij}] &= \int_{\Gamma_{ij}} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_j\}^T d\Gamma
\end{aligned} \quad (3.101)$$

Estas ecuaciones pueden reordenarse y mediante una definición de matrices nueva expresarse como

$$\left([KA^i] + k_z [CA^i] + k_z^2 [MA^i] \right) \{q_i\} + [KA^{ij}] \{q_j\} = 0 \quad (3.102)$$

donde

$$\begin{aligned}
[KA^i] &= [K_{\Omega}^i] - k^2 [M_{\Omega}^i] - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{W}^j}{Z_{ij}} [M_{\Gamma}^{ii}] \\
[KA^{ij}] &= \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{W}^j}{Z_{ij}} [M_{\Gamma}^{ij}] \\
[CA^i] &= 2Mk [M_{\Omega}^i] \\
[MA^i] &= (1-M^2) [M_{\Omega}^i]
\end{aligned} \quad (3.103)$$

Un planteamiento similar conduce al sistema de ecuaciones asociado al subdominio j

$$\left([KA^j] + k_z [CA^j] + k_z^2 [MA^j] \right) \{q_j\} + [KA^{ji}] \{q_i\} = 0 \quad (3.104)$$

Se puede definir un único sistema de ecuaciones que englobe a los diferentes subdominios acoplados. En nuestro caso de dos subdominios el sistema quedaría

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} [KA^i] & [KA^{ij}] \\ [KA^{ji}] & [KA^j] \end{bmatrix} + k_z \begin{bmatrix} [CA^i] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + k_z^2 \begin{bmatrix} [MA^i] & 0 \\ 0 & [MA^j] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{q_i\} \\ \{q_j\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Procediendo de manera análoga entre cada dos subdominios relacionados, el sistema (3.94) quedaría, al introducir los acoplamientos entre subdominios, como

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} [KA^1] & [KA^{12}] & \cdots & [KA^{1S}] \\ [KA^{21}] & [KA^2] & \cdots & [KA^{2S}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [KA^{S1}] & [KA^{S2}] & \cdots & [KA^S] \end{bmatrix} + k_z \begin{bmatrix} [CA_\Omega^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [CA_\Omega^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [CA_\Omega^S] \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + k_z^2 \begin{bmatrix} [MA_\Omega^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [MA_\Omega^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [MA_\Omega^S] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \\ \vdots \\ \{q^S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.106)$$

donde sólo la primera matriz de matrices se modifica según las definiciones (3.103) y deja de ser una matriz diagonal a bloques incluyendo los acoplamientos entre subdominios. Con una notación compacta queda finalmente

$$([KA] + k_z [C] + k_z^2 [M]) \{q\} = \{0\} \quad (3.107)$$

El problema de autovalores anterior permite obtener para cada frecuencia los números de onda axiales k_z asociados a los modos de propagación del problema y los coeficientes $\{q^i\}$ que definen cada modo transversal Ψ_i de la sección completa mediante (3.89). Este problema es equivalente a resolver el siguiente sistema

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [KA]\{q\} = \{0\} \quad (3.108)$$

que no es más que un problema de autovalores amortiguado que se resuelve llevando a cabo una transformación mediante la introducción de un nuevo vector $\{Y\}$ definido como

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.109)$$

que permite conseguir un sistema equivalente de primer orden a costa de duplicar el número de incógnitas. El sistema queda

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \{\dot{Y}\} + \begin{bmatrix} KA & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \{Y\} = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad [A]\{\dot{Y}\} + [B]\{Y\} = \{0\} \quad (3.110)$$

Así, la formulación obtenida corresponde a un problema estándar de autovalores, aunque el tamaño de las matrices es el doble del original. La solución correspondiente es un conjunto de valores propios y vectores propios (por parejas conjugadas) que corresponden a los números de onda k_z y a los modos $\{q^i\}$.

Puesto que se ha truncado la expansión modal, la solución obtenida es aproximada. Por razones de dimensionalidad del sistema de ecuaciones el número máximo de modos de la sección transversal que es posible obtener será $\sum N_i$, siendo N_i el número máximo de modos considerados para cada subdominio i . Cabe esperar que el error asociado al número de ondas y al modo sea mayor cuanto más elevado sea el módulo de k_z correspondiente.

3.5. Método de ajuste modal

3.5.1. Antecedentes

Como ya se comentó en la introducción, los modelos de onda plana tienen un bajo coste computacional, pero los resultados sólo son válidos por debajo de la primera frecuencia de corte e incluso, a menudo, un valor menor debido a la presencia de modos evanescentes. El método de los elementos finitos proporciona resultados precisos para geometrías arbitrarias, pero tiene el inconveniente de su elevado coste computacional. Por tanto, se plantea la obtención de resultados en base a modelos multidimensionales de tipo modal que reducen el coste computacional respecto a elementos finitos, y que mejoran ampliamente la solución con respecto a modelos de onda plana.

Entre las técnicas posibles se eligió la de ajuste modal por sus mejores resultados [25]. La técnica de ajuste modal tiene su punto de partida en las características modales de propagación de cada elemento por separado y lleva a cabo el acoplamiento en las discontinuidades considerando las condiciones de continuidad del campo acústico en éstas, de manera que puede considerarse como una técnica de subestructuración modal.

Uno de los autores que impulsó en sus inicios la aplicación del método de ajuste modal al problema acústico fue Cummings [18] que resolvió el caso de un retorno a través de una sección anular. Probablemente, el autor que más ha contribuido a la utilización de esta metodología al análisis acústico de silenciadores es Selamet [62][63][64][68] que abordó la solución acústica de diversos tipos de silenciadores incluyendo cámaras de expansión concéntricas y excéntricas, con o sin tubos extendidos y cámaras reversas. Todos estos trabajos se han aplicado al caso de conductos de sección circular. Por otro lado Denia [25] resolvió el problema de una cámara de expansión elíptica concéntrica. El método es susceptible de extenderse al caso en el que se considere la presencia de flujo medio uniforme en la dirección axial o al caso de materiales absorbentes. Cummings [21] abordó el estudio de un resonador

concéntrico con material absorbente en la cámara exterior y flujo medio axial uniforme en el tubo central, mientras que Peat [51] evaluó el campo de presiones en una discontinuidad de sección en presencia de flujo medio uniforme.

Todas estas referencias ponen de manifiesto que ha sido una metodología muy utilizada, sobre todo en los últimos años, pero evidencian que sólo se ha aplicado a problemas con geometrías relativamente simples. Esto ha motivado el estudio de geometrías más complejas y de la presencia de material absorbente. El método es parcialmente modal puesto que a pesar de utilizar la solución exacta en la dirección axial, se utiliza una solución modal en la ecuación de propagación de las ondas transversales. Por otro lado, conviene resaltar que el método se plantea mediante el uso de la técnica de separación de variables.

3.5.2. Obtención del sistema de ecuaciones

Con este planteamiento debe exigirse que el silenciador pueda subdividirse en tramos axiales de sección transversal constante, que irán conectados a otros tramos de diferente sección transversal.

En cada uno de los tramos deberá satisfacerse la ecuación diferencial con las condiciones de contorno adecuadas. En las interfases entre tramos se han de satisfacer la continuidad de presión y de la derivada de la presión en la dirección normal al contorno (o de la velocidad acústica normal si no existe flujo medio).

Como cada tramo i es de sección constante, la solución en la dirección axial definida por la coordenada z cuando se utiliza un planteamiento con modos de propagación, viene dada por

$$P_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{i,n} \Psi_{i,n} e^{-jk_{i,n}z} \right) \quad (3.111)$$

donde $C_{i,n}$ son las constantes de propagación que definen la onda, $\Psi_{i,n}$ son los modos transversales del subdominio correspondiente, y $k_{i,n}$ es el

número de onda longitudinal definido para el caso más general, incluyendo flujo medio, como

$$k_{i,n}^{\pm} = \frac{-Mk_0 \pm \sqrt{k_0^2 - (1-M^2)k_{i,t,n}^2}}{1-M^2} \quad (3.112)$$

siendo $k_{i,t,n}$ el número de onda transversal.

El objetivo es obtener los coeficientes de propagación $C_{i,n}$ de la presión en cada tramo.

El acoplamiento entre tramos se consigue imponiendo las condiciones de contorno adecuadas. Considerando todos los contornos exteriores como paredes rígidas, es necesario imponer condiciones en la sección de entrada y salida, en los cambios de sección y cuando dos secciones están conectadas a través de una impedancia (ver apartado 3.3.). El resto de contornos rígidos ya satisfacen las condiciones de la solución modal utilizada.

El conjunto de ecuaciones obtenidas de aplicar las diferentes condiciones de contorno puede utilizarse para generar un sistema algebraico de ecuaciones mediante la utilización de un procedimiento de integración ponderada, en el que los modos de presión transversales se utilizan como funciones de ponderación. El sistema resultante es de dimensión inicialmente infinita, pero se trunca a un número dado para su resolución.

Los modos de ponderación que se utilizan son aquellos correspondientes a la sección menor para condiciones de presión, y los correspondientes a la sección mayor en el caso de condiciones de derivada de la presión o de velocidad.

Para las condiciones de contorno estudiadas en el apartado 3.3. se tendrían las siguientes ecuaciones tras la integración, teniendo en cuenta (3.111) y donde las integrales en las secciones correspondientes requieren del conocimiento de la relación entre las coordenadas de cada sistema de referencia, cuya mayor o menor complejidad depende del tipo de conductos considerados.

Cambio de sección

Las condiciones a imponer vienen dadas por (3.55) - (3.57), es decir,

$$P_i(x_i, y_i, z_i) = P_j(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_i$$

$$\frac{\partial P_i(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i} = \frac{\partial P_j(x_j, y_j, z_j)}{\partial z_j} \quad \text{en } S_i$$

$$U_{z,j}(x_j, y_j, z_j) = 0 \quad \text{en } S_j - S_i$$

Para la primera condición (la de presión), si la multiplicamos por los modos en la sección S_i (la de menor sección) y la integramos en el dominio de S_i , obtendríamos

$$\sum_{n=0}^{N_i} (C_{i,n}^+ e^{-jk_{i,n}z_i} + C_{i,n}^- e^{jk_{i,n}z_i}) \int_{S_i} (\Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{i,s}(x_i, y_i))$$

$$= \sum_{n=0}^{N_j} (C_{j,n}^+ e^{-jk_{j,n}z_j} + C_{j,n}^- e^{jk_{j,n}z_j}) \int_{S_i} (\Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{i,s}(x_i, y_i))$$
(3.113)

donde z_i y z_j indican la posición del plano donde se produce el cambio de sección para el sistema de referencia del tramo i y del tramo j respectivamente.

Para las condiciones de velocidad multiplicamos por los modos en la sección S_j (la mayor), integramos en el dominio correspondiente a la sección S_i en la segunda condición y a la diferencia de las secciones en la tercera, y finalmente sumamos las ecuaciones resultantes para obtener en el lado derecho de la ecuación la integración en la sección S_j completa. Nos queda

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_i} k_{i,n} \left(C_{i,n}^+ e^{-jk_{i,n}z_i} - C_{i,n}^- e^{jk_{i,n}z_i} \right) \int_{S_i} \left(\Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N_j} k_{j,n} \left(C_{j,n}^+ e^{-jk_{j,n}z_j} - C_{j,n}^- e^{jk_{j,n}z_j} \right) \int_{S_j} \left(\Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \right)
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Relación por impedancia

Las condiciones a imponer vienen dadas por (3.64) y (3.65), es decir,

$$\begin{aligned}
U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) &= U_{z,j}(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_i \\
U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) &= \frac{P_j(x_j, y_j, z_j) - P_i(x_i, y_i, z_i)}{Z_p} \quad \text{en } S_i
\end{aligned}$$

Como ambas secciones son iguales, pueden utilizarse como modos de ponderación cualesquiera de ellos. En nuestro caso hemos escogido de forma arbitraria los modos de la sección S_i para condiciones de presión, y los de la sección S_j para condiciones de velocidad, quedando como resultado

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_i} k_{i,n} \left(C_{i,n}^+ e^{-jk_{i,n}z_i} - C_{i,n}^- e^{jk_{i,n}z_i} \right) \int_{S_j} \left(\Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N_j} k_{j,n} \left(C_{j,n}^+ e^{-jk_{j,n}z_j} - C_{j,n}^- e^{jk_{j,n}z_j} \right) \int_{S_j} \left(\Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \right)
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_i} k_{i,n} \left(C_{i,n}^+ e^{-jk_{i,n}z_j} - C_{i,n}^- e^{jk_{i,n}z_j} \right) \int_{S_j} \left(\Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \right) \\
&= \frac{1}{Z_p} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{i,n}^+ e^{-jk_{i,n}z_j} + C_{i,n}^- e^{jk_{i,n}z_j} \right) \int_{S_i} \left(\Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{i,s}(x_i, y_i) \right) - \right. \\
& \left. - \sum_{n=0}^{N_j} \left(C_{j,n}^+ e^{-jk_{j,n}z_j} + C_{j,n}^- e^{jk_{j,n}z_j} \right) \int_{S_i} \left(\Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{i,s}(x_i, y_i) \right) \right] \quad (3.116)
\end{aligned}$$

donde z_i y z_j indican la posición del plano donde se encuentra la impedancia para el sistema de referencia del tramo i y del tramo j respectivamente.

Entrada y salida

Si se busca obtener la matriz de cuatro polos y se realizan por tanto dos análisis, habría que considerar como condiciones de contorno las planteadas en (3.66) - (3.69). Multiplicando las condiciones a la entrada por los modos de la sección de entrada, y las condiciones a la salida por los de la correspondiente sección de salida, obtendríamos para el primer análisis

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_1} \left(C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,n}z_1} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,n}z_1} \right) \int_{S_1} \left(\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) \right) = \\
&= P_{exc} \int_{S_1} \left(\Psi_{1,s}(x_1, y_1) \right) \quad (3.117)
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{N_T} \left(C_{T,n}^+ e^{-jk_{T,n}z_T} + C_{T,n}^- e^{jk_{T,n}z_T} \right) \int_{S_T} \left(\Psi_{T,n}(x_T, y_T) \Psi_{T,s}(x_T, y_T) \right) = 0 \quad (3.118)$$

denominando con S_I a la sección de entrada y con S_T a la de salida.

Para el segundo análisis, siguiendo el mismo criterio de modos de ponderación, obtendríamos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_1} \left(C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,n}z_1} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,n}z_1} \right) \int_{S_1} \left(\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) \right) &= \\ &= P_{exc} \int_{S_1} \left(\Psi_{1,s}(x_1, y_1) \right) \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\sum_{n=0}^{N_T} k_{T,n} \left(C_{T,n}^+ e^{-jk_{T,n}z_T} - C_{T,n}^- e^{jk_{T,n}z_T} \right) \int_{S_T} \left(\Psi_{T,n}(x_T, y_T) \Psi_{T,s}(x_T, y_T) \right) = 0 \quad (3.120)$$

Si se pretende obtener el TL directamente con un solo análisis siguiendo las condiciones de contorno planteadas en (3.70) y (3.71), y siguiendo de nuevo el mismo criterio de modos de ponderación, llegaríamos a las siguiente ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_1} \left(C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,n}z_1} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,n}z_1} \right) \int_{S_1} \left(\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) \right) &= \\ &= P_{exc} \int_{S_1} \left(\Psi_{1,s}(x_1, y_1) \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$C_{T,n}^- = 0 \quad (3.122)$$

La resolución del sistema algebraico de ecuaciones implica truncarlo previamente a un valor finito. El truncado se justifica puesto que los modos de alto orden tienen un efecto cada vez menor en la solución del campo acústico para una frecuencia máxima de análisis dada. El valor para obtener una solución precisa está relacionado con esta frecuencia máxima y con la geometría concreta analizada.

A continuación se presenta una generalización de este método [1]. Para establecer el número de incógnitas y de ecuaciones necesarias en la resolución del problema se supondrá que se han truncado las expansiones modales de la presión en cada subdominio considerando sólo los N primeros términos. El número de incógnitas para cada subdominio será el de coeficientes desconocidos en las expansiones de la presión. Si se toman hasta el modo N -ésimo, teniendo en cuenta que es necesario incluir los modos correspondientes a las ondas progresivas y regresivas, se tendrán $2N$ incógnitas por subdominio. Para cada función de

ponderación considerada se obtendrá una ecuación, con lo cual si se consideran N funciones de ponderación (asociadas a modos transversales) en cada uno de los dos extremos en los que se deben forzar condiciones de contorno, se dispondrá de suficientes ecuaciones. Sólo queda por discernir cuál es la función de ponderación que debe utilizarse con cada una de las ecuaciones asociadas a las condiciones de contorno. Este aspecto depende del problema considerado y para sistematizar se adoptará un criterio basado en la Teoría de Grafos.

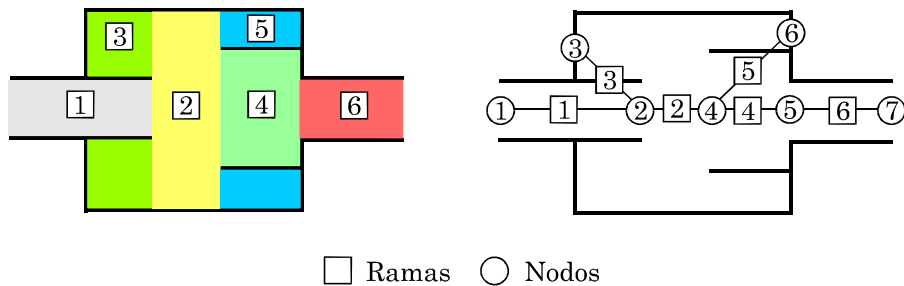


Figura 20. Ejemplo de definición topológica de un silenciador para la aplicación del método de ajuste modal. Definición del grafo.

Denominaremos N_s al número de tramos, N_c al número de secciones en las que se imponen condiciones de contorno, y d_j al grado del nodo j , es decir el número de tramos conectados en cada sección. Por conveniencia asignaremos el número de nodo 1 al contorno de entrada y el N_c al de salida. Según el Teorema de Euler de la Teoría de Grafos se tendrá que

$$2N_s = \sum_{j=1}^{N_c} d_j \quad (3.123)$$

Teniendo en cuenta que el número de incógnitas por tramo es de $2N$ y que el número de tramos del silenciador es N_s , el número total de incógnitas del problema es $2NN_s$. Considerando esta expresión y (3.123), el número total de incógnitas del problema satisface

$$2NN_s = N \sum_{j=1}^{N_c} d_j \quad (3.124)$$

Si tenemos en cuenta que todas las ramas son binarias y que en la suma de grados de todos los nodos, cada rama se contabiliza dos veces, es

suficiente utilizar N funciones de ponderación en cada uno de los dos extremos de cada tramo para obtener todas las ecuaciones necesarias. Este criterio se ha aplicado en todas las referencias que utilizan el método de ajuste modal.

El siguiente paso es establecer cual es el número de ecuaciones de condiciones de continuidad de gradiente de presión y continuidad de presión necesarias. Para ello se debe conocer que tipo de condiciones de contorno se van a imponer en la entrada y la salida del sistema puesto que podría tratarse tanto de presión como de velocidad. Se desarrollará suponiendo las condiciones de presión en la entrada sin pérdida de generalidad. Teniendo en cuenta este aspecto, en todos los nodos del grafo menos en el de entrada y salida, deberá imponerse condiciones de continuidad de flujo, es decir, continuidad de gradiente de la presión. Luego el número de condiciones de continuidad de gradiente de presión N_{gp} será

$$N_{gp} = N(N_c - 2) \quad (3.125)$$

Restando a (3.124) la ecuación (3.125) se obtiene el número de ecuaciones de presión N_p necesarias

$$N_p = N \left[2 + \sum_{j=1}^{N_c} (d_j - 1) \right] \quad (3.126)$$

Cada nodo, exceptuando el de entrada y el de salida con la opción considerada, tienen asociada una ecuación de continuidad de gradiente de la presión. En cada nodo se podrá plantear una ecuación de continuidad de presión entre cada pareja de tramos conectados por el nodo. Es evidente que si en un nodo hay d_j tramos conectados existen $d_j - 1$ combinaciones posibles de parejas de tramos. Por ello, en cada nodo j diferente de la entrada y la salida existen $d_j - 1$ condiciones de presión y una condición de derivada de la presión.

Cada condición de presión o su derivada tiene asociadas N ecuaciones, que se obtienen utilizando como funciones de ponderación, los N modos transversales de cada uno de los ramos conectados en el nodo. Sin embargo, debe establecerse cual será el tramo cuyos modos se utilizarán como función de ponderación en la condición de continuidad del gradiente. Puesto que la ecuación de continuidad de la derivada de la presión en el nodo debe involucrar a todos los subdominios conectados en el nodo, se han de utilizar como funciones de ponderación los modos

transversales del tramos que tenga asociada la sección transversal completa.

3.5.3. Obtención del índice de pérdidas por transmisión (TL)

Obtengamos primero los cuatro polos del silenciador, para ello se exige que la onda a la entrada y la salida sea plana. Puede considerarse que las regiones antes de la sección de entrada y el tubo de salida son suficientemente largas para asegurar que se desarrolla la onda, de manera que los cuatro polos pueden determinarse mediante

$$A = \frac{P_1(x_1, y_1, z_1)}{P_T(x_T, y_T, z_T)} \Big|_{U_T(x_T, y_T, z_T)=0} = \frac{P_{exc}}{C_{T,0}^+ e^{-jk_0 z_T} + C_{T,0}^- e^{jk_0 z_T}} \quad (3.127)$$

$$B = \frac{P_1(x_1, y_1, z_1)}{U_T(x_T, y_T, z_T)} \Big|_{P_T(x_T, y_T, z_T)=0} = \frac{P_{exc}}{\mathbf{r}_0 c_0 (C_{T,0}^+ e^{-jk_0 z_T} - C_{T,0}^- e^{jk_0 z_T})} \quad (3.128)$$

$$C = \frac{U_1(x_1, y_1, z_1)}{P_T(x_T, y_T, z_T)} \Big|_{U_T(x_T, y_T, z_T)=0} = \frac{\frac{1}{\mathbf{r}_0 c_0} (C_{1,0}^+ e^{-jk_0 z_1} - C_{1,0}^- e^{jk_0 z_1})}{C_{T,0}^+ e^{-jk_0 z_T} + C_{T,0}^- e^{jk_0 z_T}} \quad (3.129)$$

$$D = \frac{U_1(x_1, y_1, z_1)}{U_T(x_T, y_T, z_T)} \Big|_{P_T(x_T, y_T, z_T)=0} = \frac{C_{1,0}^+ e^{-jk_0 z_1} - C_{1,0}^- e^{jk_0 z_1}}{C_{T,0}^+ e^{-jk_0 z_T} - C_{T,0}^- e^{jk_0 z_T}} \quad (3.130)$$

Una vez obtenidos los cuatro polos el TL viene dado por la expresión (2.104).

La determinación del TL puede llevarse a cabo también mediante la utilización de un único análisis. Para ello, se asume una presión de entrada arbitraria (normalmente unitaria) y salida de tipo anecoico, lo cual implica que no se produce reflexión alguna y por tanto $C_{T,n}^- = 0$ para todo valor de n . Condiciones que ya se plantearon en el apartado 3.3. Al reducir el número de incógnitas se reduce también el número de ecuaciones necesario y con un único análisis puede resolverse el sistema obteniéndose los $C_{i,n}^\pm$ necesarios y a partir de ellos el TL según

$$TL = -10 \log \left(\frac{S_T}{S_1} \left| \sum_{n=0}^q C_{T,n}^+ e^{-jk_{T,n}z_T} \Psi_{T,n}(x_T, y_T) \right|^2 \right) \quad (3.131)$$

3.6. Ejemplos

3.6.1. Resonador concéntrico circular

A continuación aplicaremos el método de ajuste modal al caso de un resonador concéntrico de sección circular como el que muestra la Figura 21. Se aplicará el método de ajuste modal junto con el método directo planteado en el apartado 3.4.1 y el de subestructuración para la sección transversal de la cámara. Si la sección de la cámara se divide entre anillo circular y tubo interior, los modos transversales de ambas secciones se conocen analíticamente.

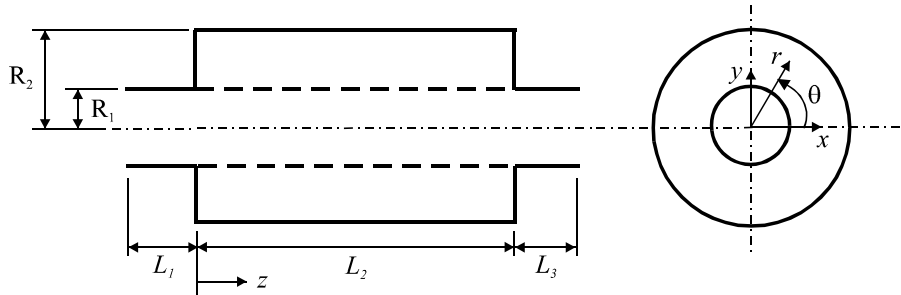


Figura 21. Resonador concéntrico de sección circular.

La impedancia del perforado se modela siguiendo el modelo de Sullivan pero con los coeficientes calculados experimentalmente (ver apartado 4.2.8).

Las dimensiones del silenciador son $R_1 = 0,0268$ m, $R_2 = 0,091$ m, $L_1 = L_3 = 0.1$ m. Las características del perforado son diámetro de orificio $d_h = 0,003$ m y espesor $t_p = 0,0023$ m. Las dimensiones variables se detallan en la tabla siguiente siendo s la porosidad del perforado

Nombre	L_2 (m)	s (%)
RCC1	0,148	5
RCC2	0,148	10
RCC3	0,224	5
RCC4	0,224	10

Se considerarán los siguientes tramos y secciones para llevar a cabo el método de ajuste modal

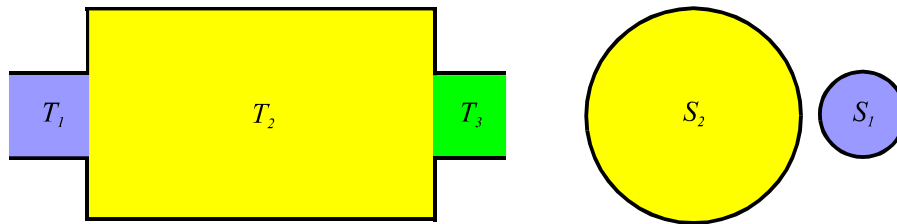


Figura 22. Tramos y secciones en que se divide el silenciador.

En coordenadas cilíndricas la ecuación de ondas en la sección S_1 vendrá dada por

$$P_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (3.132)$$

donde n es el número del modo, (r, z) las coordenadas cilíndricas, $C_{1,n}^{\pm}$ los factores de participación de modo, $\Psi_{1,n}(r)$ el modo de presión transversal dado por la función de Bessel de primera clase y orden cero $J_0(k_{1,r,n}r)$ por tratarse de un conducto circular, y $k_{1,r,n}$ el número de onda radial que se obtiene al satisfacer la condición de frontera de pared rígida $J_0'(k_{1,r,n}R_1) = 0$. El número de onda axial $k_{1,z_1,n}$ del modo n está definido por:

$$k_{1,z_1,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_{1,r,n}^2} & k_0 > k_{1,r,n} \\ -j\sqrt{k_{1,r,n}^2 - k_0^2} & k_0 < k_{1,r,n} \end{cases} \quad (3.133)$$

con $k_0 = \omega/c_0$ el número de onda del aire, y ω la frecuencia angular.

La velocidad acústica en la dirección axial a partir de la presión será [3]:

$$U_{z,1}(r, z) = \frac{1}{r_0 w} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,z,n} \left(C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} - C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z} \right) \Psi_{1,n}(r) \quad (3.134)$$

siendo ρ_0 la densidad.

Para el anillo que forma la sección $S_2 - S_1$ tendremos la siguiente propagación

$$P_2(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{2,n}^+ e^{-jk_{2,z,n}z} + C_{2,n}^- e^{jk_{2,z,n}z}) \Psi_{2,n}(r) \quad (3.135)$$

donde los modos vienen dados por

$$\Psi_{2,n}(r) = J_0(k_{2,r,n}r) - \frac{J_1(k_{2,r,n}R_1)}{Y_1(k_{2,r,n}R_1)} Y_0(k_{2,r,n}r) \quad (3.136)$$

siendo R_1 el radio del tubo interior, y $k_{2,r,n}$ el número de onda radial que se obtiene al satisfacer la condición de frontera de pared rígida, es decir

$$J_1(k_{2,r,n}R_2) - \frac{J_1(k_{2,r,n}R_1)}{Y_1(k_{2,r,n}R_1)} Y_1(k_{2,r,n}R_2) = 0 \quad (3.137)$$

Las ecuaciones que resultan de aplicar el método directo a la sección conjunta del tramo T_2 son el resultado de imponer la condición de impedancia entre las secciones S_1 y S_2 . Así tenemos en coordenadas cilíndricas

$$U_{z,1,n}(R_1, z) = U_{z,2,n}(R_1, z) \quad (3.138)$$

$$U_{z,1,n}(R_1, z) = \frac{P_2(R_1, z) - P_1(R_1, z)}{Z_p} \quad (3.139)$$

Las ecuaciones que resultan de aplicar el método de subestructuración a la sección del tramo T_2 se muestran a continuación

$$\left(\begin{bmatrix} [KA^1] & [KA^{12}] \\ [KA^{21}] & [KA^2] \end{bmatrix} + k_z^2 \begin{bmatrix} [M_\Omega^1] & [0] \\ [0] & [M_\Omega^2] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{pmatrix}$$

$$[KA^1] = [K_\Omega^1] - k^2 [M_\Omega^1] - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{11}]$$

$$[KA^{12}] = \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{12}] \quad [KA^{21}] = \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{21}]$$

$$[KA^2] = [K_\Omega^2] - k^2 [M_\Omega^2] - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{22}]$$

$$[K_\Omega^1] = \int_{\Omega_1} \nabla \Psi_1 \nabla \Psi_1^T d\Omega \quad [M_\Omega^1] = \int_{\Omega_1} \Psi_1 \Psi_1^T d\Omega$$

$$[M_\Gamma^{11}] = \int_{\Gamma} \Psi_1 \Psi_1^T d\Gamma \quad [M_\Gamma^{22}] = \int_{\Gamma} \Psi_2 \Psi_2^T d\Gamma$$

$$[K_\Omega^2] = \int_{\Omega_1} \nabla \Psi_2 \nabla \Psi_2^T d\Omega \quad [M_\Omega^2] = \int_{\Omega_1} \Psi_2 \Psi_2^T d\Omega$$

$$[M_\Gamma^{12}] = \int_{\Gamma} \Psi_1 \Psi_2^T d\Gamma \quad [M_\Gamma^{21}] = \int_{\Gamma} \Psi_2 \Psi_1^T d\Gamma$$

$$\Psi_1^\pm = J_0 \left(\frac{\mathbf{a}_{0,n}}{R_1} r \right) \quad \Psi_2 = J_0(k_{2,r,n} r) - \frac{J_1(k_{2,r,n} R_1)}{Y_1(k_{2,r,n} R_1)} Y_0(k_{2,r,n} r)$$

Si posteriormente se aplica ajuste modal entre los diferentes tramos se obtienen para $s = 0, 1, \dots, N$ las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N (C_{1,n}^+ + C_{1,n}^-) \int_{S_1} (\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1)) \\ & = \sum_{n=0}^N (C_{2,n}^+ + C_{2,n}^-) \int_{S_1} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{1,s}(x_1, y_1)) \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{1,n} (C_{1,n}^+ - C_{1,n}^-) \int_{S_1} (\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{2,s}(x_2, y_2)) \\
&= \sum_{n=0}^N k_{2,n} (C_{2,n}^+ - C_{2,n}^-) \int_{S_2} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,s}(x_2, y_2))
\end{aligned} \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N (C_{2,n}^+ e^{-jk_{2,n}L_2} + C_{2,n}^- e^{jk_{2,n}L_2}) \int_{S_3} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{3,n}(x_3, y_3)) \\
&= \sum_{n=0}^N (C_{3,n}^+) \int_{S_3} (\Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{3,n}(x_3, y_3))
\end{aligned} \tag{3.142}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N k_{2,n} (C_{2,n}^+ e^{-jk_{2,n}L_2} - C_{2,n}^- e^{jk_{2,n}L_2}) \int_{S_2} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,s}(x_2, y_2)) \\
&= \sum_{n=0}^N k_{3,n} (C_{3,n}^+) \int_{S_3} (\Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{2,s}(x_2, y_2))
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del producto de funciones de Bessel y simplificando, las integrales quedarían como [70]

$$\int_{S_1} (\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1)) = \begin{cases} \frac{R_1^2}{2} J_0^2(k_{1,r,s} R_1) & \text{for } n = s \\ 0 & \text{for } n \neq s \end{cases} \tag{3.144}$$

$$\int_{S_1} (\Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{2,s}(x_2, y_2)) = \int_{S_1} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{1,s}(x_1, y_1)) = \begin{cases} R_1^2 [J_0^2(k_{1,r,s} R_1) + J_1^2(k_{2,r,s} R_1)] & \text{for } k_{1,r,s} = k_{2,r,s} \\ \frac{R_1^2 [k_{2,r,s} J_1(k_{2,r,s} R_1) J_0(k_{1,r,s} R_1) - k_{1,r,s} J_0(k_{2,r,s} R_1) J_1(k_{1,r,s} R_1)]}{k_{2,r,s}^2 - k_{1,r,s}^2} & \text{for } k_{1,r,s} \neq k_{2,r,s} \end{cases} \tag{3.145}$$

$$\int_{S_2} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,s}(x_2, y_2)) = \begin{cases} \frac{R_1^2}{2} \left(J_0^2(k_{2,r,s} R_1) - [C_3 J_0(k_{2,r,s} R_1) + C_4 Y_0(k_{2,r,s} R_1)]^2 - \right. \\ \left. [C_3 J_1(k_{2,r,s} R_1) + C_4 Y_1(k_{2,r,s} R_1)]^2 \right) + & (3.146) \\ \frac{R_1^2}{2} \left([C_3 J_0(k_{2,r,s} R_2) + C_4 Y_0(k_{2,r,s} R_2)]^2 + \right. \\ \left. [C_3 J_1(k_{2,r,s} R_2) + C_4 Y_1(k_{2,r,s} R_2)]^2 \right) & \text{for } n = s \\ 0 & \text{for } n \neq s \end{cases}$$

$$\int_{S_1} (\Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{3,s}(x_3, y_3)) = \int_{S_1} (\Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{2,s}(x_2, y_2)) = \begin{cases} R_1^2 [J_0^2(k_{1,r,s} R_1) + J_1^2(k_{2,r,s} R_1)] & \text{for } k_{1,r,s} = k_{2,r,s} \\ R_1^2 [k_{2,r,s} J_1(k_{2,r,s} R_1) J_0(k_{1,r,s} R_1) - k_{1,r,s} J_0(k_{2,r,s} R_1) J_1(k_{1,r,s} R_1)] & (3.147) \\ \frac{k_{2,r,s}^2 - k_{1,r,s}^2}{k_{2,r,s} - k_{1,r,s}} & \text{for } k_{1,r,s} \neq k_{2,r,s} \end{cases}$$

$$\int_{S_1} (\Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{3,s}(x_3, y_3)) = \begin{cases} \frac{R_1^2}{2} J_0^2(k_{1,r,s} R_1) & \text{for } n = s \\ 0 & \text{for } n \neq s \end{cases} \quad (3.148)$$

Los resultados obtenidos para el silenciador RCC1 se muestran en la Figura 23, donde puede verse que tanto con el método directo como con el de subestructuración se obtienen resultados similares lo que era de esperar puesto que se basan en el mismo modelo salvo que el método directo obtiene los modos exactamente, y el de subestructuración de manera aproximada. Que sus resultados coincidan confirma que el método de subestructuración ha convergido correctamente. Con respecto a los datos experimentales, ambos métodos concuerdan razonadamente con ellos.

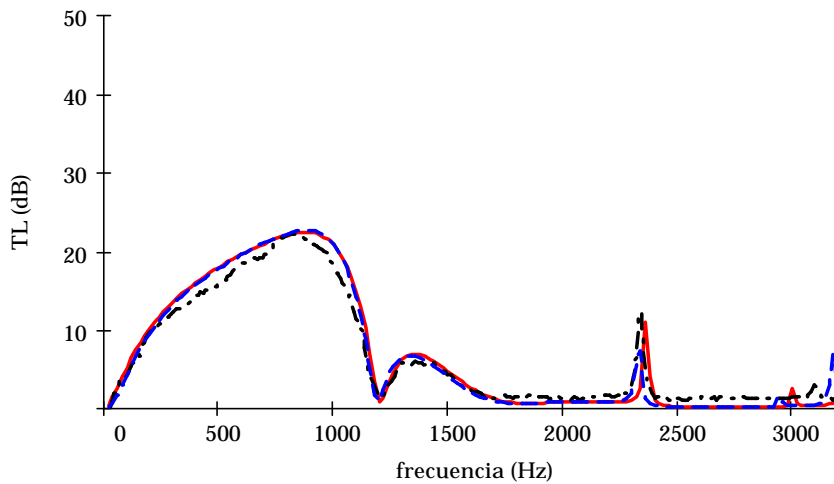


Figura 23. TL para el silenciador RCC1. - ajuste modal con subestructuración, - - ajuste modal con método directo, - • - resultados experimentales.

Para los silenciadores RCC2, RCC3 y RCC4 podemos ver los resultados obtenidos con el método de ajuste modal conjuntamente con el de subestructuración en las Figuras 24-26, donde para la impedancia propuesta los valores son aceptables por debajo de los 1500 Hz. Entre los 1500 Hz y los 2500 Hz es la zona donde más influencia tiene el modelo de perforado. El modelo de impedancia considera que la porosidad y la sección de agujeros son constantes, y por tanto también la velocidad a través de ellos, pero para tubos circulares de considerable espesor, esta suposición deja de ser consistente, lo que puede verse en las gráficas a partir de los 1500 Hz, sobretodo para la porosidad mayor.

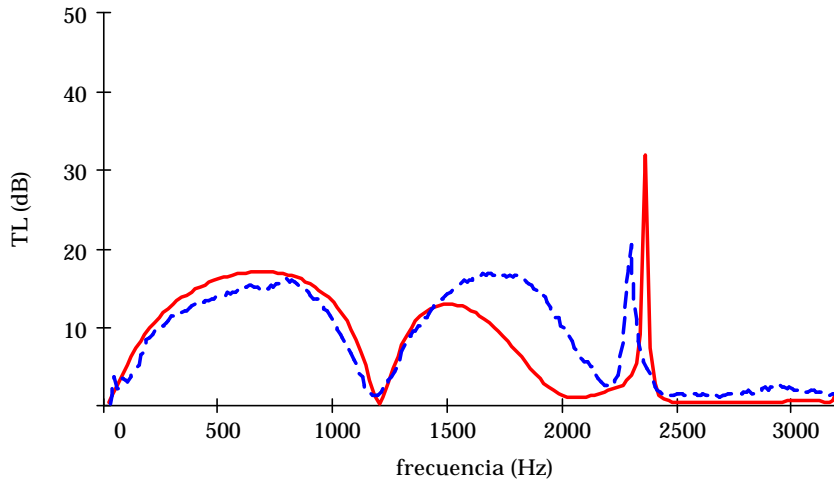


Figura 24. TL para el silenciador RCC2. - - ajuste modal con subestructuración,
- - resultados experimentales.

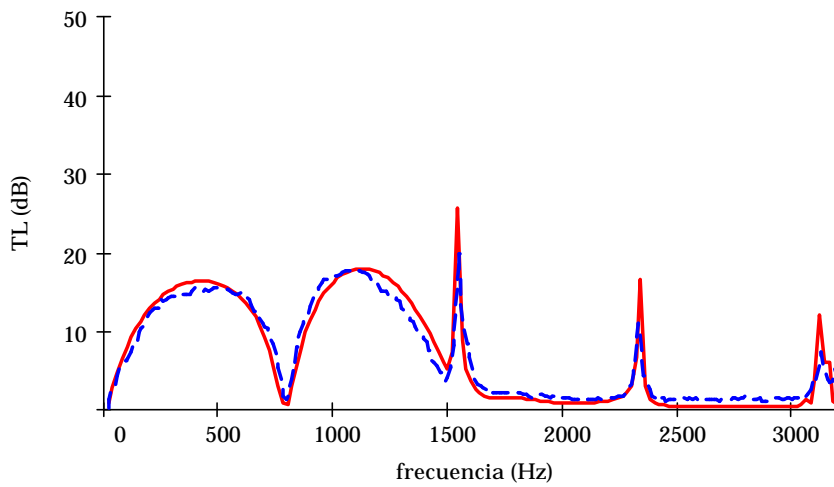


Figura 25. TL para el silenciador RCC3. - - ajuste modal con subestructuración,
- - resultados experimentales.

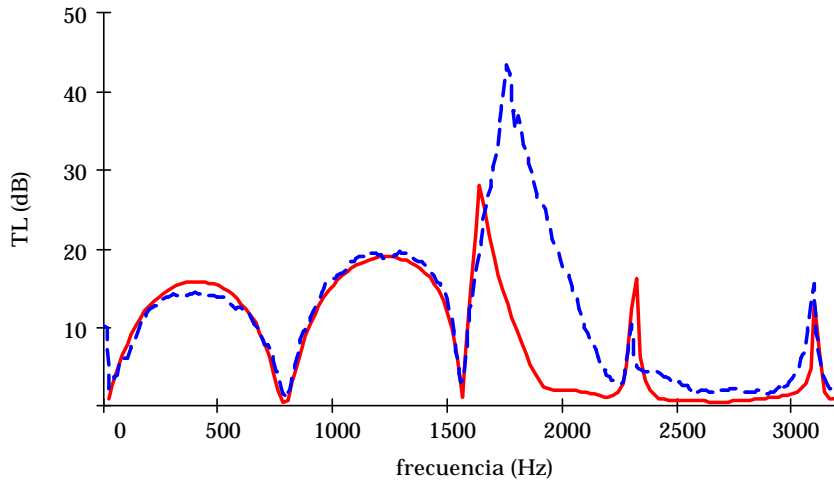


Figura 26. TL para el silenciador RCC4. . - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

3.6.2. Resonador excéntrico de sección oval

A continuación aplicaremos el método de ajuste modal junto con el método de subestructuración al caso de un resonador concéntrico de sección oval (ver Figura 27). Se aplicará el método de subestructuración para la sección transversal de la cámara. Si la sección de la cámara se divide entre anillo oval y tubo interior, los modos transversales del tubo se conocen analíticamente, mientras que los del anillo han de obtenerse numéricamente.

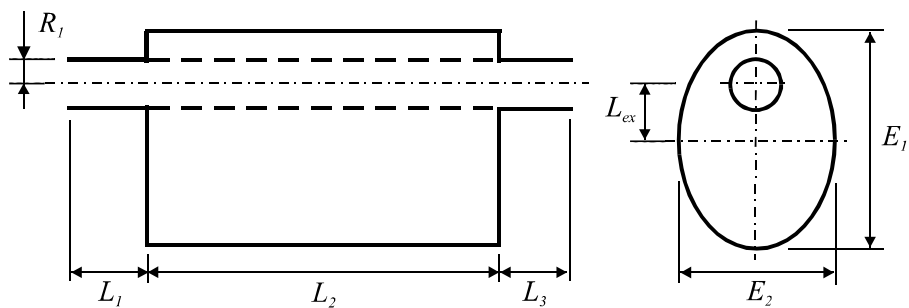


Figura 27. Resonador excéntrico de sección oval.

Las dimensiones del silenciador (ROE1) son $R_1 = 0,026$ m, $E_1 = 0,230$ m, $E_2 = 0,130$ m, $L_1 = L_3 = 0,1$ m, $L_2 = 0,165$ m y $L_{ex} = 0,071$ m. Las características del perforado son diámetro de orificio $d_h = 0,003$ m, espesor del perforado $t_p = 0,001$ m y porosidad $s = 11,3$ %.

Se considerarán los siguientes tramos y secciones

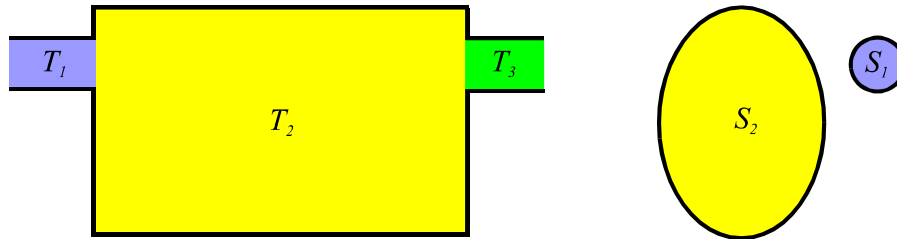


Figura 28. Tramos y secciones en que se divide el silenciador.

En coordenadas cilíndricas la ecuación de ondas en el tramo T_1 vendrá dada por

$$P_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (3.149)$$

donde n es el número del modo, (r, z) las coordenadas cilíndricas, $C_{1,n}^{\pm}$ los factores de participación de modo, $\Psi_{1,n}(r)$ el modo de presión transversal dado por la función de Bessel de primera clase y orden cero $J_0(k_{1,r,n}r)$ por tratarse de un conducto circular, y $k_{1,r,n}$ el número de onda radial que se obtiene al satisfacer la condición de frontera de pared rígida $J_0'(k_{1,r,n}R_1) = 0$. El número de onda axial $k_{1,z,n}$ del modo n está definido por:

$$k_{1,z,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_{1,r,n}^2} & k_0 > k_{1,r,n} \\ -j\sqrt{k_{1,r,n}^2 - k_0^2} & k_0 < k_{1,r,n} \end{cases} \quad (3.150)$$

con $k_0 = \omega/c_0$ el número de onda del aire, y ω la frecuencia angular.

La velocidad acústica axial a partir de la presión será [3]:

$$U_{z,1}(r, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{1,z,n} (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} - C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (3.151)$$

siendo ρ_0 la densidad.

Del tramo T_2 no se conocen los modos analíticos por lo que se debe recurrir a su cálculo numérico. En este caso con el método de los elementos finitos, a partir de las secciones S_I y $S_2 - S_1$. Las mallas que se utilizaron se muestran en la Figura 29

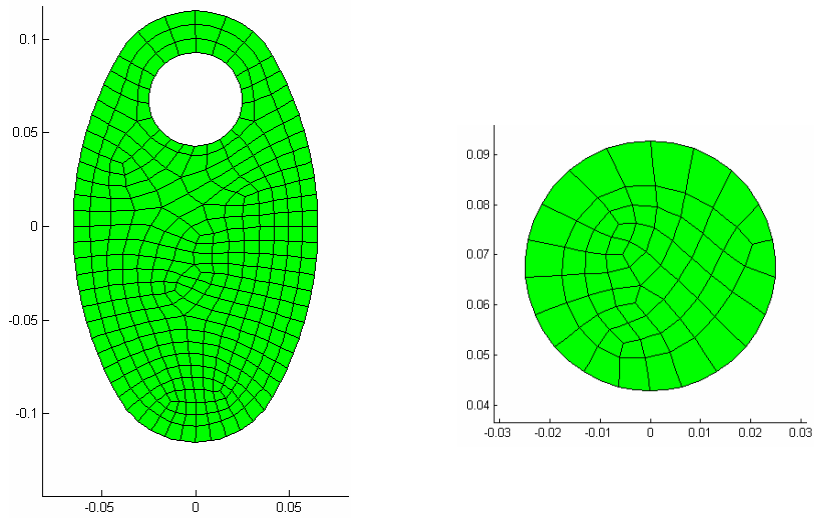


Figura 29. Mallas utilizadas para la obtención de los modos transversales con elementos finitos.

Una vez obtenidos los modos transversales tendríamos para la sección del tramo T_2 que

$$P_2(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{2,n}^+ e^{-jk_{2,z,n}z} + C_{2,n}^- e^{jk_{2,z,n}z}) \Psi_{2,n}(r) \quad (3.152)$$

siendo $k_{2,r_2,n}$ los números de onda correspondientes obtenidos al mismo tiempo que los modos $\Psi_{2,n}$.

Las ecuaciones que resultan de aplicar el método de subestructuración a la sección del tramo T_2 son similares a las del caso anterior de resonador concéntrico de sección circular. Con la salvedad de que las integrales se pueden calcular de manera más sencilla como producto de matrices. En concreto las matrices que se obtienen con elementos finitos vienen definidas según

$$[M] = \sum \int_{\Omega^2} [N][N]^T d\Omega \quad (3.153)$$

$$[K] = \sum \int_{\Omega^2} [B][B]^T d\Omega \quad (3.154)$$

$$[PA_A] = \sum \int_{\Gamma_{A,B}} [N][N]^T d\Gamma \quad (3.155)$$

siendo $[N]$ la matriz de funciones de forma y $[B]$ el operador de derivadas aplicado a las funciones de forma. Teniendo en cuenta que los modos numéricos obtenidos se expresan mediante

$$\mathbf{f}_{A,k} = [N_A]^T \{\mathbf{f}_A\}_k \quad (3.156)$$

las integrales siguientes quedan como

$$[M_{\Omega}^A] = \int_{\Omega_A} \mathbf{f}_{A,i} \mathbf{f}_{A,j} d\Omega = \{\mathbf{f}_A\}_i^T [M_A] \{\mathbf{f}_A\}_j \quad (3.157)$$

$$[K_{\Omega}^A] = \int_{\Omega_A} \nabla \mathbf{f}_{A,i} \nabla \mathbf{f}_{A,j} d\Omega = \{\mathbf{f}_A\}_i^T [M_A] \{\mathbf{f}_A\}_j \quad (3.158)$$

$$[M_{\Gamma}^{A,A}] = \int_{\Gamma_{A,B}} \mathbf{f}_{A,i} \mathbf{f}_{A,j} d\Gamma = \{\mathbf{f}_A\}_i^T [PA_A] \{\mathbf{f}_A\}_j \quad (3.159)$$

$$[M_{\Gamma}^{A,B}] = \int_{\Gamma_{A,B}} \mathbf{f}_{A,i} \mathbf{f}_{B,j} d\Gamma = \{\mathbf{f}_A\}_i^T [PA_A] \{\mathbf{f}_B\}_j \quad (3.160)$$

Una vez obtenidos los modos transversales de la sección, el sistema de ecuaciones resultantes de aplicar ajuste modal es similar al ejemplo de resonador de sección circular.

En la Figura 30 se muestran los resultados obtenidos para este silenciador, donde se observa que los resultados de ajuste modal con

subestructuración se adaptan en buena medida con los experimentales. Además vemos como la forma oval descentrada hace perder la axisimetría del silenciador y por ello se propagan modos transversales a frecuencias mucho menores, sobre los 700 Hz en este caso. Para esta geometría el modelo de perforado se comporta mejor debido a que el espesor utilizado es menor y se adapta en mayor medida a las hipótesis del mismo.

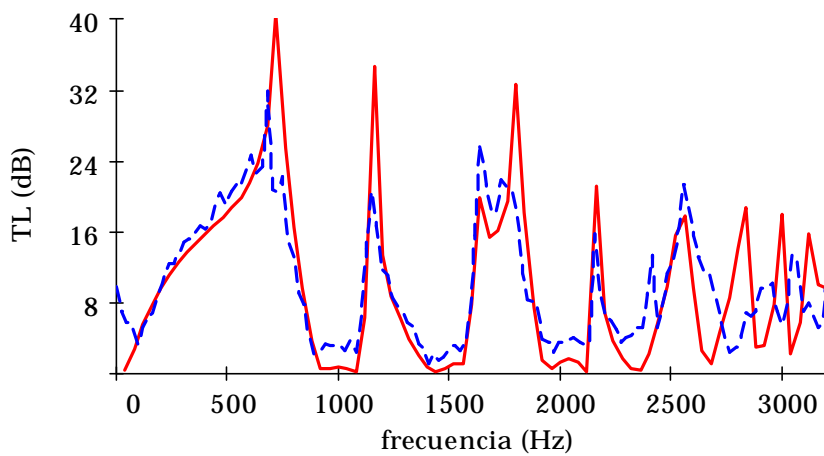


Figura 30. TL para el silenciador ROE1. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

3.7. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado el comportamiento acústico tridimensional de conductos de sección constante, como los rectangulares y circulares, ampliamente utilizados en sistemas de escape. Esto ha servido como punto de partida del estudio de sistemas más complejos como son los silenciadores de tipo reactivo.

Se han presentado diferentes métodos para el estudio de geometrías de silenciadores de diferente complejidad. Se ha combinado el método de ajuste modal con el método directo y con el de subestructuración para la obtención de los modos transversales. El método directo no es sistemático y puede presentar problemas de convergencia o “saltos” de ceros del sistema, mientras que el método de subestructuración es un método de planteamiento sistemático que puede resolverse con métodos estándar de provada convergencia.

Se han aplicado los diferentes métodos a varios silenciadores y se han presentado las diferencias de evaluar los modos transversales de las secciones de manera analítica (en forma de integrales de funciones conocidas) o a través del método de los elementos finitos, simplificándose la obtención de las integrales necesarias al quedar como producto de las matrices obtenidas numéricamente.

Finalmente se analizó la correspondencia de los modelos teóricos con resultados experimentales, observando que para determinadas geometrías es necesario llevar a cabo correcciones del modelo de impedancia de perforado debido a los espesores empleados experimentalmente.

Capítulo 4. Caracterización experimental de materiales absorbentes y elementos perforados

4.1. Introducción

Existen diferentes métodos para llevar a cabo la caracterización experimental de los materiales absorbentes. Los que se exponen a continuación se basan en el modelo macroscópico del comportamiento de los materiales [45], es decir, consideran que sólo una onda de compresión se propaga y que el material puede modelarse a través de dos parámetros, impedancia característica Z_a y número de onda \tilde{k}_a . Este modelo de caracterización es apropiado para materiales cuya parte sólida presenta alta rigidez, o para materiales de tipo fibroso, como los utilizados en esta Tesis. Este modelo macroscópico ya ha sido utilizado satisfactoriamente por otros autores [40][66].

En este capítulo se evalúan diversos métodos para la obtención de los parámetros acústicos que modelan los materiales absorbentes como parte integrante de los silenciadores de escape. No se tiene en cuenta el flujo medio, dado que el banco de ensayos del que se dispone no permite generarlo y no podrían contratarse los resultados teóricos. La mayoría de los métodos encontrados en la bibliografía caracterizan el material en función de la impedancia característica Z_a y el número de onda \tilde{k}_a , y estos parámetros serán los utilizados en esta Tesis. Una vez explicados los métodos, se compararán para evaluar el más conveniente en nuestro caso, y con el método seleccionado se caracterizan los diversos materiales absorbentes utilizados.

Durante los ensayos realizados para contrastar los modelos utilizados, se observaron diferencias significativas entre el TL teórico y el experimental en los casos en los que se utilizaron tubos perforados, más importantes cuanto mayor era el espesor. Aunque no es el objeto principal de esta Tesis, se realizaron ensayos de algunas placas perforadas para ajustar el modelo de Sullivan [74][75].

4.2. Caracterización de material absorbente

En este apartado se explica la base teórica de diferentes métodos de caracterización de material encontrados en la bibliografía. Se empieza exponiendo el método propuesto por la norma UNE-EN ISO 10534-2 para obtener la impedancia superficial de una muestra, medida necesaria para llevar al cabo el primero de los métodos explicados. A continuación se presentan varios métodos para caracterizar el material absorbente, en concreto el método de las dos cavidades [77], el de las dos fuentes [77] y finalmente el método de la matriz de transferencia [72].

4.2.1. Impedancia superficial de una muestra según la norma UNE-EN ISO 10534-2

El método que propone la norma UNE-EN ISO 10534-2 se aplica a la determinación del coeficiente de absorción acústica con incidencia normal de la señal. También puede utilizarse, y este será nuestro caso, para obtener la impedancia acústica superficial.

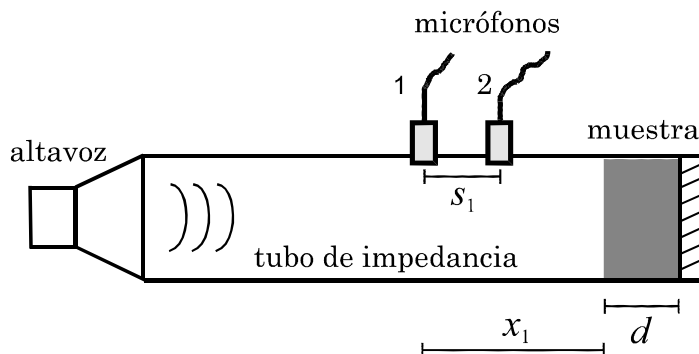


Figura 31. Esquema del montaje del ensayo para la obtención de la impedancia superficial según la norma ISO 10534-2.

Se necesita un tubo de impedancia, dos micrófonos y el sistema encargado de generar la señal (un altavoz normalmente). Todos estos elementos se disponen como indica la Figura 33.

La muestra de ensayo se monta al final de un tubo de impedancia, y tras ella se cierra rígidamente. Se generan ondas planas en dicho tubo mediante una fuente sonora situada en el otro extremo. Como en nuestro caso la fuente acústica es un altavoz que genera ruido aleatorio, para garantizar que a la altura del primer micrófono ya tenemos una onda plana las dimensiones del tubo deben ser las adecuadas, es decir, este debe tener suficiente longitud con respecto a sus dimensiones transversales.

Se miden las presiones acústicas en dos posiciones cercanas a la muestra y se determina la función de transferencia acústica compleja. Puesto que se trabaja con generación de ruido aleatorio, la función de transferencia se calcula en función de los espectros de las transformadas de Fourier de la señal registrada directamente en los micrófonos. Se tiene pues

$$H_{12} = \sum_{p=1}^{N_{mean}} \frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (4.1)$$

donde $S_{12} = FTT(P_2) \cdot \overline{FTT(P_1)}$ y $S_{11} = FTT(P_1) \cdot \overline{FTT(P_1)}$ siendo P_1 y P_2 las lecturas de medida de presión en los micrófonos 1 y 2 respectivamente, y donde N_{mean} es el número de medidas adquiridas que se promedian.

Se calcula el coeficiente de reflexión del material como

$$r = \frac{H_{12} - H_I}{H_R - H_{12}} e^{2jk_0s_1} \quad (4.2)$$

donde $H_I = e^{-jk_0s_1}$ es la función de transferencia para la onda incidente, $H_R = e^{jk_0s_1}$ la función de transferencia para la onda reflejada, x_1 la distancia entre la muestra y el primer micrófono (ver Figura 33), s_1 la separación entre micrófonos, y k_0 el número de onda dado por

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

Para las frecuencias en las cuales se cumple,

$$e^{jk_0s_1} = e^{-jk_0s_1} \quad (4.3)$$

r resulta indeterminado. Además, según se demuestra en [14], a estas frecuencias se cumple,

$$k_0s_1 = \frac{2p}{l}s_1 = mp \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

de donde, despejando s_1 , se obtiene

$$s_1 = \frac{ml}{2} \quad (4.4)$$

A frecuencias discretas para las cuales la separación entre micrófonos es igual a un múltiplo entero de la mitad de la longitud de onda del sonido λ , no puede ser determinado el coeficiente de reflexión empleando la ecuación (4.2). Con el fin de evitar estos puntos, hasta una frecuencia máxima (f_{\max}), la distancia entre micrófonos se elige de modo que,

$$k_0s_1 = p \quad (4.5)$$

$$\frac{2pf_{\max}}{c_0}s_1 = p \quad (4.6)$$

$$s_1 \leq \frac{c_0}{2f_{\max}} \quad (4.7)$$

La impedancia acústica superficial se puede calcular a partir del coeficiente de reflexión como,

$$\frac{Z}{r_0c_0} = \frac{1+r}{1-r} \quad (4.8)$$

4.2.2. Método de las dos cavidades

El método de las dos cavidades consiste en obtener la impedancia compleja y el número de onda de una muestra de material a través de dos ensayos diferentes siguiendo el esquema de la Figura 33. Cada uno de los ensayos se realiza con una longitud distinta de cavidad tras la muestra.

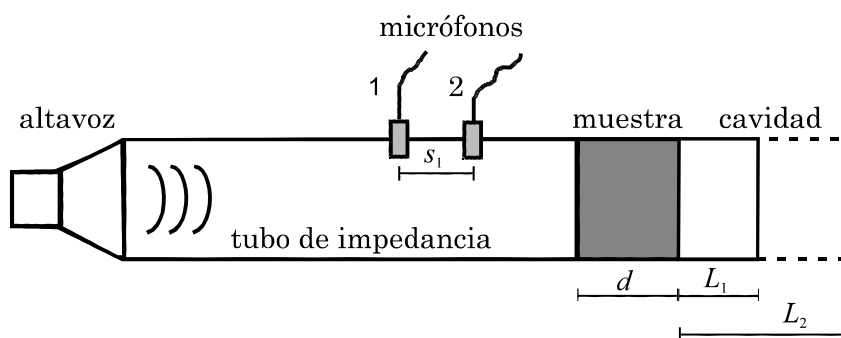


Figura 32. Esquema y foto del montaje del método de las dos cavidades.

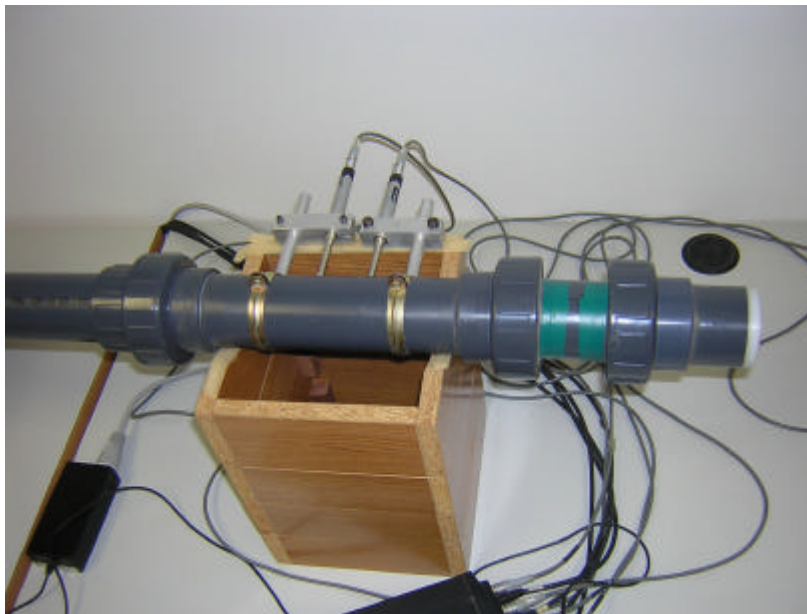


Figura 33. Montaje del método de las dos cavidades. Micrófonos, muestra y una de las cavidades.

Para cada uno de los ensayos se obtiene la impedancia superficial de la muestra siguiendo la norma UNE-EN ISO 10534-2 como se explicó en el apartado 4.2.1. Con las impedancias superficiales medidas para los dos ensayos (Z_1 y Z_2) podemos calcular la impedancia característica del material en ensayo como [77][80]

$$Z_a = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 (Z_{L1} - Z_{L2}) - Z_{L1} Z_{L2} (Z_1 - Z_2)}{(Z_{L1} - Z_{L2}) - (Z_1 - Z_2)}} \quad (4.9)$$

donde $Z_{L1} = -j r_0 c_0 \cot(k_0 L_1)$ (4.10)

$$Z_{L2} = -j r_0 c_0 \cot(k_0 L_2) \quad (4.11)$$

siendo $k_0 = \omega / c_0$, ω la frecuencia angular y c_0 la velocidad del sonido en el aire. Con la impedancia característica podemos obtener el número de onda complejo del material como

$$\tilde{k}_a = \frac{1}{2jd} \ln \left[\frac{(Z_1 + Z_a)(Z_{L1} - Z_a)}{(Z_1 - Z_a)(Z_{L1} + Z_a)} \right] \quad (4.12)$$

y la velocidad del sonido compleja y la densidad como

$$\tilde{c}_a = \frac{\omega}{\tilde{k}_a} \quad \tilde{r}_a = \frac{Z_a}{\tilde{c}_a} \quad (4.13)$$

4.2.3. Método de las dos fuentes

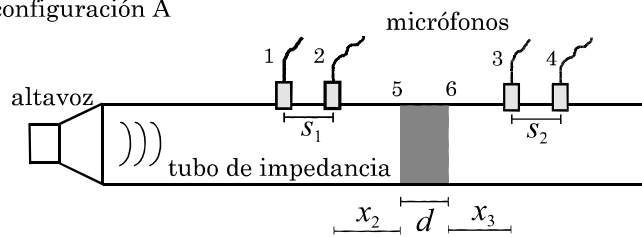
El método de las dos fuentes [77] está basado en la matriz de transferencia, y consiste en obtener la impedancia compleja y el número de onda de una muestra de material a través de dos ensayos diferentes siguiendo el esquema de la Figura 35. Cada uno de los ensayos se diferencia en la posición de la fuente sonora, en nuestro caso el altavoz.

La matriz de transferencia entre los micrófonos 1 y 2 viene dada por

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 s_1) & j r_0 c_0 \sin(k_0 s_1) \\ \frac{j \sin(k_0 s_1)}{r_0 c_0} & \cos(k_0 s_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

donde P_1 , U_1 y P_2 , U_2 son las presiones y velocidades de la onda acústica en los micrófonos 1 y 2 respectivamente, y donde s_1 es la distancia de separación entre los mismos.

configuración A



configuración B

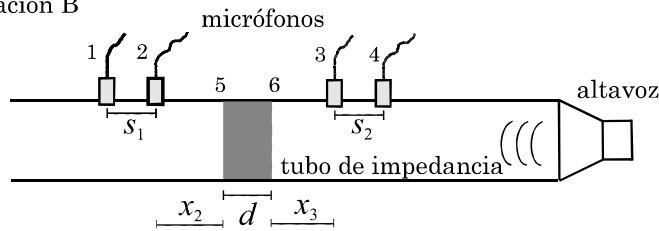


Figura 34. Esquema del montaje del método de las dos fuentes.



Figura 35. Montaje experimental del método de las dos fuentes. Micrófonos, muestra y salida anecoica.

Despejando obtenemos

$$U_2 = \frac{P_1 - \cos(k_0 s_1) P_2}{j r_0 c_0 \sin(k_0 s_1)} \quad (4.15)$$

Igualmente la matriz de transferencia entre los micrófonos 3 y 4 viene dada por

$$\begin{bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 s_2) & j r_0 c_0 \sin(k_0 s_2) \\ \frac{j \sin(k_0 s_2)}{r_0 c_0} & \cos(k_0 s_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

de donde se deduce que

$$U_3 = \frac{j \sin(k_0 s_2)}{r_0 c_0} P_3 + \cos(k_0 s_2) \frac{P_4 - \cos(k_0 s_2) P_3}{j r_0 c_0 \sin(k_0 s_2)} \quad (4.17)$$

La matriz de transferencia entre los micrófonos 2 y 3 se define como

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

donde U_2 y U_3 vienen dadas por las ecuaciones (4.15) y (4.17).

Para cada uno de los ensayos tendremos

$$\begin{bmatrix} P_2^A \\ U_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3^A \\ U_3^A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_2^B \\ U_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3^B \\ U_3^B \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (A_{23} , B_{23} , C_{23} y D_{23}) se puede resolver obteniendo la matriz de transferencia entre los micrófonos 2 y 3 como

$$A_{23} = \frac{(H_{32}^A H_{34}^B - H_{32}^B H_{34}^A) + \cos(k_0 s_1)(H_{32}^B - H_{32}^A)}{(H_{34}^B - H_{34}^A)} \quad (4.20)$$

$$B_{23} = \frac{j\tilde{r}\tilde{c} \operatorname{sen}(k_0 s_2)(H_{32}^A - H_{32}^B)}{(H_{34}^A - H_{34}^B)} \quad (4.21)$$

$$C_{23} = \frac{(H_{31}^A - \cos(k_0 s_1)H_{32}^A)(H_{34}^B - \cos(k_0 s_2)) - (H_{31}^B - \cos(k_0 s_1)H_{32}^B)(H_{34}^A - \cos(k_0 s_2))}{j\tilde{r}\tilde{c} \operatorname{sen}(k_0 s_1)(H_{34}^B - H_{34}^A)} \quad (4.22)$$

$$D_{23} = \frac{\operatorname{sen}(k_0 s_2) \left[(H_{31}^A - H_{31}^B) + \cos(k_0 s_1)(H_{32}^B - H_{32}^A) \right]}{\operatorname{sen}(k_0 s_1)(H_{34}^B - H_{34}^A)} \quad (4.23)$$

siendo $k_0 = \omega / c_0$, s_1 y s_2 las distancias entre los micrófonos 1-2 y 3-4 respectivamente, y $H_{31}^A = P_1 / P_3$, $H_{32}^A = P_2 / P_3$ y $H_{34}^A = P_4 / P_3$ las funciones de transferencia para la configuración A (nomenclatura análoga para configuración B cambiando el superíndice A por B). Estas ecuaciones se obtienen según se propone en [77] pero no coinciden con las expuestas allí, puesto que se han detectado algunos errores.

Estas fórmulas se deducen para el caso de trabajar con una fuente sonora de tipo armónico. Si se trabaja con fuente aleatoria (como en nuestro caso) basta con calcular la función de transferencia a través de los espectros cruzados y autoespectros de la señal registrada, es decir, $H_{ij}^A = S_{ij}^A / S_{ii}^A$.

Podemos escribir esta matriz de transferencia en función de sus parciales entre los puntos 2-5, 5-6 y 6-3 como

$$\begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{25} & B_{25} \\ C_{25} & D_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{63} & B_{63} \\ C_{63} & D_{63} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

donde

$$\begin{bmatrix} A_{25} & B_{25} \\ C_{25} & D_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 x_2) & jZ_0 \sin(k_0 x_2) \\ \frac{j \sin(k_0 x_2)}{Z_0} & \cos(k_0 x_2) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} A_{63} & B_{63} \\ C_{63} & D_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 x_3) & jZ_0 \sin(k_0 x_3) \\ \frac{j \sin(k_0 x_3)}{Z_0} & \cos(k_0 x_3) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Podemos despejar obteniendo

$$\begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{25} & B_{25} \\ C_{25} & D_{25} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{23} & B_{23} \\ C_{23} & D_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{63} & B_{63} \\ C_{63} & D_{63} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.27)$$

Sabiendo que para un material dado la matriz de transferencia en función de sus características se define como

$$\begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{k}_a d) & jZ_a \sin(\tilde{k}_a d) \\ \frac{j \sin(\tilde{k}_a d)}{Z_a} & \cos(\tilde{k}_a d) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

donde d es el espesor de la muestra, \tilde{k}_a el número de onda de la misma, y Z_a su impedancia acústica, se puede obtener \tilde{k}_a y Z_a del material en ensayo despejando, lo que nos lleva a

$$\tilde{k}_a = \frac{\arccos A_{56}}{d} \quad (4.29)$$

$$Z_a = \sqrt{\frac{B_{56}}{C_{56}}} \quad (4.30)$$

Al igual que en los casos anteriores la separación entre micrófonos está limitada en función de la frecuencia máxima de estudio, debiéndose cumplir para el caso sin flujo medio que

$$s_1 \leq \frac{c_0}{2f_{\max}}$$

Suponiendo simetría, las configuraciones A y B serían iguales salvo en los nombres de los micrófonos. Así pues, si el material cumple esta condición, el método podría llevarse a cabo con un solo ensayo, considerando para la configuración B los mismos resultados de la configuración A pero intercambiando los registros de los micrófonos 1-4 y 2-3 respectivamente.

4.2.4. Método de la matriz de transferencia

Partimos de un ensayo según los elementos mostrados en la siguiente figura

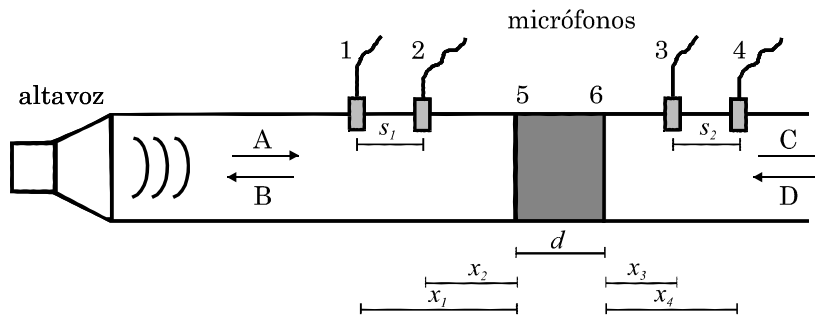


Figura 36. Esquema de ensayo según el método de la matriz de transferencia.

El ensayo se desarrolla de la siguiente manera [72]: un altavoz genera ruido en el tubo de propagación, este pasa por la muestra y sigue hacia el tubo de salida; dos micrófonos antes de la muestra y dos después, recogen datos de la presión sonora en dichos puntos (P_1 , P_2 , P_3 y P_4). Podemos escribir las presiones en esos puntos como

$$P_1 = (Ae^{-jk_0x_1} + Be^{jk_0x_1})e^{j\omega t} \quad (4.31)$$

$$P_2 = (Ae^{-jk_0x_2} + Be^{jk_0x_2})e^{j\omega t} \quad (4.32)$$

$$P_3 = (Ce^{-jk_0x_3} + De^{jk_0x_3})e^{j\omega t} \quad (4.33)$$

$$P_4 = \left(C e^{-jk_0 x_4} + D e^{jk_0 x_4} \right) e^{j\omega t} \quad (4.34)$$

donde k_0 representa el número de onda en el fluido ambiente, x_1 , x_2 , x_3 y x_4 las posiciones de los micrófonos y ω la frecuencia de propagación de las ondas. Resolviendo para los coeficientes A , B , C y D que determinan las ondas progresiva y regresiva aguas abajo y arriba de la muestra (ver Figura 36), obtenemos

$$A = \frac{j \left(P_1 e^{jk_0 x_2} - P_2 e^{jk_0 x_1} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(k_0 (x_1 - x_2) \right)} \quad (4.35)$$

$$B = \frac{j \left(P_2 e^{-jk_0 x_1} - P_1 e^{jk_0 x_2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(k_0 (x_1 - x_2) \right)} \quad (4.36)$$

$$C = \frac{j \left(P_3 e^{jk_0 x_4} - P_4 e^{jk_0 x_3} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(k_0 (x_3 - x_4) \right)} \quad (4.37)$$

$$D = \frac{j \left(P_4 e^{-jk_0 x_3} - P_3 e^{jk_0 x_4} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(k_0 (x_3 - x_4) \right)} \quad (4.38)$$

La matriz de transferencia entre las secciones 5 y 6 (ver Figura 36) se define como

$$\begin{Bmatrix} P \\ U \end{Bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ U \end{Bmatrix}_{x=d} \quad (4.39)$$

La presión y velocidad en las superficies de la muestra se puede expresar fácilmente mediante las ondas progresiva y regresiva antes obtenidas. Así tendríamos

$$P|_{x=0} = A + B \quad (4.40)$$

$$U|_{x=0} = \frac{A - B}{\mathbf{r}_0 c_0} \quad (4.41)$$

$$P|_{x=d} = C e^{-jk_0 d} + D e^{jk_0 d} \quad (4.42)$$

$$U|_{x=d} = \frac{C e^{-jk_0 d} - D e^{jk_0 d}}{\mathbf{r}_0 c_0} \quad (4.43)$$

donde \mathbf{r}_0 es la densidad del aire, c_0 velocidad del sonido en aire, y donde d es el espesor de la muestra en ensayo.

Para obtener la matriz de transferencia (4 incógnitas) necesitamos dos ecuaciones adicionales a las dos que proporciona la ecuación (4.39). Podemos hacer un nuevo ensayo, obteniendo dos relaciones nuevas, o bien suponer reciprocidad y simetría del sistema, lo que es válido ya que no estamos considerando flujo medio. Suponer esto último implica

$$A_{56} = D_{56} \quad (4.44)$$

$$A_{56} D_{56} - B_{56} C_{56} = 1 \quad (4.45)$$

Con estas nuevas ecuaciones y las de (4.39) obtenemos los elementos de la matriz de transferencia como

$$A_{56} = \frac{P|_{x=d} \cdot V|_{x=d} + P|_{x=0} \cdot V|_{x=0}}{P|_{x=0} \cdot V|_{x=d} + P|_{x=d} \cdot V|_{x=0}} \quad (4.46)$$

$$B_{56} = \frac{P|_{x=0}^2 - P|_{x=d}^2}{P|_{x=0} \cdot V|_{x=d} + P|_{x=d} \cdot V|_{x=0}} \quad (4.47)$$

$$C_{56} = \frac{V|_{x=0}^2 - V|_{x=d}^2}{P|_{x=0} \cdot V|_{x=d} + P|_{x=d} \cdot V|_{x=0}} \quad (4.48)$$

$$D_{56} = \frac{P|_{x=d} \cdot V|_{x=d} + P|_{x=0} \cdot V|_{x=0}}{P|_{x=0} \cdot V|_{x=d} + P|_{x=d} \cdot V|_{x=0}} \quad (4.49)$$

Para un material homogéneo e isótropo se conoce que su matriz de transferencia viene dada en función de sus propiedades como

$$\begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{k}_a d & jZ_a \sin \tilde{k}_a d \\ \frac{j \sin \tilde{k}_a d}{Z_a} & \cos \tilde{k}_a d \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

de donde podemos obtener \tilde{k}_a y Z_a en función de la matriz de transferencia antes calculada como

$$\tilde{k}_a = \frac{\arccos A_{56}}{d} \quad (4.51)$$

$$Z_a = \tilde{\mathbf{r}}_a \tilde{\mathbf{c}}_a = \sqrt{\frac{B_{56}}{C_{56}}} \quad (4.52)$$

Aunque el planteamiento desarrollado se ha hecho para el caso de ondas armónicas, trabajando con las amplitudes de las mismas, se puede generalizar para el caso de excitación aleatoria aplicando la transformada de Fourier de la excitación para transformarla en sumatorio de ondas armónicas.

4.2.5. Corrección de los micrófonos

Para reducir errores debidos al propio sistema de medida, se lleva a cabo la calibración de los micrófonos. Seybert y Ross [71] aconsejan realizarla colocándolos enrasados en un mismo plano (ver Figura 37) ubicado en el extremo del tubo de propagación, de manera que queden bajo una misma onda de presión proveniente de la fuente de excitación.



Figura 37. Pieza del montaje de calibración de los micrófonos para que queden en un mismo plano.

Dadas las dimensiones del tubo de propagación, la onda que llega a los micrófonos es una onda plana, y por tanto, la medida de los mismos debe

tener la misma amplitud y desfase. Las diferencias existentes entre los registros recogidos se utilizan para realizar la calibración relativa con respecto a uno de los micrófonos (elegido de forma arbitraria), en nuestro caso el micrófono 1.

La función de transferencia entre la medida de los micrófonos 1 y 2 al excitar con ruido aleatorio, se define como

$$H_{12}(f) = \sum_{p=1}^{N_{mean}} \frac{S_{12}(f)}{S_{11}(f)} \quad (4.53)$$

donde $S_{12}(f)$ y $S_{11}(f)$ son el espectro cruzado entre los micrófonos 1 y 2 y el auto espectro del micrófono 1 respectivamente.

$H_{12}(f)$ es en general complejo, por tanto, la ganancia entre las medidas de los micrófonos y el desfase son respectivamente

$$|H_{12}(f)|$$

$$\mathbf{f}_{12}(f) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[H_{12}(f)]}{\text{Re}[H_{12}(f)]}\right)$$

Los espectros estimados a partir de los registros temporales de la presión realizados durante el ensayo, se pueden corregir empleando la respuesta en frecuencia determinada durante el ensayo de calibración. Se tiene

$$S_{22}(f) = \frac{S_{22}^{nc}(f)}{|H_{12}(f)|^2} \quad (4.54)$$

$$S_{12}(f) = \frac{S_{12}^{nc}(f)}{H_{12}(f)} \quad (4.55)$$

donde el superíndice nc se refiere a los registros no corregidos. Nótese que como el micrófono 1 ha sido elegido como referencia, $S_{11}(f)$ no requiere ser corregido.

Con los micrófonos 3 y 4 se opera de manera similar para su calibración a como se ha desarrollado para el micrófono 2.

4.2.6. Comparación de los métodos

Los diferentes métodos propuestos hasta ahora para obtener las características de un material absorbente son comparados en este apartado para evaluar cual de ellos es más conveniente en los casos que nos interesan. Para ello se han seleccionado varias densidades de material y varios espesores de muestra. En la tabla siguiente se recogen las combinaciones de las mismas que se han tenido en cuenta.

Ensayo	Densidad (g/l)	Espesor (cm)
1	44,318	2,5
2	70,909	2,5
3	88,636	2,5
4	44,318	5
5	70,909	5
6	88,636	5
7	44,318	6,9
8	70,909	6,9
9	88,636	6,9

Los resultados obtenidos para el número de onda \tilde{k}_a y la impedancia característica Z_a para el ensayo P2 (ver tabla) con cada método se comparan a continuación.

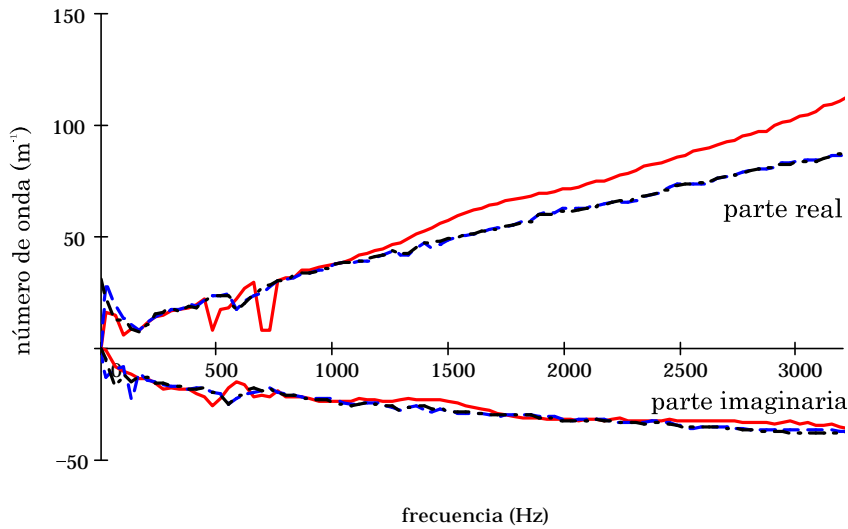


Figura 38. Comparación del número de onda para los diferentes métodos propuestos. Lana de vidrio con una densidad de 44 g/l y un espesor de de 5 cm. - método de las dos cavidades, - - método de las dos fuentes, - • - método de la matriz de transferencia.

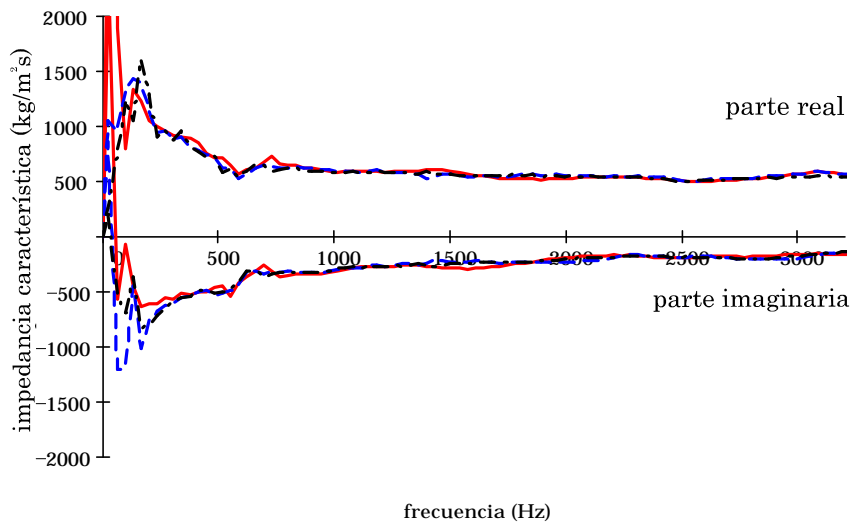


Figura 39. Comparación de la impedancia característica para los diferentes métodos propuestos. Material con una densidad de 44 g/l y un espesor de de 5 cm. - método de las dos cavidades, - - método de las dos fuentes, - • - método de la matriz de transferencia.

Como puede observarse los tres métodos dan resultados similares. Se observa una clara discrepancia del método de las dos cavidades con respecto a los otros dos en cuanto a la pendiente del número de onda.

Se analizó el error asociado a cada método tomando como referencia la media de los tres. Así pues, para cada método se toma como error global la media aritmética de los errores relativos para cada una de las frecuencias. En función del error obtenido los métodos de las dos fuentes y de la matriz de transferencia son muy similares, teniendo el primero un error ligeramente inferior, mientras que el método de las dos cavidades presenta un error mayor.

Influencia de la densidad

Observemos ahora como se comporta cada método en función de diferentes densidades de material. En las siguientes figuras se observa para cada método por separado los resultados obtenidos de un mismo espesor de muestra con densidades diferentes de la misma.

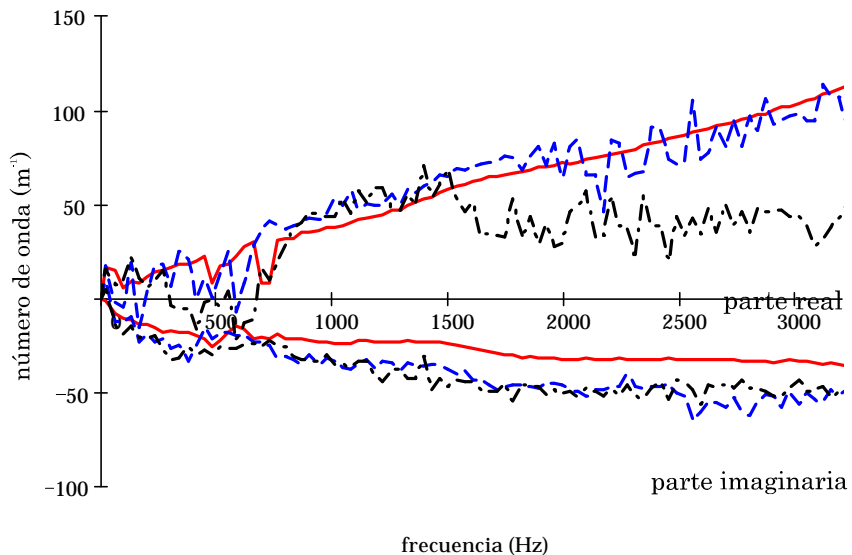


Figura 40. Comparación de la influencia de la densidad en el número de onda para el método de las dos cavidades. - con 44 g/l, - - con 71 g/l, y - • - 88 g/l.

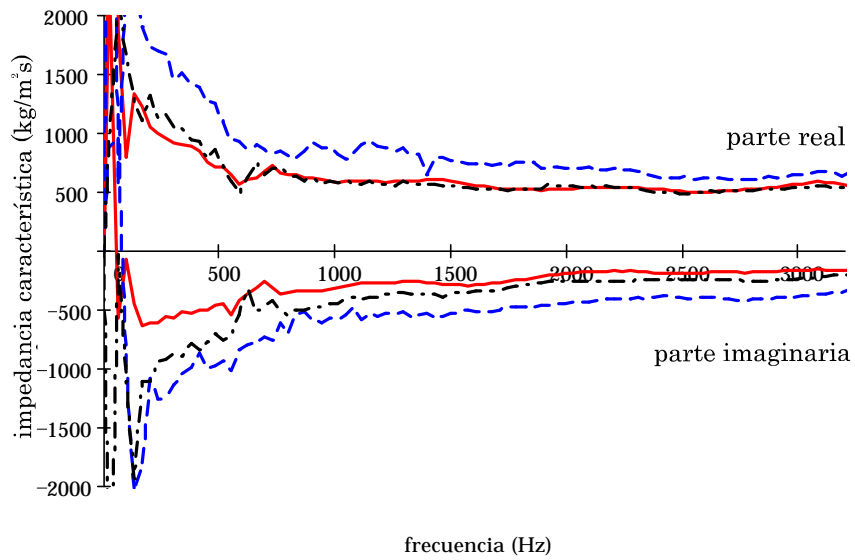


Figura 41. Comparación de la influencia de la densidad en impedancia característica para el método de las dos cavidades. - con 44 g/l, - - con 71 g/l, y - • - 88 g/l.

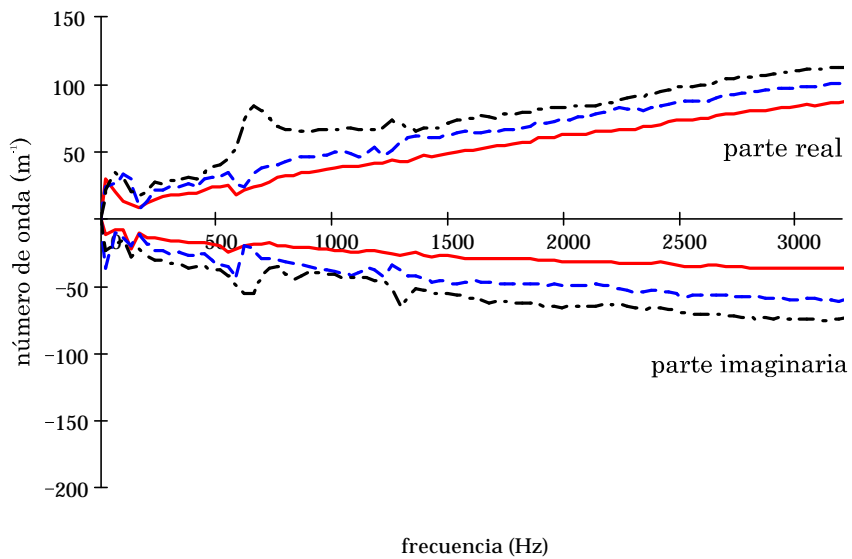


Figura 42. Comparación de la influencia del número de onda para el método de las dos fuentes. - con 44 g/l, - - con 71 g/l, y - • - 88 g/l.

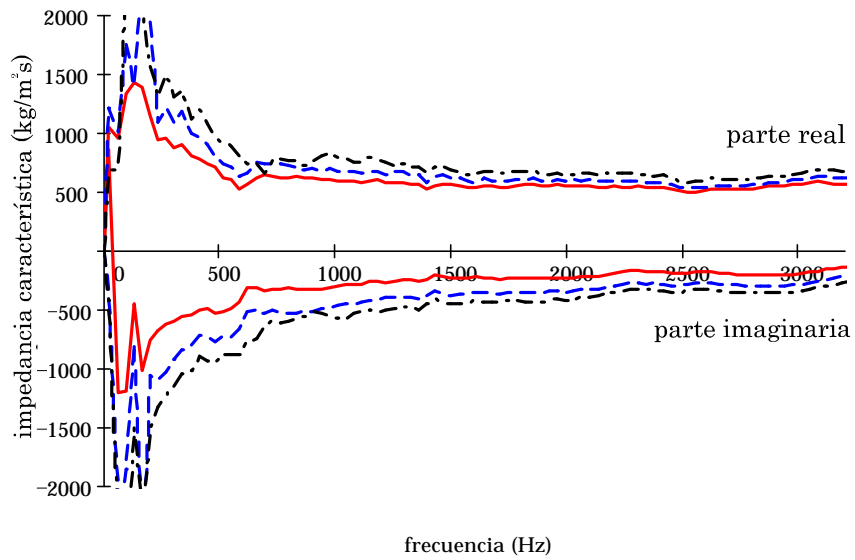


Figura 43. Comparación de la influencia de la impedancia característica para el método de las dos fuentes. - con 44 g/l, - - con 71 g/l, y - • - 88 g/l.

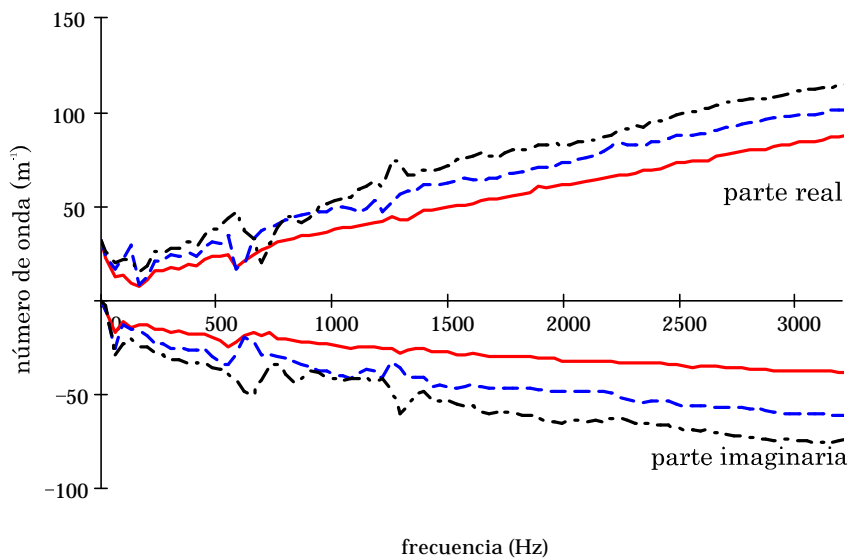


Figura 44. Comparación de la influencia del número de onda para el método de la función de transferencia. - con 44 g/l, - - con 71 g/l, y - • - 88 g/l.

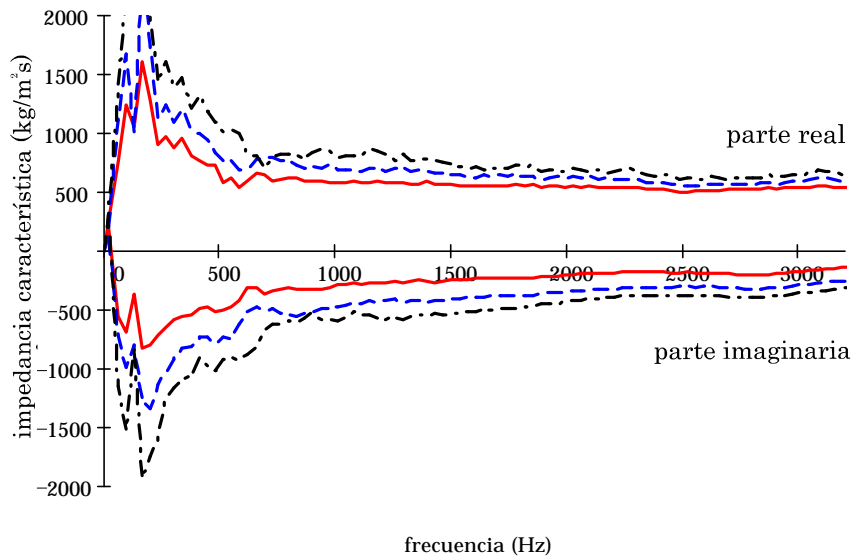


Figura 45. Comparación de la influencia de la impedancia característica para el método de la función de transferencia. - con 44 g/l, - - con 71 g/l, y - • - 88 g/l.

En general, a mayor densidad del material mayores fluctuaciones aparecen en los resultados. Estas fluctuaciones son mucho más importantes en el método de las dos cavidades con resultados que ni siquiera siguen la tendencia esperada para densidades en torno a los 89 g/l.

Los métodos presentados son poco precisos a baja frecuencia y por ello, fluctúan los resultados en ese rango. Esto es debido a que la longitud de onda es muy grande, y las diferencias de presión entre micrófonos son menores.

Influencia del espesor

Centrémonos ahora en como se comporta cada método en función de diferentes espesores de muestra.

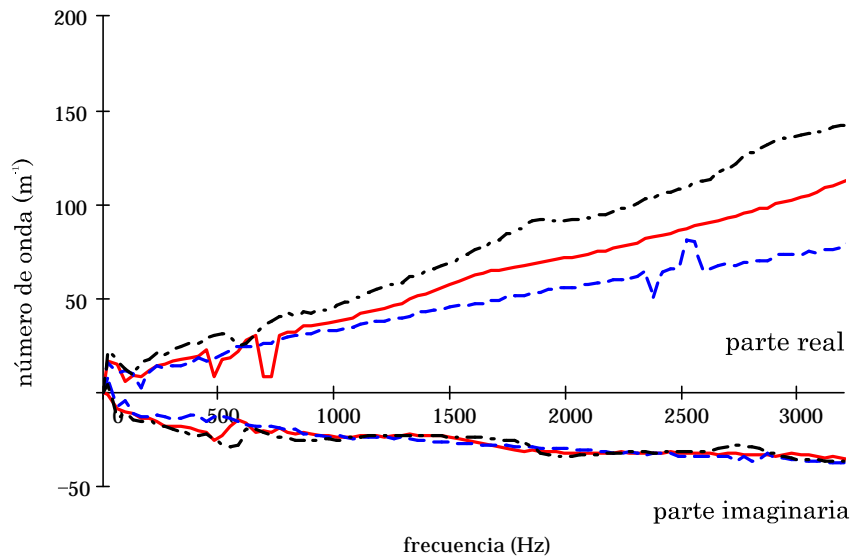


Figura 46. Resultados del número de onda para el método de las dos cavidades con una densidad de material de 44 g/l. - para 2,5 cm de espesor de muestra, - - para 5 cm de espesor, y - • - para 6,9 cm.

El método de las dos cavidades presenta una clara influencia del espesor considerado, a mayor espesor menor rizado en la impedancia característica (ver Figura 47). Los otros dos métodos estudiados se comportan de manera similar ante una variación de espesor. Aún así, el espesor no debe ser excesivo para evitar que la atenuación esté por encima de cierto umbral. Si la señal se atenúa demasiado la onda que atraviesa la muestra es muy débil y no puede medirse adecuadamente por los micrófonos aguas abajo.

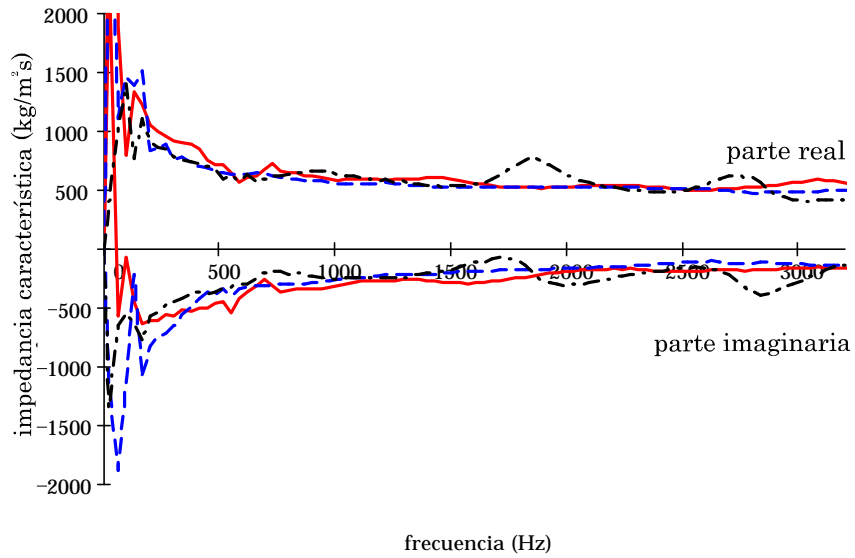


Figura 47. Resultados de la impedancia característica para el método de las dos cavidades con una densidad de material de 44 g/l. - para 2,5 cm de espesor de muestra, - - para 5 cm de espesor, y - · - para 6,9 cm.

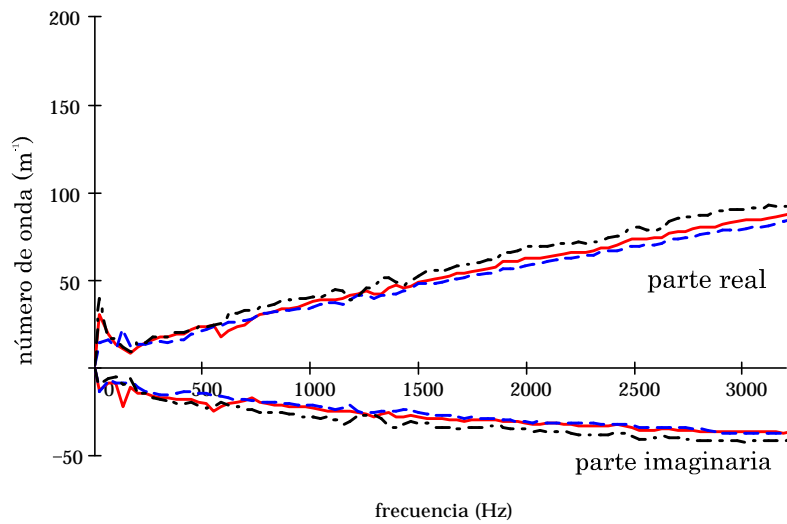


Figura 48. Resultados del número de onda para el método de las dos fuentes con una densidad de material de 44 g/l. - para 2,5 cm de espesor de muestra, - - para 5 cm de espesor, y - · - para 6,9 cm.

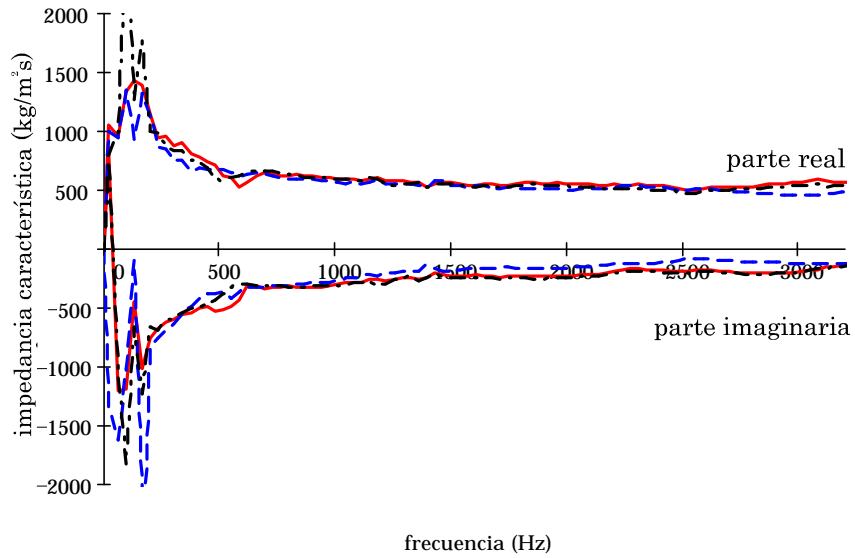


Figura 49. Resultados de la impedancia característica para el método de las dos fuentes con una densidad de material de 44 g/l. - para 2,5 cm de espesor de muestra, - - para 5 cm de espesor, y - · - para 6,9 cm.

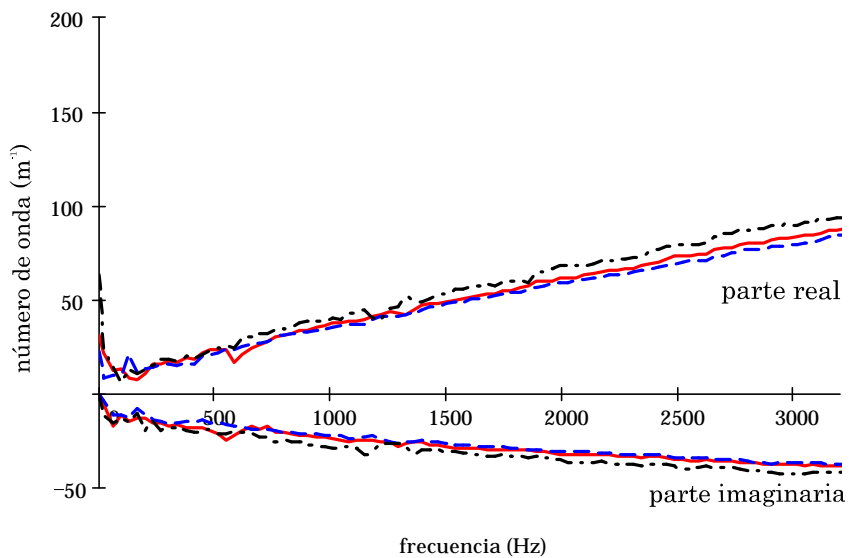


Figura 50. Resultados del número de onda para el método de la matriz de transferencia con una densidad de material de 44 g/l. - para 2,5 cm de espesor de muestra, - - para 5 cm de espesor, y - · - para 6,9 cm.

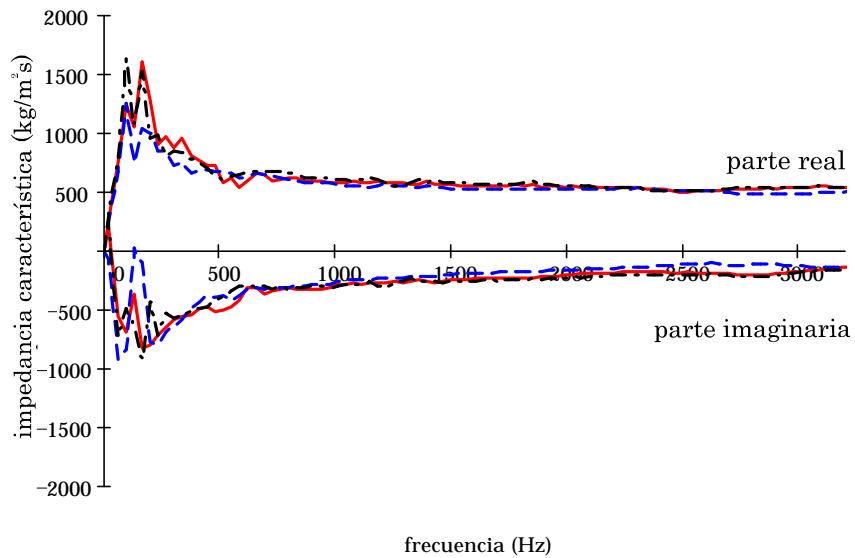


Figura 51. Resultados de la impedancia característica para el método de la matriz de transferencia con una densidad de material de 44 g/l. - para 2,5 cm de espesor de muestra, - - para 5 cm de espesor, y - • - para 6,9 cm.

Influencia de la salida

En el método de las dos cavidades se impone una determinada condición de contorno a la salida, pero en el método de las dos fuentes y en el de la función de transferencia no se impone ningún tipo de condición específica tras los micrófonos, aguas abajo de la muestra. De manera que se probó la influencia que esta podría tener. A continuación vemos el resultado para la misma muestra de ensayo con salida cerrada, libre y anecoica para cada uno de estos dos métodos.

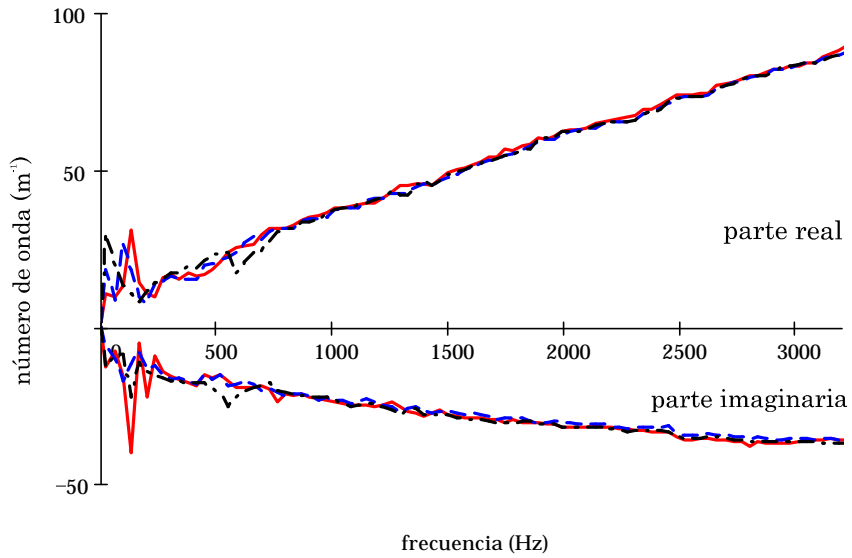


Figura 52. Resultados del número de onda para el método de las dos fuentes con una densidad de material de 44 g/l y un espesor de 5 cm. - con salida cerrada, - - con salida libre, y - · - con salida anecoica.

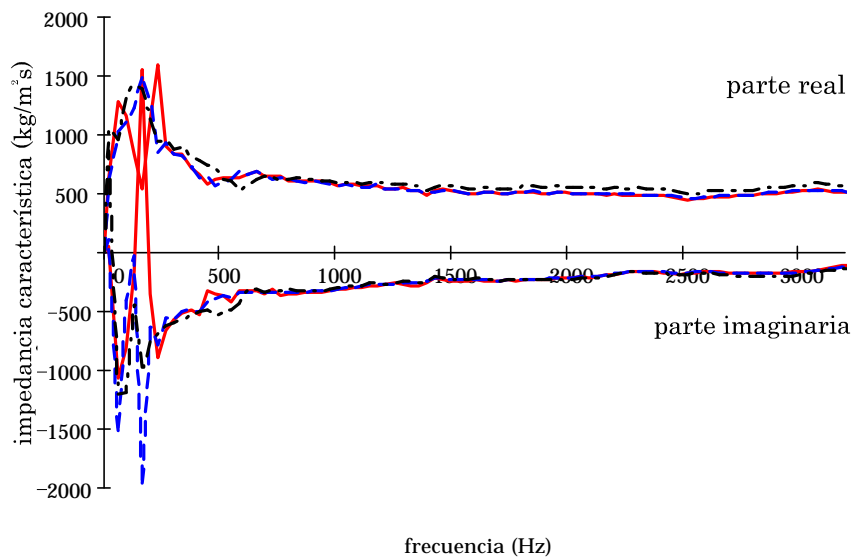


Figura 53. Resultados de la impedancia característica para el método de las dos fuentes con una densidad de material de 44 g/l y un espesor de 5 cm. - con salida cerrada, - - con salida libre, y - · - con salida anecoica.

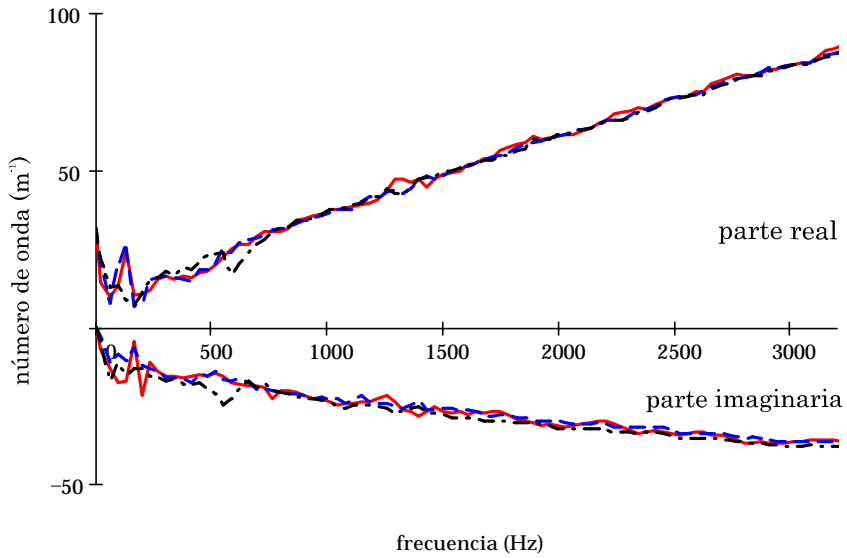


Figura 54. Resultados del número de onda para el método de función de transferencia con una densidad de material de 44 g/l y un espesor de 5 cm. - con salida cerrada, - - con salida libre, y - · - con salida anecoica.

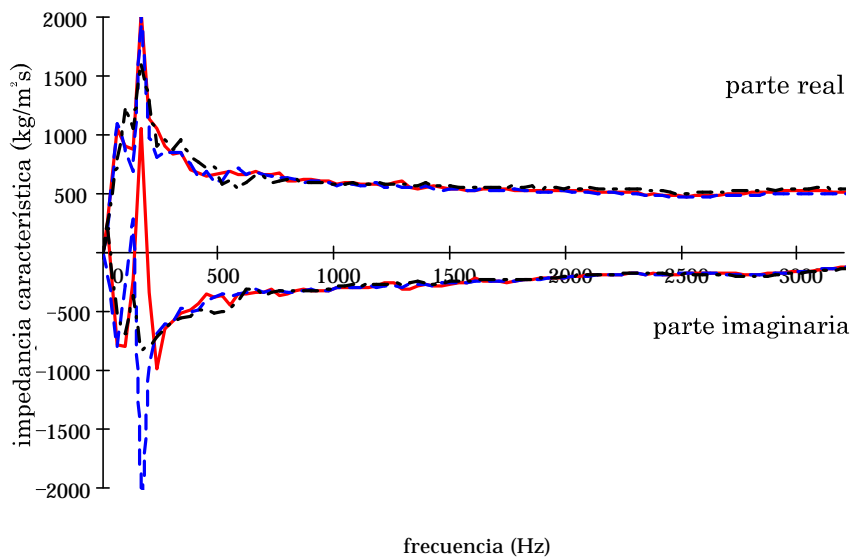


Figura 55. Resultados de la impedancia característica para el método de la función de transferencia con una densidad de material de 44 g/l y un espesor de 5 cm. - con salida cerrada, - - con salida libre, y - · - con salida anecoica.

Se observa poca influencia del tipo de salida, pero con salida anecoica los resultados son ligeramente menos dispersos a baja frecuencia. Esta salida tiene el inconveniente de su materialización, que no suele resultar sencilla, pero dado que ya se dispone de ella, será la utilizada en la obtención de las características de los materiales a ensayar.

A la hora de obtener las características de los materiales absorbentes el método de las dos fuentes y el de la matriz de transferencia se muestran similares. Esto es lógico puesto que se basan en un principio similar y la única diferencia es que las ecuaciones utilizadas son diferentes y por tanto la propagación del error en los cálculos también lo es. El método de las dos cavidades, por el contrario, muestra un poco más de variación para ciertos rangos, en especial de densidad. Además, este método restringe las condiciones de contorno a la salida.

Finalmente se ha optado por el método de las dos fuentes, por tener un error relativo con respecto a la media de los tres métodos ligeramente inferior al método de la matriz de transferencia.

4.2.7. Caracterización experimental

Varios autores han llevado a cabo estudios sobre el comportamiento global de silenciadores con materiales absorbentes [52][66][67], pero cabe destacar la aportación de Delany y Bazley [24] para la caracterización del absorbente a través de su impedancia y número de onda complejos, siendo las fórmulas que proponen

$$Z_a = Z_0 \left(\left[1 + a_5 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_6} \right] + j \left[a_7 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_8} \right] \right) \quad (4.56)$$

$$k_a = k_0 \left(\left[1 + a_3 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_4} \right] + j \left[a_1 \left(\frac{f}{\Omega} \right)^{a_2} \right] \right) \quad (4.57)$$

donde $Z_0 = r_0 c_0$ es la impedancia característica y $k_0 = 2\pi f / c_0$ el número de onda en el aire, f la frecuencia en Hz y Ω la resistividad del material en rayl/m.

En nuestro caso se desconoce la resistividad estacionaria del material por lo que se relaciona con la densidad de compactación del mismo. Las curvas de la densidad compleja de cada material absorbente en función de los datos experimentales de Z_a y \tilde{k}_a se calculan como

$$\tilde{r}_a = \frac{Z_a}{\tilde{c}_a} = \frac{Z_a \tilde{k}_a}{W} \quad (4.58)$$

En la bibliografía queda constancia de que se puede relacionar la resistencia al flujo dinámica con la densidad compleja \tilde{r}_a . Para cada una de las densidades de material ensayadas, se supuso una relación lineal en función de la frecuencia y se tomó como resistividad estacionaria Ω^{est} la extrapolación a frecuencia nula. Para obtener la resistividad estática para cualquier densidad de compactación r_c , se ajustó una curva exponencial tipo

$$\Omega^{est} = b_1 r_c^{b_2} \quad (4.59)$$

donde resolviendo por mínimos cuadrados se obtuvieron los coeficientes $b_1=103,315$ y $b_2=1,424$ para la lana de vidrio y $b_1=62,375$ y $b_2=1,355$ para la lana de roca. Los primeros valores de \tilde{r}_a (para bajas frecuencias) no fueron considerados en el ajuste debido a que estos datos experimentales conllevan mucho error.

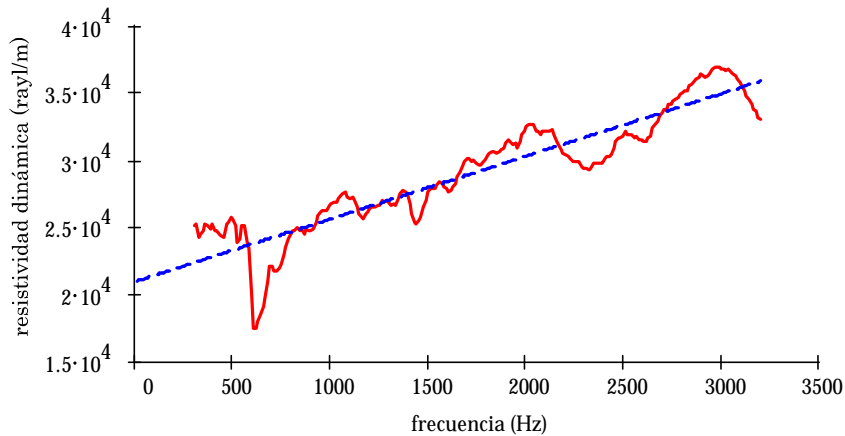


Figura 56. Ajuste lineal de la resistividad dinámica para una muestra de lana de vidrio de densidad 44 g/l. - curva experimental, - - curva ajustada.

En la Figura 56 se muestra una de las estimaciones realizadas para la resistividad estática donde se representa la curva de resistencia al flujo dinámica frente a la frecuencia, y su aproximación lineal. El valor estimado de resistividad a frecuencia nula en este caso es de 20967 rayl/m.

Una vez determinado el método de las dos fuentes como el más apropiado procedemos a obtener las características del material para diferentes condiciones del mismo. Esta información se utiliza para modelar la presencia de dicho material en los silenciadores estudiados mediante los programas de subestructuración desarrollados.

Se estudiaron dos tipos de material diferentes (lana de vidrio y lana de roca proporcionados por la empresa Isover). En la tabla siguiente se muestran las características de los ensayos llevados a cabo.

Ensayo	Material	Densidad (g/l)
1	Lana de vidrio	44,318
2	Lana de vidrio	70,909
3	Lana de vidrio	88,636
4	Lana de roca	44,318
5	Lana de roca	70,909
6	Lana de roca	88,636



Figura 57. Muestras de material absorbente.
Lana de vidrio (izquierda) y lana de roca (derecha).

Las curvas ajustadas para Z_a y \tilde{k}_a que se muestran de la Figura 58 a la Figura 71 y se obtuvieron de las fórmulas de Delany y Bazley [24] sustituyendo la resistividad por su expresión obtenida en función de la

densidad de compactación del material. Los coeficientes que se obtienen para dichas fórmulas son los siguientes

	Lana de vidrio	Lana de roca
a_1	0,227	0,240
a_2	-0,605	-0,513
a_3	-0,194	-0,288
a_4	-0,522	-0,520
a_5	-0,079	-0,157
a_6	-0,586	-0,544
a_7	0,160	0,074
a_8	-0,523	-0,642

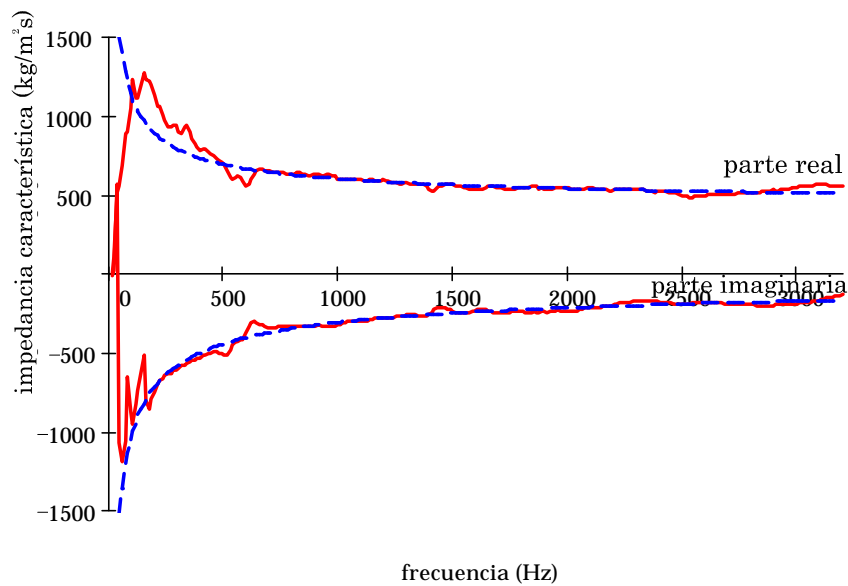


Figura 58. Resultados de la impedancia característica para la lana de vidrio con 44 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

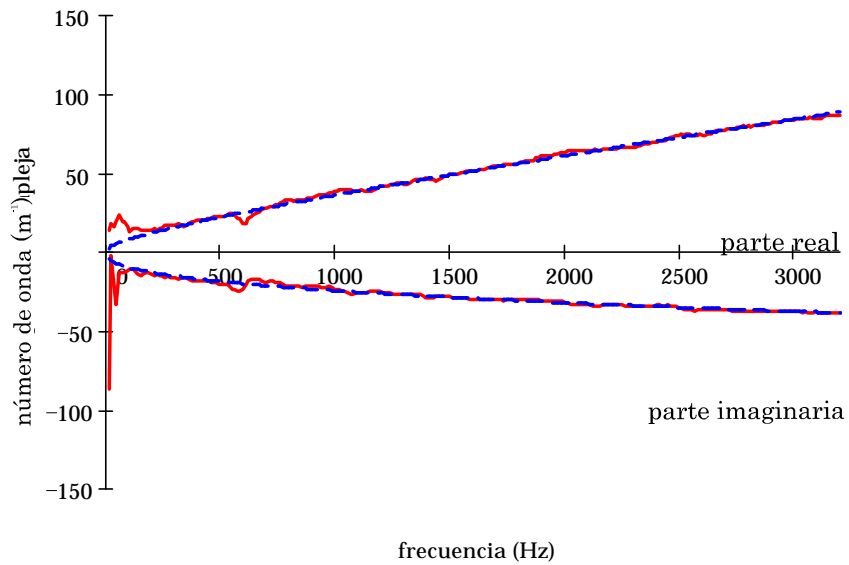


Figura 59. Resultados del número de onda complejo para la lana de vidrio con 44 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

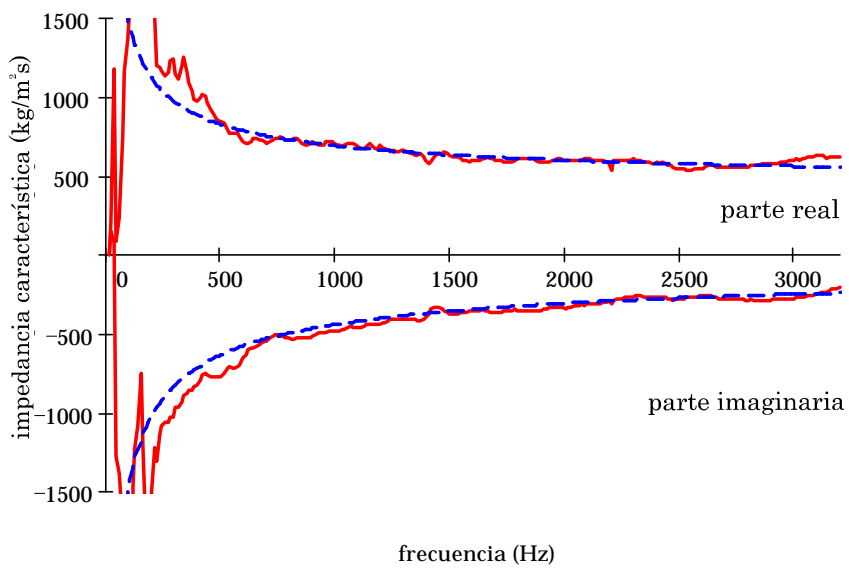


Figura 60. Resultados de la impedancia característica para la lana de vidrio con 71 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

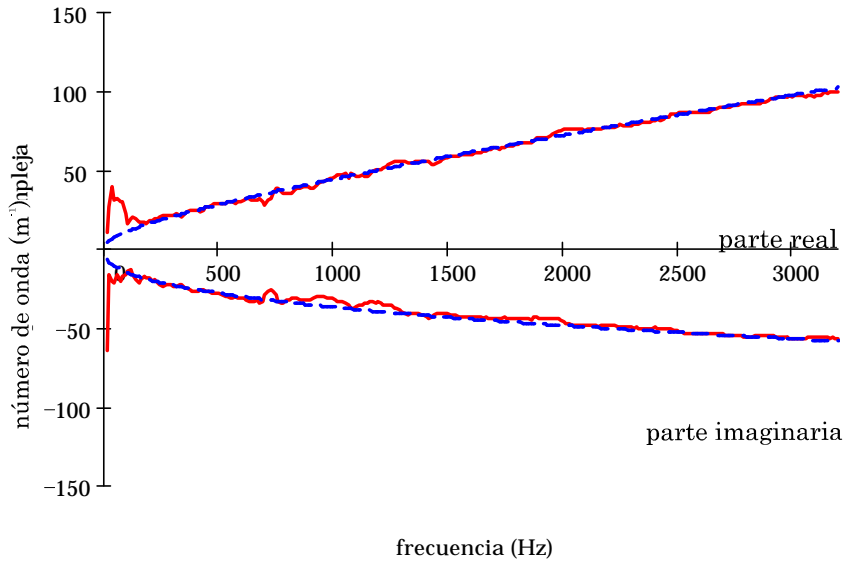


Figura 61. Resultados del número de onda complejo para la lana de vidrio con 71 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

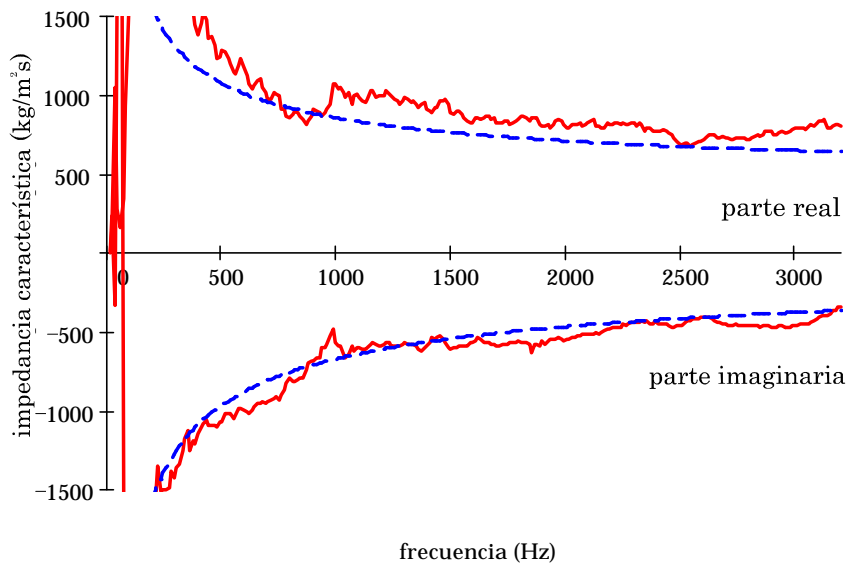


Figura 62. Resultados de la impedancia característica para la lana de vidrio con 125 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

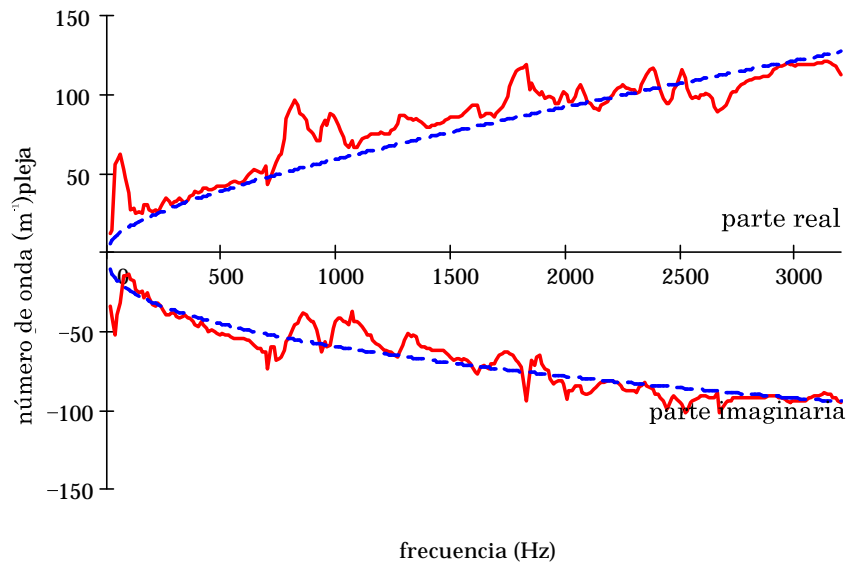


Figura 63. Resultados del número de onda complejo para la lana de vidrio con 125 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

Como se observa de la Figura 58 a la Figura 63 el ajuste es peor a medida que nos alejamos de la densidad de referencia. En estos casos la densidad de referencia es la de 44 g/l con lo que el ajuste a 125 g/l tiene mayor error, sobretodo en la parte imaginaria del número de onda. También es cierto que para los ensayos con 125 g/l la dispersión de los datos es mayor.

En el apartado 4.3 se estudiará como afecta al resultado final del comportamiento de un silenciador el hecho de considerar las curvas experimentales o las ajustadas en el modelado del comportamiento del material absorbente.

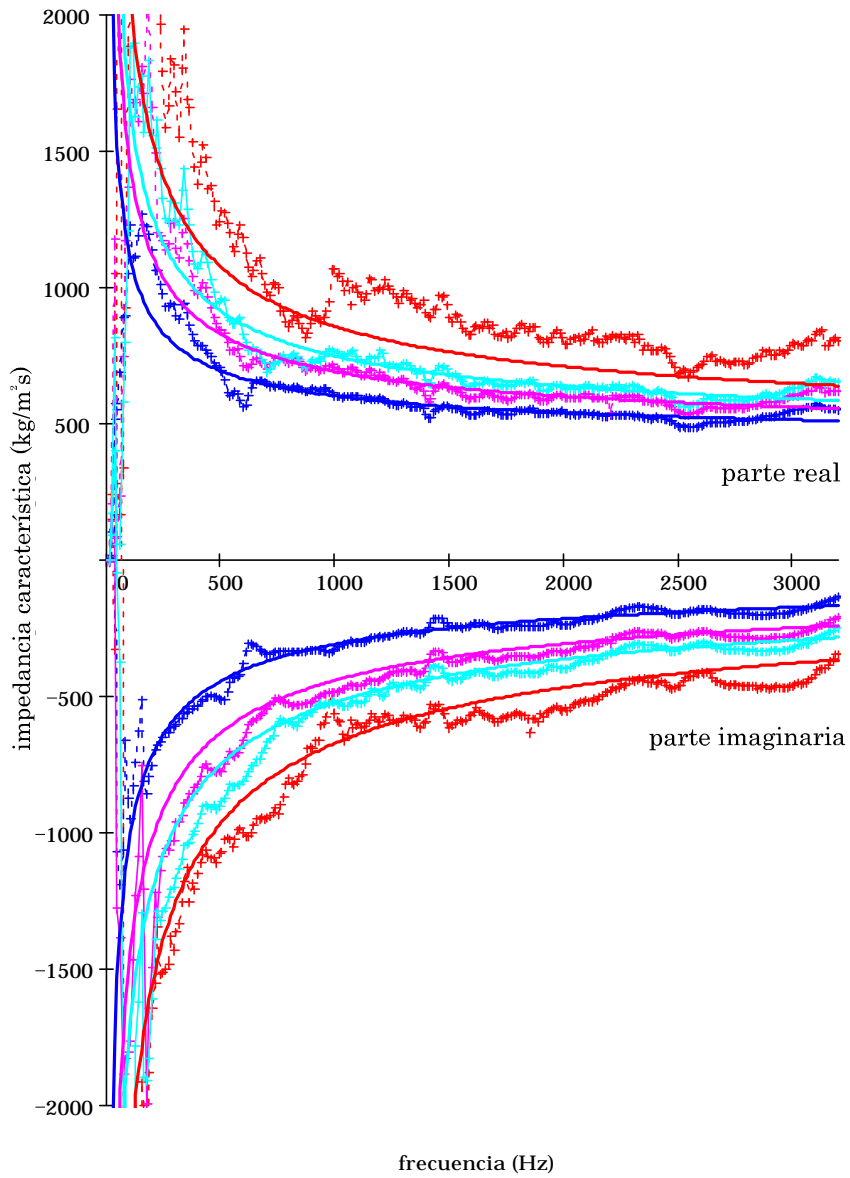


Figura 64. Resultados de la impedancia compleja en lana de vidrio. + curva experimental con 44 g/l, — curva ajustada con 44 g/l, ? curva experimental con 71 g/l, - - curva ajustada con 71 g/l, ? curva experimental con 89 g/l, - - - curva ajustada con 89 g/l, × curva experimental con 125 g/l, - - - curva ajustada con 125 g/l.

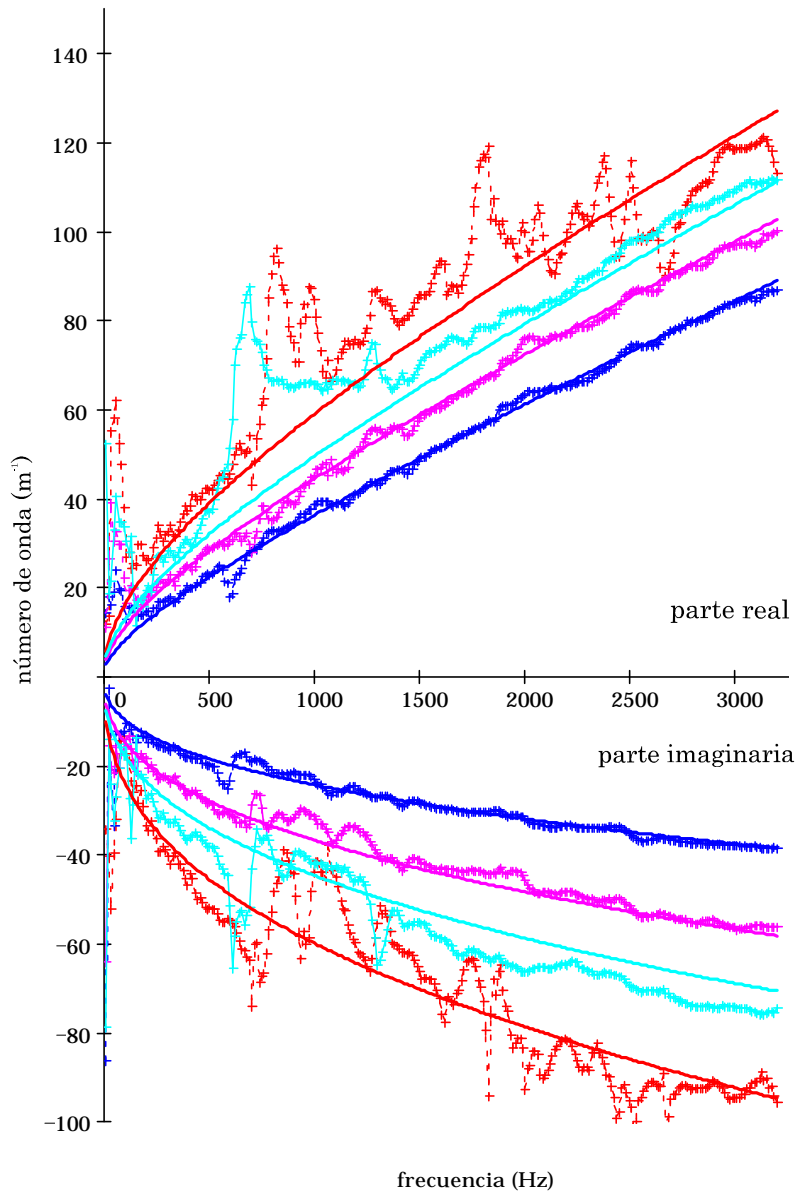


Figura 65. Resultados del número de onda en lana de vidrio. + curva experimental con 44 g/l, — curva ajustada con 44 g/l, ? curva experimental con 71 g/l, - - curva ajustada con 71 g/l, ? curva experimental con 89 g/l, - - - curva ajustada con 89 g/l, × curva experimental con 125 g/l, - - - curva ajustada con 125 g/l.

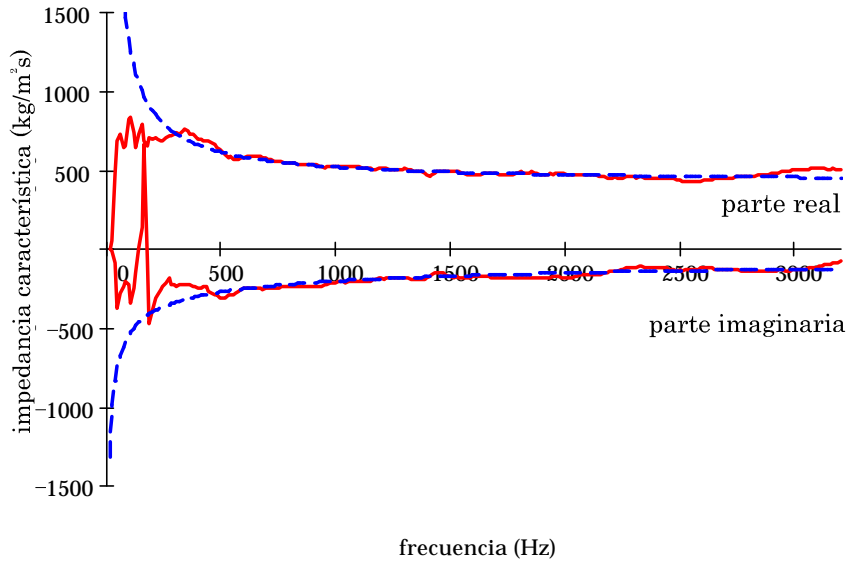


Figura 66. Resultados de la impedancia compleja en lana de roca con 44 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

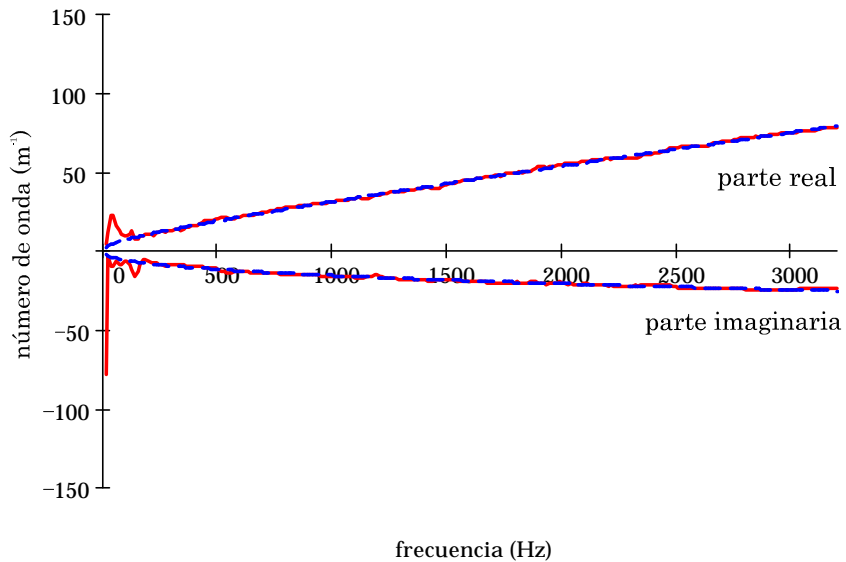


Figura 67. Resultados del número de onda complejo en lana de roca con 44 g/l de densidad. - curva experimental, - - curva ajustada.

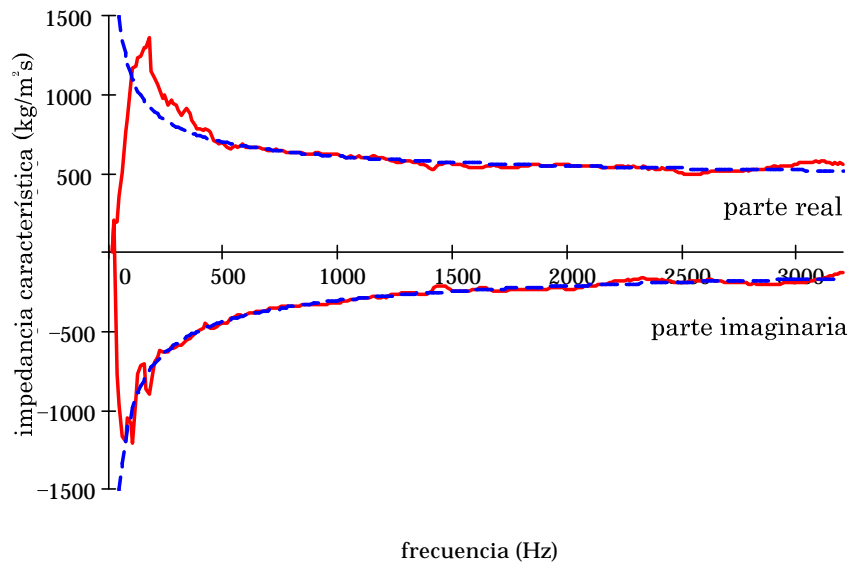


Figura 68. Resultados de la impedancia compleja en lana de roca con 71 g/l de densidad. + curva experimental, - - curva ajustada.

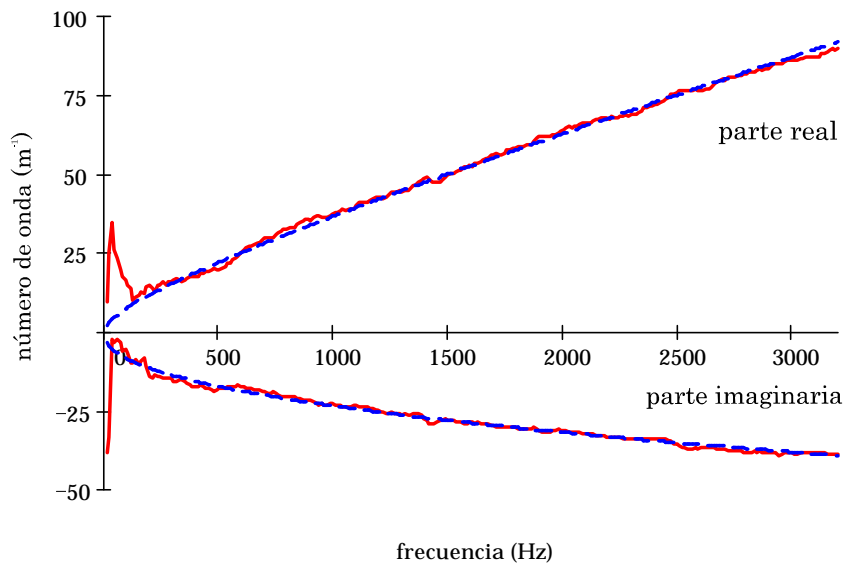


Figura 69. Resultados del número de onda complejo en lana de roca con 71 g/l de densidad. + curva experimental, - - curva ajustada.

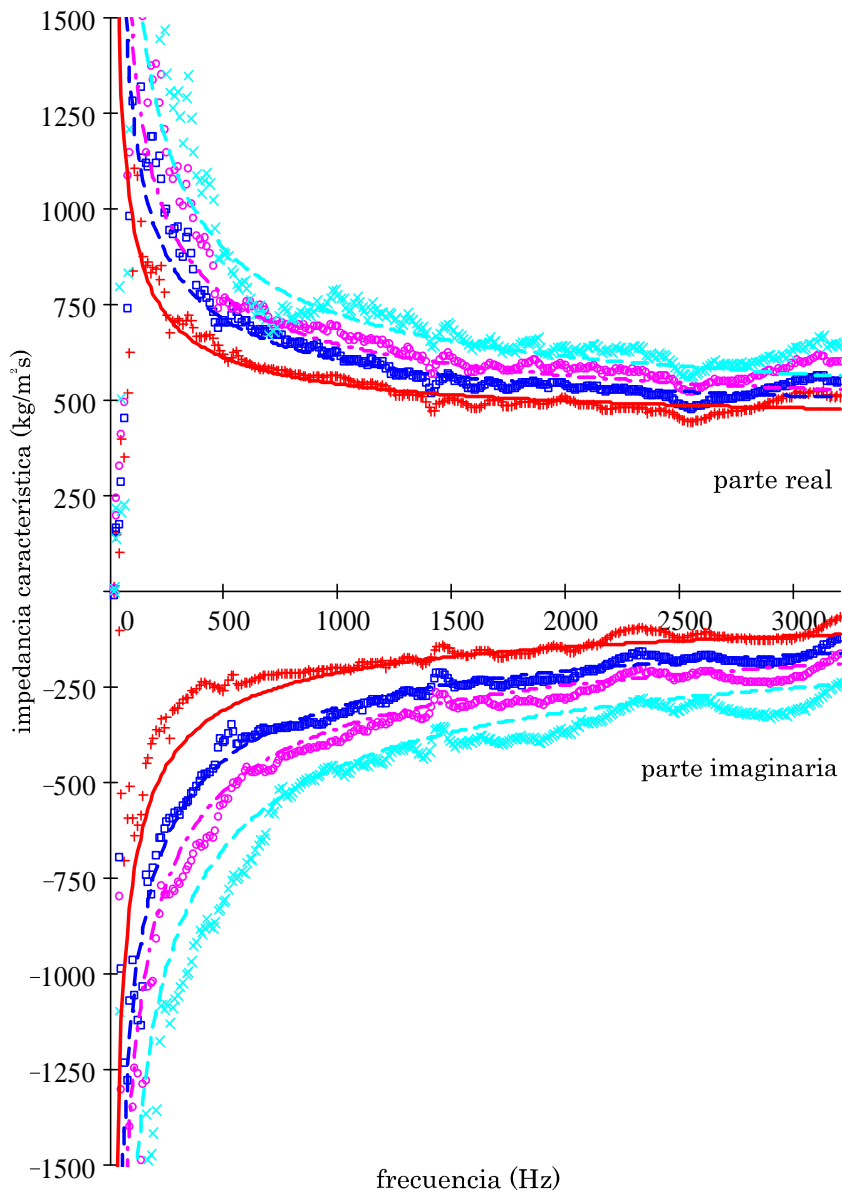


Figura 70. Resultados de la impedancia compleja en lana de roca. + curva experimental con 22 g/l, — curva ajustada con 22 g/l, ? curva experimental con 44 g/l, - - curva ajustada con 44 g/l, ? curva experimental con 71 g/l, - - curva ajustada con 71 g/l, × curva experimental con 89 g/l, - - curva ajustada con 89 g/l.

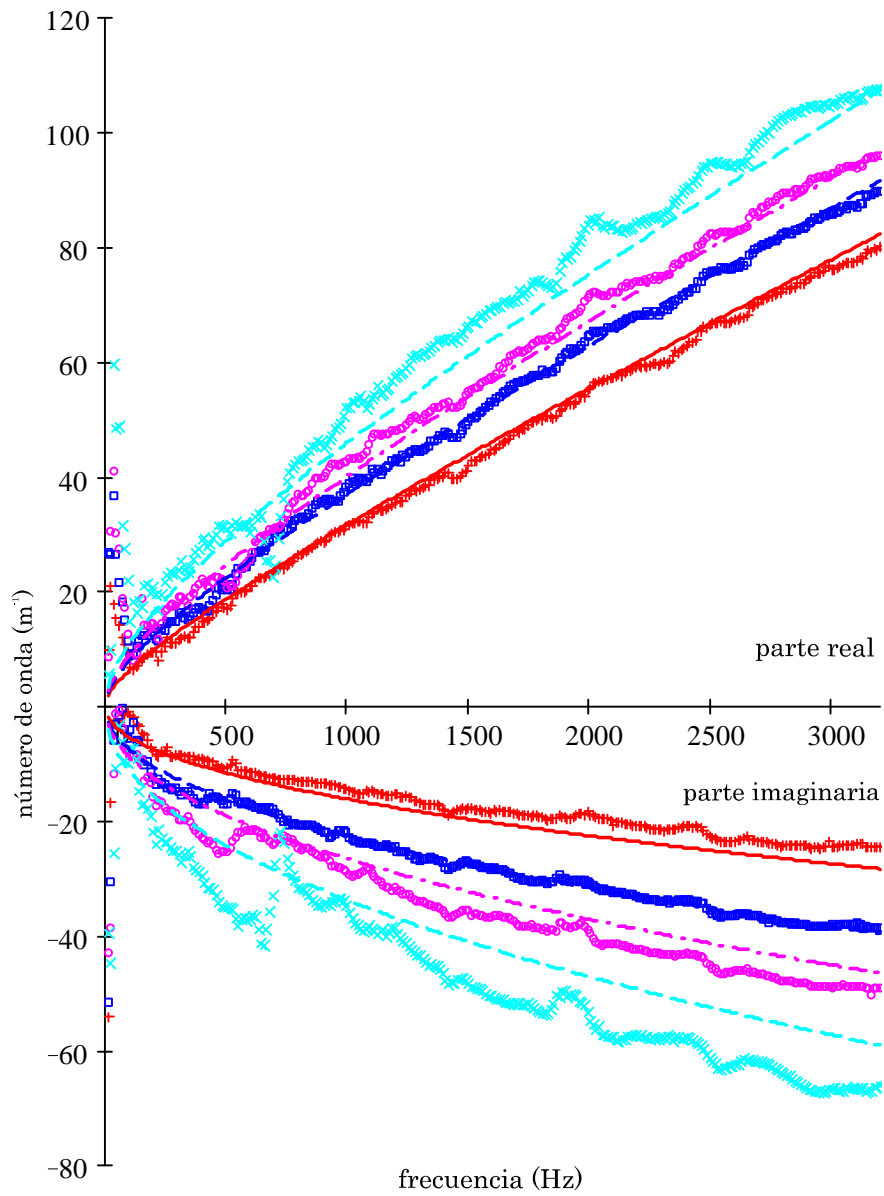


Figura 71. Resultados del número de onda en lana de roca. + curva experimental con 22 g/l, — curva ajustada con 22 g/l, ? curva experimental con 44 g/l, - - curva ajustada con 44 g/l, ? curva experimental con 71 g/l, - - - curva ajustada con 71 g/l, × curva experimental con 89 g/l, - - - curva ajustada con 89 g/l.

4.2.8. Medida de perforados

Dado que se observaron discrepancias entre los resultados teóricos y experimentales para los silenciadores con elementos perforados, y aunque no era el objetivo básico de esta Tesis, se ensayaron placas perforadas para ajustar experimentalmente las características de nuestros perforados, de espesor considerable, al modelo de Sullivan.

El método de las dos fuentes puede ser utilizado para calcular la matriz de transferencia no sólo de una muestra de absorbente, sino también de cualquier otro elemento que se sustituya por ella. Así, se utilizó para ensayar placas perforadas de diferentes características, ubicándolas en la posición que anteriormente tenían las muestras de absorbente (ver Figura 34).

Se ajustó el siguiente modelo de impedancia basado en la fórmula de Sullivan [75]

$$Z_p = \frac{r_0 c_0}{S} \left(A + jk_0 \left[t_p + \frac{B}{2} d_h \right] \right) \quad (4.60)$$

donde A y B son las constantes a determinar, t_p el espesor del perforado, d_h el diámetro de los agujeros y S la porosidad de los mismos.

De los resultados experimentales obtenemos la matriz de transferencia, e igualándola a la que define una impedancia, es decir,

$$\begin{bmatrix} A_{56} & B_{56} \\ C_{56} & D_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

podemos despejar Z_p directamente como

$$Z_p = B_{56} \quad (4.62)$$

La matriz de transferencia para una impedancia definida según (4.61) está basada en el modelo unidimensional y para un espesor muy pequeño. Los valores A_{56} y D_{56} obtenidos experimentalmente deben aproximarse a uno para tener una buena correspondencia con el modelo unidimensional. En la Figura 72 se observa, para un ensayo concreto, que efectivamente estos polos de la matriz obtenida se aproximan a la unidad.

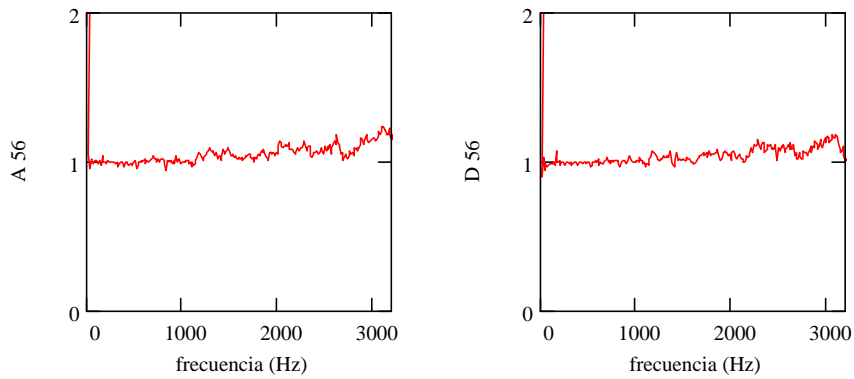


Figura 72. Valores de los polos , A_{56} , y D_{56} de la matriz de transferencia.

Se estudiaron dos tipos de placas perforadas con varios diámetros de agujero y varias porosidades. En la tabla siguiente se recogen las características de los ensayos llevados a cabo.

Ensayo	Espesor (m)	Porosidad (%)	diámetro (m)
P1	0,002	5	0,003
P2	0,002	10	0,003
P3	0,002	2,2	0,002
P4	0,002	4,4	0,002
P5	0,005	2,2	0,002
P6	0,005	4,4	0,002
P7	0,005	5	0,003
P8	0,005	10	0,003

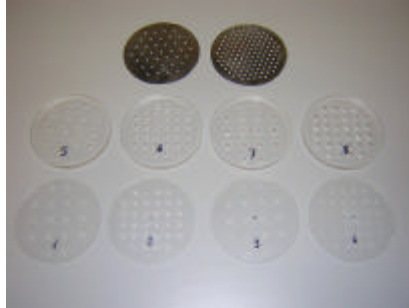


Figura 73. Muestras de placas perforadas utilizadas.

Tras realizar los experimentos necesarios y ajustar los coeficientes correspondientes al modelo (4.60) los resultados obtenidos se muestran a continuación.

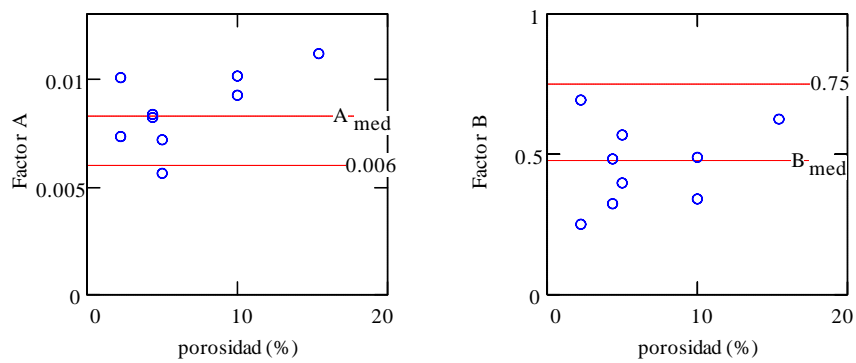


Figura 74. Resultados de los coeficientes A y B en función de la porosidad. ? resultados de cada uno de los ensayos. - A_{med}/B_{med} valor medio de los ensayos. -- 0.006/0.75 valor en la fórmula de Sullivan.

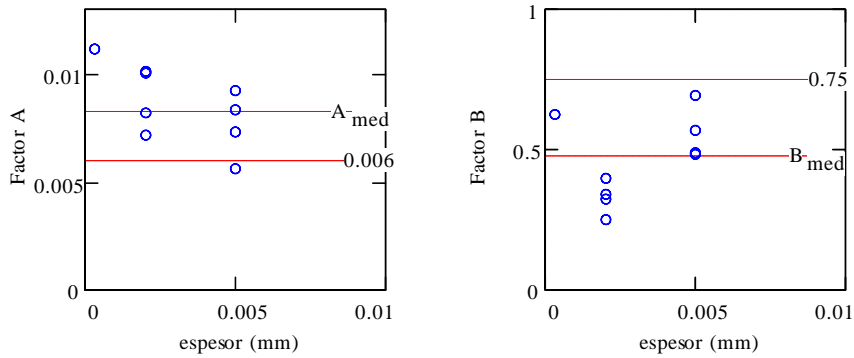


Figura 75. Resultados de los coeficientes A y B en función del espesor. ? resultados de cada uno de los ensayos. -- A_{med}/B_{med} valor medio de los ensayos. -- 0.006/0.75 valor en la fórmula de Sullivan.

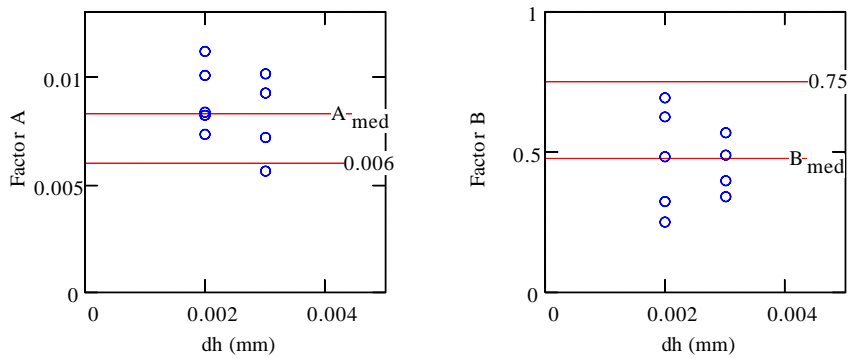


Figura 76. Resultados de los coeficientes A y B en función del diámetro de agujero (dh). ? resultados de cada uno de los ensayos. -- A_{med}/B_{med} valor medio de los ensayos. -- 0.006/0.75 valor en la fórmula de Sullivan.

Como puede verse en las Figuras 74-76, no hay una tendencia clara de las constantes obtenidas. Además, para algunos casos, la diferencia entre la media calculada y el valor de Sullivan es bastante considerable. Podría decirse que a medida que disminuye la porosidad, y que aumenta el espesor o el diámetro de orificio, el valor de la constante A se aproxima al valor propuesto por Sullivan. Pero sería necesario un estudio más detallado para sacar conclusiones fundadas, cosa que se deja para futuras investigaciones.

Con el objeto de mejorar la correspondencia entre resultados teóricos y experimentales, se han tomado en los cálculos realizados durante la tesis los valores medios obtenidos experimentalmente, esto es $A = 0,003$ y $B = 0,626$, a pesar de que la correspondencia no es muy buena para todos los casos estudiados.

En la Figura 77 y la Figura 78 vemos representada la parte real e imaginaria de uno de los ensayos comparadas con el valor obtenido de media para todos los ensayos, y con el que se obtendría utilizando la fórmula de Sullivan. La media del ensayo representado discrepa bastante con respecto a los valores propuestos por Sullivan. También discrepa aunque menos con el valor medio de los casos estudiados. De todo ello se deduce que los resultados finales del comportamiento del silenciador pueden verse afectados, en mayor o menor medida, del modelo empleado para los elementos perforados que formen parte del mismo. Debe observarse que la parte real de la impedancia es de valor pequeño e influye poco en los resultados obtenidos, incluso aunque no este bien ajustada, pero no sucede lo mismo con la parte imaginaria que tiene más influencia. Se plantea la posibilidad de usar la curva ajustada para cada ensayo, o sea, para cada característica concreta de perforado, como modelo a considerar en el estudio del comportamiento del silenciador, aunque no se ha considerado así en esta Tesis.

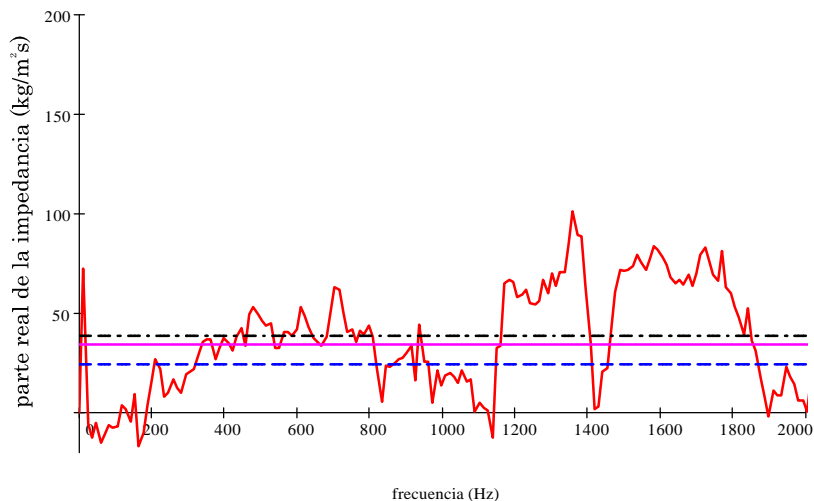


Figura 77. Parte real de la impedancia de perforado. - ensayo P2, -- modelo de Sullivan, --- curva ajustada para el ensayo P2, - curva media para todos los ensayos.

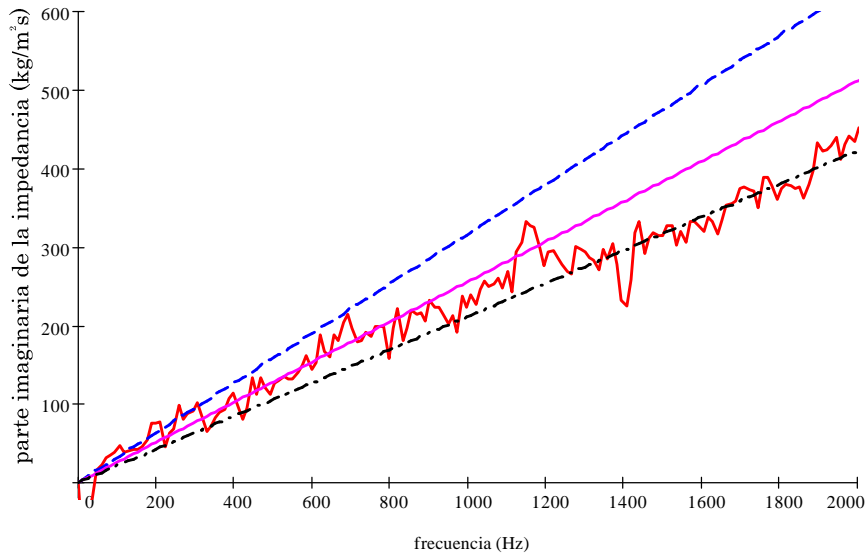


Figura 78. Parte imaginaria de la impedancia de perforado. - ensayo P2, -- modelo de Sullivan, --- curva ajustada para el ensayo P2, - curva media para todos los ensayos.

Existen multitud de factores que no han sido considerados en este estudio de perforados, y que influyen en el valor de la impedancia. El estudio de perforados en profundidad es un tema amplio abordado en alguno de sus aspectos por autores como Bento [10]. En esta Tesis sólo se pretende ajustar el modelo de Sullivan con sus hipótesis de partida para representar mejor nuestros resultados experimentales, no obtener un modelo general ni exhaustivo del comportamiento de los elementos perforados.

4.3. Caracterización del silenciador

En esta Tesis se utilizan las curvas ajustadas para Z_a y \tilde{k}_a que se han mostrado de la Figura 58 a la Figura 71 para modelar el comportamiento acústico de los materiales absorbentes como parte del silenciador, es decir, las gráficas de la impedancia compleja Z_a y el número de onda \tilde{k}_a .

Como se puede ver en la Figura 79 donde se compara el resultado obtenido con uno de los programas de subestructuración desarrollados

considerando las curvas experimentales o las ajustadas, la influencia de utilizar unas u otras no es importante. Únicamente destacar que al utilizar las curvas experimentales que lógicamente no son tan suaves como las ajustadas, el TL asociado a ellas tampoco es tan suave como el asociado a las curvas ajustadas.

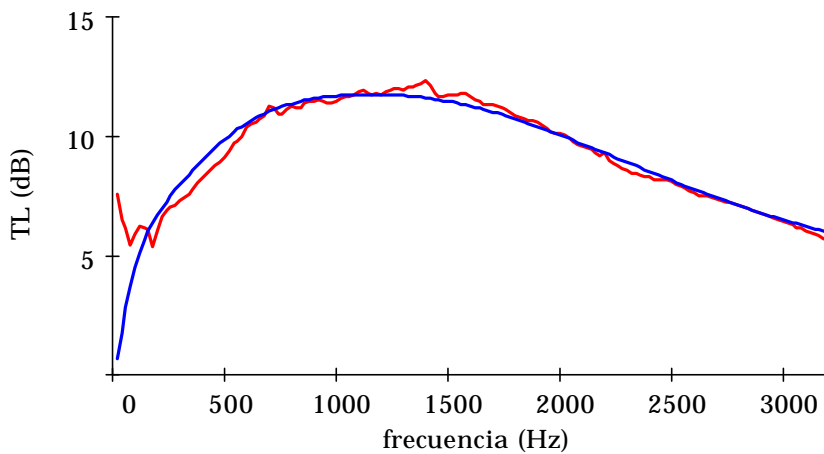


Figura 79. Comparación de resultados con las curvas experimentales o las ajustadas. — TL con material modelado con la curva experimental, - - TL con material modelado con la curva ajustada.

Para modelar el comportamiento de elementos perforados dentro de los silenciadores, en los cuales se tiene aire por un lado de la pared del perforado, y material absorbente por el otro, se utilizó la aproximación propuesta por Xu [84]. Así se tiene que la impedancia se modifica en función de Z_a / Z_0 y \tilde{k}_a / k_0 siguiendo

$$Z_p = \frac{Z_0}{\mathbf{S}} \left(0.003 + jk_0 \left[t_p + \frac{0.626}{2} d_h \left(1 + \frac{Z_a}{Z_0} \frac{\tilde{k}_a}{k_0} \right) \right] \right) \quad (4.63)$$

donde \mathbf{S} es la porosidad del perforado, t_p el espesor del mismo y d_h el diámetro de los agujeros. Esta expresión también ha sido utilizada satisfactoriamente por otros autores [41][69].

4.4. Conclusiones

En este capítulo se han estudiado tres métodos diferentes para la obtención de la impedancia acústica compleja Z_a y el número de onda complejo \tilde{k}_a con los que se modelan la presencia de materiales absorbentes en esta Tesis. Se han comparado dichos métodos y llegado a la conclusión que el de las dos cavidades es el menos conveniente debido a la incertidumbre asociada a los resultados en la medida en que éstos dependen del espesor de la muestra y no debería ser de este modo. Los otros dos métodos dan resultados muy similares para los rangos de espesores y materiales estudiados. Aunque finalmente se opta por el método de las dos fuentes.

Se han obtenido las gráficas experimentales para modelar el comportamiento de dos materiales absorbentes concretos, fibra de vidrio y fibra de roca, para diversas densidades. También se han obtenido las fórmulas teóricas del ajuste de las mismas. Estos resultados son los necesarios para el modelado de los materiales en los modelos de cálculo de los silenciadores.

Además se ha estudiado la forma de modelar el comportamiento de elementos perforados como parte integrante de los silenciadores. Concluyendo que existen muchos parámetros que influyen en su comportamiento y que sería necesario un estudio en profundidad para establecer modelos aplicables a un amplio rango de problemas.

Capítulo 5. Modelado acústico de silenciadores disipativos mediante técnicas modales multidimensionales

5.1. Introducción

Abordaremos ahora la inclusión de materiales absorbentes en el estudio de silenciadores. En el Capítulo 2 se vieron las bases teóricas del comportamiento acústico de materiales absorbentes que se aplicarán ahora al estudio de los silenciadores que los contienen.

Primero se abordará el estudio acústico de tubos de sección transversal constante llenos de material absorbente. Posteriormente se analizará el comportamiento de elementos más complejos, como son los silenciadores, en función de partes más sencillas, o sea, se aplicará la respuesta acústica en secciones constantes conocidas para generalizar el análisis de silenciadores más complejos.

5.2. Modelo de material absorbente

Como ya se comentó en el Capítulo 2, entre los modelos de materiales absorbentes cabe destacar el modelo de Biot [13] válido para materiales de tipo poroso con fase sólida de cierta rigidez, y el modelo macroscópico [45] que asume que la fase sólida es rígida y que caracteriza al material a través de su número de onda y de su impedancia compleja. El primer modelo es válido para materiales poroelásticos, mientras que el segundo es apropiado para materiales fibrosos. El modelo macroscópico ha sido utilizado satisfactoriamente en muchos trabajos [5][16][22][42][66][84], y su sola restricción es que el tipo de material empleado cumpla la hipótesis de fase sólida de alta rigidez o ser de tipo fibroso. Este es el modelo utilizado a lo largo de la Tesis.

Para disposiciones superficiales del material, y cuando su espesor es relativamente pequeño, la propagación de las ondas a través de él puede

suponerse como una impedancia localmente reactiva sin necesidad de modelar el comportamiento tridimensional del absorbente. Este modelo ha sido aplicado mediante análisis modal en conductos rectangulares [5] y mediante elementos finitos para otros casos más generales. Esta manera sencilla de considerar la presencia de absorbentes, permite su incorporación de una forma simple pero sólo es válido para disposiciones superficiales del material.

El modelo macroscópico caracteriza al material a través de dos parámetros, que suelen ser el número de onda y la impedancia compleja. Estos parámetros se determinan experimentalmente. Delany y Bazley [24] hicieron un estudio experimental sobre un amplio rango de materiales absorbentes y obtuvieron una serie de relaciones para la impedancia en función de la frecuencia y de la resistencia al flujo estacionario. Woodcock y Hodgson [83] proponen los métodos de las dos cavidades y de los dos espesores para determinar la resistencia de flujo. Estos métodos se explicaron con detalle en el Capítulo 4.

5.3. Solución en un conducto de sección constante relleno de material absorbente

En este apartado se estudiarán conductos de sección transversal constante rellenos de material absorbente y cómo este medio afecta a la ecuación de propagación de las ondas. Se consideraran en todo momento conductos de paredes rígidas.

5.3.1. Medio en reposo

Supongamos por ahora que el fluido no tiene movimiento neto [46], o sea, que las partículas se mueven alrededor de una posición de equilibrio que no varía en el tiempo. La ecuación del movimiento viene dada por (2.27)

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\tilde{c}_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

donde \tilde{c}_a es la velocidad de propagación en el material absorbente, que es compleja y se obtiene experimentalmente.

La ecuación de ondas (5.1), en su versión armónica y dependiendo únicamente de la coordenada z , puede ser expresada como (2.49)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \tilde{k}_a^2 P = 0 \quad (5.2)$$

donde $\tilde{k}_a = \mathbf{w}/\tilde{c}_a$ es el número de onda del material, que es compleja al igual que \tilde{c}_a .

Desarrollando de manera análoga al caso sin material absorbente, podemos llegar a una expresión de la presión dada por (3.16)

$$P(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^+ \Psi_n^+(x, y) e^{-j\tilde{k}_{z,m,n} z} + A_n^- \Psi_n^-(x, y) e^{j\tilde{k}_{z,m,n} z} \right] \quad (5.3)$$

donde $\tilde{k}_{t,m,n}$ es el número de onda asociado a los modos transversales, y cumple que

$$\tilde{k}_{z,m,n} = \sqrt{\tilde{k}_a^2 - \tilde{k}_{t,m,n}^2}$$

Esta constante dependerá de la sección concreta de cada caso y de las propiedades del material por el que se estén propagando las ondas.

Puesto que $\tilde{k}_{t,m,n}$ es el número de onda asociado a los modos Ψ_n^+ y Ψ_n^- , y estos modos sólo dependen de la geometría transversal, son los mismos que los correspondientes al caso de que el medio sea aire puesto que sólo dependen de la geometría. No sucede lo mismo con el número de onda axial. Nótese que todos los modos están amortiguados, puesto que \tilde{k}_a es compleja.

5.4. Condiciones de contorno en secciones de acoplamiento

Al igual que para el caso sin material absorbente, son necesarias condiciones en dos campos acústicos para resolver la ecuación de ondas. En ausencia de flujo medio es equivalente considerar la continuidad de la derivada de la presión o la del campo de velocidades axial. Partiendo del campo de presiones dado por (5.3), tendríamos el campo de gradiente de presiones dado por

$$\frac{\partial P_i}{\partial z_i} = -j \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{k}_{i,n} \left(C_{i,n}^+ \Psi_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}z_i} - C_{i,n}^- \Psi_{i,n}^- e^{j\tilde{k}_{i,n}z_i} \right) \quad (5.4)$$

donde $\tilde{k}_{i,n}$ depende de las características del material absorbente.

Las condiciones a imponer en un cambio de sección o un cambio de sección con extendidos se explicaron ya en los apartados 3.3.1 y 3.3.2

5.4.1. Cambio de medio

Para un cambio de medio entre las secciones S_i y S_j , se debe garantizar la continuidad de presión en la superficie común a ambas secciones, y la continuidad de la velocidad en la misma zona. Si bien en el caso sin materiales absorbentes podía considerarse la condición de continuidad del gradiente de presión, cuando se trabaja con absorbentes un cambio de medio implica un cambio en el gradiente de presión, pero no un cambio en la velocidad.

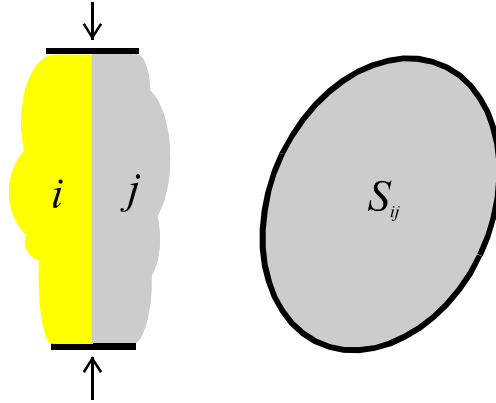


Figura 80. Cambio de medio fluido-absorbente.

Las ecuaciones resultantes para definir esta condición de contorno serán

$$P_i(x_i, y_i, z_i) = P_j(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{ij} \quad (5.5)$$

$$U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) = U_{z,j}(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{ij} \quad (5.6)$$

donde S_{ij} , es la sección representada en la Figura 80, y donde en función del medio se aplican sus correspondientes constantes de propagación.

Las velocidades vienen definidas por

$$U_z = \frac{-1}{i\omega\tilde{\Gamma}_a} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (5.7)$$

y que si bien antes, al igualar velocidades, se simplificaban las densidades por ser iguales, ahora al tratarse de medios diferentes debe considerarse la densidad correspondiente a cada medio.

Este caso es aplicable al cambio de medio entre aire y material absorbente, o al caso de que se esté trabajando con dos materiales absorbentes de características distintas. Habría que aplicar en cada caso las constantes de propagación correspondientes al medio por el que discurre la onda que se está evaluando.

5.4.2. Placa perforada entre medios diferentes

Para dos tramos conectados por una impedancia Z_p se debe garantizar la continuidad de la velocidad axial, y la condición con la cual se ha definido la impedancia, que en nuestro caso será

$$U_z = \frac{\Delta P}{Z_p} \quad (5.8)$$

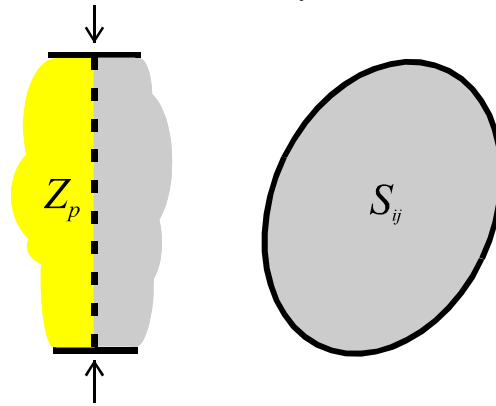


Figura 81. Relación de secciones mediante una impedancia.

Así pues tendríamos las siguientes expresiones para las condiciones de contorno con la nomenclatura contenida en la Figura 81

$$U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) = U_{z,j}(x_j, y_j, z_j) \quad \text{en } S_{ij} \quad (5.9)$$

$$U_{z,i}(x_i, y_i, z_i) = \frac{P_j(x_j, y_j, z_j) - P_i(x_i, y_i, z_i)}{Z_p} \quad \text{en } S_{ij} \quad (5.10)$$

En este caso, además de considerar las respectivas densidades a la hora de evaluar las velocidades, también hay que tener en cuenta que el modelo de impedancia a utilizar se modifica si relaciona dos medios diferentes. En los modelos reactivos utilizábamos como relación de impedancia la obtenida del estudio realizado en el apartado 4.2.8 a partir de la propuesta por Sullivan [75] y Crocker [73]

$$Z_p = \frac{Z_0}{\Omega_p} \left[0.003 + jk_0(t_p + 0.626d_h) \right] \quad (5.11)$$

donde \mathbf{S} es la porosidad del perforado, t_p el espesor del mismo y d_h el diámetro de los agujeros. En los modelos disipativos que relacionan aire con un material absorbente utilizaremos la expresión de Xu, Selamat, Lee y Huff [69] [84] adaptada a los resultados experimentales ensayados, es decir,

$$Z_p = \frac{Z_0}{\mathbf{S}} \left(0.003 + jk_0 \left[t_p + \frac{0.626}{2} d_h \left(1 + \frac{\tilde{Z}_a \tilde{k}_a}{Z_0 k_0} \right) \right] \right) \quad (5.12)$$

que se modifica con respecto a la (5.11) en los factores \tilde{Z}_a/Z_0 y \tilde{k}_a/k_0 que relacionan las características de los diferentes medios que separa el perforado.

5.4.3. Sección de entrada y de salida

Como ya se vio en el Capítulo 3, si se quieren obtener los cuatro polos del silenciador deben considerarse dos análisis con condiciones de contorno independientes. Se utilizará como primer análisis una excitación de presión con forma de onda plana de valor arbitrario P_{exc} en la sección de entrada (normalmente 1 por simplicidad) y de presión nula en la salida, y como segundo análisis una onda plana de presión arbitraria en la entrada y velocidad axial nula en la salida. Si llamamos 1 a la sección de entrada y T a la de salida, tendríamos para el primer análisis

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (5.13)$$

$$P_T(x_T, y_T, z_T) = 0 \quad \text{en } S_T \quad (5.14)$$

y para el segundo

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (5.15)$$

$$U_T(x_T, y_T, z_T) = 0 \quad \text{en } S_T \quad (5.16)$$

Si se dispone de una salida anecoica y como ya se vio anteriormente, pueden considerarse las condiciones

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = P_{exc} \quad \text{en } S_1 \quad (5.17)$$

$$P_T(x_T, y_T, z_T) = \mathbf{r}_0 \mathbf{c}_0 U_T(x_T, y_T, z_T) \quad \text{en } S_T \quad (5.18)$$

sin necesidad de un segundo análisis.

5.5. Cálculo de modos transversales

Según la complejidad de la sección, sus modos pueden ser conocidos de manera analítica, o han de ser obtenidos numéricamente. Si han de obtenerse numéricamente puede utilizarse el método de los elementos finitos, de gran versatilidad en geometrías y medios, o bien utilizar otros métodos, como los que a continuación se proponen, para hallar los modos de la sección completa a través de los modos de subdominios más sencillos. Los modos de los subdominios en que se divide la sección en estudio pueden conocerse de manera analítica o hallarse numéricamente con menor coste computacional que en el caso de los de la sección completa debido a la mayor simplicidad de sección. Una vez obtenidos los modos de los diferentes subdominios, puede aplicarse como ya se vio el método directo o bien el método de síntesis modal o subestructuración para obtener los modos de la sección completa.

5.5.1. Método directo

Al trabajar con materiales absorbentes habrán de tenerse en cuenta las consideraciones expuestas en los apartados anteriores que establecen las condiciones de contorno a imponer entre diferentes secciones, o sea, principalmente considerar la densidad compleja del medio en la ecuación de velocidad, y las constantes de propagación complejas que correspondan.

Aplicaremos el método directo a un caso concreto para ilustrarlo mejor. Se aplicará al caso concreto de un resonador circular y concéntrico como el de la Figura 82 con material absorbente en la zona C2.

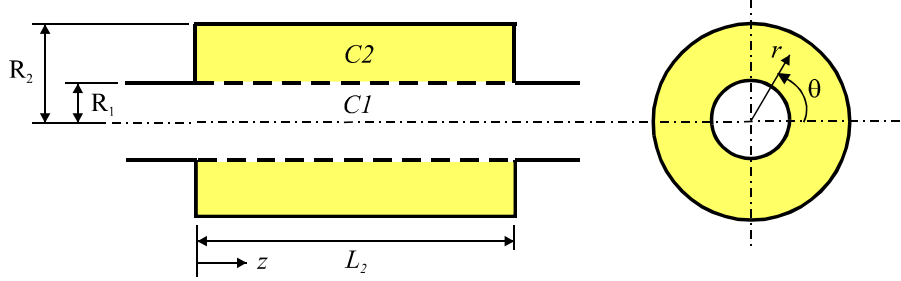


Figura 82. Resonador concéntrico de sección circular.

En la región central la presión acústica podemos escribirla como

$$P_C(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^+ e^{-j\tilde{k}_{x,C,n}x} + C_n^- e^{j\tilde{k}_{x,C,n}x} \right) \Psi_{C,n,P}(r) \quad (5.19)$$

quedando dos partes diferenciadas, el tubo central relleno de aire y el anillo exterior con el material absorbente, o lo que es lo mismo, podemos escribir

$$P_C(r, z) = \begin{cases} P_{C1}(r, z) & 0 \leq r \leq R_1 \\ P_{C2}(r, z) & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (5.20)$$

siendo el modo de presión transversal

$$\Psi_{C,n,P}(r, z) = \begin{cases} \Psi_{C1,n,P}(r, z) & 0 \leq r \leq R_1 \\ \Psi_{C2,n,P}(r, z) & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (5.21)$$

Tanto el tubo como el anillo exterior tienen igual número de onda axial $k_{z,C,n}$ que está relacionado con el número de onda radial según

$$\begin{aligned} k_{r,C,n}^2 &= k_0^2 - k_{z,C,n}^2 \\ \tilde{k}_{r,C,n}^2 &= \tilde{k}_a^2 - k_{z,C,n}^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

La evaluación de los números de onda y de los modos transversales se puede llevar a cabo según se muestra en [42] [70] estableciendo las siguientes condiciones de contorno:

1. Presión finita en $r = 0$
2. Velocidad radial nula en $r = R_2$
3. Velocidad radial continua en $r = R_1$
4. Relación de impedancia en el perforado dada por

$$Z_p = \frac{P_{C1}(R_1, z) - P_{C2}(R_1, z)}{r_0 c_0 U_r} \quad (5.23)$$

siendo U_r la velocidad acústica radial en la superficie del perforado.

Los números de onda pueden ser obtenidos de la ecuación característica (derivada de las condiciones 1 y 2)

$$\frac{r_0 \tilde{k}_{r,C,n} \left[\frac{J_0(k_{r,C,n} R_1)}{J_1(k_{r,C,n} R_1)} + \frac{jZ_p k_{r,C,n}}{k_0} \right]}{\tilde{r}_a \tilde{k}_{r,C,n}} = \frac{J_0(\tilde{k}_{r,C,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_2) - Y_0(\tilde{k}_{r,C,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_2)}{J_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_1) Y_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_2) - Y_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_1) J_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_2)} \quad (5.24)$$

que debe ser resuelta para cada frecuencia, puesto que interviene la impedancia Z_p que es función de la frecuencia ω .

Finalmente los modos transversales vienen dados por

$$\Psi_{C,n,p}(r) = \begin{cases} J_0(k_{r,C,n} r) & 0 \leq r \leq R_1 \\ F \left(J_0(\tilde{k}_{r,C,n} r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_2)}{Y_1(\tilde{k}_{r,C,n} R_2)} Y_0(\tilde{k}_{r,C,n} r) \right) & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (5.25)$$

con

$$F = \left(J_0(k_{r,C,n}R_1) + \frac{jZ_p k_{r,C,n}}{k_0} J_1(k_{r,C,n}R_1) \right) \frac{Y_1(\tilde{k}_{r,C,n}R_2)}{J_0(\tilde{k}_{r,C,n}R_1)Y_1(\tilde{k}_{r,C,n}R_2) - J_1(\tilde{k}_{r,C,n}R_2)Y_0(\tilde{k}_{r,C,n}R_1)} \quad (5.26)$$

Los detalles de la solución pueden encontrarse en los trabajos de Kirby [42] y Selamet [70]. Kirby resalta que para obtener una solución adecuada es necesario una estimación inicial suficientemente aproximada para cada uno de los modos buscados, y que trabajando con silenciadores disipativos este método no garantiza la omisión de algunas soluciones consecutivas o la aparición de otros problemas de convergencia.

5.5.2. Método de subestructuración o síntesis modal

En primer lugar se debe dividir la sección en estudio en diferentes subdominios cuyos modos transversales sean conocidos.

Partimos de la ecuación (3.93) para cada subdominio

$$\left([K_\Omega^i] + \tilde{k}_z [C_\Omega^i] + \tilde{k}_z^2 [M_\Omega^i] \right) \{q^i\} = \{F^i\} \quad (5.27)$$

Supongamos que entre dos subdominios i y j existe una impedancia Z_{ij} . Para establecer la velocidad normal a la superficie de contorno en el tramo común entre subdominios, partimos de la ecuación de Euler evaluada en uno de los subdominios. En ausencia de flujo medio en el interior del material absorbente, tendríamos para el subdominio i

$$U_{i,n} = \frac{-j}{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \quad (5.28)$$

siendo $U_{i,n}$ la velocidad acústica normal al contorno Γ entre ambos subdominios, y $\tilde{\mathbf{r}}_i$ la densidad del medio que corresponda. Utilizando la definición de impedancia

$$Z_{ij} = \frac{\Psi_j - \Psi_i}{U_{i,n}} \quad (5.29)$$

se puede eliminar la velocidad $U_{i,n}$ para obtener

$$\frac{j}{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \frac{\Psi_i - \Psi_j}{Z_{ij}} \quad (5.30)$$

Sustituyendo la presión según (3.89) nos queda

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w} j}{Z_{ij}} \left(\{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} - \{\mathbf{f}_j\}^T \{q_j\} \right) \quad (5.31)$$

Incorporando (5.31) para cada uno de los subdominios i y j en la ecuación (5.27) tendríamos

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{k}^2 - 2M\tilde{k}\tilde{k}_z - (1-M^2)\tilde{k}_z^2 \right] \int_{\Omega_i} \{\mathbf{f}_i\} \{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} d\Omega + \\ & + \int_{\Omega_i} \nabla \{\mathbf{f}_i\} \nabla \{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} d\Omega = \\ & = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w} j}{Z_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \{\mathbf{f}_i\} \left(\{\mathbf{f}_i\}^T \{q_i\} - \{\mathbf{f}_j\}^T \{q_j\} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.32)$$

y cambiando la notación quedaría como

$$\begin{aligned} & \left(\left[K_{\Omega}^i \right] - \tilde{k}^2 \left[M_{\Omega}^i \right] + \tilde{k}_z \left(2Mk \left[M_{\Omega}^i \right] \right) + \right. \\ & \left. + \tilde{k}_z^2 \left[(1-M^2) \left[M_{\Omega}^i \right] \right] \right) \{q_i\} = \\ & = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w} j}{Z_{ij}} \left[M_{\Gamma}^{ii} \right] \{q_i\} - \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w} j}{Z_{ij}} \left[M_{\Gamma}^{ij} \right] \{q_j\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde las matrices anteriores se definen según

$$\begin{aligned}
\left[K_{\Omega}^i \right] &= \int_{\Omega_i} \nabla \{ \mathbf{f}_i \} \nabla \{ \mathbf{f}_i \}^T d\Omega & \left[M_{\Gamma}^{ii} \right] &= \int_{\Gamma_{ij}} \{ \mathbf{f}_i \} \{ \mathbf{f}_i \}^T d\Gamma \\
\left[M_{\Omega}^i \right] &= \int_{\Omega_i} \{ \mathbf{f}_i \} \{ \mathbf{f}_i \}^T d\Omega & \left[M_{\Gamma}^{ij} \right] &= \int_{\Gamma_{ij}} \{ \mathbf{f}_i \} \{ \mathbf{f}_j \}^T d\Gamma
\end{aligned} \quad (5.34)$$

Estas ecuaciones pueden reordenarse, y mediante una nueva definición de matrices expresarse como

$$\left(\left[KA^i \right] + \tilde{k}_z \left[CA^i \right] + \tilde{k}_z^2 \left[MA^i \right] \right) \{ q_i \} + \left[KA^{ij} \right] \{ q_j \} = 0 \quad (5.35)$$

donde

$$\begin{aligned}
\left[KA^i \right] &= \left[K_{\Omega}^i \right] - \tilde{k}^2 \left[M_{\Omega}^i \right] - \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{w}_j}{Z_{ij}} \left[M_{\Gamma}^{ii} \right] \\
\left[KA^{ij} \right] &= \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j \mathbf{w}_j}{Z_{ij}} \left[M_{\Gamma}^{ij} \right] \\
\left[CA^i \right] &= 2M\tilde{k} \left[M_{\Omega}^i \right] \\
\left[MA^i \right] &= (1 - M^2) \left[M_{\Omega}^i \right]
\end{aligned} \quad (5.36)$$

Un planteamiento similar conduce al sistema de ecuaciones asociado al subdominio j

$$\left(\left[KA^j \right] + \tilde{k}_z \left[DA^j \right] + \tilde{k}_z^2 \left[MA^j \right] \right) \{ q_j \} + \left[KA^{ji} \right] \{ q_i \} = 0 \quad (5.37)$$

Cabe destacar que con materiales absorbentes las densidades de cada subdominio son diferentes y no pueden simplificarse. Procediendo de manera análoga entre cada dos subdominios relacionados, el sistema de ecuaciones global quedaría, como

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} [KA^1] & [KA^{12}] & \cdots & [KA^{1S}] \\ [KA^{21}] & [KA^2] & \cdots & [KA^{2S}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [KA^{S1}] & [KA^{S2}] & \cdots & [KA^S] \end{bmatrix} + \tilde{k}_z \begin{bmatrix} [C_\Omega^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [C_\Omega^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [C_\Omega^s] \end{bmatrix} \right) + \\
& + \tilde{k}_z^2 \begin{bmatrix} [M_\Omega^1] & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [M_\Omega^2] & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & [M_\Omega^s] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \\ \vdots \\ \{q^s\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Con una notación compacta queda finalmente

$$\left([KA] + \tilde{k}_z [C] + \tilde{k}_z^2 [M] \right) \{q\} = \{0\} \tag{5.39}$$

El problema de autovalores anterior permite obtener para cada frecuencia los números de onda axiales k_z asociados a los modos de propagación del problema y los coeficientes $\{q_j\}$ y $\{q_i\}$ que definen cada modo transversal Ψ de la sección completa.

5.6. Método de ajuste modal

Al igual que en silenciadores reactivos debe exigirse que el silenciador pueda subdividirse en tramos axiales de sección transversal constante, que irán conectados a otros tramos de diferente sección transversal.

En cada uno de los tramos deberá satisfacerse la ecuación diferencial (5.1) con las condiciones de contorno adecuadas. En las interfases entre tramos se han de satisfacer la continuidad de presión y de velocidad axial.

Como cada tramo i es de sección constante, la solución en la dirección axial definida por la coordenada z cuando se utiliza un planteamiento con modos de propagación, viene dada por

$$P_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{i,n}^+ \Psi_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}^+ z} + C_{i,n}^- \Psi_{i,n}^- e^{-j\tilde{k}_{i,n}^- z} \right) \quad (5.40)$$

donde $C_{i,n}^{\pm}$ son las constantes de propagación que definen la onda, $\Psi_{i,n}^{\pm}$ son los modos transversales del subdominio correspondiente, y $\tilde{k}_{i,n}^{\pm}$ es el número de onda longitudinal definido para el caso más general, incluyendo flujo medio, como

$$\tilde{k}_{i,n}^{\pm} = \frac{-M\tilde{k}_a \pm \sqrt{\tilde{k}_a^2 - (1-M^2)\tilde{k}_{i,t,n}^2}}{1-M^2} \quad (5.41)$$

siendo $\tilde{k}_{i,t,n}$ el número de onda transversal, y \tilde{k}_a el número de onda en el medio que corresponda. El acoplamiento entre tramos se consigue imponiendo las condiciones de contorno adecuadas, las más comunes de las cuales se estudiaron en los apartados 3.3 y 5.4.

El conjunto de ecuaciones obtenidas de aplicar las condiciones de contorno adecuadas se ponderan con los modos transversales de las secciones y se integran para obtener un sistema de ecuaciones en principio infinito pero que se trunca para su resolución. Los modos de ponderación que se utilizan son aquellos correspondientes a la menor sección para condiciones de presión, y a la mayor sección en el caso de condiciones de velocidad.

Para las condiciones de contorno estudiadas en el apartado 5.3. se llegaría tras la integración a las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta (5.40) y que las integrales en cada sección requieren del conocimiento de la relación entre las coordenados de cada sistema de referencia:

Cambio de medio

Las condiciones a imponer vienen dadas por (5.5) y (5.6), es decir,

$$P_i(x_i, y_i, z_i) \Big|_{S_{ij}} = P_j(x_j, y_j, z_j) \Big|_{S_{ij}}$$

$$U_{z,i}(x_i, y_i, z_i)\Big|_{S_i} = U_{z,j}(x_j, y_j, z_j)\Big|_{S_j}$$

Para la primera condición (la de presión), si la multiplicamos por los modos en la sección S_i (la de menor sección) y la integramos en el dominio de S_i , obtendríamos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left(C_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}z_i} + C_{i,n}^- e^{j\tilde{k}_{i,n}z_i} \right) \int_{S_i} \Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{i,s}(x_i, y_i) \\ &= \sum_{n=0}^N \left(C_{j,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{j,n}z_j} + C_{j,n}^- e^{j\tilde{k}_{j,n}z_j} \right) \int_{S_i} \Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{i,s}(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Para las condiciones de velocidad, multiplicamos por los modos en la sección S_j (la mayor), integramos en el dominio correspondiente a la sección S_i en la segunda condición y a la diferencia de las secciones en la tercera, finalmente sumamos las ecuaciones resultantes para obtener la integración en la sección S_j completa en el lado derecho de la ecuación. Nos queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{r}_i} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{i,n} \left(C_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}z_i} - C_{i,n}^- e^{j\tilde{k}_{i,n}z_i} \right) \int_{S_i} \Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \\ &= \frac{1}{\tilde{r}_j} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{j,n} \left(C_{j,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{j,n}z_j} - C_{j,n}^- e^{j\tilde{k}_{j,n}z_j} \right) \int_{S_j} \Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Relación por impedancia entre diferentes medios

Las condiciones a imponer vienen dadas por (5.9) y (5.10), es decir,

$$\begin{aligned} & U_{z,i}(x_i, y_i, z_i)\Big|_{S_i} = U_{z,j}(x_j, y_j, z_j)\Big|_{S_j} \\ & U_{z,i}(x_i, y_i, z_i)\Big|_{S_i} = \frac{P_j(x_j, y_j, z_j)\Big|_{S_j} - P_i(x_i, y_i, z_i)\Big|_{S_i}}{Z_p} \end{aligned}$$

Como ambas secciones son iguales, pueden utilizarse como modos de ponderación cualesquiera de ellos. En nuestro caso hemos escogido de

forma arbitraria los modos de la sección S_i para condiciones de presión, y los de la sección S_j para condiciones de velocidad, quedando como resultado

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}_i} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{i,n} \left(C_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}z_i} - C_{i,n}^- e^{j\tilde{k}_{i,n}z_i} \right) \int_{S_i} \Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}_j} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{j,n} \left(C_{j,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{j,n}z_j} - C_{j,n}^- e^{j\tilde{k}_{j,n}z_j} \right) \int_{S_j} \Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}_i} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{i,n} \left(C_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}z_i} - C_{i,n}^- e^{j\tilde{k}_{i,n}z_i} \right) \int_{S_i} \Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{j,s}(x_j, y_j) \\ &= \frac{1}{Z_p} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{i,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{i,n}z_i} + C_{i,n}^- e^{j\tilde{k}_{i,n}z_i} \right) \int_{S_i} \Psi_{i,n}(x_i, y_i) \Psi_{i,s}(x_i, y_i) - \right. \\ & \quad \left. \sum_{n=0}^N \left(C_{j,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{j,n}z_j} + C_{j,n}^- e^{j\tilde{k}_{j,n}z_j} \right) \int_{S_j} \Psi_{j,n}(x_j, y_j) \Psi_{i,s}(x_i, y_i) \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Entrada y salida

Si consideramos que en los tubos de entrada y salida no existe material absorbente, las ecuaciones que permiten establecer las condiciones de contorno son las expuestas en el apartado 3.5.2 para el caso de silenciadores reactivos.

5.7. Ejemplos

5.7.1. Resonador concéntrico de sección circular

A continuación aplicaremos el método de ajuste modal al caso de un resonador concéntrico de sección circular con la cámara llena de material absorbente. Se aplicará el método de ajuste modal, conjuntamente con el método directo y el de subestructuración para la obtención de los modos de la sección transversal de la cámara. Si la sección de la cámara se

divide entre anillo circular y tubo interior, los modos transversales de ambas secciones se conocen analíticamente.

Tenemos el silenciador de la Figura 83

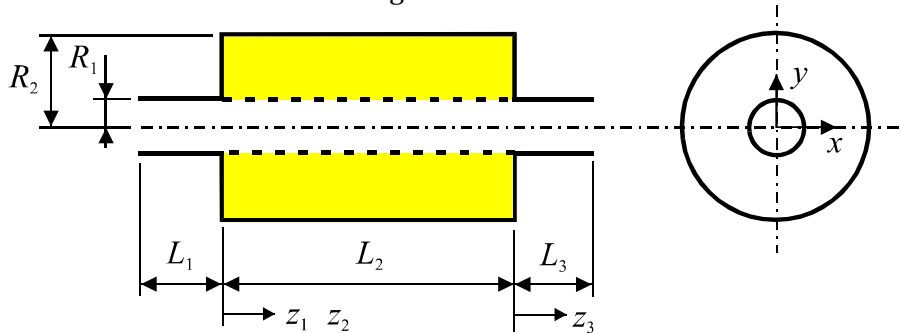


Figura 83. Resonador concéntrico de sección circular.

Las dimensiones del silenciador son $R_1 = 0,0268$ m, $R_2 = 0,0906$ m, $L_1 = L_3 = 0.1$ m, $L_2 = 0,148$ m. Las características del perforado son diámetro de orificio $d_h = 0,0023$ m, espesor del perforado $t_p = 0,0023$ m y porosidad del perforado $s = 5\%$. Las dimensiones variables se detallan en la tabla siguiente siendo d la densidad del material absorbente utilizado

Nombre	d (g/l)
RCC1	44
RCC2	71

Se considerarán los siguientes tramos y secciones

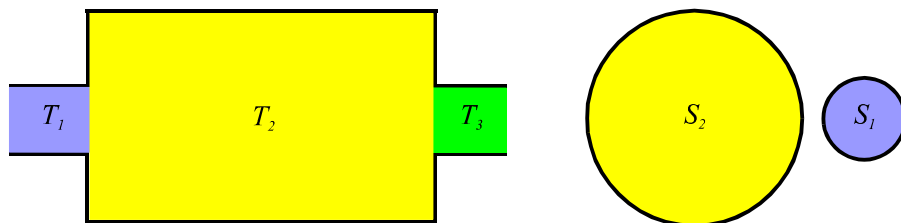


Figura 84. Tramos y secciones en que se divide el silenciador.

En coordenadas cilíndricas la ecuación de ondas en la sección S_1 vendrá dada por

$$P_1(r, z) = \sum_{n=0}^N (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (5.46)$$

donde n es el número del modo, (r, z) las coordenadas cilíndricas, $C_{1,n}^\pm$ los coeficientes participación de modo, $\Psi_{1,n}(r)$ el modo de presión transversal dado por la función de Bessel de primera clase y orden cero $J_0(k_{1,r,n}r)$ por tratarse de un conducto circular, y $k_{1,r,n}$ el número de onda radial que se obtiene al satisfacer la condición de frontera de pared rígida $J_0'(k_{1,r,n}R_1) = 0$. El número de onda axial $k_{1,z,n}$ del modo n está definido por:

$$k_{1,z,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_{1,r,n}^2} & k_0 > k_{1,r,n} \\ -j\sqrt{k_{1,r,n}^2 - k_0^2} & k_0 < k_{1,r,n} \end{cases} \quad (5.47)$$

con $k_0 = \omega/c_0$ el número de onda del aire, y ω la frecuencia angular.

La velocidad acústica a partir de la presión será

$$U_{z,1}(r, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^N k_{1,z,n} (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} - C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (5.48)$$

siendo ρ_0 la densidad del aire.

Para el anillo que forma la sección S_2 tendremos

$$P_2(r, z) = \sum_{n=0}^N (C_{2,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{2,z,n}z} + C_{2,n}^- e^{j\tilde{k}_{2,z,n}z}) \Psi_{2,n}(r) \quad (5.49)$$

donde los modos vienen dados por

$$\Psi_{2,n}(r) = J_0(\tilde{k}_{2,r,n}r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{2,r,n}R_1)}{Y_1(\tilde{k}_{2,r,n}R_1)} Y_0(\tilde{k}_{2,r,n}r) \quad (5.50)$$

siendo R_1 el radio del tubo interior y

$$\tilde{k}_{2,z,n} = \begin{cases} \sqrt{\tilde{k}_a^2 - \tilde{k}_{2,r,n}^2} & \tilde{k}_a > \tilde{k}_{2,r,n} \\ -j\sqrt{\tilde{k}_{2,r,n}^2 - \tilde{k}_a^2} & \tilde{k}_a < \tilde{k}_{2,r,n} \end{cases} \quad (5.51)$$

Las ecuaciones que resultan de aplicar el método directo a la sección conjunta del tramo T_2 son el resultado de imponer la condición de impedancia entre las secciones S_1 y S_2 . Así tenemos

$$U_{z,1,n}(R_1, z) = U_{z,2,n}(R_1, z) \quad (5.52)$$

$$U_{z,1,n}(R_1, z) = \frac{P_2(R_1, z) - P_1(R_1, z)}{Z_p} \quad (5.53)$$

Las ecuaciones que resultan de aplicar el método de subestructuración a la sección del tramo T_2 son

$$\left(\begin{bmatrix} [KA^1] & [KA^{12}] \\ [KA^{21}] & [KA^2] \end{bmatrix} + k_z^2 \begin{bmatrix} [M_\Omega^1] & [0] \\ [0] & [M_\Omega^2] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{pmatrix}$$

$$[KA^1] = [K_\Omega^1] - k_0^2 [M_\Omega^1] - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{11}]$$

$$[KA^{12}] = \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{12}] \quad [KA^{21}] = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_a \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{21}]$$

$$[KA^2] = [K_\Omega^2] - \tilde{k}_a^2 [M_\Omega^2] - \frac{\tilde{\mathbf{r}}_a \mathbf{w} j}{Z_p} [M_\Gamma^{22}]$$

$$\Psi_1^\pm = J_m \left(\frac{\mathbf{a}_{m,n}}{R_1} r \right) e^{\mp jmq} \quad \Psi_2 = J_0(\tilde{k}_{2,r,n} r) - \frac{J_1(\tilde{k}_{2,r,n} R_1)}{Y_1(\tilde{k}_{2,r,n} R_1)} Y_0(\tilde{k}_{2,r,n} r)$$

Si posteriormente aplicamos ajuste modal entre los diferentes tramos obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N (C_{1,n}^+ + C_{1,n}^-) \int_{S_1} \Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) \\ &= \sum_{n=0}^N (C_{2,n}^+ + C_{2,n}^-) \int_{S_1} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^N k_{1,n} (C_{1,n}^+ - C_{1,n}^-) \int_{S_2} \Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}_a} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{2,n} (C_{2,n}^+ - C_{2,n}^-) \int_{S_2} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N (C_{2,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{2,n}^+ L_2} + C_{2,n}^- e^{j\tilde{k}_{2,n}^- L_2}) \int_{S_2} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \\ &= \sum_{n=0}^N (C_{3,n}^+) \int_{S_2} \Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{\mathbf{r}}_a} \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{2,n} (C_{2,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{2,n}^+ L_2} - C_{2,n}^- e^{j\tilde{k}_{2,n}^- L_2}) \int_{S_2} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) \\ &= \frac{1}{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^N k_{3,n} (C_{3,n}^+) \int_{S_2} \Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Teniendo en cuenta las propiedades del producto de funciones de Bessel y simplificando en la medida de lo posible, las integrales quedarían como [70]

$$\int_{S_1} \Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) = \begin{cases} \frac{r_1^2}{2} J_0^2(k_{1,r,s} R_1) & \text{para } n = s \\ 0 & \text{para } n \neq s \end{cases} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \Psi_{1,n}(x_1, y_1) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) &= \int_{S_1} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{1,s}(x_1, y_1) = \\
&\left\{ \begin{array}{ll} r_1^2 \left[J_0^2(k_{1,r,s} R_1) + J_1^2(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) \right] & \text{para } k_{1,r,s} = \tilde{k}_{2,r,s} \\ r_1^2 \left[\tilde{k}_{2,r,s} J_1(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) J_0(k_{1,r,s} R_1) - k_{1,r,s} J_0(k_{2,r,s} R_1) J_1(k_{1,r,s} R_1) \right] & \text{para } k_{1,r,s} \neq \tilde{k}_{2,r,s} \end{array} \right. \quad (5.59) \\
&\quad \frac{k_{2,r,s}^2 - k_{1,r,s}^2}{}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) &= \\
&\left\{ \begin{array}{ll} \frac{R_1^2}{2} \left(J_0^2(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) - \left[C_3 J_0(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) + C_4 Y_0(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) \right]^2 - \right. \\ \left. \left[C_3 J_1(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) + C_4 Y_1(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) \right]^2 \right) + & (5.60) \\ \frac{R_1^2}{2} \left(\left[C_3 J_0(\tilde{k}_{2,r,s} R_2) + C_4 Y_0(\tilde{k}_{2,r,s} R_2) \right]^2 + \right. \\ \left. \left[C_3 J_1(\tilde{k}_{2,r,s} R_2) + C_4 Y_1(\tilde{k}_{2,r,s} R_2) \right]^2 \right) & \text{para } n = s \\ 0 & \text{para } n \neq s \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \Psi_{2,n}(x_2, y_2) \Psi_{3,s}(x_3, y_3) &= \int_{S_1} \Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{2,s}(x_2, y_2) = \\
&\left\{ \begin{array}{ll} R_1^2 \left[J_0^2(k_{1,r,s} R_1) + J_1^2(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) \right] & \text{para } k_{1,r,s} = \tilde{k}_{2,r,s} \\ R_1^2 \left[\tilde{k}_{2,r,s} J_1(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) J_0(k_{1,r,s} R_1) - k_{1,r,s} J_0(\tilde{k}_{2,r,s} R_1) J_1(k_{1,r,s} R_1) \right] & \text{para } k_{1,r,s} \neq \tilde{k}_{2,r,s} \end{array} \right. \quad (5.61) \\
&\quad \frac{\tilde{k}_{2,r,s}^2 - k_{1,r,s}^2}{}
\end{aligned}$$

$$\int_{S_1} \Psi_{3,n}(x_3, y_3) \Psi_{3,s}(x_3, y_3) = \begin{cases} \frac{R_1^2}{2} J_0^2(k_{1,r,s} R_1) & \text{para } n = s \\ 0 & \text{para } n \neq s \end{cases} \quad (5.62)$$

Los resultados obtenidos para esta geometría se muestran en la Figura 85 y la Figura 86, donde puede verse que el modelado adoptado para el material absorbente es relativamente aceptable, puesto que se obtienen resultados similares a los experimentales, aunque algo menores en general. También puede verse en la Figura 85 que los resultados tanto con el método directo como con el de subestructuración propuesto son similares, lo que reafirma que el método de subestructuración planteado converge adecuadamente.

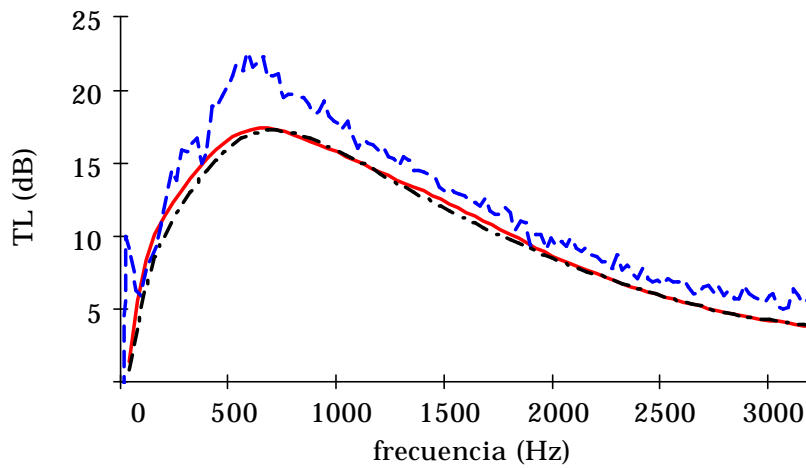


Figura 85. TL para el silenciador RCC1. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales, - • - ajuste modal con método directo.

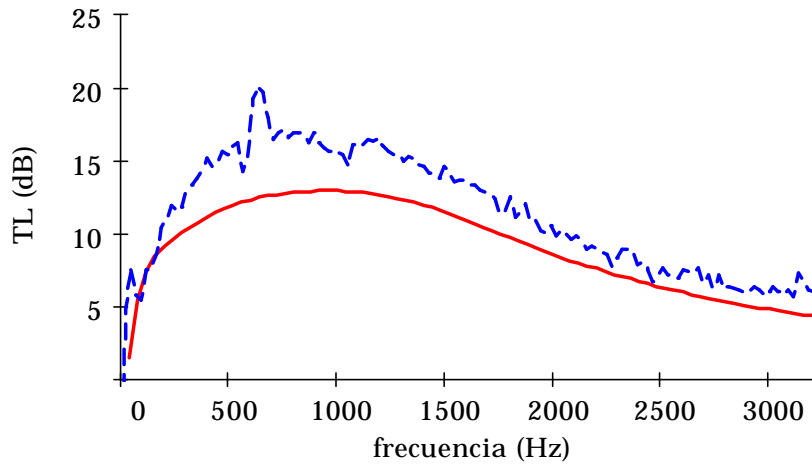


Figura 86. TL para el silenciador RCC2. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

5.7.2. Resonador concéntrico de sección circular descentrado

Aplicaremos ahora el método de ajuste modal al caso de un resonador concéntrico descentrado de sección circular con la cámara rellena de material absorbente (ver Figura 87). Se aplicará el método de ajuste modal junto con el método de subestructuración para la sección transversal de la cámara. En este caso los modos de los subdominios no se conocen analíticamente y se calculan a través del método de los elementos finitos.

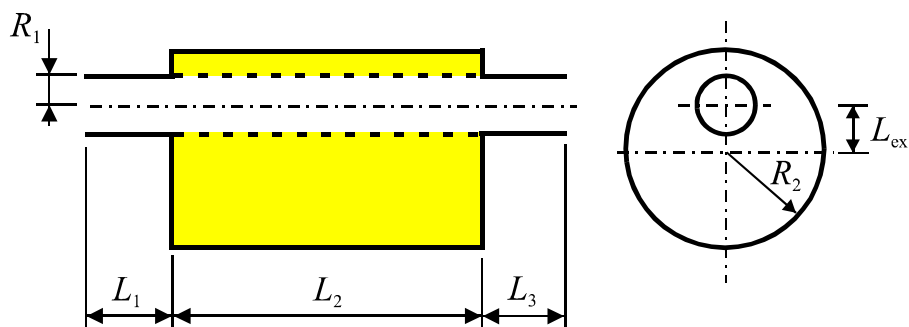


Figura 87. Resonador concéntrico de sección circular.

Las dimensiones del silenciador son $R_1 = 0,0268$ m, $R_2 = 0,0906$ m, $L_1 = L_3 = 0,1$ m, $L_2 = 0,148$ m, $L_{ex} = 0,068$ m, además de las características del perforado diámetro de orificio $d_h = 0,003$ m y espesor del perforado $t_p = 0,0023$ m y de las dimensiones variables que se detallan en la tabla siguiente

Nombre	s (%)	densidad (g/l)
RCD1	5	44
RCD2	10	44
RCD3	5	71

Se considerarán los siguientes tramos y secciones

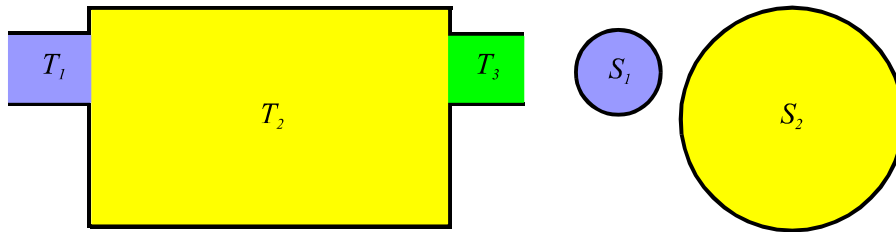


Figura 88. Tramos y secciones en que se divide el silenciador.

Las mallas de elementos finitos utilizadas se muestran en la Figura 89. Y de la Figura 90 a la Figura 93 podemos ver algunos de los modos de presión nula y velocidad nula que forman la base natural a partir de la cual se obtienen los modos de la sección conjunta del tramo T_2 .

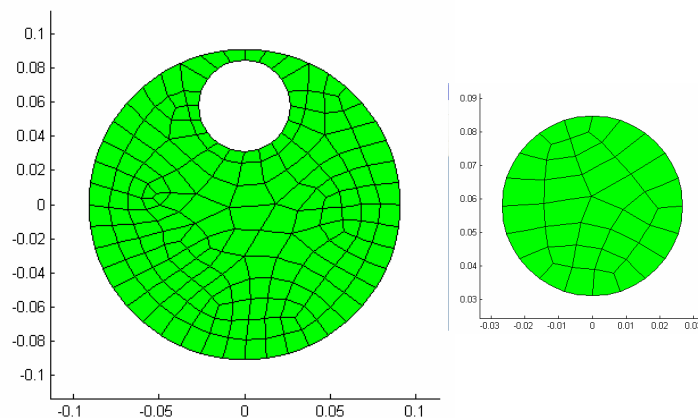


Figura 89. Mallas utilizadas para la obtención de los modos transversales.

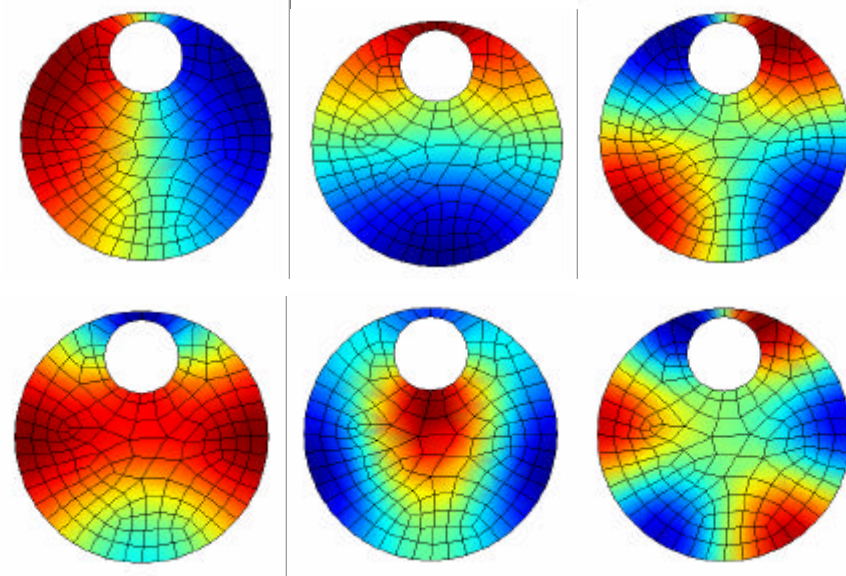


Figura 90. Algunos modos de presión cero para el subdominio S_2 .

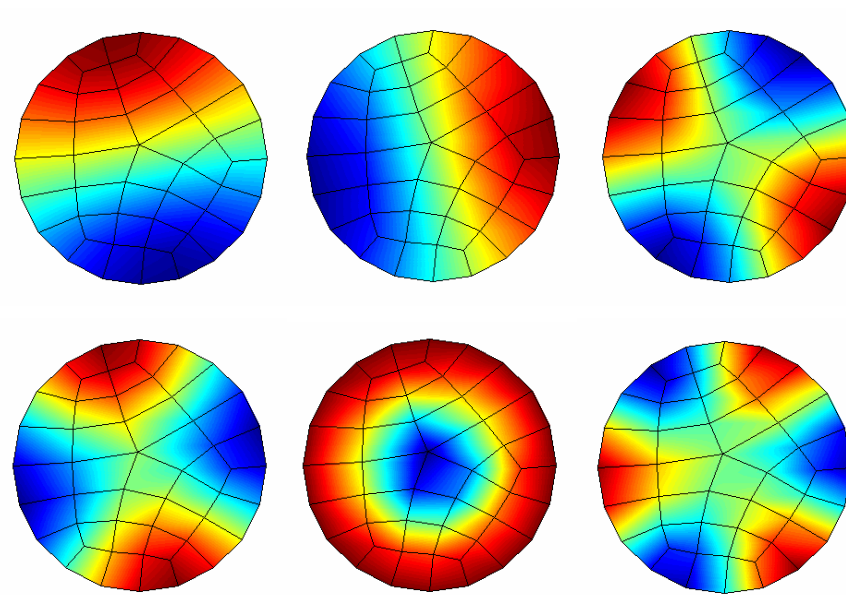


Figura 91. Algunos modos de presión cero para el subdominio S_1 .

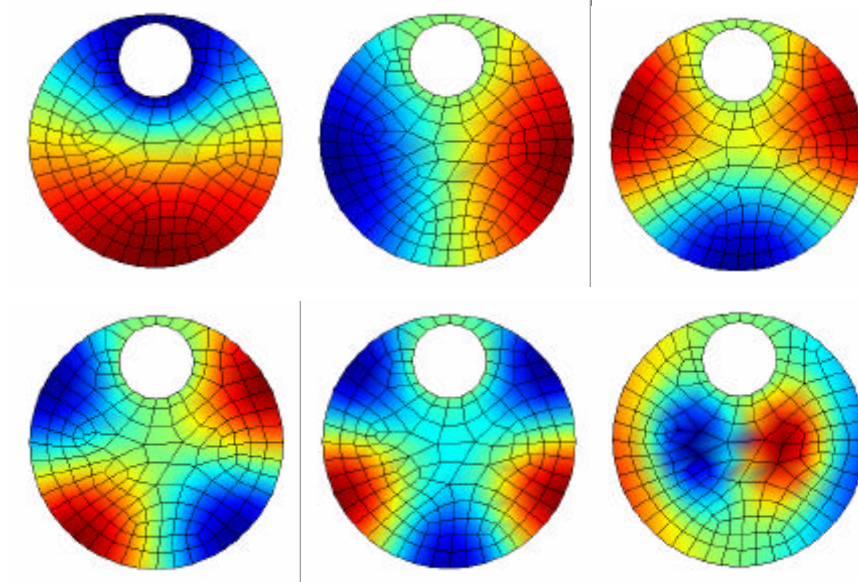


Figura 92. Algunos modos de velocidad cero para el subdominio S_2 .

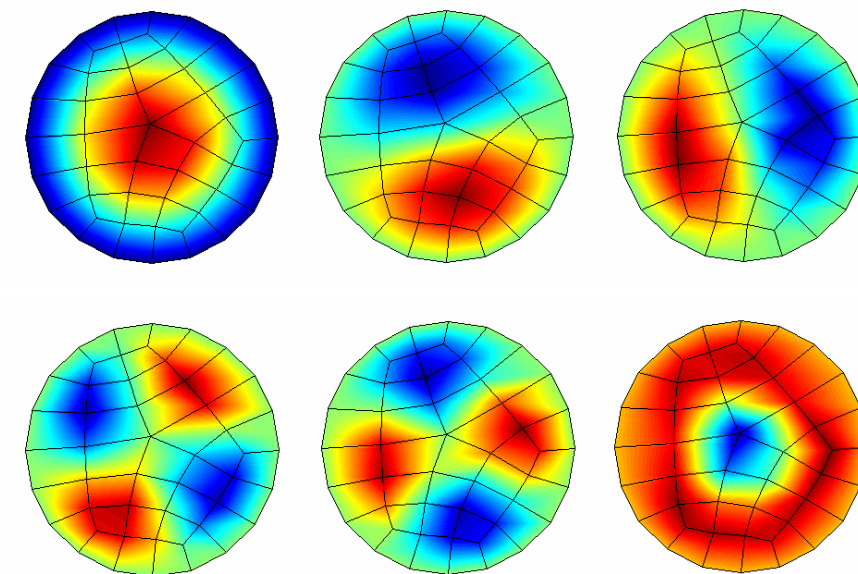


Figura 93. Algunos modos de velocidad cero para el subdominio S_1 .

Los resultados obtenidos para este silenciador se muestran en la Figura 94 y siguientes, donde se observa una buena concordancia entre el modelo propuesto y los resultados experimentales, tanto para varias porosidades de perforado como varias densidades de material.

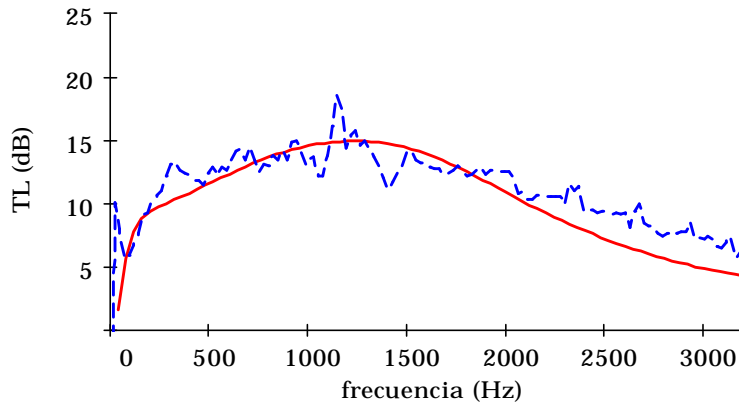


Figura 94. TL para el silenciador RCD1. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

Al contrario que en el ejemplo anterior, al aumentar la densidad del material el modelo de impedancia del perforado se ajusta mejor. A altas frecuencias el ajuste siempre empeora, lo que indica que la parte imaginaria de Z_p se ve más afectada, puesto que se modifica con W mientras que la parte real no.

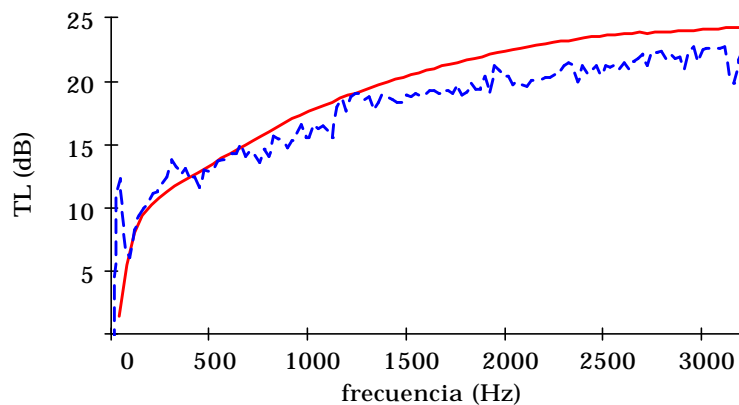


Figura 95. TL para el silenciador RCD2. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

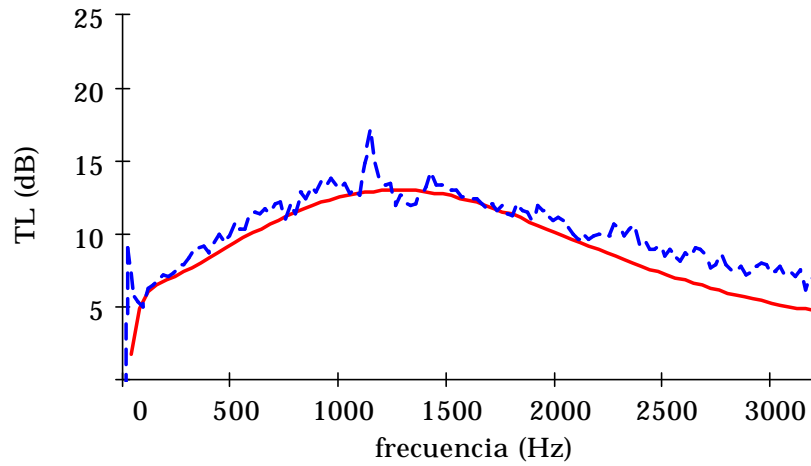


Figura 96. TL para el silenciador RCD3. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

5.7.3. Cámara circular con extendidos

Estudiaremos ahora una cámara de expansión simple de sección circular con diferentes longitudes de extendidos. Al igual que en el caso 5.7.1, los modos de todos los subdominios se conocen analíticamente.

Tenemos el siguiente silenciador

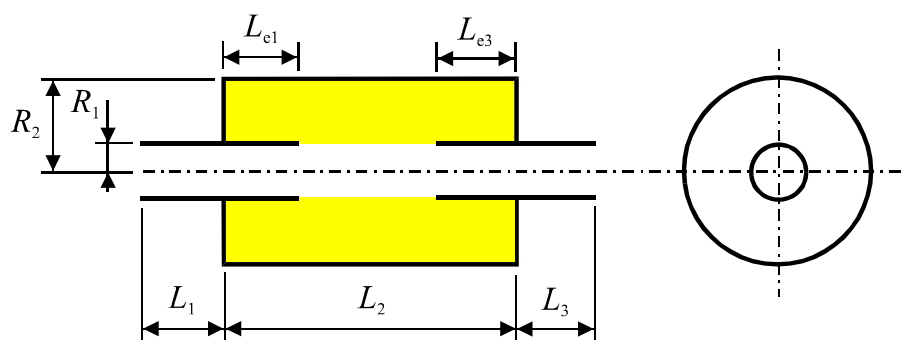


Figura 97. Resonador concéntrico circular con extendidos.

Se considerarán los mismos tramos y secciones que en la Figura 84. Las dimensiones del silenciador son $R_1 = 0,0268$ m, $R_2 = 0,0906$ m, $L_1 = L_3 = 0,1$ m, con una densidad de absorbente de 44 g/l, además de las dimensiones variables que se detallan a continuación

Nombre	L_2 (m)	L_{e1} (m)	L_{e2} (m)
CSE1	0,148	0,000	0,000
CSE2	0,148	0,048	0,000
CSE3	0,148	0,040	0,008
CSE4	0,148	0,030	0,018
CSE5	0,224	0,076	0,000
CSE6	0,224	0,066	0,010
CSE7	0,224	0,046	0,030
CSE8	0,224	0,094	0,030

En las figuras siguientes, que muestra el índice de pérdidas por transmisión TL para la geometría en estudio, vemos que el modelo utilizado para representar el absorbente se adapta razonablemente a los resultados experimentales.

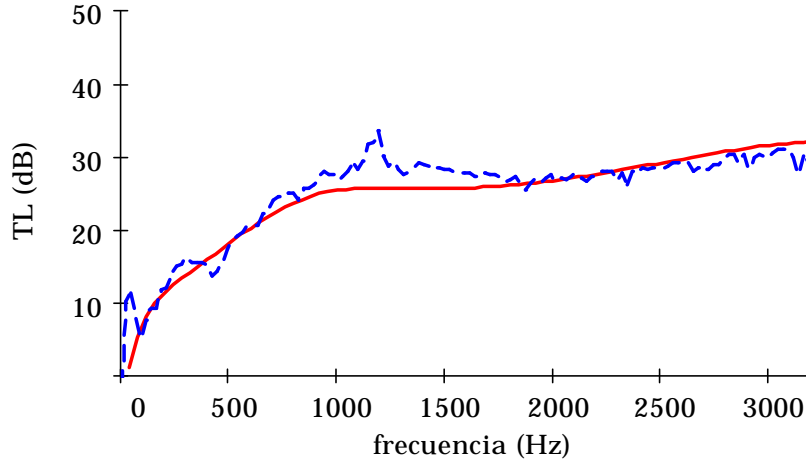


Figura 98. TL para el silenciador CSE1. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

A muy baja frecuencia los resultados experimentales presentan un error apreciable y no son válidos. Esto es debido a la limitación de la separación de los micrófonos en el banco de ensayos, lo que no permite una buena resolución a bajas frecuencias.

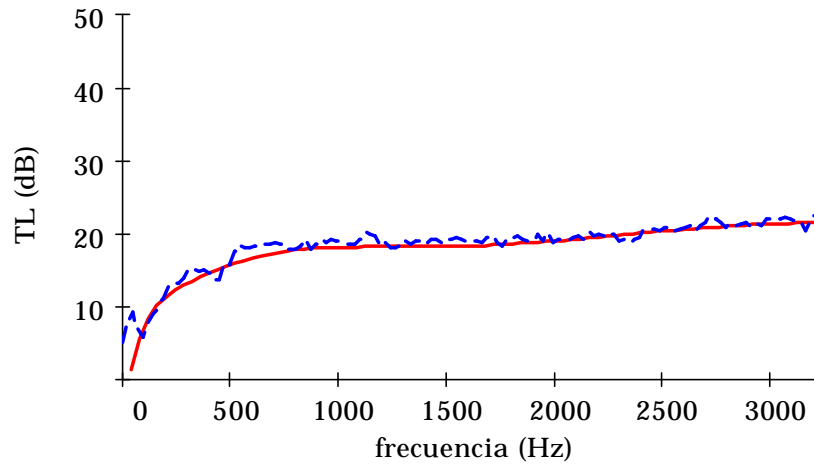


Figura 99. TL para el silenciador CSE2. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

Cuanto menor es la atenuación más se ajustan los resultados teóricos y los experimentales entre sí. También se aprecia que manteniendo la longitud total del silenciador, la inclusión de tubos extendidos de diversa longitud no mejora el TL.

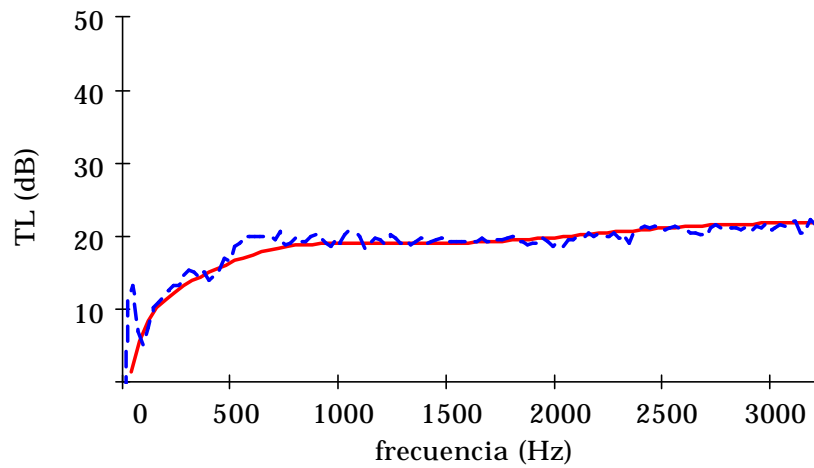


Figura 100. TL para el silenciador CSE3. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

Estas configuraciones con material absorbente tanto en el anillo exterior de la cámara como en el de los tubos extendidos, se caracterizan por un TL relativamente plano a altas frecuencias, al contrario de lo que sucede con los silenciadores de tipo reactivo en que la curva se deteriora considerablemente a esas frecuencias.

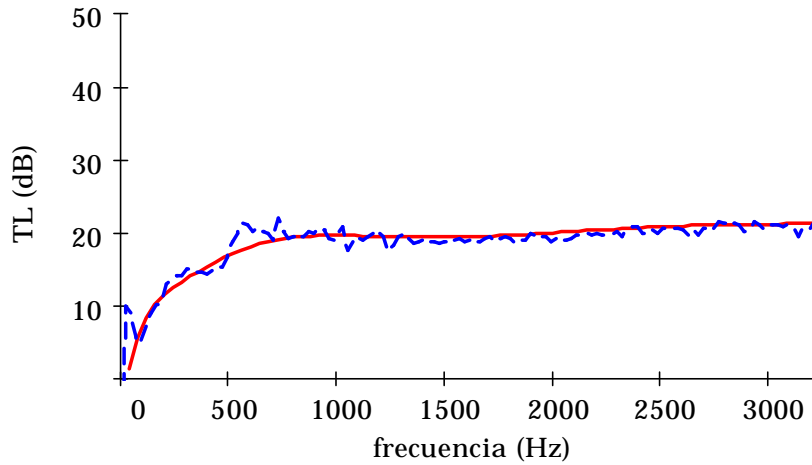


Figura 101. TL para el silenciador CSE4. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

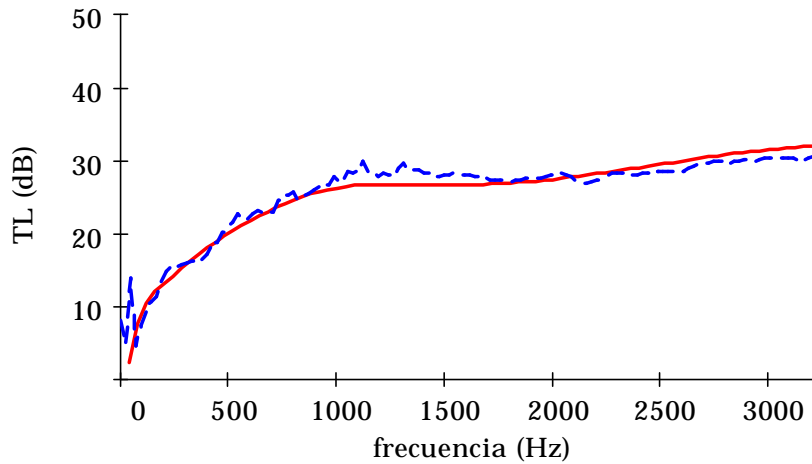


Figura 102. TL para el silenciador CSE5. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

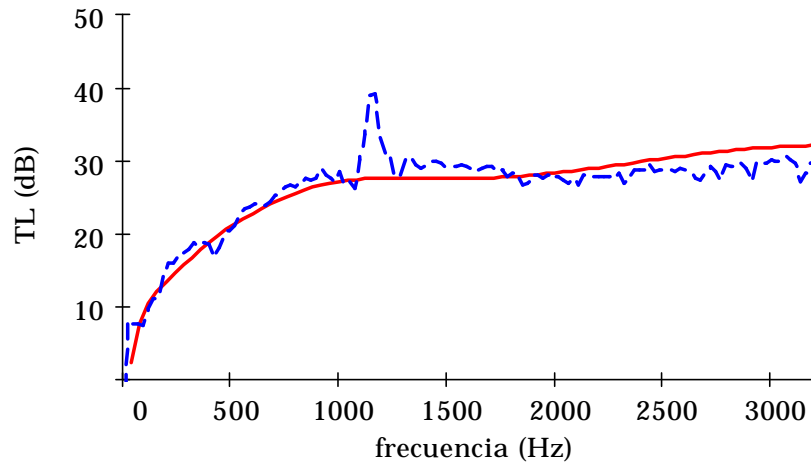


Figura 103. TL para el silenciador CSE6. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

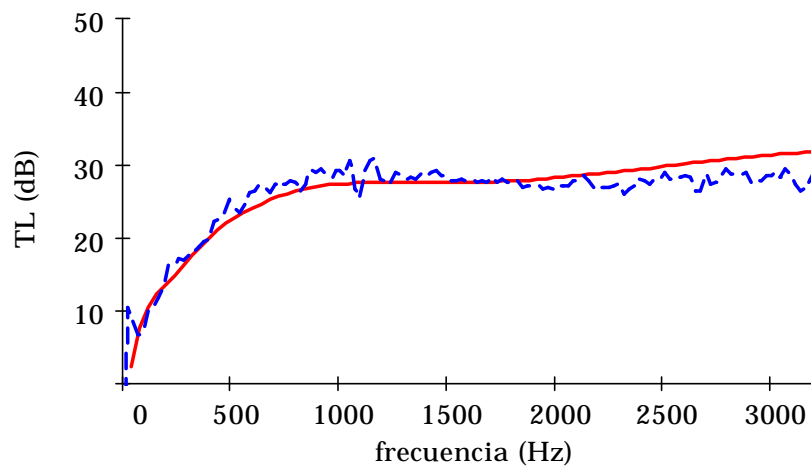


Figura 104. TL para el silenciador CSE7. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

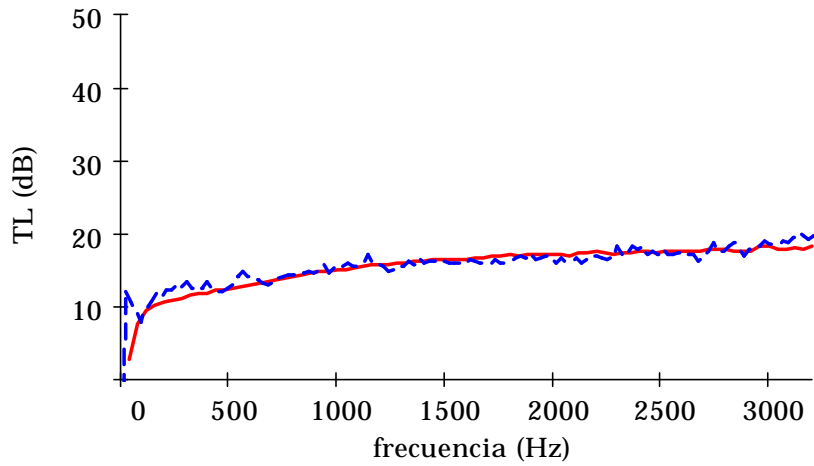


Figura 105. TL para el silenciador CSE8. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

5.7.4. Cámara circular con extendidos descentrados

En este apartado analizaremos una cámara de sección circular con diferentes longitudes de extendidos pero en este caso con el tubo descentrado como se muestra en la Figura 106. Los modos ya no se conocen analíticamente y deben ser calculados mediante elementos finitos.

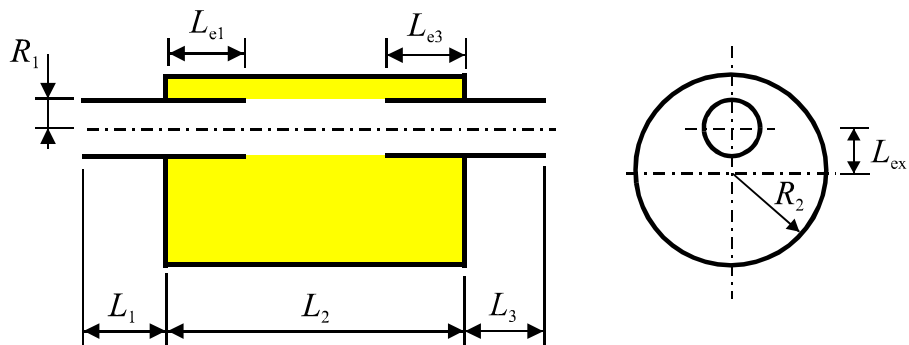


Figura 106. Silenciador circular excéntrico con extendidos.

Se considerarán los mismos tramos y secciones que en el caso 5.7.2. Las dimensiones del silenciador son $R_1 = 0,0268$ m, $R_2 = 0,0906$ m, $L_1 = L_3 = 0,1$ m, $L_{ex} = 0,0583$ m, además de las dimensiones variables siguientes

Nombre	L_2 (m)	L_{e1} (m)	L_{e2} (m)
CDE1	0,148	0,000	0,000
CDE2	0,148	0,048	0,000
CDE3	0,148	0,040	0,008
CDE4	0,148	0,030	0,018
CDE5	0,224	0,000	0,000
CDE6	0,224	0,076	0,000
CDE7	0,224	0,066	0,010
CDE8	0,224	0,046	0,030
CDE9	0,224	0,094	0,030

En las siguientes figuras vemos que el modelo utilizado para representar el absorbente sigue adaptándose razonablemente a los resultados experimentales. La influencia de los extendidos es poca, al menos con las longitudes ensayadas, puesto que queda amortiguada por la presencia del material absorbente.

En el cambio de pendiente que aparece en el TL sobre los 100 Hz, la curva experimental siempre queda por encima de la teórica, y por lo tanto la atenuación real es ligeramente mejor a la prevista. También hay que tener presente que en ese rango de frecuencias el método de ensayo no permite obtener resultados con mucha precisión.

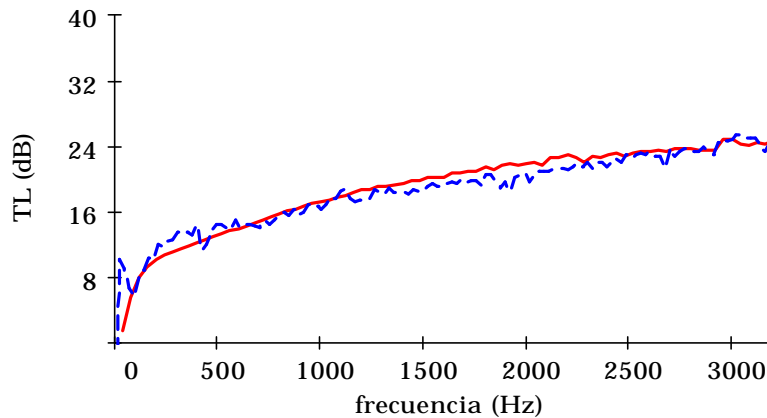


Figura 107. TL para el silenciador CDE1. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

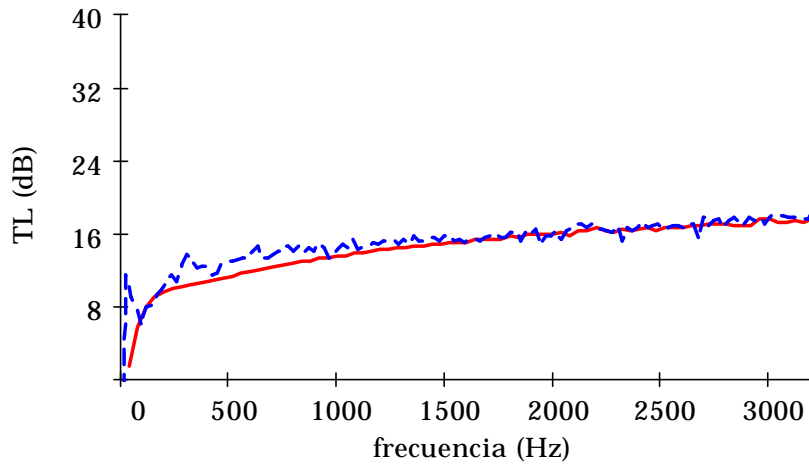


Figura 108. TL para el silenciador CDE2. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

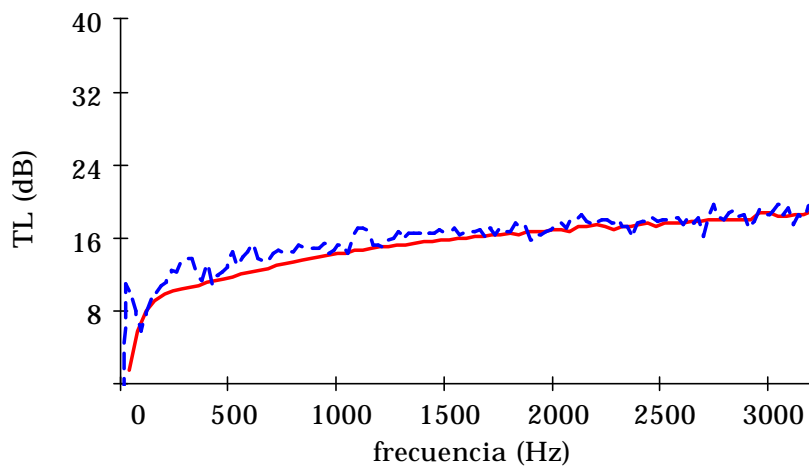


Figura 109. TL para el silenciador CDE3. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

El nivel de atenuación a alta frecuencia depende de la longitud de la cámara que queda entre los extendidos, así al introducir un extendido sin modificar la longitud total del silenciador, la de la cámara se reduce y la atenuación máxima disminuye.

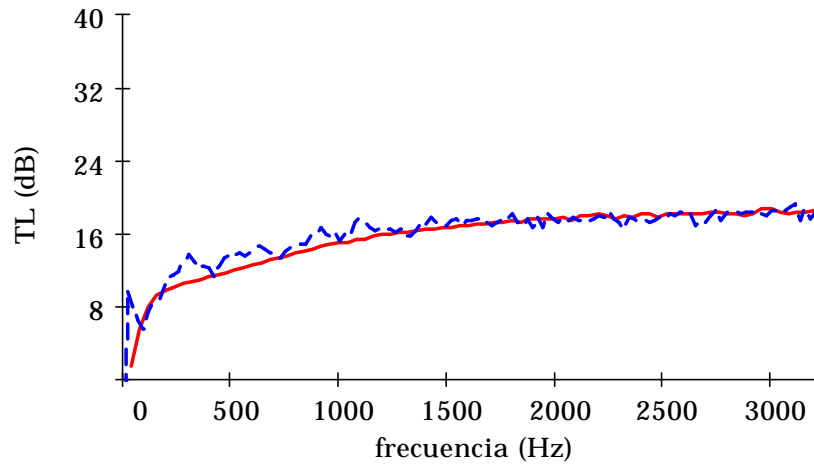


Figura 110. TL para el silenciador CDE4. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

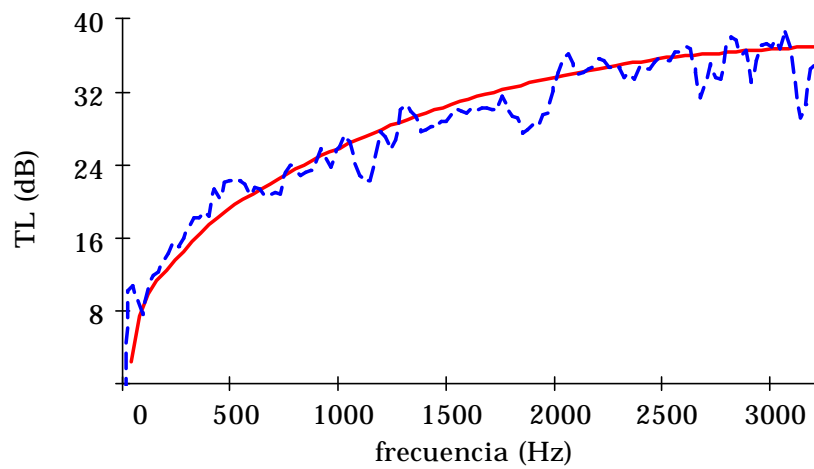


Figura 111. TL para el silenciador CDE5. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

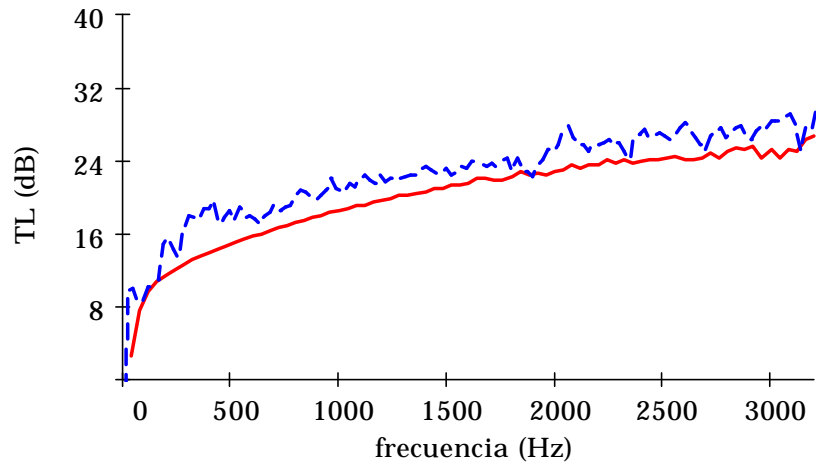


Figura 112. TL para el silenciador CDE6. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

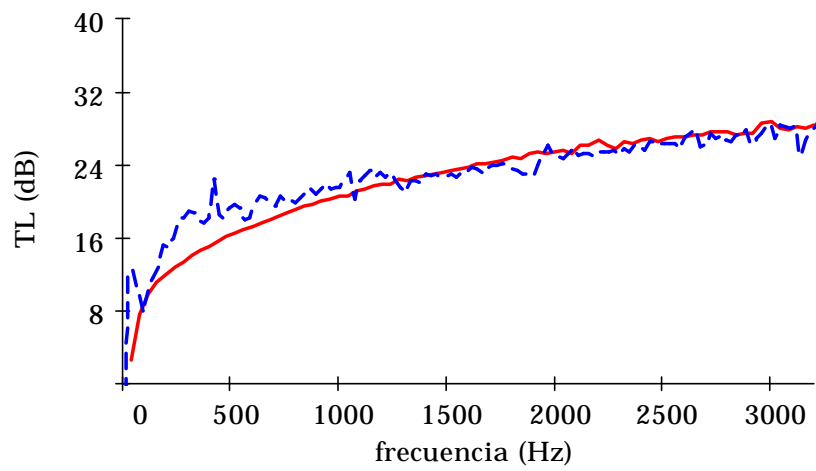


Figura 113. TL para el silenciador CDE7. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

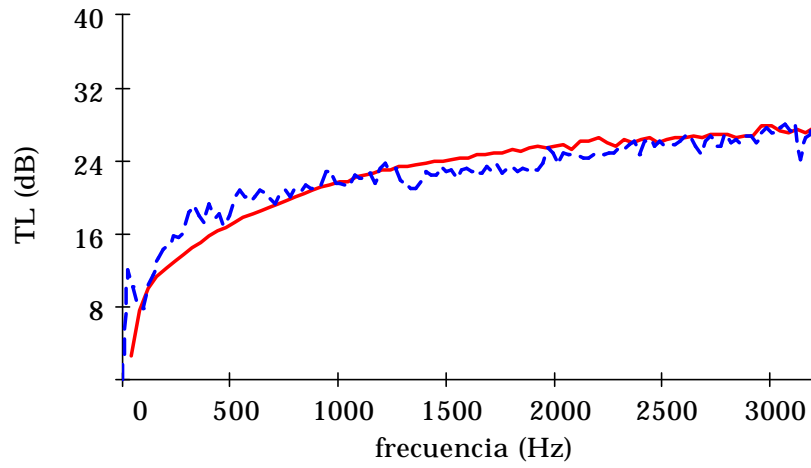


Figura 114. TL para el silenciador CDE8. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

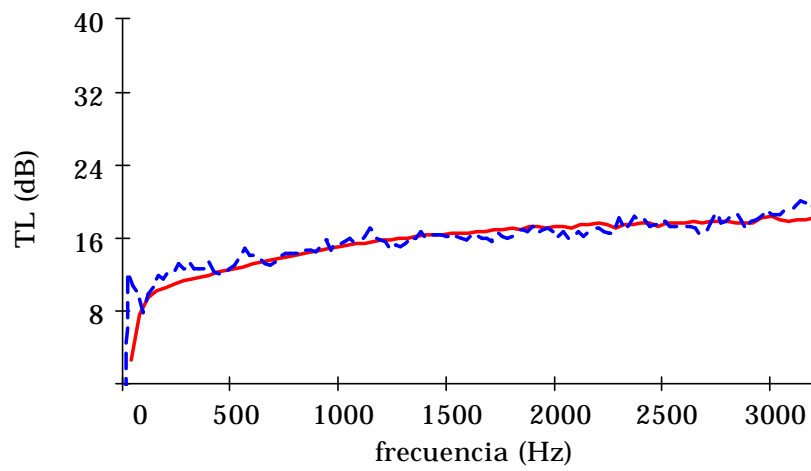


Figura 115. TL para el silenciador CDE9. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

5.7.5. Resonador excéntrico de sección oval

A continuación aplicaremos el método de ajuste modal junto con el método de síntesis modal o subestructuración al caso de un resonador concéntrico de sección oval como el que muestra la Figura 116. Se aplicará el método de subestructuración para la sección transversal de la cámara. Si la sección de la cámara se divide entre anillo oval y tubo interior, los modos transversales del anillo no se conocen por lo que se calcularon numéricamente los modos de ambos subdominios.

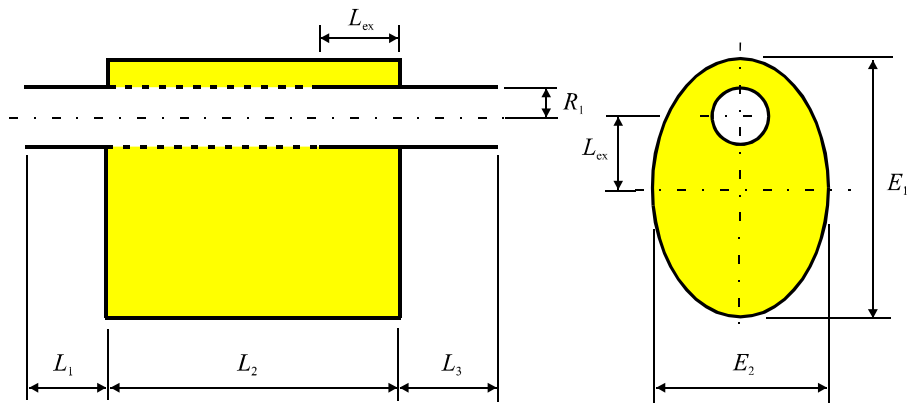


Figura 116. Resonador excéntrico de sección oval.

Las dimensiones del silenciador son $R_1 = 0,0265$ m, $L_1 = L_3 = 0,1$ m, $L_{ex} = 0,071$ m, $E_1 = 0,23$ m y $E_2 = 0,13$ m. Las características del perforado son diámetro de orificio $d_h = 0,003$ m, espesor del perforado $t_p = 0,001$ m y porosidad $s = 11\%$. A continuación se detallan las dimensiones variables, siendo d la densidad del material utilizado

Nombre	L_2 (m)	L_{ex} (m)	d (g/l)
ODE1	0,165	0,000	44
ODE2	0,165	0,000	71
ODE3	0,200	0,035	44
ODE4	0,200	0,035	71

Se considerarán los siguientes tramos y secciones

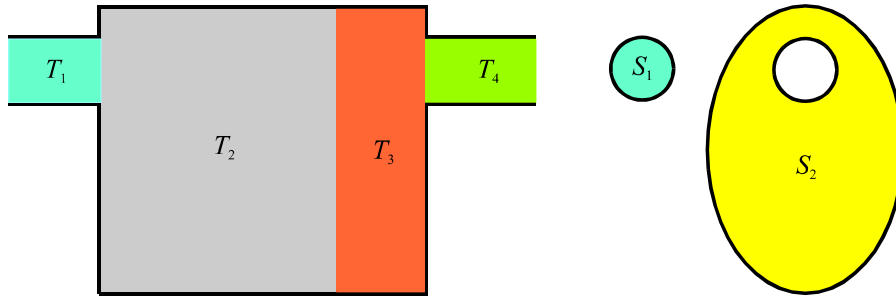


Figura 117. Tramos y secciones en que se divide el silenciador.

En coordenadas cilíndricas la ecuación de ondas en la sección S_1 vendrá dada por

$$P_1(r, z) = \sum_{n=0}^N (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} + C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (5.63)$$

donde n es el número del modo, (r, z) las coordenadas cilíndricas, $C_{1,n}^\pm$ los coeficientes de onda, $\Psi_{1,n}(R_1)$ el modo de presión transversal dado por la función de Bessel de primera clase y orden cero $J_0(k_{1,r,n}R_1)$ por tratarse de un conducto circular, y $k_{1,r,n}$ el número de onda radial que se obtiene al satisfacer la condición de frontera de pared rígida $J_0'(k_{1,r,n}R_1) = 0$. El número de onda axial $k_{1,z,n}$ del modo n está definido por:

$$k_{1,z,n} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_{1,r,n}^2} & k_0 > k_{1,r,n} \\ -j\sqrt{k_{1,r,n}^2 - k_0^2} & k_0 < k_{1,r,n} \end{cases} \quad (5.64)$$

con $k_0 = \omega/c_0$ el número de onda del aire, y ω la frecuencia angular.

La velocidad acústica a partir de la presión es

$$U_{z,1}(r, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^N k_{1,z,n} (C_{1,n}^+ e^{-jk_{1,z,n}z} - C_{1,n}^- e^{jk_{1,z,n}z}) \Psi_{1,n}(r) \quad (5.65)$$

siendo ρ_0 la densidad.

Para el anillo oval que resta de eliminar a la sección total del tramo T_2 la sección del subdominio 1, no se pueden obtener sus modos analíticamente por lo que se debe recurrir a su cálculo numérico, en este caso mediante el método de los elementos finitos. La malla que se utilizó para su obtención se muestra en la Figura 118

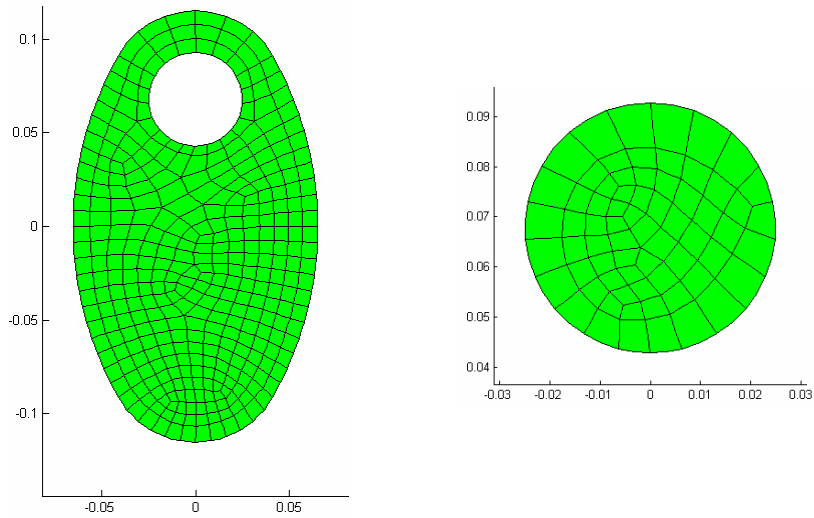


Figura 118. Mallas utilizadas para la obtención de los modos transversales con elementos finitos.

Una vez obtenidos los modos transversales tendríamos para la sección del tramo T_2 que

$$P_2(r, z) = \sum_{n=0}^N (C_{2,n}^+ e^{-j\tilde{k}_{2,z,n}z} + C_{2,n}^- e^{j\tilde{k}_{2,z,n}z}) \Psi_{2,n}(r) \quad (5.66)$$

siendo $\tilde{k}_{2,r,n}$ obtenida numéricamente al mismo tiempo que los modos $\Psi_{2,n}$.

Las ecuaciones que resultan de aplicar el método de subestructuración a la sección del tramo T_2 son similares a las del caso 5.7.1 de resonador concéntrico de sección circular. Al igual que el sistema de ecuaciones que resulta del ajuste modal entre los diferentes tramos, con las diferencia que las integrales se pueden calcular de manera más sencilla como producto de matrices tal y como se vio en el apartado 3.6.2.

Los resultados obtenidos para este silenciador se muestran entre la Figura 119 y la Figura 122. La correspondencia entre los resultados experimentales y los obtenidos con el método presentado son razonables aunque menor que en otros ejemplos previos. Posiblemente el factor que más influencia haya tenido en ello es la presencia de tubos perforados cuya caracterización ha tenido los problemas señalados en el Capítulo 4.

Al contrario de lo que sucedía en los resonadores de sección transversal circular, en este caso el TL disminuye a alta frecuencia, posiblemente debido a que la frecuencia de corte de los modos transversales es menor en este caso.

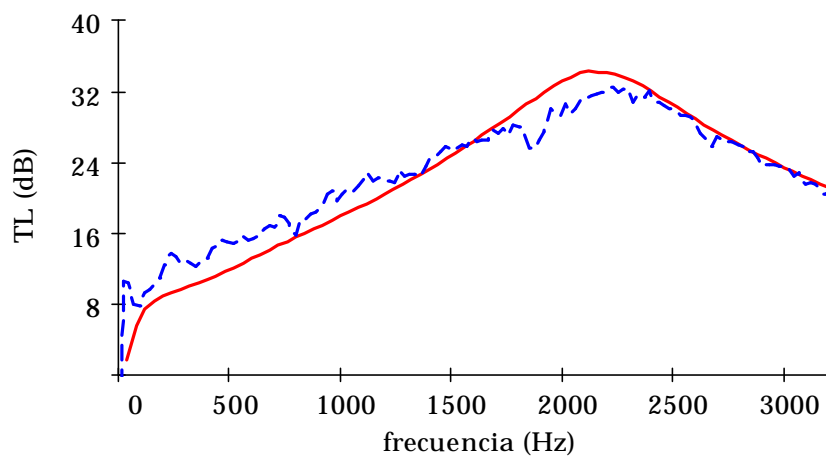


Figura 119. TL para el silenciador ODE1. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

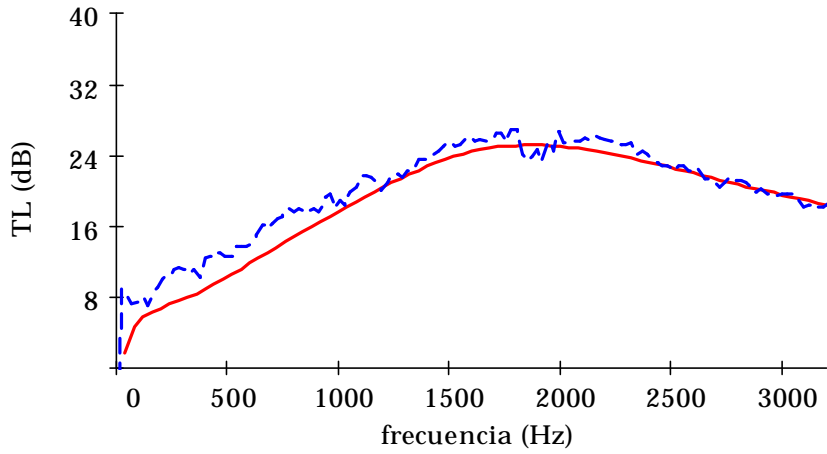


Figura 120. TL para el silenciador ODE2. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

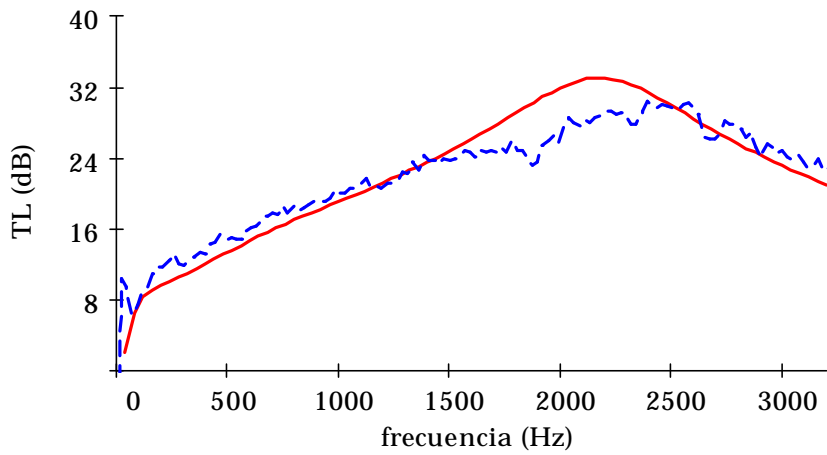


Figura 121. TL para el silenciador ODE3. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

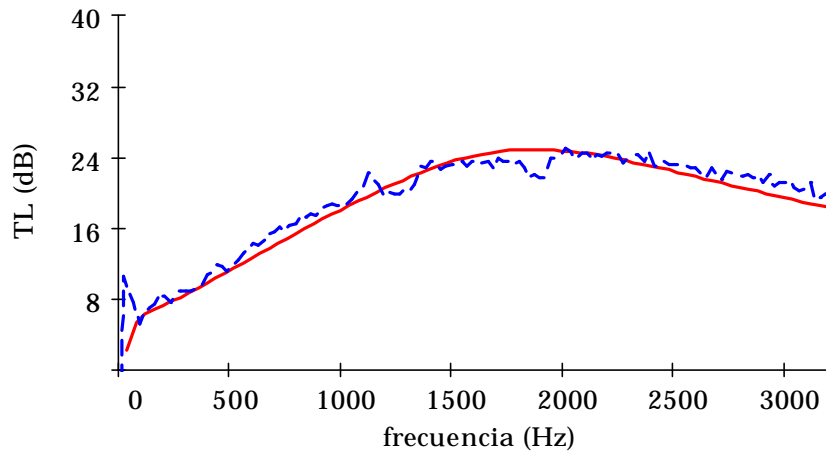


Figura 122. TL para el silenciador ODE4. - ajuste modal con subestructuración, - - resultados experimentales.

5.8. Ejemplos de localización del material absorbente dentro del silenciador

5.8.1. Introducción

En este apartado se tratará de evaluar si se puede mejorar el comportamiento acústico de un silenciador reactivo añadiendo material absorbente y observando cuales son las disposiciones más adecuadas. Con el fin de partir de un silenciador reactivo con una buena configuración, se ha utilizado el resonador circular concéntrico con tubos extendidos optimizado presentado por Selamet en [65].

5.8.2. Silenciador reactivo de referencia

Partimos de una cámara de expansión simple con extendidos optimizados [65] a la que se llamará CSE (ver Figura 123) y que tiene las siguientes dimensiones

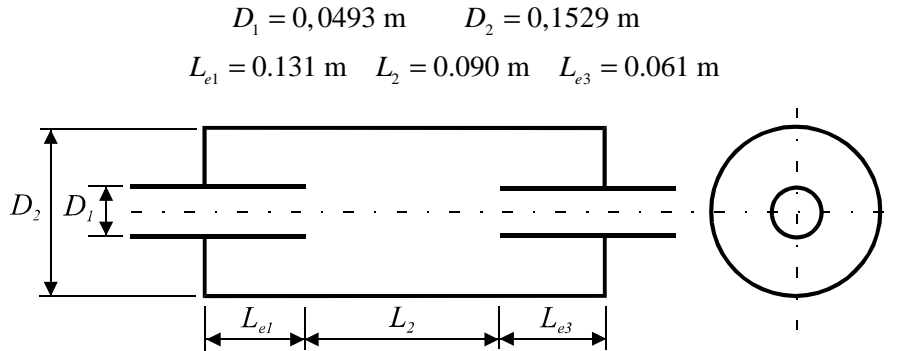


Figura 123. Silenciador con tubos extendidos optimizados.

En la Figura 124 vemos comparado el TL de dicha cámara optimizada y el de una cámara simple sin extendidos de longitud L_2 (llamada CS) donde se ve claramente la mejora al introducir los extendidos de longitudes tales que eliminen las bandas de paso.

La presencia de tubos extendidos introduce picos de resonancia a frecuencias que dependen de la longitud de los mismos. Así la longitud de 0,131 m introduce los picos a 600 Hz y 1800 Hz eliminando la banda de paso cercana a los 2000 Hz, y la longitud de 0,061 m introduce el pico a 1200 Hz que eleva la curva resultante entre los dos anteriores obteniendo finalmente un TL elevado en una amplia banda de frecuencias.

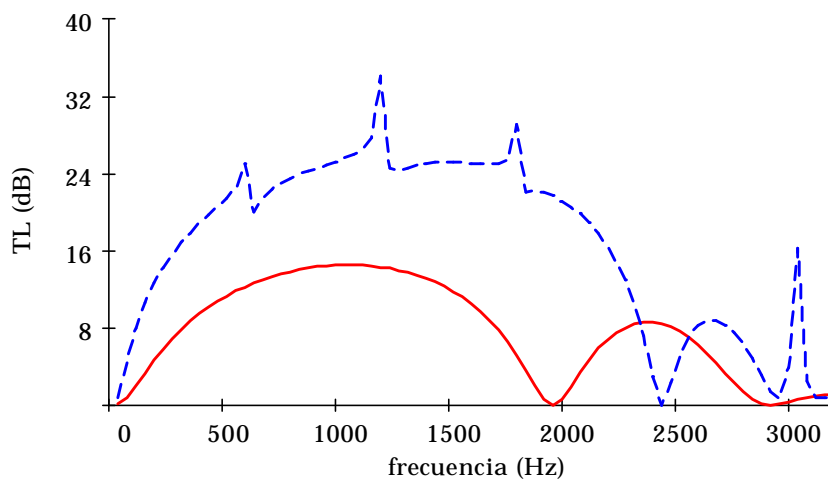


Figura 124. TL para las configuraciones sin material absorbente.

- CS, - - CSE.

5.8.3. Tubos extendidos llenos de material absorbente

A continuación se pretende evaluar si colocando sólo material absorbente en los tubos extendidos se puede mejorar el silenciador de referencia. Para ello se ha estudiado el silenciador con extendidos rellenos de material absorbente de la Figura 125 en el que se han optimizado la longitud de sus extendidos, considerando finalmente las longitudes $L_{e1} = 0,101$ m y $L_{e2} = 0,049$ m.

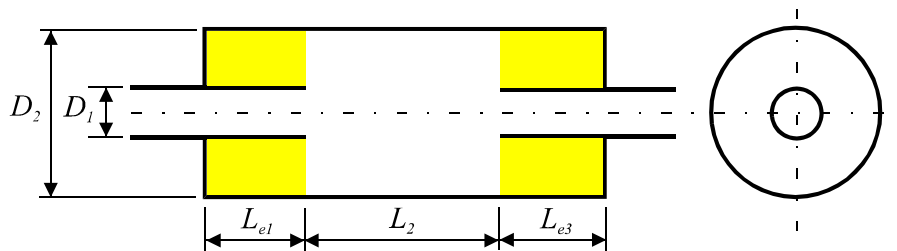


Figura 125. Silenciador con tubos extendidos rellenos de absorbente.

La Figura 126 muestra los resultados de TL obtenidos para el silenciador optimizado con material absorbente CSEA, el de referencia CSE y la cámara de expansión simple CS.

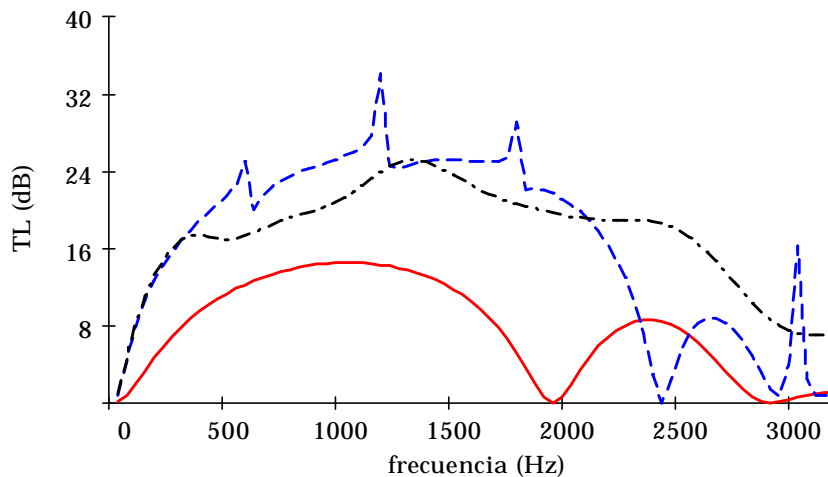


Figura 126. TL para los siguientes silenciadores:

- CS, - - CSE, - · - CSEA.

Se observa que con la configuración optimizada con absorbente en los extendidos se obtienen niveles de atenuación similares a la configuración reactiva pero que en general quedan por debajo, esto es debido a que el extendido con material absorbente carece realmente de una frecuencia de resonancia. Sin embargo mejora la atenuación residual a altas frecuencias. En principio, aunque se consigue reducir la longitud total del silenciador, la configuración reactiva es mejor que la que contiene material absorbente en un amplio rango de frecuencias.

En la Figura 127 se comparan los TL de la configuración reactiva optimizada CSE, el de la misma geometría llenando los extendidos con absorbente CSE2, y la correspondiente a la geometría optimizada con absorbente que tiene extendidos ligeramente menores CSEA. Llenar los extendidos con material absorbente modifica las longitudes de máxima atenuación asociada a los extendidos y no se obtiene una mejora sustancial. Tanto el TL asociado a la cámara CSE2 como la CSEA son peores que la reactiva lo que pone de manifiesto que al rellenar los extendidos con material absorbente no es posible en ningún caso mejorar el comportamiento de la cámara reactiva optimizada para un amplio rango de frecuencias, aunque sí a altas frecuencias.

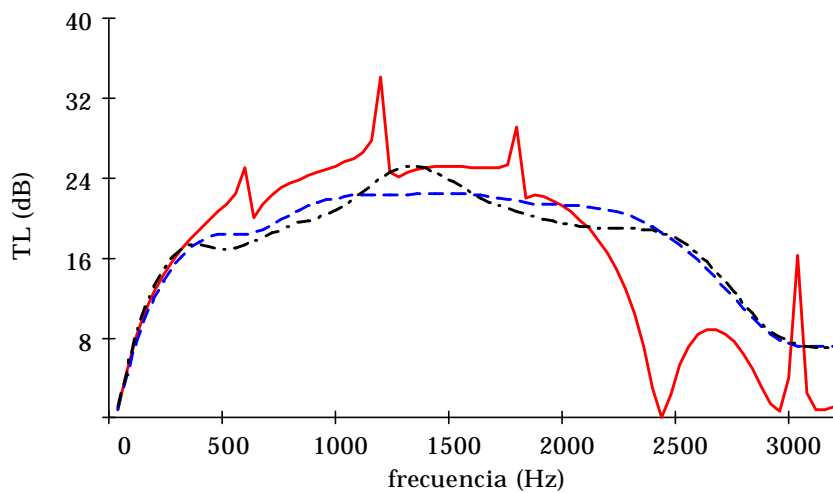


Figura 127. TL para los silenciadores:

- CSE, - - CSE2, - · - CSEA.

5.8.4. Tubos extendidos sin material absorbente

Dado que el poner material absorbente en los extendidos no parece mejorar el comportamiento del silenciador, se estudian a continuación configuraciones con la cámara llena de absorbente, pero dejando aire en los extendidos (ver Figura 128Figura 129) y se comparan con la configuración reactiva y con configuraciones con absorbente tanto en la cámara como en los extendidos. Se ha adoptado esta configuración puesto que es fácil demostrar que la disposición del material en la zona de los extendidos prácticamente no tiene influencia en el TL y que la máxima atenuación se consigue con la máxima longitud de material absorbente en zona de la cámara.

Nombre	D_1 (m)	D_2 (m)	L_2 (m)	L_{ex1} (m)	L_{ex2} (m)
CAE1	0,0493	0,1529	0,090	0,131	0,061
CAE2	0,0493	0,1529	0,090 </td <td>0,101</td> <td>0,049</td>	0,101	0,049

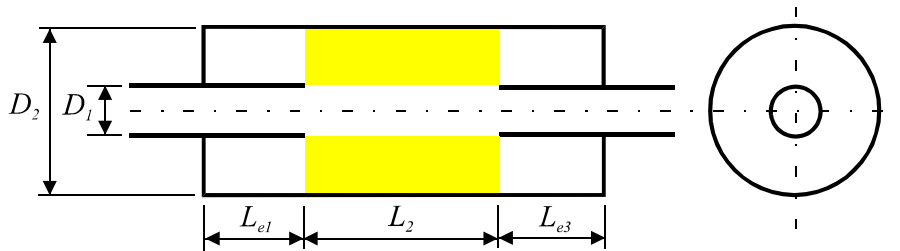


Figura 128. Silenciador absorbente en la cámara y aire en los extendidos.

En la Figura 129 vemos la diferencia de considerar toda la cámara con aire CSE, considerar la cámara con absorbente pero los extendidos con aire CAE1 y finalmente toda la cámara con absorbente CSA. Vemos claramente como es preferible no poner material en los extendidos, puesto que la atenuación es mayor en un rango de frecuencias más amplio, aproximadamente entre los 500 y los 2000 Hz.

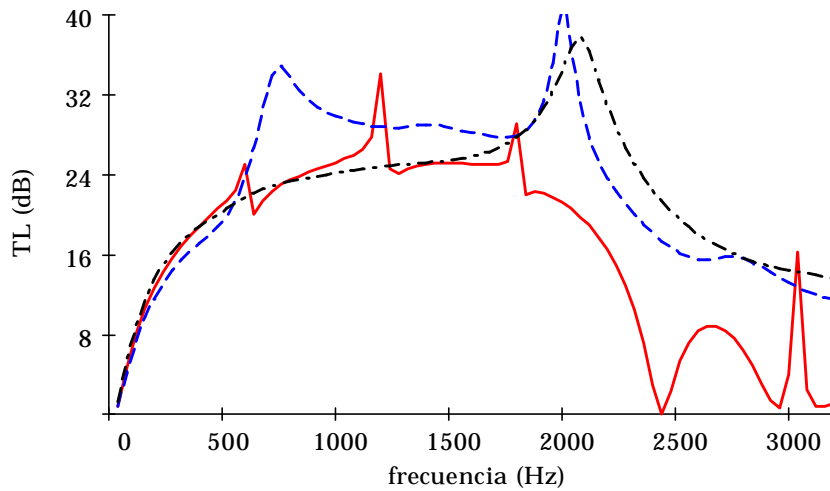


Figura 129. TL para los silenciadores:

- CSE, - - CAE1, - · - CSA.

Dado que la configuración más favorable parece ser la de la cámara con absorbente y aire en los extendidos, comparamos a continuación las dos geometrías que se han estudiado hasta ahora de longitudes de extendidos diferentes con esta disposición del absorbente. En la Figura 130 vemos el resultado para la cámara reactiva de referencia (CSE), dicha geometría con absorbente en la cámara (CAE1) y la geometría con extendidos menores y absorbente en la cámara (CAE2). La diferencia entre estas dos últimas depende del rango de frecuencias considerado, pues los picos de resonancia se desplazan en función de la longitud de los extendidos, aunque en general ambas curvas tienen niveles similares, por lo que puede ser interesante reducir la longitud de los extendidos y con ello la longitud total del silenciador.

En todo caso según los requisitos exigidos al silenciador podrían optimizarse los extendidos para mejorar la atenuación en una banda deseada. Aún así cabe destacar que las longitudes que optimizan el silenciador reactivo no son necesariamente las que optimizan el silenciador disipativo.

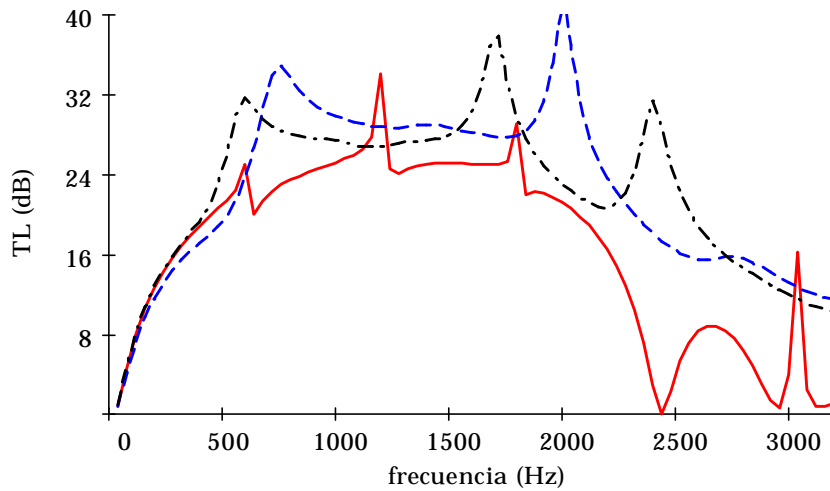


Figura 130. TL para los silenciadores:
- CSE, - - CAEA1, - · - CAEA2.

5.9. Conclusiones

En este capítulo se ha incorporado la presencia de materiales absorbentes en el modelado de silenciadores, exponiendo las particularidades de trabajar con medios distintos del aire. A destacar que los números de onda, la velocidad de propagación de la misma y la densidad de los materiales absorbentes se vuelven complejos. Además todos los números de onda axiales están atenuados debidos al material y no pueden distinguirse entre modos evanescentes cuya frecuencia de corte no ha sido alcanzada, y modos que se propagarían por frecuencia pero que están atenuados por la presencia del material.

Se han aplicado los modelos obtenidos a la resolución de diferentes configuraciones de silenciadores, comparándolas con resultados experimentales para su validación. Al comparar los resultados de los modelos propuestos con los correspondientes experimentales, se observan multitud de factores a considerar, aunque es el modelo de impedancia en los perforados el que más influencia puede tener.

Además se ha estudiado como afecta la disposición del absorbente dentro del silenciador, concluyendo que una buena configuración es aquella que tiene extendidos con aire y donde el absorbente se dispone en el resto de la cámara en forma de anillo central.

Capítulo 6. Conclusiones y líneas de investigación futuras

6.1. Conclusiones y aportaciones

En respuesta a los objetivos de la Tesis, y en especial al fundamental de desarrollar un modelo para el estudio del comportamiento acústico de silenciadores disipativos, se recogen las conclusiones y aportaciones que a continuación se describen.

1. Se ha extendido el método de ajuste modal con subestructuración transversal al caso de medios absorbentes modelados mediante su impedancia y número de onda complejo. Además de desarrollar las ecuaciones se ha establecido la metodología de resolución del problema matemático. Para geometrías cuyos modos se conocen analíticamente el método no introduce error en el cálculo de los modos transversales, y para casos sencillos la integración puede ser también analítica y tampoco se cometería error al realizarla. Para sistemas más complejos se utiliza el método de elementos finitos para obtener las bases modales de los subdominios transversales, lo que hace la metodología muy versátil.
2. Se han estudiado diferentes alternativas para la caracterización experimental de materiales absorbentes de tipo fibroso. Concluyendo que el método más adecuado entre los analizados es el método de las dos fuentes, ya que sus resultados no dependen de las condiciones de contorno que existan aguas debajo de la muestra ensayada, y además son más estables en función de parámetros como la densidad o espesor.
3. Con el método de las dos fuentes se han caracterizados dos materiales absorbentes. Para cada una de las densidades ensayadas se han obtenido las curvas características correspondientes. Con el objeto de utilizar el modelo para otras densidades, se realizó un

ajuste del modelo de Delany y Bazley. El ajuste no se ha podido realizar directamente puesto que no se disponían de medidas de resistencia de flujo estacionario. Para subsanar esto, se estableció un modelo aproximado que relaciona la densidad aparente del material con la resistencia de flujo estacionario. Los resultados obtenidos de este modo son sólo una estimación del valor real pero permiten disponer de un modelo para cualquier densidad.

4. Se ha llevado a cabo una caracterización experimental de la impedancia de perforados con el fin de controlar este factor en el análisis de silenciadores complejos. Los espesores de tubo disponibles son lo suficientemente elevados como para plantearse dudas sobre la aplicabilidad del modelo de impedancia de Sullivan para estas geometrías. Para los perforados ensayados, la correspondencia con el modelo de Sullivan no es muy satisfactoria teniendo en cuenta la multitud de factores que influyen en el comportamiento de estos elementos. La caracterización de perforados queda fuera de los objetivos de esta Tesis, y por ello se ajustaron valores experimentales al modelo de Sullivan a pesar de tener asociada una dispersión de resultados apreciable.
5. Se realizó la validación de los resultados del análisis de silenciadores mediante ensayos de varios tipos de geometrías. Se estudiaron resonadores concéntricos con extendidos y sin ellos de geometría transversal circular, y resonadores excéntricos con extendidos y sin ellos con secciones transversales circulares y ovales. Para mantener el material en la cámara, se utilizaron tubos perforados o rejillas de alta porosidad. Estas últimas se comportan como transparentes a la propagación sonora. En general se encontraron correspondencias razonablemente aceptables en todos los casos estudiados. La correlación empeora ligeramente cuando existen tubos perforados, sin duda debido a los problemas de caracterización de estos elementos señalados previamente.
6. Finalmente se realizó un estudio del efecto que produce la diferente disposición del material absorbente en un resonador circular concéntrico. Para el estudio se partió de una geometría totalmente reactiva y optimizada presentada por Selamet [65]. El objetivo era ver si se podía encontrar una disposición de material absorbente que

pudiese mejorar esta geometría reactiva. Del estudio se concluye que colocar sólo material absorbente en los extendidos no puede mejorar la atenuación de este silenciador optimizado, lo que implica que es necesario llenar la cámara con material absorbente para mejorar la atenuación. Además, una vez la cámara con material absorbente, es mejor no rellenar los tubos extendidos que hacerlo. Por último señalar que las longitudes de tubos extendidos que optimizan la cámara reactiva difieren con respecto al caso en el que se considera material absorbente.

Como resumen y conclusión final, señalar que se ha formulado y validado una metodología de análisis acústico de silenciadores incluyendo los efectos de los materiales absorbentes.

6.2. Líneas de investigación futuras

Se proponen las siguientes líneas de investigación futuras:

- Evaluar la influencia de la posición, densidad, y otros parámetros del material en casos diferentes a los ya estudiados en la bibliografía, con el objeto de tener un mayor conocimiento del comportamiento de silenciadores disipativos.
- Extender el estudio a casos que incluyan flujo medio uniforme en los subdominios sin material absorbente siempre que se pueda establecer el valor del flujo medio uniforme.
- Desarrollar y poner a punto técnicas experimentales de caracterización acústica de silenciadores en presencia de flujo medio que complementen el sistema experimental del Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, y que permitan validar los modelos desarrollados que incluyen flujo.
- Ajustar el modelo de Delany y Bazley en función de la resistividad de flujo estacionario, medida en el banco de ensayos con flujo medio.
- Realizar un estudio más profundo de los modelos de perforado para los diferentes tipos de incidencia de flujo medio.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] **J. Albelda Vitoria**, *Metodologías de análisis acústico de silenciadores mediante técnicas modales multidominio*, Tesis doctoral, Valencia, 2004.
- [2] **M. Åbom**, *Derivation of four-pole parameters including higher order mode effects for expansion chamber mufflers with extended inlet and outlet*, *Journal of sound and Vibration*, 137, 403-418, 1990.
- [3] **M. Abramowitz, I.A. Stegun**, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972.
- [4] **J.-F. Allard, A. Aknine, C. Depollier**, *Acoustical Properties of Partially Reticulated Foams with High and Medium Flow Resistance*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 79, 1734-1740, 1986.
- [5] **R.J. Astley, A. Cummings**, *A finite element scheme for attenuation in ducts lined with porous material: comparison with experiment*, *Journal of Sound and Vibration*, 116(2), 239-263, 1987.
- [6] **K. Attenborough**, *Acoustical characteristics of porous materials*, *Physics Reports*, 82(3), 179-227, 1982.
- [7] **K.O. Ballagh**, *Acoustical Properties of Wool*, *Applied Acoustics*, 48(2), 101-120, 1996.
- [8] **A.B. Bauer**, *Impedance Theory and Measurements on Porous Acoustic Liners*, *AIAA Aero-Acoustics Conference*, 14(8), 720-728, 1977.
- [9] **D.A. Baxa**, *Noise control in internal combustion engines*, Ed. John Wiley & Sons, New York, 1982.

- [10] **J.L. Bento Coelho**, *Acoustic characteristics of perforate liners in expansion chambers*, Tesis doctoral, University of Southampton, 1983.
- [11] **L.L. Beranek**, *Noise and Vibration Control Engineering. Principles and Applications*, Ed. Wiley, New York, 1992.
- [12] **D.A. Bies, C. H. Hansen, G. E. Bridges**, *Sound Attenuation in Rectangular and Circular Cross-Section Ducts with Flow and Bulk-reacting Liner*, *Journal of Sound and Vibration*, 146 (1), 47-80, 1991.
- [13] **M.A. Biot**, *The Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 28, 168-191, 1956.
- [14] **J.A. Broatch Jacobl**, *Metodología experimental para el estudio de la respuesta acústica de elementos silenciadores de motores de combustión interna*, Tesis doctoral, Valencia, 1995.
- [15] **J.P. Coyette**, *Flow acoustics using finite elements. Technical background and application to muffler systems*. Technical report, LMS International, 1995.
- [16] **A. Craggs**, *A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reactive lining*, *Journal of Sound and Vibration*, 54(2), 285-296, 1977.
- [17] **M.J. Crocker**, *Handbook of Acoustics*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [18] **A. Cummings**, *Sound Transmission in a Folder Annular Duct*, *Journal of Sound and Vibration*, 41(3), 375-379, 1975.

- [19] **A. Cummings, I.J. Chang**, *Acoustic propagation in porous media with internal mean flow*, Journal of Sound and Vibration, 114(3), 565-581, 1987.
- [20] **A. Cummings, I.J. Chang**, *Internal mean flow effects on the characteristics of bulk-reacting liners in circular ducts*, Acustica, 64, 169-178, 1987.
- [21] **A. Cummings, I.J. Chang**, *Sound attenuation of a finite length dissipative flow duct silencer with internal mean flow in the absorbente*, Journal of Sound and Vibration, 127, 1-17, 1988.
- [22] **A. Cummings**, *Impedance tube measurements on porous media: the effects of air-gaps around the sample*, Journal of Sound and Vibration, 151(1), 63-75, 1991.
- [23] **A. Cummings, N. Sormaz**, *Acoustic attenuation in dissipative splitter silencers containing mean fluid flow*, Journal of Sound and Vibration, 168(2), 209-227, 1993.
- [24] **M.E. Delany, E.N. Bazley**, *Acoustical properties of fibrous absorbent materials*, Applied Acoustics, 3, 105-116, 1970.
- [25] **F.D. Denia Guzmán**, *Modelado del comportamiento acústico de silenciadores de escape mediante técnicas analíticas y el método de elementos finitos*, Tesis doctoral, Valencia, 2004.
- [26] **F.D. Denia, J. Albelda, F.J. Fuenmayor, A.J. Torregrosa**, *Acoustic behaviour of elliptical chamber mufflers*, Journal of Sound and Vibration, 241 (3), 401-421, 2001.
- [27] **F.D. Denia, J. Albelda, J.E. Tarancón, F.J. Fuenmayor**, *Caracterización acústica de silenciadores elípticos mediante ajuste modal. Comparación con otros resultados*, Actas del II Congreso Iberoamericano de Acústica, 2000.

- [28] **F.D. Denia, J. Albelda, A.J. Torregrosa, M. Tur**, *Mode-matching technique applied to reversing mufflers. Comparison with other analytical solutions*, Editado por A. Bermúdez, D. Gómez, C. Hazard, P. Joly y J.E. Roberts, en Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM, Santiago de Compostela, 2000.
- [29] **F.D. Denia, L. Baeza, F.J. Fuenmayor, A.J. Torregrosa**, *Modelado analítico numérico de silenciadores de escape con sección transversal arbitraria*, VI Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Lisboa, 2004.
- [30] **A.I. El-Sharkawy, A.H. Nayfeh**, *Effect of the expansion chamber on the propagation of sound in circular pipes*, Journal of the Acoustical Society of America, 63, 667-674, 1978.
- [31] **P. Filippi, D. Habault, J.P. Lefebvre, A. Bergassoli**, *Acoustics: Basic Physics, Theory and Methods*, Academic Press, London, 1999.
- [32] **G.R. Gogate, M.L. Munjal**, *Analytical and experimental aeroacoustic studies of open ended three duct perforated elements used in mufflers*, Journal of the Acoustical Society of America, 97, 2919-2927, 1995.
- [33] **J.G. Ih, B.H. Lee**, *Analysis of higher-order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow*, Journal of the Acoustical Society of America, 77, 1375-1388, 1985.
- [34] **J.G. Ih, B.H. Lee**, *Theoretical prediction of the transmission loss of circular reversing chamber mufflers*, Journal of the Acoustical Society of America, 112 (2), 261-272, 1987.
- [35] **J. Kergomard, A. García, G. Tagui, J.P. Dalmont**, *Analysis of higher order mode effects in an expansion chamber using modal theory and equivalent electrical circuits*, Journal of Sound and Vibration, 129, 457-475, 1989.

[36] **H.Y. Kim, D.B. Yoon**, *An experimental study of the acoustic characteristics of perforated pipe in terms of wavenumber and porosity*, Journal of Sound and Vibration, 183, 115-127, 1995.

[37] **H.Y. Kim, J.W. Choi**, *General solution of acoustic wave equation for circular reversing chamber with temperature gradient*, Journal of Vibration and Acoustics, 113, 543-550, 1991.

[38] **J. Kim, W. Soedel**, *General formulation of four pole parameters for three-dimensional cavities utilising modal expansion, with special attention to the annular cylinder*, Journal of Sound and Vibration, 129 (2), 237-254, 1989.

[39] **J. Kim, W. Soedel**, *Development of a general procedure to formulate four pole parameters by modal expansion and its application to three-dimensional cavities*, Journal of Vibration and Acoustics, 112, 452-459, 1990.

[40] **R. Kirby, A. Cummings**, *Prediction of the bulk acoustic properties of fibrous materials at low frequencies*, Applied Acoustics, 56, 101-125, 1999.

[41] **R. Kirby, A. Cummings**, *The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow and backed by porous media*, Journal of Sound and Vibration, 217(4), 619-636, 1998.

[42] **R. Kirby**, *Simplified techniques for predicting the transmission loss of a circular dissipative silencer*, Journal of Sound and Vibration, 243(3), 403-426, 2001.

[43] **R. Kirby**, *Transmission loss predictions for dissipative silencers of arbitrary cross section in the presence of mean flow*, Journal of the Acoustical Society of America, 114(1), 200-208, 2003.

- [44] **S.H. Lee, J.G. Ih**, *Empirical model of the acoustic impedance of a circular orifice in grazing mean flow*, Journal of the Acoustical Society of America, 111, 199-207, 2003.
- [45] **P.M. Morse, K.U. Inward**, *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [46] **M.L. Munjal**, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [47] **M.L. Munjal, K.N. Rao, A.D. Sahasrabudhe**, *Aeroacoustic analysis of perforated muffler components*, Journal of Sound and Vibration, 114, 173-188, 1987.
- [48] **M.L. Munjal**, *Analysis and design of pod silencers*, Journal of Sound and Vibration, 262, 497-507., 2003.
- [49] **R. Ohayon, C. Soize**, *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, London, 1998.
- [50] **R. Panneton, N. Atalla**, *An efficient finite element scheme or solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics*, Journal of the Acoustical Society of America, 101(6), 3287-3298, 1996.
- [51] **K.S. Peat**, *The acoustical impedance at discontinuities of ducts in the presence of a mean flow*, Journal of Sound and Vibration, 127(1), 123-132, 1988.
- [52] **K.S. Peat, K.L. Rathi**, *A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencers*, Journal of Sound and Vibration, 184(3), 529-545, 1995.
- [53] **K.S. Peat**, *The acoustical impedance at the junction of an extended inlet or outlet duct*, Journal of Sound and Vibration, 150, 101-110, 1991.

- [54] **M.A. Picard, P. Solana, J.F. Urchueguía**, *A method of measuring the dynamic flow resistance and the acoustic measurement of the effective static flow resistance in stratified rockwool samples*, *Journal of Sound and Vibration*, 216(3), 495-505, 1998.
- [55] **A.D. Pierce**, *Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 87, 2292-2299, 1990.
- [56] **K.N. Rao, M.L. Munjal**, *Experimental evaluation of impedance of perforates with grazing flow*, *Journal of Sound and Vibration*, 108, 283-295, 1986.
- [57] **M. Ren, F. Jacobsen**, *A Method of Measuring the Dynamic Flow Resistance and Reactance of Porous Materials*, *Applied Acoustics*, 93, 265-276, 1993.
- [58] **J. Rey, A. Castro**, *Funciones de Bessel*, Dossat, Madrid, 1958.
- [59] **D. Ronneberger**, *The acoustical impedance of holes in the wall of flow ducts*, *Journal of Sound and Vibration*, 24, 1972.
- [60] **A.D. Sahasrabudhe, M.L. Munjal**, *Analysis of inertance due to higher order mode effects in a sudden area discontinuity*, *Journal of Sound and Vibration*, 185, 515-529, 1995.
- [61] **A. Selamet, P.M. Radavich**, *The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational and experimental investigation*, *Journal of Sound and Vibration*, 201, 407-426, 1997.
- [62] **A. Selamet, Z.L. Ji**, *Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach*, *Journal of Sound and Vibration*, 213, 601-617, 1998.

- [63] **A. Selamet, Z.L. Ji, P.M. Radavich**, *Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: II. Comparison with experimental and computational studies*, *Journal of Sound and Vibration*, 213, 619-641, 1998.
- [64] **A. Selamet, Z.L. Ji**, *Acoustic attenuation performance of circular flow-reversing chambers*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 104, 2867-2877, 1998.
- [65] **A. Selamet, Z.L. Ji**, *Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet*, *Journal of Sound and Vibration*, 223(2), 197-212, 1999.
- [66] **A. Selamet, I.J. Lee, N.T. Huff**, *Acoustic attenuation performance of perforated absorbing silencers*. En SAE Paper 2001-01-1435. SAE International Congress and Exhibition. Detroit, 2001.
- [67] **A. Selamet, I.J. Lee, Z.L. Ji, N.T. Huff**, *Acoustic attenuation of hybrid silencers*, *Journal of Sound and Vibration*, 262, 509-527, 2003.
- [68] **A. Selamet, F.D. Denia, A.J. Besa**, *Acoustic behaviour of circular dual-chamber mufflers*, *Journal of Sound and Vibration*, 265, 967-985, 2003.
- [69] **A. Selamet, M.B. Xu, I.J. Lee, N.T. Huff**, *Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 115, 2091-2099, 2004.
- [70] **A. Selamet, M.B. Xu, I.J. Lee**, *Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers with inlet/outlet extensions*, *Journal of the Acoustical Society of America*, 117, 2078-2089, 2005.

- [71] **A.F. Seybert, D.F. Ross**, *Experimental determination of acoustic properties using a two microphone random excitation technique*, Journal of Sound and Vibration, 65(2), 1190-1199, 1977.
- [72] **B.H. Song, J.S. Bolton**, *A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials*, Journal of the Acoustical Society of America, 107 (3), 1131-1152, 2000.
- [73] **J.W. Sullivan, M.J. Crocker**, *Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities*, Journal of the Acoustical Society of America, 64, 207-215, 1978.
- [74] **J.W. Sullivan**, *A method for modelling perforated tube muffler components. I. Theory*, Journal of the Acoustical Society of America, 66, 772-778, 1979.
- [75] **J.W. Sullivan**, *A method for modelling perforated tube muffler components. II. Theory*, Journal of the Acoustical Society of America, 66, 779-788, 1979.
- [76] **X. Sun, X. Jin, H. Zhang, Y. Shi**, *Effect of grazing-bias flow interaction on acoustic impedance of perforated plates*, Journal of Sound and Vibration, 254, 557-573, 2002.
- [77] **Z. Tao, D.W. Herrin, A.F. Seybert**, *Measuring Bulk Properties of Sound-Absorbing Materials using the Two-Source Method*, Society of Automotive Engineers, 2003.
- [78] **V. Tarnow**, *Measurements of anisotropic sound propagation in glass wool*, Journal of the Acoustical Society of America, 108(5), 2243-2247, 2000.
- [79] **A.N. Tjonov, A.A. Samarsky**, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Mir, Moscú, 1980.

- [80] **H. Utsuno, T. Tanaka, T. Fujikawa, A.F. Seybert**, *Transfer function method for measuring characteristic impedance and propagation constant of porous materials*, Journal of the Acoustical Society of America, 86(2), 637-643, 2003.
- [81] **C.N. Wang**, *Numerical decoupling analysis of a resonator with absorbent material*, Applied Acoustics, 58, 109-122, 1998.
- [82] **C.N. Wang, C.Y. Liao**, *Boundary integral equation method for evaluating the performance of straight-through resonator with mean flow*, Journal of Sound and Vibration, 216, 281-294, 1998.
- [83] **R. Woodcock, M. Hodgson**, *Acoustic methods for determining the effective flow resistivity of fibrous materials*, Journal of Sound and Vibration, 153(1), 186-191, 1992.
- [84] **M.B. Xu, A. Selamet, I.J. Lee, N.T. Huff**, *Sound attenuation in dissipative expansion chambers*, Journal of Sound and Vibration, 272, 1125-1133, 2003.
- [85] **S.I. Yi, B.H. Lee**, *Three dimensional acoustic analysis of a circular expansion chamber with side inlet and end outlet*, Journal of the Acoustical Society of America, 81 (5), 1279-1287, 1987.