

## Estudio de la optimización bayesiana para reducir el consumo energético de un robot paralelo durante tareas pick and place

Juan Pablo Mora<sup>\*</sup>, Julián Samper, Carlos F. Rodríguez

*Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de los Andes, Carrera 1 #18a - 12, 111711 Bogotá, Colombia.*

**To cite this article:** Mora, J., Samper, J., Rodríguez, C. 2023. Bayesian optimization study for energy consumption reduction of a parallel robot during pick and place tasks. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 20, 1-12. <https://doi.org/10.4995/riai.2022.16724>

### Resumen

El aumento de unidades instaladas de robots industriales y los requerimientos de sostenibilidad exigen el estudio del consumo energético. Se propone una estrategia de reducción del consumo energético, basada en el diseño de una trayectoria punto a punto (PP). Se utiliza la optimización bayesiana que permite incluir información de un prototipo experimental en conjunto con un modelo matemático. Primero, se presenta el modelo cinético basado en el trabajo virtual y el problema de optimización bayesiana. Segundo, se realiza una comparación entre el consumo energético de trayectorias genéricas, métodos de optimización tradicionales, que utilizan trayectorias multi punto construidas por splines y trayectorias PP, y la optimización bayesiana propuesta, que utiliza una trayectoria PP. Se encuentra que en simulaciones computacionales los métodos tradicionales de optimización consiguen un consumo de energía menor que a través del método de optimización bayesiana. Sin embargo, a través de pruebas experimentales se verifica la ventaja del método de optimización bayesiana que, al incorporar datos reales del prototipo y dinámicas no modeladas, logran obtener un consumo energético menor.

*Palabras clave:* Optimización bayesiana, consumo energético, manipuladores robóticos, trayectoria óptima, dinámica de robots.

### Bayesian optimization study for energy consumption reduction of a parallel robot during pick and place tasks

#### Abstract

Given the growth of installed units of robotic manipulators, and the sustainability requirements, the study of the power consumption has become indispensable. An energy consumption minimization strategy, based on the design of a point-to-point (PP) trajectory, is studied. Bayesian optimization, which allows to work with a mathematical model, as well as experimentation in a prototype, is used. First, a kinetical model based on the concept of virtual work and the Bayesian optimization method are presented. Second, the energy consumption of generic trajectories is compared to that of the solution found from traditional optimization methods, which use multipoint trajectories from splines and PP trajectories, and Bayesian optimization results, that uses PP trajectories. That analysis finds that traditional optimization methods with the multipoint approach result in the lowest energy consumption computational estimation. Nevertheless, the experimental tests confirm that the Bayesian optimization model, with real data feedback, can find the best solution in terms of the experimental estimation of energy consumption, thanks to the consideration of dynamics that were not modeled in the mathematical model.

*Keywords:* Bayesian optimization, energy expenditure, robot manipulators, optimal trajectory, robot dynamics.

### 1. Introducción

En la actualidad los manipuladores industriales se están volviendo cada vez más importantes, reemplazando al ser humano en tareas repetitivas o peligrosas en industrias de todo

tipo (The European Business Review, 2020). Entre los años 2014 y 2019, la instalación de robots industriales aumentó en un promedio de 11% cada año, llegando a superar más de 2.7 millones de robots instalados en 2020 (International Federation of Robotics, 2020). Además, la Federación Internacional de Robótica (IFR por sus siglas en inglés) estima que, para el

cierre del año 2021, el número de unidades instaladas de robots industriales habrá crecido en un 13% con respecto al año anterior (International Federation of Robotics, 2021). Una de las operaciones más comunes que realizan los robots industriales son las tareas pick and place. Estas tareas, que consisten en realizar movimientos periódicos de ida y vuelta entre dos puntos, se realizan en procesos de manufactura, empaque y producción. Además, se caracterizan por realizar el trabajo a altas velocidades, con alta precisión y para un gran número de repeticiones (Angeles, 2007) (SP Automation and Robotics, 2018).

En especial, los robots paralelos resultan ser muy atractivos para realizar tareas pick and place debido a tres ventajas principales. Primero, tienen una gran precisión en su movimiento, gracias a su alto grado de rigidez y bajo peso. Segundo, son capaces de operar a velocidades muy elevadas, especialmente si se comparan con otros tipos de manipuladores, como los seriales. Tercero, tienen una relación muy alta de carga contra potencia, es decir, pueden usar su efector final para mover cargas mucho mayores a su propio peso, y tienen una alta eficiencia en términos de consumo energético (Aracil, Saltarén, Sabater, & Reinoso, 2010).

Con el aumento de unidades instaladas, también aumenta el interés en el estudio del consumo de energía de los robots industriales debido a factores tanto económicos como medioambientales. La reducción del consumo energético se convierte entonces en un requisito para la permanencia de los robots en la industria. En el esfuerzo por lograrlo, se han estudiado tres estrategias principales: estrategias de hardware, de software y mixtas (Carabin, Wehrle, & Vidoni, 2017). En particular, el enfoque más clásico es a través de estrategias de software, en donde uno de los métodos de reducción de energía es el diseño de trayectorias óptimas.

En la industria es común utilizar trayectorias genéricas, que cumplen con la suavidad necesaria de las curvas, así como condiciones de velocidad y aceleración iguales a cero en los puntos pick and place. Algunas de estas trayectorias son la polinomial de quinto orden y la trapezoidal modificada (Angeles, 2007). A partir de ciertas condiciones del movimiento que se busque completar, como la especificación de la posición y orientación al inicio y final del movimiento o la duración de este, se pueden definir dichas trayectorias para completar la tarea requerida. Sin embargo, al ser trayectorias estandarizadas y genéricas, pueden ser ineficientes para cierta tarea o tipo de mecanismo y requerir una cantidad de energía innecesaria.

El estudio de la minimización del consumo energético, en tareas pick and place efectuadas por robots paralelos, se ha trabajado en su mayoría a través de métodos de optimización tradicionales. Se han realizado varios estudios en la optimización de trayectorias PP y multi punto en diversos robots industriales (Reiter, Gattringer, & Müller, 2017), (He, Zhang, Sun, & Shi, 2016), (Lorenz, y otros, 2017). En particular, en (Mora, Barreto, & Rodriguez, 2022) y (Lorenz, y otros, 2017) se realiza la optimización de trayectorias multi punto a través de métodos de optimización tradicionales para un mecanismo cinco barras, también conocido como 5R.

En los métodos anteriores, se calculan trayectorias a través de algoritmos que trabajan en escenarios simulados, es decir, sin tener en cuenta datos reales. Una de las desventajas de estos

métodos radica en que los resultados obtenidos dependen por completo del modelo analítico, que no es más que una aproximación de la situación física real. Con esto en mente, los resultados experimentales diferirán de los computacionales dependiendo de la robustez del modelo.

La optimización bayesiana es un método que permite trabajar con funciones objetivo que son difíciles de evaluar, que se traducen en un alto costo por cada evaluación y que no explican por completo el fenómeno físico. Es decir, este tipo de optimización permite encontrar el punto máximo (o mínimo) de una función objetivo, sin necesidad de hacer un gran número de evaluaciones y contemplando variables no modeladas al tratar con datos reales. El proceso está compuesto, principalmente, por dos elementos fundamentales: el modelo (Surrogate Function) de la función objetivo, y la función de adquisición (Acquisition Function). Básicamente, el modelo busca predecir el comportamiento de la función objetivo usando procesos gaussianos, en donde la función de adquisición se usa para decidir qué punto evaluar a continuación, dada la información del modelo. En general, se ha probado para funciones de múltiples dimensiones, pero se recomienda no exceder las 20 variables de entrada para la función objetivo (Frazier, 2018).

Este método se ha utilizado anteriormente para aplicaciones como la búsqueda de pozos de petróleo (Dou, 2015), o la optimización de hiperparámetros de redes neuronales y otros métodos de inteligencia artificial (Snoek, Larochelle, & Adams, 2012). También se han desarrollado trabajos relacionados con robótica usando este método, por ejemplo, para el aprendizaje de un robot bípedo de tipo ATRIAS (Rai, y otros, 2018). Sin embargo, no se encuentra un trabajo similar a este, en donde se busque optimizar las trayectorias de un robot paralelo desempeñando tareas pick and place.

Por lo anterior, en este artículo se propone utilizar la optimización bayesiana, como una alternativa para encontrar trayectorias de mínimo consumo energético en la operación de un robot paralelo en tareas pick and place. El diferencial principal, con otros métodos de optimización utilizados para el mismo fin, es el uso de información experimental para mejorar los resultados del modelo computacional. Puntualmente, el robot paralelo que se utilizará para la investigación es un *mecanismo cinco barras*.

Con esto en mente, el artículo se divide en cuatro partes. Primero, se presenta el modelo cinemático y cinético del robot paralelo. Segundo, se definen los problemas de optimización que se compararán. Tercero, se realiza la comparación entre la optimización bayesiana y metodologías clásicas de optimización, en términos de la estimación del consumo energético para los resultados computacionales y experimentales. Finalmente, se presentan algunas conclusiones que evidencian la posibilidad de continuar con el estudio del tema.

## 2. Modelo cinemático y cinético (Trabajo virtual)

Para el desarrollo de la investigación se utilizó un prototipo experimental de un mecanismo cinco barras ubicado en la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia). El prototipo del robot paralelo, de dos grados de libertad, es actuado con dos servomotores rotacionales Yaskawa en las uniones absolutas.

Además, el sistema de control se compone de un controlador MP2300Siec que permite la programación de las trayectorias a través del software MotionWorks IEC Pro, también de Yaskawa. El software permite la programación a través de diagramas de bloques (Function Block Diagram – FBD) y contactos (Ladder) para el ingreso de trayectorias y control del robot. Para esta investigación, se utilizó el programa desarrollado y utilizado en (Mora J. P., 2021) y (Mora, Barreto, & Rodríguez, 2022). En la Figura 1 se muestran dos fotografías del prototipo del robot paralelo. A continuación, se presentará el modelo cinemático y cinético que se desarrolló.

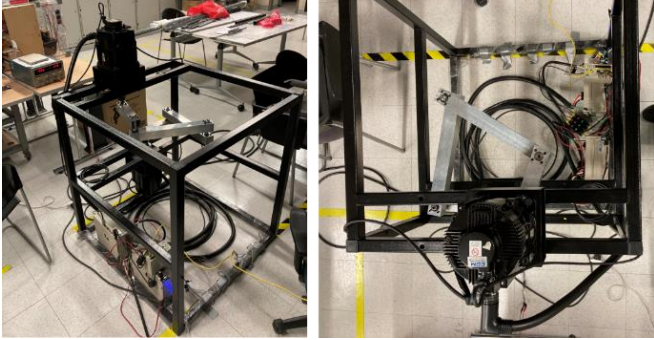


Figura 1. Prototipo experimental del robot paralelo

En la Figura 2 se muestra la representación esquemática del robot paralelo. Las variables controladas del modelo son únicamente los ángulos de los eslabones proximales,  $\theta_1$  y  $\theta_4$ , debido a que los motores rotacionales se ubican directamente en las uniones de los puntos  $G_1$  y  $G_4$ . Por lo tanto, se desarrollan funciones de cinemática directa que, a partir de las variables controladas, permiten obtener las coordenadas del efector final, punto P, con coordenadas absolutas  $(P_x, P_y)$ . Como se muestra en la Figura 2, se establece un sistema de referencia en la unión rotacional ubicada en el punto  $G_1$ . La selección de este sistema de coordenadas favorece el análisis cinemático y cinético sin pérdida de generalidad en los cálculos.

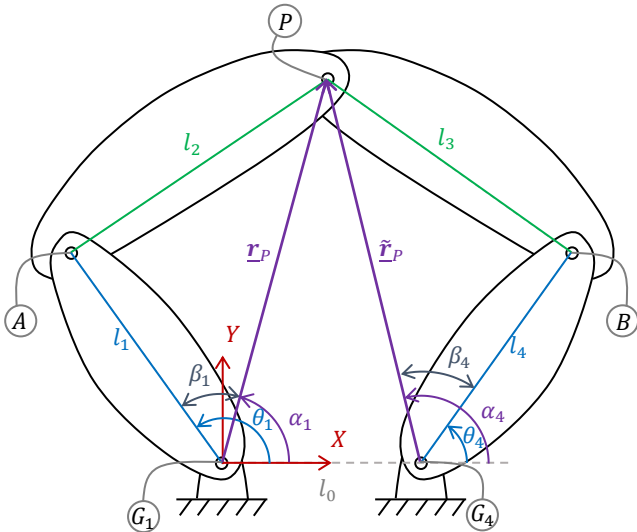


Figura 2. Representación esquemática del robot paralelo para la formulación de la cinemática inversa (Mora J. P., 2021).

Para el cálculo de la cinemática directa se sigue el procedimiento en (Samper, 2021). Las coordenadas de los puntos A y B,  $(x_A, y_A)$  y  $(x_B, y_B)$ , correspondientes a los

extremos de los eslabones proximales, se pueden encontrar a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_A &= l_1 \cos \theta_1 \\ y_A &= l_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_B &= l_0 + l_4 \cos \theta_4 \\ y_B &= l_4 \sin \theta_4 \end{aligned}$$

Adicional a esto, se pueden relacionar las longitudes de los eslabones distales,  $l_2$  y  $l_3$ , con las coordenadas del acoplador,  $(P_x, P_y)$ , de la siguiente manera:

$$l_2^2 = (P_x - x_A)^2 + (P_y - y_A)^2 \quad (2)$$

$$l_3^2 = (P_x - x_B)^2 + (P_y - y_B)^2 \quad (3)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (2) y (3) para  $P_x$  y  $P_y$  se obtienen las siguientes expresiones:

$$P_x = a - bP_y \quad (4)$$

$$P_y = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Donde  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son agrupaciones de términos correspondientes a:

$$a = \frac{l_3^2 - l_2^2 + l_1^2 - l_4^2 - l_0^2 - 2l_0l_4 \cos \theta_4}{2(x_A - x_B)} \quad (5)$$

$$b = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$\alpha = 1 + b^2$$

$$\begin{aligned} \beta &= -2y_A - 2ab + 2bx_A \\ \gamma &= y_A^2 - l_2^2 + a^2 + x_A^2 - 2ax_A \end{aligned} \quad (6)$$

Por otro lado, para el desarrollo de la cinemática inversa se utiliza el procedimiento documentado en (Mora J. P., 2021). A través de cadenas cinemáticas cerradas, como se muestra en la Figura 2, se pueden obtener las siguientes expresiones para los ángulos de entrada de los eslabones proximales:

$$\theta_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\mathbf{r}_P \cdot \hat{\mathbf{e}}_X}{\|\mathbf{r}_P\|}\right) + \arccos\left(\frac{l_2^2 - l_1^2 - \|\mathbf{r}_P\|^2}{-2l_1\|\mathbf{r}_P\|}\right) \quad (7)$$

$$\theta_4 = \alpha_4 - \beta_4$$

$$\theta_4 = \arccos\left(\frac{\tilde{\mathbf{r}}_P \cdot \hat{\mathbf{e}}_X}{\|\tilde{\mathbf{r}}_P\|}\right) - \arccos\left(\frac{l_3^2 - l_4^2 - \|\tilde{\mathbf{r}}_P\|^2}{-2l_4\|\tilde{\mathbf{r}}_P\|}\right) \quad (8)$$

Donde  $\mathbf{r}_P = [P_x, P_y]$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_P = [P_x - l_0, P_y]$  y  $\hat{\mathbf{e}}_X = [1, 0]$  corresponde al vector unitario director del eje X en el marco absoluto que se muestra en la Figura 2.

Para el modelo cinético del robot paralelo se utiliza la metodología presentada en (Samper, 2021). Sin embargo, antes de presentar el modelo cinético es importante mencionar que la variable de mayor interés en este estudio es la energía consumida,  $E$ , que se puede calcular como la integral de la potencia,  $P$ , en el intervalo de tiempo  $[t_i, t_f]$ , como se muestra en la siguiente ecuación:

$$E = \int_{t_i}^{t_f} P dt \quad (9)$$

La potencia es calculada de manera similar a como se hace en (Lorenz, y otros, 2017), (Barreto, 2021) y (Mora, Barreto, & Rodriguez, 2022). Es importante resaltar que se trata de una estimación del cálculo de la potencia. En la siguiente ecuación,  $\tau_1$  y  $\tau_4$  son los torques de actuación de los motores ubicados en  $G_1$  y  $G_4$ , respectivamente,  $\omega_1$  y  $\omega_4$  son sus velocidades angulares,  $K_t$  es la constante de torque y  $R$  su resistencia eléctrica (iguales para ambos motores).

$$P = \max(0; \tau_1 \omega_1) + \max(0; \tau_4 \omega_4) + \frac{R}{K_t^2} (\tau_1^2 + \tau_4^2) \quad (10)$$

El cálculo de los torques de actuación requeridos se realiza a través de las matrices jacobianas traslacionales,  $J_{v,i}$ , matrices jacobianas rotacionales,  $J_{\omega,i}$ , para cada eslabón ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), y las inercias rotacionales de cada motor,  $I_{R_i}$  ( $i = 1, 4$ ). En la siguiente ecuación,  $m_i$  corresponde a la masa de cada eslabón,  $\mathbf{a}_{G_i}$  a la aceleración de su centro de masa,  $I_i$  a su inercia y  $\alpha_i$  a su aceleración angular:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \sum J_{v,i}^T m_i \mathbf{a}_{G_i} + \sum J_{\omega,i}^T I_i \alpha_i + \sum_{i=\{1,4\}} I_{R_i} \alpha_i \quad (11)$$

En la ecuación anterior, el primer elemento corresponde a la parte traslacional del movimiento de cada eslabón, el segundo elemento corresponde a la parte rotacional; y el tercer elemento hace referencia a las inercias de los rotores que generan el movimiento y están ubicados en los eslabones proximales (puntos  $G_1$  y  $G_2$ ). Como se puede notar, el cálculo de los torques de actuación requeridos no contempla las fuerzas disipativas. Además, se considera que las masas que se puedan llevar en el efector final son despreciables en comparación con las masas de los eslabones. Sin embargo, la inclusión de estas variables en el modelo se deja para trabajos futuros.

El cálculo de las jacobianas parciales, traslacionales y rotacionales, de todos los eslabones se realiza a través de las ecuaciones (15) a la (19). Es importante aclarar, que los términos  $s_i$  y  $c_i$  corresponden a las funciones trigonométricas seno y coseno del ángulo del eslabón  $i$ . Los términos  $r_{G_i}$  representan la distancia de la base al centro de gravedad del eslabón  $i$ . Adicionalmente, cuando el subíndice es  $i - j$  el ángulo corresponde a la resta ( $\theta_i - \theta_j$ ).

$$J_{v,1} = \begin{bmatrix} -r_{G1} s_1 & 0 \\ r_{G1} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$J_{\omega,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$J_{v,2} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - \frac{l_1 s_{3-1}}{l_2 s_{2-3}} r_{G2} s_2 & -\frac{l_4 s_{4-3}}{l_2 s_{2-3}} r_{G2} s_2 \\ l_1 c_1 + \frac{l_1 s_{3-1}}{l_2 s_{2-3}} r_{G2} c_2 & \frac{l_4 s_{4-3}}{l_2 s_{2-3}} r_{G2} c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$J_{\omega,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_1 s_{3-1}}{l_2 s_{2-3}} & \frac{l_4 s_{4-3}}{l_2 s_{2-3}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$J_{v,3} = \begin{bmatrix} -\frac{l_1 s_{1-2}}{l_3 s_{3-2}} r_{G3} s_3 & -l_4 s_4 - \frac{l_4 s_{2-4}}{l_3 s_{3-2}} r_{G3} s_3 \\ \frac{l_1 s_{1-2}}{l_3 s_{3-2}} r_{G3} c_3 & l_4 c_4 + \frac{l_4 s_{2-4}}{l_3 s_{3-2}} r_{G3} c_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$J_{\omega,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_1 s_{1-2}}{l_3 s_{3-2}} & \frac{l_4 s_{2-4}}{l_3 s_{3-2}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$J_{v,4} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{G4} s_4 \\ 0 & r_{G4} c_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$J_{\omega,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Finalmente, se puede encontrar una expresión más específica para la energía consumida  $E$ :

$$E = \int_{t_i}^{t_f} (\max(0; \tau_1 \omega_1) + \max(0; \tau_4 \omega_4)) dt + \Delta E \quad (20)$$

$$\Delta E = \frac{R}{K_t^2} \int_{t_i}^{t_f} (\tau_1^2 + \tau_4^2) dt \quad (21)$$

### 3. Especificación de la tarea y métodos de optimización

Para el análisis de los métodos de optimización se realiza la especificación de una tarea cuyas condiciones en los puntos pick and place se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Condiciones de frontera y tiempo de recorrido para la tarea seleccionada.

	Posición en P [m]	Velocidad [m/s]	Aceleración [m/s <sup>2</sup> ]	Tiempo recorrido [s]
Pick	(-0.2, 0.4)	0	0	1
Place	(0.4, 0.4)	0	0	1

Las condiciones de la tarea permiten realizar la operación a través de diferentes trayectorias en el espacio de trabajo y, por lo tanto, se pueden especificar diferentes funciones  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4(t)$  para el movimiento angular de los actuadores conectados a los eslabones proximales. En la industria es común utilizar trayectorias genéricas en el espacio articulado, tales como la trapezoidal modificada en aceleración o la polinomial de quinto orden. Sin embargo, al ser trayectorias genéricas, no resultan en movimientos de consumo energético mínimo (Samper, 2021).

Para poder calcular trayectorias,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4(t)$ , de mínimo consumo energético, es necesario establecer un problema de optimización con una función objetivo, variables de decisión y métodos de optimización. A continuación, se explican los tres problemas de optimización que se implementan. Cada problema de optimización se diferencia en la manera en que se construye la trayectoria, las variables de decisión y el algoritmo de optimización utilizado. Sin embargo, para cada uno de ellos la función objetivo es la estimación del consumo energético que se muestra en (21).

En el *primer problema de optimización*, las funciones de trayectoria en el espacio articulado,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4(t)$ , corresponden cada una a una única función polinomial de séptimo orden, con coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ) respectivamente:

$$\theta_1(t) = \sum_{i=0}^7 \alpha_i t^i \quad (22)$$

$$\theta_4(t) = \sum_{i=0}^7 \beta_i t^i \quad (23)$$

Con las condiciones de frontera y el tiempo del trayecto de la tarea estudiada, se puede construir un sistema de seis ecuaciones y ocho variables (coeficientes polinomiales). A continuación, se presenta solamente el procedimiento para el caso de la función  $\theta_1(t)$ , sin embargo, se puede realizar lo correspondiente para la función  $\theta_4(t)$ . Los siguientes coeficientes pueden determinarse directamente con las condiciones de frontera al inicio del movimiento:

$$\begin{aligned} \theta_1(t=0) &= \alpha_0 = \theta_{1pick} \\ \dot{\theta}_1(t=0) &= 0 = \alpha_1 \\ \ddot{\theta}_1(t=0) &= 0 = \alpha_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Por otro lado, para determinar los demás coeficientes se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \theta_1(t=1) &= \theta_{1place} = \theta_{1pick} + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 \\ \dot{\theta}_1(t=1) &= 0 = 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + 6\alpha_6 + 7\alpha_7 \\ \ddot{\theta}_1(t=1) &= 0 = 6\alpha_3 + 12\alpha_4 + 20\alpha_5 + 30\alpha_6 + 42\alpha_7 \end{aligned} \quad (25)$$

Donde los ángulos iniciales de cada eslabón proximal,  $\theta_{1pick}$  y  $\theta_{4pick}$ , pueden determinarse a través de la cinemática inversa al conocer las posiciones del acoplador, que se presentan en la Tabla 1.

Para poder solucionar el sistema de ecuaciones lineales se expresan los coeficientes  $\alpha_5$ ,  $\alpha_6$ ,  $\alpha_7$  en términos de los coeficientes  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ .

$$\begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1/2 & 21 \\ 11 & -1 & -35 \\ -5 & 1/2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3\alpha_3 - 4\alpha_4 \\ -6\alpha_3 - 12\alpha_4 \\ \theta_{1B} - \theta_{1A} - \alpha_3 - \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

De esta manera, se obtienen dos de las variables de decisión del problema de optimización, los coeficientes  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ . Realizando el proceso correspondiente para  $\theta_4(t)$  se obtienen las dos variables de decisión restantes,  $\beta_3$  y  $\beta_4$ . Para diferentes valores de estas variables, se obtendrán diferentes trayectorias que cumplen con las condiciones de la tarea y que generan diferentes consumos energéticos. En resumen, el problema de optimización se puede escribir de la siguiente manera:

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^4} E(x) \quad (27)$$

En donde las variables de decisión son agrupadas en un vector  $x$  y la función objetivo (función de costo) corresponde a  $E(x)$ . Se busca entonces encontrar el valor de las variables de decisión que minimizan el valor de la función objetivo. El problema de optimización es solucionado a través de la función `fminunc` de MATLAB® (MathWorks, 2021) y el algoritmo cuasi-Newton BFGS (Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno) (Dai, 2002). Se referirá a este problema de optimización como el P7.

En el *segundo problema de optimización* se explica con detalle en (Lorenz, y otros, 2017) y (Mora, Barreto, & Rodriguez, 2022). Las funciones de trayectoria en el espacio articulado,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4(t)$ , corresponden cada una a una función multi punto a trozos conformada por seis funciones polinomiales de quinto orden. Se presenta el procedimiento para el caso de la función  $\theta_1(t)$ , pero se puede realizar lo correspondiente para la función  $\theta_4(t)$ .

Para definir las funciones que conforman  $\theta_1(t)$ , se seleccionan siete puntos en el espacio de trabajo, incluidos los puntos pick and place, por los que el efector final en P debe pasar,  $(\underline{r}_p)_i$  con  $i = [1, 7]$ . A través de la cinemática inversa se pueden determinar los ángulos de los eslabones proximales en cada una de las siete posiciones. Entre cada pareja de ángulos se define una función polinomial de quinto orden de la siguiente manera:

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^5 \alpha_{ij} (t - t_i)^j, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, i \in [1, 6] \quad (28)$$

Resultan entonces seis ecuaciones polinomiales de quinto orden con seis coeficientes cada una. Para determinar los 36 coeficientes se deben satisfacer condiciones de frontera y condiciones de continuidad entre los segmentos de la trayectoria. Por un lado, las ecuaciones que satisfacen las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} f_i(t = t_i) &= \theta_i \\ f_i(t = t_{i+1}) &= \theta_{i+1} \end{aligned} \quad i \in [1, 6] \quad (29)$$

Donde  $\theta_i$  corresponde al ángulo del eslabón proximal en el punto  $i$  de la trayectoria. Por otro lado, las ecuaciones que satisfacen la continuidad entre los segmentos de la trayectoria son las siguientes:

$$f_i^{(n)}(t = t_{i+1}) = f_{i+1}^{(n)}(t = t_{i+1}) \quad \begin{matrix} i \in [1, 6] \\ n \in [1, 4] \end{matrix} \quad (30)$$

Aunque aparecen 36 coeficientes que se deben determinar, realmente las variables de decisión son solamente las cinco posiciones intermedias, en el espacio de trabajo, por las cuales el efector final en P debe pasar. Se declaran solamente cinco variables de decisión y no siete debido a que, los puntos pick and place son valores fijos de la especificación de la tarea. Con esto en mente, se tiene la siguiente formulación del segundo problema de optimización:

$$\operatorname{argmin}_{\xi \in \mathbb{R}^{5 \times 2}} E(\xi) \quad (31)$$

Donde la matriz  $\xi$  contiene las 10 variables de decisión, sus filas corresponden a las posiciones intermedias del efector final, es decir,  $(\mathbf{r}_p)_i$  con  $i = [2, 6]$ . Al igual que el primer método de optimización, se busca encontrar el valor de las variables de decisión que minimizan el valor de la función objetivo a través de la función `fminunc` de MATLAB® y el algoritmo cuasi-Newton BFGS (Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno). Se referirá a este problema de optimización como el SP.

En el *tercer problema de optimización*, se realiza el mismo procedimiento que en el primero para establecer las ecuaciones de las trayectorias  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4(t)$ , es decir, las ecuaciones corresponden a funciones polinomiales de séptimo orden. Con esto en mente, se obtiene el mismo problema de optimización que se presenta en (27). Sin embargo, para resolver el problema de optimización se utilizó el método llamado Optimización Bayesiana que se implementó en un código escrito en python y que utiliza las librerías GPy y GPyOpt.

El proceso está compuesto, principalmente, por dos elementos fundamentales: el modelo (Surrogate Function) de la función objetivo, y la función de adquisición (Acquisition Function). Básicamente, el modelo intenta predecir el comportamiento de la función objetivo usando procesos gaussianos, y la función de adquisición se usa para decidir qué punto evaluar a continuación, dada la información del modelo (Samper, 2021).

El modelo de optimización Bayesiana se basa en una estimación de la función objetivo (en este caso, el consumo de energía), que inicialmente es desconocida. A partir de una serie de evaluaciones iniciales, se utilizan procesos gaussianos para predecir la naturaleza de la función. En resumen, el modelo (Surrogate Function) no retorna un valor definido para cada  $x$ , sino una media y una varianza.

$$f(x) = GP(\mu_E(x), \sigma_E^2(x, x')) \quad (32)$$

$$x = [\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4]$$

Por otro lado, está la función de adquisición. Dado el modelo predictivo sobre la función objetivo, esta indica qué

punto (valor del vector  $x$ ) se debe evaluar a continuación. En este caso, se utilizó la función Expected Improvement.

$$EI(x) = \begin{cases} EI_1, & \text{si } \sigma_E(x) > 0 \\ 0, & \text{si } \sigma_E(x) = 0 \end{cases}$$

$$EI_1 = (\mu_E(x) - f(x^+) - \xi)\Phi(Z) + \sigma_E(x)\phi(Z) \quad (33)$$

$$Z = \begin{cases} \frac{\mu_E(x) - f(x^+) - \xi}{\sigma_E(x)}, & \text{si } \sigma_E(x) > 0 \\ 0, & \text{si } \sigma_E(x) = 0 \end{cases}$$

En la ecuación anterior,  $\phi$  es la función de densidad de probabilidad normal estándar y  $\Phi$  es su función acumulada de probabilidad. Además, el parámetro  $\xi$ , también llamado jitter, toma valores de 0 a 1 y tiene que ver con la relación entre explotación y exploración de la función. Una explicación más detallada y con gráficas ilustrativas se desarrolla en (Brochu, Cora, & de Freitas, 2010).

Este problema de optimización se resolvió bajo dos enfoques, ambos involucrados directamente con el método de optimización bayesiana (Samper, 2021). Por un lado, en el primer enfoque, de manera empírica se establece primero un conjunto de trayectorias,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4$ . Después, a través de simulaciones computacionales, se calculan los torques requeridos y los consumos energéticos de cada movimiento. Es importante mencionar que todas las trayectorias seleccionadas cumplen con la tarea especificada, pero tienen diferentes valores en los coeficientes  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$  para  $\theta_1$ , y  $\beta_3$  y  $\beta_4$  para  $\theta_4$  (variables de decisión). A continuación, por medio del método de optimización bayesiana y, en específico, a través de la función de adquisición se obtienen recomendaciones para los valores de las variables de decisión. De esta manera, se vuelven a calcular trayectorias,  $\theta_1$  y  $\theta_4$ , y se obtienen consumos energéticos menores a los iniciales hasta que se detenga el algoritmo o este converja. Como se puede notar, este primer enfoque trabaja solamente con simulaciones y resultados computacionales. Por lo tanto, se referirá a este como BOS (Optimización Bayesiana con datos computacionales o provenientes de Simulaciones).

Por otro lado, el segundo enfoque se diferencia del primero en que se realizan pruebas experimentales en el prototipo físico (Figura 1). En primer lugar, se seleccionan empíricamente un conjunto de trayectorias y se ingresan en el controlador del prototipo experimental. Al finalizar la prueba, se extraen del controlador los datos reales de velocidades y torques en ambos motores. Con estos datos, se calculan de nuevo los consumos energéticos y se pueden generar nuevas recomendaciones a través del algoritmo de optimización bayesiana. Se referirá a este enfoque del tercer método de optimización como BOR (Optimización Bayesiana con datos Reales).

#### 4. Resultados y discusión

La presentación de resultados se divide en dos partes. Primero, se muestra la validación experimental del modelo computacional y una comparación entre dos maneras de modelar la cinética del problema, una a través del trabajo

virtual y otra a través del método de Lagrange desarrollado en (Mora, Barreto, & Rodríguez, 2022). Segundo, se presentan y comparan los resultados de los tres problemas de optimización. La comparación se realiza en base a los resultados de consumo energético computacionales y experimentales.

#### 4.1. Comparación de métodos para modelar la cinética y validación experimental

Para empezar, se hizo una comparación de los resultados del modelo cinético anteriormente descrito (Trabajo Virtual) y el método de Lagrange desarrollado en (Mora, Barreto, & Rodríguez, 2022). De igual manera, se realizó la validación experimental de los resultados de ambos modelos. Para esto se utilizaron trayectorias polinomiales de quinto orden (P5) y trayectorias trapezoidales modificadas en aceleración (T) para las funciones  $\theta_1(t)$  y  $\theta_4(t)$ . Las funciones se ingresaron al controlador y después de la prueba se extrajeron los torques reales en los motores.

En la Figura 3, Figura 4 y Figura 5 se muestran los resultados experimentales (Exp.) para una trayectoria trapezoidal y una polinomial de quinto orden, respectivamente. Adicionalmente, en estas figuras se pueden ver los resultados de los torques calculados a través de ambos métodos computacionales, trabajo virtual (V. Work) y Lagrange.

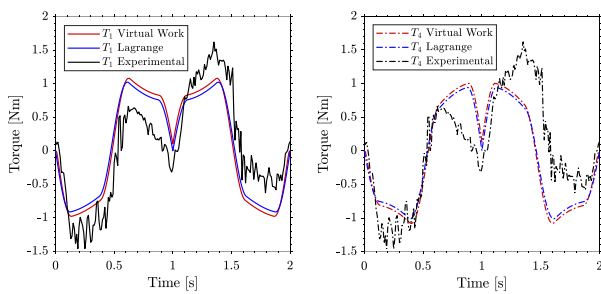


Figura 3. Torques computacionales y experimentales de cada motor en la trayectoria trapezoidal.

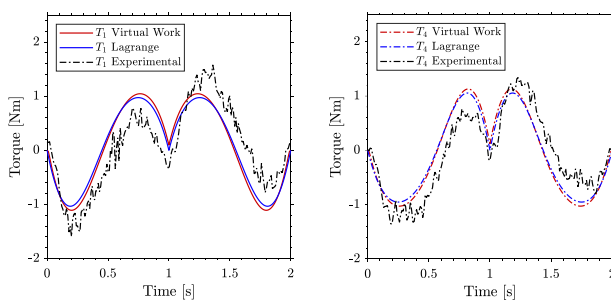


Figura 4. Torques computacionales y experimentales de cada motor en la trayectoria trapezoidal.

Como se puede ver, los resultados son bastante similares por ambos métodos. Se alcanza a notar una leve diferencia en la magnitud, que resulta ser un poco mayor en el caso del trabajo virtual, y esto se traduce en la energía consumida estimada a partir de tales torques. Sin embargo, en comparación con los torques experimentales, ambos modelos parecen tener una predicción con precisiones similares. El torque experimental tiene bastante ruido y vibraciones, y difiere de los calculados debido a las dinámicas que no fueron

modeladas. Esto resulta en unos consumos reales mayores a los calculados. Sin embargo, a grandes rasgos la predicción es bastante acertada. El ajuste del modelo cinético es un tema de estudio que se abordará en trabajos futuros.

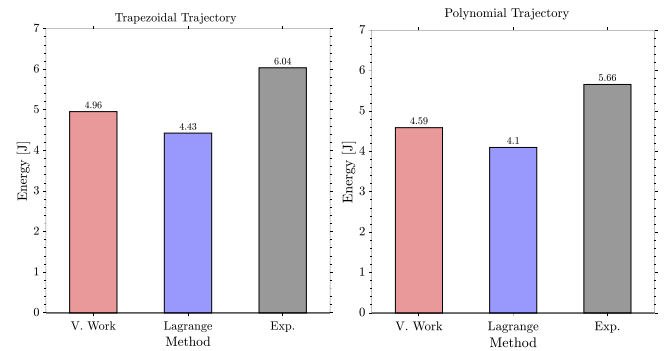


Figura 5. Consumos energéticos experimentales y computacionales para la trayectoria trapezoidal (izquierda) y para la trayectoria polinomial (derecha).

Adicional a la comparación en los resultados de torque y consumo energético de los dos modelos cinéticos, se contabilizó el tiempo que cada modelo computacional necesita para calcular el consumo de energía de cada trayectoria. El modelo cinético de trabajo virtual se modeló en Python y se contabilizó el tiempo a través de la función `time.time()`, mientras que para el modelo cinético de Lagrange se escribieron las ecuaciones en Matlab y se utilizaron las líneas `tic` y `toc` para contabilizar el tiempo.

Con esto en mente, la comparación se realizó tomando el tiempo de repetir el cálculo 30 veces y obtener un promedio. El modelo de trabajo virtual obtuvo tiempos promedio de cálculo de 0.017 y 0.016 segundos para las trayectorias trapezoidal y polinomial, respectivamente. En cambio, el tiempo promedio de cálculo con el modelo de Lagrange fue de 7.594 y 7.644 segundos. Esto quiere decir que el tiempo de cálculo del modelo de Lagrange es mayor a 400 veces el tiempo de cálculo del modelo de trabajo virtual. El esfuerzo computacional se convierte en una variable importante cuando la tarea cambia y se requiere calcular nuevas trayectorias.

#### 4.2. Resultados de los problemas de optimización

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de los tres problemas de optimización. En la Figura 6 se muestra el proceso de convergencia en simulación para llegar a la trayectoria de mínimo consumo energético computacional del primer problema de optimización (P7), en la Figura 7 del segundo (SP) y en la Figura 8 del tercero en simulación (BOS). Para cada una de ellas se muestran cinco trayectorias y sus consumos asociados: la trayectoria asociada con el valor inicial con el que inicia el algoritmo (Initial Guess), tres iteraciones intermedias (It. 1, It. 2 y It. 3,) y la solución final (Solution).

Los resultados muestran que se parte de una trayectoria de alto consumo energético y que, mediante cada uno de los algoritmos, se logra llegar a un consumo energético mínimo. En el apéndice A se muestran las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares de los dos motores en cada trayectoria. De igual manera, en el mismo apéndice se reportan los torques y la potencia requeridos para generar cada movimiento.

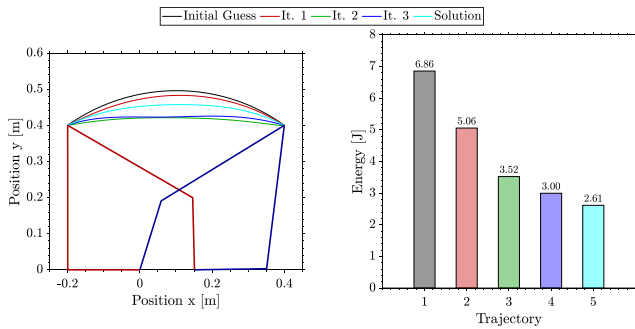


Figura 6. Trayectorias del efector final y consumos de energía en el proceso de convergencia del primer problema de optimización (P7).

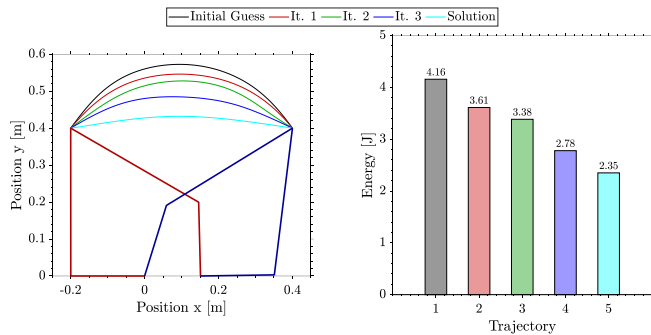


Figura 7. Trayectorias del efector final y consumos de energía en el proceso de convergencia del primer problema de optimización (SP).

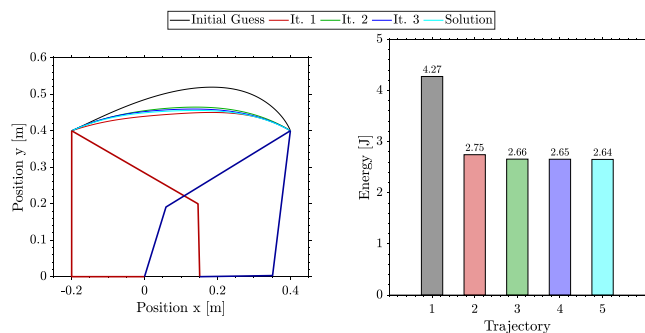


Figura 8. Trayectorias del efector final y consumos de energía en el proceso de convergencia del primer problema de optimización con simulación (BOS)

Como se describía con anterioridad, en el caso del segundo enfoque del tercer problema de optimización (BOR), inicialmente se ingresan al controlador sugerencias de trayectorias del algoritmo de optimización bayesiana por simulación. De esta manera, se pueden extraer los datos reales de velocidad angular y torque del controlador para calcular los consumos reales y poder generar nuevas sugerencias que involucren dinámicas no modeladas, como la fricción, a través de una retroalimentación en la función de adquisición.

En la Figura 9 se muestran los consumos energéticos de las trayectorias sugeridas por el algoritmo BOR, obtenidos a través de los resultados por simulación y a través de las pruebas experimentales correspondientes para 70 iteraciones. Como se puede ver, el consumo energético, calculado a partir de los resultados experimentales, disminuye de 5.43 Joules en la iteración 1 a 4.61 Joules en la iteración 16. Por lo tanto, las sugerencias del algoritmo retroalimentado logran reducir el consumo energético experimental.

Para ilustrar el proceso se considera cada trayectoria que representó una nueva mejor solución para el número de iteraciones acumuladas. A lo largo del proceso, e incluyendo

la primera iteración, se encuentran cinco reducciones. En la Figura 10, se muestra el proceso de convergencia para llegar a la trayectoria de mínimo consumo energético experimental en el caso del problema de optimización BOR. En el apéndice se pueden encontrar figuras complementarias para ilustrar la cinemática y cinética de cada trayectoria.

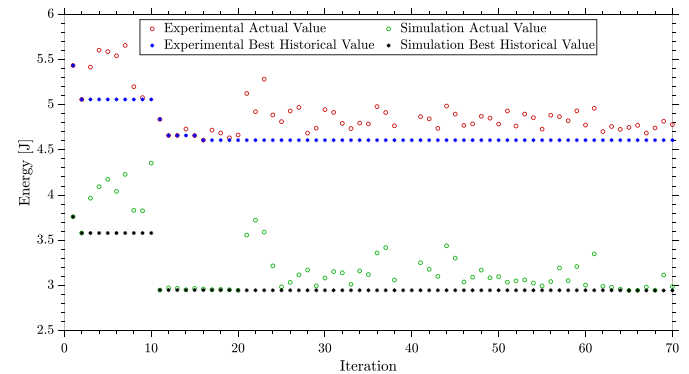


Figura 9. Convergencia del modelo de optimización bayesiana con datos reales.

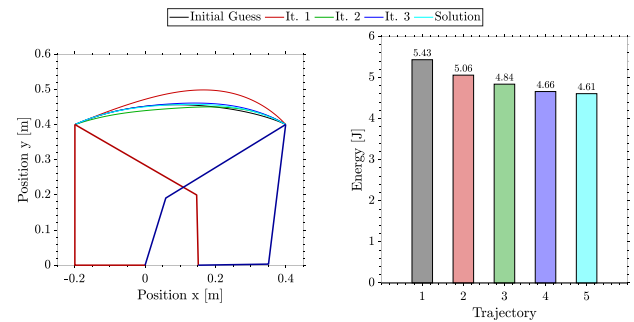


Figura 10. Convergencia del modelo de optimización bayesiana con datos reales.

### 4.3. Comparación de los problemas de optimización

Para comparar los resultados se consideran dos acercamientos. Por un lado, se realiza la comparación de los resultados computacionales obtenidos a partir de solo simulaciones y, por otro lado, se realiza la comparación con los resultados experimentales.

Primero, se compararán los resultados computacionales, es decir, el cálculo de la estimación del consumo energético netamente teórico. En la Figura 11, se muestran los resultados de torque de cada motor y la estimación del consumo energético después de solucionar los tres problemas de optimización presentados anteriormente. Además, se muestran los resultados para dos casos de trayectorias genéricas: trapezoidal (T) y polinomial de quinto orden (P5).

Los resultados muestran tres aspectos destacables. Primero, la estimación del consumo energético de las trayectorias optimizadas es mucho menor a de las genéricas, con diferencias del orden de 42% en adelante. Segundo, el modelo de optimización bayesiana y el de optimización tradicional, obtienen resultados muy similares debido a que ambos problemas involucran funciones polinomiales de séptimo orden. Se puede observar que, tanto al analizar las curvas de torque y los valores de energía consumida, los resultados difieren apenas en aproximadamente un 0.1%. Por último, la trayectoria encontrada usando optimización tradicional, con un



modelamiento por funciones multi punto, es la que resulta en un menor consumo de energía, con un ahorro entre el 11% y el 12% comparado con las soluciones por polinomios de séptimo orden: P7 y BOS, respectivamente.

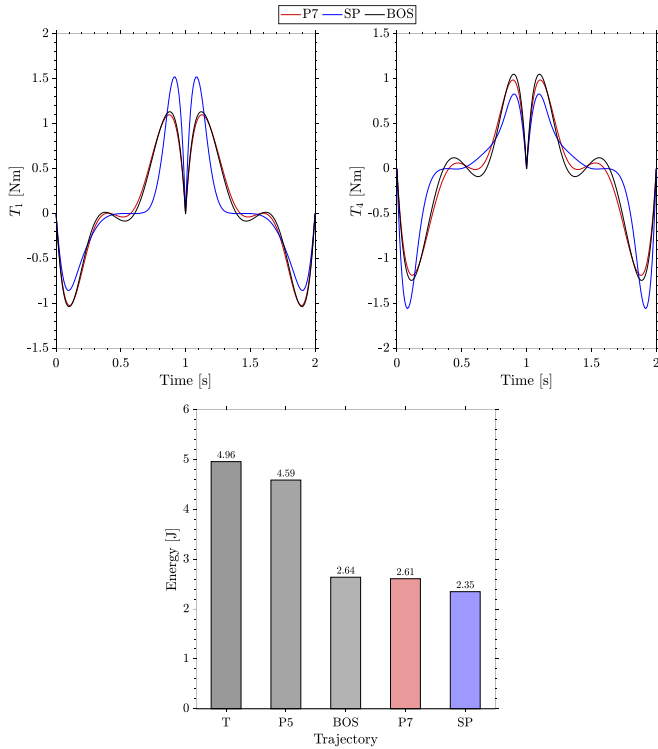


Figura 11. Comparación de resultados por simulación.

Lo anterior lleva a deducir dos aspectos fundamentales, en lo que corresponde a los problemas de optimización que involucran una trayectoria de un único polinomio de séptimo orden. Por un lado, ambos parecen tener la misma capacidad para minimizar una función objetivo, a juzgar por la similitud de los resultados que se encontraron para el mismo problema (BOS y P7). Por otro lado, el segundo problema de optimización, que involucra trayectorias multipunto, permite más variabilidad gracias a sus diez variables de decisión y, por lo tanto, es capaz de obtener resultados más ajustados a lo deseado. En este caso, eso se traduce en una trayectoria más eficiente energéticamente, al menos en simulaciones computacionales.

De manera similar, en la Figura 12, se realiza la comparación de los resultados experimentales de los problemas de optimización 2 y 3. Se realiza la comparación entre los resultados del problema de optimización SP y BOR debido a que el SP obtiene los mejores resultados de energía mínima en simulación. Adicionalmente, en la Figura 13 se presentan los resultados en la estimación de los consumos energéticos experimentales para las trayectorias resultantes en cada problema de optimización.

De los resultados resaltan principalmente dos ideas. Primero, la estimación del consumo energético real sigue siendo menor para las trayectorias optimizadas a través de SP y BOR, sin embargo, la reducción que se encuentra en el consumo energético experimental es menor a la reducción del caso computacionales.

Por otra parte, la estimación del consumo energético, que se obtuvo al implementar experimentalmente las trayectorias calculadas en el problema de optimización bayesiana retroalimentado, es ligeramente menor que el obtenido a través de la optimización tradicional con splines. La solución por optimización bayesiana retroalimentada genera un consumo de energía un 2% menor.

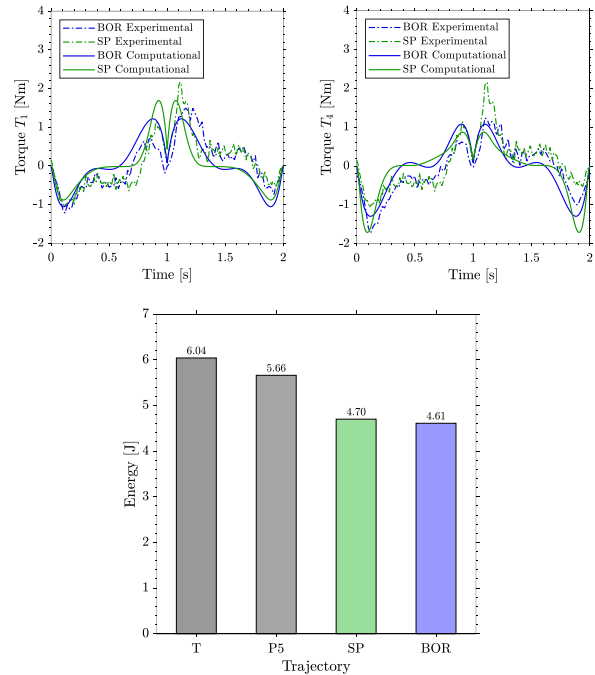


Figura 12. Comparación de resultados experimentales.

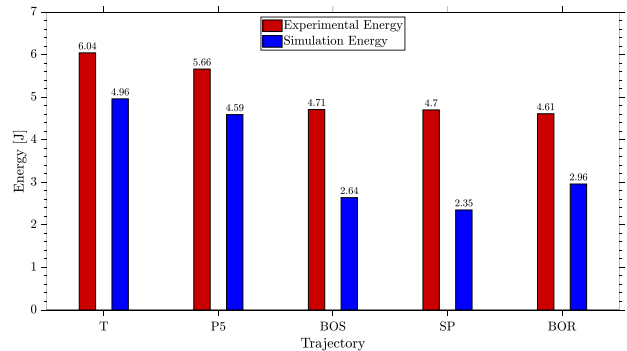


Figura 13. Consumos calculados y experimentales más relevantes.

Esto último habla muy bien del método de optimización bayesiana con datos reales. Principalmente, porque fue demostrado anteriormente que el modelo de splines es capaz de obtener mejores resultados computacionales del consumo energético que el modelo de parametrización de trayectorias con polinomios de grado 7 (calculadas con BOS o con métodos tradicionales de optimización). Esto significa que el uso de datos reales en la retroalimentación del modelo de optimización bayesiana permitió considerar dinámicas que no se incluyeron en el modelo matemático, y a partir de ahí logró ajustarse mejor a una trayectoria de mínimo consumo energético, incluso bajo la desventaja de tener menos cantidad de variables de decisión en el modelo de optimización.

## 5. Conclusiones

La principal contribución del presente trabajo de investigación es el estudio de la optimización bayesiana como un método reciente en el cálculo de trayectorias de mínimo consumo energético.

Las comparaciones entre los modelos cinéticos de trabajo virtual y el de coordenadas generalizadas (Lagrange), permiten concluir que el método de trabajo virtual es especialmente atractivo en términos del tiempo de cálculo de la cinética, debido a que realiza el cálculo de los torques requeridos de manera más directa. El tiempo de cómputo es una variable importante a la hora de tener que calcular nuevas trayectorias en tiempo real mientras se esté efectuando algún movimiento. En especial para el caso de optimización bayesiana, sería ideal mantener una comunicación en tiempo real entre el prototipo y el algoritmo de optimización para poder realizar el intercambio de datos experimentales y alimentar el modelo computacional.

La comparación que se realizó de los resultados del consumo energético de trayectorias genéricas, trayectorias calculadas con métodos de optimización tradicionales y trayectorias calculadas con optimización bayesiana, ponen en evidencia las ventajas de diseñar e implementar una trayectoria de mínimo consumo energético. En esta comparación resalta la optimización de trayectorias multipoint, conformadas por splines, en donde se pueden obtener menores consumos energéticos en simulaciones computacionales debido a su flexibilidad. En otras palabras, las trayectorias genéricas deberían reemplazarse por trayectorias óptimas para reducir el consumo energético de tareas pick and place.

Los métodos de optimización que se estudiaron resultaron ser exitosos en el cálculo de trayectorias de mínimo consumo energético. Es importante aclarar que, para todos los problemas de optimización trabajados, las posiciones angulares de los motores fueron optimizadas de manera simultánea. Para encontrar una trayectoria en el espacio de trabajo que sea óptima, se requiere que ambas trayectorias en el espacio articulado sean óptimas.

Con respecto a la optimización bayesiana, por un lado, a través del BOR que involucra datos reales, se logran incluir dinámicas no modeladas. Esto permite que el modelo de optimización bayesiano obtenga trayectorias que permitan reducir aún más el consumo energético experimental del movimiento del robot paralelo, en comparación a métodos tradicionales de optimización. Como se resalta en la discusión anterior, el consumo energético experimental de la trayectoria óptima computacional, calculada a través del problema de optimización SP, resulta ser mayor al consumo energético experimental que resultó de la optimización bayesiana con retroalimentación.

Por otro lado, en comparación con las trayectorias óptimas BOS y SP, la trayectoria BOR logra obtener resultados de consumo energético experimental y simulación más parecidos. Esto indica que el modelo de optimización bayesiana con datos reales podría estar aproximando el modelo computacional al modelo real.

Finalmente, se proponen cinco ideas principales para trabajos futuros. Primero, se deben generalizar las conclusiones a través del estudio de más tareas pick and place con diversas condiciones, debido a que en el presente trabajo

se consideró, computacional y experimentalmente, solo una. Segundo, se propone realizar otras combinaciones en la selección de las variables de decisión para el problema de optimización bayesiana y estudiar su sensibilidad en los resultados. Tercero, considerar la posibilidad de incrementar la cantidad de variables de decisión en el problema de optimización bayesiana a través de la construcción de trayectorias multi punto. Cuarto, realizar mediciones directas del consumo energético en el prototipo experimental, debido a que en esta contribución se realizaron estimaciones a través de un modelo matemático aproximado. Por último, se propone el estudio del movimiento natural de los robots paralelos a través de la optimización bayesiana para explorar la dinámica natural y estudiar estrategias mixtas de reducción de energía.

## Agradecimientos

Se reconoce la especial contribución del profesor Carlos Francisco Rodríguez y el curso de Dinámica de Robots que se dicta en la Universidad de los Andes. Del mismo modo, un especial agradecimiento a Juan Pablo Barreto por fomentar este tipo de estudios en la reducción de energía de robots paralelos.

## Referencias

- Angeles, J. (2007). Trajectory Planning: Pick and Place Operations. En *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems* (págs. 233-256). Montreal: Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-319-01851-5>
- Aracil, R., Saltarén, R. J., Sabater, J. M., & Reinoso, Ó. (septiembre de 2010). Robots Paralelos: Máquinas con un Pasado para una Robótica del Futuro. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, v. 3, n. 1, p. 16-28. Recuperado el 22 de Noviembre de 2021, de <https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/8105>
- Barreto, J. P. (2021). *Exploiting the natural dynamics of parallel robots for energy-efficient pick-and-place tasks*. RWTH Aachen University, Institute of Mechanism Theory, Machine Dynamics and Robotics (IGMR). Aachen: RWTH Aachen University. doi:<https://doi.org/10.18154/RWTH-2021-05347>
- Brochu, E., Cora, V. M., & de Freitas, N. (2010). *A Tutorial on Bayesian Optimization of Expensive Cost Functions, with Application to Active User Modeling and Hierarchical Reinforcement Learning*. Cornell University, Computer Science. Machine Learning. Cornell University. Recuperado el 5 de Septiembre de 2021, de <https://arxiv.org/abs/1012.2599>
- Carabin, G., Wehrle, E., & Vidoni, R. (2017). A Review on Energy-Saving Optimization Methods for Robotic and Automatic Systems. *Robotics*, 6(4), 39. doi:<https://doi.org/10.3390/robotics6040039>
- Dai, Y.-H. (2002). Convergence Properties of the BFGS Algorithm. *SIAM Journal on Optimization*, 13, 693-701. doi:10.1137/S1052623401383455
- Dou, Z. (2015). *Bayesian global optimization approach to the oil well placement problem with quantified uncertainties*. Purdue University, Mechanical Engineering. Purdue University. Recuperado el 10 de Agosto de 2021, de [https://docs.lib.purdue.edu/open\\_access\\_theses/530](https://docs.lib.purdue.edu/open_access_theses/530)
- Frazier, P. I. (2018). *A Tutorial on Bayesian Optimization*. Cornell University, Statistics. Machine Learning. Recuperado el 22 de Agosto de 2021, de <https://arxiv.org/abs/1807.02811>
- He, T., Zhang, Y., Sun, F., & Shi, X. (2016). Immune optimization based multi-objective six-DOF trajectory planning for industrial robot manipulators. *2016 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)* (págs. 2945-2950). IEEE. doi:<https://doi.org/10.1109/WCICA.2016.7578610>
- International Federation of Robotics. (2020). *Executive Summary World Robotics 2020 Industrial Robots*. Recuperado el 11 de Marzo de 2021, de [https://ifr.org/img/worldrobotics/Executive\\_Summary\\_WR\\_2020\\_Industrial\\_Robots\\_1.pdf](https://ifr.org/img/worldrobotics/Executive_Summary_WR_2020_Industrial_Robots_1.pdf)
- International Federation of Robotics. (2021). *Executive Summary World Robotics 2021 Industrial Robots*. Recuperado el 10 de 11 de 2021, de

[https://ifr.org/img/worldrobotics/Executive\\_Summary\\_WR\\_Industrial\\_Robots\\_2021.pdf](https://ifr.org/img/worldrobotics/Executive_Summary_WR_Industrial_Robots_2021.pdf)

Lorenz, M., Paris, J., Schöler, F., Barreto, J. P., Mannheim, T., Hüsing, M., & Corves, B. (2017). Energy-Efficient Trajectory Planning for Robot Manipulators. *ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 5B: 41st Mechanisms and Robotics Conference*. Cleveland, Ohio: ASME. doi:<https://doi.org/10.1115/DETC2017-67198>

MathWorks. (2021). *fminunc*. Recuperado el 13 de 7 de 2021, de <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fminunc.html#but9rn9-5>

Mora, J. P. (2021). *Estudio del movimiento natural en escenarios de tareas pick and place en un robot paralelo*. Universidad de los Andes, Ingeniería Mecánica. Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado el 22 de Noviembre de 2021, de <http://hdl.handle.net/1992/52889>

Mora, J., Barreto, J. P., & Rodríguez, C. F. (2022). Energy Optimization of a Parallel Robot in Pick and Place Tasks. *Pucheta M., Cardona A., Preidikman S., Hecker R. (eds) Multibody Mechatronic Systems. MuSME 2021. Mechanisms and Machine Science. 110*. Springer, Cham. doi:[https://doi.org/10.1007/978-3-030-88751-3\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-88751-3_20)

Rai, A., Antonova, R., Song, S., Martin, W., Geyer, H., & Atkeson, C. (2018). Bayesian Optimization Using Domain Knowledge on the ATRIAS Biped. *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* (págs. 1771-1778). IEEE. doi:<https://doi.org/10.1109/ICRA.2018.8461237>

Reiter, A., Gattringer, H., & Müller, A. (2017). Real-time computation of inexact minimum-energy trajectories using parametric sensitivities. *Ferraresi C., Quaglia G. (eds) Advances in Service and Industrial Robotics. RAAD 2017. Mechanisms and Machine Science. 49*, págs. 174-182. Springer, Cham. doi:[https://doi.org/10.1007/978-3-319-61276-8\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-319-61276-8_20)

Samper, J. (2021). *Optimización Bayesiana del Consumo Energético de un Mecanismo de 5 Barras*. Universidad de los Andes, Ingeniería Mecánica. Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado el 22 de Noviembre de 2021, de <http://hdl.handle.net/1992/53169>

Snoek, J., Larochelle, H., & Adams, R. P. (2012). *Practical Bayesian Optimization of Machine Learning Algorithms*. Cornell University. Cornell University. Recuperado el 12 de Agosto de 2021, de <https://arxiv.org/abs/1206.2944v2>

SP Automation and Robotics. (2018). *Pick and Place Automation / Robotic Material Handling*. Recuperado el 10 de Junio de 2021, de <https://sp-automation.co.uk/pick-place-application/>

The European Business Review. (Septiembre de 2020). *The role of industrial robots in global modern industries*. Recuperado el 11 de Marzo de 2021, de <https://www.europeanbusinessreview.com/the-role-of-industrial-robots-in-global-modern-industries/>

**Apéndice A. Primer problema de optimización – P7**

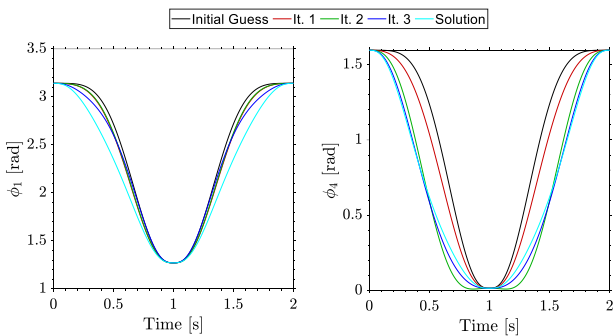


Figura 14. Posiciones angulares de los motores en la convergencia del P7

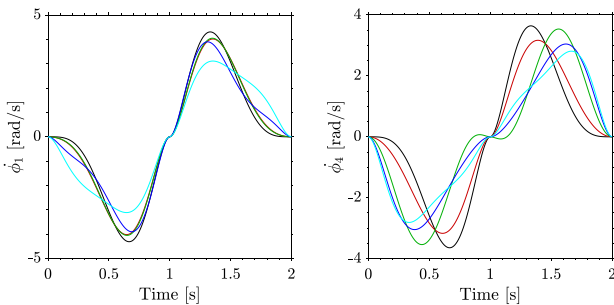


Figura 15. Velocidades angulares de los motores en la convergencia del P7

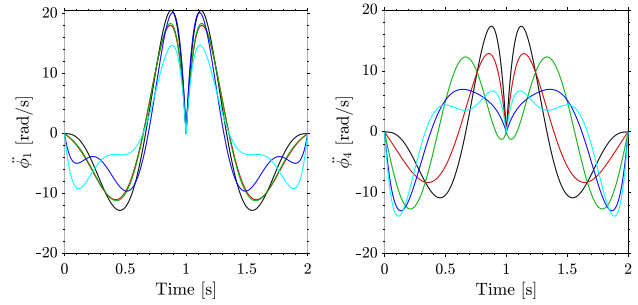


Figura 16. Aceleraciones angulares de los motores en la convergencia del P7

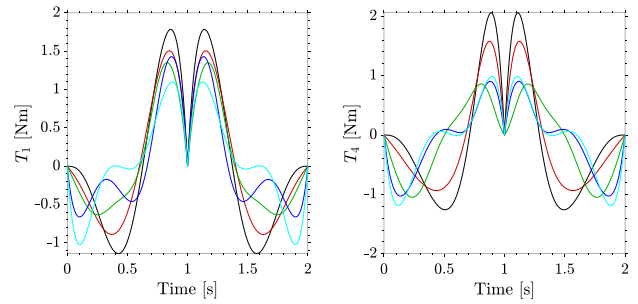


Figura 17. Torques de los motores en la convergencia del P7

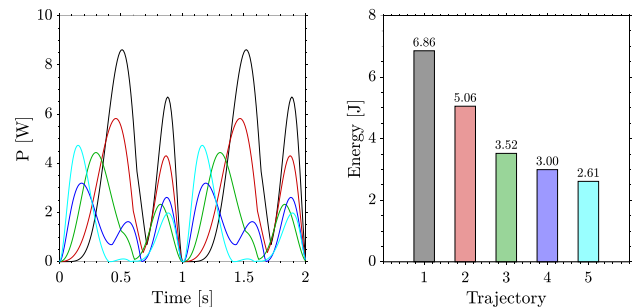


Figura 18. Potencia y consumo energético en la convergencia del P7

**Apéndice B. Segundo problema de optimización – SP**

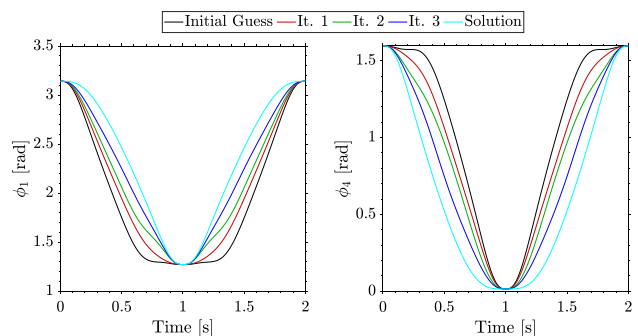


Figura 19. Posiciones angulares de los motores en la convergencia del SP

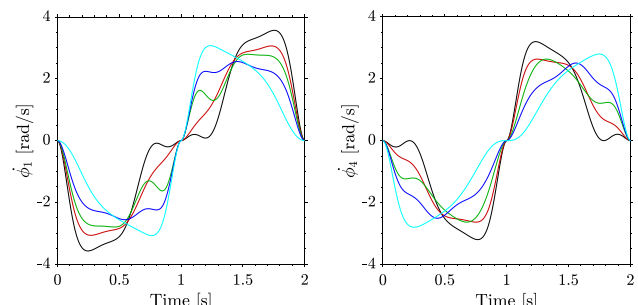


Figura 20. Velocidades angulares de los motores en la convergencia del SP

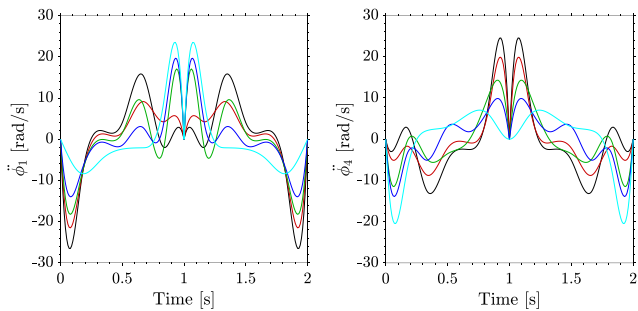


Figura 21. Aceleraciones angulares de los motores en la convergencia del SP

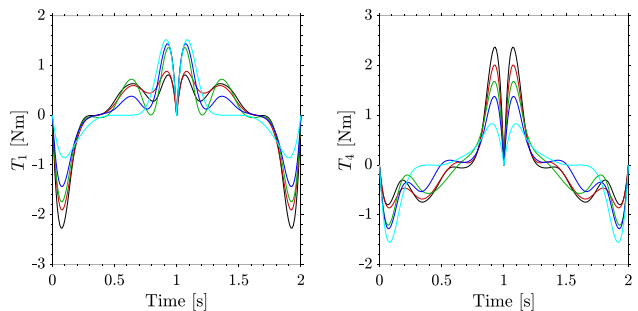


Figura 22. Torques de los motores en la convergencia del SP

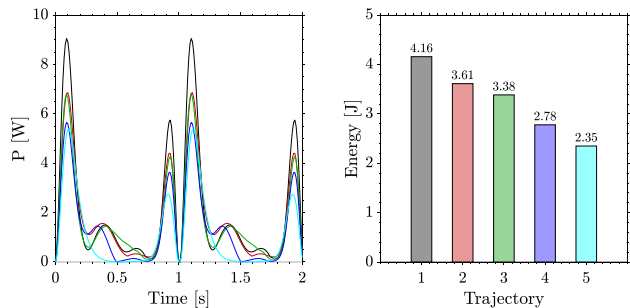


Figura 23. Potencia y consumo energético en la convergencia del SP

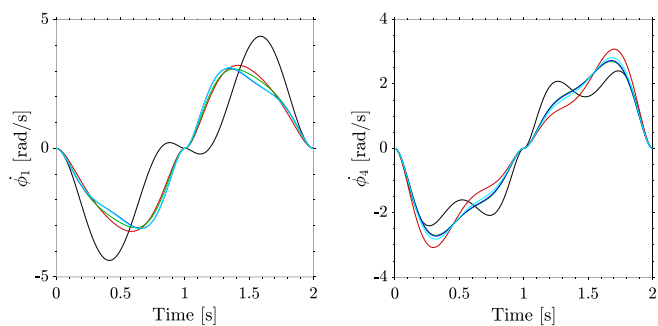


Figura 25. Velocidades angulares de los motores en la convergencia del SP

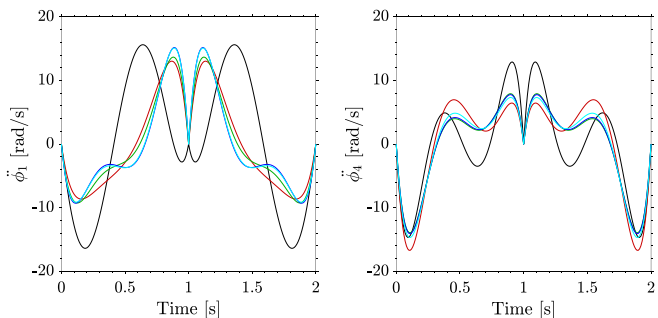


Figura 26. Aceleraciones angulares de los motores en la convergencia del BOS

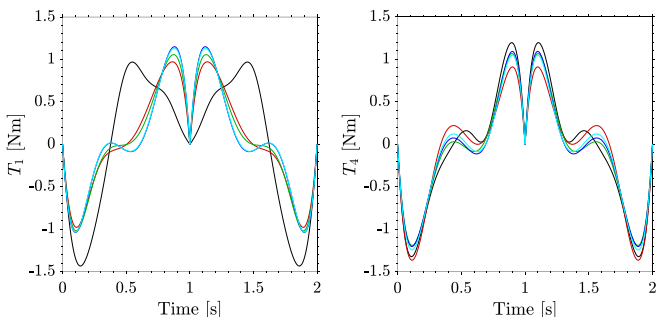


Figura 27. Torques de los motores en la convergencia del BOS

**Apéndice C. Tercer problema de optimización – BOS**

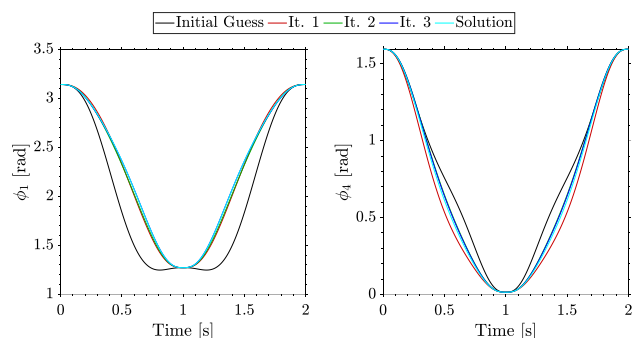


Figura 24. Posiciones angulares de los motores en la convergencia del BOS

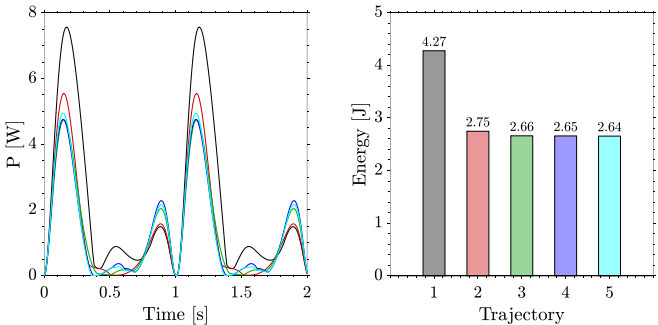


Figura 28. Potencia y consumo energético en la convergencia del BOS