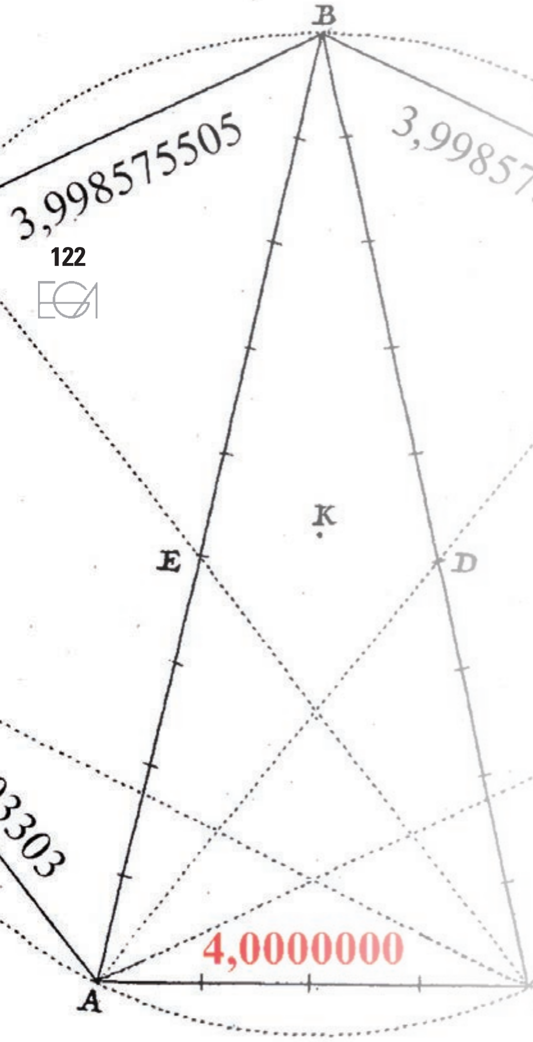


EL HEPTÁGONO DE FRAY IGNACIO MUÑOZ Y SU *MANIFIESTO GEOMETRICO* (1684)

THE HEPTAGON OF FRAY IGNACIO MUÑOZ AND ITS *GEOMETRIC MANIFESTO* (1684)

Cinta Lluis-Teruel; orcid 0000-0002-5280-1147
Josep Lluis i Ginovart; orcid 0000-0001-5957-762X
Universitat Internacional de Catalunya

doi: 10.4995/ega.2023.16289

El dominico Ignacio Muñoz estuvo en Filipinas, Nueva España y en la Corte, publicando el *Manifiesto Geometrico* (1684), obra dedicada a la construcción del heptágono regular, con una crítica inquisitorial al estudio de figura Kepler de *Harmonices mundi* (1619), por considerar al polígono como incognoscible. Especial interés revisten los manuscritos de sus conocimientos de base geométrica que han llegado a nuestros días y cuya utilización se adaptan a las necesidades del mantenimiento de imperio español en el siglo XVII y que les sirven para sustentar su demostración matemática para la construcción del *septanguli*. Kepler tenía razón ante la inconstructibilidad del heptágono como demostró Gauss, pero fray Ignacio murió sin saber que su método, utilizando la relación aritmética geométrica de (9/4), sería uno de los más precisos que cuantitativamente se han desarrollado hasta el siglo XXI.

PALABRAS CLAVE: MATEMÁTICA SIGLO XVII, GEOMETRÍA, HEPTÁGONO, IGNACIO MUÑOZ, NUEVA ESPAÑA

The Dominican Ignacio Muñoz was in the Philippines, New Spain and at the Court, publishing the Manifiesto Geometrico *(1684), a work dedicated to the construction of the regular heptagon, with an inquisitorial criticism of the Kepler figure study of* Harmonices mundi *(1619), for considering the polygon as unknowable. Special interests are the manuscripts of his knowledge of geometric basis that have survived to our days and whose use is adapted to the needs of the preservation of the Spanish empire in the XVII century ,which serve them to sustain their mathematical demonstration for the construction of the* septanguli*. Kepler was right about the non-constructability of the heptagon as Gauss demonstrated, but Friar Ignacio died without knowing that his method, using the geometric arithmetic relation of (9/4), would be one of the most precise that quantitatively devised until the XXI century.*

KEYWORDS: SEVENTEENTH CENTURY MATHEMATICS, GEOMETRY, HEPTAGON, IGNACIO MUÑOZ, NEW SPAIN

1. *Observationes diversarum artium* (1669). BNE Mss/7119

1. *Observationes diversarum artium* (1669). BNE Mss/7119

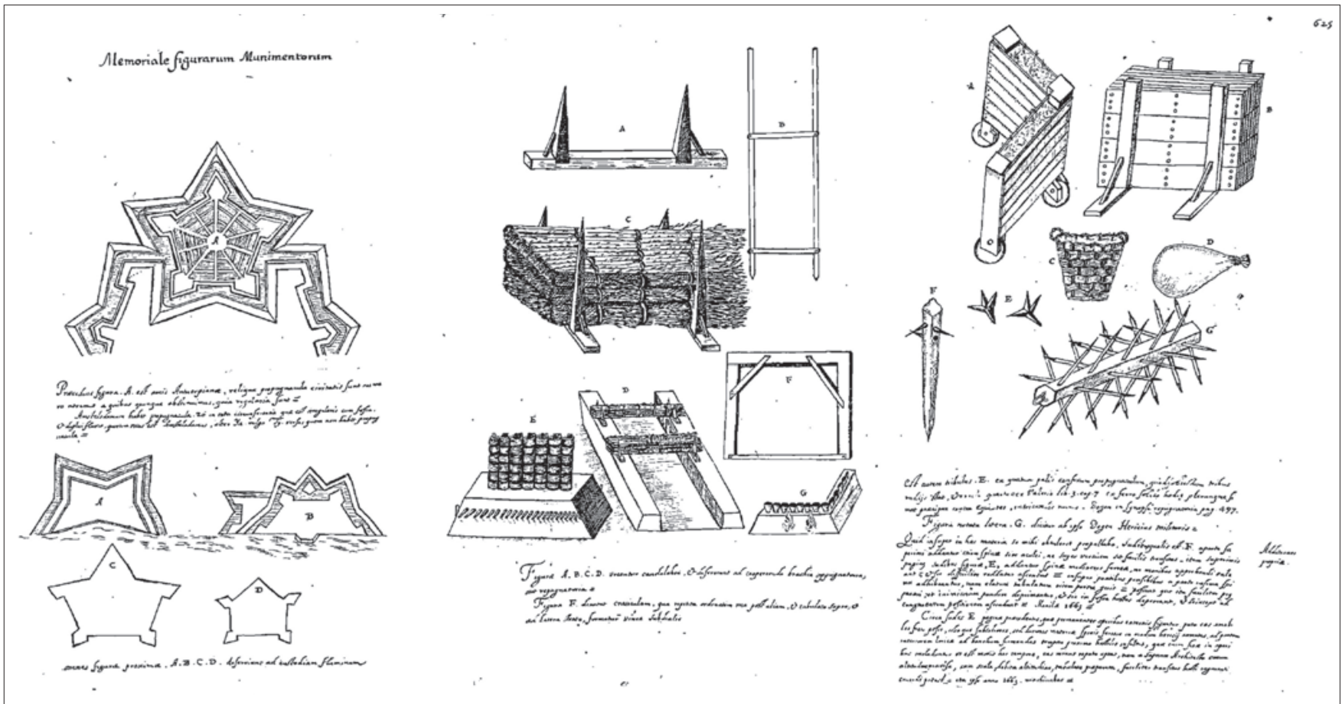
FRAY IGNACIO MUÑOZ

El dominico Ignacio Muñoz Pinciano (c.1608-1685) tuvo una azarosa vida científica tras su llegada a Manila en 1635 hasta su regreso en 1665 y llegada a la Corte de Carlos II (1665-1700) en 1670 a través de Nueva España, con escala en México (1665-1669) (Moreno 2021). Publicó el *Manifiesto geometrico, plus ultra de la geometria practica* (1684) (Muñoz 1684) (Fig. 7.a), citado en la Biblioteca Marítima Española (Fernández de Navarrete,1851, 654-656) y en la Bibliografía de Arquitectura, Ingeniería y Urbanismo (Bonet, 1980, 97). El objetivo es dar a conocer algunas noticias de forma complementaria del fraile desarrollas en la Revista, como su obra cartográfica (Chías, 2010, 162-237), y la relación a los métodos los empleados por los maestros góticos en el siglo (XIV-XV) para sus trazas (García, 2014, 184-193) y que no se difundieron en las ediciones vitruvianas (Lladó, J. S., 2016, 134-141) perdiéndose en los albores del quinientos (Sánchez-Polack-Morate; 2021, 42-55).

En especial se quiere contextualizar el método para la construcción del heptágono basado en una relación de proporcional de 9/4, criticando la no constructibilidad de la figura en el *Harmonices mundi libri V* de Johannes Kepler (1571-1630) (Kepler 1619, 32-40).

Se conocen otros manuscritos del dominico como las *Observationes diversarum artium* (1669) [BNE Mss/7111] (Fig. 1), *Derroteros de los mares de Marruecos, Canarias, América y Filipinas, y otros documentos* (1669 -1686) [BNE Mss/7119], la *Operación geométrica synóptica y universal para dividir qualquier ángulo rectilíneo en las partes iguales o proporcionales que se pidieren* (1670) [M-RAH, 9/2782], la *Comunicación enviada*

The Dominican Ignacio Muñoz Pinciano (c.1608-1685) had an eventful scientific life after his arrival in Manila in 1635 until his return in 1665 and arrival at the Court of Charles II (1665-1700) in 1670 via New Spain, with a stopover in Mexico (1665-1669) (Moreno 2021). He published the *Manifesto geométrico, plus ultra de la geometria practica (*1684) (Muñoz 1684) (Fig. 7.a), cited in the Biblioteca Marítima Española (Fernández de Navarrete,1851, 654-656) and in the Bibliografía de Arquitectura, Ingeniería y Urbanismo (Bonet, 1980, 97). The objective is to make known some complementary ways of the friar's development in the Journal, such as his cartographic work (Chas, 2010, 162-237) and the relation to the methods used by Gothic masters in the century (XIV-XV) for their traces (Garca, 2014, 184-193) and that were not disseminated in the Vitruvian editions (Lladó, J. S., 2016, 134-141) and were lost at the dawn of the five hundreds (Sánchez-Polack-Morate; 2021, 42-55).
In particular, idea is to contextualize the method for the construction of the heptagon based on a proportional relation of 9/4, criticizing the non-constructability of the figure in the *Harmonices mundi libri V* of Johannes Kepler (1571-1630) (Kepler 1619, 32-40).



1

2. Descripción geométrica de Manila (1671). [AGI. MP-FILIPINAS,10]
3. a) *Libro de Heptágono* de Arquímedes; b) aproximación al método de Arquímedes

2. Geometric description of Manila (1671). [AGI. MP-PHILIPPINES,10]
3. a) Archimedes' *Libro de Heptágono*; b) Archimedes' method approach

Other manuscripts by the Dominican are known, such as; the *Observationes diversarum artium* (1669) [BNE Mss/7111] (Fig. 1), *Derroteros de los mares de Marruecos, Canarias, América y Filipinas, y otros documentos* (1669 -1686) [BNE Mss/7119], the *Operación geométrica synóptica y universal para dividir qualquier ángulo rectilíneo en las partes iguales o proporcionales que se pidieren (*1670) [M-RAH, 9/2782], the *Comunicación enviada al jesuita José Zaragoza, siguiendo una discusión pasada sobre la obra de Gregoire de Saint-Vincent en la que este intentará demostrar la cuadratura del círculo* [M-RAH, 9/3638] and *Memorial y manifiesto hydrográfico en que se demuestra que todo Rio de la Plata y su isla de San Gabriel y todas las demas islas y tierras que baña este caudaloso rio son y pertenecen a las conquistas y dominio de la corona de Castilla* [M-RAH, 9/2810]. Others disappeared like the *Demostratio Geometrica trianguli Ysosceles, in Heptagono regulari*; the *Geometría práctica;* the *Novus Geometricae thesaurus*; *Hydrographia Universalis et particularis practica et speculativa*; the *Descriptio currum siam*; the *Architectura communis*, and

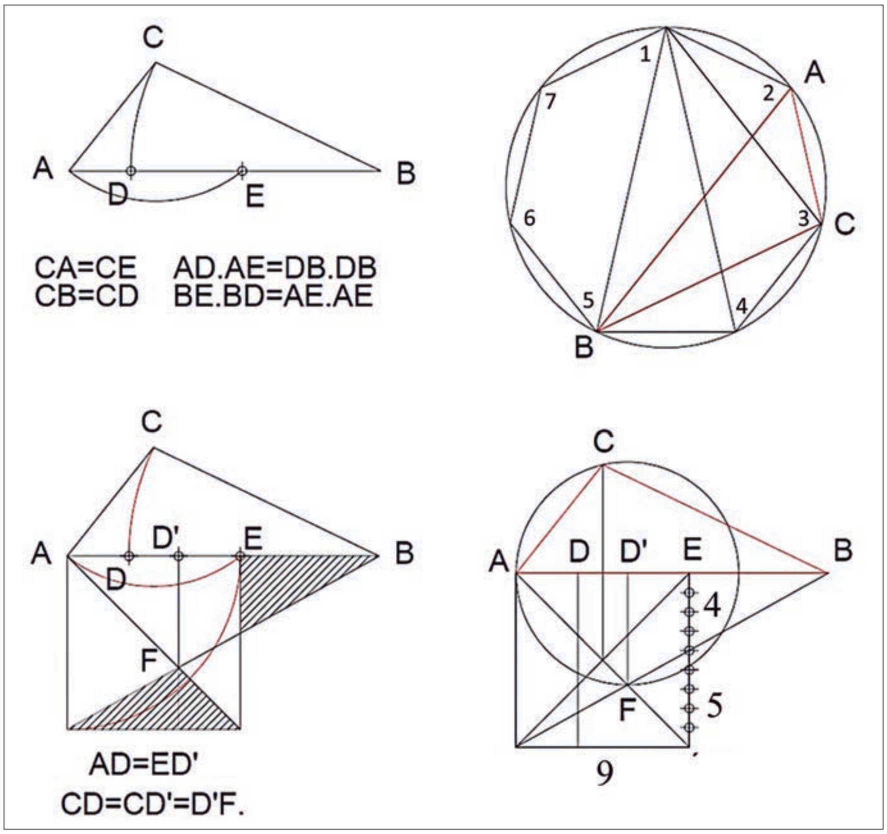
al jesuita José Zaragoza, siguiendo una discusión pasada sobre la obra de Gregoire de Saint-Vincent en la que este intentará demostrar la cuadratura del círculo [M-RAH, 9/3638] y *Memorial y manifiesto hydrográfico en que se demuestra que todo Rio de la Plata y su isla de San Gabriel y todas las demas islas y tierras que baña este caudaloso rio son y pertenecen a las conquistas y dominio de la corona de Castilla* [M-RAH, 9/2810]. Otras desaparecidas como la *Demostratio Geometrica trianguli Ysosceles, in Heptagono regulari*; la *Geometría práctica;* el *Novus Geometricae thesaurus*; *Hydrographia Universalis et particularis practica et speculativa*; la *Descriptio currum siam*; la *Architectura communis*, y la *Tabula declinationis solis et stellarum* (González 1967, V: 407). Otras inacabadas como *Nuevo Tesoro, y Plus Ultra de la Geometria Practica* donde debía tratar de los polígonos de lado impar; 9-11-13-15-17 y 19 (Muñoz 1684, 29).

Traza también la primera planimetría de Manila; *Descripción geométrica de la ciudad y circunvalación de Manila y de sus arrabales al Consejo de las Indias. Por el Padre Maestro Fray Ignacio Muñoz, del Orden de Predicadores. Año 1671*. [AG I. MP-FILIPINAS,10] (Fig. 2).

El heptágono regular

El *Libro de Heptágono* de Arquímedes (287-212aC) aborda la figura desde aspectos puramente matemáticos, (Knorr 1998, 257-271) (Fig. 3), transmitido por Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (c.965-c.1040) (Rashed 1976, 387-409), con dos maneras de aproximarse, con la división proporcional del segmento

2



3

en tres partes de Abu Sahl Waijan ibn Rustam al-Quhi (c.940-c.1000) y con la trisección del ángulo de Abu Said Ahmad ibn Muhammad Al-Sijzi (c.945-c.1020) (Hogendijk 1984, 231-316; 290-316), de difícil aplicación práctica.

Desde la perspectiva de la geometría práctica aparece *El libro de construcciones geométricas que son necesarios para los artesanos* (c.993-1008) (Aghayani-Chavoshi 2010, Y47B-,Y47C, Y47D) de Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani, (940-998) como (Fig. 4.a). La recepción en el occidente latino se realiza a través de la *Geometria Deutsch* (1472) atribuida a Hans Hösch von Gmünd (f. 1472) (Heideloff, 1844, 96-97) y la *Geometrie Deutsch* (1488) de Matthäus Roriczer (+c. 1495) (Roriczer, 1999, 56-60) (Fig. 4.b), mientras que la trisección del ángulo será abordada por Jordanus Nemonarius (1225-1260) en la *Geometria vel de triangulis libri IV* (Curtze 1887, 25-32).

La construcción del heptágono más utilizada determina el lado del heptágono regular como la altura del triángulo equilátero de lado el radio inscrito en la circunferencia del *Underweysung der Messung* (1525) de Albert Dürer (1471-1528), consecuencia del corolario del trazado del pentágono (LII.15) (Fig. 5.a), además del propio del heptágono (LII.11) (Fig. 5.b), (Dürer 1525, 27v-28v).

Fray Ignacio conocía el método de Durero a través de Cristoforo Clavio (1538-1612) de la *Geometria practica* (Clavio, 1606, 362-364), referido en las *Observationes*, junto con los otros por él mencionados, Carolus Marianus Cremonensis (f.1599) y François de Foix de Candale (1502-1594) (De Candale 1566, 34). A través de la cita de su *Architectura militaris* (fol. 597-626) podía conocer los de Matías Dögen (1605-1672) (Dögen 1647, 26-27) y Antoine Deville (1596-1657) (Deville1640, 29-30).

the *Tabula declinationis solis et stellarum* (González 1967, V: 407). Other unfinished ones such as *Nuevo Tesoro, and Plus Ultra de la Geometria Practica* where he had to deal with odd-sided polygons; 9-11-13-15-17 and 19 (Muñoz 1684, 29).

He also draws the first planimetry of Manila *Descripción geométrica de la ciudad y circunvalación de Manila y de sus arrabales al Consejo de las Indias. Por el Padre Maestro Fray Ignacio Muñoz, del Orden de Predicadores. Año 1671*. [AG I. MP-PHILIPPINES,10] (Fig. 2)

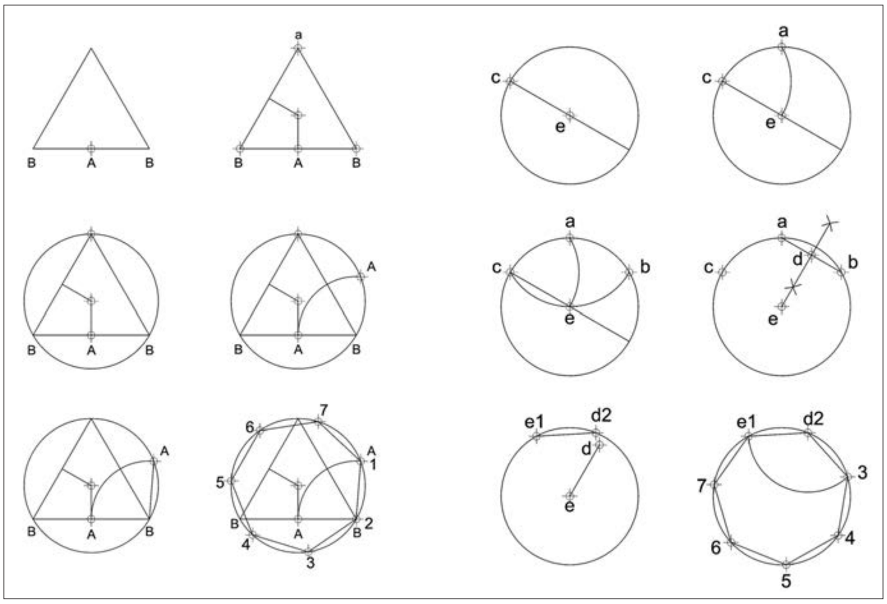
The regular heptagon

Archimedes' *Book of Heptagon (*287-212BCE) approaches the figure from purely mathematical aspects, (Knorr 1998, 257-271) (Fig. 3), transmitted by Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (c.965-c.1040) (Rashed 1976, 387-409), with two ways of approximation, with the proportional division of the segment into three parts by Abu Sahl Waijan ibn Rustam al-Quhi (c.940-c.1000) and with the trisection of the angle by Abu Said Ahmad ibn Muhammad Al-Sijzi (c.945-c.1020) (Hogendijk 1984, 231-316; 290-316), of difficult practical application.

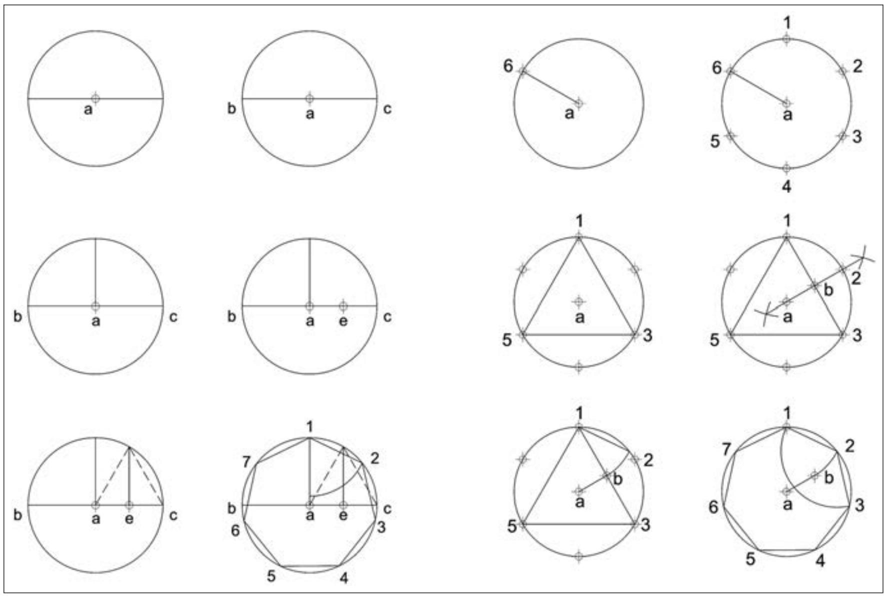
From the perspective of practical geometry appears *El libro de construcciones geométricas que son necesarios para los artesanos* (c.993-1008) (Aghayani-Chavoshi 2010, Y47B-,Y47C, Y47D) by Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani, (940-998) as (Fig. 4.a). Reception in the Latin West is through the *Geometria Deutsch* (1472) attributed to Hans Hösch von Gmünd (d. 1472) (Heideloff, 1844, 96-97) and the *Geometrie Deutsch* (1488) by Matthäus Roriczer (+c. 1495) (Roriczer, 1999, 56-60) (Fig. 4.b), while the trisection of the angle will be addressed by Jordanus Nemonarius (1225-1260) in the *Geometria vel de triangulis libri IV* (Curtze 1887, 25-32).

The most commonly used construction of the heptagon determines the side of the regular heptagon as the height of the equilateral triangle of side the radius inscribed in the circumference of the *Underweysung der Messung (*1525) by Albert Dürer (1471-1528), a consequence of the corollary of the plotting of the pentagon (LII.15) (Fig. 5.a), in addition to the heptagon itself (LII.11) (Fig. 5.b), (Dürer 1525, 27v-28v).

Fray Ignacio knew Dürer's method through Cristoforo Clavio (1538-1612) from the



4



5

4. Trazado heptágono; a) Abu'l-Wafa Al-Buzjani, (c.993-1008); b) Matthäus Roriczer (1488)
5. Trazados heptágono regular Albert Dürer (1525)
6. a) Juan de Arfe (1585); b) Diego López Arenas (1616); c) Simón García (1681)

Geometria practica (Clavio, 1606, 362-364), referred to in the *Observationes*, together with the others mentioned by him, Carolus Marianus Cremonensis (f.1599) and François de Foix de Candale (1502-1594) (De Candale 1566, 34). Through the citation of his *Architectura militaris (*fol. 597-626) he could know those of Matthias Dögen (1605-1672) (Dögen 1647, 26-27) and Antoine Deville (1596-1657) (Deville1640, 29-30).

In the *Manifesto* he refers to Kepler and those that Kepler cited by Clavio, Jost Bürgi (1552-1632) and Pier Francesco Malaspina (1550-1624) and that of Girolamo Cardano (1501-1576).

In Spain I could know; that of Juan de Arfe (1535-1603) from *De varia commensuracion para la escultura y architectura (*1585) *(*Arfe 1585, 7v) (Fig. 6.a) with the same geometric matrix as Abu'l-Wafa, as opposed to the cartabón of Diego López Arenas (+c.1640) in the *Primera y segunda parte de las reglas de la carpintería (*1616) (López de Arenas 1633, 16-17) (Fig. 6.b) and Fray Lorenzo de San Nicolás, (1593-1679) in the *Arte y Vso de Architectvra, (*1633) (Lorenzo de San Nicolás 1633, 80v), and the angular division of the *Compendio de Arquitectura y Simetria de los Templos (*1681) by Simón García which collects those of Rodrigo Gil de Hontañón (1500-1577) (García, 1991, l64v). (Fig. 6.c), and that chronologically the Dominican order could know.

The *Geometric Manifesto* (1684)

The *Manifesto geometrico, plus ultra de la geometria practica* is the only printed work of the Dominican published in 1684 in Brussels by Francisco Foppens (c.1600-1685), written in 1678 and sent in 1683 to the Duke of Béjar y Plasencia to whom it is dedicated (Fig. 7.a). The heptagon has a central angle ($2\varpi/7$) radians and between its sides ($5\varpi/7$) radians, trying to build it from the *Triangulo Isosceles propio del Heptagono regular*, defining it as *aquel en que cada uno de los dos ángulos en la base es triplo del ángulo vertical* (Fig. 7.b). The Dominican order induces through Consectario I, the isosceles triangle of the regular heptagon, of double and six-fourth proportion with respect to its base (9,4,9). A second consecutive indicates that the construction of José Zaragoza y Vilanova

En el *Manifiesto* se refiere al de Kepler y los que éste añadió a los citados por Clavio, Jost Bürgi (1552-1632) y Pier Francesco Malaspina (1550-1624) y el de Girolamo Cardano (1501-1576).

En España podía conocer el de Juan de Arfe (1535-1603) del *De varia commensuracion para la escultura y architectura* (1585) (Arfe 1585, 7v) (Fig. 6.a) con la misma matriz geométrica que Abu'l-Wafa, a diferencia del cartabón de Diego López Arenas (+c.1640) en la *Primera y segunda parte de las reglas de la carpintería* (1616) (López de Arenas 1633, 16-17) (Fig. 6.b) y Fray Lorenzo de San Nicolás,

4. Heptagon layout; a) Abu'l-Wafa Al-Buzjani, (c.993-1008); b) Matthäus Roriczer (1488)
5. Albert Dürer's (1525) regular heptagon traces
6. a) Juan de Arfe (1585); b) Diego López Arenas (1616); c) Simón García (1681)

(1593-1679) en el *Arte y Vso de Architectvra,* (1633) (Lorenzo de San Nicolás 1633, 80v), y la división angular del *Compendio de Arquitectura y Simetria de los Templos* (1681) de Simón García que recoge los de Rodrigo Gil de Hontañón (1500-1577) (García, 1991, l64v). (Fig. 6.c), y que cronológicamente el dominico podía conocer.

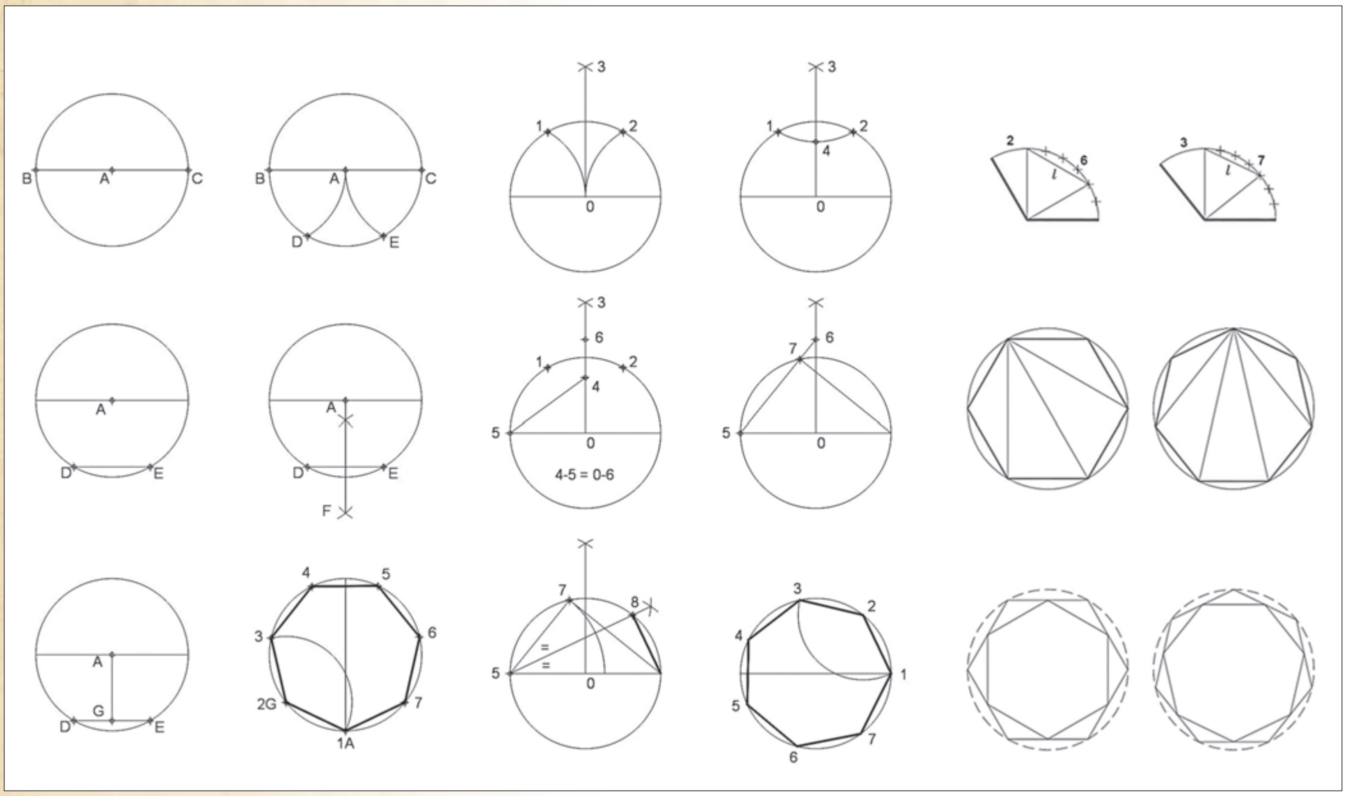
El *Manifiesto geometrico* (1684)

El *Manifiesto geometrico, plus ultra de la geometria practica* es la única obra impresa del dominico publicada en 1684 en Bruselas por Francisco Foppens (c.1600-1685), escrita en 1678 y enviada en 1683 al Duque de Béjar y Plasencia a quién está dedicado (Fig. 7.a). El heptágono tiene un ángulo central ($2\varpi/7$) radianes y entre sus lados ($5\varpi/7$) radianes, intentando construirlo a partir del *Triangulo Isosceles propio del Heptagono regular*, definiéndolo como, *aquel en que cada uno de los dos ángulos en la base es triplo del ángulo vertical* (Fig. 7.b).

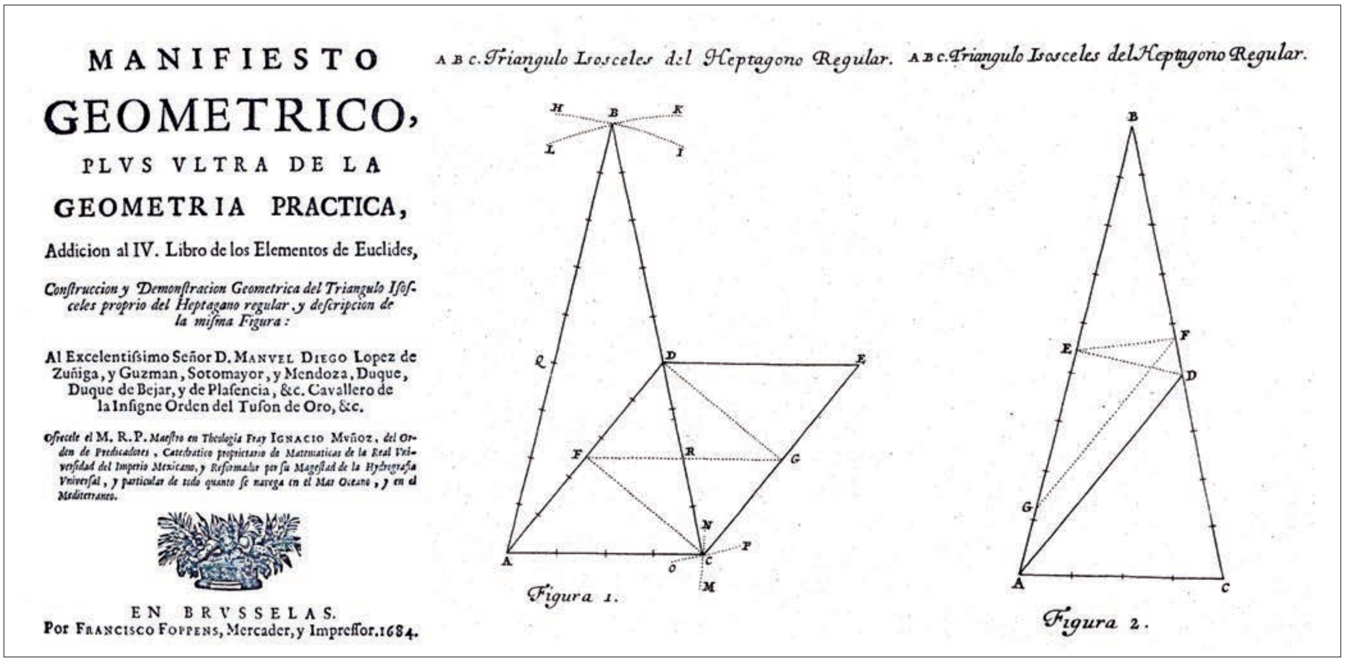
El dominico induce a través del Consectario I, el triángulo isósceles del heptágono regular, de proporción dupla y sesquicuarta con respeto a su base (9,4,9). Un segundo consectario indica que la construcción de José Zaragoza y Vilanova (1627-1679) se realiza con las tablas trigonométricas y por tanto no es geométrica. Añadiendo un tercer consectario donde relaciona el triángulo (9,4,9) con el paralelogramo (4,5,4,5) formado por la base (4) y la diagonal (5/9) (Fig. 7.c).

Prepara el teorema de base geométrica euclidiana para construir

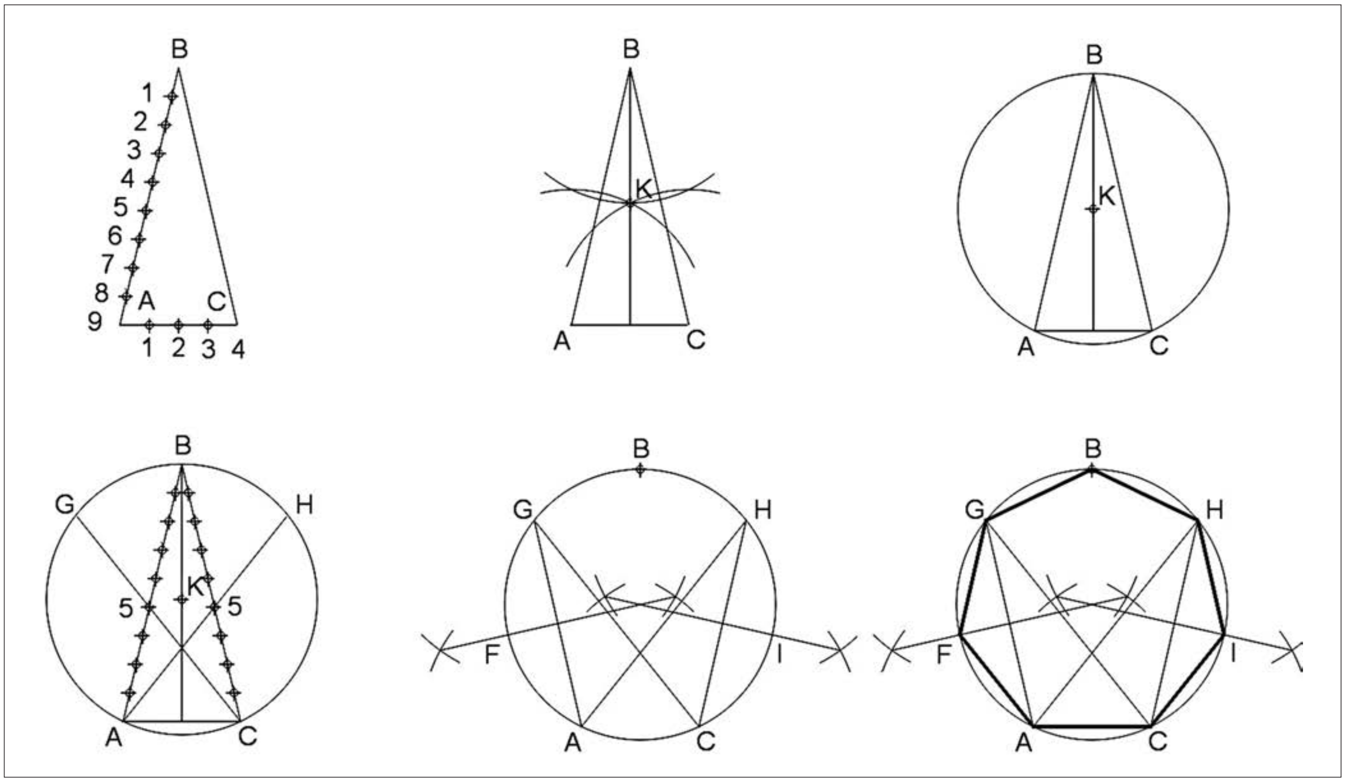
(1627-1679) is made with the trigonometric tables and therefore is not geometric. Adding a third consecutive where he relates the triangle (9,4,9) with the parallelogram (4,5,4,5) formed by the base (4) and the diagonal (5/9) (Fig. 7.c).
He prepares the Euclidean geometric base theorem to construct the heptagon, renouncing the trigonometric bases because he considers them numerical, and constructs the figure based on the isosceles triangle (Fig. 8).
He states that the proof of the theorem was to deduce a geometrical impossibility, such as the part and the whole are equal, found in the relation (9/4), which he takes as axiomatic (Fig. 8, 10.a) .This principle will be harshly criticized by the King's engineer Jorge del Pozo (f. 1676) who had hold the *Cátedra de Matemáticas, Fortificación y Artillería* (1667-1678) in the manuscript [M-RAH, 9/2782], *Responde Jorge del Poço desde la otra vida, como catedratico que fue de mathematicas en la Chanuerga, al papel impresso en Bruxelas este presente año de 1684.*



6



7

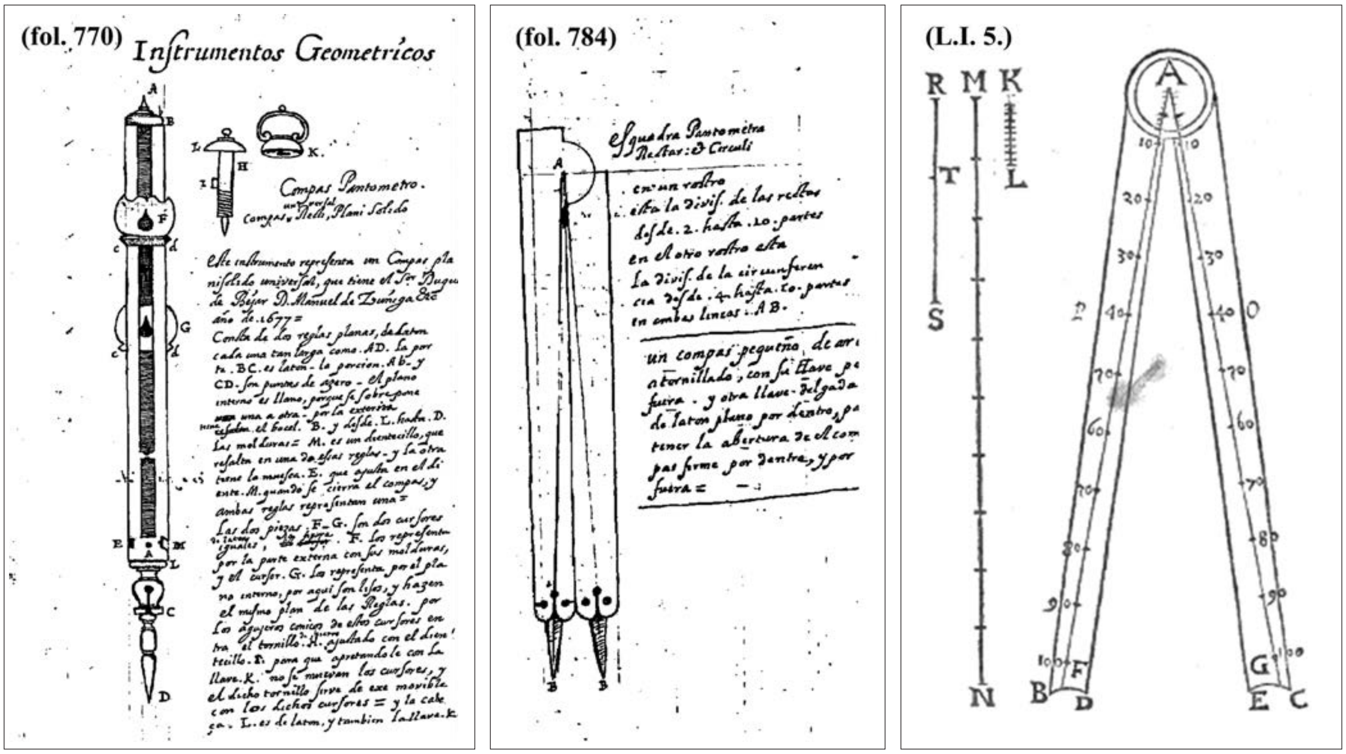


8

Considerations on the *Geometric Manifesto*

Fray Ignacio requires in the *Manifiesto Geometrico* a mathematical demonstration for the construction of the heptagon based on his geometric experience built through the compass. An example of this is the chapter of the *Observationes (*fol. 770-784) where he defines as *planifolado universival,* el heptágono, renunciando a las bases trigonométricas por considerarlas numéricas, y construir la figura en base al triángulo isósceles (Fig. 8).

Afirma que la demostración del teorema fue el de deducir un imposible geométrico, como que la parte y el todo son iguales, encontrado en la relación (9/4), que toma como axiomática (Fig. 8, 10.a) Este principio será duramente criticado por el ingeniero del Rey Jorge del Pozo (f. 1676) que había ocupado la *Cátedra de Matemáticas, Fortificación y Artillería* (1667-1678) en el manuscrito [M-RAH, 9/2782], *Responde Jorge del Poço desde la otra*



9

7. *Manifiesto geometrico, plus ultra de la geometria practica* (1864). Figuras para la demostración del triángulo isósceles del heptágono regular
8. La construcción del heptágono regular Fray Ignacio Muñoz (1684)
9. a, b) *Observationes diversarum artium*. (1669) Ignacio Muñoz; c) *Geometria practica* (1606), Cristóbal Clavio

7. *Manifesto geometrico, plus ultra de la geometria practica* (1864). Figures for the demonstration of the isosceles triangle of the regular heptagon
8. The construction of the regular heptagon Fray Ignacio Muñoz (1684)
9. a, b) *Observationes diversarum artium.* (1669) Ignacio Muñoz; c) *Geometria practica* (1606), Cristóbal Clavio

vida, como catedratico que fue de mathematicas en la Chanuerga, al papel impresso en Bruxelas este presente año de 1684.

Consideraciones sobre el *Manifiesto geométrico*

Fray Ignacio requiere en el *Manifiesto Geometrico* una demostración matemática para la construcción del heptágono en base a su experiencia geométrica construida a través del compás. Muestra de ello es el capítulo de las *Observationes* (fol. 770-784) donde define como *planifolado universival*, el compás del Duque de Béjar (Fig. 9.a).

En la obra describe el compás pantográfico (fol. 784) (Fig. 9.b), similar al de la *Geometria practica* de Clavio (Clavio, 1606, 5) (Fig. 9.c). La matemática tendrá que esperar hasta que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demostrara en las *Disquisitiones Arithmeticae* (Gauss 1801, 454-463) la imposibilidad de la construcción geométrica del heptágono.

La práctica habitual para la resolución del heptágono era hacer-

the compass of the Duke of Béjar (Fig. 9.a).
In the work he describes the pantographic compass (fol. 784) (Fig. 9.b), similar to the one in Clavio's *Geometria practica* (Clavio, 1606, 5) (Fig. 9.c). Mathematics will have to wait until Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demonstrated in the *Disquisitiones Arithmeticae (*Gauss 1801, 454-463) the impossibility of the geometrical construction of the heptagon.
The usual practice for solving the heptagon was to do it from the trigonometric division as José de Zaragoza did, in *Geometria practica Euclidis: problemata* continens (Zaragoza, 1672, 69-71), postulated by Simon de Stevin (1548-1620) in Lib2. pro.7 *Mathematicarum hypomnematun de Geometriae Praxi* (Stevin 1605, 66).
The second part is dedicated to the *Invectiva Filosofica y Geometrica, y Catolica con Juan Keplero en materia del Heptangono regular*, where he criticizes the schismatic question of Juan Kepler for considering the heptagon as an *inscibilia inefabilia nonentia* (Fig. 10.b), since it is not part of the polygons derived from the square powers; 2 (2,4,8), of 3 (3,6,12) and of 5 (5,10,20).
He concludes, alluding that, although the author is condemned in the Expurgatorium of the General Inquisition, the *Harmonices mundi* was not and therefore "*se debe poner"* (Muñoz, 1684, 33-40). The German astronomer appeared in the general index of the *Novus Index Librorum Prohibitorum et Expurgatorum* (1632), as author [+Ioannes Keplerus] and classified *Append. Libr. Proh& Exp. I Class.*

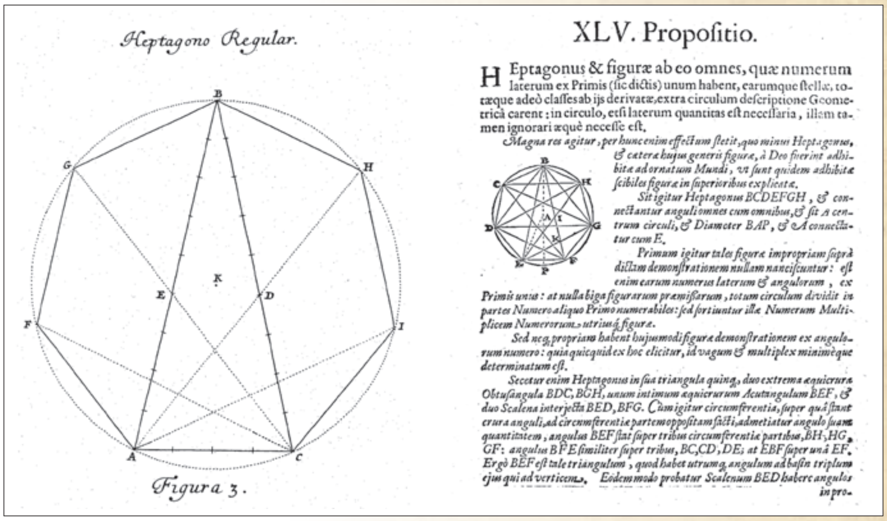
The heptagon and the seven represented the Creación finita (Gèn.1,1-2, 1,2). The canon of Noyon Charles Bovelles (1478-1567), cathedral with apse with five radial chapels, like Burges, Reims, Sens or Tours, knew others with seven, like Amiens, Beauvais or Chatres, author of the *Geometricum Introductorium* (1503), translated as *Geometrie en Françoys (*1511) where he constructs the heptagon, as in le *Livre singulier et utile, touchant l'art praticque de geometrie* (1542) (Fig. 11), he recognized that a figure as important for Christian symbolism as the heptagon, which did not appear in the *Elementa* of Euclid (c.325- c.265 BC) (Bovelles 1542, 25v-28r).

There is evidence of the use of the geometric relation (18/8) between the radius of the ambulatory and the radial chapels, for the construction of heptagonal apses as in the case of the cathedral of Tortosa (Fig. 12). The simulations of these geometric processes, which neither builders nor mathematicians had at their disposal, yield more accurate results than those developed by the treatises of the XV-XVII centuries (Lluis i Ginovart 2019).

The relation of (18/8) of arithmetic base (a/b) as well as geometric, is similar to the one proposed by the dominican order for its isosceles triangle of (9/4), so that the *Manifiesto Geometrico* to build a heptagonal apse to trace the 14-sided polygon, would be the most accurate among those published (Fig. 13).

Fray Ignacio did not resolve the impossible solution of the heptagon that Kepler advanced and Gauss proved, but his axiomatic principle of the ratio (9/4), and origin of which he never revealed, defining it as the geometrical impossible, constitutes the scientific methodological genesis, and on the basis of that he develops the mathematical demonstration.

It poses the problem *Dada qualquier recta, which has to be equal to any of the sides of the regular Heptagon, making this figure on the given straight line, without destroying the Circle,* is the same as the Gothic builders to draw the apses, since in many cases the Gothic cathedrals replaced the Romanesque and the presbyteries continued in operation. The geometric solution is achieved using some triangles such as those of the dominican order;



XLV. Propofitio.

HEptagonus & figuræ ab eo omnes, quæ numerum laterum ex Primis (fic dictis) unum habent, earumque ftellæ, totæque adeò claffes ab ijs derivatæ, extra circulum defcriptione Geometricâ carent: in circulo, etfi laterum quantitas eft neceffaria, illam tamen ignorari æquè neceffe eft.

Magna res agitur, per hunc enim effectum ftetit, quo minus Heptagonus, & cæteræ hujus generis figuræ, à Deo fuerint adhibitæ ad ornatum Mundi, ut funt quidem adhibitæ fcibiles figuræ in fuperioribus explicatæ.

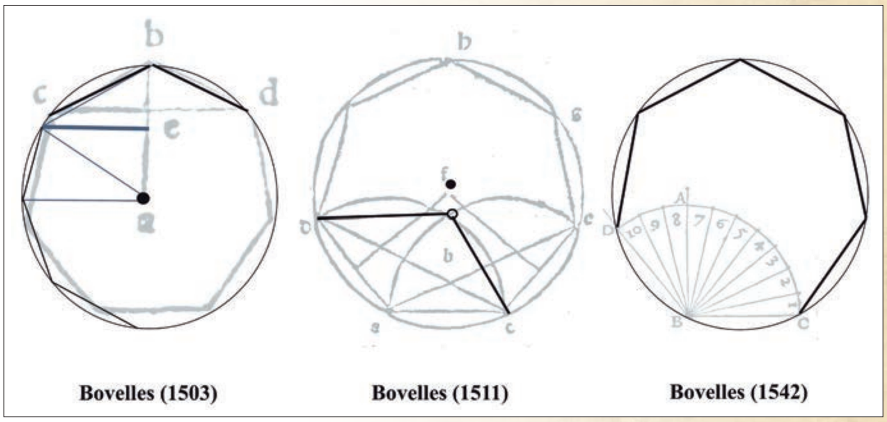
Sit igitur Heptagonus BCDEFGH, & connectantur anguli omnes cum omnibus, & fit A centrum circuli, & Diameter BAP, & A connectatur cum E.

Primum igitur tales figuræ impropriam fuprà dictam demonftrationem nullam nancifcuntur: eft enim earum numerus laterum & angulorum, ex Primis unus: at nulla biga figurarum præmiffarum, totum circulum dividit in partes Numero aliquo Primo numerabiles: fed fortiuntur illæ Numerum Multiplicem Numerorum utriusq; figuræ.

Sed neq; propriam habent hujusmodi figuræ demonftrationem ex angulorum numero: quia quicquid ex hoc elicitur, id vagum & multiplex minimèque determinatum eft.

Secetur enim Heptagonus in fua triangula quinq;, duo extrema æquicrura Obtufangula BDC, BGH, unum intimum æquicrurum Acutangulum BEF, & duo Scalena interjecta BED, BFG. Cùm igitur circumferentia, fuper quâ ftant crura anguli, ad circumferentiæ partem oppofitam facti, admetiatur angulo fuam quantitatem, angulus BEF ftat fuper tribus circumferentiæ partibus, BH, HG, GF: angulus BFE fimiliter fuper tribus, BC, CD, DE; at EBF fuper unâ EF. Ergò BEF eft tale triangulum, quod habet utrumq; angulum ad bafin triplum ejus qui ad verticem. Eodem modo probatur Scalenum BED habere angulos in pro-

10



11

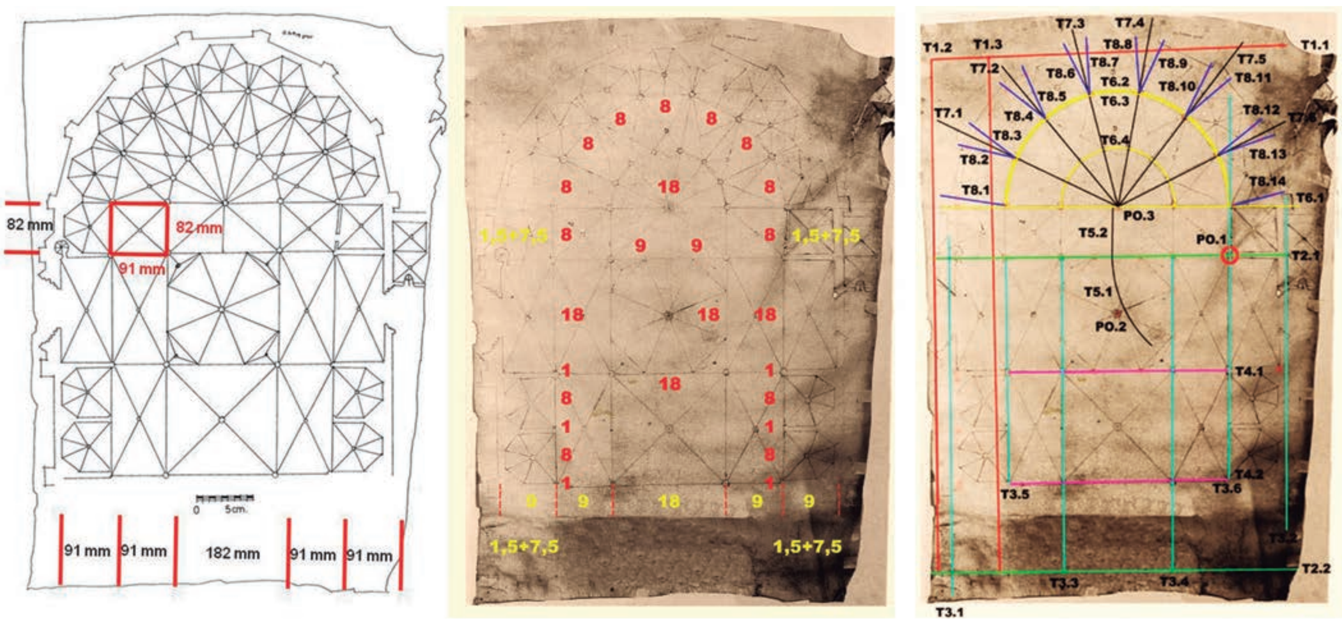
lo desde la división trigonométrica como lo hacía José de Zaragoza, en la *Geometria practica Euclidis: problemata* continens (Zaragoza, 1672, 69-71), postulada por Simón de Stevin (1548-1620) en el Lib2. pro.7 *Mathematicarum hypomnematun de Geometriae Praxi* (Stevin 1605, 66).

La segunda parte está dedicada a la *Invectiva Filosofica y Geometrica, y Catolica con Juan Keplero en materia del Heptangono regular*, donde aborda desde una crítica la cuestión cismática de Juan Kepler por considerar al heptágono como un *inscibilia inefabilia nonentia* (Fig. 10.b), dado que no forma parte de los polígonos derivados de las potencias cuadradas; 2 (2,4,8), de 3 (3,6,12) y de 5 (5,10,20).

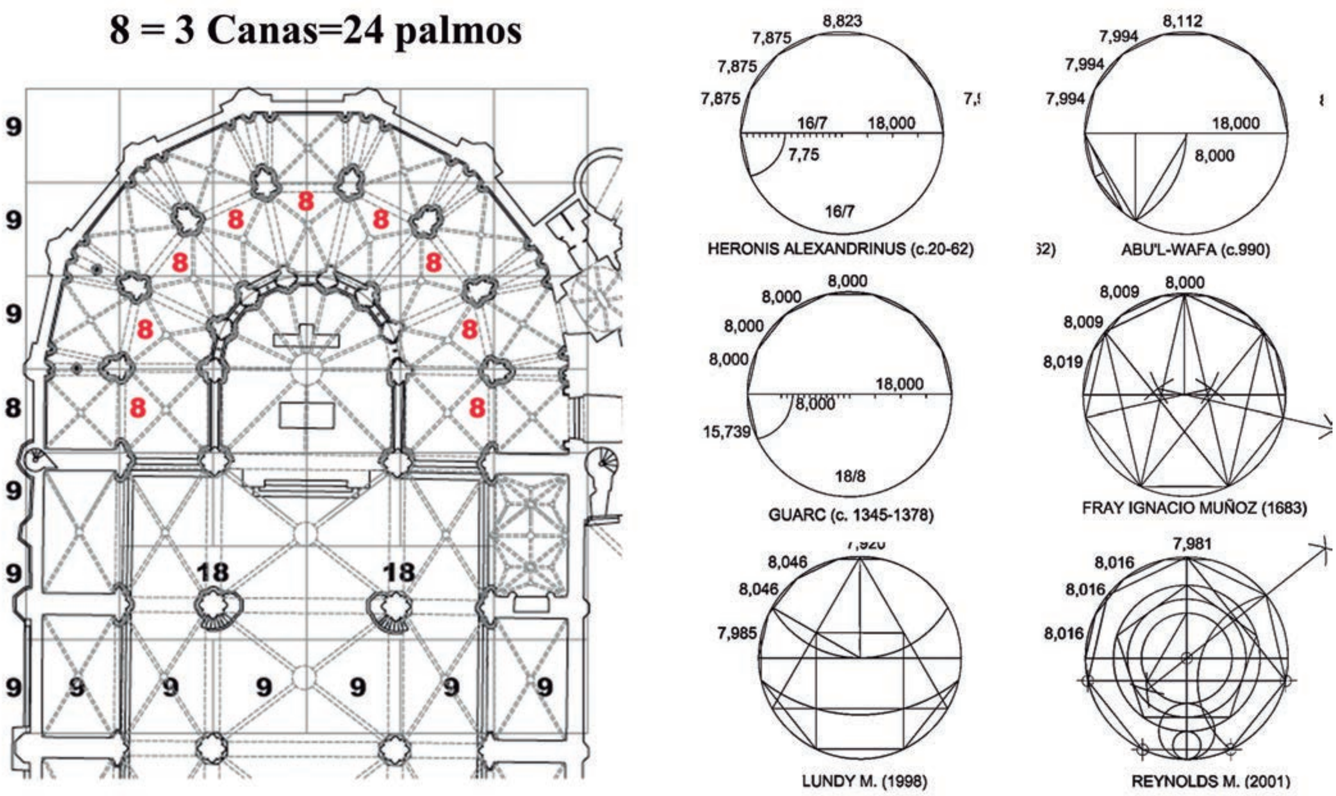
Termina, aludiendo que, pese a que el autor está condenado en el Expurgatorio de la Inquisición General, el *Harmonices mundi* no lo estaba y por ello "*se debe poner*" (Muñoz, 1684, 33-40). El astrónomo alemán aparecía en el índice general del *Novus Index Librorum Prohibitorum et Expurgatorum* (1632), como autor [+Ioannes Keplerus] y clasificado *Append. Libr. Proh& Exp. I Class.*

10. a) *Manifiesto geometrico*, (1684);
b) *Harmonices mundi libri V* (1619)
11. Trazados del heptágono de Charles Bovelles (1478-1567)
12. Traza de Antoni Guarç para la catedral de Tortosa (ca. 1345-1380) ACTo, Fabrica 49
13. Simulación informática métodos prácticos del heptágono respecto al ábside catedral de Tortosa

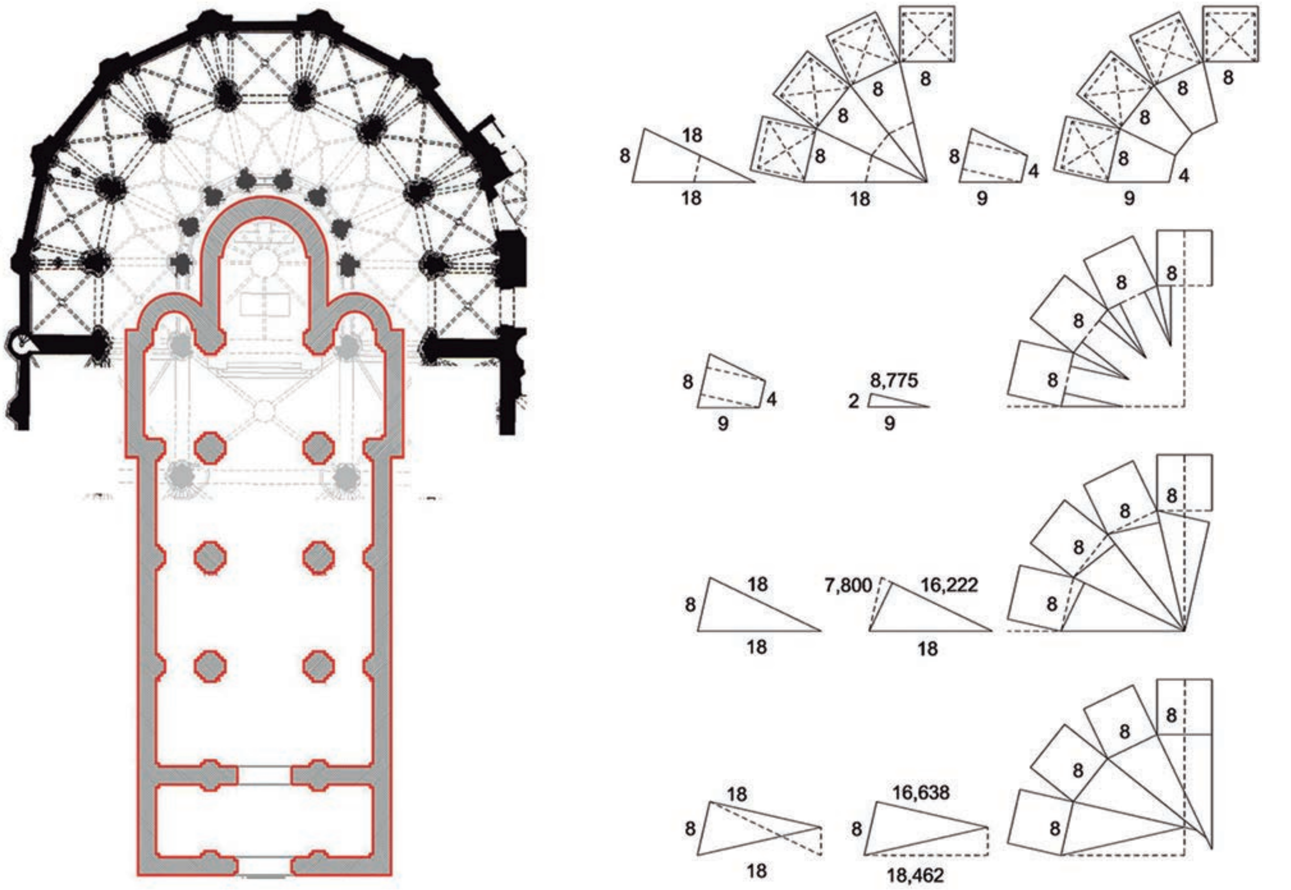
10. a) *Manifiesto geometrico*, (1684);
b) *Harmonices mundi libri V* (1619)
11. Drawings of the heptagon by Charles Bovelles (1478-1567
12. Antoni Guarç's design for the cathedral of Tortosa (ca. 1345-1380) ACTo, Fabrica 49
13. Computer simulation of heptagon practical methods. with respect to the apse of the cathedral of Tortosa



12



13



14

(9, 8+3/4, 2), (18,18,8) and known trapezoids (8,9,4,9) (Lluis i Ginovart, et all 2013) (Fig. 14). Therefore, it follows that he should not have known the principle of the Gothic masters for tracing the apses, without knowing their center, nor the precision of the proportion (9/4) for the heptagonal apses.

In the *Manifesto* the sides are not equal, [4.0000000, 4.01603303, 4.01603303, 4.01603303, 4.01603303, 4.01603303, 3.998575505, 3.998575505], the approximation of the true magnitude of the major angle of the isosceles triangle is [77.14285714º], as opposed to the one deduced by Fray Ignacio [77.16041159º] (Fig. 15.a).

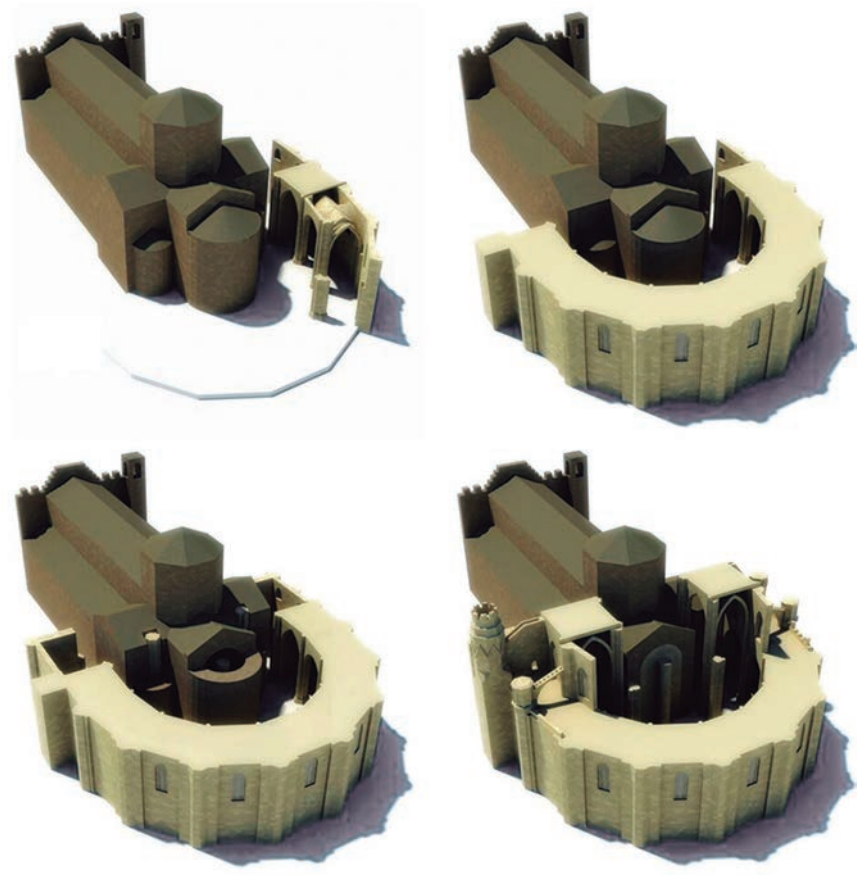
The solution would have been more precise numerically if the Dominican had stated: "That in the circumscribed circumference of the isosceles triangle of the heptagon (9,9,4), the side of the heptagon is equal to the base of this triangle (4)". With the new statement five of the sides would have (4 u) [4.0000000, 4.0000000, 4.0000000, 4.0000000, 4.0000000, 4.0000000, 4.01783265, 4.01783265], with the computational approximation of the heptagon side of [4.00509692] (Fig. 15.b). In this way the error produced for a heptagon side of 4 m would be half a millimeter, more than enough precision in XVII.

El heptágono y el siete representaban la Creación finita (Gèn.1,1-2, 1,2). El canónigo de Noyon Charles Bovelles (1478-1567), catedral con ábside con cinco capillas radiales, como Burges, Reims, Sens o Tours, era conocedor de otras con siete, como Amiens, Beauvais o Chatres, autor del *Geometricum Introductorium* (1503), traducida como *Geometrie en Françoys* (1511) donde construye el heptágono, como en le *Livre singulier et utile, touchant l'art praticque de geometrie* (1542) (Fig. 11), reconocía que una figura tan importante para el simbolismo cristiano como el heptágono, no aparecía en los *Elementa* de Euclides (c.325- c.265 aC) (Bovelles 1542, 25v-28r).

Existen evidencias de la utilización de la relación geométrica (18/8) entre el radio del deambulatorio las capillas radiales, para la construcción de ábsides heptagonales como en el caso de la catedral de Tortosa (Fig. 12). Las simulaciones de estos procesos geométricos, que ni constructores, ni matemáticos tenían a su alcance, arrojan resultados más precisos que los desarrollados por la tratadística de los siglos (XV-XVII) (Lluis i Ginovart 2019)

La relación de (18/8) de base aritmética (a/b) a la vez que geométrica, es similar a la que propone el dominico para su triángulo isósceles de (9/4), de manera que el *Manifiesto Geometrico* para construir un ábside heptagonal para trazar el polígono de 14 lados, sería entre aquellos publicados el más exacto (Fig. 13).

Fray Ignacio no resolvió la imposible solución del heptágono que Kepler avanzó y Gauss demostró, pero su principio axiomático de la relación (9/4), y del que nunca reveló su origen, definiéndolo como el imposible geométrico, constituye la génesis metodológica científica, y



14. Construcción de un ábside sin conocer su centro

14. Construction of an apse without knowing its center

en base a ella desarrolla la demostración matemática.

Plantea el problema *Dada qualquier recta, que ha de ser igual á qualquiera de los lados del Heptagono regular, hacer esta figura sobre la recta dada, sin desrcrivir el Circulo*, es el mismo de los constructores góticos para trazar los ábsides, dado que en muchos casos las catedrales góticas sustituyeron a la románicas y los presbiterios continuaban en funcionamiento. La solución geométrica se logra utilizando algunos triángulos como los del dominico; (9, 8+3/4, 2), (18,18,8) y trapecios conocidos (8,9,4,9) (Lluis i Ginovart, et all 2013) (Fig. 14). Por ello, se deduce que no debía conocer el principio de los maestros góticos para trazar los ábsides, sin conocer su centro, ni la precisión de la proporción (9/4) para los ábsides heptagonales.

En el *Manifiesto* los lados no son iguales, [4,0000000, 4,01603303, 4,01603303, 4,01603303, 4,01603303, 3,998575505, 3,998575505], la aproximación de la verdadera magnitud del ángulo mayor del triángulo isósceles es [77,14285714º], frente al deducido por fray Ignacio [77,16041159º] (Fig. 15.a).

La solución hubiese sido más precisa numéricamente si el dominico hubiese enunciado; «Que en la circunferencia circunscrita de triangulo isósceles del heptágono (9,9,4), el lado de heptágono es igual a la base de este triángulo (4)». Con el nuevo enunciado cinco de los lados tendrían (4 u) [4,0000000, 4,0000000, 4,0000000, 4,0000000, 4,0000000, 4,01783265, 4,01783265], con la aproximación informática del lado del heptágono de [4,00509692] (Fig. 15.b). De esta manera el error producido para un lado del heptágono de 4 m seria de medio milímetro, precisión más que suficiente en el XVII.

Conclusion

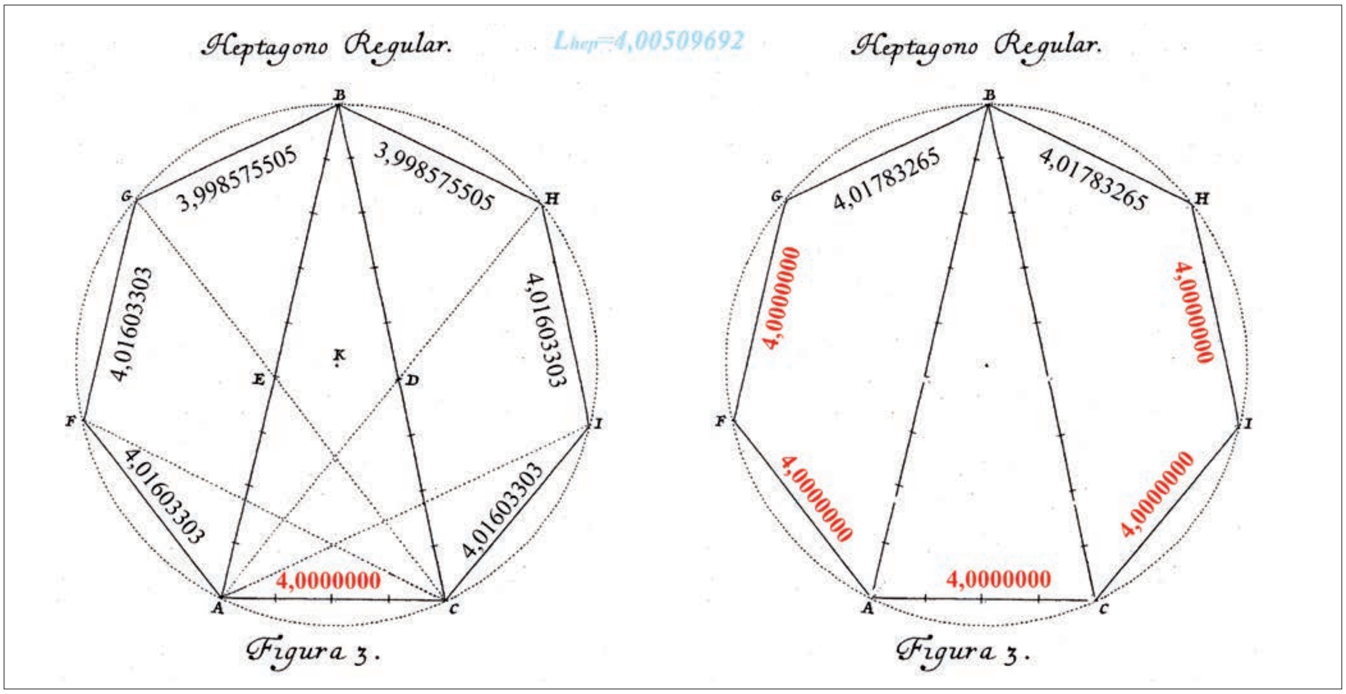
In the first part of the *Geometric Manifesto* he wants to demonstrate mathematically the construction of the heptagon by means of a deductive methodology starting from an axiomatic principle of the isosceles triangle (9,4,9) which, although erroneous, he argues rigorously. The principle could be interpreted from the arithmetical point of view 9/4= 4/4+4/4+2/8= 2+1/4. From the geometrical as the ratio of a double square and its fourth. From the musical proportion as the duplet plus a sesquiquadrate, and from astronomy in reference to the distance to the Sun; Jupiter 9, Venus 4. The second becomes a "*manifesto*" against Kepler, who had argued the unknowability of the heptagon for being an infinite figure, in the same way that it was for him the Universe, and hence the heretical principle of Kepler. That of Genesis in the Catholic Church is understood as finite Creation, and from here, in the indeterminate part of the inquisitorial argumentation of the Dominican.
With the contributions of Fray Ignacio, geometry does not advance, but his knowledge brings him closer to the practical resolution that the daily life of a Dominican missionary entails. We can conclude that in spite of having a good scientific knowledge, this does not represent any advance of the science of the XVII century. In spite of this, Fray Ignacio Muñoz died without knowing that his method of construction of the heptagon is one of the most precise from the point of view of practical geometry that have been developed until today, as the Dominican who did not have our instruments of approximation to be able to verify it. ■

Notes

– [AGI. MP-PHILIPPINES] Archivo General Indias.
– [BNE] National Library of Spain.
– [M-RAH] Royal Academy of History Manuscript

References

– AGHAYANI-CHAVOSHI (2010). Ketâb al-nejârat. Sur ce qui est indispensable aux artisans dans les constructions géométriques. Written Heritage Research Centre & Institut, Tehran.
– ARFE, J. (1585). De varia commensuracion para la escultura y architectura. Andrea Pescioni and Juan de León, Seville.



15

- BONET, A. (1980). Bibliography of Architecture, Engineering and Urbanism in Spain (1498-1880). Volumes I and II. Madrid: Tuner Libros.
- BOVELLES, Ch. (1542). Livre singulier et utile, touchant l'art praticque de geometrie, compose nouvellement en françoys, par maistre Charles de Bouvelles. Paris: Regnaud Chaudière et Claude.
- CLAVIO, Ch. (1606) Christophori Clavii Bambergenensis Societate Iesu. Geometria practica, Moguntia: Typographeo Ioannis Albini.
- CURTZE, M. (1887). Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV. Mitteilungen des Coppernicus-Vereins zu Thorn 6/1887.
- CHÍAS, P. (2010). Historical cartography in the study of the construction of territory and landscape. Maps and drawings of civil lawsuits in Spain and overseas. (II*). EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 15: 162-237.
- DE CANDALE, F. (1566). Euclidis Megarensis mathemaici clarissimi Elementa geometrica Libris XV. Parisiis: Apud Iohannem Royerium.
- DEVILLE, A. (1640). Les fortifications du chevalier Antoine de Ville, contenans la manière de fortifier toute sorte de places.... Lyon: Chez Philippe Borde.
- DÖGEN, M. (1647). Dramburgensis marchici Architectura militaris moderna: varijs historijs, tam veteribu Matthiae ... Amstelodamiium: Apud Ludovicum Elzevir.
- DÜRER, A. (1525) Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt: in Linien Ebnen vo gantzen Corporen. Nüremberg: Hieronymus Andreae.
- FERNÁNDEZ DE NAVARRETE, M. (1851). Spanish Maritime Library. Madrid: Imprenta viuda de Calero.
- GARCÍA, A. J. (2014). The Gothic project of the cathedral of Seville. Signs of layout, measurement and proportion. *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 23: 184-193.
- GARCÍA, S. (1991). Compendium of architecture and symmetry of the temples according to the measure of human body with some demonstrations of geometry: year 1681. Valladolid: Colegio Oficial Arquitectos Valladolid .
- GAUSS, C. (1801), *Disquisitiones Arithmeticae. Auctore D. Carolo Federico Gauss.* Lipsia: In

Conclusión

En la primera parte del *Manifiesto Geometrico* quiere demostrar matemáticamente la construcción del heptágono mediante una metodología deductiva a partir de un principio axiomático del triángulo isósceles (9,4,9) que, aunque erróneo, lo argumenta rigurosamente. El principio podría ser interpretado desde el punto de vista aritmético 9/4= 4/4+4/4+2/8= 2+1/4. Desde la geométrica como la relación de un doble cuadrado y su cuarto. Desde la proporción musical como el duplo más un sesquicuarto, y desde la astronomía en referencia a la distancia al Sol; Júpiter 9, Venus 4. La segunda se convierte en un «m*anifiesto*» contra Kepler, que había argumentado la incognoscibilidad del heptágono por ser una figura infinita, de la misma manera que lo era para él el Universo, y de aquí el principio herético de Kepler. La de Génesis en la Iglesia católica se entiende como Creación finita, y de aquí, en lo indeterminado parte la argumentación inquisitoria del dominico.

Con las aportaciones de Fray Ignacio la geometría no avanza, pero su conocimiento le aproxima a la resolución práctica que la cotidianidad le comporta a un misionero dominico. Podemos concluir que pese a tener un buen conocimiento científico, este no representa ningún avance de la ciencia del siglo XVII. Pese a ello, Fray Ignacio Muñoz murió sin saber que su método de construcción del heptágono es uno de los más precisos que desde el punto de la geometría práctica que se han desarrollado hasta la actualidad, ya que el dominico no disponía de nuestros instrumentos de aproximación para poderlo comprobar. ■

Notas

- [AGI. MP-FILIPINAS] Archivo General Indias.
- [BNE] Biblioteca Nacional de España.
- [M-RAH] Manuscrito Real Academia de la Historia

Referencias

- AGHAYANI-CHAVOSHI (2010). Ketâb al-nejârat. Sur ce qui est indispensable aux artisans dans les constructions géométriques. Written Heritage Research Centre & Institut, Tehran.
- ARFE, J. (1585). De varia commensuracion para la escultura y architectura. Andrea Pescioni y Juan de León, Sevilla
- BONET, A. (1980). Bibliografía de Arquitectura, Ingeniería y Urbanismo en España (1498-1880). Tomo I y II. Madrid: Tuner Libros.

15. Solución complementaria al heptágono de Fray Ignacio Muñoz

15. Complementary solution to the heptagon of Fray Ignacio Muñoz

– BOVELLES, Ch. (1542). Livre singulier et utile, touchant l'art praticque de geometrie, compose nouvellement en françoys, par maistre Charles de Bouvelles. Paris: Regnaud Chaudière et Claude.
– CLAVIO, Ch. (1606) Christophori Clavii Bambergenensis Societate Iesu. Geometria practica, Moguntia: Typographeo Ioannis Albini.
– CURTZE, M. (1887). Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV. Mitteilungen des Coppernicus-Vereins zu Thorn 6/1887.
– CHÍAS, P. (2010). La cartografía histórica en el estudio de la construcción del territorio y del paisaje. Mapas y dibujos de los pleitos civiles en España y en ultramar. (II*). EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 15: 162-237.
– DE CANDALE, F. (1566). Euclidis Megarensis mathemaici clarissimi Elementa geometrica Libris XV. Parisiis: Apud Iohannem Royerium.
– DEVILLE, A. (1640). Les fortifications du chevalier Antoine de Ville, contenans la manière de fortifier toute sorte de places... Lyon: Chez Philippe Borde.
– DÖGEN, M. (1647). Dramburgensis marchici Architectura militaris moderna: varijs historijs, tam veteribu Matthiae ... Amstelodamiium: Apud Ludovicum Elzevir.
– DÜRER, A. (1525) Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt: in Linien Ebnen vo gantzen Corporen. Nüremberg: Hieronymus Andreae.
– FERNÁNDEZ DE NAVARRETE, M. (1851). Biblioteca Marítima Española. Madrid: Imprenta viuda de Calero.
– GARCÍA, A. J. (2014). El proyecto gótico de la catedral de Sevilla. Indicios de trazado, medida y proporción. *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 23: 184-193.
– GARCÍA, S. (1991). Compendio de arquitectura y simetría de los templos conforme a la medida de cuerpo humano con algunas demostraciones de geometría: año de 1681. Valladolid: Colegio Oficial Arquitectos Valladolid.
– GAUSS, C. (1801), *Disquisitiones Arithmeticae. Auctore D. Carolo Federico Gauss*. Lipsia: In Commissis apud Gerh. Fleischer Jun.
– GONZÁLEZ, J. M. (1967). Historia de las Misiones Dominicanas de China, 5 vols. Madrid: Imprenta de Juan Bravo.
– HEIDELOFF, C. A. (1844). *Die Bauhütte des Mittelalters in Deutschland*. Nürnberg: Johan Adam Stein.
– HOGENDIJK, J. P. (1984). Greek and Arabic Constructions of de Regular Heptagon. *Archive for History of Exact Sciences*, 30.3-4: 197-330.
– KEPLER, J. (1619). Ioannis Keppleri Harmonices mundi libri V.: quorum primus Geometricus, de figurarum regularium, quae proportiones harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus…Lincii Austriae, sumptibus Godofredi Tampachii bibl. Francof.: excudebat Ioannes Plancus.
– KNORR, W.R. (1998). On Archimedes "Construction of the Regular Heptagon". *Centaurus*, 32: 257-271.
– LÓPEZ DE ARENAS, D. (1633) Breve Compendio de la Carpintería de lo blanco y tratado de alarifes, Luis Estupiñán, Sevilla.
– LORENZO DE SAN NICOLÁS (1633) Arte y uso de la Arquitectura. Dirigida Al Patriarca S. Ioseph. Compuesto por Fr. Laurencio de S Nicolas, Agustino Descalço, Maestro de obras. Madrid.
– LLADÓ, J. S., HERNÁNDEZ, J. C. S., y LUNA, M. F. (2016). Sobre la planta triangular del manuscrito vitrubiano de Lázaro de Velasco. *EGA Revista De Expresion Grafica Arquitectonica*, 21(27), 134-141.
– LLUIS I GINOVART, J. (et alli) (2013). Gothic Construction and the Traça of a Heptagonal Apse: The Problem of the Heptagon». *Nexus Network Journal*, 15: 325-348.
– LLUIS I GINOVART, J. (2019). *Mathematics and the Art and Science of Building-Medieval Cathedrals*, en *Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*, B. Sriraman (ed.), Springer Nature Switzerland AG 2019, Cham.
– MORENO, J. M. (2021). Ciencia y patronazgo real en el imperio español del siglo XVII: Fray Ignacio Muñoz y su *Propuesta de trabajo en Artes Náuticas*». *Anuario de Estudios Americanos,* 78.1: 45-78.
– MUÑOZ, I. (1684). Manifiesto geometrico, plus ultra de la geometria practica: addicion al IV libro de los Elementos de Euclides: construccion y demostracion geometrica del triangulo isosceles propio del heptagono regular y descripcion de la misma figura. Bruselas: Francisco Foppens.
– RASHED, R. (1976). Ibn al-Haytham's construction of the regular heptagon. *Journal Historical Arabic Science*. 3.2: 387-409.
– RORICZER, M. (1999). Das Büchlein von der Fialen Gerechtigheit (fak. Regensburg 1486) und Die Geometria Deutsch. Regensburg: Hürtgenwald Guido Pressler.
– SÁNCHEZ-POLACK-MORATE, C., y GRANERO-MARTIN, F. (2021). Las claves del entablamento de orden jónico en el tratado de Vitruvio. *EGA Revista De Expresion Grafica Arquitectonica*, 26(41), 42-55.
– STEVIN, S. (1605). *Tomus Secundus Mathematicarum hypomnematun de Geometriae Praxi*, Lugodini Batavorum, Ex Officina Ioannis Patii, Academiae Typographi
– ZARAGOZA, J. (1672). *Geometria practica Euclidis: problemata continens*, Matriti, apud Bernardum à Villa-Diego.

Commissis apud Gerh. Fleischer Jun.
– GONZÁLEZ, J. M. (1967). Historia de las Misiones Dominicanas de China, 5 vols. Madrid: Imprenta de Juan Bravo.
– HEIDELOFF, C. A. (1844) . *Die Bauhütte des Mittelalters in Deutschland*. Nürnberg: Johan Adam Stein.
– HOGENDIJK, J. P. (1984). Greek and Arabic Constructions of de Regular Heptagon. *Archive for History of Exact Sciences*, 30.3-4: 197-330.
– KEPLER, J. (1619). Ioannis Keppleri Harmonices mundi libri V.: quorum primus Geometricus, de figurarum regularium, quae proportiones harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus...Lincii Austriae, sumptibus Godofredi Tampachii bibl. Francof.: excudebat Ioannes Plancus.
– KNORR, W.R. (1998). On Archimedes "Construction of the Regular Heptagon". *Centaurus,* 32: 257-271.
– LÓPEZ DE ARENAS, D. (1633) Breve Compendio de la Carpintería de lo blanco y tratado de alarifes, Luis Estupiñán, Sevilla .
– LORENZO DE SAN NICOLAS (1633) Art and use of Architecture. Addressed to Patriarch S. Ioseph. Composed by Fr. Laurencio de S Nicolas, Agustino Descalço, Maestro de obras. Madrid.
– LLADÓ, J. S., HERNÁNDEZ, J. C. S., & LUNA, M. F. (2016). On the triangular plan of the vitruvian manuscript of Lázaro de Velasco. *EGA Revista De Expresion Grafica Arquitectonica,* 21(27), 134-141.
– LLUIS I GINOVART, J. (et alli) (2013). Gothic Construction and the Traça of a Heptagonal Apse: The Problem of the Heptagon". *Nexus Network Journal*, 15: 325-348.
– LLUIS I GINOVART, J. (2019). *Mathematics and the Art and Science of BuildingMedieval Cathedrals*, in *Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*, B. Sriraman (ed.), Springer Nature Switzerland AG 2019, Cham.
– MORENO, J. M. (2021). Science and royal patronage in the seventeenth-century Spanish empire: Fray Ignacio Muñoz and his *Proposal for work in Nautical Arts*". *Anuario de Estudios Americanos,* 78.1: 45-78.
– MUÑOZ, I. (1684). Manifesto geometrico, plus ultra de la geometria practica: addicion al IV libro de los Elementos de Euclides: construccion y demostracion geometrica del triangulo isosceles propio del heptagono regular y descripcion de la misma figura. Brussels: Francis Foppens.
– RASHED, R. (1976). Ibn al-Haytham's construction of the regular heptagon. *Journal Historical Arabic Science*. 3.2: 387-409.
– RORICZER, M. (1999). Das Büchlein von der Fialen Gerechtigheit (fak. Regensburg 1486) und Die Geometria Deutsch. Regensburg: Hürtgenwald Guido Pressler.
– SÁNCHEZ-POLACK-MORATE, C., & GRANERO-MARTIN, F. (2021). The keys to the Ionic order entablature in Vitruvius' treatise. *EGA Revista De Expresion Grafica Arquitectonica,* 26(41), 42-55.
– STEVIN, S. (1605). *Tomus Secundus Mathematicarum hypomnematun de Geometriae Praxi*, Lugodini Batavorum, Ex Officina Ioannis Patii, Academiae Typographi.
– ZARAGOZA, J. (1672). *Geometria practica Euclidis: problemata continens*, Matriti, apud Bernardum à Villa-Diego.