

INTRODUCCIÓN AL PROYECTO CONTEMPORÁNEO DIGITAL: CONSTRUCCIÓN DE LA i-VILLA ROTONDA

INTRODUCTION TO THE CONTEMPORARY DIGITAL PROJECT: CONSTRUCTION OF THE i-VILLA ROTONDA

Fernando Alonso Pedrero; orcid 0000-0001-7564-7835

Juan Luis Roquette Rodríguez-Villamil; orcid 0000-0002-5198-7058

Carlos Naya Villaverde; orcid 0000-0001-9175-522X

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

doi: 10.4995/ega.2023.18991

Proyectar hoy de manera digital, es crear una estructura lógica de datos, algoritmos y resultados. Este artículo utiliza una villa clásica de Andrea Palladio, donde las reglas matemáticas son muy claras, para ejemplificar la estructura base del proyecto contemporáneo digital; desde la exposición de datos hasta la generación de forma vacía. Para ello es necesario hacer una reflexión inicial sobre el dibujo técnico / CAD / BIM y describir los lenguajes del proyecto contemporáneo. Se describen los datos y los algoritmos necesarios para la construcción de la forma de la villa mediante las transformaciones topológicas de un cubo. Se trata de una manera contemporánea de entender la generación de la forma vacía. Un formato virgen, paramétrico y flexible; “preparado” y “estructurado” para la posterior adquisición de capas sucesivas de información del proyecto, que desembocaría en el “gemelo virtual” del edificio. Con ello se propone una vía conceptual y técnica, adecuada para producir la arquitectura del futuro, ya sea física en el mundo real o digital en

el *Metaverso*. Proyectar mediante transformaciones topológicas es un proceso ya utilizado por arquitectos como Peter Eisenman, Daniel Libeskind o Zaha Hadid entre otros, pero que tiene un potencial teórico que va más allá de estos ejemplos concretos o de un determinado “tipo de arquitectura”. El caso de la Villa Rotonda es un buen ejemplo para entender el proceso de proyecto sin dar como resultado un objeto cerrado e inmutable, sino un sistema abierto que define la identidad formal del proyecto sin condicionar su adecuación a los requerimientos cambiantes en el tiempo.

PALABRAS CLAVE: VILLA ROTONDA, BIM, GEMELO DIGITAL, PETER EISENMAN, DANIEL LIBESKIND

To design digitally today is to create a logical structure of data, algorithms and results. This article uses a classic villa by Andrea Palladio, where the mathematical rules are very clear, to exemplify the basic structure of the contemporary digital project; from the exposition of data to the generation of empty form. This requires an initial reflection on technical drawing / CAD / BIM and a description of the

languages of the contemporary project. The data and algorithms necessary for the construction of the shape of the villa by means of the topological transformations of a cube are described. This is a contemporary way of understanding the generation of the empty form. A virgin, parametric and flexible format; “prepared” and “structured” for the subsequent acquisition of successive layers of project information, which would lead to the “virtual twin” of the building. Designing through topological transformations is a process already used by architects such as Peter Eisenman, Daniel Libeskind, and Zaha Hadid among others, but it has a theoretical potential that goes beyond these concrete examples or a certain “type of architecture”. The case of the Villa Rotonda is a good example for understanding the project process without giving as a result a closed and immutable object, but rather an open system that defines the formal identity of the project without conditioning its adaptation to changing requirements over time.

KEYWORDS: VILLA ROTONDA, BIM, DIGITAL TWIN, PETER EISENMAN, DANIEL LIBESKIND



El quid de la cuestión

La labor del arquitecto ha sido, es (y será) realizar proyectos de arquitectura. En esencia, se proyecta mediante la integración de datos, cálculos y dibujos para generar formas adecuadas. Esta integración se produce gracias a la aplicación de mecanismos intelectivos y emocionales que permiten establecer relaciones específicas entre ellos. Datos, cálculos y dibujos constituyen la base sobre la que se genera todo proyecto, hasta alcanzar una forma clara y distinta.

A lo largo de la historia, el conocimiento acumulado de casos de éxito (proyectos) ha permitido a la arquitectura construir su propio *corpus disciplinar*. Los tratados suponen el principal punto de apoyo –teórico, técnico y estético– para desempeñar la práctica de la arquitectura. Todos ellos proveen al arquitecto de instrucciones precisas para llevar a cabo con éxito sus proyectos; es decir, para integrar correctamente datos, cálculos y dibujos en cada caso.

Tres han sido los momentos clave en los que la arquitectura occidental ha alcanzado mayor claridad teórica:

1. En el Renacimiento italiano, primaron el dibujo y la estética. Alberti, Serlio, Vignola o Palladio hicieron un gran esfuerzo por normalizar la tradición greco-latina, que luego se desvirtuaría con el manierismo.
2. Con Perrault, Blondel, Ledoux o Durand, los barrocos e ilustrados franceses dieron paso a una sistematización de la norma clásica mediante estudios tipológicos y manuales para racionalizar la concepción del proyecto. Primaron los datos y la utilidad. El

eclecticismo desaforado socavó esta aproximación.

3. Finalmente, la irrupción de las vanguardias artísticas del siglo xx supuso una redefinición radical del proyecto. Primaron los cálculos, lo técnico. Los manifiestos vanguardistas y las teorías de cálculo independizaron al proyecto de condicionantes extrínsecos basando su legalidad en categorías modernas: economía de medios, rigor, precisión y universalidad. Estas categorías definen las relaciones entre datos-cálculos-dibujos en cada proyecto y denotan la proximidad entre los intereses artísticos y los científicos de la sociedad moderna.

Paradójicamente, los arquitectos de vanguardia tuvieron que recurrir a métodos tradicionales para construir sus proyectos. La plena entrada en vigor de la modernidad no tendría lugar hasta el periodo 1945-65 dando como resultados magníficos proyectos, ejemplos de buena integración de datos, cálculo y dibujos. La mala aplicación de la modernidad devino en un mero “estilo internacional” que finalmente quedó socavado por las neovanguardias.

Tras aquellos revisionismos vino una recuperación de los principios modernos hacia comienzos del milenio. Y ahora, la sociedad digital del siglo XXI se encuentra en la encrucijada de la contemporaneidad. Las sucesivas crisis han abierto un tiempo de profunda reflexión. Suponen la ocasión propicia para plantear nuevamente la (re)definición de la arquitectura. Paradójicamente, la influencia de Vitrubio sigue planeando todavía hoy sobre el proyecto contemporáneo. Su clásica tríada *Firmitas, Utilitas,*

The crux of the matter

The architect's job has been, is (and will be) to design architecture. In essence, it is designed by integrating data, calculations and drawings to generate appropriate forms. This integration occurs through the application of intellectual and emotional mechanisms that allow specific relationships to be established between them. Data, calculations and drawings form the basis on which every project is generated, until a clear and distinct form is achieved.

Throughout history, the accumulated knowledge of successful cases (projects) has allowed architecture to build its own *disciplinary corpus*. Treatises are the main point of support – theoretical, technical and aesthetic – for the practice of architecture. They provide the architect with precise instructions for the successful completion of his projects, i.e. for the correct integration of data, calculations and drawings in each case.

There have been three key moments in which Western architecture has achieved greater theoretical clarity:

1. In the Italian Renaissance, drawing and aesthetics took precedence. Alberti, Serlio, Vignola and Palladio made a great effort to standardise the Greco-Latin tradition, which was later distorted by Mannerism.
2. With Perrault, Blondel, Ledoux and Durand, the French Baroque and Enlightenment writers gave way to a systematisation of the classical standard by means of typological studies and manuals to rationalise the design of the project. Data and utility took precedence. Unbridled eclecticism undermined this approach.
3. Finally, the irruption of the artistic avant-gardes of the 20th century meant a radical redefinition of the project. Calculations and technical aspects took precedence. The avant-garde manifestos and theories of calculation made the project independent of extrinsic conditioning factors, basing its legality on modern categories: economy of means, rigour, precision and universality. These categories define the relationships between data-calculations-drawings in each project and denote the proximity between the artistic and scientific interests of modern society.

Paradoxically, avant-garde architects had to resort to traditional methods when designing their projects. It was not until 1945-65 that modernity came into full effect, resulting



in magnificent projects, examples of good integration of data, calculations and drawings. The misapplication of modernity resulted in a mere “international style” which was eventually undermined by the neo-avant-gardes.

After those revisionisms came a revival of modern principles at the turn of the millennium. And now, the digital society of the 21st century finds itself at the crossroads of contemporaneity. The successive economic, environmental, health, political and social crises have opened up a time of profound reflection. They provide an opportunity to rethink the (re)definition of architecture. Paradoxically, Vitruvius’s influence still hangs over contemporary design today. His classic triad of *Firmitas, Utilitas, Venustas* is still being observed today in this way: Sturdiness translates into efficiency and sustainability. Utility refers to technical feasibility. And architectural beauty points to the achievement of a formal identity

The *crux of the matter* remains the project as an integration of data, calculations and drawings. What has changed are the means to process (macro) data; to produce complex calculations, and to generate precise drawings capable of incorporating all the necessary information. With the evolution of industry and technology, an extraordinary opportunity has arisen to rethink the disciplinary basis of the project in terms of the simultaneous integration of data, calculations and drawings. *Big Data* and ICT, computation and robotisation, virtual/augmented reality and parameterisation have made it possible to manage information in real time and to integrate complex functions multiple times, make them visible and represent them all at the same time.

In short, the contemporary project no longer consists of the mere production of an object perfectly finished in its apparent form, as the result of a successive application of aesthetic, theoretical and technical methodologies. On the contrary, the core of the contemporary project lies rather in the elaboration of those programming strategies that simultaneously integrate data, calculations and drawings, and respond creatively and dynamically to the contemporary reality to which they are beholden.

The languages of the Contemporary Digital Project

Contemporary geometry is an exercise in drawing and algebra: both languages represent

Venustas se sigue atendiendo hoy día de este modo: La firmeza se traduce en eficiencia y sostenibilidad. La utilidad alude a la viabilidad técnica. Y la belleza arquitectónica apunta a la consecución de una identidad formal.

Dada la enorme cantidad de aportaciones contemporáneas que analizan las transformaciones conceptuales acaecidas con el advenimiento de los nuevos medios digitales, introducir una temática que ha sido definida por los profesores Chías y Cardone (2016) como los “años de la refundación”, equivalentes a los de la codificación renacentista de la perspectiva o a la divulgación de la Geometría Descriptiva de Gaspard Monge, parece esencial incidir en la idea de que la tecnología no es sólo una mera herramienta sino que presupone una nueva manera de concebir el proyecto. Mario Carpo (2017) se refiere a la arquitectura digital actual con un enfoque que describe el uso de herramientas digitales más allá de ser nuevas formas de hacer, sino más bien una ‘ciencia completamente nueva’ que, a ‘su manera’, nos proporciona un cambio de mentalidad.

El *quid de la cuestión* sigue siendo el proyecto como integración de datos, cálculos y dibujos. Lo que han cambiado son los medios para procesar (macro) datos; para producir cálculos complejos, y para generar dibujos precisos capaces de incorporar toda la información necesaria. Con la evolución de la industria y la tecnología se alza una oportunidad extraordinaria para plantear nuevamente las bases disciplinares del proyecto en términos de integración simultánea de datos, cálculos y dibujos. El *Big Data* y las TICs, la computación y la robotiza-

ción; la realidad virtual/aumentada y la parametrización han posibilitado la gestión de información en tiempo real y la integración múltiple de funciones complejas, así como su visibilización y representación, todo a la vez.

En definitiva, el proyecto contemporáneo ya no consiste en la mera confección de un objeto perfectamente acabado en su forma aparente, como resultado de una aplicación sucesiva de metodologías estéticas, teóricas y técnicas. Por el contrario, el núcleo del proyecto contemporáneo reside más bien en la elaboración de aquellas estrategias de programación que integran simultáneamente datos, cálculos y dibujos, y responden de forma creativa y dinámica a la realidad contemporánea a la que se deben.

Los lenguajes del Proyecto Contemporáneo Digital

La geometría contemporánea es un ejercicio de dibujo y álgebra, ambos representan objetos matemáticos. La creación de algoritmos computacionales permite la iteración de fórmulas, y así obtener multitud de respuestas para un mismo proyecto-problema. Aunque los programas CAD se desarrollaron a partir de los 60s, no fue hasta la aparición de *AutoCAD* en diciembre de 1982 cuando empezó a ser utilizado de manera generalizada. Algunos estudios (como el de Peter Eisenman) no se limitaron a usarlo como simple herramienta de delineación sino que explotaron además otras herramientas computacionales. Estas van desde los procesos de iteración de la forma a la generación de forma automática, etc... Otros estudios, sin embargo, lo entendieron como una forma de dibujar “con

mayor precisión”. Entre estos dos polos, hay un gran espectro de actitudes ante el programa.

El proyectar contemporáneo (Matemáticas, dibujo, información)

El proyectar contemporáneo digital es matemático, esto es lo mismo que decir que es geométrico, científico, preciso. Proyectar es crear un programa, una “arquitectura lógica” que dé como resultado un edificio virtual e información que permite construir el edificio en la vida real. Se trata de crear una red de datos, algoritmos y resultados: exponer una serie de variables que, interactuando mediante una serie ordenada de operaciones, dan como resultado un conjunto de planos e información. Este es un proceso muy extenso, con muchos pasos intermedios. Pero lo importante es que los datos iniciales se mantendrán y seguirán siendo útiles hasta el final. De hecho, la primera ventaja de este sistema es que una vez acabada toda la arquitectura lógica y terminado el edificio, podríamos cambiar los datos iniciales y con ello modificar todos los resultados.

Proyectar es programar, dar instrucciones dinámicas mediante estrategias formales capaces de albergar contenido. No podemos seguir produciendo formas cerradas, que incluso contradicen el desarrollo lógico del proyecto en la incorporación de datos; Y que provoquen alteraciones graves de la misma, e incluso obliguen a iniciar la redacción del proyecto desde cero. El arquitecto de la era digital tiene que operar desde un inicio con formas “colmadas de contenido” y debe saber “programarlas” para

que se adapten con flexibilidad a solicitudes múltiples. Esa debería ser su labor.

La arquitectura lógica del Programa / Proyecto

Las etapas en la que se desarrolla la arquitectura lógica del programa/proyecto son:

1. exposición de datos,
2. generación de forma vacía/geométrica,
3. introducción de información de materiales de la forma,
4. interacción de los materiales y la exposición del modelo a fenómenos físicos (gravedad y fenómenos atmosféricos, etc.),
5. generación de resultados iniciales (el edificio virtual inicial y los planos e información iniciales).
6. la iteración o la corrección de los parámetros iniciales, así como los materiales.
7. generación de resultados finales (el gemelo digital y los planos e información final).

Objetivo del estudio

En “Las matemáticas de la villa ideal”, Colin Rowe acometió un estudio comparado de la obra de Le Corbusier en términos de datos/cálculos/dibujos. Asombrosamente, las proporciones matemáticas de los planos corbuserianos venían a coincidir con las de las villas de Palladio, proyectadas cuatrocientos años antes en otro contexto cultural. Con ello, Rowe puso de manifiesto que la labor del arquitecto no depende tanto de “su voluntad de expresar su propio tiempo” o de expresarse a sí mismo, sino en su capacidad creativa para interpretar y encontrar relaciones satisfacto-

mathematical objects. The creation of computational algorithms allows the iteration of formulas, and thus to obtain a multitude of answers for the same project-problem. Although CAD software was developed from the 1960s onwards, it was not until the appearance of *AutoCAD* in December 1982 that it began to be widely used by architectural firms. Some firms (such as Peter Eisenman's) did not limit themselves to using CAD as a simple drafting tool, but also exploited other computational tools. These range from shape iteration processes to automatic shape generation, etc. Other studies, however, understood it as a way of drawing more accurately. Between these two poles, there is a wide spectrum of attitudes to the programme.

Contemporary Design (mathematics, drawing, information)

Contemporary digital design is undoubtedly mathematical, which is the same as saying that it is geometrical, scientific and precise. To design is to create a programme, a “logical architecture” that results in a virtual building and information that allows the building to be constructed in real life. It is about creating a network of data, algorithms and results. It is about exposing a series of variables that, interacting through an ordered series of operations, result in a set of plans and information. This is a very extensive process, with many intermediate steps. But the important thing is that the initial data will be maintained and remain useful until the end. In fact, the first advantage of this system is that once the whole logical architecture is finished and the building is completed, we could change the initial data and thus modify all the results. To design is to programme, to give dynamic instructions by means of formal strategies capable of housing content. We cannot continue to produce closed forms, which even contradict the logical development of the project, in the incorporation of data, (and that provoke serious alterations to it, and even force us to start drafting the project from scratch). The architect of the digital era has to operate from the outset with forms full of content and must know how to “programme” them so that they adapt flexibly to multiple requests and requirements. That is (or should be) his job.



The logical architecture of the Programme / Project

The stages in which the logical architecture of the programme/project is developed are:

1. data exposure,
2. empty form generation,
3. the input of form material information,
4. interaction of materials and exposure of the model to physical phenomena (gravity and atmospheric and other phenomena),
5. the generation of initial outputs (the initial virtual building and initial plans and information).
6. iteration or correction of initial parameters as well as materials,
7. the generation of final results (the digital twin and the final plans and information).

Aim of the study

With his famous article "The Mathematics of the Ideal Villa", Colin Rowe undertook a comparative study of Le Corbusier's work in terms of data, calculations and drawings. Surprisingly, the mathematical proportions of the plans for Corbusier's villas coincided with those of Andrea Palladio's Italian villas, designed almost four hundred years earlier in a different aesthetic, theoretical and functional context. Rowe thus showed that the architect's work does not depend so much on his will to express his own time or to express himself, but on his creative ability to interpret and find satisfactory relationships between the data, calculations and drawings of his projects.

Andrea Palladio's Villa Rotonda (1566) is a clear mathematical exercise, case study and model for future iterations. In fact, La Villa Rotonda has been used as a model on several occasions. For example, Le Corbusier uses this geometric construction in the Villa Savoye (1929) (built) (Rowe 1987) 4 or Louis Kahn in the [unbuilt] Goldenberg House (Philadelphia, 1959). Likewise, Sverre Fehn exercises this model in the Villa a Norrköping (built, 1964) among others.

Data exposure

The first stage of the logical architecture is the exposition of data: the most important data for the generation of this building are the ratios. Colin Rowe in the article on the mathematics of the ideal Villa describes these ratios. The main ratios used in Palladio's villa are the following:

- 1/1 (unit ratio)
- 1/2 (average ratio, mid-point)

rias entre los datos/cálculos/dibujos de sus proyectos.

Villa Rotonda (1566) de Andrea Palladio es un claro ejercicio matemático, caso de estudio y modelo para futuras iteraciones. De hecho, Le Corbusier utiliza este modelo geométrico en Villa Saboya (Rowe 1987) o L.I.Kahn en la Casa Goldenberg. Asimismo, Sverre Fehn ejerce este modelo en Villa a Norrköping y otras.

Exposición de datos

Los datos más importantes para la generación de este edificio son los ratios, como describe Rowe. Las principales razones utilizadas en la villa de Palladio son las siguientes:

- 1/1 (relación unitaria)
- 1/2 (proporción media, punto medio)
- 1/3 (tercera proporción)
- 1/5 (quinta relación)
- 1/√2 (La aplicación más relevante en la industria es el uso en el DIN).
- π/4 (o el área que ocupa un círculo en el cuadrado unitario)

Este artículo supone un paso más con respecto al análisis estático de proporciones planimétricas. Lo que ahora se pretende es describir la generación de la forma como proceso de transformación matemática.

Generación De Forma Vacía

Generar la forma vacía consiste en aplicar algoritmos a los datos expuestos anteriormente para obtener forma. Hemos nombrado a esta etapa generación de forma vacía ya que no tiene contenido material, no tiene "datos" (esta será añadida en las siguientes etapas del proyecto). Esto se aprende idealmente en los

primeros años de la carrera. Sin embargo, definir bien esta fase es clave para las etapas sucesivas. El proceso: datos-algoritmo-solución debe ser el leitmotiv del proyecto contemporáneo digital. Se trata de un ejercicio en el cual todo queda interrelacionado. El objeto "punto" es la clave, toda forma es en esencia una sucesión matrices de puntos. Esos "puntos" y cada coordenada pueden ser sometidos a matrices de transformación.

Proyectar Mediante Transformaciones de la Forma

Dentro de la arquitectura lógica del proyecto aparecen los algoritmos particulares o conjunto ordenado de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de una transformación matemática. Partimos de un punto, un dato inicial definido por una matriz(3x1).

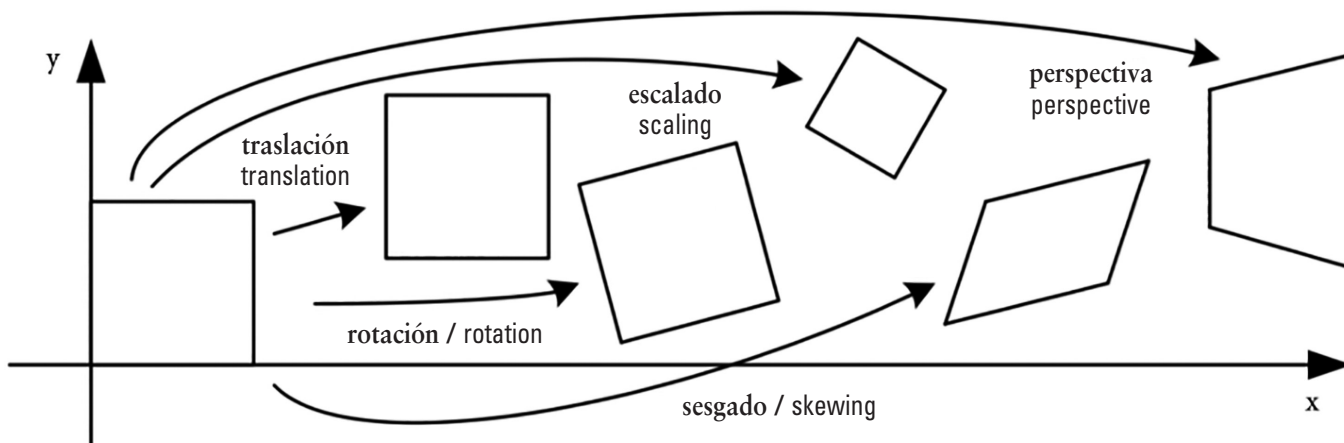
$$(x, y, z)$$

Debido a las propiedades de las matrices, este punto debe ser transformado por una matriz(3x3).

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \\ 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

En algunas ocasiones la dimensión de la matriz inicial y la matriz de transformación varían (los datos siguen siendo los mismos simplemente varían para poder ser operadas, p.ej. en la transformación de traslación, o en la de perspectiva).

En matemáticas estas transformaciones de la forma con matrices se llaman transformaciones matriciales, cuando se produce una sucesión de ellas entramos en el campo de la topología. Dos



figuras son topológicamente equivalentes si una se puede obtener de la otra curvando o estirando su superficie sin cortes ni dobleces. La aplicación de varias transformaciones matriciales se llaman transformaciones topológicas. Existen transformaciones lineales y transformaciones no lineales de la forma. Las transformaciones lineales son las transformaciones que preservan las operaciones definidas en dichos objetos. En un principio se va a trabajar con transformaciones lineales ya que son las adecuadas para proyectar. Las transformaciones no lineales, se reservarán para futuros estudios posiblemente relacionados con procedimientos experimentales que se salen de los objetivos del paper. Las transformaciones matriciales principales son la transformación de traslación, rotación, escalado, sesgado y perspectiva.

Proyectar la Villa Rotonda mediante transformaciones topológicas

Para explicar mejor el proyecto contemporáneo digital se ha hecho un ejercicio teórico conceptual donde se ha conseguido definir las formas principales de la villa rotonda por medio de transformaciones topológicas del cubo y atendiendo a los datos de las ratios originales. Aquí proyectar no es definir líneas

de contorno, se trata de ir describiendo las relaciones que se producen entre el elemento inicial y la forma final. Por otro lado, el ejercicio se ha planteado en 3 dimensiones, esto se corresponde con una reflexión por la cual en el proyectar contemporáneo digital quedaría superado el proyectar mediante planta y sección, o al menos simplemente, ya que es posible proyectar directamente en 3D, tiene sentido hacerlo.

Las 11 transformaciones topológicas utilizadas

Cada uno de los elementos constructivos de la Villa Rotonda, guarda una relación de homomorfismo con el elemento inicial cubo. Puede verse una animación de la transformación completa en el siguiente enlace:

https://drive.google.com/file/d/1IOTW4ziivtZPndC_HbuocvXYfxzlbWGE/view?usp=sharing



- 1/3 (third proportion)
- 1/5 (fifth ratio)
- 1/√2 (The most relevant application in industry is the use in DIN).
- pi/4 (or the area a circle occupies in the unit square)

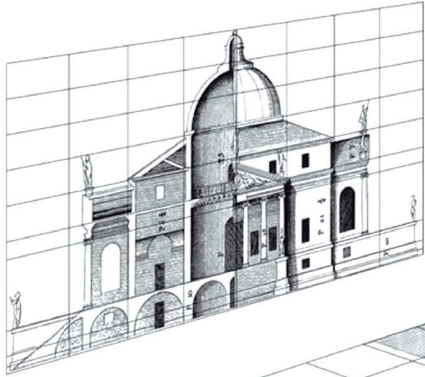
This article is a further step from the static analysis of planimetric proportions. The aim is now to describe the generation of the shape as a mathematical transformation process.

Empty Form Generation

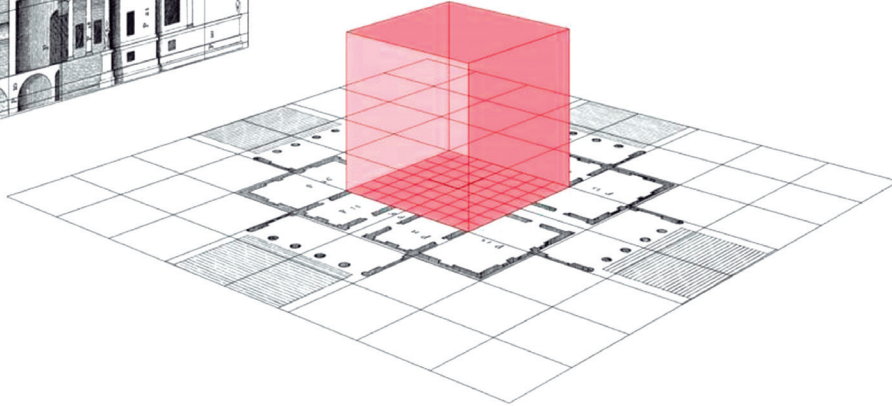
Generating the empty form consists of applying algorithms to the data set out above to obtain form. We have named this stage empty shape generation as it has no material content, it has no "data" (this will be added in the following stages of the project). This is a stage that is ideally learned in the first years of the degree, in fact, we teach it in the first year of architecture and design at the University of Navarra. However, defining this phase well is the key to the successive stages being effective. From our perspective, the process: data-algorithm-solution should be the *leitmotif* of the contemporary digital project. It is an exercise in which everything is ultimately interrelated. The objects we draw must be interconnected with each other. The object "point" is the key, every shape is in essence a succession of points. In computation, every shape is defined by matrices of points. Generally, these points are defined by three parameters corresponding to the x and z components of the Cartesian system in Euclidean space. Euclidean space is the current paradigm, although other spaces such as Riemannian, elliptic or hyperbolic spaces can be explored. See e.g. the case of Zaha Hadid, Daniel Libeskind, etc. These "points" and each coordinate can be subjected to transformation matrices.

Designing by means of Shape Transformations

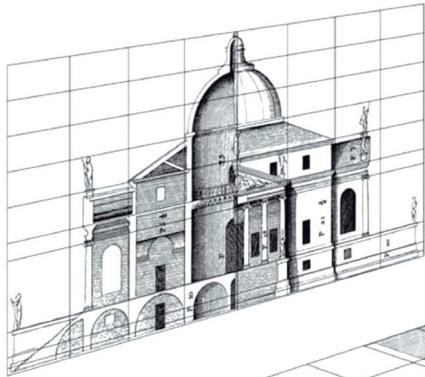
Within the logical architecture of the project are the particular algorithms or ordered set of



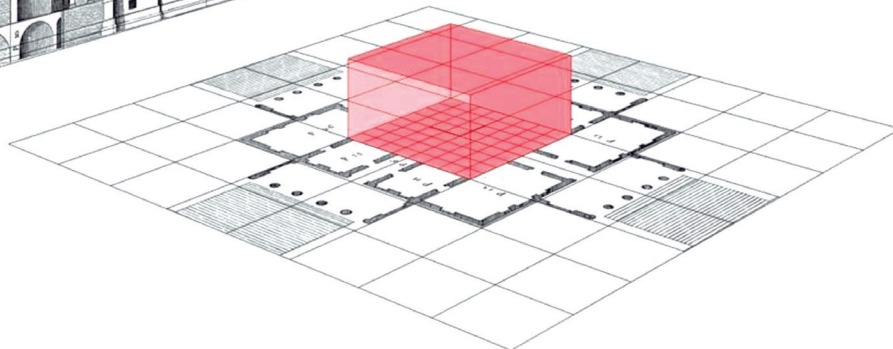
$$\begin{matrix}
 \{-4, 4, 0\} \\
 \{-4, -4, 0\} \\
 \{4, 4, 0\} \\
 \{4, -4, 0\} \\
 \{-4, 4, 8\} \\
 \{-4, -4, 8\} \\
 \{4, 4, 8\} \\
 \{4, -4, 8\}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \{1, 0, 0\} \\
 \{0, 1, 0\} \\
 \{0, 0, 1\}
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \{-4, 4, 0\} \\
 \{-4, -4, 0\} \\
 \{4, 4, 0\} \\
 \{4, -4, 0\} \\
 \{-4, 4, 8\} \\
 \{-4, -4, 8\} \\
 \{4, 4, 8\} \\
 \{4, -4, 8\}
 \end{matrix}$$



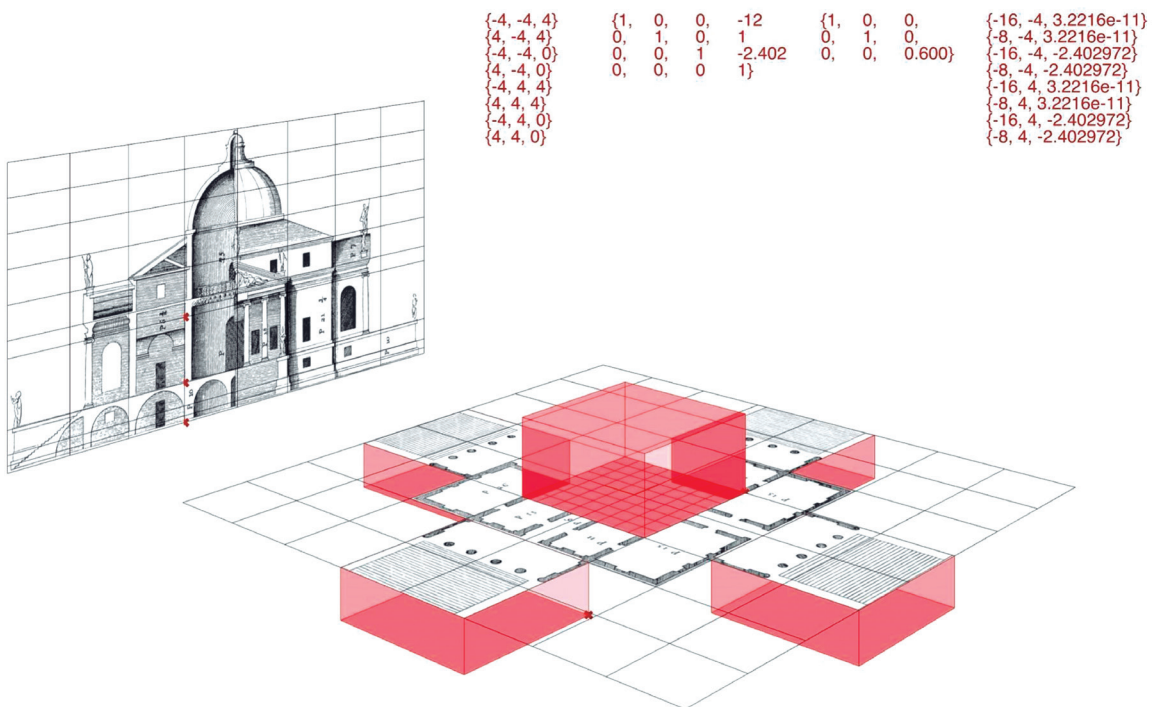
0. Cubo inicial / initial cube



$$\begin{matrix}
 \{-4, 4, 0\} \\
 \{-4, -4, 0\} \\
 \{4, 4, 0\} \\
 \{4, -4, 0\} \\
 \{-4, 4, 8\} \\
 \{-4, -4, 8\} \\
 \{4, 4, 8\} \\
 \{4, -4, 8\}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \{1, 0, 0\} \\
 \{0, 1, 0\} \\
 \{0, 0, 0.5\}
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \{-4, 4, 0\} \\
 \{-4, -4, 0\} \\
 \{4, 4, 0\} \\
 \{4, -4, 0\} \\
 \{-4, 4, 4\} \\
 \{-4, -4, 4\} \\
 \{4, 4, 4\} \\
 \{4, -4, 4\}
 \end{matrix}$$

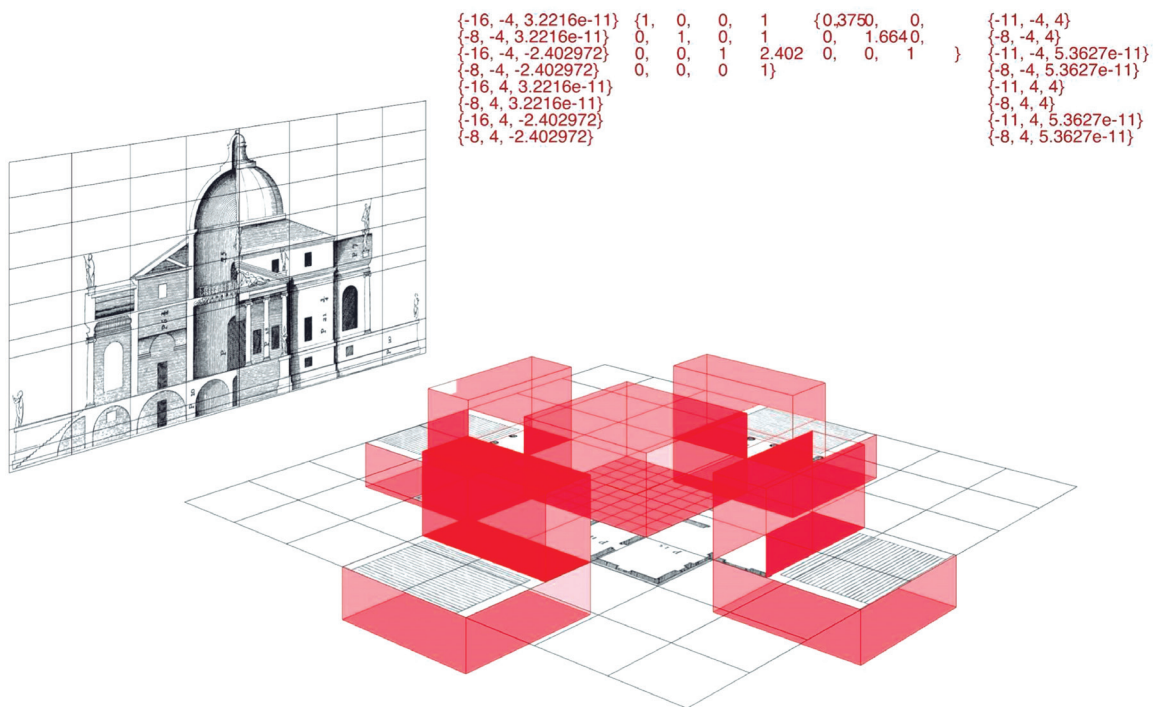


1. Cubo inicial escalado no uniforme / initial non-uniformly scaled cube



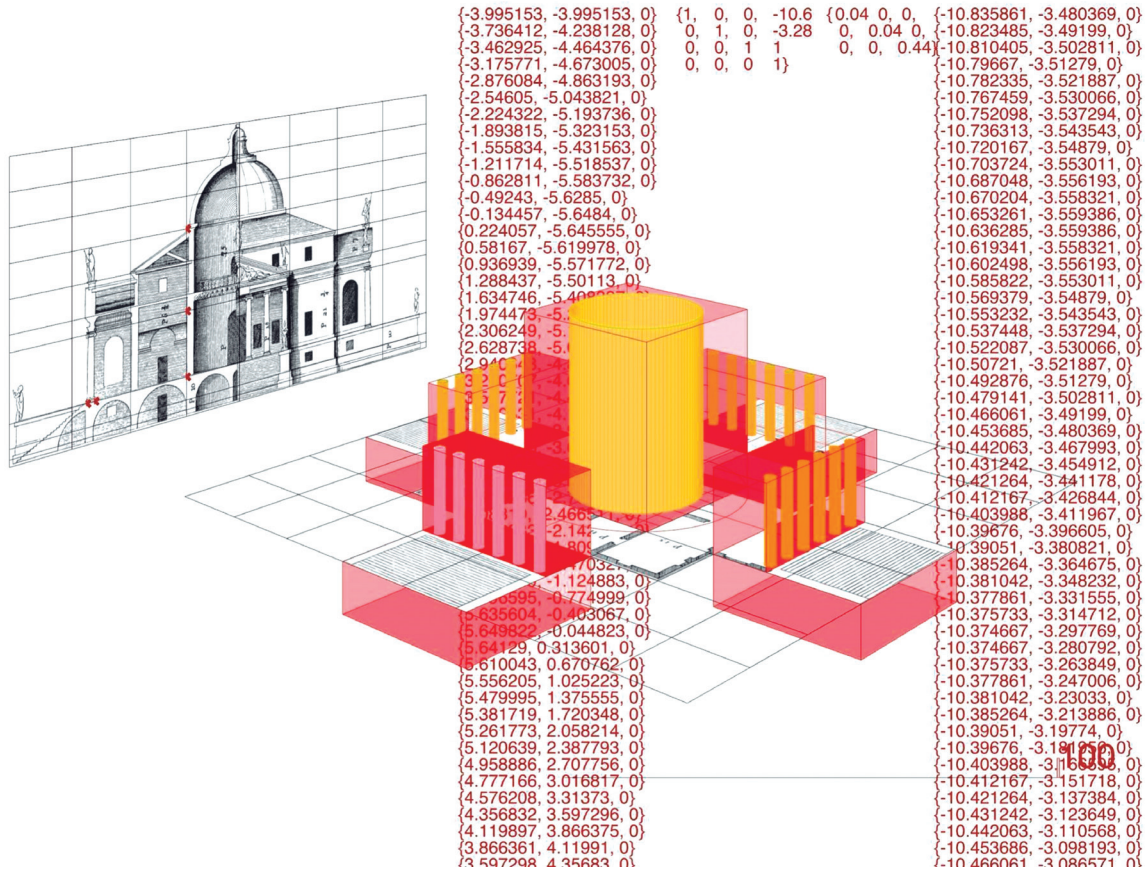
100

2. Cubo inicial escalado + matriz polar con cubo escalado y trasladado / initial scaled cube + polar matrix with scaled and translated cube

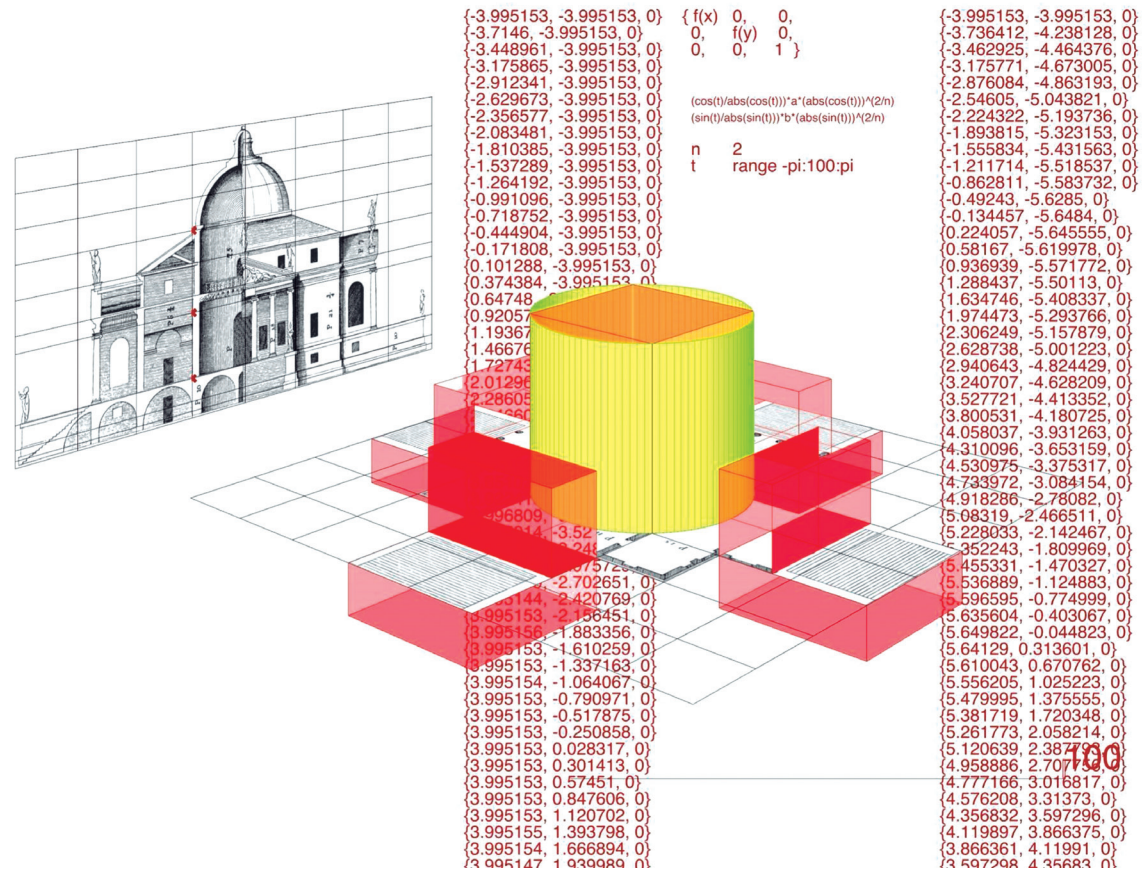


100

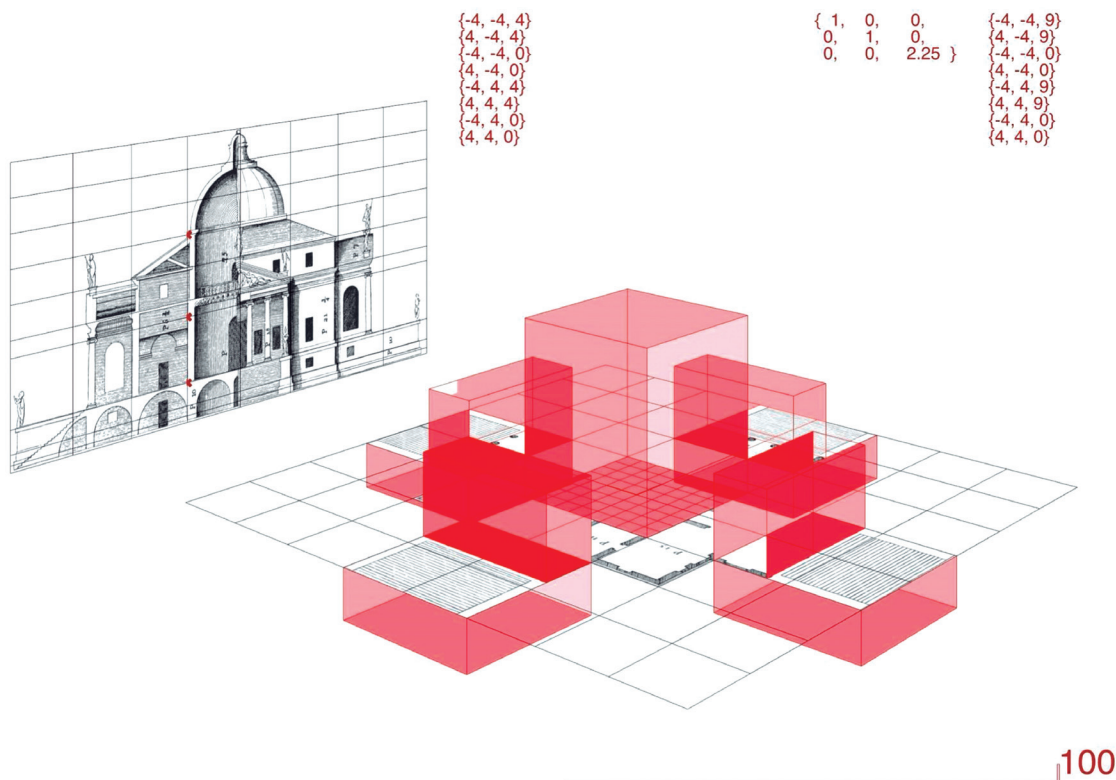
3. Cubo inicial escalado + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado / initial scaled cube + polar matrix with double scaled and translated cube



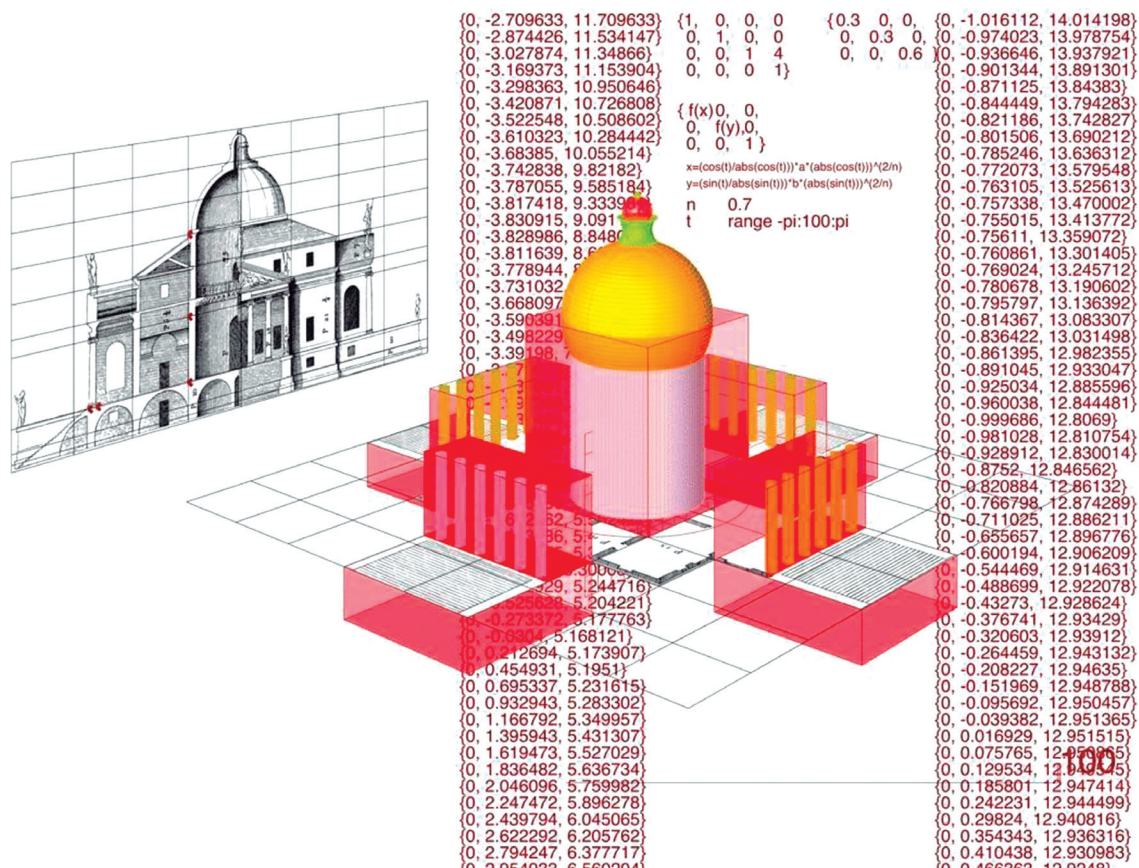
4. Cubo inicial escalado + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado / initial scaled cube + polar matrix with double scaled and translated cube



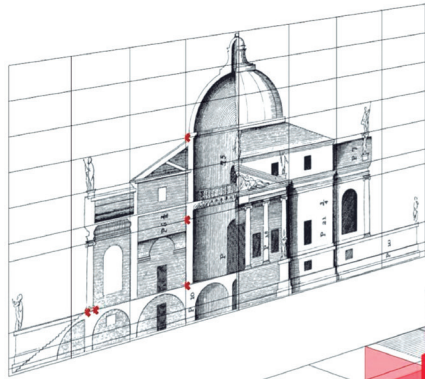
5. Cubo inicial escalado + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado + cilindro principal / initial scaled cube + polar matrix with double scaled and translated cube + main cylinder



6. Cubo inicial escalado + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado con cilindro de columnas + cilindro principal escalado / initial scaled cube + polar matrix with double scaled cube and translated with column cylinder + scaled main cylinder



7. Cubo inicial escalado + cilindro principal escalado + esfera principal + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado con cilindro de columnas / initial scaled cube + main scaled cylinder + main sphere + polar matrix with double scaled cube and translated with column cylinder

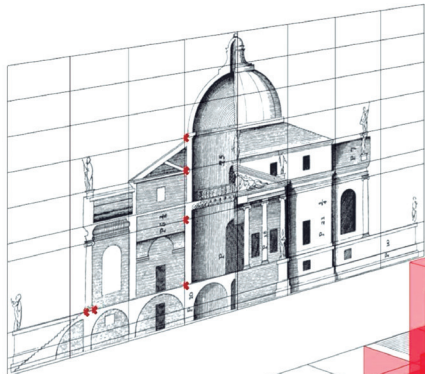


```

{0, -3.387042, 3.387042} {1, 0, 0, 0} {0.8 0, 0, 0} {0, -2.709633, 11.709633}
{0, -3.387042, 3.149192} {0, 1, 0, 0} {0, 0.8 0, 0} {0, -2.874426, 11.534147}
{0, -3.387042, 2.923986} {0, 0, 1, 5.5} {0, 0, 0.76} {0, -3.027874, 11.34866}
{0, -3.387042, 2.692459} {0, 0, 0, 1} {0, 0, 0, 1} {0, -3.169373, 11.153904}
{0, -3.387042, 2.469047} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.298363, 10.950646}
{0, -3.387042, 2.229404} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.420871, 10.726808}
{0, -3.387042, 1.997877} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.522548, 10.508602}
{0, -3.387042, 1.766349} {0, 0, 0, 1} {0, 0, 0, 1} {0, -3.610323, 10.284442}
{0, -3.387042, 1.534822} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.68385, 10.055214}
{0, -3.387042, 1.303294} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.742838, 9.82182}
{0, -3.387042, 1.071767} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.787055, 9.585184}
{0, -3.387042, 0.840239} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.817418, 9.333981}
{0, -3.387042, 0.609349} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.830915, 9.091193}
{0, -3.387042, 0.377184} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.828986, 8.848038}
{0, -3.387042, 0.145019} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.811639, 8.605494}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.778944, 8.364539}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.731032, 8.126143}
{0, -3.387041, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.668097, 7.891266}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.590391, 7.660853}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.498229, 7.435833}
{0, -3.387041, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.39198, 7.217111}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.272073, 7.005568}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -3.138991, 6.802055}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -2.993268, 6.607393}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -2.835494, 6.422366}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -2.666301, 6.247717}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -2.477682, 6.076763}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -2.289241, 5.926957}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -2.091766, 5.789278}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -1.886036, 5.66427}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -1.672862, 5.552427}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -1.453086, 5.454191}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -1.227575, 5.369947}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -0.99722, 5.30003}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -0.762929, 5.244716}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -0.525628, 5.204221}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -0.273372, 5.177763}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, -0.0304, 5.168121}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 0.212694, 5.173907}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 0.454931, 5.1951}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 0.695337, 5.231615}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 0.932943, 5.283302}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 1.166792, 5.349957}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 1.395943, 5.431307}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 1.619473, 5.52762}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 1.836482, 5.638331}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 2.046096, 5.759982}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 2.247472, 5.896278}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 2.439794, 6.045065}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 2.622292, 6.205762}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 2.794247, 6.377717}
{0, -3.387042, 0.000000} {0, 0, 0, 0} {0, 0, 0, 0} {0, 2.954033, 6.560041}

```

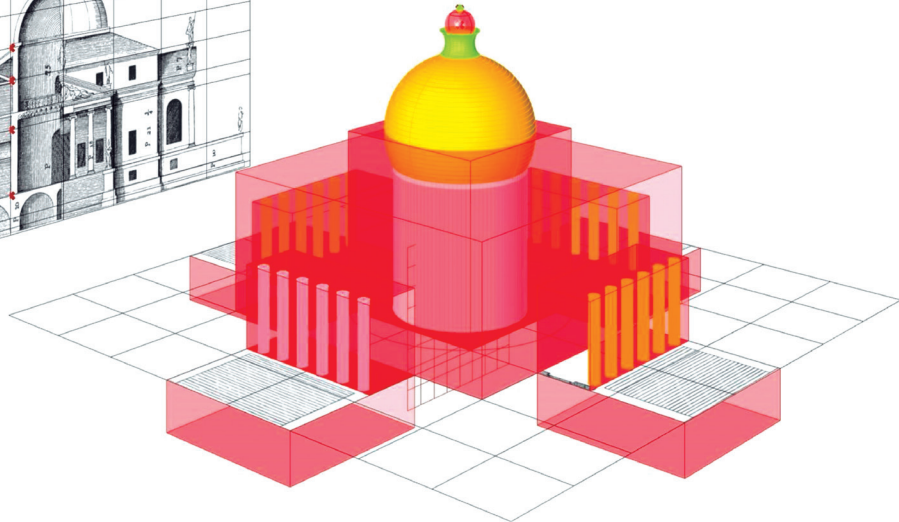
8. Cubo inicial escalado + cilindro principal escalado + esfera principal + esferas secundarias + elemento convexo + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado con cilindro de columnas / initial scaled cube + scaled main cylinder + main sphere + secondary spheres + convex element + polar matrix with scaled double cube and translated with column cylinder



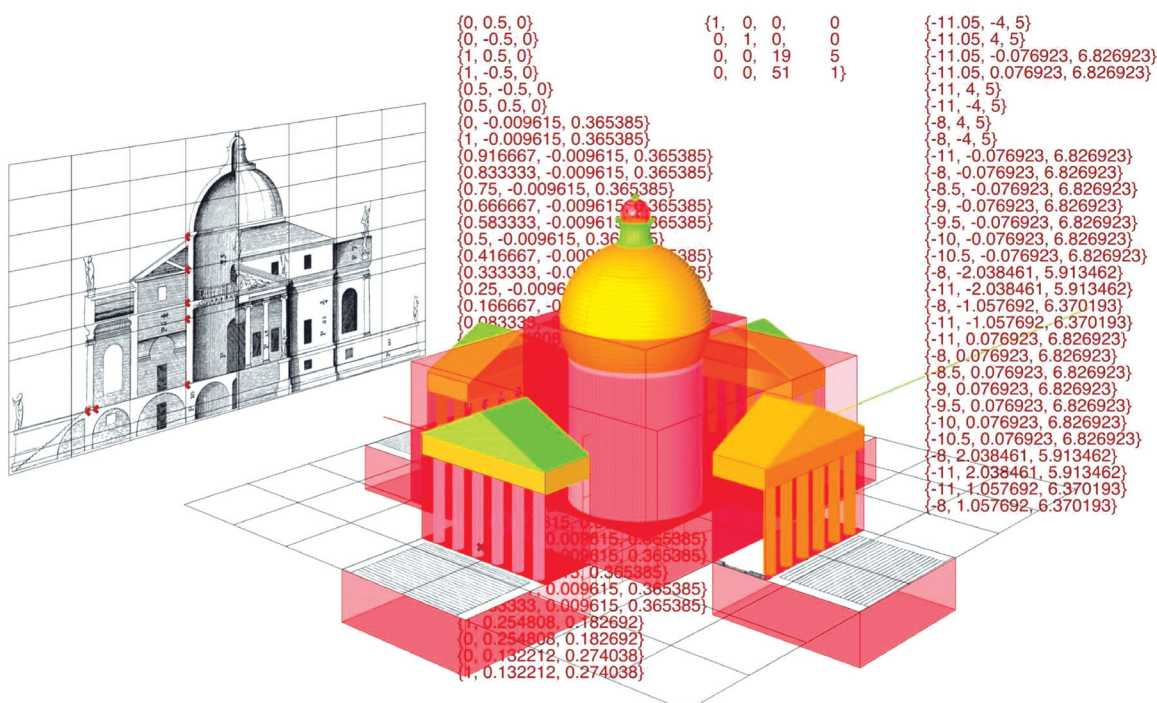
```

{-4, -4, 9} {2 0, 0, 0} {-8, -8, 7}
{4, -4, 9} {0, 2 0, 0} {8, -8, 7}
{-4, -4, 0} {0, 0, 0, 0.77} {-8, -8, 0}
{4, -4, 0} {0, 0, 0, 0} {8, -8, 0}
{-4, 4, 9} {-8, -8, 7}
{4, 4, 9} {8, 8, 7}
{-4, 4, 0} {-8, 8, 7}
{4, 4, 0} {8, 8, 0}
{-4, 4, 0} {-8, 8, 0}
{4, 4, 0} {8, 8, 0}

```



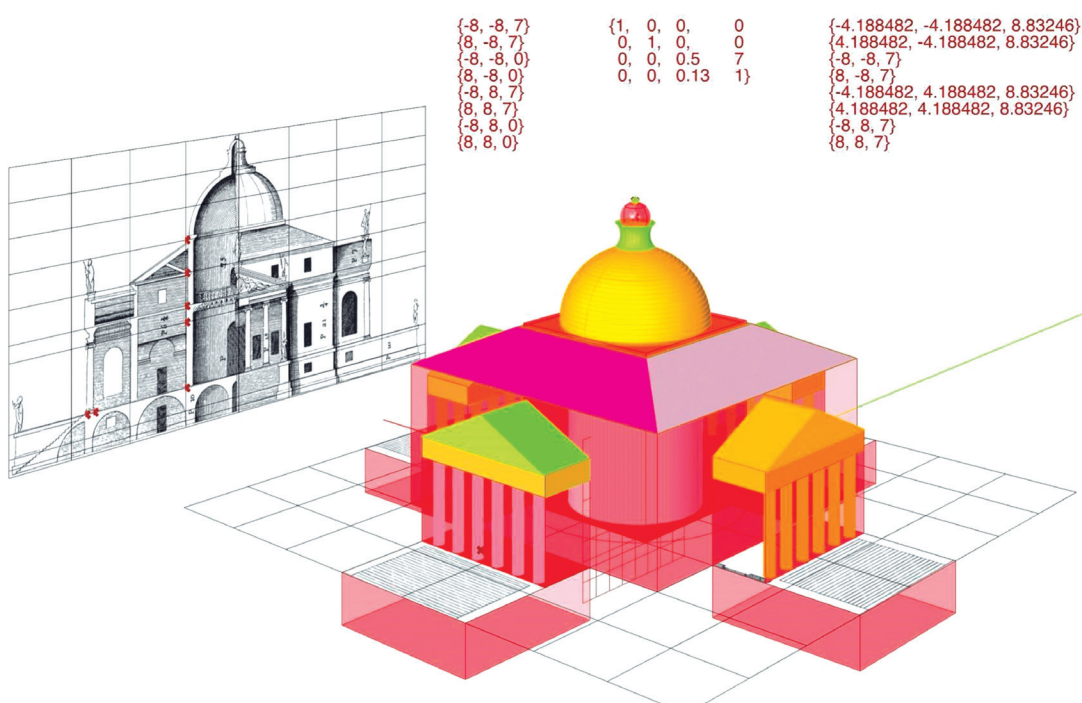
9. Cubo inicial escalado + prisma contorno principal + cilindro principal escalado + esfera principal + esferas secundarias + elemento convexo + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado con cilindro de columnas / (initial scaled cube + main contour prism + scaled main cylinder + main sphere + secondary spheres + convex element + polar matrix with scaled double cube and translated with column cylinder



100



10. cubo inicial escalado + prisma contorno principal + cilindro principal escalado + esfera principal + esferas secundarias + elemento convexo + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado con cilindro de columnas / initial scaled cube + main contour prism + scaled main cylinder + main sphere + secondary spheres + convex element + polar matrix with scaled double cube and translated with column cylinder



100



11. cubo inicial escalado + prisma contorno principal + pirámide truncada cubierta principal + cilindro principal escalado + esfera principal + esferas secundarias + elemento convexo + matriz polar con doble cubo escalado y trasladado con cilindro de columnas / initial scaled cube + main contour prism + truncated pyramid main shell + scaled main cylinder + main sphere + secondary spheres + convex element + polar matrix with scaled double cube and translated with column cylinder



systematic operations that allow a calculation to be made and the solution of a mathematical transformation to be found. We start from a point, an initial data defined by a matrix(3x1).

(x, y, z)

Due to the properties of matrices, this point must be transformed by a matrix(3x3).

(1, 0, 0,

0, 1, 0,

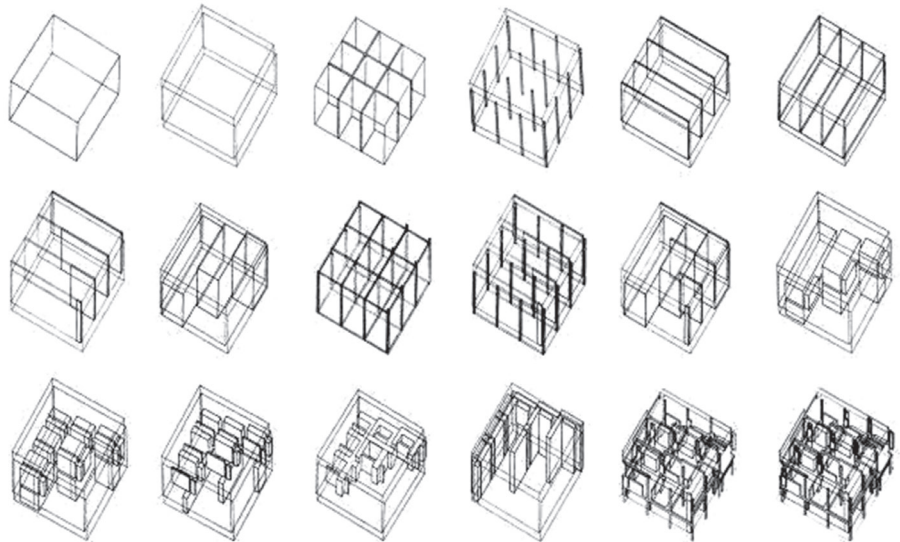
0, 0, 1)

Sometimes the dimension of the initial matrix and the transformation matrix vary (the data remain the same, they just vary in order to be operated on, e.g. in the translation transformation, or in the perspective transformation).

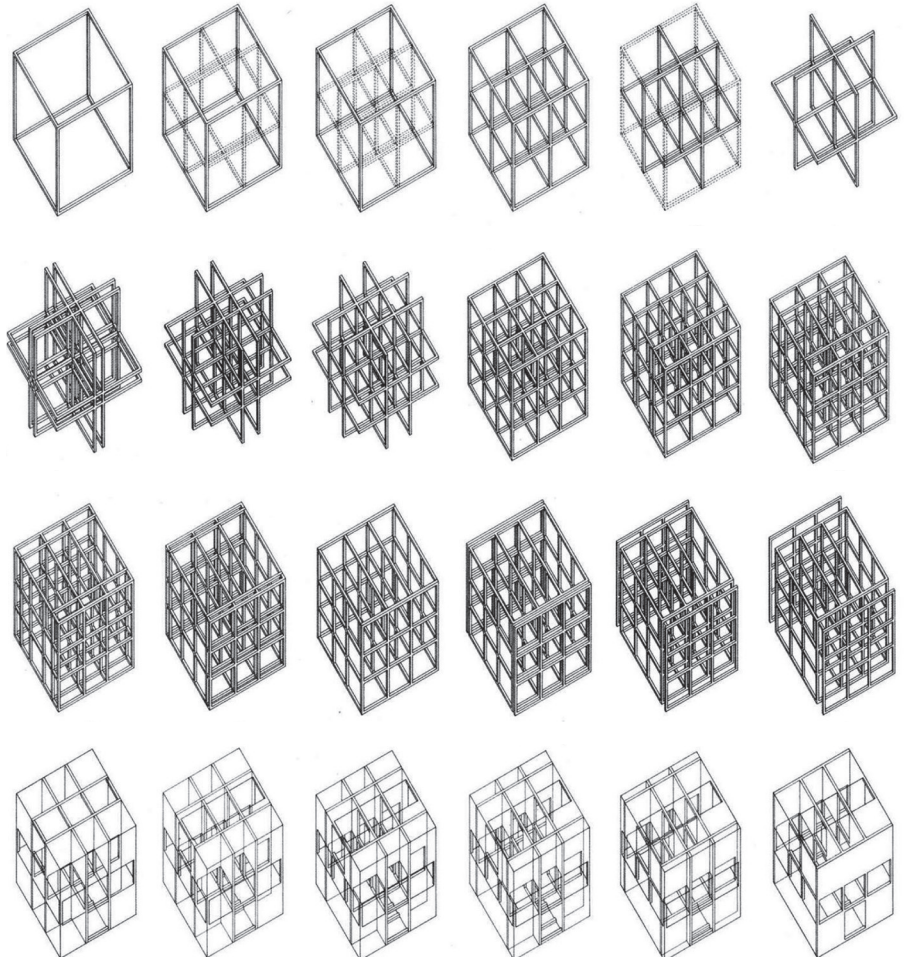
In mathematics these transformations of the shape with matrices are called matrix transformations, and when a succession of them occurs we enter the field of topology. Two figures are topologically equivalent if one can be obtained from the other by curving or stretching its surface without cuts or folds. The application of various matrix transformations is called topological transformations. There are linear transformations and non-linear transformations of the shape. Linear transformations are transformations that preserve the operations defined on these objects. In the beginning, we will work with linear transformations, as they are the most suitable for projection. Non-linear transformations will be reserved for future studies, possibly related to experimental procedures that are outside the scope of this paper. The main matrix transformations are the translation, rotation, scaling, skewing and perspective transformations.

Planning the Villa Rotonda by means of Topological Transformations

To better explain the contemporary digital project, a theoretical conceptual exercise was carried out to define the main forms of the roundabout villa by means of topological transformations of the cube and taking into account the data of the original ratios. Here, planning is not about defining contour lines, it is about describing the relationships that occur between the initial element and the final shape. On the other hand, the exercise has been set out in three dimensions. This corresponds to a reflection that in contemporary digital projects, designing by means of the *plan and*



12



13

12. House II Peter Eissenman 1970

13. House IV Peter Eissenman 1971

Daniel Libeskind utiliza transformaciones topológicas en muchos de sus proyectos: entre ellos los proyectos del museo judío. El objeto inicial es la estrella de David

14. Daniel libeskind Jewish Museum 1989

Zaha Hadid parte de una estructura reticulada similar para la construcción de su arquitectura. Se ve, sobre todo, en los proyectos de urbanismo, pero también en la superficie de las cubiertas de la mayoría de sus proyectos

12. House II Peter Eissenman 1970

13. House IV Peter Eissenman 1971

Daniel Libeskind uses topological transformations in many of his projects: among them the Jewish Museum projects. The initial object is the Star of David

14. Daniel Libeskind Jewish Museum 1989

Zaha Hadid uses a similar reticulated structure for the construction of her architecture. This can be seen above all in the urban planning projects, but also in the roof surfaces of most of her projects

Paralelismos con Peter Eisenman, Daniel Libeskind y Zaha Hadid

Se ha tomado como punto de partida el cubo para generar toda la forma de la Villa Rotonda, no por casualidad. El cubo es el objeto por excelencia de la arquitectura moderna (Cortés 2013). Las transformaciones topológicas dentro de un proyecto contemporáneo digital pueden darse en cualquier objeto matemático. Peter Eisenman, desarrolla su arquitectura partiendo del cubo, de manera similar a como se ha desarrollado la villa palladio, para hacerle posteriores transformaciones.

section method would be surpassed or at least simplified. Since it is possible to design directly in 3D it makes sense to do so.

The 11 Topological Transformations used

Each of the constructive elements of the Villa Rotonda has a homomorphic relationship with the initial cube element. An animation of the complete transformation can be seen at the following link:

https://drive.google.com/file/d/110TW4ziivtZPndC_HbuocvXYfzlbWGE/view?usp=sharing

Parallels with Peter Eisenman, Daniel Libeskind and Zaha Hadid

The cube has been taken as a starting point to generate the entire shape of Villa Rotonda, and not by chance. The cube is the object par excellence of modern architecture (Cortés 2013). Topological transformations within a contemporary digital project can occur in any mathematical object. Peter Eisenman, develops his architecture starting from the cube, in a similar way to how the Villa Palladio has been developed, to make subsequent transformations.

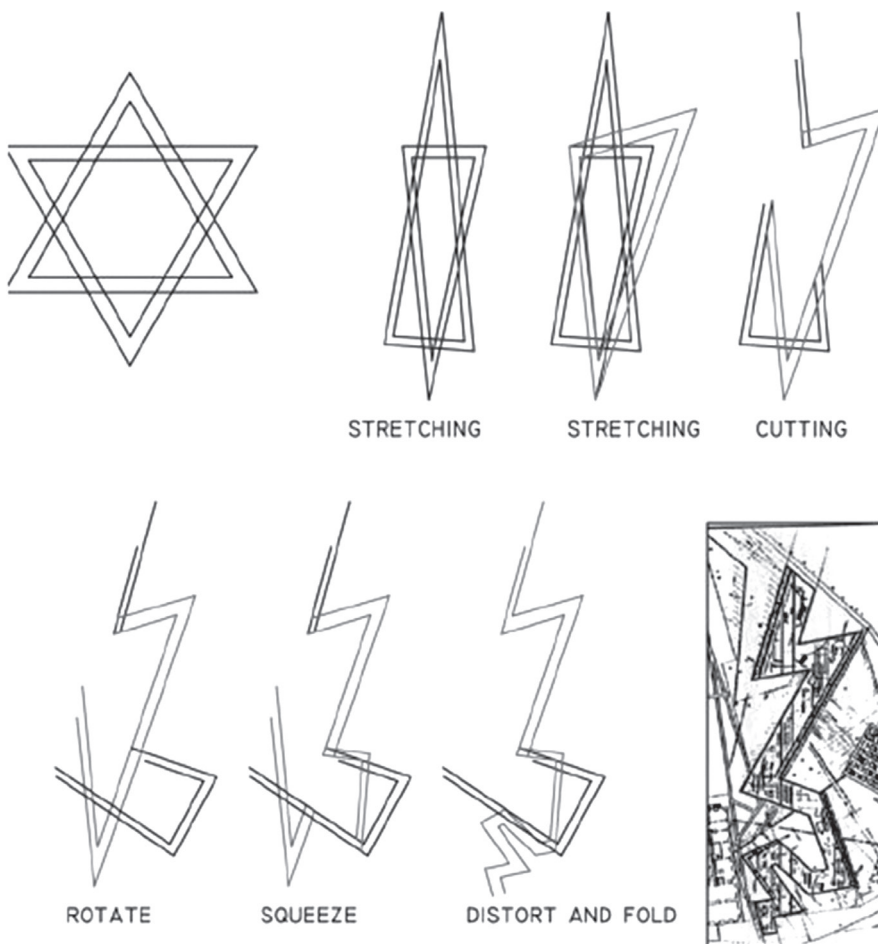
CONCLUSIONS

The digital twin of the Villa Rotonda

The process proposed here is a logical structure of data, algorithms and results. A generating system that simultaneously enables representation and simulation, not so much for visualisation but above all as a primary design tool for the architect.

The project can be generated from topological transformations applied to an elementary shape, in this case the cube.

These transformations are those associated with the study of descriptive geometry and architectural drawing, but in order to be able to apply them, mathematical calculation is necessary. And this calculation in turn requires knowledge of the computational language. In this specific case, MatLab software has been used, but it could be coded in any other language. It is a contemporary way of understanding the generation of the empty form. A virgin, parametric and flexible format;





15

“prepared” and “structured” for the subsequent acquisition of successive layers of project information, which would lead to the “virtual twin” of the building. This information could be: data, poetry, structural restrictions, or installations, all integrated in a single project. This proposes a conceptual and technical way to produce the architecture of the future, whether physical in the real world or digital in the *Metaverse*. In the same way that current medicine tends to be preventive and to anticipate pathologies through the study of virtual twins (virtual generation of organs), architecture could and should be an activity that projects into the future the behaviour that the form will have under a wide range of solicitations. Moreover, the work takes up the ongoing debate on digital drawing, posing relations between drawing, digital media and project, with the contemporary perspective in which three-dimensional design is no longer questioned as opposed to the option derived from the Gothic and Renaissance tradition of the architectural project based on the architect’s work in plan and section. Designing through topological transformations is a process already used by architects such as Peter Eisenman, Daniel Libeskind, and Zaha Hadid among others, but which has a theoretical potential that goes beyond these specific examples or a particular “type of architecture”. The case of the Villa

CONCLUSIONES

El gemelo digital de la villa Rotonda

El proceso aquí planteado es una estructura lógica de datos, algoritmos y resultados. Un sistema generador que posibilita simultáneamente la representación y la simulación no tan enfocada a su visualización sino sobre todo como herramienta primaria de diseño para el arquitecto.

El proyecto se puede generar a partir de transformaciones topológicas aplicadas sobre una forma elemental, en este caso el cubo.

Estas transformaciones son las propias asociadas al estudio de la geometría descriptiva y del dibujo arquitectónico, pero para poder aplicarlas es necesario el cálculo matemático. Y ese cálculo precisa a su vez el conocimiento del lenguaje computacional. En este caso concreto se ha empleado el software MatLab pero podría ser

codificado en cualquier otro lenguaje. Se trata de una manera contemporánea de entender la generación de la forma vacía. Un formato virgen, paramétrico y flexible; “preparado” y “estructurado” para la posterior adquisición de capas sucesivas de información del proyecto, que desembocaría en el “gemelo virtual” del edificio. Esa información podría ser: datos, poesía, restricciones estructurales, instalaciones...todo ello integrado en un único proyecto. Con ello se propone una vía conceptual y técnica, adecuada para producir la arquitectura del futuro, ya sea física en el mundo real o digital en el *Metaverso*. De igual manera que la medicina actual tiende a ser preventiva y adelantarse a las patologías mediante el estudio de los gemelos virtuales (generación virtual de órganos), la arquitectura podría y debería ser una actividad que proyecte hacia el futuro el comportamiento que tendrá la



15. Parametric Urbanism-Kartal Pendik Masterplan Fig.2. Light Study as Object Parameter r-Nuragicand Contemporary Art Museum

15. Parametric Urbanism-Kartal Pendik Masterplan Fig.2. Light Study as Object Parameter r-Nuragicand Contemporary Art Museum

forma bajo un amplio abanico de solicitudes.

Por lo demás el trabajo retoma el debate nunca abandonado sobre el dibujo digital, planteando relaciones entre dibujo, medios digitales y proyecto, con la perspectiva contemporánea en la que ya no se cuestiona el diseño en tres dimensiones frente a la opción derivada de la tradición gótica y renacentista del proyecto arquitectónico a partir del trabajo del arquitecto en planta y sección. Proyectar mediante transformaciones topológicas es un proceso ya utilizado por arquitectos como Peter Eisenman, Daniel Libeskind, y Zaha Hadid entre otros, pero que tiene un potencial teórico que va más allá de estos ejemplos concretos o de un determinado “tipo de arquitectura”. El caso de la villa Rotonda es un buen ejemplo para entender el proceso de proyecto sin dar como resultado un objeto cerrado e inmutable, sino un sistema abierto que define la identidad formal del proyecto sin condicionar su adecuación a los requerimientos cambiantes en el tiempo. Además, este sistema permitiría aplicar a edificios concretos la noción tipológica de generación de la arquitectura según la cual, los proyectos forman parte de familias estructurales o tipos. El mecanismo que se propone describe y posibilita que esas transformaciones sean mucho

más ágiles y no tengan que darse de forma discreta, de edificio en edificio, de tiempo en tiempo, sino de forma continua y abierta en un mismo proyecto. ■

Referencias

DIBUJO/PROYECTO

- LYNN, G. 1999. *Animate Form*. Princeton. Princeton Architectural Press.
- CARPO, M. (2017). *The second digital turn: design beyond intelligence*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- CHÍAS, P.; CARDONE, V. eds. 2016. *Dibujo y arquitectura: 1986-2016, treinta años de investigación = Disegno e architettura: 1986-2016, trent' anni di ricerca*, Universidad de Alcalá/Università degli Studi di Salerno.
- CARAZO, E, & GUTIÉRREZ, S. M. 2013. “The digital generation. More notes for the debate on a cybernetics of architecture”. In EGA. *Revista de expresión gráfica arquitectónica*. Valencia, Nº22, pp.50-59.
- LLOPIS, J.; 2018 “Between representation and simulation. A paradigm shift in contemporary architectural drawing”. EGA: *Journal of Architectural Graphic Expression*, Vol. 23, No. 34, pp.180-193.
- MARTÍ ARÍS, C. 1993; *Las variaciones de la identidad. Essay on type in architecture*. Ediciones del Serbal. Barcelona.

DATOS

- CHING. F. D. K. *Architecture, Form, Space and Order*, John Wiley and Sons, Hoboken, 2014..
- ROWE, C. *The Mathematics of the Ideal Villa and Other Essays*. The MIT Press 1982.
- CORTÉS, Juan Antonio. (2013) *.Historia de la retícula en el siglo XX. De la estructura Domino a comienzos de los años setenta*. Valladolid: Universidad de Valladolid,

CÁLCULO

- EISENMAN, P *Eisenman inside out: Selected Writings 1963-1988 (theoretical perspectives in Architectural History and Criticism*. New Heaven: Yale University Press 2004.
- FRAMPTON, K. *Studies in tectonic culture: the poetics of construction in Nineteenth and Twentieth Century Architecture*. Boston MIT Press 2001.
- GENTLE, James E. (2007). “Matrix Transformations and Factorizations”. *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer. ISBN 9780387708737.

Rotonda is a good example if we wish to understand the project process without giving as a result a closed and immutable object, but rather an open system that defines the formal identity of the project without conditioning its adaptation to changing requirements over time. Furthermore, this system would make it possible to apply to specific buildings the typological notion of architectural generation according to which projects form part of structural families or types. The proposed mechanism describes and makes it possible for these transformations to be much more agile and not have to take place in a discrete way, from building to building, and from time to time, but in a continuous and open way in the same project. ■

References

DRAWING/PROJECT

- LYNN, G. 1999. *Animate Form*. Princeton. Princeton Architectural Press.
- CARPO, M. (2017). *The second digital turn: design beyond intelligence*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- CHÍAS, P.; CARDONE, V. eds. 2016. *Dibujo y arquitectura: 1986-2016, treinta años de investigación = Disegno e architettura: 1986-2016, trent' anni di ricerca*, Universidad de Alcalá/Università degli Studi di Salerno.
- CARAZO, E, & GUTIÉRREZ, S. M. 2013. “The digital generation. More notes for the debate on a cybernetics of architecture”. In EGA. *Revista de expresión gráfica arquitectónica*. Valencia, Nº22, pp.50-59.
- LLOPIS, J.; 2018 “Between representation and simulation. A paradigm shift in contemporary architectural drawing”. EGA: *Journal of Architectural Graphic Expression*, Vol. 23, No. 34, pp.180-193.
- MARTÍ ARÍS, C. 1993; *Las variaciones de la identidad. Essay on type in architecture*. Ediciones del Serbal. Barcelona.

DATA

- CHING. F. D. K. *Architecture, Form, Space and Order*, John Wiley and Sons, Hoboken, 2014..
- ROWE, C. *The Mathematics of the Ideal Villa and Other Essays*. The MIT Press 1982.
- CORTÉS, Juan Antonio. (2013) *.Historia de la retícula en el siglo xx. De la estructura Domino a comienzos de los años setenta*. Valladolid: Universidad de Valladolid,

CALCULUS

- EISENMAN, P *Eisenman inside out: Selected Writings 1963-1988 (theoretical perspectives in Architectural History and Criticism*. New Heaven: Yale University Press 2004.
- FRAMPTON, K. *Studies in tectonic culture: the poetics of construction in Nineteenth and Twentieth Century Architecture*. Boston MIT Press 2001.
- GENTLE, James E. (2007). “Matrix Transformations and Factorizations”. *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer. ISBN 9780387708737.