



SUPERFICIES RECTIFICANTES. CONCEPTO, REALIDAD GEOMÉTRICA Y DISTORSIÓN CONSTRUCTIVA

RECTIFYING SURFACES. CONCEPTS, GEOMETRIC REALITY AND CONSTRUCTIVE DISTORTION

Francisco González-Quintial; orcid 0000-0001-6600-6024
UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

Andrés Martín-Pastor; orcid 0000-0002-5588-2886
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

doi: 10.4995/ega.2023.16997

La utilización de superficies desarrollables en Arquitectura es un tema recurrente y de gran importancia en los desarrollos recientes sobre Geometría en Arquitectura. Los acercamientos de tipo computacional en esta materia dejan de lado, en ciertos casos, los conceptos de la geometría descriptiva o proyectiva tradicional centrándose más en desarrollos analíticos de tipo matemático. Algunas cuestiones geométricas se asumen como ciertas quedando oculto en el salto desde el espacio gráfico al ámbito físico la desviación geométrica que se produce en ciertas situaciones. En el presente artículo se expone uno de estos aspectos geométricos que son aceptados como verdaderos por la comunidad científica, existiendo detrás una importante inexactitud geométrica. Expondremos el error existente en

las condiciones de desarrollabilidad del trazado de las superficies rectificantes sobre curvas geodésicas en la discretización de superficies de doble curvatura, en concreto lo referido al diseño y la construcción de estructuras reticulares de tipo *gridshell*.

PALABRAS CLAVE: GEOMETRÍA, SUPERFICIES DESARROLLABLES, APROXIMACIÓN ALGORÍTMICA, FABRICACIÓN DIGITAL, GRIDSHHELL

The use of developable surfaces in Architecture is an important topic that has gained attention on a number of occasions in recent developments in Geometry in Architecture. Computational approaches in this area omit, in certain cases, concepts from traditional descriptive or projective geometry, focusing more on mathematical-type analytical

developments. Some geometrical issues are simply taken as given, and thus the geometrical deviation that occurs in certain cases is hidden in the leap from graphic space to the physical realm. In this article we detail one of these issues, which is assumed to be true in much of the existing literature. In reality, an important lack of geometrical precision remains unresolved. We expose an existing error in the conditions of developability when plotting rectifying surfaces on geodesic curves in the discretization of double curvature surfaces, in particular the design and construction of gridshell reticular structures.

KEYWORDS: GEOMETRY, DEVELOPABLE SURFACES, APPROXIMATION ALGORITHMS, DIGITAL FABRICATION, GRIDSHHELL



La aproximación y el control geométrico de cualquier elemento que intentemos construir en Arquitectura es indudablemente necesaria. Los sistemas de expresión gráfica dan soporte a la idea desde el mismo estado conceptual del boceto hasta la definición de los elementos en detalle. La utilización de la idea geométrica de desarrollabilidad de las superficies ha sido profusamente empleada de forma tradicional desde su formulación entre los siglos XVIII y XIX por el geómetra francés Gaspard Monge **1** y del mismo modo ha tenido una especial atención en los últimos años, existiendo múltiples aproximaciones que exploran las posibilidades de aplicación en Arquitectura de las superficies desarrollables **2**.

Sin embargo, detrás de algunas ideas geométricas preconcebidas existen diversos grados de inexactitud desde el punto de vista estrictamente geométrico. Así, aparecen diversos conceptos naturalmente interiorizados y empleados de forma profusa en la construcción arquitectónica que arrastran contradicciones que se mantienen ocultas en el salto que se produce del dibujo a la construcción. La elasticidad del material y el propio proceso constructivo diluyen las diferencias geométricas y dimensionales en la trasposición desde el objeto dibujado a la realidad construida. Es posible pensar en sistemas de construcción inspirados en tejidos **3**, donde los elementos individuales también lineales, son flectados siguiendo un patrón y obteniendo una forma final fruto no de un diseño previo sino de las propias condiciones físicas del material y el procedimiento impuesto. Del mismo modo sucede en los procesos de búsqueda de forma que en ciertos

casos son utilizados en el diseño de cáscaras. Podemos decir que en esa transformación del dibujo a la realidad aparecen distorsiones y deformaciones que permiten un determinado margen de adaptación a través del cual la idealidad geométrica se transforma en realidad distorsionada.

La utilización del concepto geométrico del trazado de curvas geodésicas como base de un sistema de discretización de superficies se ha utilizado de forma extensiva en el diseño y fabricación de superficies y estructuras en general y en particular, en el diseño de estructuras ligeras de tipo *gridshell*, es decir cáscaras **4**, *en general* de doble curvatura, de pequeño espesor y peso, construidas con diferentes materiales y de manera particular con listones de gran longitud y pequeña sección de materiales flexibles. En la definición de Johnson: '*A shell is a natural, extremely strong structure. A gridshell is essentially a shell with holes, but with its structure concentrated into strips*' **5**.

En la construcción de este tipo de formas se ha utilizado la idea geométrica de las redes de curvas geodésicas. Natterer en el Polydôme, Ecublens, Lausanne, y en el Expodach, World Exhibition, Hannover, utiliza esta idea en la construcción de *ribbed-gridshells* sobre superficies de doble curvatura con formas controladas **6**. Este tipo de curvas plantean cierta dificultad en su trazado más allá de ciertas superficies básicas. Pero a partir de la utilización de sistemas computacionales que permiten el trazado sencillo de curvas geodésicas sobre superficies **7** el empleo de este tipo de curvas como base geométrica para la discretización de superficies ha aumentado enormemente.

Geometric approximation and control of any element that we wish to build in architecture is undoubtedly necessary. Systems of graphic expression sustain ideas from the conceptual form of the sketch through to the definition of elements in detail. The use of the geometric idea of the developability of surfaces has been used profusely in a tradition dating from its formulation between the eighteenth and nineteenth centuries by the French geometrician Gaspard Monge **1**, and it has also received special attention over recent years, through multiple approaches that explore the possibilities for its application in architecture using developable surfaces **2**. This said, from a strictly geometric point of view, varying degrees of inaccuracy can be found behind some preconceived geometric notions. Thus, several concepts taken for granted and used extensively in architecture contain contradictions that remain hidden in the leap from drawing to construction. The flexibility of materials and the construction process itself attenuate the geometric and dimensional differences that occur in transposition from the drawn object to built reality. This brings to mind construction systems inspired by fabrics **3**, where individual elements, also linear, are warped in accordance with a pattern and a final form is obtained that is not the result of prior design but instead of the physical characteristics of the material and the procedure employed. This also occurs in form-finding processes that are used in certain cases in the design of gridshells. We can say that in this transformation from drawing to reality there are distortions and deformations that allow for a certain margin of adaptation through which geometric ideals are materialized in non-ideal physical forms.

The use of the geometric concept of laying geodesic curves as the basis of a surface discretization system has been used extensively in the design and fabrication of surfaces and structures in general and in the design of lightweight gridshell structures, i.e. shells **4**, *generally* of double curvature, with constrained thickness and weight, built with different materials in specific way using long small-section laths made of flexible materials, in particular. Johnson's definition reads as follows: '*A shell is a natural,*



extremely strong structure. A gridshell is essentially a shell with holes, but with its structure concentrated into strips' 5.

The geometric idea of lattices of geodesic curves has been used in the construction of this type of form. Natterer, in the Polydôme in Ecublens, Lausanne, and the Expodach at the World Exhibition in Hanover, use this idea in the construction of ribbed-gridshells on double curvature surfaces with controlled forms 6. These types of curves pose a certain difficulty in their plotting beyond that of certain basic surfaces. However, since the advent of computational systems that allow the simple plotting of geodesic curves on surfaces 7 the use of this type of curves to discretize surfaces has increased enormously. There are numerous examples where construction using this discretization system has achieved remarkable results. Among many others, on a smaller scale in the form of a pavilion, we can highlight experiments by Enrique Soriano of CODA LiTA BarcelonaTech, 8, the Almond Pavilion and Big O, based on the torus geodesics, CORE studio at the Chalmers University of Technology 9, and the Ongreening Pavilion at the University of Bath and Ramboll UK 10. At a larger scale, the Waitomo Glow Worm Caves Visitors Center by the studio Architecture Workshop 11, is also based on a toric surface. All of these examples use actively bent timber strips in lattices following geodesic curves on double curvature surfaces.

Both from a structural and constructive point of view, geodesic curves have very appealing qualities 12. Geometrically, the use of these curves allows the use of perfectly straight strips or laths, which means that construction material can be used very efficiently in the construction of any given form. Structurally, geodesics are curves of minimum torsion, which makes them useful for the purpose of introducing minimum stress in material. This makes the system ideal for the construction of double curvature shells using supple materials with geometries that easily allow bending along the weakest axis and permit reduced torsion.

Taking advantage of the developable surface that we can circumscribe along a geodesic of a surface, or rather its development, there are multiple approaches to the use of this type of curves with the objective of discretizing

1. Geodésica de la esfera, círculo meridiano y tramo de geodésica entre dos puntos A y B. Superficie rectificante de la geodésica sobre la esfera es una sección cilíndrica cuyas generatrices son paralelas entre sí y tangentes a un punto impropio

1. Geodesic of the sphere, meridian circle and geodesic section between two points A and B. The rectifying surface of the geodesic on the sphere is a cylindrical section whose generatrices are tangent to an ideal point

Existen numerosos ejemplos de construcciones que utilizan este sistema de discretización con resultados muy interesantes. Entre otros muchos, podemos destacar a menor escala y en forma de pabellón, los experimentos de Enrique Soriano de CODA LiTA BarcelonaTech 8, el Almond Pavilion y Big O, basado en las geodésicas del toro, CORE studio en la Chalmers University of Technology 9, el Ongreening Pavilion de la University of Bath and Ramboll UK 10 y a escala de edificio el Waitomo Glow Worm Caves Visitors Centre de Architecture Workshop 11, basado también en una superficie tórica. Todos ellos utilizan tiras de madera en flexión activa que siguen redes de curvas geodésicas sobre superficies de doble curvatura.

Tanto desde el punto de vista estructural como constructivo, las curvas geodésicas proporcionan unas cualidades muy interesantes 12. Geométricamente el empleo de estas curvas permite emplear listones o tiras perfectamente rectas, lo que permite un aprovechamiento prácticamente total del material en el proceso de construcción de la forma. Estructuralmente, las geodésicas son curvas de mínima torsión, lo que hace interesante su uso a efectos de introducir mínimas tensiones en el material. Se convierte este sistema en el ideal para la construcción de cáscaras de doble curvatura mediante el uso de materiales elásticos con geometrías que permiten de forma sencilla la flexión en el eje más débil y admiten una torsión reducida.

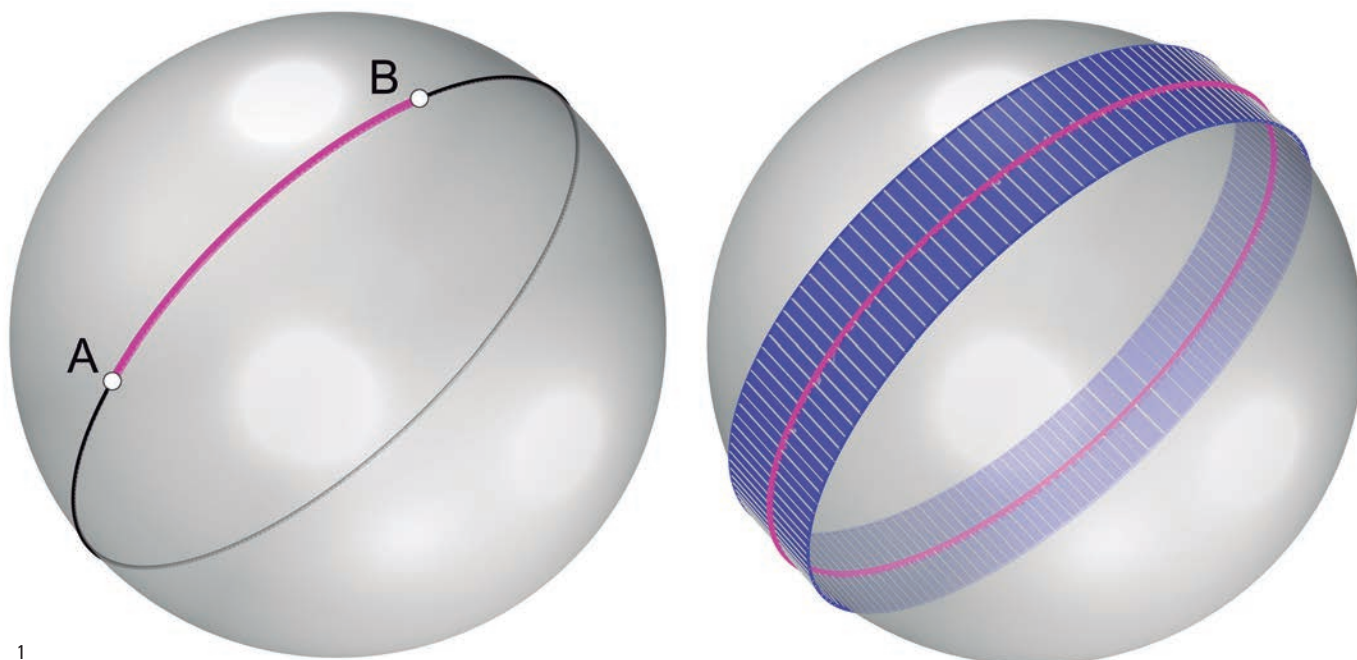
Aprovechando la superficie desarrollable que podemos circunscribir a lo largo de la geodésica sobre la superficie, o más bien su desarrollo, existen múltiples aproximaciones al empleo de este tipo de curvas

con el objetivo de discretizar superficies de doble curvatura 13, desde la búsqueda de secciones de superficie donde las geodésicas presenten una mejor continuidad 14, patrones de curvas geodésicas 15. Sin embargo, el concepto geométrico de tiras desarrollables sobre curvas geodésicas contiene un trasfondo geométrico profundo que no se considera totalmente cuando se emplean este tipo de curvas. Es en muchos casos la capacidad de deformación que ofrece el material o el proceso constructivo el que oculta esta distorsión geométrica. Esta cuestión es la que pretendemos aclarar en los párrafos siguientes.

Fundamentos geométricos

La cuestión geométrica clave para la resolución de las redes de tiras rectificantes siguiendo curvas geodésicas se centra en la definición de las superficies circunscritas a lo largo de una curva sobre la superficie de la cual dicha curva es geodésica. Para ello definiremos en primer lugar el concepto de superficie circunscrita. Esta es la superficie desarrollable que se genera mediante el deslizamiento de un plano tangente a una superficie cualquiera a lo largo de una curva trazada sobre ella. Así, las intersecciones de los sucesivos planos tangentes constituyen las generatrices de la superficie desarrollable circunscrita. En la clasificación de Izquierdo Asensi 16, se define como la superficie generada por el movimiento de un plano tangente a dos directrices, una de ellas la propia superficie y la otra, la curva sobre la superficie.

La curva geodésica se define comúnmente como la distancia más corta entre dos puntos de una superficie. Esta definición es necesari-



1

riamente limitada, basta fijarse en el caso de la esfera. Para esta superficie las curvas geodésicas son los círculos mayores de la esfera, meridianos, y dependiendo de donde situemos los puntos entre los cuales midamos la distancia, podemos ver que no siempre la condición de mínima distancia entre puntos determina la propiedad para la curva. (Fig. 1) Lo que determina la condición de ser geodésica para una curva es su propiedad de ser la curva más recta **17** sobre una superficie, esta condición es determinante y conecta directamente con el concepto de superficie rectificante.

Como es sabido, en cada punto de una curva existe un triedro asociado, denominado Triedro de Frenet, determinado por la recta tangente, la recta normal y la recta binormal a la curva. Cada uno de los planos que mediante intersección determinan estas tres rectas o direcciones, plano osculador, plano normal y plano rectificante, generan en su movimiento espacial a lo largo de la curva tres superficies desarrollables denominadas respectivamente superficie tangencial, superficie polar y superficie rectificante.

La superficie rectificante asociada a una curva, por lo tanto, se

obtiene por el movimiento del plano binormal a lo largo de la curva, es decir, por la envolvente de los planos rectificantes a lo largo de todos los puntos de la curva. La aproximación algorítmica al trazado de superficies rectificantes es discutida por Wallner **14** proponiéndose diferentes sistemas, uno de los cuales, el denominado “método de la binormal” se constituye en uno de los más sencillos de trazado, pero como el mismo estudio admite, no es un método exacto y genera una superficie no reglada desarrollable sino alabeada. Debido a que la superficie se genera por el movimiento de una recta y no por la intersección de planos consecutivos.

En la mayoría de los ejemplos anteriormente citados, se describe cómo se recurre a la isometría de la geodésica en el trazado de su desarrollo como recta, para la localización de los puntos de unión de las tiras. Dando por hecho que la desarrollable rectificante es una tira perfectamente rectangular que puede servir de patrón a la pieza longitudinal empleada en la discretización de la superficie, como en la práctica sucede a costa de una imprecisión geométrica en ciertos casos.

double curvature surfaces **13**, from the search for surface sections where the geodesics exhibit better continuity **14**, patterns of geodesic curves **15**. However, the geometric concept of developable strips along geodesic curves contains a deep geometric basis that is not fully taken into account when employing this type of curve. In many cases, it is actually the capacity of construction materials or construction process to accommodate a degree of deformation that hides this geometrical distortion. This is the issue that we intend to clarify in the following paragraphs.

Geometric fundamentals

The key geometrical question for the resolution of geodesic strip lattices centers on the definition of the circumscribed surfaces along a curve on the surface of which the curve is geodesic. To do this, we must first define the concept of a circumscribed surface. This is the developable surface generated by sliding a plane tangent to any surface along a curve plotted on it. Thus, the intersections of the successive tangent planes constitute the generatrices of the circumscribed developable surface. In the classification by Izquierdo Asensi **16**, a circumscribed surface is defined as the surface generated by the movement of a plane tangent to two guidelines, one of them the surface itself and the other, the curve on the surface.

The geodesic curve is commonly defined as the shortest distance between two points on a surface. This definition is necessarily limited, as becomes clear simply by looking



at the case of the sphere. For this surface, the geodesic curves are the meridians, the largest circles around the sphere, and depending on where we place the points between which we measure the distance, we can see that the condition of minimum distance between points does not always determine the property for the curve (Fig. 1). What determines the condition of being a geodesic for a curve is the property of being the straightest curve **17** on a surface. This condition is determinant and connects directly with the concept of a rectifying surface.

As is known, at each point of a curve there is an associated trihedron, called the Frenet Trihedron, determined by the tangent line, the normal line and the line binormal to the curve. Each of the planes which, by intersection, determine these three straight lines or directions, osculating plane, normal plane and rectifying plane, generate three developable surfaces called respectively tangent surface, polar surface and rectifying surface in their spatial movement along the curve.

The rectifying surface associated with a curve, therefore, is obtained by the movement of the binormal plane along the curve, that is, by the envelope of the rectifying planes along all the points of the curve. The algorithmic approach to the plotting of rectifying surfaces is discussed by Wallner et. al. **14**, who propose different systems, one of which, the so-called "binormal method" is one of the simplest plotting methods, but as acknowledged by the authors themselves, it is not an exact method and generates a surface that is not ruled developable but rather warped.

Most of the above examples describe the way in which the isometry of the geodesic is used to plot its development as a straight line, to define the location of the junction points of strips, taking as given that the developable rectifier is a perfectly rectangular strip that can serve as a pattern for the longitudinal piece used in the discretization of the surface, as occurs in practice.

The rectifying surface has the property of transforming this curve into a straight line in the development of this surface on a plane. Any curve has an associated rectifier and this can be developed as a straight strip, or in other words, the curve will be a straight line on the development of its rectifying surface.

La superficie rectificante tiene la propiedad de transformar dicha curva en una recta en el desarrollo de esta superficie sobre un plano. Cualquier curva tiene una rectificante asociada y esta puede ser desarrollada como una tira recta, o lo que es lo mismo, la curva será una recta sobre el desarrollo de la superficie rectificante.

Sobre cualquier punto de una superficie podemos trazar un plano tangente y dos planos normales principales, que determinan el denominado Triedro de Darboux. Solo tiene sentido hablar de una curva geodésica trazada sobre una superficie. Para cualquier punto de la curva geodésica sobre una superficie, los triedros de Frenet de la curva y el Triedro de Darboux de la superficie coinciden (Fig. 2). Esto da lugar a una serie de propiedades importantes de la curva geodésica sobre una superficie.

Una de estas propiedades tiene que ver con la recta normal a la superficie, que para la curva geodésica coincide con la normal a la curva. Esta propiedad permite conectar mediante la misma dirección normal a la superficie, todas las curvas geodésicas a la superficie que pasen por ese punto. Esta propiedad resulta de suma utilidad en la generación de los puntos de conexión de las tiras circunscritas a la superficie a lo largo de la geodésica. Como además el desfase de una superficie desarrollable en la dirección normal a la superficie sigue siendo una superficie desarrollable, es posible la determinación de capas múltiples de tiras desarrollables geodésicas en la discretización de la superficie.

La segunda propiedad tiene que ver con la coincidencia de los planos tangente a la superficie y recti-

2. Izquierda. Sobre una curva geodésica el triedro de Frenet y Darboux son coincidentes, lo son también la normal (rojo) tangente (azul) y binormal (verde) Derecha. Para una curva cualquiera, no geodésica, estos triedros no coinciden, compartiendo tangente, no así normal ni binormal, que para la superficie se denominan vector geodésico. La normal y binormal a la curva formarán un ángulo con los correspondientes vectores normal y geodésico a la superficie alrededor del vector tangente compartido

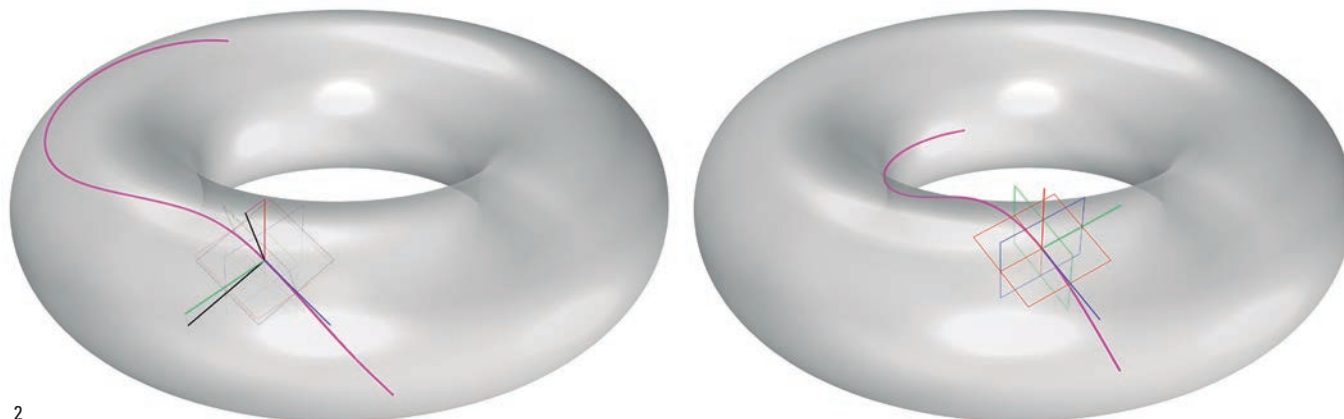
2. Left. On a geodesic curve the Frenet and Darboux trihedron are coincident, as are the normal (red) tangent (blue) and binormal (green) Right. For any non-geodesic curve, these trihedrons do not coincide, sharing a tangent, neither normal nor binormal, which for the surface is called a geodesic vector. The normal and binormal to the curve will make an angle with the corresponding normal and geodesic vectors to the surface about the shared tangent vector

ficante a la curva. Para la geodésica, el plano rectificante no es otro que el tangente a la superficie, por tanto, podemos afirmar que la circunscrita a lo largo de la geodésica, la convierte en recta para la superficie rectificante desarrollada. Ahora bien, la geometría de la superficie desarrollable no es tan rectangular ni aprovechable como patrón constructivo como de forma común se establece en la generación de las tiras geodésicas.

Validez de la superficie circunscrita como tira desarrollable

Volviendo a la esfera, la superficie circunscrita a lo largo de la curva geodésica o meridiano será un cilindro y este se desarrollará como una tira absolutamente recta que contendrá en su desarrollo, el de la curva geodésica a la esfera, como una recta. Las generatrices del cilindro circunscrito son paralelas entre sí y perpendiculares a la curva geodésica, tanto en la posición espacial curva como en su desarrollo plano.

Esta superficie desarrollable, como cualquier otra, tendrá una geometría condicionada por la po-



2

sición de su arista de retroceso. La arista de retroceso es la curva a la que son tangentes todas las generatrices de la superficie desarrollable y que divide la superficie desarrollable en dos hojas. Para el cilindro, de forma particular, la arista de retroceso es un punto impropio. Esta tangencia se mantiene tanto en la posición espacial como en el desarrollo. La proximidad de una curva contenida en una superficie desarrollable o, en nuestro caso, la curva en base a la cual estamos trazando la superficie desarrollable rectificante, va a condicionar la geometría de la superficie y muy especialmente su constructibilidad.

Esta limitación ha sido expuesta por Glaeser y Gruber en el estudio de superficies construidas con tiras de papel, partiendo desde la tira plana rectangular hasta sus infinitas posiciones espaciales. Concluyendo que las tiras no deben contener puntos de la arista de retroceso o “borde de regresión” de otra forma la tira tendrá una auto-intersección 18.

Precisamente esta es la cuestión general que como en cualquier superficie desarrollable aparece en particular sobre las superficies circunscritas a lo largo de curvas geodésicas.

Podemos verlo, por ejemplo, en el toro, superficie donde es fácil apreciar una zona de curvatura positiva o sinclástica y otra de curvatura negativa o anticlástica. Si trazamos una curva geodésica entre

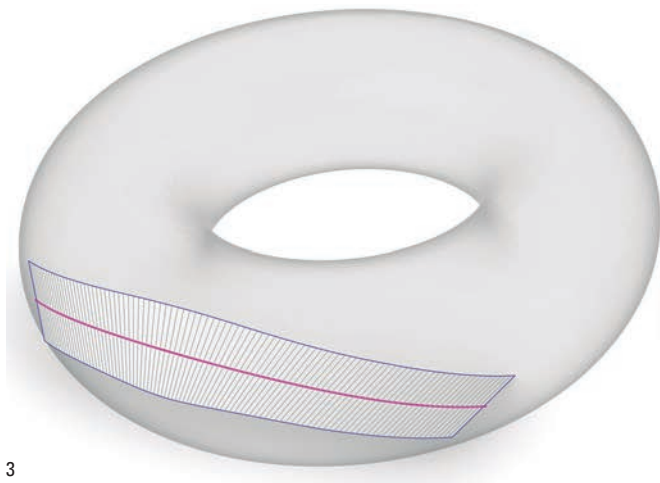
dos puntos de esta superficie manteniéndose ambos en la parte sinclástica de la superficie, podemos obtener una superficie rectificante circunscrita que en su desarrollo se presenta como una tira perfectamente recta (Figs. 3 y 5) y que, a pesar de poder presentar unos bordes no paralelos al desarrollo recto de la curva geodésica, puede ser empleada como base para la obtención de una tira absolutamente rectangular, aunque de una anchura de dimensión limitada.

Sin embargo, si la curva geodésica se traza entre dos puntos localizados en zonas de curvatura con signo opuesto de la superficie, atravesando un punto de inflexión, podemos observar cómo la desarrollable, que efectivamente podemos trazar, no resulta tan aprovechable al efecto que se persigue, precisamente por la aparición de la arista de retroceso próxima o en el límite tangente a la curva geodésica. (Figs. 4 y 5) Así, podemos afirmar que efectivamente existe una superficie desarrollable rectificante que sigue la curva geodésica, pero esta superficie no nos sirve desde el punto de vista geométrico como base para la obtención de una tira rectangular circunscrita a la superficie siempre y de manera absoluta. Las condiciones para el trazado de estas tiras se reducen a condiciones muy concretas, asociadas a la localización de los puntos de inflexión y

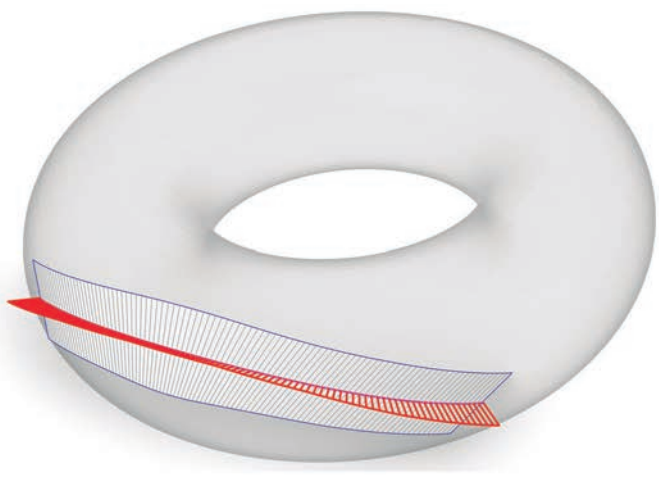
On any point of a surface we can draw a tangent plane and two principal normal planes, which determine the Darboux Trihedron (Fig. 2). It only makes sense to speak of a geodesic curve on a surface. For any point on the geodesic curve on a surface, the Frenet Trihedron of the curve and the Darboux Trihedron of the surface coincide. This gives rise to a number of important properties of the geodesic curve on a surface. One of these properties has to do with the line normal to the surface, which for the geodesic curve coincides with the normal to the curve. This property means that all the geodesics to the surface that pass through a given point share the normal direction to the surface at this point. This property is extremely useful when generating the connection points of strips circumscribed to the surface along a geodesic. Since the offset of a developable surface in the direction normal to the surface is also a developable surface, the determination of multiple layers of geodesic developable strips in the discretization of the surface is possible. The second property has to do with the tangent planes to the surface coinciding with the rectifying planes to the curve. For a geodesic, the rectifying plane is precisely the tangent to the surface; therefore, we can affirm that the circumscribed surface along the geodesic makes it a straight line for the rectifying developed surface. This said, the geometry of developable surfaces is not as rectangular or as usable as a constructive pattern as is generally accepted for the generation of geodesic strips.

The validity of circumscribed surfaces as developable strips

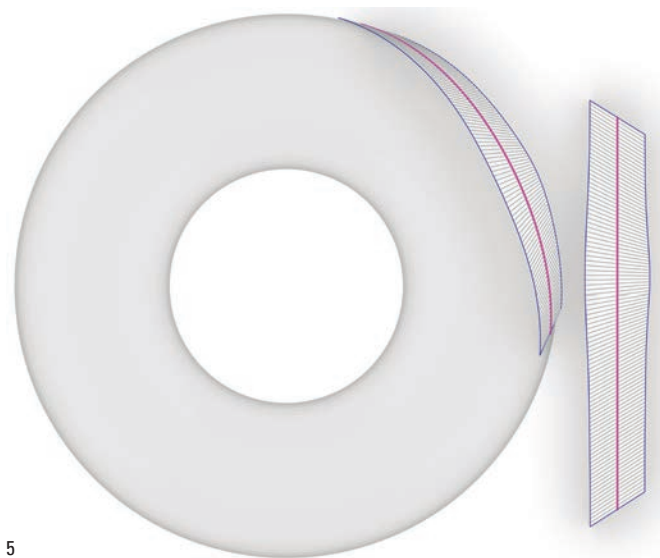
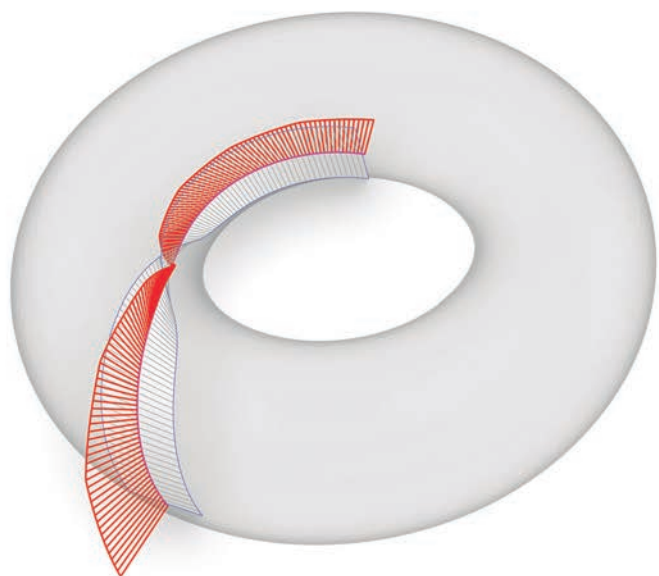
Returning to the sphere, the circumscribed surface along the geodesic curve or meridian is a cylinder and this develops as a perfectly



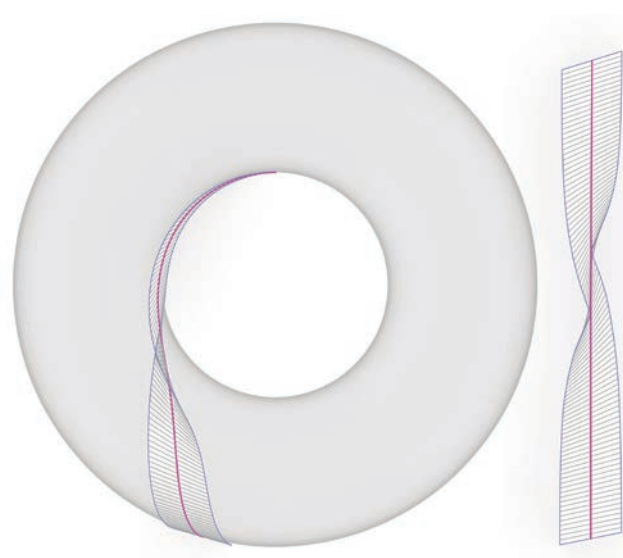
3



4



5





3. Geodésica sobre la superficie del toro (magenta) y superficie desarrollable circunscrita al toro. La curvatura de la curva como se puede observar a la derecha no cambia, por lo que dentro de esta tira, no aparece la arista de retroceso

4. Geodésica sobre la superficie del toro (magenta) y superficie desarrollable circunscrita al toro. En este caso, presenta un punto de inflexión, lo que conlleva la aparición de la arista de retroceso de la superficie rectificante

5. Desarrollo de la rectificante en los dos casos anteriores. Izquierda, la geodésica se desarrolla recta y en la tira se puede inscribir un rectángulo que definiría la tira circunscrita desarrollable, a pesar de que sus generatrices no sean paralelas. Derecha, del mismo modo la geodésica se desarrolla recta, pero la desarrollable no permite la obtención de la tira rectangular. La arista de retroceso se hace tangente a la curva provocando la torsión de la superficie desarrollable en el punto de inflexión de la curva

3. Geodesic on the surface of the torus (magenta) and developable surface circumscribed to the torus. The curvature of the curve as can be seen on the right does not change, so the receding edge does not appear

4. Geodesic on the surface of the torus (magenta) and developable surface circumscribed to the torus. In this case, it has an inflection point, which leads to the appearance of the rectifying surface receding edge

5. Development of the rectifier in the two previous cases. Left, the geodesic develops as a straight line and a rectangle can be inscribed on the strip, which would define the circumscribed developable strip, even though its generatrices are not parallel. Right, in the same way the geodesic develops as a straight line, but the developable does not allow for a rectangular strip to be obtained. The receding edge becomes tangent to the curve causing the torsion at the inflection point of the curve

la dirección de la tangente de la geodésica en dichos puntos y han sido descritas por Martín-Pastor y González-Quintal 19.

Aplicación en modelos físicos

En la construcción de modelos físicos a partir de superficies discretizadas con tiras circunscritas (Figs. 6, 7 y 8) se ha podido comprobar el rango de aplicación de las curvas

geodésicas manteniendo la premisa de que las tiras rectangulares sean rectas en su desarrollo, es decir que la desarrollable exacta sea aprovechable para inscribir la tira en la anchura deseada. Se han realizado diferentes experimentos donde las geodésicas empleadas se han mantenido dentro del rango de la superficie donde la arista de retroceso no interfiere con la curva, como se ha mostrado anteriormente, esto es válido mientras la curva, en este caso la geodésica, no presente puntos de inflexión.

Por supuesto, esto lleva a tener que seleccionar el tipo de curvas geodésicas que se utilicen como base, limitando sus cambios de inflexión. Podremos discretizar siguiendo estrictamente el criterio de aprovechamiento de la desarrollable sin ningún tipo de distorsión mientras limitemos los puntos de paso de las geodésicas y la localización de estos según la curvatura de la superficie base. En todos los casos que se presentan a continuación, el trazado de la superficie rectificante se ha realizado siguiendo el método geométrico, es decir, mediante la intersección de los sucesivos planos tangentes a la superficie o binormales a la curva, lo que arroja un resultado geométricamente exacto.

Conclusion

En la suposición de la existencia de una superficie desarrollada como recta se fundamenta un método muy versátil de optimización en la construcción de superficies de doble curvatura. Se demuestra más arriba, que la superficie desarrollable rectificante que sigue una curva geodésica, no es siempre apta para ser utilizada como patrón en la construcción de ese tipo de tiras.

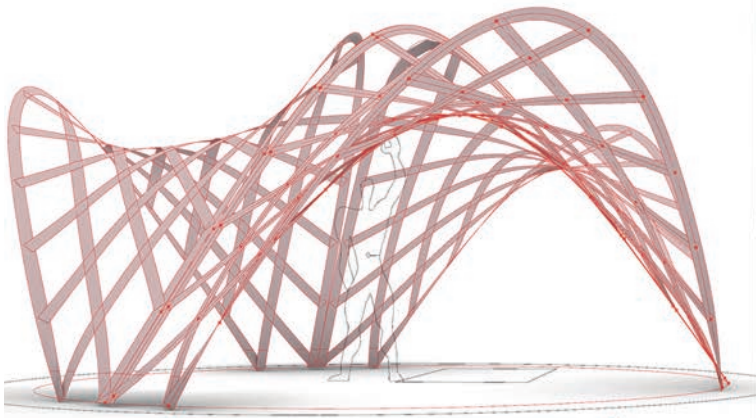
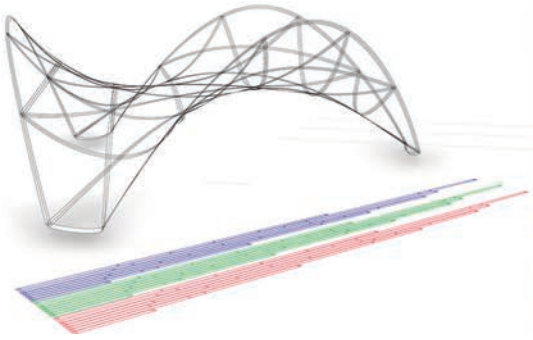
straight strip containing in its development the geodesic curve's development as a straight line. The generatrices of the circumscribed cylinder are parallel both in the curved spatial position and in their flat development.

This developable surface, like any other, has a geometry conditioned by the position of its receding edge. The receding edge is the curve to which all the generatrices of the developable surface are tangent and which divides the developable surface into two sheets. For the cylinder, in particular, the receding edge is an ideal point. This tangency is maintained both in spatial position and development. The proximity of a curve contained in a developable surface or, in our case, the curve on the basis of which we plot the rectifying developable surface, condition the geometry of the surface and especially its constructability.

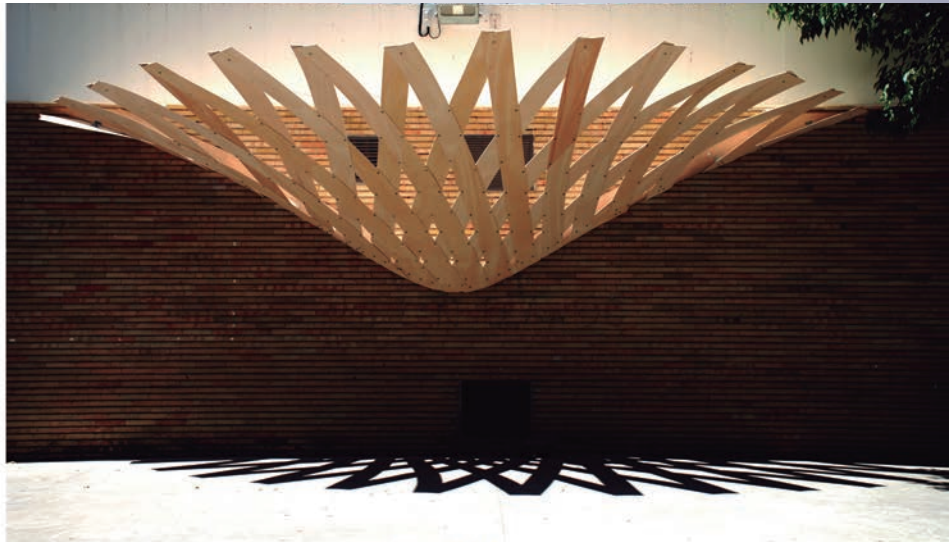
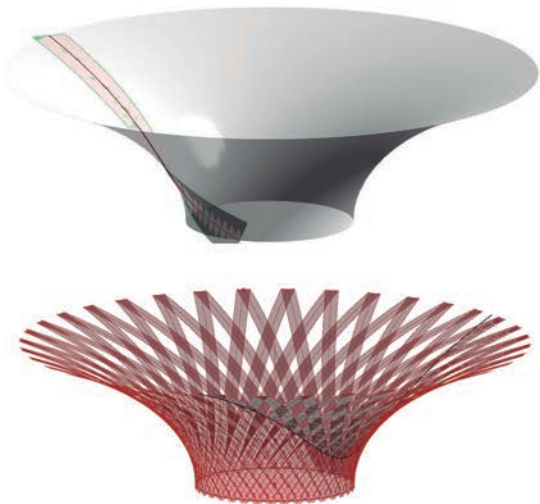
This limitation has been exposed by Glaeser and Gruber in their study of surfaces constructed with paper strips, starting from a flat rectangular strip through infinite possible spatial positions. They conclude that the strips must not contain points of the receding edge or "regression edge" otherwise the strip will have a self-intersection 18.

This is precisely the question that appears in surfaces circumscribed along geodesic curves, as well as in any developable surface. We can see this, for example, in a torus, a surface where it is possible to differentiate one zone of positive or synclastic curvature and another of negative or anticlastic curvature. If we plot a geodesic curve between two points on this surface, keeping both in the synclastic part of the surface, we can obtain a circumscribed rectifying surface that, in its development, appears as a perfectly straight strip (Figs. 3 and 5) and that, in spite of possible edges not parallel to the straight development of a geodesic curve, can be used as the basis to obtain a perfectly rectangular strip, although of limited width.

However, if a geodesic curve is plotted between two points located in areas of the surface whose curvature is positive in one case and negative in the other, we can observe how the developable surface, which we can actually plot, is not as viable



6



7



6. Diferentes aproximaciones a la discretización mediante tiras geodésicas de superficies de curvatura negativa
 7. Discretización de superficies mediante redes de tiras rectificantes. La situación de la curva permite la generación de la tira rectificante de cualquier anchura

6. Different approaches to discretization using geodesic strips
 7. Surface discretization by means of rectifying strip lattices. The location of the curves allows the generation of a rectifying strip of any width

Solamente en ciertos casos, cuando la geodésica carece de puntos de inflexión, esta tira puede recoger una sección rectangular y no de cualquier anchura, dependiendo de la localización de la arista de retroceso de la superficie desarrollable.

La distorsión conceptual detectada, sostenemos que comúnmente se debe a la falta de un trazado correcto de la superficie que adapta la curva, que debiera seguir de forma exhaustiva las condiciones geométricas que generan las superficies desarrollables y en concreto las superficies rectificantes.

Podemos decir que la carencia de un trazado riguroso de la superficie rectificante sea el motivo por el cual la desviación con respecto a la realidad geométrica aparezca. Así, podemos reivindicar la necesidad del control geométrico de la forma proyectada, aun asumiendo que el proceso de ejecución y las características de los materiales sean posteriormente capaces de asumir ciertas distorsiones entre el elemento diseñado y la realidad construida. ■

Referencias

- 1/ MONGE, G., 1994. *Application de l'analyse à la géométrie*.
- 2/ GONZÁLEZ, Paco. Adaptación de superficies de doble curvatura mediante superficies desarrollables. EGA Expresión Gráfica Arquitectónica, [S.l.], v. 21, n. 27, p. 210-219, mayo 2016. ISSN 2254-6103. Disponible en: <<https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/4741>>. Fecha de acceso: 01 ene. 2022 doi:<https://doi.org/10.4995/ega.2016.4741>.
- 3/ CASADO REZOLA, Amaia. Representación y confección de arquitecturas entretejidas. Aplicación en la enseñanza de geometría. EGA Expresión Gráfica Arquitectónica, [S.l.], v. 26, n. 43, p. 194-207, nov. 2021. ISSN 2254-6103. Disponible en: <<https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/15372>>. Fecha de acceso: 01 ene. 2022 doi:<https://doi.org/10.4995/ega.2021.15372>.
- 4/ ADRIAENSSENS, S., 2014. *Shell structures for architecture: form finding and optimization*. London: Routledge.
- 5/ JOHNSON, S. (2000) 'Gridshells and the construction process', available at: <http://www.wealldown.co.uk/explore/buildings/further-reading/gridshells-construction-process/building=301> (accessed 06 Jan 2022).
- 6/ CHILTON JOHN, 2016. *Timber gridshells: architecture, structure and craft*. New York: Routledge.
- 7/ WEINAND, Y. y PIRAZZI, C., 2006. Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006, 1.
- 8/ SORIANO, E., 2017. Low-Tech Geodesic Gridshell: Almond Pavilion. *archidoct*, 4, pp. 29.
- 9/ ADIELS, E., BENCINI, N., BRANDT-OLSEN, C., FISHER, A., NÄSLUND, I., OTANI, R., POULSEN, E., SAFARI, P. y WILLIAMS, C., 2018. Design, fabrication and assembly of a geodesic gridshell in a student workshop.
- 10/ HARDING, J., PEARSON, W., LEWIS, H. y MELVILLE, S., 2015. The Ongreening Pavilion. pp. 295-308.
- 11/ <https://architectureworkshop.co.nz/projects/waitomo-caves-visitors-centre/>
- 12/ DEREGIBUS, C. y SASSONE, M., 2008. Mathematical and structural properties of geodesic curves: An application on a free form gridshell. 49, pp. 157-166.
- 13/ SCHOLZ, F. y MAEKAWA, T., 2021. Accurate High-Order Derivatives of Geodesic Paths on Smooth Surfaces. *Computer-Aided Design*, 140, pp. 103082.
- 14/ Wallner, J, Schiftner, A, Kilian, M, Flöry, S, Höbinger, M, Deng, B, Huang, Q y Pottmann, H 2010, Tiling freeform shapes with straight panels: Algorithmic methods. in *Advances in Architectural Geometry 2010*. 1 edn, Springer, pp. 73-86.
- 15/ POTTMANN, H., HUANG, Q., DENG, B., SCHIFTNER, A., GUIBAS, L. and WALLNER, J., 2010. Geodesic Patterns. *ACM Trans. Graph.*, 29.
- 16/ IZQUIERDO ASENSI, F., 1996. Geometría descriptiva superior y aplicada. 4a corr y amp edn. Paraninfo.
- 17/ HILBERT D., COHN-VOSSEN S., *Anschauliche geometrie*, Julius Springer, Berlin, 1932
- 18/ GLAESER GEORG., 2012. *Geometry and its applications in arts, nature and technology*. New York: Springer.
- 19/ MARTÍN-PASTOR, A. y GONZÁLEZ-QUINTIAL, F., 2021. Surface Discretisation with Rectifying Strips on Geodesics. *Nexus Network Journal*, 23(3), pp. 565-582.

for the intended purpose, precisely because of the appearance of a receding edge at or near the tangent limit to the geodesic curve (Figs. 4 and 5). Thus, we can say that there is indeed a rectifying developable surface that follows the geodesic curve, but this surface is not useful from a geometrical point of view as the basis for obtaining a rectangular strip circumscribed to the surface, at least not always and not perfectly. The conditions for the plotting of these strips are reduced to very concrete conditions associated with the location of the inflection points and the direction of the tangent of the geodesic at those points. These have been described by Martín-Pastor y González-Quintial 19.

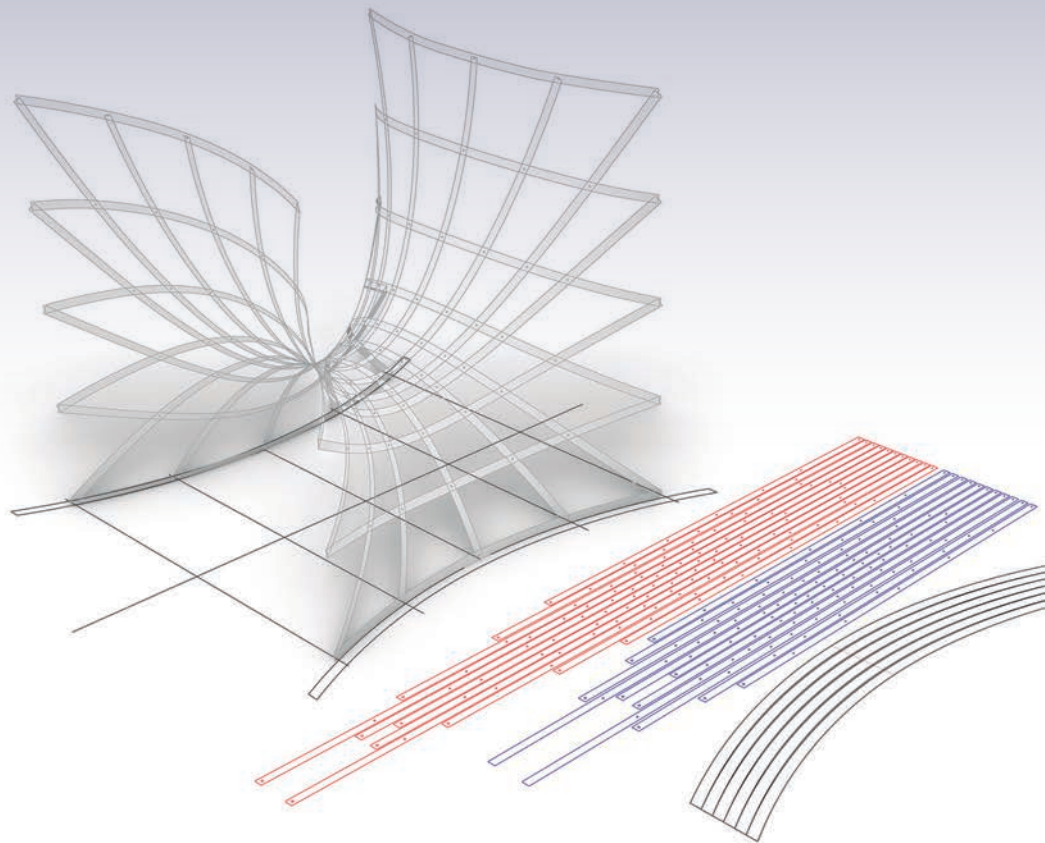
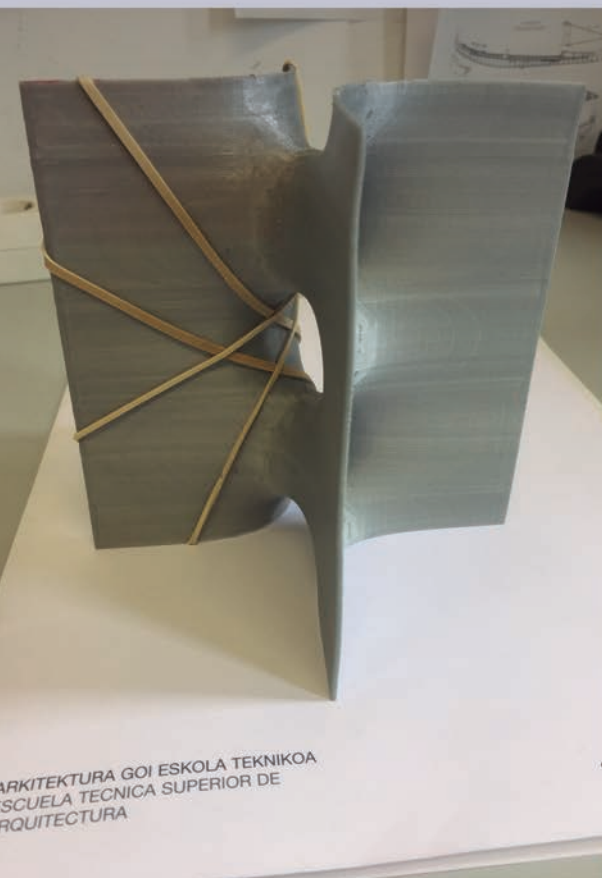
Application in physical models

In the construction of physical models using circumscribed strips from discretized surfaces (Figs. 6, 7 and 8) it was possible to verify the range of application of geodesic curves while maintaining the premise that the rectangular strips are straight in their development, that is to say that the exact developable is usable to inscribe a strip of the desired width. Different experiments were carried out where the geodesics used were kept within the surface range where the receding edge did not interfere with the curve. As shown above, this is valid as long as the curve, in this case the geodesic, does not have inflection points.

Of course, this means having to select the type of geodesic curves to be used as a basis, limiting changes of inflection. We can discretize strictly following the criterion of exploiting the developable without any distortion as long as we limit the passing points of the geodesic curves and their location according to the curvature of the base surface. In all the cases presented below, the plotting of the rectifying surface was carried out following a geometrical method, i.e. by intersecting the successive tangent planes to the surface or binormals to the curve, which yields exact results.

Conclusion

One very versatile method for optimizing the construction of double curvature surfaces is based on the assumption of the existence of straight developed surfaces. As has been



8

shown above, the rectifying developable surface following a geodesic curve is not always suitable for use as a pattern in the construction of this type of strip. Only in certain cases, when the geodesic does not contain inflection points, do these strips present a rectangular section, and even in these cases their width is limited, depending on the location of the receding edge of the developable surface.

We argue that the conceptual distortion identified in this paper is often due to the lack of a correct plotting of the surface that adapts the curve, which should follow the geometric conditions that generate the developable surfaces exhaustively, the rectifying surfaces in particular.

We can say that the deviation from geometric reality appears to be due to the absence of a rigorous plotting of the rectifying surface. Thus, we can argue for a need for geometric control of projected forms, even while accepting that the processes of physical execution and the characteristics of the materials used are ultimately able to absorb a certain degree of deformation between the designed element and the built reality. ■

References

- 1 / MONGE, G., 1994. *Application de l'analyse à la géométrie*.
- 2 / GONZÁLEZ, Paco. Adaptación de superficies de doble curvatura mediante superficies desarrollables. *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, [S.l.], v. 21, n. 27, p. 210-219, mayo 2016. ISSN 2254-6103. Disponible en: <<https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/4741>>. Fecha de acceso: 01 ene. 2022 doi:<https://doi.org/10.4995/ega.2016.4741>.
- 3 / CASADO REZOLA, Amaia. Representación y confección de arquitecturas entretejidas. Aplicación en la enseñanza de geometría. *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, [S.l.], v. 26, n. 43, p. 194-207, nov. 2021. ISSN 2254-6103. Disponible en: <<https://polipapers.upv.es/index.php/EGA/article/view/15372>>. Fecha de acceso: 01 ene. 2022 doi:<https://doi.org/10.4995/ega.2021.15372>.
- 4 / ADRIAENSENS, S., 2014. London: Routledge.
- 5 / JOHNSON, S. (2000) 'Gridshells and the construction process', available at: <http://www.wealddown.co.uk/explore/buildings/further-reading/gridshells-construction-process/building=301> (accessed 06 Jan 2022).
- 6 / CHILTON JOHN, 2016. *Timber gridshells: architecture, structure and craft*. New York: Routledge.
- 7 / WEINAND, Y. and PIRAZZI, C., 2006. Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006, 1.
- 8 / SORIANO, E., 2017. Low-Tech Geodesic Gridshell: Almond Pavilion. *archidoct*, 4, pp. 29.
- 9 / ADIELS, E., BENCINI, N., BRANDT-OLSEN, C., FISHER, A., NÄSLUND, I., OTANI, R., POULSEN, E., SAFARI, P. and WILLIAMS, C., 2018. Design, fabrication and assembly of a geodesic gridshell in a student workshop.
- 10 / HARDING, J., PEARSON, W., LEWIS, H. and MELVILLE, S., 2015. The Ongreening Pavilion. pp. 295-308.

8. Aproximación física al modelo de tiras geodésicas. Trazado del desarrollo de las tiras rectificantes, notese las tiras rectangulares rectas desarrolladas en rojo y azul. Montaje y modelo final

8. Physical example of the geodesic strips model. The development of the rectifying strips was plotted. Note the straight rectangular strips developed in red and blue. Assembly and final model

- 11 / <https://architectureworkshop.co.nz/projects/waitomo-caves-visitors-centre/>
- 12 / DEREGIBUS, C. and SASSONE, M., 2008. Mathematical and structural properties of geodesic curves: An application on a free form gridshell. 49, pp. 157-166.
- 13 / SCHOLZ, F. and MAEKAWA, T., 2021. Accurate High-Order Derivatives of Geodesic Paths on Smooth Surfaces. *Computer-Aided Design*, 140, pp. 103082.
- 14 / WALLNER, J., SCHIFTNER, A., KILIAN, M., FLÖRY, S., HÖBINGER, M., DENG, B., HUANG, Q. & POTTMANN, H 2010. Tiling freeform shapes with straight panels: Algorithmic methods. in *Advances in Architectural Geometry 2010*. 1 edn, Springer, pp. 73-86.
- 15 / POTTMANN, H., HUANG, Q., DENG, B., SCHIFTNER, A., GUIBAS, L. and WALLNER, J., 2010. Geodesic Patterns. *ACM Trans.Graph.*, 29.
- 16 / IZQUIERDO ASENSI, F., 1996. *Geometría descriptiva superior y aplicada*. 4a corr y amp edn. Paraninfo.
- 17 / HILBERT D., COHN-VOSSEN S., *Anschauliche geometrie*, Julius Springer, Berlin, 1932
- 18 / GLAESER GEORG., 2012. *Geometry and its applications in arts, nature and technology*. New York: Springer.
- 19 / MARTÍN-PASTOR, A. and GONZÁLEZ-QUINTAL, F., 2021. Surface Discretisation with Rectifying Strips on Geodesics. *Nexus Network Journal*, 23(3), pp. 565-582.

