



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Métodos iterativos para la resolución de problemas aplicados transformados a sistemas no lineales

Marzo de 2023

Autor: Fabricio Alfredo Cevallos Alarcón
Directores: Dra. Eulalia Martínez Molada
Dr. José Luis Hueso Pagoaga

Eulalia Martínez Molada, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València y José Luis Hueso Pagoaga, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València,

HACEN CONSTAR:

Que D. Fabricio Alfredo Cevallos Alarcón, Licenciado en Ciencias de la Educación, especialidad Físico-Matemático, ha realizado, bajo nuestra dirección, el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al título de Doctor en Matemáticas por la Universitat Politècnica de València.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universitat Politècnica de València para que cumpla los trámites correspondientes.

Para que así conste a efectos legales, firmamos este documento en València, a Marzo de 2023.

Fdo. Eulalia Martínez Molada

Fdo. José Luis Hueso Pagoaga

Agradecimientos

Haber concluido mis estudios de doctorado ha sido gracias:

A la Fundación Carolina, por la concesión de la beca de doctorado que me ha dado esta gran oportunidad de crecer en lo académico, lo personal y lo cultural.

A la Universitat Politècnica de València, por permitirme adquirir nuevos conocimientos y con esto, multiplicarlos en el medio académico en que me desenvuelvo.

A la Universidad laica “Eloy Alfaro” de Manabí, por brindarnos la oportunidad de salir a buscar mejores conocimientos y tecnología que engrandecerán la academia en el país.

A mis directores de Tesis: Eulalia Martínez y José Luis Hueso, por guiarme constantemente en mi Tesis Doctoral y por brindarme sus conocimientos a lo largo de mi investigación. El gran interés que mostraron en las correcciones y sugerencias han hecho que la tesis llegue a buen término. Gracias, Eulalia, por guiarme en el camino de la investigación científica donde puse mi granito de arena y gracias por preocuparte por que llegue a finalizar este trabajo doctoral.

A Juan Ramón y Alicia por sus consejos y gran compañía en los cafés, donde me enseñaron a jugar con las variables que tengo.

A mis hermanos Daniel y Karina, por estar siempre pendiente de mi, a la distancia.

A mi esposa, Alexa, por su apoyo incondicional y la confianza que me ha brindado en todo esta etapa de mi vida.

A mis pequeños, Fabricio y Ramón, mi razón de vivir, por ser el motor que me anima a seguir hacia adelante.

A mis grandes amigos, Patricio y Aracelly, por su gran apoyo material y emocional, por guiarme en este gran país y por compartir hermosos momentos.

Valencia, de 2022.

Dedicatoria

A Lucía, mi madre, con mucho amor.

Resumen

La resolución de ecuaciones y sistemas no lineales es un tema de gran interés teórico-práctico, pues muchos modelos matemáticos de la ciencia o de la industria se expresan mediante sistemas no lineales o ecuaciones diferenciales o integrales que, mediante técnicas de discretización, dan lugar a dichos sistemas.

Dado que generalmente es difícil, si no imposible, resolver analíticamente las ecuaciones no lineales, la herramienta más extendida son los métodos iterativos, que tratan de obtener aproximaciones cada vez más precisas de las soluciones partiendo de determinadas estimaciones iniciales.

Existe una variada literatura sobre los métodos iterativos para resolver ecuaciones y sistemas, que abarca conceptos como, eficiencia, optimalidad, estabilidad, entre otros importantes temas.

En este estudio obtenemos nuevos métodos iterativos que mejoran algunos conocidos en términos de orden o eficiencia, es decir que obtienen mejores aproximaciones con menor coste computacional.

La convergencia de los métodos iterativos suele estudiarse desde el punto de vista local. Esto significa que se obtienen resultados de convergencia imponiendo condiciones a la ecuación en un entorno de la solución. Obviamente, estos resultados no son aplicables si no la conocemos. Otro punto de vista, que abordamos en este trabajo, es el estudio semilocal que, imponiendo condiciones en un entorno de la estimación inicial, proporciona un entorno de dicho punto que contiene la solución y garantiza la convergencia del método iterativo a la misma. Finalmente, desde un punto de vista global, estudiamos el comportamiento de los métodos iterativos en función de la estimación inicial, mediante el estudio de la dinámica de las funciones racionales asociadas a estos métodos.

La presente memoria recoge los resultados de varios artículos de nuestra autoría, [1, 2, 3, 4], en los que se tratan distintos aspectos de la materia, como son, las peculiaridades de la convergencia

en el caso de raíces múltiples, la posibilidad de aumentar el orden de un método óptimo de orden cuatro a orden ocho, manteniendo la optimalidad en el caso de raíces múltiples, el estudio de la convergencia semilocal en un método de alto orden, así como el comportamiento dinámico de algunos métodos iterativos.

Resum

La resolució d'equacions i sistemes no lineals és un tema de gran interès teoricopràctic, perquè molts models matemàtics de la ciència o de la indústria s'expressen mitjançant sistemes no lineals o equacions diferencials o integrals que, mitjançant tècniques de discretització, donen lloc a aquests sistemes.

Atés que generalment és difícil, si no impossible, resoldre analíticament les equacions no lineals, l'eina més estesa són els mètodes iteratius, que tracten d'obtenir aproximacions cada vegada més precises de les solucions partint de determinades estimacions inicials.

Existeix una variada literatura sobre els mètodes iteratius per a resoldre equacions i sistemes, que abasta conceptes com ordre d'aproximació, eficiència, optimalitat, estabilitat, entre altres importants temes.

En aquest estudi obtenim nous mètodes iteratius que milloren alguns coneguts en termes d'ordre o eficiència, és a dir que obtenen millors aproximacions amb menor cost computacional.

La convergència dels mètodes iteratius sol estudiar-se des del punt de vista local. Això significa que s'obtenen resultats de convergència imposant condicions a l'equació en un entorn de la solució. Òbviament, aquests resultats no són aplicables si no la coneixem. Un altre punt de vista, que abordem en aquest treball, és l'estudi semilocal que, imposant condicions en un entorn de l'estimació inicial, proporciona un entorn d'aquest punt que conté la solució i garanteix la convergència del mètode iteratiu a aquesta. Finalment, des d'un punt de vista global, estudiem el comportament dels mètodes iteratius en funció de l'estimació inicial, mitjançant l'estudi de la dinàmica de les funcions racionals associades a aquests mètodes.

La present memòria recull els resultats de diversos articles de la nostra autoria, [1, 2, 3, 4], en els quals es tracten diferents aspectes de la matèria, com són, les peculiaritats de la convergència en el cas d'arrels múltiples, la possibilitat d'augmentar l'ordre d'un mètode òptim d'ordre quatre a ordre

huit, mantenint l'optimalitat en el cas d'arrels múltiples, l'estudi de la convergència semilocal en un mètode d'alt ordre, així com el comportament dinàmic d'alguns mètodes iteratius.

Abstract

The resolution of nonlinear equations and systems is a subject of great theoretical and practical interest, since many mathematical models in science or industry are expressed through nonlinear systems or differential or integral equations that, by means of discretization techniques, give rise to such systems.

Since it is generally difficult, if not impossible, to solve nonlinear equations analytically, the most widely used tool is iterative methods, which try to obtain increasingly precise approximations of the solutions based on certain initial estimates.

There is a varied literature on iterative methods for solving equations and systems, which covers concepts of order of approximation, efficiency, optimality, stability, among other important topics.

In this study we obtain new iterative methods that improve some known ones in terms of order or efficiency, that is, they obtain better approximations with lower computational cost.

The convergence of iterative methods is usually studied locally. This means that convergence results are obtained by imposing conditions on the equation in a neighbourhood of the solution. Obviously, these results are not applicable if we do not know it. Another point of view, which we address in this work, is the semilocal study that, by imposing conditions in a neighbourhood of the initial estimation, provides an environment of this point that contains the solution and guarantees the convergence of the iterative method to it. Finally, from a global point of view, we study the behaviour of iterative methods as a function of the initial estimation, by studying the dynamics of the rational functions associated with these methods.

This report collects the results of several articles of our authorship, [1, 2, 3, 4], in which different aspects of the matter are dealt with, such as the peculiarities of convergence in the case of multiple roots, the possibility of increasing the order of an optimal method from order four to order eight,

maintaining optimality in the case of multiple roots, the study of semilocal convergence in a high-order method, as well as the dynamic behaviour of some iterative methods.

Índice general

Resumen	VII
Índice general	XV
Lista de figuras	XIX
Índice de figuras	XIX
Lista de tablas	XIX
Índice de tablas	XXI
1 Introducción	1
2 Conceptos previos	5
2.1 Espacio de Banach	5
2.1.1 Espacio vectorial	5
2.1.2 Operadores lineales	6
2.1.3 Espacio Normado	7
2.1.4 Operadores acotados	7

2.1.5	Espacio completo	8
2.1.6	Derivada de Fréchet	9
2.1.7	Aplicaciones contractivas	11
2.2	Métodos iterativos	12
2.2.1	El caso n -dimensional	12
2.2.2	Estimación del error de un método iterativo	14
2.2.3	Orden de convergencia	14
2.2.4	Clasificación de métodos iterativos según sus características principales	15
2.2.5	Índice de eficiencia y optimalidad	21
2.3	Convergencia local y semilocal de un método iterativo	22
2.4	Dinámica de un método iterativo	24
2.4.1	Introducción	24
2.4.2	Conceptos básicos	24
3	Convergencia local y estudio de dinámica: método iterativo para raíces múltiples	29
3.1	Introducción	29
3.2	Preliminares	32
3.3	Resultados principales	35
3.4	Ejemplos numéricos	40
3.4.1	Ejemplo 1	40
3.4.2	Ejemplo 2	40
3.4.3	Ejemplo 3	41
3.4.4	Ejemplo 4	41
3.4.5	Ejemplo 5	41
3.4.6	Ejemplo 6	41
3.5	Dinámica del método de Osada	42
4	Estudio de convergencia local para un método óptimo de cuarto orden y su extensión a octavo orden de convergencia óptimo	49
4.1	Introducción	49
4.2	Convergencia local de un esquema óptimo de cuarto orden	53
4.2.1	Resultado principal	56

4.3 Desarrollo de un esquema óptimo de octavo orden	62
4.3.1 Casos especiales del esquema propuesto	66
4.4 Experimentos numéricos	69
4.4.1 Coste computacional	70
5 Diseño de métodos de alto orden y análisis de su rendimiento	81
5.1 Introducción	81
5.2 Construcción del esquema de orden superior	83
5.3 Ejemplos numéricos	88
6 Estudio de convergencia semilocal: método de alto orden	99
6.1 Introducción	99
6.2 Convergencia Semilocal	101
6.2.1 Funciones Auxiliares	102
6.2.2 Resultado principal	110
6.3 Resultados numéricos	113
7 Conclusiones y líneas futuras	121
7.1 Conclusiones	121
7.2 Líneas futuras	123
A Méritos	125
A.1 Publicaciones	125
A.2 Congresos	126
A.3 Otros méritos	127
A.3.1 Relacionados con el área de Matemáticas	127
Bibliografía	129

Índice de figuras

3.1. Plano dinámico de G_f para $d = 2, m = 2$. Cada cuenca contiene pequeñas inclusiones de la otra.	44
3.2. Plano dinámico de G_f para $d = 3, m = 3$. Las inclusiones en una cuenca contienen puntos de las otras cuencas.	45
3.3. Plano dinámico de G_f para $d = 4, m = 4$	45
3.4. Detalle del plano dinámico de G_f para $d = 4, m = 4$ cerca del punto fijo extraño $z = 0,78$, marcado con una x roja.	46
4.1. Costes computacionales para $\gamma = 1,5$ y $1,5 \leq \delta \leq 3$	71
4.2. Costes computacionales para $\delta = 3$ y $1,5 \leq \gamma \leq 2,5$	72

Índice de tablas

4.1. Coste computacional	71
4.2. Comparación basada en error residual (es decir $ f(x_n) $) de diferentes funciones de iteración.	75
4.3. Diferencia entre dos iteraciones consecutivas. (es decir $ x_{n+1} - x_n $) de diferentes funciones de iteración.	76
4.4. Radio de la bola de convergencia local (f_{a-c}).	77
4.5. Radio de la bola de convergencia local ($f_{1,2,4,5}$)	77
5.1. Comparación sobre la base de la diferencia entre dos iteraciones consecutivas $ x_{k+1} - x_k $ para las funciones f_1-f_4	93
5.2. Comparación sobre la base de la diferencia entre dos iteraciones consecutivas $ x_{k+1} - x_k $ para las funciones f_1-f_4	94
5.3. Comparación sobre la base de errores residuales $ f(x_k) $ para las funciones f_1-f_4	94
5.4. Comparación sobre la base de errores residuales $ f(x_k) $ para las funciones f_1-f_4	95
6.1. Valores para los parámetros que aparecen en el estudio de convergencia semilocal	115
6.2. Radio Convergencia Semilocal.	116

Capítulo 1

Introducción

Diversos campos de la matemática se ocupan de resolver los problemas del mundo real que se han modelizado, ya sea en un laboratorio o en la naturaleza misma. Los modelos ponen de manifiesto los cambios en los estados y en características de los cuerpos a través del tiempo, así como multitud de fenómenos o propiedades de estos que pueden expresarse en forma de ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales ordinarias, problemas de valor inicial, problemas con valor de frontera, ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integrales, etc.

La evolución de las Matemáticas ha sido desde hace siglos cada vez más importante por su aplicabilidad a este tipo de problemas reales y hay que notar que éstos pueden estar en función del tiempo, en función del espacio, en función de ambos espacio y tiempo, en definitiva, en función de una o varias variables que formulan el problema de forma clara y precisa.

Así tenemos problemas físicos, químicos, del mundo de la biología, las finanzas, economía, entre otros, que se modelizan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias como por ejemplo la ecuación de Lane-Emden, presentada en [5]:

$$\begin{aligned}x''(t) + \frac{2}{t}x'(t) + x(t)^p &= 0 \\x(0) &= 1 \\x'(0) &= 0,\end{aligned}$$

ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones integrales como la presentada en [6] :

$$x(s) = 1 + \frac{1}{3} \int_0^1 G(s,t)x(t)^4 dt,$$

donde $x(s)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, el núcleo $G(s, t)$ es la función Green y $s \in [0, 1]$, utilizadas en Astrofísica para estudiar el potencial gravitatorio y la temperatura de las estrellas, respectivamente, y que son revisadas en el Capítulo 6.

Una vez modelizado el problema, el siguiente objetivo es demostrar la existencia de soluciones así como utilizar la técnica más adecuada para obtenerlas. En numerosas ocasiones, aunque exista solución analítica de los problemas modelizados, no es fácil obtenerla. También puede ocurrir que, una vez hallada esta solución analítica o algebraica, sea difícil de manejar y en otras ocasiones no se puede determinar la existencia de solución. En toda esta casuística de situaciones el Análisis Numérico juega un papel fundamental. En esta rama de las Matemáticas se abordan los problemas desde un punto de vista numérico de manera que mediante técnicas rigurosas y algoritmos adecuados se obtienen las soluciones aproximadas de los problemas modelizados, de manera que puede probarse, entre otras cosas, que la solución aproximada puede mejorarse tanto como se desee. Una de las ventajas que brinda el Análisis Numérico es que la solución puede calcularse mediante métodos y algoritmos utilizados programables que nos permiten, mediante un software adecuado, obtener soluciones factibles con la precisión deseada. En este trabajo nos ocuparemos de abordar los problemas en que en alguna parte del proceso se necesita resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones no lineales.

Concretamente, estamos interesados en el estudio de metodos iterativos para resolver ecuaciones o sistemas no lineales que expresamos generalmente como $f(x) = 0$.

Los métodos iterativos son aquellos métodos de aproximación a la solución x^* de una ecuación $f(x) = 0$, donde $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en el dominio que contiene al cero requerido, estos métodos también pueden usarse en variable compleja, con ecuaciones del tipo $f(z) = 0$, donde $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja. También usamos los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones $F(x) = 0$, donde $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, es un operador no lineal definido en un conjunto convexo abierto Ω de un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y . Un caso particular importante es cuando $X = Y = \mathbb{R}^n$.

En el Capítulo 2 están definidos los conceptos que utilizaremos, con el objetivo de comprender el comportamiento de los métodos iterativos clásicos y de sus modificaciones realizadas para tener un mejor rendimiento y lograr mejores aproximaciones.

Debemos considerar que los temas tratados en este Capítulo son conceptos importantes que en la mayor parte de los casos definiremos y daremos solo las propiedades que nos interesan para nuestro estudio y que se usarán para comprender los procedimientos y demostraciones que se realizarán en esta tesis.

Comenzaremos por conocer qué es un método iterativo para la resolución de funciones y sistemas no lineales y una clasificación de los mismos, estudiaremos la velocidad de convergencia, la

eficiencia y mostraremos algunos algoritmos de métodos clásicos. Así mismo se hará énfasis en los métodos libres de derivadas tipo Steffensen; estudiaremos las diferencias divididas como técnica que nos permite evitar el uso de las derivadas que encontramos en los diferentes modelos iterativos.

Posteriormente, con ciertos conocimientos afianzados, se describirán métodos de aceleración de convergencia, introduciendo el concepto de "optimalidad". Se explicarán también los distintos análisis de la convergencia que se pueden realizar para realizar un estudio riguroso de los métodos iterativos, es decir, definiremos la convergencia local, semilocal y global. Finalmente veremos qué es la dinámica de un método sobre funciones escalares complejas y funciones reales multivariables.

Como se expresó al principio de este Capítulo, todas estas técnicas iterativas se usan para encontrar la aproximación a la solución de fenómenos modelizados por medio de ecuaciones diferenciales e integrales, por lo tanto se dará una breve reseña sobre estas técnicas.

En el Capítulo 3 revisamos las pruebas de los resultados obtenidos en [7], puesto que, en este artículo el resto de la expansión de Taylor utilizada para la obtención del radio de convergencia local no es correcto. Entonces, abordamos el tema de ecuaciones no lineales con raíces múltiples. Es bien conocido que el comportamiento de los métodos iterativos en estos casos converge de manera más lenta y menos precisa por lo que podemos encontrar en la literatura modificaciones de estos métodos que restablecen el proceso de convergencia. Concretamente, revisaremos el estudio completo para modificar la ecuación y obtener el radio de convergencia local, el radio de unicidad y los límites de error. Además, se desarrolla un estudio dinámico para el método de Osada de tercer orden.

A continuación, en el Capítulo 4 se expone un nuevo esquema iterativo óptimo con octavo orden de convergencia para encontrar raíces múltiples [4]. Se presenta un análisis de convergencia con el teorema principal para demostrar la convergencia óptima de octavo orden del esquema propuesto. Además, se muestra un estudio de convergencia local para el método óptimo de cuarto orden definido por los primeros dos pasos del nuevo método, que nos permite obtener el radio de la bola de convergencia local. Por último, se exhiben pruebas numéricas de algunos problemas aplicados, como la ecuación de estado de Van der Waals, un problema de conversión de ingeniería química y dos problemas de pruebas académicas estándar que confirman los resultados teóricos establecidos en este estudio y la eficacia del método iterativo propuesto. Observamos a partir de los experimentos numéricos que los métodos iterativos propuestos tienen excelentes valores para los radios de convergencia. Además, no solo tienen una convergencia más rápida hacia el cero deseado de la función involucrada, sino que también tienen un error residual menor y una mínima diferencia entre dos iteraciones consecutivas que las técnicas actuales existentes.

En el Capítulo 5 presentamos una nueva función de iteración de tipo Chebyshev-Halley que tiene al menos convergencia de sexto orden y convergencia de octavo orden para un valor particular en el caso de raíces múltiples [3]. Con respecto al coste computacional, cada miembro de nuestro esquema necesita cuatro evaluaciones funcionales en cada paso. Por lo tanto, el índice de eficiencia máxima de nuestro esquema es 1,6818, que corresponde a un método óptimo en el sentido de la conjetura de Kung y Traub. Obtenemos el orden de convergencia teórica utilizando desarrollos

de Taylor. Al final del capítulo consideramos algunas situaciones de la vida real para establecer algunos experimentos numéricos para corroborar los resultados teóricos.

El Capítulo 6 está dedicado a estudiar la convergencia semilocal de un método de tipo Newton con la primera derivada congelada en espacios de Banach [2]. Solo imponemos la suposición de que la derivada de Fréchet satisface la condición de continuidad de Lipschitz y que está acotado en todo el dominio para obtener las relaciones de recurrencia adecuadas que nos permiten determinar los dominios de convergencia y unicidad para la solución. Luego usamos estos resultados teóricos para resolver problemas aplicados, representados por ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas con valores de frontera.

Finalmente, en el Capítulo 7 se muestran resumidas las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo de investigación, en función de los estudios realizados en los capítulos previos. Además presentamos líneas de investigación que se plantean a partir de los resultados obtenidos en esta memoria.

Capítulo 2

Conceptos previos

2.1 Espacio de Banach

En la literatura matemática se suele denotar a un cuerpo \mathbb{K} para denotar indistintamente al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, por lo que \mathbb{K}^n representará el espacio real o complejo n -dimensional. En estos espacios n -dimensionales se puede trabajar con ecuaciones, sistemas de ecuaciones, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, entre otras. Lo más interesante de todo esto es que todos los conjuntos antes mencionados son espacios de Banach.

Para definir un espacio de Banach vamos a introducir escuetamente los siguientes conceptos.

2.1.1 *Espacio vectorial*

Se dice que un conjunto X , a cuyos elementos llamamos vectores, es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} si posee dos operaciones: adición y producto por un escalar, con las siguientes propiedades

1. La operación interna, adición de vectores (+) en X cumple los siguientes axiomas:
 - a) Ley de composición interna:

$$\forall x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$$

b) Asociatividad:

$$\forall x, y, z \in X \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$$

c) Elemento neutro:

$$\exists e \in X, \forall x \in X \Rightarrow x + e = x$$

d) Elemento opuesto:

$$\forall x \in X, \exists -x \in X \Rightarrow x + (-x) = e$$

e) Conmutatividad:

$$\forall x, y \in X \Rightarrow x + y = y + x$$

2. La operación externa, producto por un escalar (\cdot) en X , que cumple con los axiomas:

a) Ley de composición externa:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in X \Rightarrow \alpha x \in X$$

b) Asociativa de los escalares:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X \Rightarrow \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

c) Distributiva:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X \Rightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X \Rightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

d) Elemento unidad:

$$\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in X \Rightarrow 1 \cdot x = x$$

Ejemplo 2.1. \mathbb{K}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} , siendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.1.2 Operadores lineales

Una aplicación $T : X \rightarrow Y$ entre dos espacios vectoriales es lineal (o es un operador lineal) si cumple las siguientes condiciones.

$$1. T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad x, y \in X,$$

$$2. T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Los puntos del espacio X donde se define el operador T se llama dominio de T y se denota por $\mathcal{D}(T)$ y a los puntos de Y que son asociados mediante T se llama rango y se denota por $\mathcal{R}(T)$.

Si $T : X \rightarrow Y$ es una aplicación biyectiva, entonces decimos que T es invertible porque podemos definir la aplicación inversa $T^{-1} : Y \rightarrow X$ mediante $T^{-1}(y) = x$ si y solo si $T(x) = y$. Si T es un operador lineal invertible, T^{-1} también es lineal e invertible: $TT^{-1} = I_Y$ y $T^{-1}T = I_X$.

2.1.3 Espacio Normado

Una norma en un espacio vectorial X sobre el cuerpo K es una aplicación $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada vector $x \in X$ un número real $\| x \|$, verificando las siguientes condiciones:

1. $\| x \| \geq 0, \forall x \in X; \quad \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \forall x, y \in X$

Definición 2.1. (Espacio normado). Un espacio normado es un espacio vectorial X en donde se ha fijado una norma $\| \cdot \|$.

Como ejemplos de espacio normado, tenemos \mathbb{K}^n con las normas más conocidas. Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ se define:

- $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
- $\| x \|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $\| x \|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.
- $\| x \|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

2.1.4 Operadores acotados

Un operador lineal T entre espacios normados X e Y se dice que está acotado si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\| T(x) \| \leq c \| x \|$ para todo $x \in X$.

La norma de T , $\| T \|$ es el menor $c \in \mathbb{R}$ que verifica esta condición, para todo $x \in X$.

$$\| T(x) \| \leq c \| x \| \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), c \in \mathbb{R}$$

Al conjunto de operadores lineales acotados entre dos espacios normados X e Y se lo denota $\mathcal{L}(X, Y)$. Si $X = Y$ se denotará $\mathcal{L}(X)$. En el caso de espacios X e Y de dimensión finita, todos los operadores lineales son acotados, lo cual no es cierto en dimensión infinita. Las normas usuales de \mathbb{K}^n inducen las llamadas normas matriciales en $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$:

- $\| A \|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \| Ax \|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad i, j = 1, \dots, n$.

- $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.
- $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad i, j = 1, \dots, n$.

2.1.5 Espacio completo

Sucesión convergente

La noción de convergencia es muy útil e importante importante en cálculo infinitesimal. Comenzamos definiendo el límite de una sucesión.

Definición 2.2. Sea $\{x_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una sucesión en un espacio normado X y sea $x \in X$. Entonces $\{x_k\}$ converge a x , y denotamos $\{x_k\} \rightarrow x$ si y solo si, para cada número real y positivo ε , existe un número natural m , tal que, para todo $k > m$, se tiene $\|x_k - x\| < \varepsilon$.

El inconveniente de esta definición es que necesitamos conocer el límite para verificar la convergencia de la sucesión. Este problema se puede sortear con los conceptos siguientes.

Sucesión de Cauchy

Definición 2.3. Sea $\{x_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una sucesión en X , entonces $\{x_k\}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq n_0$ se cumple que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Toda sucesión convergente es de Cauchy. El recíproco no es cierto en general, por lo que damos la siguiente definición.

Espacio de Banach

Definición 2.4. Sea X un espacio normado, decimos que X es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto $x \in X$.

Tenemos como ejemplos

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ son completos.
2. Si $1 \leq p < \infty$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ es completo.

Definición 2.5. Un espacio vectorial X normado completo se llama espacio de Banach.

Lema de Banach

El siguiente lema se utilizará para garantizar la existencia y la cota de la norma de la inversa de una matriz y en general de un operador lineal.

LEMA 2.1.1. Sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$ y $\|A\| < 1$ entonces $I - A$ es invertible y

$$\|I - A\|^{-1} < \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

2.1.6 Derivada de Fréchet

La derivada de Fréchet es la generalización de la derivada de una función de una variable al caso de una función vectorial en un espacio normado.

La derivada de Fréchet es muy útil en análisis puesto que tiene aplicaciones a problemas no lineales en particular el cálculo de variaciones, análisis no lineal y análisis funcional no lineal.

Definición 2.6. Una función $F : \Omega \subset X \rightarrow Y$ definida en un conjunto abierto Ω de un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y es diferenciable en el sentido de Fréchet en $x_0 \in \Omega$ si existe un operador lineal y continuo $L : X \rightarrow Y$ tal que se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + v) - F(x_0) - Lv\|}{\|v\|} = 0, \quad (2.1)$$

con $v \in X$, entonces F es diferenciable Fréchet en x_0 y el operador $F'(x_0) = L$ se denomina derivada de F en x_0 .

Supongamos que F es la aplicación $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con Ω un conjunto abierto. Si F es Fréchet diferenciable en un punto $x \in \Omega$ entonces su derivada de Fréchet es

$$\mathbf{J}_F = F'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Se dice que \mathbf{J}_F es la matriz Jacobiana de F en x .

Las normas matriciales definidas en 2.1.4 dan lugar, en el caso de la matriz Jacobiana, a:

1. $\|F'(x)\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \quad i, j = 1, \dots, n,$
2. $\|F'(x)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \quad i, j = 1, \dots, n.$

A continuación el siguiente lema nos proporciona aclaraciones a la notación que utilizamos para los desarrollos de Taylor en \mathbb{R}^n así como la expresión del resto de la aproximación, que se utilizará en el caso de sistemas para obtener el orden teórico de convergencia de un método iterativo.

Derivadas de orden superior y desarrollo de Taylor

LEMA 2.1.2. Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable en Ω . La q -ésima derivada de F en $u \in \mathbb{R}^n$, $q \geq 1$, es la función q -lineal $F^{(q)}(u) : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$.

Es fácil observar que:

$$F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_{q-1}, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Supondremos además que se verifica:

$$F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q),$$

para toda permutación σ de $1, 2, \dots, q$. De las propiedades anteriores podemos usar la siguiente notación:

1. $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1 \cdots v_q$,
2. $F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)}v^p = F^{(q)}(u)F^{(p)}(u)v^{q+p-1}$.

Por otro lado, para $x^* + h \in \mathbb{R}^n$ que se encuentra en un entorno de la solución x^* de $F(x) = 0$, podemos aplicar la expansión de Taylor y suponiendo que la matriz jacobiana $F'(x^*)$ es no singular, tenemos

$$F(x^* + h) = F'(x^*) \left[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q \right] + O(h^p),$$

donde $C_q = (\frac{1}{q!})[F'(x^*)]^{-1}F^{(q)}(x^*)$, $q \geq 2$. Obsérvese que $C_q h^q \in \mathbb{R}^n$ puesto que $F^{(q)}(x^*) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $[F'(x^*)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Otra notación para el desarrollo de Taylor y su resto integral es la siguiente

LEMA 2.1.3. Sean X, Y espacios de Banach y $F : \Omega \subset X \rightarrow Y$ un operador no lineal con derivadas sucesivas de Fréchet en un dominio convexo abierto Ω ; para toda $x \in \Omega$, entonces si $x_0 \in \Omega$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^k \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_{x_0, k}(x - x_0)$$

donde el resto se puede expresar como

$$R_{x_0, k}(x - x_0) = \frac{1}{k!} \int_0^1 [F'(x_0 + \tau(x - x_0)) - F'(x_0)] d\tau(x - x_0)$$

2.1.7 Aplicaciones contractivas

Condición de Hölder

Sean X, Y espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal en un dominio convexo abierto Ω ; para cierto número real $p \in]0, 1]$, decimos que la función es Hölder continua si existe una constante K tal que

$$\| F(x) - F(y) \| \leq K \| x - y \|^p, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Condición de Lipschitz

Sean X, Y espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal en un dominio convexo abierto Ω , decimos que la función es lipschitziana si es Hölder continua para $p = 1$, es decir, si existe una constante K tal que

$$\| F(x) - F(y) \| \leq K \| x - y \|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Función contractiva

Sea X un espacio de Banach y sea $\Omega \subseteq X$. Un operador $F : \Omega \rightarrow X$, es llamado K -contractivo si

$$\| F(x) - F(y) \| \leq K \| x - y \|, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad \text{con } 0 \leq K < 1,$$

es decir, que es Lipschitz continuo con $K < 1$.

Teorema del punto fijo de Banach

El siguiente Teorema de punto fijo sirve para aplicar al caso n -dimensional. Este Teorema es un caso especial del bien conocido Teorema de la Aplicación Contractiva.

Teorema 2.1. Sea $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^t \mid a_i \leq x_i \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ para alguna colección de constantes a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n . Supongamos que G es una función continua con primeras derivadas parciales continuas de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $G(x) \in \Omega$ para cada $x \in \Omega$. Entonces G tiene un punto fijo en Ω . Además supóngase que existe una constante $K < 1$ con

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}$$

siempre que $x \in \Omega$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$ y cada función componente g_i . Entonces la sucesión $\{x^{(k)}\}_{x=0}^{\infty}$ definida por un $x_0 \in \Omega$ seleccionado arbitrariamente y generada por

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}) \quad \forall k \geq 1,$$

converge al punto fijo único $p \in \Omega$ y

$$\|x^{(k)} - p\|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1 - K} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}.$$

2.2 Métodos iterativos

La demostración del teorema del punto fijo de Banach nos proporciona un método constructivo para hallar el punto fijo: a partir de un punto inicial arbitrario x_0 construimos la sucesión de iterados de una función G

$$\begin{aligned} x_1 &= G(x_0) \\ x_2 &= G(x_1) \\ &\vdots \\ x_{k+1} &= G(x_k). \end{aligned}$$

Si G es un operador contractivo en un espacio de Banach, entonces la sucesión x_k es convergente y su límite x^* es el punto fijo de G , o sea, $G(x^*) = x^*$.

Esto sugiere la idea de los métodos iterativos para resolver una ecuación no lineal $F(x) = 0$. Para ello, transformamos esta ecuación en una de punto fijo equivalente $x = G(x)$ y construimos la sucesión de iterados $G(x_k)$ partiendo de una estimación inicial adecuada x_0 . Si esta sucesión converge a un punto fijo x^* de G , éste será un cero de F , o sea, una solución de la ecuación $F(x) = 0$.

2.2.1 El caso n -dimensional

En el caso de $X = \mathbb{R}^n$, F es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , la ecuación $F(x) = 0$ se puede escribir en función de las coordenadas como

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

con $f_i = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, con primeras derivadas parciales continuas en \mathbb{R}^n .

Y la ecuación de punto fijo equivalente $G(x) = x$ como

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Los resultados siguientes nos dan condiciones suficientes de convergencia y unicidad en términos de las funciones coordenadas:

Convergencia a la solución

El proceso de iteración 2.2

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

converge si

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \right| \leq q_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

cuando $x \in \mathbb{R}^n$.

Unicidad de la solución

Teorema 2.2. Sean las funciones $G(x)$ y $G_0(x)$ continuas en el dominio Ω cerrado, convexo y acotado, cumpliéndose en Ω la desigualdad

$$\|G'(x)\| \leq q < 1,$$

donde q es una constante. Si $x^{(0)} \in \Omega$ y todas las aproximaciones sucesivas (2.2)

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

pertenecen a Ω , el proceso de iteración (2.2) converge y el vector límite

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

es la única solución del sistema $x = G(x)$ en el dominio Ω .

2.2.2 Estimación del error de un método iterativo

Es importante señalar que una característica de los métodos numéricos es que al aplicarlos se cometen errores, por eso es necesario disponer de condiciones que minimicen errores o que sean tolerables y que aseguren que la aproximación obtenida es válida. Existen algunos tipos de errores numéricos, los más comunes son: errores de redondeo y errores de truncamiento. Existen otros errores indirectos que se deben a las limitaciones de la formulación del modelo o a la incertidumbre de los datos, entre otros.

Los errores de redondeo aparecen cuando se usan números que tienen un límite de cifras significativas o cuando se omiten estas cifras. Estos errores los cometemos al introducir datos en el ordenador y al someterse a los cálculos correspondientes puesto que la representación de los números en la máquina es finita.

Los errores de truncamiento resultan cuando se usan aproximaciones en los procedimientos matemáticos con el cual se asume obtener un resultado exacto.

Definimos el error del paso k de la iteración como:

$$\varepsilon_k = \|x^* - x_k\|,$$

donde x^* es el valor exacto, raíz o cero y x_k es el iterado k -ésimo. En la práctica no conocemos el valor exacto x^* , por lo tanto la fórmula anterior no es aplicable. Conociendo los iterados consecutivos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$, se puede estimar el error mediante:

$$e_k = \|x_{k+1} - x_k\|, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

2.2.3 Orden de convergencia

En el estudio de los métodos iterativos existe un concepto muy importante: el *orden de convergencia*; éste nos da una medida de la velocidad con la que un método alcanza la solución o raíz x^* de una ecuación $F(x) = 0$.

Es decir, si tenemos una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ y si $e_k = \|x_k - x^*\|$ es el error de esta aproximación para toda $k \geq 0$ y si existen dos constantes positivas $M > 0$ y $p > 0$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = M.$$

Entonces diremos que la sucesión converge a x^* con *orden de convergencia* p donde el número constante M se llama constante asintótica del error.

Para $p = 1$ tenemos la convergencia lineal:

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \leq M, \quad 0 < M < 1$$

Para $p = 2$ tenemos la convergencia cuadrática:

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} \leq M, \quad M > 0$$

Para $p = 3$ tenemos la convergencia cúbica:

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^3} \leq M, \quad M > 0$$

Pero como en la práctica no se conoce la solución exacta x^* , se mide la velocidad de convergencia de la sucesión de incrementos e_k

$$\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k - x_{k-1}\|^p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

que se llama tasa o razón de convergencia donde $p = 1, 2, 3, \dots$

Existe también el *orden de convergencia computacional* definido en [8] por la fórmula

$$\rho = \frac{\ln(\|x_{k+1} - x^*\| / \|x_k - x^*\|)}{\ln(\|x_k - x^*\| / \|x_{k-1} - x^*\|)},$$

donde x_{k-1} , x_k y x_{k+1} son las tres últimas aproximaciones sucesivas de la raíz buscada, obtenidas en el proceso iterativo $x_{k+1} = G(x_k)$. Generalmente en la práctica el valor de la raíz es desconocido, por lo tanto en [9] los autores introducen un nuevo concepto en el estudio de los métodos iterativos un *orden de convergencia computacional aproximado* que se define como

$$\tilde{\rho} = \frac{\ln(\|x_{k+1} - x_k\| / \|x_k - x_{k-1}\|)}{\ln(\|x_k - x_{k-1}\| / \|x_{k-1} - x_{k-2}\|)},$$

2.2.4 Clasificación de métodos iterativos según sus características principales

Los métodos iterativos para la resolución de la ecuación $F(x) = 0$ consisten en construir, a partir de un valor inicial x_0 , una sucesión x_0, x_1, x_2, \dots , aplicando una función de iteración G , es decir, $x_{k+1} = G(x_k)$, siendo $G(x) = x$ una ecuación de punto fijo equivalente a la ecuación $F(x) = 0$.

Si la sucesión converge, el límite x^* es un punto fijo de G y por tanto, una raíz de F , $F(x^*) = 0$. Según cómo se aplica la función G para obtener los sucesivos iterados, distinguimos varios tipos de métodos iterativos.

A: Caso unidimensional

Consideramos en primer lugar los métodos iterativos en el caso unidimensional, para extenderlos posteriormente al caso multidimensional.

Métodos de un solo punto sin memoria

Los métodos de un solo punto sin memoria tienen la forma:

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

donde x_k es una aproximación de la raíz x^* , x_{k+1} es la nueva aproximación y $\phi(k_n)$ es una función de iteración. Estos métodos no reutilizan información obtenida anteriormente. El método de un solo punto sin memoria más conocido y utilizado es el método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

que es un método muy eficiente para hallar la aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ cuando la función f es derivable. Además, es muy rápido puesto que tiene convergencia cuadrática. Obviamente, al igual que otros métodos, existen excepciones en las cuales no llega a la convergencia cuadrática, como en el caso de ecuaciones con raíces múltiples, por lo que para recuperar su convergencia y eficacia se necesita hacer un análisis especial y realizar ciertas mejoras o modificaciones en su algoritmo.

Métodos de un solo punto con memoria

Cuando la nueva aproximación x_{k+1} es determinada por la aproximación x_k y además reutiliza información anterior x_{k-1}, \dots, x_{k-m} , $1 \leq m \leq k$, entonces nos encontramos frente a un método iterativo de un solo punto con memoria, el mismo que tiene la forma:

$$x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}),$$

donde x_k es la aproximación actual, x_{k-1}, \dots, x_{k-m} son aproximaciones anteriores que son reutilizadas y x_{k+1} es la aproximación resultante. Un buen ejemplo de este tipo es el método de la secante, que tiene como orden el número áureo. Este método expresado en términos análogos al de Newton, es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}. \quad (2.4)$$

Métodos multipunto sin memoria

Un método multipunto sin memoria es aquel que usa nueva información en diferentes puntos $x_k, \phi_1(x_k), \dots, \phi_k(x_k), k \geq 1$ y no reutiliza información anterior, tienen la forma:

$$x_{k+1} = \psi(x_k, \phi_1(x_k), \dots, \phi_k(x_k)).$$

Un esquema muy conocido es el método de Potra Pták de orden tres. [10]:

$$y_n = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.$$

Métodos multipunto con memoria

También tenemos los métodos multipunto con memoria que son aquellos que utilizan información nueva $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}$ e información de datos ya utilizados $x_{k-m-1}, \dots, x_{k-p}$. Es decir, tiene la forma:

$$x_{k+1} = \psi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}; x_{k-m-1}, \dots, x_{k-p}), p > m.$$

Un método iterativo muy interesante que presenta estas características es la variante uniparamétrica del método de Traub [11], denominado por su autor como *TM1* que tiene orden de convergencia $\rho = 3,30$.

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \delta f(x_k)},$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\delta = -\frac{1}{2} \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})f'(x_k)}$.

Por último tendremos en cuenta en esta tesis la clasificación de los métodos según sean éstos con derivadas o libres de derivadas.

Métodos con derivadas

Los primeros son aquellos que se utilizan cuando las funciones se pueden derivar y en la función de iteración se utiliza la derivada de $f(x)$ o alguna derivada sucesiva, sean éstos de un solo punto o multipunto, así tenemos el método de Chebyshev de orden tres. :

$$x_{k+1} = x_k - \left[1 + \frac{1}{2} L_f(x_k) \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde $L_f(x_k) = \frac{f''(x_k)f(x_k)}{f'(x_k)^2}$.

Métodos libres de derivadas

Los métodos libres de derivadas son muy útiles cuando la función f no es derivable o su derivación es muy complicada. Para evitar el cálculo de las derivadas, las reemplazamos por unas aproximaciones denominadas diferencias divididas.

Para aproximar las primeras derivadas o derivadas de primer orden de la función $f(x)$ tenemos las diferencias divididas:

$$\begin{aligned} f'(x_k) &\simeq \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}, && \text{progresiva } \mathcal{O}(h) \\ f'(x_k) &\simeq \frac{f(x_k) - f(x_k - h)}{h}, && \text{regresiva } \mathcal{O}(h) \\ f'(x_k) &\simeq \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}, && \text{central } \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Y para la segunda derivada:

$$f''(x_k) \simeq \frac{f(x_k + h) - 2f(x_k) + f(x_k - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

En esta memoria cuando resolvemos ecuaciones no lineales $f(x) = 0$ con multiplicidad $m > 1$, utilizamos diferencias divididas $f[a_0, a_1, \dots, a_k]$ sobre $k + 1$ diferentes puntos a_0, a_1, \dots, a_k de

la función $f(x)$ para aproximar la derivada de orden k . Estas diferencias tienen la forma:

$$\begin{aligned} f[a_0] &= f(a_0), \\ f[a_0, a_1] &= \frac{f[a_0] - f[a_1]}{a_0 - a_1}, \\ &\vdots \\ f[a_0, a_1, \dots, a_k] &= \frac{f[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}] - f[a_1, a_2, \dots, a_k]}{a_0 - a_k}. \end{aligned}$$

En cualquier método que use derivadas se puede reemplazar éstas por diferencias finitas, logrando una buena aproximación. Así tenemos por ejemplo el método de Newton donde al reemplazar la $f'(x)$ por la diferencia dividida progresiva obtenemos el método de Steffensen [12], que conserva el orden cuadrático de convergencia, cuya fórmula iterativa es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Así también tenemos entre las combinaciones del método de Steffensen [12] la que Jain en [13] realiza combinando los métodos de Newton y secante, quedando la siguiente fórmula de tercer orden:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^3}{[f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)][f(x_k) - f(y_k)]},$$

donde y_k es la k -ésima iteración del método de Steffensen.

B: Caso n -dimensional

No siempre los métodos iterativos utilizados en el caso unidimensional para aproximarse a la raíz de una función $f(x) = 0$ pueden generalizarse al caso multidimensional. Por esta razón se analiza la extensión a n -variables en cada método iterativo.

El método iterativo más conocido para resolver sistemas no lineales es el método de Newton-Raphson

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}),$$

de convergencia cuadrática. Obviamente, en análisis numérico se evita el cálculo de la matriz inversa por lo que en la práctica en primer lugar se resuelve el sistema lineal:

$$F'(x^{(k)})v^{(k)} = F(x^{(k)})$$

para en un segundo paso hacer

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - v^{(k)}.$$

Este método suele usarse como parte de otros, así tenemos como ejemplo el método de Tscheyshv-Euler [14].

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - \frac{1}{2}F'(x^{(k)})H_F(x^{(k)})(y^{(k)} - x^{(k)})^2, \end{aligned}$$

donde $H_F(x^{(k)})$ es la matriz Hessiana evaluada en el iterado $x^{(k)}$.

Cordero y Torregrosa en [15] desarrollan una variante del método de Newton, mejorando el orden de convergencia, llamándolo método de Newton-Simpson.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{6F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)}) + 4F'(\frac{z^{(k)}+x^{(k)}}{2}) + F'(z^{(k)})},$$

donde

$$z^{(k)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})}.$$

En los últimos años numerosos autores han introducido nuevas técnicas de aceleración de la convergencia de los métodos iterativos, dando lugar a la publicación de métodos iterativos eficientes y de alto orden, vease [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

En esta tesis doctoral, hemos estudiado un método iterativo multipaso de noveno orden, eficiente, que usa un Jacobiano congelado, al cual se le ha denominado NMIN [5] y cuya función de iteración viene dada mediante los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \Gamma^{(k)}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \Gamma^{(k)}F(y^{(k)}), \\ w^{(k)} &= z^{(k)} - \Gamma^{(k)}F(z^{(k)}), \\ u_1^k &= \Gamma^{(k)}F(w^{(k)}), \\ u_i^k &= \Gamma^{(k)}F'(w^{(k)})u_{i-1}^k, \quad i = 2, \dots, 5 \\ x^{k+1} &= w^{(k)} - \frac{21}{4}u_1^k + 11u_2^k - \frac{23}{2}u_3^k + 6u_4^k - \frac{5}{4}u_5^k, \end{aligned} \tag{2.5}$$

con $x^{(k)} \in \Omega$, $k \geq 0$, donde $\Gamma^{(k)} = [F'(x^{(k)})]^{-1}$ y probaremos que se trata de un método con orden de convergencia 9.

2.2.5 Índice de eficiencia y optimalidad

En el caso unidimensional, si tenemos una ecuación lineal $f(x) = 0$ y una función de iteración ψ que converge a la solución x^* de $f(x) = 0$ con un orden de convergencia ρ entonces, según Ostrowski [24], el índice de eficiencia para el método ψ es:

$$IE = \rho^{1/d},$$

donde d es el número de evaluaciones funcionales por iteración.

Por otro lado, Traub [25] introduce el índice de eficiencia computacional

$$EC = \rho^{1/p},$$

donde p es el número de operaciones (productos y divisiones) necesarias para calcular cada iteración del método ψ . En este mismo sentido, Kung y Traub [26] establecen la siguiente conjetura:

Conjetura de Kung-Traub

El orden de convergencia de cualquier método multipaso sin memoria no puede superar 2^{d-1} (llamado orden óptimo), donde d es el número de evaluaciones funcionales por iteración, con índice de eficiencia $2^{(d-1)/d}$ (llamado índice óptimo).

Una vez definidos el orden de convergencia y la eficiencia de un método iterativo, notamos que son indicadores muy importantes para medir su velocidad de convergencia, la misma que junto al coste computacional nos dan información relevante sobre un método estudiado.

En cuanto a la optimalidad de los métodos, la conjetura de Kung-Traub es la que define si un método es o no óptimo. El método óptimo más conocido por su eficacia y utilidad es el método de Newton, de un solo paso y de orden dos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

con dos evaluaciones funcionales por iteración.

Otro método óptimo conocido en la literatura es el método de Jarrat [27], de cuarto orden:

$$y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2} \frac{3f'(y_k) + f'(y_k) f(x_k)}{3f'(y_k) - f'(y_k) f'(x_k)},$$

con tres operaciones funcionales por iteración.

Un ejemplo también muy conocido y útil en algunos casos como predictor es el método de Ostrowski [28], de cuarto orden:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

con tres operaciones funcionales por iteración.

Así mismo tenemos métodos que no cumplen con la conjetura de Kung-Traub, aún siendo métodos muy conocidos e importantes en la literatura del análisis numérico, podemos citar el método de Halley [25] de tercer orden, con tres operaciones funcionales por iteración, que ocupa quizá, el segundo lugar después del método de Newton en cuanto a publicaciones clásicas.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2}{2 - L_f(x_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

donde

$$L_f(x_k) = \frac{f''(x_k)f(x_k)}{f'(x_k)^2}.$$

2.3 Convergencia local y semilocal de un método iterativo

Sabemos que obtener la mejor aproximación a la solución de una ecuación $F(x) = 0$ es siempre el objetivo del estudio de un método iterativo, pero también es de suma importancia tener la certeza de que el método iterativo elegido converja a esta aproximación, es decir, es más útil comenzar una iteración sabiendo que el valor inicial x_0 que se toma producirá iterados que converjan a la solución buscada en vez de aventurarse a dar valores iniciales arbitrarios que harán iterar el método sin obtener una buena aproximación o que no converja.

Para lograr conseguir este buen valor de salida y lograr la convergencia del método a la solución podemos optar por hacer estudios centrados en condiciones que ha de cumplir la solución x^* , el valor inicial x_0 o el operador que usa el método iterativo. En esta memoria estudiaremos la convergencia del método en función de las condiciones impuestas a la solución x^* (convergencia local) o al valor inicial x_0 (convergencia semilocal).

Para definir una convergencia local o semilocal es muy importante establecer condiciones sobre los operadores del método. Estas condiciones varían, pero en esta investigación usaremos las condiciones continua de Hölder y de Lipschitz, y las de ser funciones contractivas.

Si tomamos en cuenta la solución x^* , entonces estamos frente a un estudio de convergencia local de un método iterativo. En dicho estudio se imponen condiciones sobre los operadores del método, evaluados sobre la solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$ y de esta manera conseguir la bola de convergencia local del método iterativo estudiado $B(x^*, R)$, que tiene como centro a la solución x^* . Cada punto de esta bola puede ser tomado como un punto inicial x_0 para usarlo en el método elegido con la seguridad de que la sucesión de iterados permanece en esta bola y converge a la solución. A modo de ejemplo tenemos el siguiente teorema:

Teorema de convergencia local: Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en un entorno del punto fijo x^* . Si $|g'(x^*)| < 1$, existe $r > 0$ tal que en el intervalo $[x^* - r, x^* + r]$ se dan las condiciones de punto fijo.

Si partimos del valor inicial x_0 , el estudio de convergencia de un método iterativo se llama semilocal, aquí se imponen condiciones sobre los operadores del método evaluados en la estimación inicial x_0 de la sucesión de iterados $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de tal manera que se consiga una bola de convergencia semilocal del método iterativo $B(x_0, R)$ centrada en la estimación inicial.

Lo importante de este tipo de estudio de convergencia semilocal es que al tomar el valor de partida x_0 , se puede probar que todas las iteraciones obtenidas con el método elegido se mantienen dentro de la bola de convergencia semilocal $B(x_0, R)$, convergiendo a una solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$. Además, con el estudio semilocal de un método podemos establecer un dominio donde la aproximación a la solución es única.

Teorema de convergencia semilocal: Suponiendo que g está definida en un intervalo $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ donde satisface una condición de Lipschitz $|g(x) - g(y)| \leq K |x - y|$, $\forall x, y \in I$, con $0 \leq K < 1$ (g contractiva). Si además $|x_0 - g(x_0)| \leq (1 - \lambda)r$, para cierto λ , entonces

- La sucesión está bien definida, es decir, $x_k \in I, \forall k$.
- Los iterantes x_k convergen a un punto fijo x^* de g tal que $|x_k - x^*| < \lambda^k r$.
- x^* es el único punto fijo de g en I .

2.4 Dinámica de un método iterativo

2.4.1 Introducción

El estudio del comportamiento global de un método iterativo se realiza mediante las herramientas de la dinámica compleja adaptadas a cada caso particular. De la aplicación de cada método iterativo a ecuaciones polinómicas sencillas se infieren las características globales del método, en particular, la dependencia de la estimación inicial, la extensión del dominio de convergencia o la aparición de iterados periódicos u otros comportamientos extraños. En esta sección introducimos las nociones básicas de dinámica compleja que se utilizan en capítulos posteriores [29, 30].

2.4.2 Conceptos básicos

Consideramos una sucesión de funciones complejas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

$$f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Se dice que f_n converge puntualmente a f en Ω si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

La convergencia puntual es insuficiente para transmitir al límite propiedades de los términos de la sucesión como continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad. Para ello es útil un concepto más exigente de convergencia.

Se dice que f_n converge uniformemente a f en $D \subset \Omega$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

La convergencia uniforme garantiza la transmisión al límite de las propiedades anteriores excepto la diferenciabilidad en el caso real. Sin embargo, la holomorfía de una sucesión de funciones complejas sí se transmite al límite uniforme. De hecho es suficiente la convergencia uniforme sobre los compactos de Ω , según afirma el

Teorema 2.3 (de Weierstrass de convergencia uniforme). *Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones holomorfas en Ω converge a f uniformemente sobre los compactos de Ω , entonces f es holomorfa en Ω y, además, la sucesión de las derivadas, $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$, converge a f' uniformemente sobre los compactos de Ω .*

Una sucesión de funciones holomorfas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *normal* si toda subsucesión contiene una subsucesión uniformemente convergente sobre los compactos.

En lo que sigue consideraremos funciones holomorfas definidas en $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, la compactación del plano complejo con el punto del infinito, también denominada esfera de Riemann.

Dada una función f holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$, consideramos la sucesión de iterados $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$\begin{aligned} f^1 &= f, \\ f^2 &= f \circ f = f \circ f^1, \\ &\vdots \\ f^{n+1} &= f \circ f^n. \end{aligned}$$

Las ideas que exponemos a continuación fueron desarrolladas a principios del siglo XX principalmente por Pierre Fatou y Gaston Julia. Se trata de clasificar los puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ según el comportamiento de las sucesiones de iterados de una función holomorfa f .

Sea z_0 un punto de $\widehat{\mathbb{C}}$ y f una función holomorfa no constante. Hay dos posibilidades mutuamente excluyentes:

- o bien existe un entorno U de z_0 en el cual la sucesión de iterados f^n es normal,
- o bien no existe tal entorno.

En el primer caso, se dice que z_0 es un punto *normal*. Los puntos normales constituyen el llamado *conjunto de Fatou* de f , \mathcal{F}_f , y el complementario, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}_f$, el conjunto de Julia de f , \mathcal{J}_f .

El conjunto de Fatou es abierto, mientras el de Julia es cerrado, de interior vacío en la mayoría de los casos.

Estos conceptos son interesantes para estudiar la convergencia de los métodos iterativos porque la sucesión de iterados $\{f^n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ se comporta "bien" si z_0 está en el conjunto de Fatou, mientras que si está en el conjunto de Julia, su comportamiento es impredecible.

La sucesión de iterados $z_n := f^n(z_0)$, $n = 0, 1, \dots$, se denomina la *órbita* de z_0 . Decimos que z_0 es un punto *periódico de periodo* q , con $q \geq 1$ si z_0, z_1, \dots, z_{q-1} son todos distintos y $z_0 = z_p$. Esto significa que $f^q(z_i) = z_i$, para cualquier i , o sea que los valores de f^n se repiten cíclicamente en los puntos dados.

Que z_0 sea periódico de periodo q de f equivale a que sea un punto fijo de la función f^q , o sea, $f^q(z_0) = z_0$. Un caso particular interesante ocurre cuando $q = 1$. Entonces se tiene que z_0 es un punto fijo de la propia función f .

En un entorno de z_0 , la función f^q se puede aproximar linealmente usando el desarrollo de Taylor

$$f^q(z) \simeq f^q(z_0) + f^{q'}(z_0)(z - z_0) = \lambda(z - z_0).$$

Se denomina *multiplicador de* z_0 al valor $\lambda = f^{q'}(z_0)$. El punto periódico z_0 se dice que es

- *superatractor*, si $\lambda = 0$,
- *atractor*, si $|\lambda| < 1$,
- *repulsor*, si $|\lambda| > 1$.

En los dos primeros casos, la sucesión $\{f^{np}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ convergerá a z_0 , si z es suficientemente próximo a z_0 , mientras que en el caso repulsor, los iterados se alejarán de z_0 , si $z \neq z_0$.

En el caso de un punto periódico atractor, z_0 , se define la *cuenca de atracción de* z_0 como el conjunto de todos los puntos z tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = z_0.$$

La cuenca de atracción de un punto periódico atractor está contenida en el conjunto de Fatou de f . Los puntos periódicos repulsores y sus preimágenes forman parte del conjunto de Julia de f .

Para aplicar la dinámica compleja al objeto de nuestro estudio consideramos f la función de iteración obtenida aplicando un método iterativo a un polinomio g . Se espera normalmente que las raíces del polinomio sean puntos fijos superatractores de f . La existencia de otros puntos fijos de f que no corresponden a raíces del polinomio p , denominadas puntos fijos extraños, complica la el estudio dinámico del método. Si los puntos fijos extraños son atractores, sus cuencas de atracción indican zonas en las que el método numérico no va a converger a las soluciones buscadas y, por tanto, hay que evitar tomar estimaciones iniciales del proceso iterativo en dichas zonas.

Las cuencas de atracción de los diferentes puntos fijos de f se representan gráficamente al colorear cada cuenca en un color diferente, formando el llamado *plano dinámico*. Las cuencas de atracción de f dan una idea del comportamiento del método y su sensibilidad al valor inicial. La velocidad de convergencia se representa utilizando colores más oscuros a medida que aumenta el número de iteraciones requeridas para converger comenzando desde un punto dado.

Convergencia local y estudio de dinámica: método iterativo para raíces múltiples

Basado en [1] : «A note on “Convergence radius of Osada’s method under Hölder continuous condition”». Applied Mathematics and Computation.

3.1 Introducción

En los últimos años, algunos de los estudios sobre los métodos iterativos para aproximar raíces de ecuaciones no lineales se han centrado en el caso de raíces múltiples. Es un caso especial en el que se deben tener en cuenta algunos aspectos particulares. Algunas aplicaciones reales le dan un especial interés a este problema, ver [31], con un estudio del efecto multipactor, analizando la ecuación de trayectoria de un electrón en el espacio de aire entre dos placas paralelas da como resultado una ecuación no lineal con una raíz múltiple. Esto también ocurre en la ecuación de estado de Van der Waals, entre otros fenómenos.

Como se explicó en el capítulo 2, el método de aproximación a raíces simples más conocido, más usado y además óptimo, es el método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

pero cuando lo utilizamos en ecuaciones con raíces múltiples $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$ con $m > 1$ y $g(x^*) \neq 0$, la convergencia se vuelve más lenta, es decir, se hace lineal. Por este motivo, se han debido hacer modificaciones al método de Newton, las que restablecen la convergencia cuadrática para raíces múltiples.

Una modificación hecha por Ralston y Rabinowitz en 1978 [32], consiste en añadir un factor que represente la multiplicidad m de la raíz a la que se desea aproximar:

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Otra forma de modificar el método de Newton es aplicarlo a la función $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, ya que es conocido que de este modo eliminamos las raíces múltiples. Obteniendo de esta manera una fórmula que permite detectar las aproximaciones a la raíz x^* de la ecuación $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}.$$

Especialmente interesante desde un punto de vista matemático es el trabajo [33] donde se ha realizado un estudio completo de convergencia local, obteniendo el radio de convergencia del bien conocido método de Newton modificado para raíces múltiples, cuando la función involucrada satisface una condición de continuidad de Hölder o Hölder centrada. Este resultado se mejora en [34]. Resultados similares para el método de tercer orden debido a Halley se obtienen en [35, 36].

Ahora estamos interesados en este tipo de estudios de convergencia local para métodos de tercer orden para raíces múltiples. Así que centramos nuestra atención en los documentos [35] y [7], donde los autores analizan la convergencia local para el método de Osada y Halley bajo las condiciones de continuidad de Hölder y Hölder central.

Consideramos el método de tercer orden de Osada [7] para encontrar una raíz múltiple x^* de multiplicidad m de una ecuación no lineal $f(x) = 0$, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por la siguiente función de iteración:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}m(m+1)\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{1}{2}(m-1)^2\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \quad (3.1)$$

Decimos que r es el radio de la bola de convergencia local si la sucesión $\{x_k\}$ generada por este método iterativo, comenzando desde cualquier punto inicial en la bola abierta $B(x^*, r)$, converge a x^* y permanece en la bola. En estos estudios, interesa obtener el mayor valor posible

de r puesto que la bola de convergencia local constituye el dominio de posibles estimaciones iniciales pero obviamente, esto depende de las condiciones que verifica la función no lineal. Aquí consideramos que f satisface las siguientes condiciones continuas de Hölder $\forall x, y \in D$,

$$|f^{(m)}(x^*)^{-1}(f^{(m+1)}(x) - f^{(m+1)}(y))| \leq K_0|x - y|^p, \quad K_0 > 0, p \in]0, 1]. \quad (3.2)$$

$$|f^{(m)}(x^*)^{-1}f^{(m+1)}(x)| \leq K_m, \quad \forall x \in D, \quad K_m > 0. \quad (3.3)$$

Desafortunadamente, la expansión de Taylor utilizada por los autores de [7] en la prueba del Lema 3.2.1 no es correcta. Los mismos autores utilizan la versión correcta del resto en la expansión de Taylor en el artículo "Sobre el radio de convergencia del método de Newton modificado para raíces múltiples bajo la condición Hölder central", véase el Lema 3.2.1 de [34].

En [7], los autores consideran la siguiente fórmula para la expansión de Taylor en un entorno de $x = a$, y con resto integral:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(a) + \frac{1}{3!}(x - a)^3 f'''(a) + \dots \\ & + \frac{1}{n!}(x - a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a))(x - t)^n dt. \end{aligned}$$

Es bien sabido que para una expansión de Taylor de orden n , la derivada evaluada en el resto es de orden $n + 1$, pero si se usa el resto de forma integral, esta derivada es de orden n . Es decir, la expansión de Taylor con forma integral del resto [37] tiene la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + E_n(x),$$

donde

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Otra forma de expresar el error es

$$E_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))(x - t)^{n-1} dt,$$

donde uno puede verificar la última igualdad escribiendo la última integral como $\int_a^x u dv$ con $u = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)$ y $dv = (x - t)^{n-1} dt$.

Para corregir los resultados obtenidos en el trabajo [7], usamos diferentes resultados que involucran diferencias divididas que se introducen en la siguiente sección.

3.2 Preliminares

Recordamos las definiciones de las diferencias divididas y sus propiedades.

Definición 3.1 [38] Las diferencias divididas $f[a_0, a_1, \dots, a_k]$, sobre $k + 1$ puntos diferentes del dominio a_0, a_1, \dots, a_k de una función $f(x)$ están definidas por

$$\begin{aligned} f[a_0] &= f(a_0), \\ f[a_0, a_1] &= \frac{f[a_0] - f[a_1]}{a_0 - a_1}, \\ &\vdots \\ f[a_0, a_1, \dots, a_k] &= \frac{f[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}] - f[a_1, a_2, \dots, a_k]}{a_0 - a_k}. \end{aligned}$$

Si la función f es suficientemente diferenciable, entonces sus diferencias divididas $f[a_0, a_1, \dots, a_k]$ se pueden definir si algunos de los argumentos a_i coinciden. Por ejemplo, si $f(x)$ tiene derivada k -ésima en a_0 , entonces tiene sentido definir

$$f[\underbrace{a_0, a_0, \dots, a_0}_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(a_0)}{k!}. \quad (3.4)$$

LEMA 3.2.1. [38] Las diferencias divididas $f[a_0, a_1, \dots, a_k]$ son funciones simétricas respecto a sus argumentos, es decir, son invariantes bajo permutaciones de $[a_0, a_1, \dots, a_k]$.

LEMA 3.2.2. [39] Si la función f tiene derivada k -ésima, y $f^{(k)}(x)$ es continua en el intervalo $I_x = [\min(x_0, x_1, \dots, x_k), \max(x_0, x_1, \dots, x_k)]$ entonces

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \int_0^1 \dots \int_0^1 t_1^{k-1} t_2^{k-2} \dots t_{k-1} f^{(k)}(t) dt_1 \dots dt_k,$$

$$\text{donde } t = x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + (x_2 - x_1)t_1 t_2 + \dots + (x_k - x_{k-1})t_1 \dots t_k.$$

LEMA 3.2.3. Si la función f tiene derivada $(k + 1)$ -ésima, entonces para cada argumento x , se verifica la siguiente fórmula de interpolación

$$f(x) = f[a_0] + \sum_{i=1}^k f[a_0, a_1, \dots, a_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - a_j) + f[a_0, a_1, \dots, a_k, x] \prod_{i=0}^k (x - a_i).$$

LEMA 3.2.4. Se asume que la función f tiene derivada $(m + 1)$ -ésima, y x^* es una raíz de multiplicidad m , entonces para cada argumento x , definimos funciones $g(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ como

$$\begin{aligned}
g(x) &= f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x], & p(x) &= f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x, x], \\
q(x) &= f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x, x, x].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

entonces

$$g'(x) = p(x), \quad g''(x) = 2q(x). \tag{3.6}$$

LEMA 3.2.5. Si la función f tiene derivada $(m + 1)$ -ésima, y x^* es un cero de multiplicidad m , entonces para cada argumento x , las siguientes relaciones se verifican

$$f(x) = f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x](x - x^*)^m = g(x)(x - x^*)^m. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x, x](x - x^*)^m + mf[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x](x - x^*)^{m-1} \\
&= p(x)(x - x^*)^m + mg(x)(x - x^*)^{m-1}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x, x, x](x - x^*)^m + 2mf[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x, x](x - x^*)^{m-1} \\
&\quad + m(m - 1)[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_m, x](x - x^*)^{m-2} \\
&= 2q(x)(x - x^*)^m + 2mp(x)(x - x^*)^{m-1} + m(m - 1)g(x)(x - x^*)^{m-2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $g(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ están definidas in (3.5).

Demostración. Aplicando Lemma 3.2.2 al caso de raíces múltiples x^* de multiplicidad m , y usando (3.4) y (3.5), obtenemos (3.7). Diferenciando ambos lados de (3.7) da (3.8), y diferenciando ambos lados de (3.8) nuevamente, uno obtiene (3.9). \square

Después de definir las diferencias divididas y sus propiedades y de haber utilizado estos conceptos para definir también las funciones $g(x)$, $p(x)$ y $q(x)$, vamos a realizar un estudio local de convergencia del método elegido bajo las condiciones continuas de Hölder.

LEMA 3.2.6. Sea $r_0 = \frac{m+1}{K_m}$, y $T_{m,p} = \prod_{i=1}^{m+1} (p + i)$. Entonces, bajo las condiciones (3.2) y (3.3) para todo $x_0 \in]x^* - r_0, x^* + r_0[= I_0$ y $e_0 = x_0 - x^*$, las funciones definidas en el Lema 3.2.4, verifican las siguientes cotas:

$$\begin{aligned}
 (B1) \quad & \left| g(x^*)^{-1} p(x_0) \right| \leq \frac{K_m}{m+1}, \\
 (B2) \quad & \left| g(x_0)^{-1} g(x^*) \right| \leq \frac{m+1}{m+1 - K_m |e_0|}, \\
 (B3) \quad & \left| g(x^*)^{-1} q(x_0) e_0 \right| \leq \frac{K_0 m! |e_0|^p}{T_{m,p}}, \\
 (B4) \quad & \left| g(x_0)^{-1} p(x_0) \right| \leq \frac{K_m}{m+1 - K_m |e_0|}, \\
 (B5) \quad & \left| g(x_0)^{-1} q(x_0) e_0 \right| \leq \frac{m+1}{m+1 - K_m |e_0|} \frac{k_0 m!}{T_{m,p}} |e_0|^p.
 \end{aligned}$$

Demostración. Ante todo, por (3.4) y (3.5) obtenemos

$$g(x^*) = f[\underbrace{x^*, x^*, \dots, x^*}_{m+1}] = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!}. \quad (3.10)$$

Usando (3.4), (3.5), condiciones (3.2), (3.3) y Lema 3.2.2, tenemos (B1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & |g(x^*)^{-1} p(x_0)| \\
 &= |g(x^*)^{-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 t_1^m t_2^{m-1} \dots t_m f^{(m+1)}(x^* + e_0 t_1 \dots t_m) dt_1 \dots dt_{m+1}| \quad (3.11) \\
 &\leq \frac{m! K_m}{(m+1)!} = \frac{K_m}{m+1},
 \end{aligned}$$

Utilizando la condición (3.3) y el teorema del valor medio, con el mismo razonamiento que en (B1) y la definición de r_0 , obtenemos

$$|1 - g(x^*)^{-1} g(x_0)| = \left| g(x^*)^{-1} (g(x^*) - g(x_0)) \right| \leq \left| g(x^*)^{-1} g'(\xi_0) e_0 \right| \leq \frac{K_m}{m+1} |e_0| < 1.$$

De esta relación obtenemos que $g(x_0)^{-1}$ existe, por el lema de Banach, tenemos (B2) de la siguiente manera:

$$\left| g(x_0)^{-1} g(x^*) \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{K_m |e_0|}{m+1}} = \frac{m+1}{m+1 - K_m |e_0|}. \quad (3.12)$$

Ahora obtenemos (B3) usando el Lema 3.2.2

$$\begin{aligned}
& |g(x^*)^{-1}q(x_0)e_0| \\
&= |g(x^*)^{-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 t_1^m t_2^{m-1} \dots t_m [f^{(m+1)}(x^* + e_0 t_1 \dots t_{m-1}) \\
&\quad - f^{(m+1)}(x^* + e_0 t_1 \dots t_m)] dt_1 \dots dt_{m+1}| \\
&\leq \int_0^1 t_1^m t_2^{m-1} \dots t_m |g(x^*)^{-1} [f^{(m+1)}(x^* + e_0 t_1 \dots t_{m-1}) \\
&\quad - f^{(m+1)}(x^* + e_0 t_1 \dots t_m)]| dt_1 \dots dt_{m+1} \\
&\leq m! \int_0^1 t_1^m t_2^{m-1} \dots t_m K_0 (t_1 \dots t_{m-1} (1-t_m))^p |e_0|^p dt_1 \dots dt_{m+1} \\
&= K_0 |e_0|^p m! \int_0^1 t_1^{m+p} dt_1 \int_0^1 t_2^{m+p-1} dt_2 \dots \int_0^1 t_{m-1}^{2+p} dt_{m-1} \\
&\quad \int_0^1 t_m (1-t_m)^p dt_m \int_0^1 dt_{m+1} \\
&= K_0 |e_0|^p m! \frac{1}{m+p+1} \frac{1}{m+p} \dots \frac{1}{p+3} \int_0^1 t_m (1-t_m)^p dt_m \\
&= K_0 |e_0|^p m! \frac{1}{m+p+1} \frac{1}{m+p} \dots \frac{1}{p+3} \frac{1}{(p+2)(p+1)} \\
&= \frac{K_0 m! |e_0|^p}{T_{m,p}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

□

(B4) y (B5) son fácilmente deducibles de (B1), (B2) y (B3).

3.3 Resultados principales

En esta sección obtenemos el radio de convergencia local para el método de Osada bajo las condiciones continuas de Hölder dadas por (3.2) y (3.3).

Teorema 3.1. *Sea D un conjunto abierto convexo y no vacío $D \subset \mathbb{R}$ donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $C^m(D)$ con x^* una raíz con multiplicidad m para la ecuación no lineal $f(x) = 0$ y se verifican las condiciones de Hölder (3.2) y (3.3). Sea $r_0 = \frac{m+1}{k_m}$, y sea r_1 la raíz positiva más pequeña de*

la función:

$$h_1(t) = 2m^2(m-1) - \frac{2m(m^2+2m-1)K_m}{m+1}t - \frac{4mK_0m!}{T_{m,p}}t^{p+1} - \frac{4mK_m^2}{(m+1)(m+1-K_mt)}t^2 - \frac{4K_mK_0m!}{T_{m,p}(m+1-K_mt)}t^{p+2}, \quad (3.14)$$

y sea r_2 la raíz positiva más pequeña de la función:

$$h_2(t) = 8(m+1)K_mK_0m!t^{p+2} + (m^2+6m+1)K_m^2T_{m,p}t^2 + 2m(m+1)^2(m+1-K_mt)K_0m!t^{p+1} + 2m(m^2+2m-1)(m+1-K_mt)K_mT_{m,p}t - 2m^2(m^2-1)(m+1-K_mt)T_{m,p},$$

entonces, para un punto inicial $x_0 \in]x^* - r, x^* + r[= I$, donde $r = \min\{r_0, r_1, r_2\}$, la sucesión $\{x_n\}$, $n \geq 0$ generada por el método de Osada (3.1) está bien definida y converge a una razón de orden de $p+2$ a la solución única $x^* \in I_0$. se tiene la siguiente cota del error para todo $k \geq 0$

$$|e_{k+1}| \leq \frac{|e_k|^{p+2}}{r_2^{p+1}} \quad (3.15)$$

Demostración. En primer lugar, justificamos la existencia de valor r_1 debido al hecho que h_1 es continua en el intervalo $]0, r_0[$, con $h_1(0) = 2m^2(m-1) > 0$ y $h_1(r_0) \rightarrow -\infty$. Análogamente h_2 es una función continua en el intervalo $]0, r_0[$ con $h_2(0) > 0$ y $h_2(r_0) < 0$. Entonces, existe al menos una raíz positiva en este intervalo y tomamos r_2 como la menor de ellas. Para $n = 0$, la iteración de Osada se escribe como:

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{2}m(m+1)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{1}{2}(m-1)^2\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}. \quad (3.16)$$

Entonces, asumiendo que x^* es una raíz de multiplicidad m de la función f , tenemos, por el Lema 3.2.5, que

$$f(x) = g(x)(x-x^*)^m, \quad (3.17)$$

donde $g(x)$ ha sido definida en el Lema 3.2.4. Tomando $x_0 \in I$ y usando (3.7), (3.8) y (3.9), tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)e_0^m, \\ f'(x_0) &= p(x_0)e_0^m + g(x_0)me_0^{m-1}, \\ f''(x_0) &= 2q(x_0)e_0^m + 2p(x_0)me_0^{m-1} + g(x_0)m(m-1)e_0^{m-2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Substituyendo (4.9) en (3.16), obtenemos

$$e_1 = \frac{4p(x_0)q(x_0)e_0^4 + p^2(x_0)(m+1)^2e_0^3 + 2g(x_0)q(x_0)m(1-m)e_0^3}{4p(x_0)q(x_0)e_0^3 + 4p^2(x_0)me_0^2 + 2g(x_0)p(x_0)m(3m-1)e_0 + 4mg(x_0)q(x_0)e_0^2 + 2g^2(x_0)m^2(m-1)}.$$

Al tomar A igual al numerador dividido por e_0 y B el denominador, dividiendo ambos por $g(x^*)$ y $g(x_0)$, y denotando los nuevos términos por \hat{A} y \hat{B} , tenemos

$$e_1 = \frac{A}{B} e_0 = \frac{g(x^*)^{-1}g(x_0)^{-1}A}{g(x^*)^{-1}g(x_0)^{-1}B} e_0 = \frac{\hat{A}}{\hat{B}} e_0. \quad (3.19)$$

Ahora, para acotar el cociente $|e_1|$, obtenemos una cota superior para el numerador y una cota inferior para el denominador utilizando las condiciones continuas de Hölder (3.2), y (3.3) y las cotas obtenidas en el Lema 3.2.6 como sigue:

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \left| g(x^*)^{-1}g(x_0)^{-1} \left(4p(x_0)q(x_0)e_0^3 + p^2(x_0)(m+1)^2e_0^2 + 2g(x_0)q(x_0)m(1-m)e_0^2 \right) \right| \\ &\leq 4 \left| g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}q(x_0)e_0 \right| e_0^2 + (m+1)^2 \left| g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}p(x_0) \right| e_0^2 \\ &\quad + 2m(1-m) \left| g(x^*)^{-1}q(x_0)g(x_0)^{-1}g(x_0)e_0 \right| e_0 \\ &\leq 4 \frac{K_m}{m+1} \frac{m+1}{m+1-K_m|e_0|} \frac{K_0m!}{T_{m,p}} |e_0|^{p+2} + (m+1)^2 \frac{K_m}{m+1} \frac{K_m}{m+1-K_m|e_0|} |e_0|^2 \\ &\quad + 2m(m-1) \frac{K_0m!}{T_{m,p}} |e_0|^{p+1}. \end{aligned}$$

Entonces, hemos obtenido $|\hat{A}| \leq \varphi(|e_0|)$ con

$$\varphi(t) = \frac{4K_mK_0m!}{T_{m,p}(m+1-K_mt)} t^{p+2} + \frac{(m+1)K_m^2}{m+1-K_mt} t^2 + \frac{2m(m-1)K_0m!}{T_{m,p}} t^{p+1},$$

una función creciente.

Por otra parte, acotamos el denominador usando los límites obtenidos en el Lema 3.2.6 y la propiedad $|a+b| \geq |a| - |b|$,

$$\begin{aligned}
 |\hat{B}| &= |g(x^*)^{-1}g(x_0)^{-1}(4p(x_0)q(x_0)e_0^3 + 4p^2(x_0)me_0^2 + 2g(x_0)p(x_0)m(3m-1)e_0 \\
 &\quad + 4mg(x_0)q(x_0)e_0^2 + 2g^2(x_0)m^2(m-1))| \\
 &= |(4g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}q(x_0)e_0e_0^2 + 4mg(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}p(x_0)e_0^2 \\
 &\quad + 2m(3m-1)g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}g(x_0)e_0 + 4mg(x^*)^{-1}q(x_0)g(x_0)^{-1}g(x_0)e_0^2 \\
 &\quad + 2m^2(m-1)g(x^*)^{-1}g(x_0)g(x_0)^{-1}g(x_0))| \\
 &= |(2m^2(m-1)g(x^*)^{-1}g(x_0) + 2m(3m-1)g(x^*)^{-1}p(x_0)e_0 + 4mg(x^*)^{-1}q(x_0)e_0^2 \\
 &\quad + 4mg(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}p(x_0)e_0^2 + 4g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}q(x_0)e_0e_0^2)| \\
 &\geq 2m^2(m-1) - 2m^2(m-1) \left| g(x^*)^{-1}(g(x^*) - g(x_0)) \right| \\
 &\quad - 2m(3m-1) \left| g(x^*)^{-1}p(x_0) \right| e_0 - 4m \left| g(x^*)^{-1}q(x_0)e_0 \right| e_0 \\
 &\quad - 4m \left| g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}p(x_0) \right| e_0^2 - 4 \left| g(x^*)^{-1}p(x_0)g(x_0)^{-1}q(x_0)e_0 \right| e_0^2 \\
 &\geq 2m^2(m-1) - 2m^2(m-1) \frac{K_m}{m+1} |e_0| - 2m(3m-1) \frac{K_m}{m+1} |e_0| - 4m \frac{K_0 m!}{T_{m,p}} |e_0|^{p+1} \\
 &\quad - 4m \frac{K_m}{m+1} \frac{K_m}{m+1 - K_m |e_0|} |e_0|^2 - 4 \frac{K_m}{m+1} \frac{m+1}{m+1 - K_m |e_0|} \frac{K_0 m!}{T_{m,p}} |e_0|^{p+2} \\
 &\geq 2m^2(m-1) - \frac{2m(m^2 + 2m - 1)K_m}{m+1} |e_0| - \frac{4mK_0 m!}{T_{m,p}} |e_0|^{p+1} \\
 &\quad - \frac{4mK_m^2}{(m+1)(m+1 - K_m |e_0|)} |e_0|^2 - \frac{4K_m K_0 m!}{T_{m,p}(m+1 - K_m |e_0|)} |e_0|^{p+2} = h_1(|e_0|).
 \end{aligned}$$

Entonces, mediante el uso de la función h_1 definida por (3.14) que es decreciente en $]0, r_0[$ y dado que $|e_0| < r_0$, tenemos $|\hat{B}| \geq h_1(|e_0|) > h_1(r_1) = 0$. Por lo tanto, al usar la definición $r = \min\{r_0, r_1, r_2\}$, y notando que φ y h_1 son funciones creciente y decreciente respectivamente, de (3.19) conseguimos

$$|e_1| = \left| \frac{\hat{A}}{\hat{B}} e_0 \right| \leq \frac{\varphi(|e_0|)}{h_1(|e_0|)} |e_0| < \frac{\varphi(r)}{h_1(r)} |e_0| \leq \frac{\varphi(r_2)}{h_1(r_2)} |e_0| = |e_0|.$$

Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que $x_1 \in]x^* - r, x^* + r[= I$. Ahora el mismo proceso se mantiene a partir de x_1 y obteniendo x_2 y, utilizando un procedimiento inductivo, uno tiene $x_k \in]x^* - r, x^* + r[= I$ para todo $k > 0$ como sigue:

$$|e_{k+1}| \leq \frac{\varphi(r)}{h_1(r)} |e_k| \leq \left(\frac{\varphi(r)}{h_1(r)} \right)^2 |e_{k-1}| \leq \dots \leq \left(\frac{\varphi(r)}{h_1(r)} \right)^{k+1} |e_0|. \quad (3.20)$$

Finalmente, al tomar límites en la última expresión y usando $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varphi(r)}{h_1(r)} \right)^{k+1} = 0$, obtenemos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*$ y así concluimos la prueba de convergencia.

Además, podemos obtener el orden de convergencia volviendo a (3.20) y usando las definiciones de las funciones φ y h_1 , como sigue:

$$|e_1| \leq |e_0| \frac{\frac{4K_m K_0 m!}{T_{m,p}(m+1-K_m |e_0|)} |e_0|^{p+2} + \frac{2m(1-m)K_0 m!}{T_{m,p}} |e_0|^{p+1} + \frac{(m+1)K_m^2}{(m+1-K_m |e_0|)} |e_0|^2}{h_1(e_0)}.$$

Ahora, multiplicamos y dividimos por $|e_0|^{p+1}$ obteniendo

$$|e_1| \leq |e_0|^{p+2} \frac{\frac{4K_m K_0 m!}{T_{m,p}(m+1-K_m |e_0|)} |e_0| + \frac{2m(1-m)K_0 m!}{T_{m,p}} + \frac{(m+1)K_m^2}{(m+1-K_m |e_0|)} |e_0|^{1-p}}{h_1(e_0)}.$$

Observe que la función obtenida en el numerador es creciente en I_0 , de modo que por la definición de r_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq \frac{|e_0|^{p+2}}{r_2^{p+1}} \frac{\left(\frac{4K_m K_0 m!}{T_{m,p}(m+1-K_m r_2)} r_2 + \frac{2m(1-m)K_0 m!}{T_{m,p}} + \frac{(m+1)K_m^2}{(m+1-K_m r_2)} r_2^{1-p} \right) r_2^{p+1}}{h_1(r_2)} \\ &= \frac{|e_0|^{p+2}}{r_2^{p+1}}. \end{aligned}$$

Y por un procedimiento de inducción tenemos $|e_{k+1}| \leq \frac{|e_k|^{2+p}}{r_2^{p+1}}$, por lo tanto se deduce que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^* con orden de convergencia al menos $p+2$. \square

Para mostrar la unicidad, suponemos que existe una segunda solución $y^* \in]x^* - r_0, x^* + r_0[$. Por (4.11) tenemos

$$f(y^*) = g(y^*)(y^* - x^*)^m = 0. \quad (3.21)$$

Al usar el teorema del valor medio, existe φ en I tal que

$$\left| 1 - g(x^*)^{-1}g(y^*) \right| = \left| g(x^*)^{-1}(g(x^*) - g(y^*)) \right| = \left| g(x^*)^{-1}g'(\varphi)|e_0| \right| \leq \frac{K_m|x^* - y^*|}{m+1} < 1,$$

entonces, deducimos que $g(y^*) \neq 0$ y usando (3.21), tenemos que $y^* = x^*$.

3.4 Ejemplos numéricos

En esta sección, comparamos el radio de convergencia local r_H del método de Halley considerado en [35] con los obtenidos en este documento, r_0 , r_1 y r_2 .

Para eso, damos algunos ejemplos para aplicar los resultados teóricos obtenidos y luego podemos corregir los resultados de [7]. Los ejemplos están tomados de [35] y [7] para mostrar la comparación de nuestros resultados con otros ya publicados en la literatura.

3.4.1 Ejemplo 1

Sea $D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, se define la función f sobre D por

$$f(x) = \cos(x) - 1.$$

Obviamente $x^* = 0$ es una raíz de multiplicidad $m = 2$. Luego, los valores para las constantes definidas en (3.2) y (3.3) son: $K_m = 1$ y $K_0 = 1$ con $p = 1$. Usando [35], se consigue $r_H \approx 1,2679$ y al usar los resultados obtenidos en el Teorema 1, obtenemos $r_0 \approx 3,0000$, $r_1 \approx 0,7418$, $r_2 = r \approx 0,6997$.

3.4.2 Ejemplo 2

Sea $D = \mathbb{R}$, se define la función f sobre D por

$$f(x) = x^2(x^2 - 1).$$

Tenemos que $x^* = 0$ es un cero de f con multiplicidad $m = 2$. Luego tomando $p = 1$, $K_m = 12$ y $K_0 = 12$, y usando [35], uno tiene $r_H \approx 0,1152$. Al usar los resultados obtenidos en el Teorema 1, obtenemos $r_0 \approx 0,2500$, $r_1 \approx 0,0646$, $r_2 = r \approx 0,0598$.

3.4.3 Ejemplo 3

Sea $D = \mathbb{R}$, se define la función f sobre D por

$$f(x) = \int_0^x G(x)dx,$$

donde

$$G(x) = \int_0^x (x + \cos(\pi x^2))dx.$$

Tenemos que $x^* = 0$ es un cero de f con multiplicidad $m = 2$. Entonces tenemos $m = 2$, $p = 1$, $K_m = 1 + 2\pi$ y $K_0 = 2\pi$. Usando [35], uno tiene $r_H \approx 0,1892$ y usando los resultados obtenidos en el Teorema 1 obtenemos $r_0 \approx 0,4119$, $r_1 \approx 0,1063$, $r_2 = r \approx 0,0984$.

3.4.4 Ejemplo 4

Sea $D = \mathbb{R}$, y la función definida f sobre D por

$$f(x) = x + \cos(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Tenemos que $x^* = \frac{\pi}{2}$ es una raíz de f con multiplicidad $m = 3$. Entonces tenemos $p = 1$, $K_m = 1$ y $K_0 = 1$. Usando [35], uno consigue $r_H \approx 1,9720$ y usando los resultados obtenidos en el Teorema 1 se obtiene $r_0 \approx 4$, $r_1 \approx 1,5064$, $r_2 = r \approx 1,4283$.

3.4.5 Ejemplo 5

Sea $D = \mathbb{R}$, y la función definida f sobre D por

$$f(x) = x^2 e^x - \sin(x) + x.$$

Tenemos que $x^* = 1$ es una raíz de f con multiplicidad $m = 2$. Entonces tenemos $p = 1$, $K_m = 3,9$ y $K_0 = 5,9$. Usando [35], uno consigue $r_H \approx 0,3439$ y usando los resultados obtenidos en el Teorema 1 conseguimos $r_0 \approx 0,7692$, $r_1 \approx 0,1958$, $r_2 \approx 0,1824$.

3.4.6 Ejemplo 6

Sea $D = \mathbb{R}$, y la función definida f sobre D por

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6.$$

Tenemos que $x^* = 1$ es un cero de f con multiplicidad $m = 3$. Entonces tenemos $p = 1$, $K_m = 4$ y $K_0 = 10$. Usando [35], uno obtiene $r_H \approx 0,5091$ y usando los resultados obtenidos en el Teorema 1 logramos $r_0 \approx 1$, $r_1 \approx 0,3822$, $r_2 = r \approx 0,3584$.

Como conclusión de esta prueba numérica obtenemos el radio de convergencia local para algunos ejemplos en su dominio de definición, es decir tenemos asegurado que en estos intervalos centrados en la solución podemos tomar una estimación inicial de manera que todos los iterados permanecerán en ese intervalo y convergerán a la raíz, utilizando el método iterativo de Osada de tercer orden que corrige los radios obtenidos en [7].

3.5 Dinámica del método de Osada

El comportamiento de los métodos iterativos se ha examinado desde un punto de vista global utilizando ideas de sistemas dinámicos, véase, por ejemplo, [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]. La dinámica compleja es la herramienta más utilizada para el estudio de los métodos iterativos globales, no solo por las buenas propiedades de las funciones analíticas en el dominio complejo, sino también porque proporcionan buenas representaciones gráficas en dos dimensiones.

El método de Osada se usa para aproximar raíces de multiplicidad m , y su función de iteración está dada por

$$G_f(z) = z - \frac{m(m+1)}{2} \frac{f(z)}{f'(z)} + \frac{(m-1)^2}{2} \frac{f(z)}{f''(z)}. \quad (3.22)$$

Consideremos un polinomio con d diferentes raíces de multiplicidad m cada una,

$$f(z) = (z^d - 1)^m, \quad (3.23)$$

con $d, m \geq 2$. La función de iteración del método de Osada (3.22) aplicado a un polinomio de la forma (3.23) es

$$G_f(z) = \frac{(m+1)(z^d - 1)^2 + 2d^2 z^d (mz^d - 1) - d(z^d - 1)((3m+1)z^d - m - 1)}{2dz^{d-1}(1 - d + (dm - 1)z^d)}$$

Los puntos fijos, $G_f(z) = z$, son las soluciones de

$$\frac{(z^d - 1)((3md - m - d - 1)z^d - (m+1)(d-1))}{2dz^{d-1}(1 - d + (dm - 1)z^d)} = 0.$$

Por lo tanto, además de las raíces del polinomio, la d -ésima raíz de 1, G_f tiene otros d puntos fijos, llamados puntos fijos extraños, las d -ésimas raíces de

$$\frac{(m+1)(d-1)}{3md - m - d - 1}.$$

El carácter de los puntos fijos depende del valor de la derivada de la función de iteración,

$$G'_f(z) = \frac{(d-1)(z^d - 1)^2 \left((m^2 d(2d-1) - 3md + m + 1)z^d - (m+1)(d-1)^2 \right)}{2dz^{-d} \left(1 - z^d + d(-1 + mz^d) \right)^2}.$$

Por lo tanto, las raíces z del polinomio son puntos fijos súper atractores, porque $G'_f(z) = 0$, mientras que los d puntos fijos extraños son repelentes porque

$$\begin{aligned} G'_f \left(\left(\frac{(m+1)(d-1)}{3md - m - d - 1} \right)^{\frac{1}{d}} \right) &= \frac{4md - 2m - 2d}{(m-1)(d-1)} \\ &= 2 + \frac{2md - 2}{(m-1)(d-1)} > 1, \end{aligned}$$

para $m \geq 2, d \geq 2$.

Trabajando en $\widehat{\mathbb{C}}$, el infinito es también un punto fijo. Mediante el uso de la conjugación $w = \frac{1}{z}$, encontramos que la derivada de $F(w) = 1/G_f(\frac{1}{w})$ en $w = 0$,

$$F'(0) = 1 + \frac{2(md-1) + (m-1)(d-1)}{(2m(d-1) + m-1)(d-1)}$$

es mayor que 1 para $m \geq 2, d \geq 2$, para que el punto en el infinito sea repelente.

La conectividad del conjunto de Julia se relaciona con la cantidad de puntos fijos repelentes de G_f (ver [48]). Los planos dinámicos en las figuras muestran que no está conectado, de modo que hay al menos dos puntos fijos repelentes. De hecho, hemos demostrado que G_f tiene d puntos fijos repelentes.

Las figuras correspondientes a polinomios con d raíces de multiplicidad m son bastante similares a los planos dinámicos del método de Newton para polinomios con d raíces simples, lo cual es muy notable para un método de orden superior y raíces múltiples.

En resumen, el método de Osada tiene un buen comportamiento dinámico para los polinomios considerados, porque las raíces son puntos fijos súper atractores de la función de iteración, y sus otros puntos fijos, incluido el infinito, son repelentes.

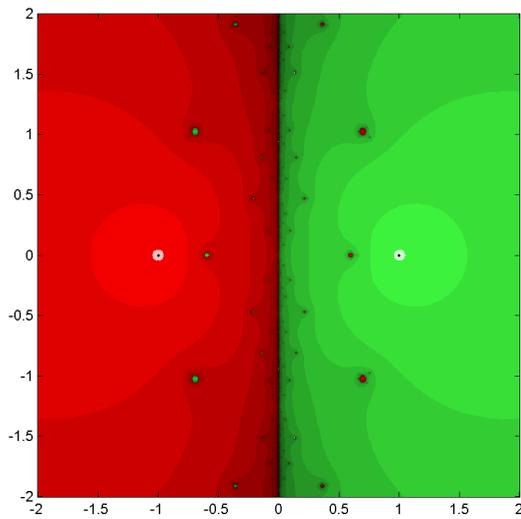


Figura 3.1: Plano dinámico de G_f para $d = 2, m = 2$. Cada cuenca contiene pequeñas inclusiones de la otra.

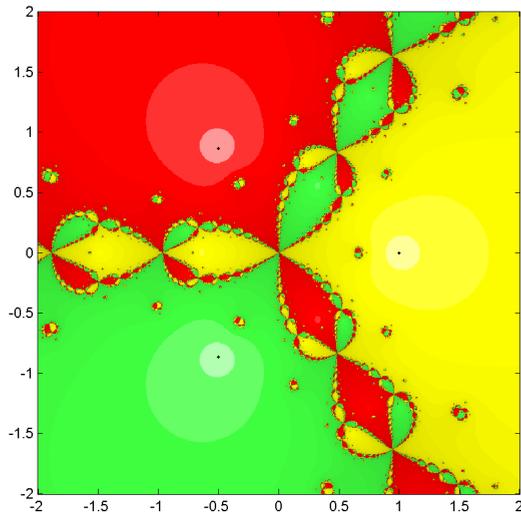


Figura 3.2: Plano dinámico de G_f para $d = 3, m = 3$. Las inclusiones en una cuenca contienen puntos de las otras cuencas.

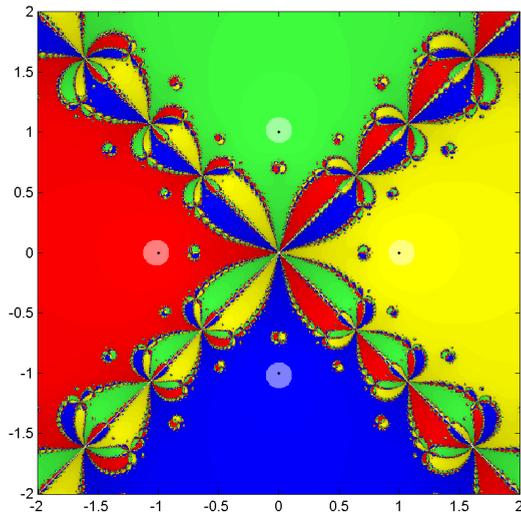


Figura 3.3: Plano dinámico de G_f para $d = 4, m = 4$.

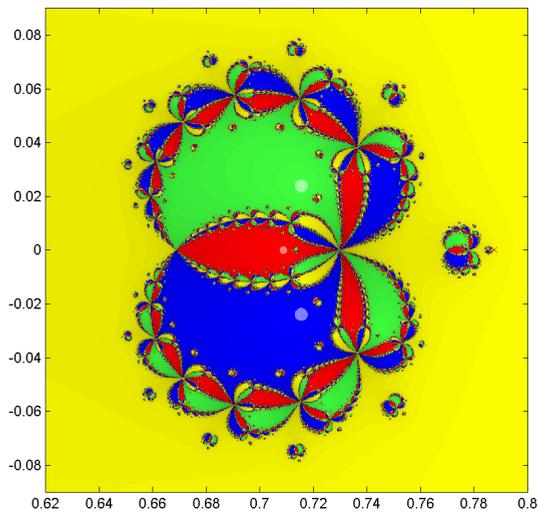


Figura 3.4: Detalle del plano dinámico de G_f para $d = 4, m = 4$ cerca del punto fijo extraño $z = 0,78$, marcado con una x roja.

Estudio de convergencia local para un método óptimo de cuarto orden y su extensión a octavo orden de convergencia óptimo

Basado en [4]: Local convergence balls for nonlinear problems with multiplicity and their extension to eighth-order convergence. *Mathematical Problems in Engineering*.

4.1 Introducción

En el caso unidimensional, existen ecuaciones no lineales $f(x) = 0$ con raíces simples o múltiples que se pueden resolver transformando la ecuación dada en una ecuación de punto fijo $g(x) = x$ que es una función de iteración que describe diferentes métodos iterativos según sea elegida.

Si se cumplen las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach, construimos un proceso iterativo o sucesión de iterados $x_{k+1} = g(x_k)$ $k = 0, 1, \dots$, a partir de una estimación inicial x_0 de la solución.

Este proceso es la base del estudio de los métodos iterativos en los cuales se comprueba que si la sucesión x_k converge y la función de iteración es continua entonces el límite es un punto fijo de g y dado que $f(x) = 0$ es equivalente a $g(x) = x$, este límite es la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Raíces múltiples

Definición 4.1. x^* es una raíz de multiplicidad $m \geq 1$ de una función f si existe una función $g(x)$ continua en x^* tal que $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$ y $g(x^*) \neq 0$.

Esto es, raíces x^* que verifican:

$$f(x^*) = 0, f'(x^*) = 0, \dots, f^{(m-1)}(x^*) = 0 \quad y \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

donde $m \geq 1$ es la multiplicidad de la raíz.

Es bien conocido que los métodos iterativos, para este caso, convergen de manera más lenta, por lo que podemos encontrar en la literatura, modificaciones de estos métodos que mejoran el proceso de convergencia. Concretamente, revisaremos los métodos denominados “mejorados” o “modificados”.

La construcción de métodos iterativos óptimos multipaso de orden superior para hallar raíces múltiples con multiplicidad $m \geq 1$ de la función involucrada f (donde $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en la región cerrada que incluye el cero requerido) es una de las tareas más difíciles, desafiantes e importantes en el campo del análisis numérico. La importancia primordial de los métodos iterativos óptimos multipaso en la clase de funciones iterativas multipunto se debe a que superan las limitaciones teóricas de los métodos iterativos de un punto con respecto tanto a la eficiencia computacional como al orden de convergencia (para obtener detalles, se pueden ver algunos libros de texto estándar como Traub [25] and Petković et al [49]).

Sin dudas, con el avance de la computación digital, la aritmética computacional avanzada y la computación simbólica, la construcción de métodos multipunto de orden superior se vuelve más vital y necesario debido a que el cálculo del término constante de error asintótico o las ecuaciones del error de los métodos iterativos para raíces múltiples puede programarse algorítmicamente para realizar los cálculos pertinentes de forma más cómoda que en tiempos anteriores. Por lo tanto, en la última década, varios académicos de todo el mundo como Li et al. [50] en (2009), Neta [51] y Li et al. [52] in (2010), Zhou et al. [53] en (2011), Sharifi et al. [54] en (2012), Soleymani y Babajee [55], Soleymani et al. [56] y Zhou et al. [57] en (2013), Hueso et al. [31] y Behl et al. [58] en (2015) y Behl et al. [59] en (2016) han propuesto métodos iterativos multipunto de cuarto orden. Solo los métodos o esquemas iterativos presentados por Li et al. [52] (excepto solo dos métodos) y Neta [51] no son óptimos y el resto de los métodos multipunto enumerados anteriormente son óptimos según la clásica conjetura de Kung-Traub [26]. La mayoría de ellos son la extensión del método de Newton modificado (también conocido como el método de Rall [25]) o Newton como un método a expensas de evaluaciones funcionales adicionales o del aumento de subpasos de los métodos originales.

En años recientes, muchos investigadores han intentado construir esquemas iterativos óptimos para aproximar las raíces múltiples que alcancen orden de convergencia superior a cuatro.

En 2015, Geum et al. [60] proponen un esquema iterativo de sexto orden de dos puntos basado en un enfoque de función peso bivariable para raíces múltiples, que se da a continuación:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad m > 1, \\ x_{k+1} &= y_k - Q(u_k, s_k) \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde, $u_k = \sqrt[m]{\frac{f(y_k)}{f(x_k)}}$, $s_k = \sqrt[m-1]{\frac{f'(y_k)}{f'(x_k)}}$ y $Q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomórfica en un entorno del origen $(0, 0)$.

El esquema anterior (4.1) usa cuatro evaluaciones funcionales para alcanzar la convergencia de sexto orden con el índice de eficiencia $6^{\frac{1}{4}} = 1,5650$. Según la clásica conjetura de Kung-Traub [26], los esquemas no son óptimos. Además de esto, el esquema (4.1) tampoco funciona para raíces simples (es decir, $m=1$).

En 2017, Zafar et al. [61] propusieron un nuevo esquema de octavo orden para una multiplicidad conocida $m \geq 1$ de la raíz múltiple deseada, con la siguiente función de iterativa

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - m u_k H(u_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - u_k v_k (A_2 + A_3 u_k) P(v_k) G(w_k) \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros libres y las funciones peso $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones analíticas en un entorno del origen, con $u_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, $v_k = \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, $w_k = \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Recientemente, encontramos un trabajo interesante debido a Geum, Kim y Neta, ver [62], dado por

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= x_k - m L_f(u_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - m H_f(u_k, v_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $L_f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es analítica en un entorno de 0 y $H_f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, es holomorífica en un entorno de $(0, 0)$ y u_n, v_n son ramas analíticas apropiadas de la m -ésima raíz. En este trabajo los autores no solo han construido una nueva familia genérica del método óptimo tipo Newton modificado de octavo orden para raíces múltiples, sino también han estudiado su comportamiento dinámico; también este tipo de estudio se presentó en [63].

Pero, ninguno de estos esquemas ha sido estudiado desde su tratamiento de convergencia local en los espacios de Banach. Los estudios de este tipo tienen un interés especial desde un punto de vista matemático, ya que nos permiten obtener las bolas de convergencia locales, que son bolas contenidas en el dominio de la función con centro en la solución y donde cualquier punto de esta bola puede ser tomado como un punto de partida para obtener la sucesión de iteraciones que converge a la raíz.

Por lo tanto, nuestro objetivo es introducir métodos iterativos de alto orden de convergencia y realizar un estudio de la convergencia local de estos.

Para ello, comenzaremos con extender para el caso de raíces múltiples, el método óptimo de octavo orden para raíces simples de Chun y Neta [64].

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[\phi_f(v_k) + \frac{f(z_k)}{f(y_k) - af(z_k)} + \frac{4f(z_k)}{f(x_k)} \right], \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $v_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$, $\phi_f(v_k)$ es una función de peso con valores reales y a es un parámetro real.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 4,2, nuestro objetivo es realizar un estudio de convergencia local de este método ampliado. Dado que el radio de convergencia local para los métodos de orden superior disminuye con el orden, es necesario estudiar su comportamiento cuando presentamos un nuevo método iterativo. En esta investigación, presentamos una nueva idea para establecer los resultados de convergencia local de métodos iterativos para hallar raíces múltiples, bajo el supuesto de una condición de acotamiento para la derivada $(m+1)$ -ésima de la función $f(x)$.

En la sección 4,3, presentamos un esquema óptimo con convergencia de octavo orden para ceros múltiples con multiplicidad $m \geq 1$. El esquema propuesto es la extensión del esquema de Chun y Neta [64]. Además, todo su artículo se convierte en el caso especial de nuestro esquema propuesto para $m = 1$. La familia propuesta requiere cuatro evaluaciones funcionales para obtener una convergencia de octavo orden con el índice de eficiencia $8^{\frac{1}{4}} = 1,6817$, que es mayor que el índice de eficiencia de cualquiera de los métodos para raíces múltiples en literatura y de las familias de Thukral [65] y Geum et al. [60, 66].

En la sección 4.4, presentamos varias pruebas numéricas sobre algunos problemas de la vida real que confirman los resultados teóricos establecidos en este capítulo y muestran la validez, precisión y eficiencia de nuestro método iterativo propuesto. Finalmente, presentamos algunas observaciones finales en la sección 4.5.

4.2 Convergencia local de un esquema óptimo de cuarto orden

Usando los dos primeros pasos de la familia Chun y Neta (4.4) para raíces simples, podemos obtener un esquema óptimo de cuarto orden para raíces múltiples de $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ implementándolo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ x_{k+1} &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $u_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $v_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{m}}$. Aunque (4.5) usa solo valores reales, el valor v_k puede ser extendido a valor complejo empleando una rama principal cuya descripción detallada se da en [26, 65]. Además de la convergencia óptima, la belleza de este esquema es que podemos obtener fácilmente el esquema de Chun y Neta [64] como un caso especial del algoritmo anterior para $m = 1$.

En esta sección, nuestro objetivo es obtener un resultado de convergencia local para el método óptimo de dos pasos de cuarto orden del nuevo método descrito por (4.5).

Buscamos el radio de la bola de convergencia local, es decir, un número positivo real r tal que la sucesión x_k generada por este método iterativo, a partir de cualquier punto en la bola abierta $]x^* - r, x^* + r]$, permanezca en esta bola y converja a x^* . Para este tipo de estudio, el mayor valor de r es el mejor; sin embargo, esto dependerá obviamente de las condiciones que satisfaga la función no lineal.

Este tipo de estudio se ha realizado para métodos de segundo y tercer orden. Consulte [67] donde los autores obtienen una estimación del radio de convergencia del conocido método de Newton modificado para raíces múltiples cuando la función involucrada satisface una condición continua de Hölder y Hölder central. Este resultado se mejora en [34]. Los métodos de tercer orden se han considerado en [35] y [7]. En estos artículos, los autores establecen el estudio de convergencia local utilizando diferentes propiedades de diferencias divididas. Nosotros no seguimos esta línea de investigación. En su lugar, utilizamos los desarrollos de Taylor para introducir un nuevo conjunto de cotas para garantizar la convergencia. Note que los autores en [7] también usan los desarrollos de Taylor, pero trabajan de una manera diferente a nuestra técnica.

LEMA 4.2.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en el dominio abierto I , que contiene x^* una raíz con multiplicidad m con $m \geq 1$, de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Luego, para todo $x \in I$, la función $f(x)$ se puede expresar como*

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x), \quad g(x^*) \neq 0, \quad (4.6)$$

where

$$g(x) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 [f^{(m)}(x^* + \theta(x-x^*)) - f^{(m)}(x^*)](1-\theta)^{m-1} d\theta. \quad (4.7)$$

Demostración. Al aproximar la función $f(x)$ con el desarrollo de Taylor alrededor de la raíz múltiple x^* y realizar algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} (x-x^*)^m + \int_{x^*}^x \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} (x-t)^m dt \\ &= \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} (x-x^*)^m + \frac{1}{(m-1)!} \int_{x^*}^x [f^{(m)}(t) - f^{(m)}(x^*)](x-t)^{m-1} dt \\ &= \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} (x-x^*)^m + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 [f^{(m)}(x^* + \theta(x-x^*)) - f^{(m)}(x^*)](x-x^*)^m (1-\theta)^{m-1} d\theta \\ &= \left[\frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 [f^{(m)}(x^* + \theta(x-x^*)) - f^{(m)}(x^*)](1-\theta)^{m-1} d\theta \right] (x-x^*)^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos la expresión de la función $g(x)$ dada en (4.7). \square

LEMA 4.2.2. *Bajo las mismas condiciones del Lema 4.2.1, la función $g(x)$ satisface*

$$\begin{aligned} g(x^*) &= \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} \\ g'(x) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 f^{(m+1)}(x^* + \theta(x-x^*)) \theta (1-\theta)^{m-1} d\theta. \end{aligned}$$

Demostración. El Lema 4.2.2 se demuestra por diferenciación directa bajo el operador integral de (4.7). \square

El resultado del Lema 4.2.2 sugiere que consideramos la siguiente propiedad de acotación para obtener el estudio de convergencia local:

$$\left| f^{(m)}(x^*)^{-1} f^{(m+1)}(x) \right| \leq k_1, \quad \forall x \in I \quad (4.8)$$

donde, k_1 es un número real positivo. Primero obtenemos ciertas cotas que usaremos para nuestro estudio de convergencia local. Definimos $r_0 = \frac{m}{k_1}$, tomando un punto inicial $x_0 \in I_0 =]x^* - r_0, x^* + r_0]$ y denotando el error local por $|e_0| = |x_0 - x^*| < r_0$ tenemos los siguientes resultados

LEMA 4.2.3. *Bajo las mismas condiciones del Lema 4.2.1 para todo $x_0 \in I_0$ obtenemos las siguientes cotas:*

$$\begin{aligned}
 (B_1) \quad & \left| g(x^*)^{-1}g(x_0) \right| \leq \frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1}, \\
 (B_2) \quad & \left| g(x^*)^{-1}g'(x_0) \right| \leq \frac{k_1}{m+1}, \\
 (B_3) \quad & \left| g(x_0)^{-1}g(x^*) \right| \leq \frac{m+1}{m+1-k_1|e_0|}, \\
 (B_4) \quad & \left| g(x_0)^{-1}g'(x_0) \right| \leq \frac{k_1}{m+1-k_1|e_0|}.
 \end{aligned}$$

Demostración. Mediante el uso del Lema 4.2.2 y (4.8) y aplicando el teorema del valor medio, tenemos (B_1)

$$\begin{aligned}
 \left| g(x^*)^{-1}g(x_0) \right| &= \left| 1 + m \int_0^1 f^{(m)}(x^*)^{-1} [f^{(m)}(x^* + \theta(x_0 - x^*)) - f^{(m)}(x^*)] (1-\theta)^{m-1} d\theta \right| \\
 &\leq \left| 1 + m \int_0^1 f^{(m)}(x^*)^{-1} f^{(m+1)}(x_1^*) \theta |e_0| (1-\theta)^{m-1} d\theta \right| \leq \frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1},
 \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado $\int_0^1 \theta(1-\theta)^{m-1} d\theta = \frac{1}{m(m+1)}$.

Un razonamiento similar nos permite obtener (B_2)

$$\left| g(x^*)^{-1}g'(x_0) \right| = \left| m! f^{(m)}(x^*)^{-1} \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 f^{(m+1)}(x^* + \theta(x_0 - x^*)) \theta (1-\theta)^{m-1} d\theta \right| \leq \frac{k_1}{m+1}.$$

Utilizamos el teorema del valor medio para derivar (B_3) donde para algún φ entre x^* y x_0 ,

$$\left| 1 - g(x^*)^{-1}g(x_0) \right| = \left| g(x^*)^{-1}(g(x^*) - g(x_0)) \right| = \left| g(x^*)^{-1}g'(\varphi)|e_0| \right| \leq \frac{k_1|e_0|}{m+1} < 1,$$

donde en la última desigualdad hemos usado la cota anterior (B_2) , de esto, primero obtenemos que $g(x_0) \neq 0$, por lo que existe $g(x_0)^{-1}$ y podemos aplicar el lema de Banach tal que

$$\left| g(x_0)^{-1}g(x^*) \right| \leq \frac{m+1}{m+1-k_1|e_0|}.$$

□

Las siguientes cotas se pueden conseguir obviamente utilizando las anteriores.

4.2.1 Resultado principal

Ahora podemos establecer el resultado principal para obtener el radio de convergencia local del nuevo método iterativo de orden óptimo introducido en (4.5).

Teorema 4.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto, convexo y no vacío y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ está en $C^m(I)$ con x^* una raíz de multiplicidad m para la ecuación $f(x) = 0$. Si se cumplen las condiciones de contorno (4.8), sea $r_0 = \frac{m}{k_1}$. Entonces existe $r \leq r_0$ tal que, para cualquier punto inicial $x_0 \in]x^* - r_0, x^* + r_0] = I_0$, la sucesión $\{x_k\}$, $k \geq 0$ generada por (4.5) está bien definida, permanece en I_0 y converge a la solución x^* , que es la única solución en $]x^* - r_0, x^* + r_0]$.*

Demostración. Como se ha indicado en el Lema 4.2.1 para la solución x^* de multiplicidad m , tenemos para todo $x_0 \in I$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0)(x_0 - x^*)^m = g(x_0)e_0^m, \\ f'(x_0) &= g'(x_0)e_0^m + mg(x_0)e_0^{m-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, comenzamos un procedimiento de inducción en el que para $n = 0$ la iteración de cuarto orden de (4.5) se escribe como:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 - mu_0, \\ x_1 &= x_0 - mu_0 \left[v_0^2 - \frac{1}{v_0 - 1} \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

luego, restando x^* a ambos lados del primer paso y sustituyendo (4.9), obtenemos

$$\tilde{e}_1 = y_0 - x^* = \frac{g'(x_0)e_0}{g'(x_0)e_0 + mg(x_0)}e_0 = \frac{g(x^*)^{-1}g'(x_0)e_0/m}{g(x^*)^{-1}g'(x_0)e_0/m + g(x^*)^{-1}g(x_0)}e_0. \quad (4.11)$$

Para aplicar el lema de Banach al denominador, aplicando el teorema del valor medio, se sigue que

$$\begin{aligned} |1 - g(x^*)^{-1}g'(x_0)e_0/m - g(x^*)^{-1}g(x_0)| &\leq |g(x^*)^{-1}(g(x^*) - g(x_0))| + |g(x^*)^{-1}g'(x_0)||e_0/m| \\ &\leq \frac{k_1|e_0|}{m} < 1, \end{aligned}$$

entonces tenemos $|(g(x^*)^{-1}g'(x_0)e_0/m + g(x^*)^{-1}g(x_0))^{-1}| < \frac{m}{m - k_1|e_0|}$ y por lo tanto,

$$|\tilde{e}_1| \leq \frac{k_1|e_0|}{(m+1)(m - k_1|e_0|)}|e_0| = G_1(|e_0|)|e_0|, \quad (4.12)$$

donde $G_1(t)$ es una función creciente que se define de la siguiente manera:

$$G_1(t) = \frac{k_1 t}{(m+1)(m-k_1 t)}$$

entonces, al tomar $h_1(t) = G_1(t) - 1$, se satisface $h(0) = -1$ y $h(r_0) \rightarrow +\infty$. Tomamos la raíz real positiva más pequeña de esta función, $r_1 \in]0, r_0[$, y luego $0 < G_1(t) < 1 \quad \forall t \in]0, r_1[$. Volviendo a (4.12) obtenemos:

$$\tilde{e}_1 < G_1(|e_0|)|e_0| < |e_0|.$$

Ahora al restar x^* de ambos lados del segundo paso en (4.5), uno tiene:

$$e_1 = x_1 - x^* = e_0 - \frac{v_0^3 - v_0^2 - 1}{v_0 - 1}(e_0 - \tilde{e}_1), \quad (4.13)$$

y, después de aplicar (4.9) tenemos

$$v_0 = \left(\frac{f(y_0)}{f(x_0)} \right)^{1/m} = \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{1/m} \frac{\tilde{e}_1}{e_0} = \frac{g'(x_0)e_0}{g'(x_0)e_0 + mg(x_0)} \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{1/m}.$$

Sustituyendo en (4.11), se deduce que

$$e_1 = e_0 - \frac{mg(x_0)e_0}{mg(x_0) - g'(x_0)e_0 \left(\left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{1/m} - 1 \right)} - \frac{mg'(x_0)^2 g(x_0) \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{2/m} e_0^3}{(g'(x_0)e_0 + mg(x_0))^3}. \quad (4.14)$$

Si denotamos $C = \left(\left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{1/m} - 1 \right)$ y asignamos \tilde{D}_1 y \tilde{D}_2 a los denominadores de la expresión anterior, obtenemos $e_1 = \frac{\tilde{N}}{\tilde{D}}$, donde \tilde{D} es el denominador común y \tilde{N} el correspondiente numerador:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= mg(x_0) - g'(x_0)C e_0, \\ \tilde{D}_2 &= (g'(x_0)e_0 + mg(x_0))^3, \\ D &= \tilde{D}_1 \tilde{D}_2, \\ \tilde{N} &= \tilde{D}_1 \tilde{D}_2 e_0 - \tilde{D}_2 mg(x_0)e_0 - \tilde{D}_1 (mg'(x_0)^2 g(x_0) \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{2/m} e_0^3). \end{aligned}$$

Ahora, expresamos la ecuación de error en los siguientes términos. $e_1 = \frac{N}{D}e_0^2$, con

$$N = -[Cg'(x_0)^4e_0^3 + Cg'(x_0)^3g(x_0)m \left(3 - \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)}\right)^{\frac{2}{m}}\right) e_0^2 + m^2g'(x_0)^2g(x_0)^2 \left(3C - \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)}\right)^{\frac{2}{m}}\right) e_0 + Cm^3g'(x_0)g(x_0)^3]$$

y el denominador

$$D = m^4g(x_0)^4 + m^3(3 - C)g'(x_0)g(x_0)^3e_0 + 3m^2(1 - C)g'(x_0)^2g(x_0)^2e_0^2 + mg'(x_0)^3g(x_0)(1 - 3C)e_0^3 - Cg'(x_0)^4e_0^4.$$

Para aplicar las cotas establecidos a partir de los lemas anteriores, multiplicamos el numerador y el denominador por $g(x^*)^{-4}$ y consideramos a partir de ahora:

$$e_1 = -\frac{g(x^*)^{-4}N}{g(x^*)^{-4}D}e_0^2 = -\frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5}e_0^2,$$

donde N_i, D_i $i = 1, \dots$ son

$$\begin{aligned} N_1 &= m^3C(g(x^*)^{-1}g'(x_0)) \left(g(x^*)^{-1}g(x_0)\right)^3, \\ N_2 &= m^2(g(x^*)^{-1}g'(x_0))^2 \left(g(x^*)^{-1}g(x_0)\right)^2 \left(3C + \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)}\right)^{2/m}\right) e_0, \\ N_3 &= Cm(g(x^*)^{-1}g'(x_0))^3 \left(g(x^*)^{-1}g(x_0)\right) \left(3 - \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)}\right)^{2/m}\right) e_0^2, \\ N_4 &= C(g(x^*)^{-1}g'(x_0))^4 e_0^3, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 D_1 &= m^4 \left(g(x^*)^{-1} g(x_0) \right)^4, \\
 D_2 &= m^3 (3 - C) \left(g(x^*)^{-1} g'(x_0) \right) \left(g(x^*)^{-1} g(x_0) \right)^3 e_0, \\
 D_3 &= 3m^2 (1 - C) \left(g(x^*)^{-1} g'(x_0) \right)^2 \left(g(x^*)^{-1} g(x_0) \right)^2 e_0^2, \\
 D_4 &= m(1 - 3C) \left(g(x^*)^{-1} g'(x_0) \right)^3 g(x^*)^{-1} g'(x_0) e_0^3 \\
 D_5 &= -C e_0^4 \left(g(x^*)^{-1} g'(x_0) \right)^4 e_0^4.
 \end{aligned}$$

Usando las cotas establecidos del Lema 4.2.2 y aplicando el teorema del valor medio, existe ζ entre x_0 y y_0 verificando

$$|C| = \left| \left(\frac{g(y_0)}{g(x_0)} \right)^{1/m} - 1 \right| \leq |g(x_0)|^{-1/m} |g(x_0)^{1/m} - g(y_0)^{1/m}| \leq \frac{1}{m} |g(x_0)|^{-1/m} |g'(\zeta) g(\zeta)^{\frac{1-m}{m}} (x_0 - y_0)|$$

Luego, si $|g(x_0)| \leq |g(\zeta)|$ tenemos que $|g(x_0)|^{(1-m)/m} \geq |g(\zeta)|^{(1-m)/m}$ así

$$\begin{aligned}
 |C| &\leq \frac{1}{m} |g(x_0)|^{-1/m} |g'(\zeta)| |g(\zeta)|^{\frac{1-m}{m}} |x_0 - y_0| \leq \frac{1}{m} |g(x_0)|^{-1/m} |g'(\zeta)| |g(x_0)|^{\frac{1-m}{m}} |x_0 - y_0| \\
 &\leq \frac{1}{m} |g(x_0)|^{-1} |g'(\zeta)| |x_0 - y_0| \leq \frac{1}{m} \frac{k_1}{m+1-k_1|e_0|} (1 + G_1(|e_0|)) |e_0|.
 \end{aligned}$$

Un razonamiento similar es aplicado si $|g(x_0)| \geq |g(\zeta)|$, donde entonces se sostiene que $|g(x_0)|^{-1/m} \leq |g(\zeta)|^{-1/m}$ y así se obtiene la misma cota para C . Al usar esta cota y las de Lema 4.2.3, tenemos las siguientes cotas para los términos del numerador

$$\begin{aligned}
 |N_1| &\leq m^3 \frac{k_1(1 + G_1(|e_0|))|e_0|}{m(m+1-k_1|e_0|)} \frac{k_1}{m+1} \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^3 = n_1(|e_0|), \\
 |N_2| &\leq m^2 \left(\frac{k_1}{m+1} \right)^2 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^2 \left(\frac{3}{m} \frac{k_1(1 + G_1(|e_0|))|e_0|}{m+1-k_1|e_0|} + \left(\frac{m+1+k_1G_1(|e_0|)|e_0|}{m+1-k_1|e_0|} \right)^{2/m} |e_0| \right) \\
 &= n_2(|e_0|), \\
 |N_3| &\leq m \frac{k_1(1 + G_1(|e_0|))}{m(m+1-k_1|e_0|)} \left(\frac{k_1}{m+1} \right)^3 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right) \left(3 + \left(\frac{m+1+k_1G_1(|e_0|)|e_0|}{m+1-k_1|e_0|} \right)^{2/m} \right) |e_0|^2 \\
 &= n_3(|e_0|), \\
 |N_4| &\leq \left(\frac{k_1}{m+1} \right)^4 \frac{k_1(1 + G_1(|e_0|))|e_0|}{m(m+1-k_1|e_0|)} |e_0|^3 = n_4(|e_0|).
 \end{aligned}$$

Consideremos primero el primer término del denominador, D_1 . Recordando que $|a - b| \geq |a| - |b|$, tenemos

$$\begin{aligned} |D_1| &= |m^4 g(x^*)^{-4} g(x_0)^4| = |m^4 - m^4 g(x^*)^{-4} (g(x^*)^4 - g(x_0)^4)| \\ &\geq |m^4| - |m^4 g(x^*)^{-4} (g(x^*)^4 - g(x_0)^4)|. \end{aligned}$$

Si aplicamos el teorema del valor medio a la función $g(x)^4$, se deduce que existe δ entre x^* y x_0 con

$$g(x^*)^4 - g(x_0)^4 = 4g(\delta)^3 g'(\delta)(x^* - x_0),$$

de modo que utilizando las cotas (B_1) y (B_2) resulta que

$$\begin{aligned} |g(x^*)^{-4} (g(x^*)^4 - g(x_0)^4)| &= |4g(x^*)^{-3} g(\delta)^3 g(x^*)^{-1} g'(\delta)(x^* - x_0)| \\ &\leq 4 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^3 \frac{k_1}{m+1} |e_0|. \end{aligned}$$

D_1 entonces satisface

$$|D_1| \geq m^4 - 4m^4 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^3 \frac{k_1}{m+1} |e_0|,$$

y los otros términos en el denominador satisfacen igualmente

$$\begin{aligned} |D_2| &\leq m^3 \left(3 + \frac{k_1(1+G_1(|e_0|))|e_0|}{m(m+1-k_1|e_0|)} \right) \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^3 \frac{k_1}{m+1} |e_0| = d_2(|e_0|), \\ |D_3| &\leq 3m^2 \left(2 + \frac{k_1(1+G_1(|e_0|))|e_0|}{m(m+1-k_1|e_0|)} \right) \left(\frac{k_1}{m+1} \right)^2 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^2 |e_0|^2 = d_3(|e_0|), \\ |D_4| &\leq m \left(1 + \frac{3k_1(1+G_1(|e_0|))|e_0|}{m(m+1-k_1|e_0|)} \right) \left(\frac{k_1}{m+1} \right)^3 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right) |e_0|^3 = d_4(|e_0|) \\ |D_5| &\leq \left(\frac{k_1(1+G_1(|e_0|))|e_0|}{m(m+1-k_1|e_0|)} \right) \left(\frac{k_1}{m+1} \right)^4 |e_0|^4 = d_5(|e_0|) \end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} |D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5| &\geq |D_1| - |D_2 + D_3 + D_4 + D_5| \\ &\geq m^4 - 4m^4 \left(\frac{m+1+k_1|e_0|}{m+1} \right)^3 \frac{k_1}{m+1} |e_0| - |D_2| - |D_3| - |D_4| - |D_5|. \end{aligned}$$

Observe que la cota precedente puede resultar en un valor negativo, por lo que definimos la función $G_2(t)$ con $t \geq 0$ tal que:

$$G_2(t) = m^4 - 4m^4 \left(\frac{m+1+k_1t}{m+1} \right)^3 \frac{k_1}{m+1} t - d_2(t) - d_3(t) - d_4(t) - d_5(t),$$

G_2 satisface $G_2(0) > 0$ y $G_2(r_0) \rightarrow -\infty$, por lo que existe r_2 , la raíz positiva más pequeña en $]0, r_0[$, tal que $G_2(t) > 0 = G_2(r_2)$, $\forall t \in]0, r_0[$. Si tomamos x_0 tal que $|e_0| = x_0 - x^* < r_2$, entonces

$$|D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5| \geq G_2(|e_0|) \geq G_2(r_2) = 0.$$

Entonces, si tomamos $\tilde{r} = \min \{r_0, r_1, r_2\}$, tenemos para todo $x_0 \in]x^* - \tilde{r}, x^* + \tilde{r}[$

$$|e_1| \leq \frac{n_1(|e_0|) + n_2(|e_0|) + n_3(|e_0|) + n_4(|e_0|)}{G_2(|e_0|)} |e_0|^2 \leq G_3(|e_0|) |e_0|,$$

donde

$$G_3(t) = \frac{n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + n_4(t)}{G_2(t)} t.$$

Definiendo $h_3(t) = G_3(t) - 1$, que satisface $h_3(0) = -1$ y $h_3(r_2) \rightarrow \infty$, existe r_3 , la raíz positiva más pequeña tal que $G_3(t) < 1$, para todo $t \in]0, r_3[$.

Finalmente tomamos $r = \min \{\tilde{r}, r_3\}$ y tenemos para todo $x_0 \in]x^* - r, x^* + r[$:

$$|\tilde{e}_1| \leq G_1(|e_0|) |e_0| < |e_0|,$$

$$|e_1| \leq G_3(|e_0|) |e_0| < |e_0|.$$

$G_3(t)$ es una función creciente para n_i , $i = 1 \dots 4$ siendo cada vez mayor y, $G_2(t)$ Una función decreciente.

El mismo proceso se mantiene a partir de x_1 para obtener x_2 , y luego, mediante un proceso inductivo uno tiene $y_k, x_k \in]x^* - r, x^* + r[$ para toda $k > 0$ utilizando el hecho de que G_1 y G_3 son funciones crecientes de la siguiente manera:

$$|\tilde{e}_k| \leq G_1(r) G_3(r)^{k-1} |e_0| \leq |e_0|$$

$$|e_k| \leq G_3(r) |e_{k-1}| \leq G_3(r)^2 |e_{k-2}| \leq \dots \leq G_3(r)^k |e_0| < |e_0|$$

donde $|\tilde{e}_k| = |y_{k-1} - x^*|$ y $|e_k| = |x_k - x^*|$.

Tomando límites en las últimas expresiones y usando eso $\lim_{k \rightarrow +\infty} G_3(r)^k = 0$, obtenemos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*$. Por lo tanto hemos obtenido r , el radio de la bola de convergencia local. Es decir, para cualquier valor inicial $x_0 \in]x^* - r, x^* + r[$ las sucesiones obtenidas por el método iterativo de cuarto orden. y_k , y x_k permanecen en este intervalo y convergen a la solución x^* .

Para mostrar la unicidad en el intervalo centrado en la solución y radio r_0 , suponemos que existe una segunda solución. $\beta \in]x^* - r, x^* + r[$ y por el Lema 4.2.1 tenemos

$$f(\beta) = g(\beta)(\beta - x^*)^m. \quad (4.15)$$

Mediante el uso de

$$\begin{aligned} \left| 1 - g(x^*)^{-1}g(\beta) \right| &= \left| g(x^*)^{-1}(g(x^*) - g(\beta)) \right| = \left| g(x^*)^{-1}g'(\varphi)|x^* - \beta| \right| \leq \frac{k_1}{m+1}|e_0| \\ &< \frac{m}{m+1} < 1, \end{aligned}$$

deducimos que $g(\beta) \neq 0$ y luego por (4.15) tenemos que $\beta = x^*$. □

4.3 Desarrollo de un esquema óptimo de octavo orden

De manera análoga, como hemos hecho la extensión del método Chun y Neta desde el orden cuatro a las raíces múltiples, introduciendo un paso más, hemos logrado extender este método al orden ocho.

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ z_k &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - mt_k u_k \left[\phi_f(v_k) + \frac{t_k}{v_k - at_k} + 4t_k \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde la función $\phi_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica [37] en un entorno de (0) con $u_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $v_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{m}}$, $t_k = v_k \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)} \right)^{\frac{1}{m}}$ y un parámetro libre $a \in \mathbb{R}$. Además de la convergencia óptima, la belleza de este esquema es que podemos obtener fácilmente el esquema de Chun y Neta [64] como un caso especial del algoritmo anterior para $m = 1$.

En el teorema 4.2, demostramos que el orden de convergencia del esquema propuesto llegará a ocho sin utilizar ninguna evaluación funcional adicional. Es interesante observar que ϕ_f contribuye con su parte en la construcción de la convergencia de octavo orden deseada (para más detalles, consulte el Teorema 4.2).

Teorema 4.2. *Sea $x = x^*$ una raíz múltiple con multiplicidad $m \geq 1$ de una función analítica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en una región que incluya el cero requerido de $f(x)$. Entonces, el esquema definido por (4.16) tiene una convergencia de octavo orden si se cumplen las siguientes expresiones*

$$\phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 2, \quad \phi''(0) = 4, \quad \phi'''(0) = -6. \quad (4.17)$$

Demostración. En primer lugar obtenemos los desarrollos de Taylor para $f(x_k)$ y $f'(x_k)$ en un entorno de la solución x^* .

$$f(x_k) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} e_k^m \left(1 + c_1 e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4 + c_5 e_k^5 + c_6 e_k^6 + c_7 e_k^7 + c_8 e_k^8 + O(e_k^9) \right), \quad (4.18)$$

y

$$f'(x_k) = \frac{f^m(x^*)}{m!} e_k^{m-1} \left(m + (m+1)c_1 e_k + (m+2)c_2 e_k^2 + (m+3)c_3 e_k^3 + (m+4)c_4 e_k^4 + (m+5)c_5 e_k^5 + (m+6)c_6 e_k^6 + (m+7)c_7 e_k^7 + (m+8)c_8 e_k^8 + O(e_k^9) \right), \quad (4.19)$$

donde $c_j = \frac{m!}{(m-1+j)!} \frac{f^{m-1+j}(x^*)}{f^m(x^*)}$, $j = 2, 3, 4, \dots, 8$ y $e_k = x_k - x^*$ es el error en la k -ésima iteración.

Luego, usando las expresiones anteriores (4.18) y (4.19), tenemos

$$u_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{m} e_k - \frac{c_1}{m^2} e_k^2 + \frac{(m+1)c_1^2 - 2mc_2}{m^3} e_k^3 + \sum_{i=0}^4 G_i e_k^{i+4} + O(e_k^9), \quad (4.20)$$

donde $G_i = G_i(m, c_1, c_2, \dots, c_8)$ están dadas en términos de m, c_2, c_3, \dots, c_8 con los dos primeros coeficientes escritos explícitamente como

$$G_0 = \frac{1}{m^4} \left[m(3m+4)c_1 c_2 - 3m^2 c_3 - (m+1)^2 c_1^3 \right]$$

y

$$G_1 = \frac{1}{m^5} \left[2m^2(2m+3)c_1 c_3 - 2m(2m^2+5m+3)c_1^2 c_2 + 2m^2 \left((m+2)c_2^2 - 2mc_4 \right) + (m+1)^3 c_1^4 \right]$$

Nuevamente, utilizando el desarrollo de Taylor para $f(y_k)$ y la expresión (4.20), obtenemos además

$$f(y_k) = f^{(m)}(x^*) e_k^{2m} \left[\frac{\left(\frac{c_1}{m}\right)^m}{m!} + \frac{(2mc_2 - (m+1)c_1^2) \left(\frac{c_1}{m}\right)^m e_k}{m! c_1} + \left(\frac{c_1}{m}\right)^{1+m} \frac{1}{2m! c_1^3} \left\{ (3+3m+3m^2+m^3)c_1^4 - 2m(2+3m+2m^2)c_1^2 c_2 + 4(m-1)m^2 c_2^2 + 6m^2 c_1 c_3 \right\} e_k^2 + \sum_{i=0}^5 \bar{G}_i e_k^{i+3} + O(e_k^9) \right]. \quad (4.21)$$

Con la ayuda de las expresiones (4.18) y (4.21), obtenemos

$$v_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{c_1 e_k}{m} + \frac{2mc_2 - (m+2)c_1^2}{m^2} e_k^2 + \frac{(2m^2 + 7m + 7)c_1^3 + 6m^2 c_3 - 2m(3m+7)c_1 c_2}{2m^3} e_k^3 + \theta_1 e_k^4 + \theta_2 e_k^5 + O(e_k^6). \quad (4.22)$$

donde

$$\theta_1 = \frac{1}{6m^4} \left[12m^2(2m+5)c_1 c_3 + 12m^2((m+3)c_2^2 - 2mc_4) - 6m(4m^2 + 16m + 17)c_1^2 c_2 + (6m^3 + 29m^2 + 51m + 34)c_1^4 \right] \quad y$$

$$\theta_2 = \frac{1}{24m^5} \left[12m^2(10m^2 + 43m + 49)c_1^2 c_3 - 24m^3((5m+17)c_2 c_3 - 5mc_5) + 12m^2 \left((10m^2 + 47m + 53)c_2^2 - 2m(5m+13)c_4 \right) c_1 - 4m(30m^3 + 163m^2 + 306m + 209)c_1^3 c_2 + (24m^4 + 146m^3 + 355m^2 + 418m + 209)c_1^5 \right]$$

Insertando las expresiones (4.18)-(4.22) en el segundo subpaso del esquema (4.16), obtenemos además

$$z_k - x^* = \frac{(m+7)c_1^3 - 2mc_1 c_2}{2m^3} e_k^4 + \sum_{i=0}^3 H_i e_k^{i+5} + O(e_k^9), \quad (4.23)$$

donde $H_i = H_i(m, c_1, c_2, \dots, c_8)$ están dados en términos de m, c_2, c_3, \dots, c_8 con los dos primeros coeficientes escritos explícitamente como

$$H_0 = -\frac{1}{6m^4} \left[(7m^2 + 66m + 89)c_1^4 + 12m^2 c_1 c_3 + 12m^2 c_2^2 - 12m(2m+11)c_1^2 c_2 \right] \quad y$$

$$H_1 = \frac{1}{24m^5} \left[156m^2(m+5)c_1^2 c_3 - 168m^3 c_2 c_3 - 4m(53m^2 + 468m + 655)c_1^3 c_2 + 12m^2((17m+91)c_2^2 - 6mc_4)c_1 + (46m^3 + 533m^2 + 1310m + 991)c_1^5 \right].$$

Nuevamente, con la ayuda de la expansión de la serie de Taylor y la expresión anterior (4.23), tenemos

$$f(z_k) = f^{(m)}(x^*) e_k^{4m} \left[\frac{2^{-m} \left(\frac{(m+7)c_1^3 - 2mc_1 c_2}{m^3} \right)^m}{m!} + \sum_{i=1}^5 \bar{H}_i e_k^i + O(e_k^6) \right]. \quad (4.24)$$

Con la ayuda de las expresiones (4.21) y (4.24), obtenemos además

$$t_k = v_k \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\{(m+7)c_1^3 - 2mc_2\}c_1}{2m^3} e_k^3 + \gamma_1 e_k^4 + \gamma_2 e_k^5 + O(e_k^6), \quad (4.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{6m^4} \left[(7m^2 + 69m + 110)c_1^4 + 12m^2 c_1 c_3 + 12m^2 c_2^2 - 6m(4m + 23)c_1^2 c_2 \right] \quad y \\ \gamma_2 &= \frac{1}{24m^5} \left[12m^2(13m + 69)c_1^2 c_3 + 12m^2((17m + 97)c_2^2 - 6mc_4)c_1 - 168m^3 c_2 c_3 \right. \\ &\quad \left. - 4m(53m^2 + 498m + 811)c_1^3 c_2 + (46m^3 + 567m^2 + 1622m + 1389)c_1^5 \right]. \end{aligned}$$

Se deduce de la expresión (4.22) que v_k es de orden e_k . Por lo tanto, podemos expandir la función peso $\phi_f(v_k)$ en un entorno del origen, utilizando la expansión de la serie de Taylor y ampliarla hasta los términos de cuarto orden de la siguiente manera:

$$\phi_f(v_k) = \phi(0) + \phi'(0)v_k + \frac{1}{2!}\phi''(0)v_k^2 + \frac{1}{3!}\phi'''(0)v_k^3 + \frac{1}{4!}\phi''''(0)v_k^4. \quad (4.26)$$

Al utilizar la expresión (4.18) - (4.26) en el último subpaso del esquema propuesto (4.16), obtenemos

$$e_{k+1} = -\frac{c_1(\phi(0) - 1)\left((m+7)c_1^2 - 2mc_2\right)}{2m^3} e_k^4 + \sum_{i=1}^4 L_i e_k^{i+4} + O(e_k^9), \quad (4.27)$$

donde $L_i = L_i(m, a, \phi(0), \phi'(0), \phi''(0), \phi'''(0), c_1, c_2, \dots, c_8)$.

Cabe destacar que obtendremos al menos quinto orden de convergencia si elegimos

$$\phi(0) = 1. \quad (4.28)$$

Se introduce el valor de $\phi(0) = 1$ en $L_1 = 0$. Entonces, obtenemos

$$\frac{(\phi'(0) - 2)\left((7+m)c_1^2 - 2mc_2\right)c_1^2}{2m^4} = 0, \quad (4.29)$$

lo que conduce al menos a la convergencia de sexto orden, cuando usamos la siguiente expresión

$$\phi'(0) = 2. \quad (4.30)$$

Al sustituir las expresiones (4.28) y (4.30) en $L_2 = 0$, tenemos

$$-\frac{(\phi''(0) - 4)((7 + m)c_1^2 - 2mc_2)c_1^3}{4m^5} = 0, \quad (4.31)$$

de la cual se deduce

$$\phi''(0) = 4. \quad (4.32)$$

Volvemos a usar las expresiones (4.28), (4.30) y (4.32) en $L_3 = 0$. Entonces, obtenemos

$$-\frac{(\phi'''(0) + 6)((7 + m)c_1^2 - 2mc_2)c_1^4}{12m^6} = 0, \quad (4.33)$$

con lo que se consigue

$$\phi'''(0) = -6. \quad (4.34)$$

Finalmente, se sustituyen las expresiones (4.28), (4.30), (4.32) y (4.34) en la expresión (4.27) para obtener el término óptimo constante de error asintótico, que se da como sigue:

$$e_{k+1} = -\frac{c_1((m+7)c_1^2 - 2mc_2)}{48m^7} \left[(\phi''''(0) + 6a(m+7)^2 - 14m^2 - 192m - 730)c_1^4 \right. \\ \left. - 24m(a(m+7) - 2(m+8))c_1^2c_2 + 24(a-1)m^2c_2^2 - 24m^2c_1c_3 \right] e_k^8 + O(e_k^9), \quad (4.35)$$

donde $\phi''''(0)$, $a \in \mathbb{R}$. La expresión (4.35) demuestra que nuestro esquema propuesto (4.16) alcanza octavo orden de convergencia usando solo cuatro evaluaciones funcionales (a saber $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f(y_k)$ y $f(z_k)$) por iteración. Por lo tanto, es un esquema óptimo según la conjetura de Kung-Traub, completando así la demostración. \square

4.3.1 Casos especiales del esquema propuesto

En esta sección, discutiremos algunos casos especiales de nuestro esquema propuesto (4.16) asignando diferentes funciones peso ϕ_f . En este sentido, consulte los siguientes casos, donde hemos mencionado algunos tipos diferentes de miembros del esquema propuesto:

1. Consideremos la siguiente función peso directamente del Teorema 4.2

$$\phi(v_k) = 1 + 2v_k + 2v_k^2 - v_k^3 + v_k^4 \frac{\phi''''(0)}{24}, \quad (4.36)$$

que conduce a la función de iteración

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ z_k &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - mt_k u_k \left[1 + 2v_k + 2v_k^2 - v_k^3 + v_k^4 \frac{\phi''''(0)}{24} + \frac{t_k}{v_k - at_k} + 4t_k \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

resultando un nuevo esquema óptimo con convergencia de octavo orden.

2. Vamos a elegir otra función de peso que satisface las condiciones del teorema 4.2. Entonces, obtenemos

$$\phi(v_k) = \frac{16}{v_k + 2} + 6v_k - 7, \quad (4.38)$$

que produce otro esquema óptimo de octavo orden:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ z_k &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - mt_k u_k \left[\frac{16}{2 + v_k} + 6v_k - 7 + \frac{t_k}{v_k - at_k} + 4t_k \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Satisface el siguiente término constante de error asintótico óptimo

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= -\frac{c_1 \left((m+7)c_1^2 - 2mc_2 \right)}{24m^7} \left[\left(3a(m+7)^2 - 7m^2 - 96m - 359 \right) c_1^4 \right. \\ &\quad \left. + 12(a-1)m^2 c_2^2 - 12m \left(a(m+7) - 2(m+8) \right) c_1^2 c_2 - 12m^2 c_1 c_3 \right] e_k^8 + O(e_k^9). \end{aligned}$$

3. Consideremos una función de peso más de la siguiente forma:

$$\phi(v_k) = \frac{1 - v_k^3}{1 - 2v_k + 2v_k^2}. \quad (4.40)$$

Luego, encontramos otra función de iteración óptima de octavo orden, que se da a continuación:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ z_k &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - mt_k u_k \left[\frac{1 - v_k^3}{1 - 2v_k + 2v_k^2} + \frac{t_k}{v_k - at_k} + 4t_k \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

que tiene el siguiente término constante de error asintótico óptimo

$$e_{k+1} = -\frac{c_1((m+7)c_1^2 - 2mc_2)}{24m^7} \left[(3a(m+7)^2 - 7m^2 - 96m - 437)c_1^4 + 12(a-1)m^2c_2^2 - 12m(a(m+7) - 2(m+8))c_1^2c_2 - 12m^2c_1c_3 \right] e_k^8 + O(e_k^9).$$

4. De nuevo, consideramos

$$\phi(v_k) = \frac{v_k + 1}{3v_k^3 - v_k + 1}, \quad (4.42)$$

con la función de peso anterior, obtendremos otra nueva función de iteración de octavo orden óptima, que se proporciona a continuación:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ z_k &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - mt_k u_k \left[\frac{v_k + 1}{3v_k^3 - v_k + 1} + \frac{t_k}{v_k - at_k} + 4t_k \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Satisface el siguiente término constante de error asintótico óptimo

$$e_{k+1} = -\frac{c_1((m+7)c_1^2 - 2mc_2)}{24m^7} \left[(3a(m+7)^2 - 7m^2 - 96m - 449)c_1^4 + 12(a-1)m^2c_2^2 - 12m(a(m+7) - 2(m+8))c_1^2c_2 - 12m^2c_1c_3 \right] e_k^8 + O(e_k^9).$$

5. Con la ayuda de la siguiente función de peso.

$$\phi(v_k) = \frac{2v_k^2 + 3v_k + 2}{4v_k^3 - v_k + 2}. \quad (4.44)$$

Tenemos otra siguiente función de iteración de octavo orden óptima

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - mu_k, \\ z_k &= x_k - mu_k \left[v_k^2 - \frac{1}{v_k - 1} \right], \\ x_{k+1} &= z_k - mt_k u_k \left[\frac{2v_k^2 + 3v_k + 2}{4v_k^3 - v_k + 2} + \frac{t_k}{v_k - at_k} + 4t_k \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

que satisface el siguiente término constante de error asintótico óptimo

$$e_{k+1} = -\frac{c_1 \left((m+7)c_1^2 - 2mc_2 \right)}{24m^7} \left[\left(3a(m+7)^2 - 7m^2 - 96m - 419 \right) c_1^4 + 12(a-1)m^2 c_2^2 \right. \\ \left. - 12m \left(a(m+7) - 2(m+8) \right) c_1^2 c_2 - 12m^2 c_1 c_3 \right] e_k^8 + O(e_k^9).$$

De manera similar, las funciones peso arbitrarias $\phi(v_k)$ se eligen siempre que se cumplan las condiciones del Teorema 4.2. Entonces, podemos obtener diferentes métodos óptimos de octavo orden para aproximar raíces múltiples.

4.4 Experimentos numéricos

Aquí, verificaremos la eficiencia, la eficacia y el comportamiento de convergencia de nuestro esquema propuesto con las funciones peso. Por lo tanto, elegimos algunas de las expresiones de nuestros esquemas, a saber, expresión (4.41) para $\left(a = 0, a = \frac{2(m+8)}{m+7} \text{ \& } a = \frac{7m^2+96m+437}{3(m+7)^2} \right)$ y la expresión (4.43) para $\left(a = 0 \text{ \& } a = \frac{2(m+8)}{m+7} \right)$, denotadas por $PM1, PM2, PM3, PM4$ y $PM5$, respectivamente. Para nuestra experiencia numérica consideraremos diferentes problemas aplicados: el primero es un problema de valor propio; el segundo es la ecuación de estado de Van der Waals, el tercero nuevamente es un problema de la vida real, pero para raíces simples y complejas, los últimos tres son problemas de prueba estándar, los cuales se pueden encontrar en los siguientes ejemplos (5.1)–(4.6).

Ahora, queremos comparar nuestros métodos con otros métodos robustos existentes del mismo orden con base en la diferencia entre dos iteraciones consecutivas, orden de convergencia computacional ρ y errores residuales en la función. Elegimos dos esquemas de los métodos iterativos de octavo orden propuestos por Zafar [61], la expresión (4.2) para

$$H(u_k) = 6u_k^3 - u_k^2 + 2u_k + 1, \quad P(v_k) = 1 + v_k \quad \text{y} \quad G(w_k) = \frac{2mw_k}{A_2P_0} + \frac{m}{A_2P_0}$$

y la expresión (4.2) para

$$H(u_k) = \frac{1 - 5u_k^2 + 8u_k^3}{1 - 2u_k}, \quad P(v_k) = 1 + v_k \quad \text{y} \quad G(w_k) = \frac{3m\omega_k + m}{A_2P_0(1 + \omega_k)},$$

denotadas por $ZM1$ and $ZM2$, respectivamente, para comparar cuál es el orden más alto a la fecha.

1. Esquema $ZM1$

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 z_k &= y_k - mu_k(6u_k^3 - u_k^2 + 2u_k + 1) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 x_{k+1} &= z_k - mu_k v_k(1 + 2u_k)(1 + v_k) \left(\frac{2\omega_k + 1}{A_2 P_0} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

2. Esquema $ZM2$

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 z_k &= y_k - mu_k \left(\frac{1 - 5u_k^2 + 8u_k^3}{1 - 2u_k} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= z_k - mu_k v_k(1 + 2u_k)(1 + v_k) \left(\frac{3\omega_k + 1}{A_2 P_0(1 + \omega_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde

$$u_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad v_k = \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \omega_k = \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{m}} \quad A_2 = 1 \quad A_3 = 2 \quad P_0 = 1$$

4.4.1 Coste computacional

También hacemos una comparación entre los diferentes métodos estudiados anteriormente, calculando su coste computacional en términos de productos.

Así, γ es la relación entre el coste computacional de una división y el coste computacional de un producto y δ es la relación entre el coste computacional de una función radical y el coste computacional de un producto, l y κ son las relaciones entre las evaluaciones funcionales de f y f' y los productos, respectivamente; Podemos expresar el coste computacional total para cada método en términos de productos en la Tabla 4.1.

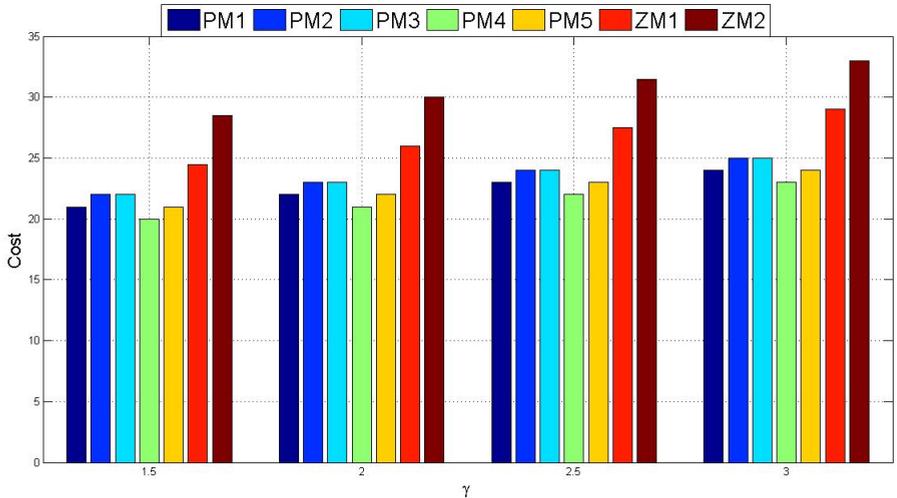
Para establecer la comparación, no hemos considerado las evaluaciones funcionales, ya que todos los métodos son óptimos de orden ocho y, por lo tanto, realizan el mismo número de evaluaciones funcionales.

La figura 1 muestra los diferentes costes computacionales de los métodos estudiados cuando se supone que un cociente es igual a 1,5 veces un producto y para diferentes valores de δ . En la

Tabla 4.1: Coste computacional

Metodos	Coste computacional
$PM1$	$3l + \kappa + 10 + 6\gamma + 2\delta$
$PM2$	$3l + \kappa + 11 + 6\gamma + 2\delta$
$PM3$	$3l + \kappa + 11 + 6\gamma + 2\delta$
$PM4$	$3l + \kappa + 09 + 6\gamma + 2\delta$
$PM5$	$3l + \kappa + 10 + 6\gamma + 2\delta$
$ZM1$	$3l + \kappa + 13 + 4\gamma + 3\delta$
$ZM2$	$3l + \kappa + 15 + 6\gamma + 3\delta$

Figura 2 encontramos el coste computacional de los métodos, cuando asignamos un cociente igual a 1,5 veces un producto y γ toma diferentes valores entre 1,5 y 2,5.

Figura 4.1: Costes computacionales para $\gamma = 1,5$ y $1,5 \leq \delta \leq 3$

Como podemos ver en la Figura 1, los métodos $PM2$ y $PM3$ tienen el mismo valor de coste para todos los valores de γ ; Los esquemas $PM1$ y $PM4$ tienen un bajo coste computacional, siendo el método $PM4$ el más eficiente entre los dos. Por otro lado, el esquema de $ZM1$, que se ha comparado con el nuestro, tiene un coste inferior al de $ZM2$ (que siempre permanece alto), pero sin ser inferior al bajo coste del método de $PM4$.

En la Figura 2 observamos, como en la Figura 1, que los esquemas $PM2$ y $PM3$ siempre se mantienen con un valor de coste igual entre los dos en todos los casos. Sin embargo, el resto de los métodos se comportan de manera diferente en cada caso, con el método $PM4$ más eficiente

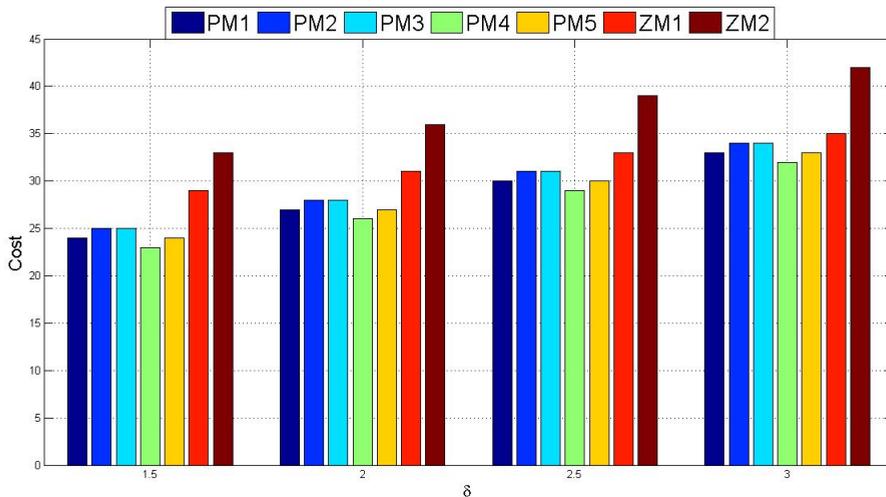


Figura 4.2: Costes computacionales para $\delta = 3$ y $1,5 \leq \gamma \leq 2,5$

para $\delta = 1,5, 2, 2,5$ y el esquema *ZM1* más eficiente para $\delta = 3$. De estas observaciones podemos afirmar que el método *PM4* es el más eficiente de los esquemas estudiados.

En Tablas 4.2 y 4.3, mostramos el número de iteración (k), el error en las iteraciones consecutivas $|x_{k+1} - x_k|$, orden computacional de convergencia (ρ) (usamos la fórmula dada por Cordero y Torregrosa [68] para calcular (ρ) y el error residual absoluto de la función correspondiente ($|f(x_k)|$). Debido a que estamos ejecutando un método de alto orden y queremos comprobar numéricamente su orden de convergencia, hacemos nuestros cálculos con varios dígitos significativos (mínimo 3000 dígitos significativos) para minimizar el error de redondeo.

Como mencionamos en el párrafo anterior, calculamos los valores de todas las constantes y errores residuales con varios dígitos significativos. Sin embargo, mostramos el valor de los errores en las iteraciones consecutivas $|x_{k+1} - x_k|$ y los errores residuales absolutos en la función $|f(x_k)|$ hasta 2 dígitos significativos con potencia exponencial que se mencionan en las Tablas 4.2 y 4.3. Además, el orden computacional de convergencia se proporciona hasta 5 dígitos significativos. Finalmente, mostramos los valores de ceros aproximados de hasta 30 dígitos significativos para cada uno de los ejemplos.

Todos los cálculos se realizaron utilizando el paquete de programación *Mathematica 11* con aritmética de precisión variable. Además, el significado de $a(\pm b)$ es una abreviatura de $a \times 10^{(\pm b)}$ en las siguientes Tablas 4.2 y 4.3.

Ejemplo 4.1. Problema de valor propio:

Uno de los principales problemas del álgebra lineal se refiere al cálculo de los valores propios de una matriz cuadrada. Además, encontrar las raíces de la ecuación característica de una matriz cuadrada mayor que 4 es otro gran desafío. Por lo tanto, consideramos la siguiente matriz de 9×9

$$A = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 19 & -19 & 76 & -19 & 18 & 437 \\ -64 & 24 & 0 & -24 & 24 & 64 & -8 & 32 & 376 \\ -16 & 0 & 24 & 4 & -4 & 16 & -4 & 8 & 92 \\ -40 & 0 & 0 & -10 & 50 & 40 & 2 & 20 & 242 \\ -4 & 0 & 0 & -1 & 41 & 4 & 1 & 2 & 25 \\ -40 & 0 & 0 & 18 & -18 & 104 & -18 & 20 & 462 \\ -84 & 0 & 0 & -29 & 29 & 84 & 21 & 42 & 501 \\ 16 & 0 & 0 & -4 & 4 & -16 & 4 & 16 & -92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico correspondiente de la matriz A anterior está dado por

$$f_1(x) = x^9 - 29x^8 + 349x^7 - 2261x^6 + 8455x^5 - 17663x^4 + 15927x^3 + 6993x^2 - 24732x + 12960. \quad (4.48)$$

La función anterior tiene una raíz múltiple en $x = 3$ de multiplicidad 4. Para aproximarla, consideramos el punto inicial $x_0 = 3,1$.

Ejemplo 4.2. Ecuación de estado de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{a_1 n^2}{V^2} \right) (V - na_2) = nRT. \quad (4.49)$$

La siguiente ecuación modeliza el comportamiento de un gas real siendo los parámetros, a_1 y a_2 , específicos para cada gas. La determinación del volumen V del gas en términos de los parámetros restantes requiere la solución de una ecuación no lineal en V

$$PV^3 - (na_2P + nRT)V^2 + a_1n^2V - a_1a_2n^2 = 0. \quad (4.50)$$

Dadas las constantes a_1 y a_2 de un gas particular, se pueden hallar valores para n, P y T , tal que esta ecuación tiene tres raíces simples. Al usar los valores particulares, obtenemos la siguiente función no lineal

$$f_2(x) = x^3 - 5,22x^2 + 9,0825x - 5,2675. \quad (4.51)$$

que tiene tres ceros y de ellos uno es el cero múltiple $x^* = 1,75$ de multiplicidad 2, la otra es la raíz simple $x^* = 1,72$. Nuestro deseado cero es $x^* = 1,75$ y se elige la aproximación inicial $x_0 = 1,8$.

Ejemplo 4.3. Problema de ingeniería química:

Consideremos una ecuación cuártica de [69, 70], que describe la fracción de la alimentación de nitrógeno-hidrógeno que se convierte en amoníaco (esta fracción se llama conversión fraccionaria). Considerando 250 atmósferas de presión y $500^\circ C$, la mencionada ecuación se

puede convertir en la forma

$$f_3(z) = z^4 - 7,79075z^3 + 14,7445z^2 + 2,511z - 1,674. \quad (4.52)$$

La función anterior tiene un total de cuatro ceros, y de ellos dos son reales y los otros dos son complejos conjugados entre sí. Sin embargo, nuestro cero deseado es $x^* = 3,9485424455620457727 + 0,3161235708970163733i$. La razón de haber considerado este problema de raíces complejas simples es para confirmar que nuestros métodos, a pesar de haber sido construido para raíces múltiples, también funcionan para raíces simples. Además, nos permite investigar el comportamiento de los algoritmos en ceros simples y complejos. En este caso hemos considerado la estimación inicial $x_0 = 3,8 + 0,32i$.

Ejemplo 4.4. Tomemos una función de prueba no lineal estándar de Petković et al. [49], que contiene funciones trigonométricas, exponenciales y polinómicas dada por

$$f_4(x) = x^2 \exp(x) - \sin(x) + x. \quad (4.53)$$

La función anterior tiene un cero múltiple en $x = 0$ de multiplicidad 2. Asumimos la aproximación inicial $x_0 = 0,05$ para esta función f_4 .

Ejemplo 4.5. Elegimos otro problema de prueba estándar de Petković et al. [49], que está definido por:

$$f_5(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6. \quad (4.54)$$

Esta función f_5 tiene una raíz múltiple en $x = 1$ de multiplicidad 3. Para esta función f_5 , consideramos estimación inicial $x_0 = 0,9$.

Ejemplo 4.6. Finalmente, consideramos una función de prueba no lineal más, que se da a continuación:

$$f_6(x) = \frac{(x - \sqrt{5})^4}{(x - 1)^2 + 1}. \quad (4.55)$$

La función anterior tiene un cero múltiple en $x = \sqrt{5}$ de multiplicidad 4. Hemos elegido la aproximación inicial. $x_0 = 2,5$ para la función f_6 .

Tabla 4.2: Comparación basada en error residual (es decir $|f(x_n)|$) de diferentes funciones de iteración.

$f(x)$	n	ZM1	ZM2	PM1	PM2	PM3	PM4	PM5
$f_1(x)$	1	6,8(-5)	6,7(-5)	2,5(-9)	1,1(-6)	1,4(-6)	2,5(-9)	1,1(-6)
	2	1,2(-53)	1,5(-53)	8,8(-90)	8,7(-74)	2,4(-70)	9,4(-90)	2,3(-73)
	3	5,0(-443)	5,7(-442)	2,2(-733)	1,9(-610)	1,9(-142)	3,8(-733)	1,1(-606)
$f_2(x)$	1	4,6(-9)	5,1(-9)	3,4(-9)	7,3(-10)	1,8(-11)	3,5(-9)	7,5(-10)
	2	8,0(-35)	2,9(-34)	2,0(-36)	8,3(-43)	2,4(-60)	2,3(-36)	1,2(-42)
	3	1,1(-240)	4,3(-236)	3,9(-254)	2,5(-306)	2,7(-500)	1,3(-253)	6,3(-305)
$f_3(x)$	1	7,3(-3)	1,2(-2)	7,1(-3)	4,6(-3)	3,8(-3)	7,4(-3)	4,8(-3)
	2	6,8(-21)	4,2(-19)	2,6(-21)	2,7(-23)	7,1(-25)	3,5(-21)	4,3(-23)
	3	4,1(-165)	1,2(-150)	7,5(-169)	3,5(-185)	1,1(-198)	9,5(-168)	1,7(-183)
$f_4(x)$	1	1,5(-20)	2,6(-20)	3,9(-21)	6,3(-22)	1,0(-22)	4,2(-21)	7,5(-22)
	2	5,3(-158)	8,5(-156)	3,0(-163)	1,7(-170)	7,4(-178)	5,7(-163)	7,8(-170)
	3	1,7(-1257)	1,3(-1239)	3,9(-1300)	3,8(-1359)	4,9(-1419)	6,4(-1298)	1,2(-1353)
$f_5(x)$	1	1,0(-24)	2,0(-24)	1,9(-25)	1,1(-26)	7,9(-28)	2,0(-25)	1,3(-26)
	2	1,2(-193)	4,8(-191)	1,6(-200)	4,9(-212)	4,4(-223)	3,2(-200)	3,1(-211)
	3	3,4(-1545)	5,3(-1524)	3,6(-1601)	1,0(-1694)	4,4(-1785)	1,1(-1598)	4,0(-1688)
$f_6(x)$	1	2,4(-3)	2,2(-3)	1,1(-6)	3,4(-5)	4,2(-5)	1,1(-6)	3,4(-5)
	2	2,4(-29)	4,7(-29)	1,2(-55)	1,4(-45)	5,8(-46)	1,5(-55)	2,2(-45)
	3	2,9(-235)	2,4(-232)	4,1(-447)	2,9(-368)	1,8(-372)	2,3(-446)	1,6(-366)

(* significa que el método no funciona para raíces simples ($m = 1$).

Tabla 4.3: Diferencia entre dos iteraciones consecutivas. (es decir $|x_{n+1} - x_n|$) de diferentes funciones de iteración.

$f(x)$	n	ZM1	ZM2	PM1	PM2	PM3	PM4	PM5
$f_1(x)$	1	3,0(-2)	3,0(-2)	2,4(-3)	1,1(-2)	1,2(-2)	2,4(-3)	1,1(-2)
	2	2,0(-14)	2,1(-14)	1,8(-23)	1,8(-19)	1,3(-18)	1,9(-23)	2,3(-19)
	3	8,9(-112)	1,63(-111)	2,3(-184)	1,2(-153)	1,2(-36)	3,8(-184)	1,1(-152)
	ρ	7,9887	7,9884	7,9995	7,9975	1,1305	7,9995	7,9972
$f_2(x)$	1	3,9(-4)	4,1(-4)	3,4(-4)	1,6(-4)	2,4(-5)	3,4(-4)	1,6(-4)
	2	5,2(-17)	9,8(-17)	8,2(-18)	5,3(-21)	8,9(-30)	8,8(-18)	6,4(-21)
	3	5,9(-120)	1,2(-117)	1,1(-126)	9,2(-153)	9,5(-250)	2,1(-126)	4,6(-152)
	ρ	7,9945	7,9941	7,9963	7,9991	8,9998	7,9963	7,9990
$f_3(x)$	1	7,2(-4)	1,2(-3)	7,0(-4)	4,6(-4)	3,7(-4)	7,3(-4)	4,8(-4)
	2	6,7(-22)	4,2(-20)	2,5(-22)	2,7(-24)	7,0(-26)	3,5(-22)	4,3(-24)
	3	4,0(-166)	1,2(-151)	7,4(-170)	3,5(-186)	1,1(-199)	9,4(-169)	1,7(-184)
	ρ	8,0004	8,0007	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000
$f_4(x)$	1	1,2(-10)	1,6(-10)	6,1(-11)	2,5(-11)	1,0(-11)	6,5(-11)	2,7(-11)
	2	2,3(-79)	2,9(-78)	5,5(-82)	1,3(-85)	2,7(-89)	7,5(-82)	2,8(-85)
	3	4,1(-629)	3,6(-620)	2,0(-650)	6,2(-680)	7,0(-710)	2,5(-649)	3,4(-677)
	ρ	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000
$f_5(x)$	1	8,0(-9)	1,0(-8)	4,5(-9)	1,7(-9)	7,3(-10)	4,7(-9)	1,9(-9)
	2	3,9(-65)	2,9(-64)	2,0(-67)	2,9(-71)	6,1(-75)	2,5(-67)	5,4(-71)
	3	1,2(-515)	1,4(-508)	2,6(-534)	1,7(-565)	1,3(-595)	1,8(-533)	2,7(-563)
	ρ	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000	8,0000
$f_6(x)$	1	2,6(-1)	2,6(-1)	4,1(-2)	9,4(-2)	9,9(-2)	4,1(-2)	9,4(-2)
	2	8,9(-8)	1,0(-7)	2,4(-14)	7,7(-12)	6,2(-12)	2,5(-14)	8,6(-12)
	3	2,9(-59)	1,6(-58)	3,2(-112)	1,6(-92)	1,5(-93)	4,9(-112)	4,5(-92)
	ρ	8,0000	8,0000	7,9983	7,9967	7,9989	7,9983	7,9963

(** significa que COC (ρ) no se puede calcular para este método.)

Nota 4.1. Vale la pena señalar de las Tablas 4.2 y 4.3 que nuestros métodos propuestos son eficientes para determinar múltiples ceros de funciones no lineales y son mucho mejores que otros métodos iterativos de sexto orden eficientes bien reconocidos. Con todos los casos especiales del esquema propuesto obtenemos mejores resultados en todos los problemas analizados considerados. Además, estos métodos también tienen los errores residuales mínimos correspondientes a las funciones de prueba consideradas f . El error mínimo entre las iteraciones consecutivas correspondientes a las funciones consideradas también pertenece a los métodos iterativos estudiados. Confirmamos que estos nuevos esquemas convergen más rápido hacia el cero requerido de la función correspondiente en comparación con otros métodos existentes.

Ahora, para realizar el estudio de convergencia local, tomamos los siguientes ejemplos $f_a(x) = \cos(x) - 1$, $f_b(x) = x^2(x^2 - 1)$ y $f_c(x) = x + \cos(x) - \frac{\pi}{2}$ de la literatura, ver [35], donde el radio

de convergencia local se ha calculado para los métodos iterativos de tercer orden, comparamos el radio de convergencia local r_H de los métodos de Halley con el obtenido en este estudio para un método de cuarto orden, r . Vea los resultados en Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Radio de la bola de convergencia local (f_{a-c}).

Example	x^*	m	$[a, b]$	k_1	r_H	r_0	r_1	$r_2 = r_3 = r$
f_a	0	2	$[-\pi/2, \pi/2]$	1	1.2679	3	2	0.374785
f_b	0	2	\mathbb{R}	12	0.1152	0.25	0.166667	0.031221
f_c	$\pi/2$	3	\mathbb{R}	1	1.972	4	3	0.540692

Finalmente, tomamos los ejemplos de nuestra experiencia numérica donde se conoce la solución exacta y la cota correspondiente establecida en (4.8) se puede obtener en \mathbb{R} .

Tabla 4.5: Radio de la bola de convergencia local ($f_{1,2,4,5}$)

Example	x^*	m	$[a, b]$	k_1	r_0	r_1	$r_2 = r_3 = r$
f_1	3	4	$[2, 4]$	21.5	0.237388	0.189911	0.033425
f_2	1,75	2	\mathbb{R}	100	0.03	0.02	0.003747
f_4	0	2	$] -\infty, 1/2[$	8,06	0.372018	0.248012	0.046467
f_5	1	3	$]1/2, 3/2[$	11	0.363636	0.272727	0.049149

Nota 4.2. En Tablas 4.4 y 4.5 mostramos los valores que restringen el radio de convergencia local. Observe que el valor r_3 en todos los ejemplos es el radio final, ya que obtenemos una sucesión decreciente de valores $r_0 < r_1 < r_1 < r_3$. Entonces, el último valor es el radio de convergencia local. En este intervalo de convergencia local podemos elegir el punto inicial para nuestro método iterativo. Queremos subrayar que a pesar de ser un método de orden superior, el intervalo de convergencia local sigue siendo considerablemente bueno.

Diseño de métodos de alto orden y análisis de su rendimiento

Basado en [3] :“A Higher Order Chebyshev-Halley-Type Family of Iterative Methods for Multiple Roots”. Mathematics.

5.1 Introducción

En este capítulo introducimos métodos eficientes de alto orden para el caso de raíces múltiples de una ecuación no lineal.

Existe un gran número de problemas en los cuales es muy difícil calcular la solución exacta de manera analítica, por esta razón, en este capítulo nos hemos concentrado en obtener aproximaciones de la solución hasta un grado específico de precisión mediante un procedimiento iterativo, por supuesto, haciéndolo también con la máxima eficiencia. En [25], Kung y Traub conjeturaron que un método sin memoria que usa $d + 1$ evaluaciones funcionales por iteración puede tener como máximo orden de convergencia $\rho = 2^d$. Si se alcanza este límite, se dice que el método es óptimo.

Para resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$ por medio de iteraciones, tenemos la conocida familia de métodos cúbicamente convergente Chebyshev-Halley [71], que viene dada por:

$$x_{k+1} = x_k - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(x_k)}{1 - \alpha L_f(x_k)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

donde $L_f(x_k) = \frac{f''(x_k)f(x_k)}{f'(x_k)^2}$. Una gran variedad de métodos iterativos pueden ser reportados en casos particulares. Por ejemplo, el método clásico de Chebyshev [25, 72], el método de Halley [25, 72] y el método súper Halley [25, 72] se pueden obtener si $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, y $\alpha = 1$, respectivamente. A pesar de la convergencia de tercer orden, el esquema (5.1) se considera menos práctico desde un punto de vista computacional debido al cálculo de la derivada de segundo orden.

Por esta razón, distintas variantes de los métodos de segundo orden Chebyshev-Halley libres de derivadas se han presentado en [10, 73, 74, 75]. Se ha demostrado que estos métodos son comparables, en su desempeño, a los métodos clásicos de tercer orden tipo Chebyshev-Halley y también pueden competir con el método de Newton. Una familia de estos métodos se da a continuación:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k - \left(1 + \frac{f(y_k)}{f(x_k) - \alpha f(y_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Podemos obtener fácilmente algunos métodos conocidos de tercer orden propuestos por Potra y Pták [10] y Sharma [73] (el método Newton-secante (NSM)) para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. Además, tenemos el método de Ostrowski [28] que tiene una convergencia óptima de cuarto orden, que también es un caso especial para $\alpha = 2$. Esta familia es importante e interesante, no solo por no usar una derivada de segundo orden o superior sino también porque este esquema converge al menos cúbicamente y tiene mejores resultados en comparación con los existentes. Además, tenemos varias modificaciones de orden superior de los métodos de Chebyshev-Halley disponibles en la literatura, y algunas de ellas se pueden ver en [76, 77, 78, 79].

En el caso de las múltiples raíces de las ecuaciones no lineales tenemos algunas modificaciones o mejoras óptimas y no óptimas de cuarto orden de la función de iteración de Newton para raíces múltiples en los artículos de investigación [51, 53, 31, 58, 59]. Además, podemos encontrar algunos métodos de orden superior para este caso, pero algunos de ellos no alcanzan la máxima eficiencia [60, 66, 80, 61, 81, 82]. Por lo tanto, este tema es de interés en la literatura actual.

Proponemos una nueva función de iteración de tipo Chebyshev-Halley para raíces múltiples, que alcanza un alto orden de convergencia. Específicamente, obtenemos una familia de métodos iterativos con un parámetro libre α , con convergencia de sexto orden. Por lo tanto, el índice de eficiencia es de $6^{1/4}$, y para $\alpha = 2$, este índice es de $8^{1/4}$, que es el valor máximo que se puede obtener con cuatro evaluaciones funcionales, alcanzando la optimalidad en el sentido de la conjetura de Kung y Traub. Además, en el teorema principal se presenta un extenso análisis del orden de convergencia.

Recordamos que $x^* \in \mathbb{C}$ es una raíz múltiple de la ecuación $f(x) = 0$, si se verifica que:

$$f(x^*) = 0, f'(x^*) = 0, \dots, f^{(m-1)}(x^*) = 0 \quad y \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

El entero positivo ($m \geq 1$) es la multiplicidad de la raíz.

Nos ocupamos de los métodos iterativos en los que la multiplicidad debe conocerse de antemano, porque este valor, m , se utiliza en la expresión iterativa. Sin embargo, señalamos que estos métodos también funcionan cuando uno usa una estimación de la multiplicidad, como se propuso en el estudio clásico realizado en [83].

Finalmente, consideramos algunas situaciones de la vida real que comienzan a partir de algunas condiciones dadas para investigar y algunos problemas de pruebas académicas estándar para experimentos numéricos. Nuestras funciones de iteración aquí son más efectivas que los métodos existentes para raíces múltiples en términos de errores residuales y errores entre dos iteraciones consecutivas, además, obtenemos un orden de convergencia computacional más estable. Es decir, los métodos propuestos son competitivos.

5.2 Construcción del esquema de orden superior

En esta sección, presentamos por primera vez los nuevos métodos de tipo Chebyshev-Halley para ecuaciones no lineales con raíces múltiples. Para construir el nuevo modelo, consideramos el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= x_k - m \left(1 + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - H(\eta, \tau) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde la función:

$$H(\eta, \tau) = \frac{\eta\tau (\beta - (\alpha - 2)^2\eta^2(\eta + 1) + \tau^3 + \tau^2)}{(\eta + 1)(\tau + 1)}$$

con:

$$\begin{aligned} \beta &= m ((\alpha(\alpha + 2) + 9)\eta^3 + \eta^2(\alpha(\alpha + 3) - 6\tau - 3) + \eta(\alpha + 8\tau + 1) + 2\tau + 1), \\ \eta &= \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{1}{m}}, \\ \tau &= \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)} \right)^{\frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una variable libre disponible. Para $m = 1$, podemos obtener fácilmente el esquema (5.2) de los dos primeros pasos del esquema (5.3).

En el Teorema 5.1, ilustramos que el esquema construido alcanza al menos una convergencia de sexto orden y para $\alpha = 2$, obtiene octavo orden sin utilizar ninguna evaluación funcional adicional. Es interesante observar que $H(\eta, \tau)$ juega un papel importante en la construcción del esquema presentado (para más detalles, consulte el Teorema 5.1).

Teorema 5.1. *Consideremos que $x = x^*$ es una raíz múltiple con multiplicidad $m \geq 1$ de una función analítica $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en la región que contiene la raíz múltiple x^* de $f(x)$, entonces, el esquema (4.16) alcanza al menos una convergencia de sexto orden para cada α , pero para un valor particular de $\alpha = 2$, alcanza la convergencia óptima de octavo orden.*

Demostración. Desarrollamos las funciones $f(x_k)$ y $f'(x_k)$ sobre $x = x^*$ con la ayuda de la expansión de la serie de Taylor en torno a la solución, lo que nos lleva a:

$$f(x_k) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} e_k^m \left(1 + c_1 e_k + c_2 e_k^2 + c_3 e_k^3 + c_4 e_k^4 + c_5 e_k^5 + c_6 e_k^6 + c_7 e_k^7 + c_8 e_k^8 + O(e_k^9) \right), \quad (5.4)$$

y

$$f'(x_k) = \frac{f^{(m)}(x^*)}{m!} e_k^{m-1} \left(m + (m+1)c_1 e_k + (m+2)c_2 e_k^2 + (m+3)c_3 e_k^3 + (m+4)c_4 e_k^4 + (m+5)c_5 e_k^5 + (m+6)c_6 e_k^6 + (m+7)c_7 e_k^7 + (m+8)c_8 e_k^8 + O(e_k^9) \right), \quad (5.5)$$

respectivamente, donde $c_j = \frac{m!}{(m-1+j)!} \frac{f^{(m-1+j)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}$, $j = 2, 3, 4, \dots, 8$ y $e_k = x_k - x^*$ es el error en la n -ésima iteración.

Insertando las expresiones anteriores (5.4) y (5.5) en el primer subpaso del esquema (4.16) se obtiene:

$$y_k - x^* = \frac{c_1}{m} e_k^2 + \sum_{i=0}^5 \phi_i e_k^{i+3} + O(e_k^9), \quad (5.6)$$

donde $\phi_i = \phi_i(m, c_1, c_2, \dots, c_8)$ están dados en términos de m, c_2, c_3, \dots, c_8 , por ejemplo

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{1}{m^2} (2mc_2 - (m+1)c_1^2) \quad y \\ \phi_1 &= \frac{1}{m^3} [3m^2 c_3 + (m+1)^2 c_1^3 - m(3m+4)c_1 c_2], \text{ etc.} \end{aligned}$$

Usando la expansión de la serie de Taylor y la expresión (4.20), tenemos:

$$\begin{aligned}
 f(y_k) = & f^{(m)}(x^*)e_k^{2m} \left[\frac{\left(\frac{c_1}{m}\right)^m}{m!} + \frac{(2mc_2 - (m+1)c_1^2)\left(\frac{c_1}{m}\right)^m e_k}{m!c_1} \right. \\
 & + \left(\frac{c_1}{m}\right)^{1+m} \frac{1}{2m!c_1^3} \left\{ (3+3m+3m^2+m^3)c_1^4 - 2m(2+3m+2m^2)c_1^2c_2 \right. \\
 & \left. \left. + 4(m-1)m^2c_2^2 + 6m^2c_1c_3 \right\} e_k^2 + \sum_{i=0}^5 \bar{\phi}_i e_k^{i+3} + O(e_k^9) \right]. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente expresión usando (5.4) y (5.7):

$$\eta = \frac{c_1 e_k}{m} + \frac{2mc_2 - (m+2)c_1^2}{m^2} e_k^2 + \theta_0 e_k^3 + \theta_1 e_k^4 + \theta_2 e_k^5 + O(e_k^6), \quad (5.8)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \theta_0 = & \frac{(2m^2 + 7m + 7)c_1^3 + 6m^2c_3 - 2m(3m+7)c_1c_2}{2m^3}, \\
 \theta_1 = & -\frac{1}{6m^4} \left[12m^2(2m+5)c_1c_3 + 12m^2((m+3)c_2^2 - 2mc_4) - 6m(4m^2 + 16m + 17)c_1^2c_2 + \right. \\
 & \left. (6m^3 + 29m^2 + 51m + 34)c_1^4 \right] \quad y \\
 \theta_2 = & \frac{1}{24m^5} \left[12m^2(10m^2 + 43m + 49)c_1^2c_3 - 24m^3((5m+17)c_2c_3 - 5mc_5) + 12m^2 \left((10m^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 47m + 53)c_2^2 - 2m(5m+13)c_4 \right) c_1 - 4m(30m^3 + 163m^2 + 306m + 209)c_1^3c_2 + (24m^4 \right. \\
 & \left. + 146m^3 + 355m^2 + 418m + 209)c_1^5 \right].
 \end{aligned}$$

Con la ayuda de las expresiones (5.4)–(5.8), obtenemos:

$$z_k - x^* = -\frac{(\alpha-2)c_1^2}{m^2} e_k^3 + \sum_{i=0}^4 \psi_i e_k^{i+4} + O(e_k^9), \quad (5.9)$$

donde $\psi_i = \psi_i(\alpha, m, c_1, c_2, \dots, c_8)$ están dados en términos de $\alpha, m, c_2, c_3, \dots, c_8$ con los dos primeros coeficientes escritos explícitamente como

$$\begin{aligned}\psi_0 &= -\frac{1}{2m^3} \left[(2\alpha^2 - 10\alpha + (7 - 4\alpha)m + 11)c_1^3 + 2m(4\alpha - 7)c_1c_2 \right] \quad y \\ \psi_1 &= \frac{1}{6m^4} \left[(-6\alpha^3 + 42\alpha^2 - 96\alpha + (29 - 18\alpha)m^2 + 6(3\alpha^2 - 14\alpha + 14)m + 67)c_1^4 + \right. \\ &\quad \left. 12m^2(5 - 3\alpha)c_1c_3 + 12m^2(3 - 2\alpha)c_2^2 + 12m(-3\alpha^2 + 14\alpha + (5\alpha - 8)m - 14)c_1^2c_2 \right]\end{aligned}$$

Usando la expansión de la serie de Taylor y (5.9), tenemos:

$$f(z_k) = f^{(m)}(x^*)e_k^{3m} \left[\frac{\left(-\frac{(\alpha-2)c_1^2}{m^2}\right)^m}{m!} + \sum_{i=1}^5 \bar{\psi}_i e_k^i + O(e_k^6) \right]. \quad (5.10)$$

De las expresiones (5.7) y (5.10), tenemos además

$$\tau = -\frac{(\alpha-2)c_1}{m}e_k + \frac{\left((-2\alpha^2 + 8\alpha + (2\alpha-3)m-7)c_1^2 + 2m(3-2\alpha)c_2\right)}{2m^2}e_k^2 + \gamma_1 e_k^3 + \gamma_2 e_k^4 + O(e_k^5), \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{3m^3} \left[(-3\alpha^3 + 18\alpha^2 - 30\alpha + (4-3\alpha)m^2 + 3(2\alpha^2 - 7\alpha + 5)m + 11)c_1^3 + 3m^2(4-3\alpha)c_3 \right. \\ &\quad \left. + 3m(-4\alpha^2 + 14\alpha + 3\alpha m - 4m - 10)c_1c_2 \right] \quad y \\ \gamma_2 &= \frac{1}{24m^4} \left[24m^2(-6\alpha^2 + 20\alpha + (4\alpha-5)m-14)c_1c_3 + 12m^2((-8\alpha^2 + 24\alpha + 4\alpha m - 5m \right. \\ &\quad - 13)c_2^2 + 2m(5-4\alpha)c_4) - 12m(12\alpha^3 - 66\alpha^2 + 100\alpha + 2(4\alpha-5)m^2 + (-20\alpha^2 + 64\alpha \\ &\quad - 41)m - 33)c_1^2c_2 + (-24\alpha^4 + 192\alpha^3 - 492\alpha^2 + 392\alpha + 6(4\alpha-5)m^3 + (-72\alpha^2 + 232\alpha \\ &\quad - 151)m^2 + 6(12\alpha^3 - 66\alpha^2 + 100\alpha - 33)m + 19)c_1^4 \right]\end{aligned}$$

Usando las expresiones (5.8) y (5.11), obtenemos:

$$H(\eta, \tau) = -\frac{(\alpha-2)c_1^2}{m^2}e_k^2 + \lambda_1 e_k^3 + \lambda_2 e_k^4 + O(e_k^5) \quad (5.12)$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{c_1}{2m^3} \left[c_1^2 \left(-2\alpha^2 + 8\alpha + (4\alpha - 7)m - 7 \right) + 2(7 - 4\alpha)c_2m \right] \quad y$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{6m^3} \left[c_1^4 \left(-6\alpha^3 + 36\alpha^2 - 66\alpha + (29 - 18\alpha)m^2 + 3(6\alpha^2 - 22\alpha + 17)m + 34 \right) + 12(5 - 3\alpha)c_3c_1m^2 + 12(3 - 2\alpha)c_2^2m^2 + 6c_2c_1^2m \left(-6\alpha^2 + 22\alpha + 2(5\alpha - 8)m - 17 \right) \right].$$

Ahora, usamos las expresiones (5.4)–(5.12) en el último sub paso del esquema (5.3), y conseguimos:

$$e_{k+1} = \sum_{i=1}^3 L_i e_k^{i+5} + O(e_k^9), \quad (5.13)$$

donde

$$L_1 = \frac{(\alpha - 2)^2 c_1^3}{m^6} \left[c_1^2 \left(\alpha^2 - \alpha + m^2 - \left(\alpha^2 + 4\alpha - 17 \right) m - 3 \right) - 2c_2(m - 1)m \right],$$

$$L_2 = (\alpha - 2)c_1^2 \left[-12c_2c_1^2m \{ 10\alpha^3 - 24\alpha^2 - 39\alpha + (16\alpha - 27)m^2 - (10\alpha^3 + 27\alpha^2 - 262\alpha + 301)m + 91 \} + 12c_3c_1m^2(-4\alpha + (4\alpha - 7)m + 8) + 12c_2^2m^2(-12\alpha + 4(3\alpha - 5)m + 21) + c_1^4 \{ -24\alpha^4 + 168\alpha^3 - 156\alpha^2 - 662\alpha + (52\alpha - 88)m^3 - (60\alpha^3 + 162\alpha^2 - 1616\alpha + 1885)m^2 + 2(18\alpha^4 - 12\alpha^3 - 711\alpha^2 + 2539\alpha - 2089)m + 979 \} \right] \quad y$$

$$L_3 = \frac{c_1}{24m^8} \left[-24c_2c_3c_1m^3 \left((42\alpha^2 - 146\alpha + 125)m - 6(7\alpha^2 - 26\alpha + 24) \right) - 24c_2^3m^3 \left(-24\alpha^2 + 84\alpha + (24\alpha^2 - 80\alpha + 66)m - 73 \right) + 12c_3c_1^3m^2 \left\{ 2(15\alpha^4 - 63\alpha^3 - 5\alpha^2 + 290\alpha - 296) + (54\alpha^2 - 190\alpha + 165)m^2 + (-30\alpha^4 - 28\alpha^3 + 968\alpha^2 - 2432\alpha + 1697)m \right\} + 12c_1^2m^2 \left\{ c_2^2 \left(80\alpha^4 - 304\alpha^3 - 226\alpha^2 + 1920\alpha + 2(81\alpha^2 - 277\alpha + 234)m^2 + (-80\alpha^4 - 112\alpha^3 + 2712\alpha^2 - 6410\alpha + 4209)m - 1787 \right) - 4(\alpha - 2)c_4m(-3\alpha + (3\alpha - 5)m + 6) \right\} - 2c_2c_1^4m \left\{ -3(96\alpha^5 - 804\alpha^4 + 1504\alpha^3 + 2676\alpha^2 - 10612\alpha + 8283) + 4(177\alpha^2 - 611\alpha + 521)m^3 - 3(220\alpha^4 + 280\alpha^3 - 7556\alpha^2 + 18400\alpha - 12463)m^2 + 4(108\alpha^5 - 234\alpha^4 - 4302\alpha^3 + 22902\alpha^2 - 38593\alpha + 20488)m \right\} + c_1^6 \left\{ 48\alpha^6 - 480\alpha^5 + 996\alpha^4 + 5472\alpha^3 - 29810\alpha^2 + 50792\alpha + (276\alpha^2 - 956\alpha + 818)m^4 + (-360\alpha^4 - 448\alpha^3 + 12434\alpha^2 - 30518\alpha + 20837)m^3 + (432\alpha^5 - 1236\alpha^4 - 16044\alpha^3 + 92306\alpha^2 - 161292\alpha + 88497)m^2 + (-168\alpha^6 + 888\alpha^5 + 5352\alpha^4 - 55580\alpha^3 + 173290\alpha^2 - 224554\alpha + 97939)m - 29771 \right\} \right].$$

Es de destacar que alcanzamos al menos una convergencia de sexto orden para todos los α . Además, podemos obtener fácilmente $L_1 = L_2 = 0$ usando $\alpha = 2$.

Ahora, adoptando $\alpha = 2$ en la expresión (5.13), obtenemos:

$$e_{k+1} = \frac{A_0(12c_3c_1m^3 - 12c_2c_1^2m(3m^2 + 30m - 1) + 12c_2^2m^2(2m - 1) + c_1^4(10m^3 + 183m^2 + 650m - 3))}{24m^8} e_k^8 + O(e_k^9), \quad (5.14)$$

donde

$$A_0 = (c_1^3(m + 1) - 2c_1c_2m).$$

La expresión anterior (5.14) demuestra que nuestro esquema propuesto (4.16) alcanza octavo orden de convergencia para $\alpha = 2$ usando solo cuatro evaluaciones funcionales por iteración completa. Por lo tanto, es un esquema óptimo para este valor particular de $\alpha = 2$ de acuerdo con la conjetura de Kung–Traub, completando la prueba. \square

5.3 Ejemplos numéricos

En esta sección, ilustramos el comportamiento de eficiencia y convergencia de nuestras funciones de iteración para valores particulares $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 1,9$, y $\alpha = 2$ en la expresión (5.3), llamados *OM1*, *OM2*, *OM3* y *OM4*, respectivamente. En este sentido, elegimos cuatro problemas reales con ceros múltiples y simples. Los detalles se describen en los ejemplos (5.1)-(5.4).

Para una mejor comparación de nuestros métodos iterativos, consideramos varios métodos existentes de orden seis y el óptimo orden ocho. En primer lugar, comparamos nuestros métodos con la familia de dos puntos de los métodos de sexto orden propuestos por Geum et al. en [60], y de ellos, seleccionamos el caso 4c, que se expresa como sigue:

$$y_k = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad m > 1, \quad (5.15)$$

$$x_{k+1} = y_k - \left[\frac{m + a_1u_k}{1 + b_1u_k + b_2u_k^2} \times \frac{1}{1 + c_1s_k} \right] \frac{f(y_k)}{f'(y_k)},$$

donde:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2m(4m^4 - 16m^3 + 31m^2 - 30m + 13)}{(m-1)(4m^2 - 8m + 7)}, & b_1 &= \frac{4(2m^2 - 4m + 3)}{(m-1)(4m^2 - 8m + 7)}, \\
 b_2 &= -\frac{4m^2 - 8m + 3}{4m^2 - 8m + 7}, & c_1 &= 2(m-1), \\
 u_n &= \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}, & s_k &= \left(\frac{f'(y_k)}{f'(x_k)}\right)^{\frac{1}{m-1}},
 \end{aligned}$$

llamado *GM1*.

Además, también los comparamos con una familia más, no óptima, de funciones de iteración de sexto orden dadas por los mismos autores en [66], y de ellas, elegimos el caso 5YD, que viene dado por:

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad m \geq 1, \\
 w_k &= x_k - m \left[\frac{(u_k - 2)(2u_k - 1)}{(u_k - 1)(5u_k - 2)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= x_k - m \left[\frac{(u_k - 2)(2u_k - 1)}{(5u_k - 2)(u_k + v_k - 1)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde $u_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$ y $v_k = \left(\frac{f(w_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, y este método se denota como *GM2*.

Además, comparamos nuestros métodos con los métodos iterativos óptimos de octavo orden propuestos por Zafar et al.[61]. Escogemos los siguientes dos esquemas de ellos:

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 w_k &= y_k - mu_k(6u_k^3 - u_k^2 + 2u_k + 1) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= w_k - mu_k v_k (1 + 2u_k)(1 + v_k) \left(\frac{2w_k + 1}{A_2 P_0} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

y:

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 w_k &= y_k - mu_k \left(\frac{1 - 5u_k^2 + 8u_k^3}{1 - 2u_k} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 x_{k+1} &= w_k - mu_k v_k (1 + 2u_k)(1 + v_k) \left(\frac{3w_k + 1}{A_2 P_0 (1 + w_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde $u_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, $v_k = \left(\frac{f(w_k)}{f(y_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, $w_k = \left(\frac{f(w_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, y esos métodos iterativos están denotados en nuestras tablas como *ZM1* y *ZM2*, respectivamente.

Finalmente, comparamos con otra función de iteración de octavo orden óptima dada por Behl et al. [3], consideramos en este caso los siguientes esquemas

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} h_k (1 + 2h_k), \\ x_{k+1} &= z_k + m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{t_k h_k}{1 - t_k} \left[-1 - 2h_k - h_k^2 + 4h_k^3 - 2j_k \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

y

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ z_k &= y_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} h_k (1 + 2h_k), \\ x_{k+1} &= z_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{t_k h_k}{1 - t_k} \left[\frac{1 + 9h_k^2 + 2j_k + h_k(6 + 8j_k)}{1 + 4h_k} \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

con $h_k = \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, $j_k = \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, $t_k = \left(\frac{f(z_k)}{f(y_k)}\right)^{\frac{1}{m}}$, los cuales son denotados por *BM1* y *BM2*, respectivamente.

Para comparar estos esquemas, realizamos una experiencia numérica, y en las tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4, mostramos la diferencia entre dos iteraciones consecutivas $|x_{k+1} - x_k|$, el error residual en la función correspondiente $|f(x_k)|$ y el orden de convergencia computacional aproximado ($\tilde{\rho}$), definido en el capítulo 2 (usamos la fórmula 2.2.3 dada por Cordero y Torregrosa [84]):

$$\tilde{\rho} = \frac{\ln(\|x_{k+1} - x_k\| / \|x_k - x_{k-1}\|)}{\ln(\|x_k - x_{k-1}\| / \|x_{k-1} - x_{k-2}\|)},$$

Hacemos nuestros cálculos con varios dígitos significativos (un mínimo de 3000 dígitos significativos) para minimizar el error de redondeo. Además, el orden de convergencia computacional se proporciona hasta cinco dígitos significativos. Finalmente, mostramos la estimación inicial y los ceros aproximados de hasta 25 dígitos significativos en el ejemplo correspondiente, donde no hay una solución exacta disponible.

Todos los cálculos se han realizado utilizando el paquete de programación Mathematica 11 con aritmética de precisión múltiple. Además, el significado de $a(\pm b)$ es una abreviatura de $a \times 10^{(\pm b)}$ en los resultados numéricos.

Ejemplo 5.1. *Problema de crecimiento poblacional:*

La ley de crecimiento de la población se define de la siguiente manera:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) + \eta,$$

donde $N(t)$ expresa la población en el momento t , η hace referencia a la tasa de inmigración fija o constante, y γ es la tasa de natalidad fija o constante de la población. Podemos obtener fácilmente la siguiente solución de la ecuación diferencial anterior:

$$N(t) = N_0 e^{\gamma t} + \frac{\eta}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1),$$

donde N_0 es la población inicial.

Para un estudio de caso particular, el problema se presenta de la siguiente manera: Supongamos que inicialmente una cierta población contiene 1,000,000 de personas, que 300,000 personas emigran a la comunidad en el primer año y que hay 1,365,000 personas presentes al final de un año. Encuentra la tasa de natalidad (γ) de esta población.

Para determinar la tasa de natalidad, debemos resolver la ecuación:

$$f_1(x) = 1365 - 1000e^x - \frac{300}{x}(e^x - 1). \quad (5.21)$$

en donde $x = \gamma$ y nuestro cero deseado de la función f_1 anterior es 0.05504622451335177827483421. La razón para considerar el problema de la raíz simple es confirmar que nuestros métodos también funcionan con ceros simples. Elegimos el punto de partida como $x_0 = 0,5$.

Ejemplo 5.2. La ecuación de estado de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{a_1 n^2}{V^2} \right) (V - na_2) = nRT,$$

explica el comportamiento de un gas real al introducir en las ecuaciones del gas ideal dos parámetros, a_1 y a_2 , específicos para cada gas. La determinación del volumen V del gas en términos de los parámetros restantes requiere la solución de una ecuación no lineal en V ,

$$PV^3 - (na_2P + nRT)V^2 + a_1n^2V - a_1a_2n^2 = 0.$$

Dadas las constantes a_1 y a_2 de un gas en particular, uno puede encontrar valores para n , P y T , de modo que esta ecuación tenga una raíz doble. Al usar los valores particulares, obtenemos la siguiente función no lineal:

$$f_2(x) = x^3 - 5,22x^2 + 9,0825x - 5,2675. \quad (5.22)$$

que tiene tres ceros; de ellos, uno es el cero $\alpha = 1,75$ de multiplicidad dos, y el otro es el cero simple $\alpha = 1,72$. Nuestra raíz deseada es $\alpha = 1,75$, y elegimos $x_0 = 1,8$ como la estimación inicial.

Ejemplo 5.3. Problema de valor propio:

Para esto, elegimos la siguiente matriz 8×8 :

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -12 & 36 & -12 & 0 & 0 & 12 & 8 \\ 148 & 129 & -397 & 147 & -12 & 6 & -109 & -74 \\ 72 & 62 & -186 & 66 & -8 & 4 & -54 & -36 \\ -32 & -24 & 88 & -36 & 0 & 0 & 24 & 16 \\ 20 & 13 & -45 & 19 & 8 & 6 & -13 & -10 \\ 120 & 98 & -330 & 134 & -8 & 24 & -90 & -60 \\ -132 & -109 & 333 & -115 & 12 & -6 & 105 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico correspondiente de esta matriz es el siguiente:

$$f_3(x) = (x - 4)^3(x + 4)(x - 8)(x - 20)(x - 12)(x + 12).$$

La función anterior tiene una raíz múltiple en $\alpha = 4$ de multiplicidad tres. Además, consideramos $x_0 = 2,7$ como punto de partida.

Ejemplo 5.4. Consideremos la siguiente ecuación polinomial:

$$f_4(z) = \left((x - 1)^3 - 1 \right)^{50}. \quad (5.23)$$

El cero deseado de la función anterior f_4 es $\alpha = 2$ con multiplicidad de orden 50, y escogemos un valor inicial $x_0 = 2,1$ para este problema.

Tabla 5.1: Comparación sobre la base de la diferencia entre dos iteraciones consecutivas $|x_{k+1} - x_k|$ para las funciones f_1-f_4 .

f	n	OM1	OM2	OM3	OM4	GM1
f_1	1	2.3 (-3)	8.4 (-4)	9.3 (-5)	3.5 (-5)	*
	2	2.0 (-16)	9.0 (-20)	8.8 (-28)	2.0 (-37)	*
	3	9.7 (-95)	1.3 (-115)	6.4 (-166)	2.5 (-295)	*
	ρ	5.9997	6.0000	6.0001	8.0000	*
f_2	1	1.3 (-3)	8.2 (-4)	4.0 (-3)	3.5 (-4)	9.5 (-4)
	2	2.5 (-10)	4.2 (-12)	6.4 (-16)	8.7 (-18)	2.7 (-11)
	3	2.0 (-50)	8.7 (-62)	6.5 (-87)	1.5 (-126)	2.0 (-56)
	ρ	5.9757	5.9928	6.0214	7.9963	5.9836
f_3	1	9.1 (-5)	3.6 (-5)	8.0 (-6)	6.0 (-6)	8.5 (-5)
	2	1.8 (-28)	1.4 (-31)	9.8 (-38)	2.0 (-47)	1.0 (-28)
	3	1.2 (-170)	4.4 (-190)	3.3 (-229)	2.5 (-379)	3.1 (-172)
	ρ	6.0000	6.0000	6.0000	8.0000	6.0000
f_4	1	2.4 (-5)	7.1 (-6)	4.2 (-7)	1.4 (-7)	1.8 (-5)
	2	1.5 (-26)	1.7 (-30)	3.9 (-40)	6.7 (-54)	1.1 (-26)
	3	7.5 (-154)	3.2 (-178)	2.6 (-438)	1.7 (-424)	6.6 (-154)
	ρ	6.0000	6.0000	6.0000	8.0000	6.0000

(* Significa que el método correspondiente no converge.)

Tabla 5.2: Comparación sobre la base de la diferencia entre dos iteraciones consecutivas $|x_{k+1} - x_k|$ para las funciones f_1-f_4 .

f	n	$GM2$	$ZM1$	$ZM2$	$BM1$	$BM2$
f_1	1	3.6 (-5)	1.6 (-4)	2.3 (-4)	7.6 (-5)	3.7 (-5)
	2	1.4 (-29)	4.2 (-31)	8.9 (-30)	2.6 (-34)	5.0 (-37)
	3	5.4 (-173)	1.0 (-243)	5.5 (-233)	5.4 (-270)	5.7 (-292)
	ρ	6.0000	8.0000	8.0000	8.0000	8.0000
f_2	1	3.9 (-4)	3.9 (-4)	4.1 (-3)	2.7 (-4)	2.6 (-4)
	2	1.0 (-14)	5.2 (-17)	9.8 (-17)	1.1 (-18)	1.4 (-19)
	3	3.9 (-78)	5.9 (-120)	1.2 (-117)	6.3 (-134)	1.0 (-141)
	ρ	5.9975	7.9945	7.9941	7.9971	8.0026
f_3	1	4.8 (-5)	4.9 (-6)	5.2 (-6)	2.0 (-6)	1.8 (-6)
	2	5.0 (-31)	6.0 (-48)	1.0 (-47)	1.5 (-51)	2.8 (-52)
	3	5.8 (-187)	2.7 (-383)	2.3 (-381)	1.4 (-412)	1.3 (-418)
	ρ	6.0000	8.0000	8.0000	8.0000	8.0000
f_4	1	2.0 (-7)	4.8 (-7)	6.5 (-7)	1.9 (-7)	6.3 (-8)
	2	1.8 (-41)	5.7 (-49)	8.4 (-48)	8.0 (-53)	4.2 (-57)
	3	1.0 (-245)	2.2 (-384)	6.6 (-375)	9.6 (-416)	5.9 (-169)
	ρ	6.0000	8.0000	8.0000	8.0000	2.2745

Tabla 5.3: Comparación sobre la base de errores residuales $|f(x_k)|$ para las funciones f_1-f_4 .

f	n	$OM1$	$OM2$	$OM3$	$OM4$	$GM1$
f_1	1	2.7	1.0	1.1 (-1)	4.2 (-2)	*
	2	2.4 (-13)	1.1 (-16)	1.1 (-24)	2.4 (-34)	*
	3	1.2 (-91)	1.6 (-112)	7.8 (-163)	3.0 (-292)	*
f_2	1	5.0 (-8)	2.1 (-8)	4.8 (-9)	3.6 (-9)	2.8 (-8)
	2	1.8 (-21)	5.3 (-25)	1.2 (-32)	2.3 (-36)	2.2 (-23)
	3	1.2 (-101)	2.2 (-124)	1.3 (-174)	6.9 (-254)	1.2 (-113)
f_3	1	4.9 (-8)	3.1 (-9)	3.1 (-11)	1.4 (-11)	4.1 (-8)
	2	3.9 (-79)	1.8 (-88)	6.1 (-107)	4.9 (-136)	7.1 (-80)
	3	1.0 (-505)	5.6 (-564)	2.4 (-681)	1.1 (-1131)	1.9 (-510)
f_4	1	1.2 (-207)	2.7 (-234)	1.1 (-295)	3.3 (-319)	3.5 (-214)
	2	1.9 (-1268)	2.6 (-1465)	3.8 (-1947)	1.6 (-2635)	1.9 (-1274)
	3	4.2 (-7633)	2.3 (-8851)	7.5 (-11856)	6.1 (-21166)	6.0 (-7636)

(* Significa que el método correspondiente no converge.)

Tabla 5.4: Comparación sobre la base de errores residuales $|f(x_k)|$ para las funciones f_1 - f_4 .

f	n	$GM2$	$ZM1$	$ZM2$	$BM1$	$BM2$
f_1	1	4.4 (-2)	1.9 (-1)	2.7 (-1)	9.2 (-2)	4.4 (-2)
	2	1.7 (-26)	5.1 (-28)	1.1 (-26)	3.2 (-31)	6.0 (-34)
	3	5.4 (-173)	1.2 (-240)	6.7 (-230)	6.5 (-267)	7.0 (-289)
f_2	1	4.6 (-9)	4.6 (-9)	5.1 (-9)	2.3 (-9)	2.0 (-9)
	2	3.2 (-30)	8.0 (-35)	2.9 (-34)	3.4 (-38)	5.9 (-40)
	3	4.6 (-157)	1.1 (-240)	4.3 (-236)	1.2 (-268)	3.1 (-284)
f_3	1	7.4 (-9)	7.8 (-12)	9.1 (-12)	5.2 (-13)	3.6 (-13)
	2	8.0 (-87)	1.4 (-137)	6.9 (-137)	2.1 (-148)	1.5 (-150)
	3	1.2 (-554)	1.3 (-1143)	7.5 (-1138)	1.9 (-1231)	1.3 (-1249)
f_4	1	1.0 (-311)	6.6 (-293)	2.3 (-286)	1.8 (-313)	6.2 (-337)
	2	9.8 (-2014)	3.4 (-2389)	9.4 (-2331)	9.8 (-2582)	1.1 (-2795)
	3	7.3 (-12226)	1.6 (-19159)	7.1 (-18686)	8.8 (-20728)	3.4 (-8388)

Capítulo 6

Estudio de convergencia semilocal: método de alto orden

Basado en [2] :“Domain of existence for the solution of some IVP’s and BVP’s by using an efficient ninth order iterative method”. Mathematical Methods in the Applied Sciences.

6.1 Introducción

En el siguiente capítulo dejamos a un lado el caso unidimensional en donde definíamos a una ecuación como $f(x) = 0$. Ahora, nos dedicaremos al estudio de un método para casos multidimensionales con el que buscaremos la aproximación de la solución de una ecuación que denotaremos como $F(x) = 0$. El esquema que presentaremos utiliza la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$ que toma el nombre de Jacobiano de la función, el mismo que ya fue definido en el capítulo 2.

El problema de resolver una ecuación no lineal de la forma $F(x) = 0$ aparece típicamente cuando encontramos algún tipo de ecuación diferencial, ecuación integral o sistema de ecuaciones no lineales. Se pueden citar muchas áreas de aplicación, entre ellas problemas de reacción química, circuitos eléctricos, conducción de calor y transmisión de señales. Estas ecuaciones diferenciales e integrales, en la mayoría de los casos, no pueden resolverse analíticamente, por lo que requieren

la necesidad de métodos numéricos adecuados para transformar el problema en un sistema no lineal y, posteriormente, resolverlo mediante técnicas iterativas [85, 86, 87].

En la última década, los investigadores en análisis numérico han diseñado una gran variedad de métodos iterativos para resolver sistemas no lineales [84, 76, 88, 89, 90]. La mayoría de estos invocan la filosofía del conocido método de Newton, que alcanza la convergencia cuadrática y se define mediante el siguiente algoritmo:

$$x_0 \text{ dado en } \Omega, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Todos estos métodos deben compararse en términos de eficiencia, un concepto que relaciona tanto la velocidad de convergencia como el costo computacional. Cuando elegimos un método iterativo para resolver $F(x) = 0$, debemos aplicar cuidadosamente las medidas de la eficiencia introducidas por Traub [25] y Ostrowski [24] que se explicaron en el capítulo 2.

En [5], los autores proponen un método iterativo multipaso para resolver $F(x) = 0$, la función de iteración de este método se denomina (NMIM), que se define por:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \Gamma^{(k)}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \Gamma^{(k)}F(y^{(k)}), \\ w^{(k)} &= z^{(k)} - \Gamma^{(k)}F(z^{(k)}), \\ u_1^k &= \Gamma^{(k)}F(w^{(k)}), \\ u_i^k &= \Gamma^{(k)}F'(w^{(k)})u_{i-1}^k, \quad i = 2, \dots, 5 \\ x^{(k+1)} &= w^{(k)} - \frac{21}{4}u_1^k + 11u_2^k - \frac{23}{2}u_3^k + 6u_4^k - \frac{5}{4}u_5^k, \end{aligned} \tag{6.1}$$

con $x^{(k)} \in \Omega$, $k \geq 0$, donde $\Gamma^{(k)} = [F'(x^{(k)})]^{-1}$. Este método alcanza la convergencia de noveno orden, lo que lo convierte en un método muy eficiente, ya que utiliza un jacobiano congelado en todos los pasos donde se requiere resolver un sistema lineal. Por lo tanto, el coste para obtener la factorización L y U de $F'(x^{(k)})$, que se utilizan para resolver los sistemas de ecuaciones triangulares inferior y superior, se toma en cuenta solo una vez. Cabe señalar que cada iteración de NMIM requiere solo dos evaluaciones jacobianas, y solo una de ellas se usa para resolver sistemas lineales asociados.

Es bien sabido que uno puede usar métodos iterativos para obtener una aproximación de una raíz x^* para $F(x) = 0$. En [5] los autores usan (6.1) para aproximar la solución de algunos problemas de valor inicial (PVI) y problemas de valor de fronteras (PVF) usando la técnica de diferencias finitas y obteniendo un sistema no lineal de dimensión finita. Nuestro objetivo es probar la existencia de la solución analítica al tratar el problema definido en los espacios de Banach y obtener el dominio de la existencia y la unicidad de esta solución. Para ello analizamos un estudio de convergencia semilocal del método iterativo [74, 91, 92, 93, 94]. Usamos información sobre el valor inicial para comenzar a obtener iteraciones, y analizamos el operador no lineal que, junto

con las condiciones asumidas, garantiza la convergencia del método y nos da el dominio de la existencia y la unicidad de la solución.

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar la aproximación, desde el punto de vista semilocal, a la solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$, como hemos indicado en el capítulo 2, sección 2.3 donde $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, en un conjunto convexo abierto Ω de un espacio Banach X con valores en un espacio Banach Y . El capítulo está organizado de la siguiente manera. Primero, introducimos algunos resultados preliminares en la sección 6.2.1 que involucran el análisis de los primeros pasos y la construcción de funciones auxiliares para realizar el estudio de convergencia semilocal. Luego establecemos los resultados principales en la sección 6.2.2, con la sección 6.3 dedicada a la exploración numérica.

6.2 Convergencia Semilocal

Sean X, Y espacios de Banach y $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal con primera derivada de Fréchet en un dominio convexo abierto Ω . Para resolver el sistema $F(x) = 0$, consideraremos el método iterativo multipaso con la primera derivada congelada definido en (6.1).

Partimos de una estimación inicial $x^0 \in \Omega$ para la cual $[F'(x^{(k)})]^{-1}$ existe. Denotamos $\Gamma^{(0)} = [F'(x^{(0)})]^{-1}$, y asumimos que se verifican las siguientes condiciones:

- (C₁) $\|\Gamma^{(0)}\| \leq \beta_0, \|\Gamma^{(0)}F(x^{(0)})\| \leq \eta_0,$
- (C₂) $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega \text{ y } K \geq 0,$
- (C₃) $\|F'(x)\| \leq C \quad \forall x \in \Omega \text{ y } C \geq 0.$

Bajo estas condiciones, establecemos relaciones de recurrencia para obtener la convergencia semilocal del método iterativo mencionado. En primer lugar definimos $h_0 = \beta_0 K \eta_0$.

El siguiente resultado garantiza que cada iteración en el método iterativo bajo consideración está bien definida.

LEMA 6.2.1. *Bajo las condiciones antes mencionadas (C₁) – (C₃), supongamos que existe $1 < R < \frac{1}{h_0}$ para el cual $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$ y $x^{(k+1)} \in B(x_0, R\eta_0)$ con $B(x_0, R\eta_0) \subset \Omega$, para $k \geq 0$ y $k \in N$, entonces el proceso iterativo (6.1) está bien definido.*

Demostración. Obviamente, $F(x^{(k)})$ está bien definido, ya que $x^{(k)} \in B(x^{(0)}, R\eta_0) \subset \Omega$, para toda $k \in N$ y $k \geq 0$.

Por otro lado, es necesario que $\Gamma^{(k)} = [F'(x^{(k)})]^{-1}$ exista para toda $k \in N$. Para ello obtenemos:

$$\|I - \Gamma^{(0)}F'(x^{(k)})\| \leq \|\Gamma^{(0)}\| \|F'(x^{(k)}) - F'(x^{(0)})\| \leq \beta_0 K \|x^{(k)} - x^{(0)}\| < h_0 R.$$

Entonces, como $Rh_0 < 1$ aplicamos lema de Banach, deducimos la existencia de $\Gamma^{(k)}$ y se verifica:

$$\|\Gamma^{(k)}\| \leq \frac{\beta}{1 - h_0 R}.$$

□

6.2.1 Funciones Auxiliares

En el Lema 6.2.1 hemos asumido la existencia de un valor R que nos da una bola donde podemos obtener las iteraciones de nuestro modelo, pero ahora debemos obtener este valor. Para este propósito, debemos analizar el método paso a paso y, utilizando las condiciones de contorno $(C_1) - (C_3)$, obtenemos algunas restricciones que nos proporcionan un procedimiento para obtener R . Ya que estamos analizando un método de alto orden, necesitamos establecer un alto número de parámetros y funciones auxiliares que son necesarios para estudiar nuestro modelo (6.1). Denotemos:

$$G_0(s) = 1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2s + \frac{1}{2}h_0^3s^2P_0 \quad (6.2)$$

$$Q_0(s) = 1 + P_0L_0 + \frac{1}{4}h_0^4s^2P_0^2 \quad (6.3)$$

$$g_0(s) = \frac{h_0^3s^2Q_0(s)}{2(1 - h_0s)} \quad (6.4)$$

$$G_1(t, s) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2s + \frac{1}{2}t^3s^2P_1(t, s) \quad (6.5)$$

$$Q_1(t, s) = 1 + P_1L_1(s) + \frac{1}{4}t_1^4s^2P_1(s)^2 \quad (6.6)$$

$$g_1(t, s) = \frac{t^3s^2Q_1(t, s)}{2} \quad (6.7)$$

con

$$L_0 = \beta_0C \quad (6.8)$$

$$P_0 = \frac{21}{4} + L_0(11 + \frac{23}{2}L_0 + 6L_0^2 + \frac{5}{4}L_0^3) \quad (6.9)$$

$$L_1(s) = \frac{\beta_0C}{1 - h_0s} \quad (6.10)$$

$$P_1(s) = \frac{21}{4} + L_1(s)[11 + \frac{23}{2}L_1(s) + 6L_1(s)^2 + \frac{5}{4}L_1(s)^3] \quad (6.11)$$

donde $t \in [0, h_0]$ y $s \in [0, \frac{1}{h_0}]$.

Establecemos, a continuación, propiedades de las funciones auxiliares mencionados anteriormente con el siguiente Lema.

LEMA 6.2.2. *Bajo las condiciones del Lema 6.2.1 y considerando las funciones auxiliares 6.2–6.11 sigue:*

- (i) *La función $g_0(s)$ es creciente y existe $r_1 \in [0, \frac{1}{h_0}[$ tal que $\frac{g_0(s)}{1 - h_0 s} \leq 1, \forall s \in [0, r_1]$.*
- (ii) *La función $g_1(t, s)$ es creciente con respecto a t , considerando fijo s , y para $t = h_0$ existe $r_2 \in [0, r_1[$ tal que $g_1(h_0, s) \leq 1, \forall s \in [0, r_2]$.*
- (iii) *La función $G_1(t, s)$ es creciente con respecto a t , con s fijo. Además, con $t = h_0$ fijo, tenemos que $G_0(s) \leq G_1(h_0, s) \quad \forall s \in [0, \frac{1}{h_0}[$.*

Demostración. Es obvio que las funciones G_0, g_0, G_1 y g_1 son crecientes, por construcción en su dominio. Para demostrar la segunda parte de (i), definimos la función $p_1(s) = \frac{g_0(s)}{1 - h_0 s} - 1$, donde se tiene que $p_1(0) = -1$ y $p_1(\frac{1}{h_0}) \rightarrow +\infty$ lo que indica que hay al menos una raíz positiva en $]0, \frac{1}{h_0}[$. Tomamos la menor de ellas y la denotamos por r_1 . Entonces, $\forall s \in [0, r_1]$ la función $\frac{g_0(s)}{1 - h_0 s} \leq 1$.

En el caso (ii), definimos la función $p_2(s) = g_1(h_0, s) - 1$, donde $p_2(0) = -1$ y $p_2(+\infty) \rightarrow +\infty$, análogamente para el caso (i), encontramos la raíz más pequeña posible. $r_2 \in]0, +\infty[$. Entonces, $\forall s \in [0, r_2]$ la función $g_1(h_0, s) \leq 1$.

Ahora, (iii) se sostiene al señalar que $P_1(s) > P_0 \quad \forall s \in [0, \frac{1}{h_0}[$ y $L_1(s) > L_0 \quad \forall s \in [0, \frac{1}{h_0}[$. \square

Analizando los primeros pasos

Para $k = 0$, ya hemos definido η_0, β_0, h_0 , a través de nuestra elección del punto de partida x_0 .

Usando el primer paso de (6.1) tenemos:

$$\|y^{(0)} - x^{(0)}\| = \|\Gamma^{(0)} F(x^{(0)})\| \leq \eta_0. \quad (6.12)$$

Ahora, considerando la expansión de Taylor con el resto dado en lema 2.1.3, en el capítulo 2, para $F(y^{(0)})$ alrededor de $x^{(0)}$ y, usando el primer paso de (6.1), tenemos:

$$F(y^{(0)}) = \int_{x^{(0)}}^{y^{(0)}} [F'(z) - F'(x^{(0)})] dz = \int_0^1 [F'(x^{(0)} + \tau(y^{(0)} - x^{(0)})) - F'(x^{(0)})] d\tau (y^{(0)} - x^{(0)}),$$

luego, al tomar normas y usar (C_2) obtenemos:

$$\|F(y^{(0)})\| \leq \frac{1}{2}K\eta_0\|y^{(0)} - x^{(0)}\|.$$

Entonces, para el segundo paso se sigue que

$$\|z^{(0)} - y^{(0)}\| \leq \|\Gamma^{(0)}\| \|F(y^{(0)})\| \leq \frac{1}{2}h_0\eta_0, \quad (6.13)$$

y mediante el uso de la desigualdad del triangular, (6.12), y (6.13), podemos escribir

$$\|z^{(0)} - x^{(0)}\| \leq \|z^{(0)} - y^{(0)}\| + \|y^{(0)} - x^{(0)}\| \leq (1 + \frac{1}{2}h_0)\eta_0. \quad (6.14)$$

De la misma manera, acotamos $F(z^{(0)})$ por un proceso similar.

$$F(z^{(0)}) = \int_{y^{(0)}}^{z^{(0)}} [F'(z) - F'(x^{(0)})]dz = \int_0^1 [F'(y^{(0)} + \tau(z^{(0)} - y^{(0)})) - F'(x^{(0)})]d\tau(z^{(0)} - y^{(0)}),$$

y, al tomar normas y usar (C_2) , obtenemos:

$$\|F(z^{(0)})\| \leq KR\eta_0\|z^{(0)} - y^{(0)}\|, \quad (6.15)$$

donde hemos usado que $y^{(0)} + \tau(z^{(0)} - y^{(0)}) \in B(x_0, R\eta_0)$, ya que, por el supuesto hecho en el Lema 6.2.1, $y^{(0)}, z^{(0)} \in B(x^{(0)}, R\eta_0)$ hemos aplicado la propiedad de la convexidad. Al utilizar esta cota tenemos en el tercer paso:

$$\|w^{(0)} - z^{(0)}\| \leq \|\Gamma^{(0)}\| \|F(z^{(0)})\| \leq h_0R\|z^{(0)} - y^{(0)}\| \leq \frac{1}{2}h_0^2R\eta_0, \quad (6.16)$$

y, usando (6.14) y (6.16), tenemos

$$\|w^{(0)} - x^{(0)}\| \leq \|w^{(0)} - z^{(0)}\| + \|z^{(0)} - x^{(0)}\| \leq \left(1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R\right)\eta_0. \quad (6.17)$$

Entonces encontramos la cota de $F(w^{(0)})$, utilizando el proceso anterior, obteniendo:

$$F(w^{(0)}) = \int_{z^{(0)}}^{w^{(0)}} [F'(z) - F'(x^{(0)})]dz = \int_0^1 [F'(z^{(0)} + \tau(w^{(0)} - z^{(0)})) - F'(x^{(0)})]d\tau(w^{(0)} - z^{(0)}),$$

y, aplicando de manera similar (C_2) , conseguimos:

$$\|F(w^{(0)})\| \leq KR\eta_0\|w^{(0)} - z^{(0)}\|, \quad (6.18)$$

donde hemos usado las mismas condiciones que en (6.15).

De (6.18) y (C_1) podemos obtener $\|u_1^0\| = \|\Gamma^{(0)}F(w^{(0)})\| \leq \frac{1}{2}h_0^3R^2\eta_0$ y, por la definición del método iterativo (6.1), $\|u_i^k\| \leq \|\Gamma^{(k)}F'(w^{(k)})u_{i-1}^k\|$ para $i = 2, \dots, 5$ y luego tenemos en el último paso de la primera iteración:

$$\begin{aligned} \|x^{(1)} - w^{(0)}\| &\leq \left\| \frac{21}{4}u_1^0 + 11u_2^0 + \frac{23}{2}u_3^0 + 6u_4^0 + \frac{5}{4}u_5^0 \right\| \\ &\leq \frac{21}{4}\|u_1^0\| + 11L_0\|u_1^0\| + \frac{23}{2}L_0^2\|u_1^0\| + 6L_0^3\|u_1^0\| + \frac{5}{4}L_0^4\|u_1^0\| \\ &\leq P_0\|u_1^0\| = \frac{1}{2}h_0^3R^2\eta_0P_0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Usando los límites anteriores. (6.17), (6.19), y las funciones auxiliares definidas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| &\leq \|x^{(1)} - w^{(0)}\| + \|w^{(0)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_0^2R + \frac{1}{2}h_0^3R^2P_0\right)\eta_0 = G_0(R)\eta_0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ahora, usando la expansión de Taylor de $F(x^{(1)})$ alrededor $w^{(0)}$, tenemos:

$$\begin{aligned} F(x^{(1)}) &= F(w^{(0)}) + F'(w^{(0)})(x^{(1)} - w^{(0)}) + \int_{w^{(0)}}^{x^{(1)}} [F'(z) - F'(w^{(0)})]dz \\ &= F(w^{(0)}) + F'(w^{(0)})(x^{(1)} - w^{(0)}) + \int_0^1 [F'(w^{(0)} + \tau(x^{(1)} - w^{(0)})) \\ &\quad - F'(w^{(0)})]d\tau(x^{(1)} - w^{(0)}), \end{aligned}$$

y, tomando normas y aplicando (6.18), (6.19), $(C_2) - (C_3)$, y la definición de L_0 , obtenemos:

$$\begin{aligned} \|F(x^{(1)})\| &\leq \|F(w^{(0)})\| + \|F'(w^{(0)})(x^{(1)} - w^{(0)})\| + \frac{1}{2}K\|x^{(1)} - w^{(0)}\|^2 \\ &\leq \|F(w^{(0)})\| + \|F'(w^{(0)})\|P_0\|u_1^0\| + \frac{1}{8}Kh_0^6R^4\eta_0^2P_0^2 \\ &\leq \|F(w^{(0)})\|(1 + P_0L_0) + \frac{1}{8}Kh_0^6R^4\eta_0^2P_0^2 \\ &\leq \frac{1}{2}Kh_0^2R^2\eta_0^2(1 + P_0L_0) + \frac{1}{8}Kh_0^6R^4\eta_0^2P_0^2 \\ &\leq \frac{K}{2}h_0^2R^2(1 + P_0L_0 + \frac{1}{4}h_0^4R^2P_0^2)\eta_0^2 = \frac{K}{2}h_0^2R^2Q_0(R)\eta_0^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

A continuación analizamos la segunda iteración del método. (6.1), es decir establecemos $k = 1$. En primer lugar, del Lema (6.2.1), tenemos la existencia de $\Gamma^{(1)} = F'(x^{(1)})^{-1}$ y denotamos

$$\|\Gamma^{(1)}\| \leq \frac{\beta}{1 - h_0 R} \equiv \beta_1. \quad (6.22)$$

Usando (6.21), (6.22), y el valor de β_1 tenemos:

$$\begin{aligned} \|y^{(1)} - x^{(1)}\| &\leq \|\Gamma^{(1)} F(x^{(1)})\| \\ &\leq \beta_1 \frac{K}{2} h_0^2 R^2 Q_0(R) \eta_0^2 = \frac{h_0^3 R^2 Q_0(R)}{2(1 - h_0 R)} \eta_0 = \eta_1, \end{aligned} \quad (6.23)$$

obteniendo un nuevo valor de las relaciones de recurrencia, $\eta_1 = g_0(R) \eta_0$.

Más tarde, utilizando la desigualdad triangular, (6.20), y (6.23), podemos escribir

$$\begin{aligned} \|y^{(1)} - x^{(0)}\| &\leq \|y^{(1)} - x^{(1)}\| + \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \\ &\leq (g_0(R) + G_0(R)) \eta_0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Luego, una vez que se han obtenido los parámetros β_1 y η_1 , y al seguir con la notación anterior, tenemos condiciones análogas a las del paso anterior, es decir:

$$\begin{cases} \|\Gamma^{(1)}\| \leq \beta_1, \\ \|\Gamma^{(1)} F(x^{(1)})\| \leq \eta_1, \\ h_1 = \beta_1 K \eta_1. \end{cases} \quad (6.25)$$

Por lo tanto, con el mismo razonamiento anterior, establecemos para el primer paso de (6.1) lo siguiente:

$$F(y^{(1)}) = \int_{x^{(1)}}^{y^{(1)}} [F'(z) - F'(y^{(1)})] dz = \int_0^1 [F'(x^{(1)} + \tau(y^{(1)} - x^{(1)})) - F'(x^{(1)})] d\tau (y^{(1)} - x^{(1)}).$$

Luego, al tomar normas y usar (C_2) obtenemos:

$$\|F(y^{(1)})\| \leq \frac{1}{2} K \eta_1 \|y^{(1)} - x^{(1)}\|,$$

de modo que, para el segundo paso, tenemos:

$$\|z^{(1)} - y^{(1)}\| \leq \|\Gamma^{(1)}\| \|F(y^{(1)})\| \leq \frac{1}{2} h_1 \eta_1. \quad (6.26)$$

Aplicando (6.24) y (6.26), vemos que

$$\|z^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \|z^{(1)} - y^{(1)}\| + \|y^{(1)} - x^{(0)}\| \leq [(1 + \frac{1}{2}h_1)g_0(R) + G_0(R)]\eta_0. \quad (6.27)$$

Acotamos $F(z^{(1)})$ por un proceso similar:

$$F(z^{(1)}) = \int_{y^{(1)}}^{z^{(1)}} [F'(z) - F'(x^{(1)})]dz = \int_0^1 [F'(y^{(1)} + \tau(z^{(1)} - y^{(1)})) - F'(x^{(1)})]d\tau(z^{(1)} - y^{(1)}),$$

y, tomando normas, usando (C_2) , y asumiendo (como probaremos después de determinar R) ahora que

$$y^{(1)}, z^{(1)} \in B(x^{(1)}, R\eta_1) \quad (6.28)$$

y, por su propiedad de convexidad, tenemos que $y^{(1)} + \tau(z^{(1)} - y^{(1)}) \in B(x^{(1)}, R\eta_1)$, para que obtengamos:

$$\|F(z^{(1)})\| \leq \frac{1}{2}KRh_1\eta_1^2,$$

al utilizar esta cota tenemos en el tercer paso:

$$\|w^{(1)} - z^{(1)}\| \leq \|\Gamma^{(1)}\| \|F(z^{(1)})\| \leq \frac{1}{2}h_1^2R\eta_1, \quad (6.29)$$

de la cual deducimos:

$$\|w^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \|w^{(1)} - z^{(1)}\| + \|z^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \left[\left(1 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_1^2R\right) g_0(R) + G_0(R) \right] \eta_0, \quad (6.30)$$

y así encontramos para el tercer paso una cota en $F(w^{(1)})$, usando el proceso anterior, mostrando que

$$\|F(w^{(1)})\| \leq KR\eta_1\|w^{(1)} - z^{(1)}\| \leq \left(\frac{1}{2}Kh_1^2R^2\eta_1\right)\eta_1. \quad (6.31)$$

Ahora de (6.31) y (C_2) , podemos obtener

$$\begin{aligned} \|u_1^1\| &= \|\Gamma^{(1)}F(w^{(1)})\| \leq \frac{1}{2}h_1^3R^2\eta_1 \quad \text{con} \\ \|u_i^k\| &\leq \|\Gamma^{(k)}F'(w^{(k)})u_{i-1}^k\| \end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, 5$, y tenemos en el último paso de la segunda iteración de (6.1):

$$\begin{aligned}
 \|x^{(2)} - w^{(1)}\| &\leq \left\| \frac{21}{4}u_1^1 + 11u_2^1 + \frac{23}{2}u_3^1 + 6u_4^1 + \frac{5}{4}u_5^1 \right\| \\
 &\leq \frac{21}{4}\|u_1^1\| + 11L_1(s)\|u_1^1\| + \frac{23}{2}L_1(s)^2\|u_1^1\| + 6L_1(s)^3\|u_1^1\| + \frac{5}{4}L_1(s)^4\|u_1^1\| \\
 &\leq \frac{1}{2}h_1^3R^2\eta_1P_1(R),
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Usando (6.30) y (6.32), tenemos

$$\|x^{(2)} - x^{(0)}\| \leq \|x^{(2)} - w^{(1)}\| + \|w^{(1)} - x^{(0)}\| \leq (G_1(h_1, R)g_0(R) + G_0(R))\eta_0. \tag{6.33}$$

Ahora usamos la expansión de Taylor de $F(x^{(2)})$ alrededor de $w^{(1)}$. Para el primer paso de la tercera iteración se sostiene que:

$$\begin{aligned}
 F(x^{(2)}) &= F(w^{(1)}) + F'(w^{(1)})(x^{(2)} - w^{(1)}) + \int_{w^{(1)}}^{x^{(2)}} [F'(z) - F'(w^{(1)})]dz \\
 &= F(w^{(1)}) + F'(w^{(1)})(x^{(2)} - w^{(1)}) + \int_0^1 [F'(w^{(1)} + \tau(x^{(2)} - w^{(1)})) \\
 &\quad - F'(w^{(1)})]d\tau(x^{(2)} - w^{(1)}),
 \end{aligned}$$

y, tomando normas y usando (6.31), (6.32), $(C_2) - (C_3)$ y la definición de $L_1(s)$, conseguimos:

$$\begin{aligned}
 \|F(x^{(2)})\| &\leq \|F(w^{(1)})\| + \|F'(w^{(1)})(x^{(2)} - w^{(1)})\| + \frac{1}{2}K\|x^{(2)} - w^{(1)}\|^2 \\
 &\leq \|F(w^{(1)})\| + P_1\|u_1\|\|F'(w^{(1)})\| + \frac{1}{8}Kh_1^6R^4\eta_1^2P_1^2 \\
 &\leq \|F(w^{(1)})\|(1 + P_1L_1(s)) + \frac{1}{8}Kh_1^6R^4\eta_1^2P_1^2 \\
 &\leq \frac{K}{2}h_1^2R^2(1 + P_1L_1(s)) + \frac{1}{4}h_1^4R^2P_1^2\eta_1^2 = \frac{K}{2}h_1^2R^2Q_1(h_1, R)\eta_1^2,
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

por lo tanto

$$\|\Gamma^{(2)}F(x^{(2)})\| \leq \beta_2 \frac{K}{2}h_1^2R^2Q_1(h_1, R)\eta_1^2 \leq \frac{h_1^3R^2}{2}Q_1(h_1, R)\eta_1 = \eta_2$$

así obtenemos $\eta_2 = g_1(h_1, R)\eta_1$.

Por lo tanto tenemos condiciones similares a las del paso anterior; es decir:

$$\begin{cases} \|\Gamma^{(2)}\| \leq \beta_2, \\ \|\Gamma^{(2)}F(x^{(2)})\| \leq \eta_2, \\ h_2 = \beta_2K\eta_2. \end{cases} \tag{6.35}$$

Relación de Recurrencia

Como consecuencia del estudio anterior, ahora estamos en posición de definir las relaciones de recurrencia necesarias para probar la convergencia semilocal del proceso iterativo (6.1). Trabajamos bajo las condiciones $(C_1) - (C_3)$ con los parámetros y funciones auxiliares ya definidos.

Debido al análisis anterior podemos declarar el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned}\beta_k &= \beta_1 \quad k \geq 1 \\ \eta_k &= g_1(h_{k-1}, R)\eta_{k-1} \quad k \geq 2 \\ h_k &= \beta_k K \eta_k \quad k \geq 2.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Con el siguiente Lema, obtenemos una propiedad básica para la última secuencia escalar definida en las relaciones de recurrencia.

LEMA 6.2.3. *La secuencia $\{h_k\}$ generada por (6.36) con h_0 y h_1 definida previamente por (6.22) es decreciente.*

Demostración. Demostramos este resultado por un proceso de inducción. Para $k = 1$, usando (6.22) y el Lema 6.2.2 (i) tenemos

$$h_1 = \beta_1 K \eta_1 = \frac{h_0^3 R^2 Q_0(R)}{2(1 - h_0 R)^2} h_0 = \frac{g_0(R)}{1 - h_0 R} h_0 \leq h_0.$$

Para $k = 2$, usando (6.35) y el Lema 6.2.2 (ii) se consigue:

$$h_2 = \beta_2 K \eta_2 = \frac{h_1^3 R^2 Q_1(h_1, R)}{2} h_1 = g_1(h_1, R) h_1 \leq h_1,$$

por lo tanto $h_2 \leq h_1 \leq h_0$.

Ahora por la hipótesis de la inducción suponemos que $h_0 \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_{n-2} \geq h_{n-1}$. Usando que $g_1(t, R)$ es una función creciente en t , por el Lema 6.2.2 (ii) tenemos:

$$h_k = g_1(h_{k-1}, R) h_{k-1} \leq g_1(h_1, R) h_{k-1} \leq h_{k-1}\tag{6.37}$$

Esto completa el proceso de inducción. \square

LEMA 6.2.4. *Bajo las condiciones asumidas en el Lema 6.2.1, y después de analizar los primeros pasos del método iterativo definido por (6.1), establecemos las siguientes desigualdades $\forall k \in N, k \geq 1$.*

- a) $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq \eta_k,$
- b) $\|y^{(k)} - x^{(0)}\| \leq \eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_i, R)\eta_i + G_0(R)\eta_0,$
- c) $\|z^{(k)} - y^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}h_k\eta_k,$
- d) $\|z^{(k)} - x^{(0)}\| \leq (1 + \frac{1}{2}h_k)\eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_i, R)\eta_i + G_0(R)\eta_0,$
- e) $\|w^{(k)} - z^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}h_k^2R\eta_k,$
- f) $\|w^{(k)} - x^{(0)}\| \leq (1 + \frac{1}{2}h_k + \frac{1}{2}h_k^2R)\eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_i, R)\eta_i + G_0(R)\eta_0,$
- h) $\|x^{(k+1)} - w^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}h_k^3R^2\eta_kP_1(R),$
- i) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq (1 + \frac{1}{2}h_k + \frac{1}{2}h_k^2R + \frac{1}{2}h_k^3R^2P_1)\eta_k = G_1(h_k, R)\eta_k,$
- j) $\|x^{(k+1)} - x^{(0)}\| \leq \sum_{i=1}^k G_1(h_i, R)\eta_i + G_0(R)\eta_0.$

Demostración. La prueba sigue por un procedimiento de inducción. Hemos verificado estas condiciones para $k = 0, 1$. Suponemos que las desigualdades siguen para $k = n - 1$, luego, por el razonamiento hecho en los primeros pasos, se pueden obtener las desigualdades para $k = n$. \square

6.2.2 Resultado principal

Después de obtener el sistema de relaciones de recurrencia y los límites de todos los pasos e iteraciones sucesivas, estamos en condiciones de establecer nuestro resultado principal. Es decir, para completar el estudio de convergencia semilocal tenemos que probar las asunciones asumidas que hemos hecho en nuestra disertación anterior (ver Lema 6.2.1), definiendo el parámetro R .

Teorema 6.1. *Sea F un operador no lineal, $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, definido en un dominio convexo abierto no vacío Ω de un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y . Suponga que se satisfacen las condiciones (C_1) – (C_3) y se tiene en cuenta las funciones G_0, Q_0, g_0, G_1, Q_1 y g_1 definida en (6.2.1) y los valores r_1, r_2 definidos en el Lema 6.2.2. Supongamos que la ecuación*

$$s = G_1(h_0, s) \left(1 + g_0(s) \frac{1}{1 - g_1(h_0, s)} \right), \quad (6.38)$$

tiene al menos una raíz real positiva, denotada la más pequeña por r_3 , y se toma $R = \min\{r_1, r_2, r_3\}$ if $R > 1$ y $B(x^{(0)}, R\eta_0) \subset \Omega$. Entonces el proceso iterativo dado por (6.1), con $x^{(0)}$ estimación

inicial, satisface $y^{(k)}, z^{(k)}, w^{(k)}, x^{(k+1)} \in B(x^{(0)}, R\eta_0) \forall k \in N$, converge a la solución x^* de la ecuación $F(x) = 0$, $y x^* \in B(x^{(0)}, R\eta_0)$. Además la solución es única en $B(x^{(0)}, \frac{2}{K\beta} - R\eta_0) \cap \Omega$.

Demostración. Primero necesitamos desarrollar la próxima suma, para lo cual, usamos el hecho de que g_1 es creciente en su dominio y la secuencia h_k es decreciente, como indicamos en Lemas 6.2.2 y 6.2.3 respectivamente, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \eta_i &= \eta_0 + g_0(R)\eta_0 + g_1(h_1, R)\eta_1 + g_1(h_2, R)\eta_2 + \cdots + g_1(h_{k-1}, R)\eta_{k-1} \\ &\leq [\eta_0 + g_0(R)\eta_0 + g_1(h_0, R)\eta_1 + g_1(h_0, R)^2\eta_1 + g_1(h_0, R)^3\eta_1 \\ &\quad + \cdots + g_1(h_0, R)^{k-1}\eta_1] \\ &= \eta_0 + g_0(R)\eta_0[1 + g_1(h_0, R) + g_1(h_0, R)^2 + g_1(h_0, R)^3 \\ &\quad + \cdots + g_1(h_0, R)^{k-1}] \\ &\leq \left[1 + g_0(R) \frac{1}{1 - g_1(h_0, R)} \right] \eta_0, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad reconocemos una progresión geométrica con razón $g_1(h_0, R) < 1$.

Ahora, para probar $y^{(k)}, z^{(k)}, w^{(k)}, x^{(k+1)} \in B(x^{(0)}, R\eta_0)$, observamos que, por ser $R > 1$ por lo supuesto en el Lema 6.2.1 tenemos que

$$\|y^{(0)} - x^{(0)}\| = \|\Gamma^{(0)}F(x^{(0)})\| \leq \eta_0 < R\eta$$

y para $k \geq 1$, y por el Lema 6.2.4 se sigue:

$$\begin{aligned} \|y^{(k)} - x^{(0)}\| &\leq \eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_i, R)\eta_i + G_0(R)\eta_0 \\ &\leq G_1(h_0, R)\eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_0, R)\eta_i + G_1(h_0, R)\eta_0 \\ &\leq G_1(h_0, R) \sum_{i=0}^k \eta_i \leq G_1(h_0, R) \left[1 + g_0(R) \frac{1}{1 - g_1(h_0, R)} \right] \eta_0 = r_3\eta \leq R\eta \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado que $G_1(h_0, R) > 1$ por construcción y $G_0(R) < G_1(h_0, R)$ por (iii) del Lema 6.2.2, y en la última desigualdad usamos la definición de R dada por la ecuación (6.38).

Mediante el uso de un razonamiento similar tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \|z^{(k)} - x^{(0)}\| &\leq \left(1 + \frac{1}{2}h_k\right)\eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_i, R)\eta_i + G_0(R)\eta_0 \\
 &\leq G_1(h_k, R)\eta_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_1(h_0, R)\eta_i + G_1(h_0, R)\eta_0 \\
 &\leq G_1(h_0, R) \sum_{i=0}^k \eta_i \leq G_1(h_0, R) \left[1 + g_0(R) \frac{1}{1 - g_1(h_0, R)}\right] \eta_0 = r_3 \eta \leq R\eta
 \end{aligned}$$

y que igualmente se mantiene para $w^{(k)}, x^{(k+1)} \in B(x^{(0)}, R\eta_0)$.

Hemos demostrado que las iteraciones permanecen en la bola centrada en el valor inicial $x^{(0)}$, es decir, la sucesión dada por (6.1) está bien definida. Ahora tenemos que demostrar que es una sucesión de Cauchy.

Usando los Lemas 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4, (6.36), y la suma de una progresión geométrica finita con razón común $g_1(h_0, R)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &\leq \sum_{j=1}^m \|x^{(k+j)} - x^{(k+j-1)}\| \leq \sum_{j=1}^m G_1(h_{k+j-1}, R)\eta_{k+j-1} \\
 &\leq G_1(h_0, R) \sum_{j=1}^m \eta_{k+j-1} \leq G_1(h_0, R) \sum_{p=0}^{m-1} \eta_{k+p} \\
 &\leq G_1(h_0, R) \sum_{p=0}^{m-1} [g_1(h_0, R)]^{k+p} \eta_0 \\
 &\leq G_1(h_0, R) \frac{[g_1(h_0, R)]^k - [g_1(h_0, R)]^{k+m}}{1 - g_1(h_0, R)} \eta_0
 \end{aligned}$$

Como el último término tiende a cero tenemos que $\{x^{(k)}\}$ es una secuencia de Cauchy y por lo tanto es convergente. Ahora, si $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$, se sigue que $F(x^*) = 0$ de la continuidad del operador. F , puesto que

$$\begin{aligned}
 \|F(x^{(k)})\| &\leq \|F(w^{(k-1)})\| + \|F(w^{(k-1)})(x^{(k)} - w^{(k-1)})\| + \frac{1}{2}K\|x^{(k)} - w^{(k-1)}\| \\
 &\leq \frac{1}{2}Kh_{k-1}^2 R^2 Q_1(h_{k-1}, R)\eta_{k-1}^2 \leq \frac{1}{2}Kh_0^2 R^2 Q_1(h_0, R)[(g_1(h_0, R))^{k-1}\eta_0]^2,
 \end{aligned}$$

y $(g_1(h_0, R))^{k-1} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Para probar la unicidad, asumamos alguna otra solución, z^* de $F(x) = 0$ en $B(x^{(0)}, \frac{2}{K\beta} - R\eta) \cap \Omega$. De la aproximación de Taylor

$$F(z^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + \tau(z^* - x^*)) d\tau (z^* - x^*) = 0.$$

A continuación probamos que el operador $\int_0^1 F'(x^* + \tau(z^* - x^*)) d\tau$ es invertible y por lo tanto $z^* = x^*$. Lo comprobamos aplicando el lema de Banach:

$$\begin{aligned} \|\Gamma^{(0)} \int_0^1 F'(x^* + \tau(z^* - x^*)) d\tau - I\| &\leq \|\Gamma^{(0)}\| \int_0^1 \|F'(x^* + \tau(z^* - x^*)) - F'(x^{(0)})\| d\tau \\ &\leq K\beta \int_0^1 \|x^* + \tau(z^* - x^*) - x^{(0)}\| d\tau \leq K\beta \int_0^1 \left((1-t)\|x^* - x^{(0)}\| + \tau\|z^* - x^*\| \right) d\tau < 1, \end{aligned}$$

y así, se sigue que $[\int_0^1 F'(x^* + \tau(z^* - x^*)) d\tau]^{-1}$ existe. \square

6.3 Resultados numéricos

En esta sección completamos nuestro estudio demostrando la efectividad del análisis de convergencia semilocal con algunos ejemplos numéricos. Como discutimos en la introducción, nuestro objetivo es probar la existencia de la solución de algunos PVI y PVF en su forma analítica al tratar el problema entre los espacios de Banach [95, 96, 97]. También comparamos el radio obtenido con nuestro método y el radio obtenido por [6] en el ejercicio número cuatro. La solución numérica del problema producido mediante el uso de la técnica de diferencias finitas y la obtención de un sistema no lineal de dimensión finita se ha realizado en [5].

En cada ejemplo, hemos realizado algunos cálculos para expresar el problema como una ecuación integral equivalente, consulte [98].

Ejemplo 6.1. *Considere la ecuación de Lane-Emden, presentada en [5] :*

$$\begin{aligned} x''(t) + \frac{2}{t}x'(t) + x(t)^p &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ y para $p = 3$. La solución se puede escribir en términos de la ecuación integral.

$$x(t) = \int_0^t \left(\frac{s^2}{t} - s \right) x^p(s) ds$$

con $x(t) \in C([0, 1])$. Definimos el operador no lineal F entre espacios de Banach $\Omega = B(0, 1) \subseteq C([0, 1])$ como sigue:

$$F(x) = x(t) - \int_0^t \left(\frac{s^2}{t} - s \right) x^p(s) ds.$$

La derivada de Frechet es el operador lineal definido por

$$[F'(x)]v = v(t) - \int_0^t \left(\frac{s^2}{t} - s \right) px^{p-1}v(s) ds.$$

Ejemplo 6.2. Considere el problema de Bratu, presentado en [5] :

$$\begin{aligned} x''(t) + \alpha e^{x(t)} &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ x(1) &= 0 \end{aligned}$$

en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\alpha = 1$. La solución se puede escribir en términos de la ecuación integral.

$$x(t) = \int_0^1 -\alpha G(s, t) e^{x(s)} ds,$$

donde

$$G(s, t) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s < t \leq 1 \\ t(s-1), & 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases}$$

Definimos el operador no lineal F entre espacios de Banach $\Omega = B(0, 1) \subseteq C([0, 1])$ como sigue:

$$F(x) = x(t) + \int_0^1 \alpha G(s, t) e^{x(s)} ds.$$

La derivada de Frechet es el operador lineal definido por

$$[F'(x)]v = v(t) + \int_0^1 \alpha G(s, t) e^{x(s)} v(s) ds.$$

Ejemplo 6.3. Considere el problema de Frank-Kamenetskii, presentado en [5] :

$$\begin{aligned}x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) + \alpha e^{x(t)} &= 0 \\x'(0) &= 0 \\x(1) &= 0\end{aligned}$$

en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\alpha = 0,2$. La solución se puede escribir en términos de la ecuación integral.

$$x(t) = \int_0^1 -\alpha s e^{x(s)} G(s, t) ds,$$

donde

$$G(s, t) = \begin{cases} \ln(t), & 0 \leq s < t \leq 1 \\ \ln(s), & 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases}$$

Definimos el operador no lineal F entre espacios de Banach $\Omega = B(0, 1) \subseteq C([0, 1])$ como sigue:

$$F(x) = x(t) + \int_0^1 \alpha s e^{x(s)} G(s, t) ds.$$

La derivada de Frechet es el operador lineal definido por

$$[F'(x)]v = v(t) + \int_0^1 \alpha s e^{x(s)} G(s, t) v(s) ds.$$

Podemos obtener las cotas que verifican las condiciones (C_1) – (C_3) para cada caso, que se pueden ver en la Tabla 6.1. En la Tabla 6.2 podemos ver los diferentes valores para las restricciones del radio para el dominio de existencia de la solución.

Ex	x_0	β_0	K	η_0	C
F_1	0,100	1,0027	1,5000	0,1004	1,2739
	0,010	1,0000	1,5000	0,0100	1,2739
	0,125	1,0043	1,5000	0,1259	1,2739
F_2	0,250	1,1356	0,0428	0,4662	1,1738
	0,125	1,1264	0,0378	0,3003	1,1738
	0,500	1,1565	0,0550	0,8166	1,1738
F_3	0,050	1,1696	0,5437	0,3044	1,2332
	0,000	1,1647	0,5437	0,2329	1,2332
	0,010	1,1657	0,5437	0,2417	1,2332

Tabla 6.1: Valores para los parámetros que aparecen en el estudio de convergencia semilocal

Ex	x_0	R_1	R_2	R_3	R	$R\eta$
F_1	0,750	1,9928	1,9303	1,7720	1,7720	0,1780
	1,000	38,7280	36,5890	1,0078	1,0078	0,0101
	1,125	1,4587	1,4166	1,3075	1,3075	0,1646
F_2	0,250	22,6696	21,4800	1,0124	1,0124	0,4720
	0,500	45,9738	43,3455	1,0066	1,0066	0,3023
	0,750	7,7876	7,4461	1,0394	1,0394	0,8488
F_3	0,150	1,2462	1,2105	1,1178	1,1178	0,3402
	0,200	1,8226	1,7648	1,6185	1,6185	0,3770
	0,250	1,6768	1,6248	1,4924	1,4924	0,3688

Tabla 6.2: Radio Convergencia Semilocal.

Para comparar nuestro estudio con otros estudios de convergencia semilocal de alto orden, realizamos este ejemplo:

Ejemplo 6.4. Considere el siguiente ejemplo, presentado en [6] :

$$x(s) = 1 + \frac{1}{3} \int_0^1 G(s, t)x(t)^4 dt, \quad (6.39)$$

donde $x \in X$. Aquí $X = C[0, 1]$ es el espacio de funciones continuas sobre $[0, 1]$ con la norma

$$\|x\| = \max_{s \in [0, 1]} |x(s)|.$$

El núcleo G es la función Green

$$G(s, t) = \begin{cases} t(1-s), & t \leq s \\ s(1-t), & s \leq t. \end{cases}$$

Resolver (6.39) es equivalente a resolver $F(x) = 0$, donde $F : \Omega \subseteq C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definido por

$$[F(x)](s) = x(s) - 1 - \frac{1}{3} \int_0^1 G(s, t)x(t)^4 dt, \quad s \in [0, 1],$$

donde Ω es un dominio convexo abierto no vacío adecuado. La ecuación integral es una ecuación integral de Hammerstein del segundo tipo. [99]. La primera derivada del operador F viene dado

por

$$[F'(x)]v = v(s) - \frac{4}{3} \int_0^1 G(s, t)x(t)^3 v(t) dt.$$

Consideramos $\Omega = B(0, 2) \subseteq X$ como un dominio no vacío convexo abierto y elegimos $x_0(s) = 1$, obteniendo así los límites de verificación de las condiciones. $(C_1) - (C_3)$, que para este ejemplo son las siguientes: $\beta = \frac{6}{5}$, $\eta = \frac{1}{20}$, $K = 2$, $C = \frac{7}{3}$.

Para el método dado en (6.1), estos parámetros producen radios de $R_1 = 0,9775$, $R_2 = 0,9545$, $R_3 = 2,0903$, y de ahí tomamos el radio final $R = \min\{R_1, R_2, R_3\} = 0,9545$, de donde $R\eta = 0,0477$. Alternativamente, usando el método dado en [6], obtenemos un radio de $R = 1,2240$, con $R\eta = 0,0612$, que es un poco más grande que el nuestro, porque nuestro método (6.1) es de orden superior y esto generalmente hace que el radio de convergencia disminuya.

Conclusiones y líneas futuras

7.1 Conclusiones

En esta memoria hemos trabajado con ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ que encontramos en el caso unidimensional y con sistemas de ecuaciones de n variables $F(x) = 0$ sin olvidarnos del caso de ecuaciones no lineales definidas en espacios de Banach de dimensión infinita, siempre con el objetivo de lograr aproximar las soluciones de las mismas. Se han transformado ecuaciones diferenciales e integrales a sistemas de ecuaciones lineales o no lineales y así resolverlas usando métodos iterativos.

De esta manera, hemos aportado de forma adecuada diferentes mejoras en las técnicas de aproximación a las soluciones de estos tipos de ecuaciones. Introduciendo modificaciones en métodos iterativos clásicos así como presentando nuevas funciones de iteración, siempre verificando la eficiencia computacional de los mismos.

A continuación se dan las principales conclusiones, en función de los capítulos desarrollados en esta tesis doctoral.

- En el capítulo 3 se ha realizado una nota sobre el trabajo ya publicado en la revista *Applied Mathematics and Computation* en el número 243, páginas 809 – 816 del año 2014: “Radio de convergencia del método de Osada bajo condición continua de Hölder central”. En él se obtiene un nuevo valor para el radio local de convergencia, corrigiendo el obtenido en esta publicación. Completamos el trabajo realizando un estudio dinámico de este método iterativo.

- Se ha contribuido, en el capítulo 4, al desarrollo de la teoría de los procesos de iteración presentando métodos iterativos óptimos de octavo orden para raíces múltiples. El esquema propuesto es la extensión de un trabajo anterior propuesto por Chun y Neta [64] para raíces simples. La belleza de los métodos propuestos es que tienen errores menores que los que presentan otros métodos con los que hemos comparado nuestros esquemas iterativos. Nuestros métodos exhiben un orden de convergencia computacional estable. Incluso podemos obtener el método completo de Chun y Neta [64] como un caso especial de nuestro trabajo para $m = 1$. El esquema propuesto es óptimo en el sentido de la conjetura clásica de Kung-Traub. Usamos el índice de eficiencia que se define en el capítulo 2 como $IE = \rho^{1/d}$, donde ρ es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionales por iteración. Así, el índice de eficiencia de los métodos propuestos es $IE = \sqrt[4]{8} \approx 1,682$ que es mejor que el método clásico de Newton $IE = \sqrt[3]{2} \approx 1,414$ y los métodos de sexto orden propuestos por Geum et al. [60, 66] $IE = \sqrt[4]{6} \approx 1,565$. Podemos obtener varios métodos iterativos óptimos e interesantes de orden ocho considerando diferentes tipos de funciones peso. Además, obtenemos un estudio de convergencia local para el método de cuarto orden óptimo intermedio que define los dos primeros pasos de nuestro método, lo cual es importante porque nos permite obtener un intervalo abierto donde se puede elegir el punto inicial, pero más importante que este es el hecho de que demuestra que a pesar de ser de un orden superior, el intervalo de convergencia local sigue siendo considerablemente bueno. Finalmente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se puede concluir que los métodos propuestos son altamente eficientes y funcionan mejor que los métodos existentes.
- En el capítulo 5 Se ha presentado una modificación de octavo orden del esquema de iteración de tipo Chebyshev-Halley que tiene una convergencia óptima para obtener las soluciones múltiples de la ecuación escalar. El esquema propuesto es óptimo en el sentido de la clásica conjetura de Kung-Traub. Por lo tanto, el índice de eficiencia de los métodos actuales es $IE = \sqrt[4]{8} \approx 1,682$, que es mejor que el método clásico de Newton $IE = \sqrt[3]{2} \approx 1,414$. La experiencia numérica corrobora los resultados teóricos sobre el orden de convergencia y, además, se puede concluir que nuestros métodos propuestos en este capítulo son altamente eficientes y competitivos.
- La convergencia semilocal de un método de noveno orden de convergencia utilizado para resolver ecuaciones no lineales en espacios de Banach se establece en el capítulo 6, utilizando relaciones de recurrencia bajo el supuesto de que la primera derivada de Fréchet satisface la continuidad de Lipschitz. El dominio de existencia para la solución se establece para múltiples ejemplos que incluyen ecuaciones diferenciales e integrales, y se derivan bolas de convergencia para cada una de ellas.

7.2 Líneas futuras

Una vez concluida esta memoria y con base en los resultados logrados, se expone una síntesis de futuras líneas de investigación en las que estamos interesados en seguir trabajando a partir de ahora y con el objetivo de mejorar y culminar alguno de los resultados presentados.

- Mejoras en métodos iterativos conocidos para aumentar la velocidad de convergencia, siempre intentando mantener o mejora la eficiencia de los mismos. Para ello trabajaremos con métodos con memoria o introduciremos funciones peso que proporcionen mejoras en las aproximaciones obtenidas.
- Estudio de las convergencias local y semilocal de métodos iterativos para calcular sus radios de convergencia y así obtener valores iniciales que permitan hallar las soluciones buscados, haciéndolos eficientes.
- Propondremos analizar estudios de convergencia local o semilocal en esquemas iterativos que no han sido analizados desde este punto de vista, y en los que simplemente se ha establecido el orden de convergencia local mediante desarrollos de Taylor del operador, queremos subrayar que este tipo de estudio no es suficiente si estamos tratando métodos libres de derivadas o queremos analizar el caso de operadores no diferenciables.
- Uno de nuestros objetivos es extender el concepto de multiplicidad de la raíz de una solución a números no enteros. Es decir analizar el comportamiento de lo métodos iterativos para ecuaciones del tipo $f(x) = x^{p/q}(g(x))$.
- Por otra parte en el caso multidimensional estamos interesados en analizar y modificar los métodos iterativos para el caso de sistemas mal condicionados, o sistemas en los que se anula el jacobiano en alguna iteración.
- Finalmente pretendemos aproximar la solución de diferentes problemas aplicados que se plantean mediante ecuaciones integrales tratando de proponer algoritmos iterativos que obtengan la aproximación a la solución en el espacio de Banach de dimensión infinita sin necesidad de discretizar el problema.

Apéndice A

Méritos

A.1 Publicaciones

Las publicaciones realizadas en el transcurso de la investigación doctoral son las siguientes.

- José L. Hueso, Eulalia Martínez, D.K. Gupta, Fabricio Cevallos. A note on “Convergence radius of Osada’s method under Hölder continuous condition”. *Applied Mathematics and Computation*, 321 (2018), 689-699.
- Ramandeep Behl, Eulalia Martínez, Fabricio Cevallos, Ali Saleh Alshomrani. “Local Convergence Results for an Optimal Iterative Method for Multiple Roots”. 7th International Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, which was held in Lozenetz, Bulgaria, June 11-16, 2018. Springer Nature Switzerland AG 2019, I. Dimov et al. (Eds.): FDM 2018, LNCS 11386, pp. 153-158, 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-030-11539-5_15.
- Ramandeep Behl, Eulalia Martínez, Fabricio Cevallos, Ali S. Alshomrani. “Local Convergence Balls for Nonlinear Problems with Multiplicity and Their Extension to Eighth-Order Convergence”. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2019, Article ID 1427809, 17 pages <https://doi.org/10.1155/2019/1427809>.
- Ramandeep Behl, Eulalia Martínez, Fabricio Cevallos, Diego Alarcón. “A Higher Order Chebyshev-Halley-Type Family of Iterative Methods for Multiple Roots”. *Mathematics* 2019, 7, 339, doi:10.3390/math7040339.

- Fabricio Cevallos, José L. Hueso, Eulalia Martínez, Cory L. Howk. Article ID: MMA5696. Article DOI: 10.1002/mma.5696. Internal Article ID: 16459731. Article: Domain of existence for the solution of some IVP's and BVP's by using an efficient ninth order iterative method. Journal: Mathematical Methods in the Applied Sciences.

A.2 Congresos

Como parte del proceso de preparación e investigación se ha asistido a distintos congresos de Métodos Numéricos. A continuación se detallan.

- ACCIÓN DE INTERNACIONALIZACIÓN EN DOCTORADO: MATEMÁTICAS, Universitat Politècnica de València (València), 3-10 de octubre de 2016, "Aplicaciones multidisciplinares desde el punto de vista del problema de Cauchy abstracto" y "Aplicaciones: Existencia de soluciones débiles para ecuaciones lineales y no lineales".
- XI JORNADAS DE TRABAJO SOBRE ANÁLISIS NUMÉRICO Y APLICACIONES, Universidad de La Rioja (Logroño) 24-25 de noviembre de 2016, varios.
- Cuarto Congreso Conjunto del Máster en Investigación Matemática y del Doctorado, Universidad de València (València) 18-20 de enero de 2017, "Optimal Steffensen-type method for approximating multiple roots".
- CONGRESO BIENAL DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, Universidad de Zaragoza (Zaragoza), 30 de enero al 03 de febrero de 2017, "New optimal derivative free iterative methods for multiple roots".
- Mathematical Modelling in Engineering & Human Behaviour 2018 Conference, Universidad Politècnica de València (València), 16-18 de julio de 2018, "An optimal eighth-order scheme for multiple roots with a local convergence study applied to some real life problems".
- Mathematical Modelling in Engineering & Human Behaviour 2019 Conference, Universidad Politècnica de València (València), 10-12 de julio de 2019, "Semilocal Convergence for a new Chebyshev-type methods".
- 18th International Conference Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, Universidad de Cádiz (Cádiz), 09-14 de julio de 2018, "Semilocal convergence of a efficient Newton-type ninth-order iterative method"

A.3 Otros méritos

A.3.1 *Relacionados con el área de Matemáticas*

- Titulaciones
 - Licenciado en Ciencias de la Educación, especialidad Físico-Matemático (2002), por la Universidad laica “Eloy Alfaro” de Manabí-Ecuador.
 - Máster Universitario en Investigación Matemática (2015), por la Universitat de València y la Universitat Politècnica de València.
- Contratos
 - Profesor del colegio Juan Montalvo anexo a la Universidad laica “Eloy Alfaro” de Manabí. Período 01/04/1990-01/03/2014.
 - Profesor en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad laica “Eloy Alfaro” de Manabí. Período desde 01/10/2013.

Bibliografía

- [1] Hueso J.L., Martínez E., Gupta D.K. y Cevallos F. "A note on "Convergence radius of Osada's method under Hölder continuous condition"". *Applied Mathematics and Computation* 321 (2018), págs. 689-699.
- [2] Cevallos F., Hueso J.L., Martínez E. y Howk C.L. "Domain of existence for the solution of some IVP's and BVP's by using an efficient ninth-order iterative method". *Math. Meth. Appl. Sci.* 43 (2020), págs. 7934-7947.
- [3] Behl R., Martínez E., Cevallos F. y Alarcón D. "A Higher Order Chebyshev-Halley-Type Family of Iterative Methods for Multiple Roots". *Mathematics* 7.339 (2019).
- [4] Behl R., Martínez E., Cevallos F. y Alshomrani A.S. "Local Convergence Balls for Non-linear Problems with Multiplicity and Their Extension to Eighth-Order Convergence". *Mathematical Problems in Engineering* (2019), Article ID 1427809, 17 pages.
- [5] Ahmad F., Rehman S., Zaca M., Aljahdali H.M., Ahmad S., Alshomrani A.S., Carrasco J.A. y Ahmad S. and Sivasankaran S. "Frozen Jacobian multistep iterative method for solving nonlinear IVP's and BVP's". *Complexity* 2017.30 (2017), Article ID 9407656.
- [6] Zheng L. y Gu C. "Semilocal convergence of a sixth-order method in Banach spaces". *Numerical Algorithms* 61 (2012), págs. 413-427.
- [7] Xiaojian Z. y Yongzhong S. "Convergence radius of Osada's method under center-Hölder continuous condition". *Applied Mathematics and Computation* 243 (2014), 809-816.
- [8] S. Weerakoon y T.G.I. Fernando. "A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence". *Applied Mathematics Letters* 13.8 (2000), págs. 87-93. ISSN: 0893-9659. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(00\)00100-2](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00100-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965900001002>.
- [9] Cordero A. y Torregrosa J.R. "Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas". *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007), págs. 686-698.

- [10] Potra, F.A. y V. Pták. *Nondiscrete Induction and Iterative Processes (Research Notes in Mathematics)*. Pitman:Boston, MA, USA, vol 103, 1984.
- [11] Garrido N. "Diseño, análisis y estabilidad de métodos iterativos con memoria para la resolución de ecuaciones y sistemas no lineales". Tesis doct. Departamento de Matemática aplicada. Universitat Politècnica de València, 2020.
- [12] Torregrosa J.R., Cordero A., Hueso J.L. y Martínez E. "Métodos iterativos óptimos para la resolución de ecuaciones no lineales". *XXII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, XII Congreso de Matemática Aplicada*. Palma de Mallorca, 2011, págs. 177-185.
- [13] Jain p. "Steffensen type methods for solving nonlinear equations". *Applied Mathematics and Computation* 121 (1974), págs. 643-651.
- [14] DKR Babajee, MZ Dauhoo, MT Darvishi, A Karami y Ali Barati. "Analysis of two Chebyshev-like third order methods free from second derivatives for solving systems of nonlinear equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233.8 (2010), págs. 2002-2012.
- [15] Alicia Cordero y Juan R Torregrosa. "Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas". *Applied Mathematics and Computation* 190.1 (2007), págs. 686-698.
- [16] Alicia Cordero, José L Hueso, Eulalia Martínez y Juan R Torregrosa. "Accelerated methods of order $2p$ for systems of nonlinear equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233.10 (2010), págs. 2696-2702.
- [17] Alicia Cordero, José L Hueso, Eulalia Martínez y Juan R Torregrosa. "A modified Newton-Jarratt's composition". *Numerical Algorithms* 55.1 (2010), págs. 87-99.
- [18] Alicia Cordero, Eulalia Martínez y Juan R Torregrosa. "Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 231.2 (2009), págs. 541-551.
- [19] José L Hueso, Eulalia Martínez y Juan R Torregrosa. "Modified Newton's method for systems of nonlinear equations with singular Jacobian". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 224.1 (2009), págs. 77-83.
- [20] José L Hueso, Eulalia Martínez y Juan R Torregrosa. "Third and fourth order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems". *Applied mathematics and Computation* 211.1 (2009), págs. 190-197.
- [21] José L Hueso, Eulalia Martínez y Juan R Torregrosa. "Third order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems". *Applied mathematics and computation* 215.1 (2009), págs. 58-65.
- [22] José L Hueso, Eulalia Martínez y Carles Teruel. "Derivative free iterative methods for nonlinear systems". *Applied Mathematics and Computation* 259 (2015), págs. 955-966.
- [23] José L Hueso, Eulalia Martínez y Carles Teruel. "Convergence, efficiency and dynamics of new fourth and sixth order families of iterative methods for nonlinear systems". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 275 (2015), págs. 412-420.
- [24] Ostrowski .AM. *Solutions of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. New York: Academic Press, 1973.

-
- [25] Traub J.F. *Iterative methods for the solution of equations*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964.
- [26] Kung H.T. y Traub J.F. "Optimal order of one-point and multipoint iteration". *Journal of the ACM* 21 (1974), págs. 643-651.
- [27] Jarratt P. "Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations". *Mathematics and Computation* 20 (1966), págs. 434-437.
- [28] Ostrowski, A.M. *Solutions of Equations and System of Equations*. Academic Press: New York, NY, USA, 1966.
- [29] Milnor J. W. "Dynamics in one complex variable: Introductory lectures". *arXiv preprint math/9201272* 233 (1990).
- [30] Fagella Rabionet N. "Invariants en Dinàmica complexa". *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 23 (2008), págs. 29-51.
- [31] Hueso J.L., Martínez E. y Teruel C. "Determination of multiple roots of nonlinear equations and applications". *Journal of Mathematical Chemistry* 53.3 (2015), págs. 880-892.
- [32] Ralston A. y Rabinowitz P. *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill, New York, 1978.
- [33] Ren H. y Argyros I.K. "Convergence radius of the modified Newton method for multiple zeros under Hölder continuous derivative". *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010), págs. 612-621.
- [34] Xiaojian Z., Xin C. y Yongzhong S. "On the convergence radius of the modified Newton method for multiple roots under the center-Hölder condition". *Numerical Algorithms* 65 (2014), págs. 221-232.
- [35] Bi W., Ren H. y Wu Q. "Convergence of the modified Halley's method for multiple zeros under Hölder continuous derivative". *Numerical Algorithms* 58.4 (2011), págs. 497-512.
- [36] Suzhen Liu, Yongzhong Song y Xiaojian Zhou. "Convergence radius of Halley's method for multiple roots under center-Hölder continuous condition". *Applied Mathematics and Computation*. 265 (2015), págs. 1011-1018.
- [37] Apostol T.M. *One-Variable Calculus, with an introduction to Lineal Algebra*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 2nd edition, 1967.
- [38] Stoer J. y Bulirsch R. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, New York, 1980.
- [39] Xu L. y Wang X. *Topics on Methods and Examples of Mathematical Analysis*. High Education Press (in Chinese), 1983.
- [40] Blanchard P. "The dynamics of Newton's method". *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* 49 (1994), págs. 139-154.
- [41] Chun C. y Neta B. "Comparative study of eighth-order methods for finding simple roots of nonlinear equations". *Numerical Algorithms* 74.4 (2017), págs. 1169-1201.
- [42] Bakhtiari P., Cordero A., Lotfi T., Mahdiani K. y J.R. Torregrosa. "Widening basins of attraction of optimal iterative methods". *Nonlinear Dynamics* 87.2 (2017), págs. 913-938.

- [43] Argyros I.K. y Magrenán Á.A. "On the convergence of an optimal fourth-order family of methods and its dynamics". *Applied Mathematics and Computation* 252 (2015), págs. 336-346.
- [44] Argyros I.K., Cordero A., Magrenán Á.A. y Torregrosa J.R. "On the convergence of a higher order family of methods and its dynamics". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 309 (2017), págs. 542-562.
- [45] Magrenán Á.A. "A new tool to study real dynamics: The convergence plane". *Applied Mathematics and Computation* 248 (2014), págs. 215-224.
- [46] Chun C. y Neta B. "The basins of attraction of Murakami's fifth order family of methods". *Applied Numerical Mathematics* 110 (2016), págs. 14-25.
- [47] Magrenán Á.A. "Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods". *Applied Mathematics and Computation* 233 (2014), págs. 29-38.
- [48] Shishikura M. "The connectivity of the Julia set and fixed points". *Complex Dynamics, Families and Friends*. A K Peters, Wellesley, 2009, págs. 257-276.
- [49] Petković M.S., Neta B., Petković L.D. y Ćzunić J.D. *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*. Academic Press, Amsterdam, The Netherlands, 2013.
- [50] Li S.G., Liao X. y Cheng L.Z. "A newfourth-order iterativemethod for finding multiple roots of nonlinear equations". *Applied Mathematics and Computation* 215.3 (2009), págs. 1288-1292.
- [51] Neta B. "Extension of Murakami's high-order non-linear solver to multiple roots". *Int. J. Comput. Math.* 74.87 (2010), págs. 1023-1031.
- [52] Li S.G., Cheng L.Z. y Neta B. "Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots". *Computers and Mathematics with Applications* 59.4 (2010), págs. 136-135.
- [53] Xiaojian Z., Xin C. y Yongzhong S. "Constructing higher-order methods for obtaining the multiple roots of nonlinear equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235 (2011), págs. 4199-4206.
- [54] Sharifi M., Babajee D.K. y Soleymani F. "Finding the solution of nonlinear equations by a class of optimal methods". *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal* 63.4 (2012), págs. 764-774.
- [55] Soleymani F. y Babajee D.K.R. "Computing multiple zeros using a class of quartically convergent methods". *Alexandria Engineering Journal* 52.3 (2013), págs. 531-541.
- [56] Soleymani F., Babajee D.K.R. y Lotfi T. "On a numerical technique for finding multiple zeros and its dynamic". *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 21.3 (2013), págs. 346-353.
- [57] Xiaojian Z., Xin C. y Yongzhong S. "Families of third and fourth order methods for multiple roots of nonlinear equations". *Applied Mathematics and Computation* 219.11 (2013), 6030-6038.

- [58] Behl R., Cordero A., Motsa S.S. y Torregrosa J.R. "On developing fourth-order optimal families of methods for multiple roots and their dynamics". *Applied Mathematics and Computation* 265 (2015), págs. 520-532.
- [59] Behl R., Cordero A., Motsa S.S., Torregrosa J.R. y Kanwar V. "An optimal fourth-order family of methods for multiple roots and its dynamics". *Numerical Algorithms* 71.4 (2016), págs. 775-796.
- [60] Geum Y.H., Kim Y.I. y Neta B. "A class of two-point sixth-order multiple-zero finders of modified double-Newton type and their dynamics". *Applied Mathematics and Computation* 270 (2015), págs. 387-400.
- [61] Zafar F., Cordero A., Quratulain R. y Torregrosa J.R. "Optimal iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations using free parameters". *Journal of Mathematical Chemistry* 56.07 (2018), págs. 1884-1901.
- [62] Geum Y.H., Kim Y.I. y Neta B. "Constructing a family of optimal eighth-order modified Newton-type multiple-zero finders along with the dynamics behind their purely imaginary extraneous fixed points". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 333 (2018), págs. 131-156.
- [63] Geum Y.H., Kim Y.I. y Magrenán Á.A. "Study of dynamics via Möbius conjugacy map on a family of sixth-order modified Newton-like multiple-zero finders with bivariate polynomial weight functions". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 344 (2018), págs. 608-623.
- [64] Chun C. y Neta B. "An analysis of a family of Maheshwari-based optimal eighth order-methods". *Applied Mathematics and Computation* 253 (2015), págs. 294-307.
- [65] Thukral R. "Introduction to Higher-Order Iterative Methods for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations". *Journal of Mathematics* 2013 (2013), Article ID 404635, 3 pages.
- [66] Geum Y.H., Kim Y.I. y Neta B. "A sixth-order family of three-point modified Newton-like multiple-root finders and the dynamics behind their extraneous fixed points". *Applied Mathematics and Computation* 283 (2016), págs. 120-140.
- [67] Argyros I.K. "On the convergence and application of Newton's method under weak Hölder continuity assumptions". *Int. J. Comput. Math.* 80 (2003), págs. 767-780.
- [68] Cordero A. y Torregrosa J.R. "Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas". *Applied Mathematics and Computation* 190.1 (2007), págs. 686-698.
- [69] Balaji G.V. y Seader J.D. "Application of interval Newton's method to chemical engineering problems". *Reliable Computing* 1.3 (1995), págs. 215-223.
- [70] Shacham M. "An improved memory method for the solution of a nonlinear equation". *Chemical Engineering Science* 44.7 (1989), págs. 1495-1501.
- [71] Gutiérrez J.M. y M.A. Hernández. "A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces". *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 55 (1997), págs. 113-130.
- [72] Kanwar V., Singh S. y Bakshi S. "Simple geometric constructions of quadratically and cubically convergent iterative functions to solve nonlinear equations". *Numerical Algorithms* 47 (2008), págs. 95-107.

- [73] Sharma, J.R. "A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations". *Applied Mathematics and Computation* 169 (2005), págs. 242-246.
- [74] Argyros I.K., Ezquerro J.A., Gutiérrez J.M. y M.A. Hernández. "On the semilocal convergence of efficient Chebyshev-Secant-type methods". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235 (2011), págs. 3195-3206.
- [75] Xiaojian Z. "Modified Chebyshev-Halley methods free from second derivative". *Applied Mathematics and Computation* 203 (2008), págs. 824-827.
- [76] Amat S., Busquier S., Bermúdez C. y Plaza S. "On two families of high order Newton type methods". *Applied Mathematics and Computation* 25 (2012), págs. 2209-2217.
- [77] Kou, J. y Li Y. "Modified Chebyshev-Halley method with sixth-order convergence". *Applied Mathematics and Computation* 188 (2007), págs. 681-685.
- [78] Li D. and Liu P. y Kou J. "An improvement of Chebyshev-Halley methods free from second derivative". *Applied Mathematics and Computation* 235 (2014), págs. 221-225.
- [79] Sharma, J.R. "Improved Chebyshev-Halley methods with sixth and eighth order convergence". *Applied Mathematics and Computation* 256 (2015), págs. 119-124.
- [80] Behl R., Cordero A., Motsa S.S., Torregrosa J.R. y Kanwar V. "An eighth-order family of optimal multiple root finders and its dynamics". *Numerical Algorithms* 77 (2018), págs. 1249-1272.
- [81] Behl R., Alshomrani A.S. y Motsa S.S. "An optimal scheme for multiple roots of nonlinear equations with eighth-order convergence". *Journal of Mathematical Chemistry* 56 (2018), págs. 2069-2084.
- [82] Behl R., Zafar F., Alshomrani A.S., M. Junjuz y Yasmin N. "An optimal eighth-order scheme for multiple zeros of univariate functions". *International Journal of Computational Methods* 16.04 (2019), pág. 1843002.
- [83] McNamee J.M. "A comparison of methods for accelerating convergence of Newton's method for multiple polynomial roots". *ACM Signum Newsl.* 33 (1998), págs. 17-22.
- [84] Cordero A., Hueso J.L., Martínez E. y Torregrosa J.R. "Generating optimal derivative free iterative methods for nonlinear equations by using polynomial interpolation". *Math. Comput. Mod.* 57 (2013), págs. 1950-1956.
- [85] Argyros I.K., Hilout S. y Tabatabai M.A. "Mathematical Modelling with Applications in Biosciences and Engineering". *New York: Nova Publishers* (2011).
- [86] Jerome J.W. y Varga R.S. "Generalizations of spline functions and applications to nonlinear boundary value and eigenvalue problem". *Theory and applications of spline functions*. Acad. Press, New York, 1969, págs. 103-155.
- [87] Porter D. y Stirling D. *Integral Equations: A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*. Cambridge University Press, 1990.
- [88] Ortega J.M. "The Newton-Kantorovich theorem". *Amer Math Monthly* 75 (1968), págs. 658-660.
- [89] Taylor A.Y. y Lay D. *Introduction to Functional Analysis*. 2nd. New York: Wiley, 1980.
- [90] Kantorovich L.V. y Akilov G.P. *Functional Analysis*. Oxford: Pergamon Press, 1982.

-
- [91] Argyros I.K. y George S. "A unified local convergence for Jarratt-type methods in Banach space under weak conditions". *Thai J Math.* 13 (2015), págs. 165-176.
- [92] Argyros I.K. e Hilout S. "On the local convergence of fast two-step Newton-like methods for solving nonlinear equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 245 (2013), págs. 1-9.
- [93] Argyros I.K. y George S. "Extending the applicability of Gauss-Newton method for convex composite optimization on Riemannian manifolds using restricted convergence domains." *J. Nonlinear Funct. Anal.* Article ID 27 (2016).
- [94] Ezquerro J.A., Grau-Sánchez M., Hernández M.A. y Noguera M. "Semilocal convergence of secant-like methods for differentiable and nondifferentiable operators equations". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 398.1 (2013), págs. 100-112.
- [95] Keller H.B. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. New York: Dover Publications, 1992.
- [96] Na T.Y. *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*. New York: Academic Press, 1979.
- [97] Qin X., Dehaish B.A.B. y Cho S.Y. "Viscosity splitting methods for variational inclusion and fixed point problems in Hilbert spaces". *Journal of Nonlinear Sciences Applications* 9 (2016), págs. 2789-2797.
- [98] Greenberg M.D. *Application of Green's Functions in Science and Engineering*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [99] Polyanin A.D. y Manzhirov A.V. *Handbook of Integral Equations*. Boca Ratón FL: CRC Press, 1998.
- [100] Johann Schröder. "Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung". *Archiv der Mathematik* 7.6 (1957), págs. 471-484.
- [101] Kolgomorov A. N. y Fomin S. V. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1970.