



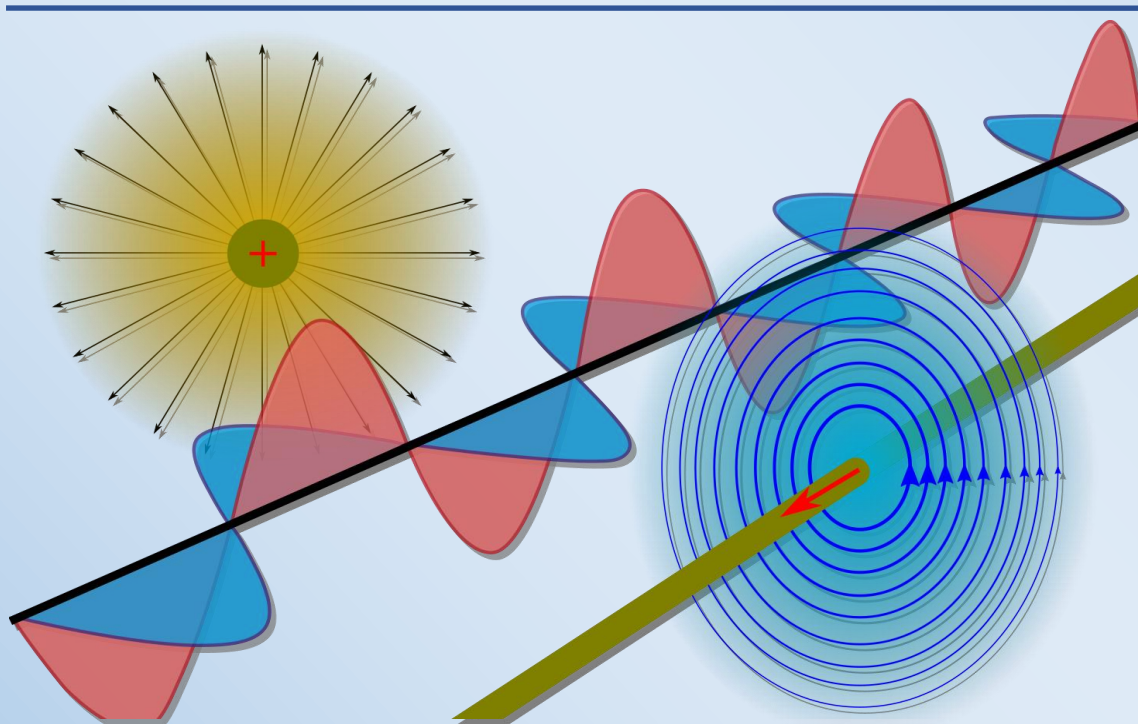
UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

# FUNDAMENTOS DE ELECTROMAGNETISMO

Emilio Sánchez Ortega  
Vicente Ferrando Martín



EDITORIAL

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

ISBN: 978-84-09-51854-8



---

# Fundamentos de Electromagnetismo

Emilio Sánchez Ortiga  
Vicente Ferrando Martín

---

**2023**

**EDITORIAL**

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

ISBN: 978-84-09-51854-8



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Sánchez-Ortiga, Emilio; Ferrando, Vicente. (2023). *Fundamentos de Electromagnetismo*. Valencia: Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño.

© Emilio Sánchez Ortiga  
Vicente Ferrando Martín

© 2023, Editorial Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño  
Universitat Politècnica de València.  
Camino de Vera s/n  
46022 – Valencia – España  
[www.etsid.upv.es](http://www.etsid.upv.es)

ISBN: 978-84-09-51854-8

La Editorial ETSID autoriza la reproducción, traducción y difusión de la presente publicación con fines científicos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial ETSID, la publicación y los autores.

# Índice general

<b>1. Introducción al electromagnetismo</b>	<b>4</b>
1.1. Breve historia del electromagnetismo . . . . .	4
<b>2. Propiedades de los campos escalares y vectoriales</b>	<b>6</b>
2.1. Operador nabra . . . . .	7
2.2. El gradiente . . . . .	7
2.3. La divergencia . . . . .	8
2.3.1. Teorema de la divergencia . . . . .	8
2.4. Rotacional . . . . .	9
2.5. Laplaciano . . . . .	10
2.6. Identidades . . . . .	10
<b>3. Electrostática en el vacío</b>	<b>11</b>
3.1. Introducción . . . . .	11
3.2. Ley de Coulomb . . . . .	11
3.3. Principio de superposición . . . . .	13
3.3.1. Conjunto de cargas puntuales . . . . .	13
3.3.2. Distribución continua de carga . . . . .	13
3.3.3. Expresión general . . . . .	14
3.4. El campo eléctrico . . . . .	15
3.4.1. Disco circular uniformemente cargado . . . . .	16
3.4.2. Superficie plana infinita uniformemente cargada . . . . .	18
3.5. Operadores sobre el campo eléctrico . . . . .	19
3.5.1. Rotacional de un campo eléctrico estacionario . . . . .	20
3.5.2. El potencial electrostático: El campo eléctrico como gradiente de una función escalar . . . . .	20
3.5.3. Ley de Gauss: Divergencia del campo eléctrico . . . . .	22
3.5.4. Flujo del campo eléctrico . . . . .	23
3.5.5. Ecuaciones de Poisson y Laplace . . . . .	24
3.6. El dipolo eléctrico y momento dipolar . . . . .	24
3.6.1. Potencial electrostático de un dipolo eléctrico . . . . .	25
3.6.2. Campo eléctrico de un dipolo . . . . .	26
3.6.3. Superficies equipotenciales y líneas de fuerza de un dipolo . . . . .	27
3.6.4. Expansión multipolar del potencial eléctrico . . . . .	28
3.7. Energía potencial electrostática . . . . .	29

3.7.1.	Energía potencial electrostática de una distribución de discreta de cargas puntuales . . . . .	30
3.7.2.	Energía potencial de una distribución de carga volumétrica . . . . .	32
<b>4.</b>	<b>Electrostática en medios materiales</b>	<b>53</b>
4.1.	Conductores . . . . .	53
4.1.1.	Modelización de un conductor . . . . .	53
4.2.	Medios dieléctricos . . . . .	54
4.2.1.	Polarización . . . . .	55
4.2.2.	Campo eléctrico en el exterior de un medio polarizado . . . . .	56
4.2.3.	Carga neta debida a polarización . . . . .	58
4.2.4.	Susceptibilidad eléctrica . . . . .	58
4.3.	El desplazamiento eléctrico: Ley de Gauss generalizada . . . . .	59
4.3.1.	Vector de desplazamiento en medios isótropos, lineales y homogéneos	60
4.4.	Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos . . . . .	61
4.5.	Condiciones de frontera: Campos en la interfase de dos medios . . . . .	61
4.5.1.	Desplazamiento eléctrico en la interfase . . . . .	62
4.5.2.	Componente paralela del campo eléctrico en la interfase . . . . .	63
4.5.3.	Reglas sobre los campos en la interfase . . . . .	65
4.5.4.	Conclusiones sobre el campo en la interfase de dos medios . . . . .	65
4.6.	Comportamiento de los conductores y dieléctricos frente a cargas y campos eléctricos . . . . .	66
4.7.	Energía potencial electrostática en presencia de medios materiales . . . . .	66
4.7.1.	Energía potencial en medios lineales, isotrópicos y homogéneos . . . . .	69
4.8.	Condensadores eléctricos . . . . .	69
4.8.1.	Energía potencial electrostática de un condensador . . . . .	70
<b>5.</b>	<b>Corriente eléctrica: circuitos y magnitudes fundamentales</b>	<b>80</b>
5.1.	Definición de corriente eléctrica . . . . .	80
5.2.	Densidades de corriente . . . . .	81
5.2.1.	Densidades de corriente superficiales . . . . .	81
5.2.2.	Corrientes de convección . . . . .	81
5.3.	Ecuación de continuidad . . . . .	82
5.4.	Ley de Ohm . . . . .	83
5.5.	Resistencias y condensadores en circuitos . . . . .	86
5.5.1.	Resistencias . . . . .	86
5.5.2.	Condensadores en circuitos . . . . .	87
5.6.	La fuerza electromotriz . . . . .	88
5.7.	Corrientes en medios sin fuentes . . . . .	90
5.8.	Corriente en la interfase de dos medios . . . . .	90
5.9.	Resumen . . . . .	91
<b>6.</b>	<b>Magnetostática en el vacío</b>	<b>92</b>
6.1.	Campo magnético: Ley de Biot-Savart . . . . .	93
6.1.1.	Fuerza de Lorentz . . . . .	94
6.2.	Campo magnético de un hilo infinito con corriente estacionaria . . . . .	95

6.2.1.	Fuerza magnética entre dos hilos conductores paralelos . . . . .	98
6.3.	Campo magnético de una espira conductora por la que circula una corriente estacionaria . . . . .	100
6.4.	Ley de Biot-Savart generalizada: Densidades de corriente superficiales y en volumen . . . . .	101
6.5.	Operadores sobre el campo magnético . . . . .	102
6.5.1.	Operadores sobre corrientes rectilíneas . . . . .	102
6.6.	Rotacional y divergencia de un campo magnético: caso general . . . . .	104
6.6.1.	Rotacional del campo magnético: Ley de Ampère . . . . .	104
6.6.2.	Divergencia del campo magnético: Segunda ecuación de Maxwell . . . . .	106
6.7.	Electrostática vs. Magnetostática . . . . .	106
6.8.	El potencial vector (magnético) . . . . .	107
6.8.1.	Relación integral entre el campo magnético y el potencial vector . . . . .	108
6.8.2.	Interpretación del potencial vector . . . . .	109
6.9.	Condiciones de contorno de las componentes normal y tangencial del campo magnético . . . . .	110
6.10.	Expansión multipolar del potencial vector . . . . .	111
6.10.1.	Desarrollo de las coordenadas para un punto arbitrario del espacio . . . . .	111
6.10.2.	Desarrollo multipolar en polinomios de Legendre . . . . .	113
6.10.3.	Propiedades físicas del campo a partir de su expansión multipolar . . . . .	113
6.11.	Campo magnético de un dipolo magnético . . . . .	115
<b>7.</b>	<b>Magnetostática en medios materiales</b>	<b>133</b>
7.1.	Magnetización . . . . .	134
7.1.1.	Potencial vector de un medio magnetizado . . . . .	134
7.2.	El campo magnético en un medio material: Ley de Ampère generalizada . . . . .	137
7.3.	Condiciones del campo en la frontera . . . . .	139
7.4.	Susceptibilidad magnética . . . . .	139
7.5.	Medios ferromagnéticos . . . . .	140
<b>8.</b>	<b>Inducción electromagnética y ecuaciones de Maxwell</b>	<b>148</b>
8.1.	Ley de Faraday . . . . .	148
8.2.	El campo eléctrico inducido . . . . .	149
8.3.	Inductancia . . . . .	150
8.4.	Ley de Ampère en electrodinámica . . . . .	151
8.5.	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	153
8.6.	Conclusión . . . . .	154
<b>A.</b>	<b>Sistemas de coordenadas</b>	<b>156</b>
A.1.	Coordenadas cilíndricas . . . . .	156
A.2.	Coordenadas esféricas . . . . .	157
<b>B.</b>	<b>Delta de Dirac tridimensional</b>	<b>159</b>
B.1.	Delta de Dirac como divergencia de un campo vectorial . . . . .	159
<b>C.</b>	<b>Ángulo sólido</b>	<b>161</b>

# Capítulo 1

## Introducción al electromagnetismo

En este curso veremos los principios fundamentales que forman lo que conocemos como electromagnetismo clásico. Éste se sustenta en una serie de leyes empíricas (la ley de Coulomb, la ley de Ohm, la ley de Ampère, la ley de Faraday, entre otras) que permiten comprender la interacción de los campos eléctricos y magnéticos tanto en el vacío como en presencia de materia. Al incluir el adjetivo clásico, en el fondo estaremos diciendo que las interacciones que vamos a estudiar ocurren a escala macroscópica y que, además, no se tendrán en cuenta los efectos relativistas. Consecuentemente, el objetivo de este curso será estudiar y predecir fenómenos macroscópicos sin tratar de explicar su naturaleza ni comprender las interacciones que ocurren a nivel fundamental. Tanto es así que, como veremos, para estudiar las corrientes y las fuentes de los campos electromagnéticos ni siquiera emplearemos el concepto de portador de carga como partícula (protón, electrón o hueco) si no que, simplemente, hablaremos de cargas puntuales o distribuciones de carga. De hecho, como se verá en la siguiente sección, el descubrimiento del electrón ocurrió años después de que se aunasen las leyes del electromagnetismo clásico en las conocidas como ecuaciones de Maxwell.

### 1.1. Breve historia del electromagnetismo

Para poder comprender la materia que vamos a estudiar resulta relevante presentar el marco histórico en el cual se desarrolló. Si bien los fenómenos electrostáticos eran conocidos desde la Antigüedad clásica, no se comenzaron a estudiar de forma rigurosa hasta el siglo XVIII. A pesar de que Henry Cavendish estableciese experimentalmente algunas de las bases de la interacción entre cargas eléctricas en la década de 1770, fue Charles-Augustin de Coulomb quien, en 1785, enunció la ley que lleva su nombre y que representa la base de la electrostática. Dicha ley permite conocer la fuerza y dirección que ejerce una carga puntual en reposo sobre otra de la misma naturaleza. Poco después, en 1800, Alessandro Volta realizó el descubrimiento de la pila voltaica, lo cual supuso un avance fundamental para el desarrollo del electromagnetismo ya que, hasta ese momento, cualquier estudio sobre electricidad solo podía realizarse con electricidad estática. Con ello, se empezaron a estudiar a fondo los circuitos y a introducir magnitudes básicas como son el voltaje, la resistencia y la corriente. De esta forma, en 1827, Georg Ohm publicó un trabajo que da lugar a la ley que lleva su nombre y que relaciona estas tres magnitudes. Al poco tiempo, en 1831 y prácticamente en paralelo, André-Marie Ampère y Michael Faraday formulan sendas leyes que forman la base de la



magnetostática y el electromagnetismo, respectivamente. Por un lado, la ley de Ampère indica que las corrientes estáticas son fuentes de campos magnéticos. Por otro, la ley de Faraday establece que un campo magnético en movimiento es capaz de inducir un campo eléctrico. Ambas leyes (junto con la de Coulomb y Gauss) están incluidas en las conocidas ecuaciones de Maxwell (James Clerk Maxwell, 1865), que resumen de manera elegante las posibles interacciones que pueden tener lugar en presencia de campos eléctricos y magnéticos, ya sean estacionarios o en movimiento, ya sea en el vacío o en un medio material.

Como dijimos al comenzar este capítulo introductorio, todos los avances que dieron lugar al electromagnetismo clásico y que culminan con la formulación de las cuatro conocidas ecuaciones de Maxwell, se llevaron a cabo mediante observaciones puramente macroscópicas. No fue hasta 1897 cuando James John Thomson descubrió que existían ciertas partículas subatómicas cargadas negativamente (lo que hoy conocemos como electrones), proponiendo su modelo atómico de *pudding* de pasas, el cual sería posteriormente refinado por Rutherford y que, en última instancia, llevó al nacimiento de la mecánica cuántica.

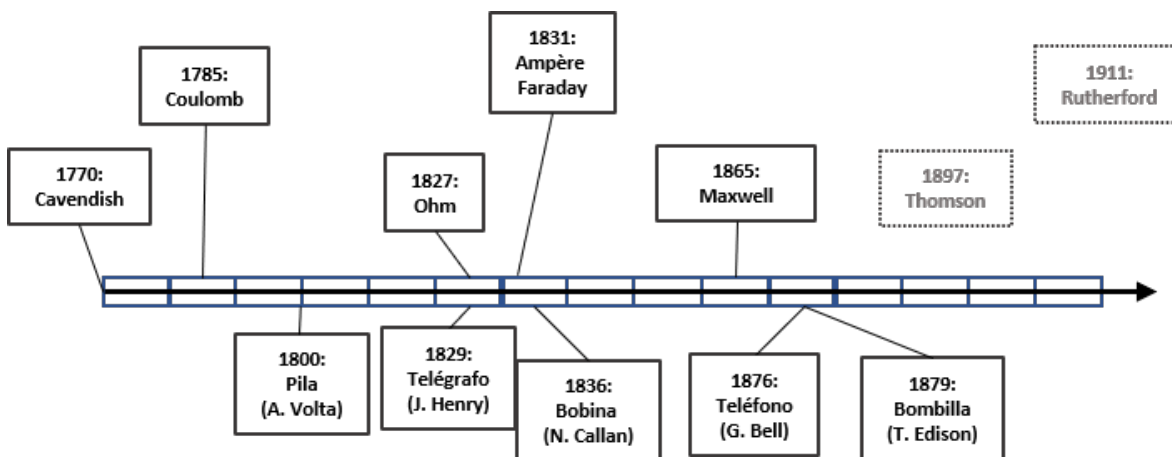


Figura 1.1: Línea de tiempo con los hitos históricos más importantes que dieron lugar al electromagnetismo clásico).

Cabe tener en mente la importancia de la teoría clásica electromagnética, no solo en a nivel conceptual, si no también en su crucial contribución a infinidad de invenciones y desarrollos tecnológicos de los que disfrutamos en la actualidad. En la Fig. (1.1) se representa una línea de tiempo con los descubrimientos realizados en el campo del electromagnetismo y algunas de los desarrollos tecnológicos más importantes.

Este curso lo desarrollaremos siguiendo generalmente la distribución temporal de acontecimientos. De este modo, comenzaremos estudiando el campo eléctrico (electrostático), introduciremos los circuitos de corriente continua y corriente alterna y cómo, a partir de ellos, surgen las leyes de la magnetostática y la inducción electromagnética. Por último, se aunarán todas las leyes y principios de los campos eléctrico y magnético por medio de las ecuaciones de Maxwell.

## Capítulo 2

# Propiedades de los campos escalares y vectoriales

En este Capítulo se introducirán los conceptos fundamentales que nos permitirán tanto comprender como realizar operaciones con el campo electromagnético en distintas condiciones. Si bien algunos de los conceptos que presentaremos serán conocidos por el estudiante, es conveniente repasarlos y enfocarlos a la materia que nos atañe.

Al igual que en cualquier otra rama de la Física, en Electromagnetismo se tienen magnitudes tanto escalares como vectoriales. Los campos, en general, representarán la distribución espacial de dichas magnitudes. Si a cada punto del espacio  $(x, y, z)$  se le asocia una magnitud escalar, hablaremos de *campo escalar*. Por contra, si a cada punto del espacio dicha magnitud se corresponde con un vector, diremos que el campo es *vectorial*.

Si empleamos la definición formal, para un espacio de  $n$  dimensiones diríamos que un campo  $f$  es escalar en una cierta región  $U$  del espacio, si para  $U \subset \mathbb{R}^n$  se tiene que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Por tanto, el campo sería vectorial si para esa misma región viene dado por una función  $F$  tal que  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $m > 1$ .

Pongamos un ejemplo sencillo para ilustrar este concepto. Consideremos la temperatura,  $T$ , de una habitación en un cierto instante. A cada punto del espacio  $(x, y, z)$  le corresponderá un valor determinado de la temperatura. Consecuentemente, la función  $T(x, y, z)$  es un campo escalar. Por otro lado, consideremos que las posibles variaciones de temperatura en la habitación se deben a una cierta corriente de aire. La velocidad de dicha corriente en cada punto de la habitación se representaría mediante un vector, que permitiría conocer tanto la magnitud como la dirección de dicha corriente. Es decir, el campo que representa las velocidades de la corriente en cada punto es un campo vectorial.

Tanto el campo eléctrico como el campo magnético son algunas de las magnitudes vectoriales que se estudiarán durante el curso. El potencial electrostático, por ejemplo, es una magnitud escalar. Es por ello que en las siguientes secciones haremos un resumen de algunas de las operaciones básicas que se aplican sobre campos vectoriales y escalares y que servirán de base para el desarrollo de la asignatura.

## 2.1. Operador nabla

Antes de introducir algunas de las operaciones que se realizan sobre los campos (tanto vectoriales como escalares) definamos el llamado operador nabla. Es un operador diferencial vectorial que, para un espacio tridimensional y en coordenadas cartesianas, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}, \quad (2.1)$$

donde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , y  $\hat{k}$  son los vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Vemos que este operador es un vector cuyas componentes están formadas por la derivada parcial de la variable que se corresponde con cada una de las direcciones.

Es posible demostrar que, si hacemos el cambio de coordenadas pertinente en cada caso, este operador se puede escribir de la siguiente manera en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}, \quad (2.2)$$

y en coordenadas esféricas <sup>1</sup>:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad (2.3)$$

## 2.2. El gradiente

El gradiente se aplica sobre un campo escalar y da como resultado un campo vectorial. Esto es fácil de entender ya que, como veremos, la operación gradiente es equivalente a estudiar la variación del campo escalar para cada punto del espacio. Es decir, si tenemos la función  $f(x, y, z)$  que representa un campo escalar, el gradiente de dicho campo vendrá dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}, \quad (2.4)$$

donde, nuevamente,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , y  $\hat{k}$  son los vectores unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Como vemos, el gradiente no es más que la aplicación del operador nabla sobre la función de forma que el resultado es un vector cuyas componentes son la derivada parcial de la función en cada una de las direcciones.

En la Fig. 2.2 se ilustra como sería el gradiente de un cierto campo escalar con variación radial. Obviamente, en este caso sería conveniente escribir el campo en coordenadas radiales, y, por tanto, aplicar el operador nabla dado en Ec. (2.3).

<sup>1</sup>En el Apéndice A se pueden encontrar las relaciones para realizar el cambio de coordenadas

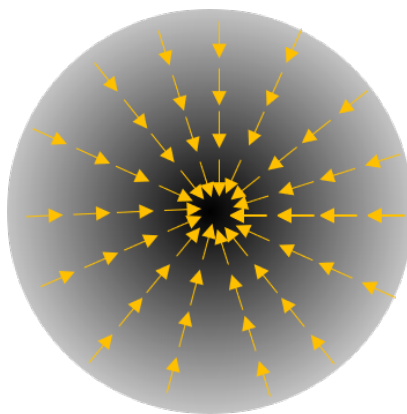


Figura 2.1: Ilustración del gradiente (vectores) de un cierto campo bidimensional de variación radial (imagen en escala de grises).

## 2.3. La divergencia

La divergencia de un cierto campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z)$  en el punto  $a = (x_0, y_0, z_0)$  se define como el flujo del campo por unidad de volumen,  $V$ , cuando el volumen que rodea a dicho punto tiende a cero, esto es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}|_a = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{A(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.5)$$

donde  $A$  es una superficie cerrada que tiende a un punto en el límite.

Se puede demostrar que, la operación anterior se reduce a

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})|_a = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{F}, \quad (2.6)$$

es decir, es el producto escalar entre el operador nabla y campo vectorial. Recordemos que el campo vectorial es, en general, de la forma  $\mathbf{F} = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$  y, por tanto, quedaría la siguiente operación para la divergencia

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})|_a = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (2.7)$$

que, obviamente, es una magnitud escalar. Recordemos nuevamente que en algunos casos convendrá emplear coordenadas cilíndricas o esféricas y que, por lo tanto, además de escribir el campo en las respectivas coordenadas también deberemos hacerlo con el operador nabla (ver Ecs. (2.2,2.3)).

### 2.3.1. Teorema de la divergencia

En capítulos posteriores tendrá especial importancia el llamado *teorema de la divergencia*. Este teorema nos dice que, si se tiene una superficie cerrada  $S$  y un cierto campo vectorial  $\mathbf{F}$ ,

se puede probar que:

$$\oiint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV, \quad (2.8)$$

siendo  $V$  el volumen que encerrado por la superficie.

La demostración de este teorema es relativamente sencilla si tenemos en cuenta la propia definición de divergencia dada en la Ec. (2.5). Dado que  $A$  es una superficie cerrada, podemos dividirla en un conjunto de superficies cerradas que, en suma, engloben exactamente el mismo volumen. Por poner un ejemplo sencillo, pensemos en la superficie de un cubo. Dentro de dicha superficie podríamos incluir  $N$  cubos de menor tamaño que también representen una superficie cerrada y cuya suma encierre exactamente el mismo volumen que el cubo original. Esto sigue siendo cierto para cualquier superficie cerrada genérica. De esta forma, la parte izquierda de la expresión dada en la Ec. (2.8) podría escribir como

$$\oiint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \oiint_{A_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.9)$$

En el límite, cuando las superficies cerradas tiendan a ser un punto y, por tanto, el volumen encerrado tienda a cero, cada una de las superficies cerradas será, por definición, la divergencia del campo vectorial

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^N \oiint_{A_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \right) = \lim_{V_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Delta V \right). \quad (2.10)$$

Además, el límite del sumatorio es una suma de Riemann y, dicho límite, se convertirá en la integral de volumen:

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Delta V \right) = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV, \quad (2.11)$$

con lo cual queda probado el teorema de la divergencia.

## 2.4. Rotacional

El rotacional es un operador vectorial que, al aplicarlo sobre un campo vectorial, indica la tendencia de este a inducir rotaciones entorno a un punto. Dado un campo vectorial  $\mathbf{F}$ , el rotacional se puede escribir como el producto vectorial del operador nabla con dicho campo, esto es

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (2.12)$$

Apliquemos este operador en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

que resulta en

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (2.14)$$

## 2.5. Laplaciano

El operador laplaciano no es más que aplicar el operador nábla dos veces sucesivas sobre la misma función. Se suele representar como nábla al cuadrado  $\nabla^2$  o bien como  $\Delta$ , es decir

$$\Delta f = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f. \quad (2.15)$$

Es fácil demostrar que, en coordenadas cartesianas tridimensionales, se reduce a:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.16)$$

## 2.6. Identidades

Veamos algunas de las propiedades e identidades de los operadores que hemos visto hasta ahora, recordando que  $f$  representa un campo escalar y  $\mathbf{F}$  un campo vectorial:

1.  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$
2.  $\nabla(f \cdot g) = (\nabla f)g + f\nabla g.$
3.  $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
4.  $\nabla(f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$
5.  $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}.$
6.  $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$
7.  $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

# Capítulo 3

## Electrostática en el vacío

### 3.1. Introducción

En este capítulo introduciremos el concepto clásico de campo eléctrico como resultado natural de la conocida ley de Coulomb, si bien en capítulos posteriores veremos que los campos magnéticos de naturaleza variable son también fuentes de campo eléctrico. Dado que estaremos en el marco de la electrostática (tanto en el vacío como en medios materiales en el siguiente capítulo), estaremos siempre asumiendo que las cargas (o distribuciones de carga) se encuentran en reposo. Teniendo esto en mente, recordaremos la ley de Coulomb, definiremos a partir de ésta el concepto de campo eléctrico y veremos como realizar diversas operaciones sobre el mismo que lo relación con el llamado potencial electrostático. Igualmente, realizaremos una generalización del campo eléctrico que nos permitirá conocer el campo para una distribución de carga genérica (tanto formada por cargas puntuales como distribuciones de carga continuas) a partir de la cual, mediante la particularización a cada caso, es posible conocer el campo eléctrico en cualquier región del espacio. Partiendo de éste, definiremos el potencial electrostático. Igualmente, introduciremos el concepto de dipolo eléctrico y veremos como tanto el potencial como el campo eléctrico se pueden desarrollar en serie (desarrollo multipolar) para obtener una expresión aproximada de ambos en el caso de una distribución de carga genérica.

### 3.2. Ley de Coulomb

La ley de Coulomb representa la base de la electrostática y, como tal, solo tiene validez si las cargas son estacionarias. Bajo esta suposición, esta ley permite calcular la fuerza que ejercen dos cargas,  $q_1$  y  $q_2$ , separadas una cierta distancia  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ , siendo  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  el vector que relaciona la posición relativa de  $q_2$  respecto de  $q_1$ . Dicha fuerza electrostática viene dada por la expresión

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}, \quad (3.1)$$

siendo  $\hat{r}$  el vector unitario en la dirección del vector  $\vec{r}_{12}$  y  $k$  la constante de proporcionalidad conocida como constante de Coulomb. En realidad, esta constante de Coulomb se puede

relacionar con lo que conocemos como permitividad,  $\epsilon$ , y cuyas propiedades estudiaremos más adelante. En este caso, la constante de Coulomb se relaciona con la permitividad del vacío,  $\epsilon_0$  mediante la siguiente expresión:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3.2)$$

que, en unidades SI es  $\epsilon_0 = 8,8541878176 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ . Las cargas  $q_1$  y  $q_2$  pueden ser positivas o negativas. Como sabemos, si las cargas son de signo contrario, la fuerza resultante debe representar la atracción de ambas cargas, mientras que si poseen el mismo signo, la fuerza debe ser repulsiva. Fijémonos en que, gracias a la definición empleada para el vector director  $\vec{r}_{12}$ , se cumple esta condición (ver Fig. 3.1).

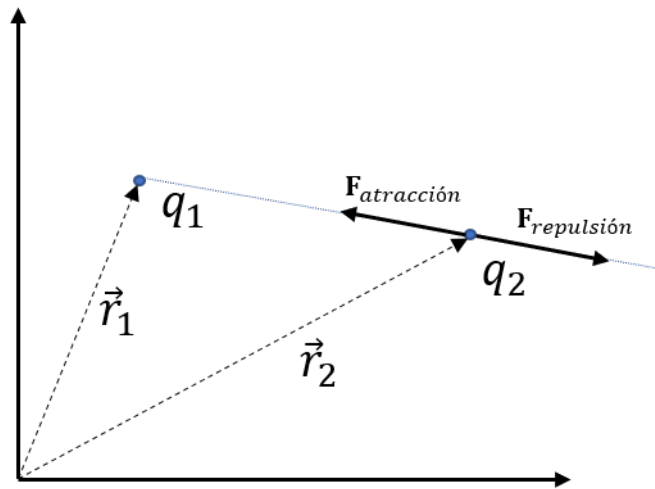


Figura 3.1: Ilustración del carácter vectorial de la ley de Coulomb en el que  $\mathbf{F}_{atracción}$  ocurre cuando  $q_1$  y  $q_2$  presentan signos opuestos y  $\mathbf{F}_{repulsión}$  en el caso en el que las cargas sean del mismo signo.

Cabe recordar una vez más que estas cargas puntuales estarán asociadas a cargas estacionarias y, por tanto, no será aplicable a electrones libres. Además, la ley de Coulomb se formuló para objetos macroscópicos cargados cuya distribución de carga se pudiese, de forma ideal, considerar puntual (similar al concepto de centro de masas). Dicho esto, la ley de Coulomb puede realizar predicciones relativamente precisas a escala atómica en determinados casos. Por ejemplo, en el caso del enlace iónico producido entre un anión y un catión de distintos elementos, la ley de Coulomb puede ser útil para realizar una primera aproximación (esta debe luego corregirse con factores cuánticos) del radio iónico o bien de la fuerza del enlace. Esto es así ya que, idealmente, en dicho enlace la fuerza de atracción resultante de los iones de carga opuesta iguala a la fuerza de repulsión debida a la proximidad de los núcleos de ambos iones, creándose una situación de equilibrio (enlace) y, consecuentemente, las cargas se mantienen estacionarias.



### 3.3. Principio de superposición

Dado que rara vez podremos aproximar la carga de un cuerpo a una carga puntual aislada, resulta natural preguntarse que ocurre con la fuerza electrostática cuando se tiene una cierta distribución espacial de carga. Para ello, estudiaremos en primer lugar el caso en el que se tiene un cierto número  $n$  de cargas distribuidas en el espacio.

#### 3.3.1. Conjunto de cargas puntuales

El llamado principio de superposición nos indica que, dadas  $n$  cargas puntuales,  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  distribuidas aleatoriamente en el espacio, la fuerza resultante sobre una carga  $q$  es la suma vectorial de cada una de las fuerzas ejercidas por las  $n$  cargas, es decir,  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ . Expresado de forma explícita resulta en

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i q \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.3)$$

que también podríamos escribir definiendo los vectores unitarios en cada una de las direcciones como  $\hat{u}_i = (\vec{r} - \vec{r}_i)/|\vec{r} - \vec{r}_i|$ , de forma que <sup>1</sup>

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \hat{u}_i. \quad (3.4)$$

Obviamente, cada una de las cargas sufrirá el efecto de la fuerza del resto.

#### 3.3.2. Distribución continua de carga

Una vez visto que la fuerza total sobre una cierta carga puntual no es más que la suma de todas las fuerzas ejercidas por un conjunto de cargas puntuales, supongamos ahora que tenemos un cierto objeto macroscópico cargado eléctricamente. Podemos considerar que, en este caso, la carga se distribuirá de manera continua en el objeto, ya sea a lo largo de una línea, en su superficie o en su volumen. De esta forma, podemos definir la densidad lineal de carga en el objeto como

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{dS}, \quad (3.5)$$

la densidad superficial de carga como

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dS}, \quad (3.6)$$

y, por último, la densidad volumétrica de carga de la forma

<sup>1</sup>Emplearemos normalmente la forma de la ecuación dada en Ec. (3.3)

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dV} \quad (3.7)$$

que, obviamente, indicarán la densidad de carga por unidad de superficie y por unidad de volumen, respectivamente. Gracias al principio de superposición, podemos calcular la fuerza que ejercerá la distribución de carga sobre una carga puntual situada en la posición dada por el vector  $\vec{r}_q$ . Es fácil ver que cada elemento diferencial de carga tendrá una cierta contribución  $\sigma(\vec{r})dS$  en el caso de una superficie, o  $\rho(\vec{r})dV$  para el volumen. El vector  $\vec{r}$  será recorrido a lo largo de la superficie (o volumen), de manera que  $\vec{r}_q - \vec{r}$  indica la posición relativa de cada diferencial de superficie (o volumen) con respecto a la carga puntual.

Por tanto, la fuerza que ejerce una determinada distribución lineal de carga, distribuida en una longitud  $L'$ , sobre una carga puntual  $q$ , será la suma de las fuerzas de cada elemento diferencial de carga sobre la carga puntual, esto es

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{L'} \lambda(\vec{r}) \frac{\vec{r}_q - \vec{r}}{|\vec{r}_q - \vec{r}|^3} dl. \quad (3.8)$$

Si la densidad de carga fuese superficial, distribuida en la superficie  $S'$ , tendríamos:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \sigma(\vec{r}) \frac{\vec{r}_q - \vec{r}}{|\vec{r}_q - \vec{r}|^3} dS. \quad (3.9)$$

Igualmente, si la carga se distribuye uniformemente en un cierto volumen  $V'$ , la fuerza que ejerce dicha distribución de carga sobre la carga puntual será

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r}_q - \vec{r}}{|\vec{r}_q - \vec{r}|^3} dV. \quad (3.10)$$

Cabe recordar lo siguiente: los distintos diferenciales dependerán del sistema de coordenadas empleado. En el apéndice A se pueden encontrar la relación entre los diferenciales en coordenadas cartesianas y sus respectivos equivalentes en coordenadas cilíndricas y esféricas. Lógicamente, la elección del sistema de coordenadas dependerá del tipo de carga que se quiera estudiar. Si existe simetría cilíndrica o esférica, el problema se simplificará empleando coordenadas cilíndricas o esféricas, respectivamente.

### 3.3.3. Expresión general

Podemos resumir las distintas expresiones vistas en esta sección en una fórmula general que considere la fuerza ejercida sobre una carga puntual por un conjunto discreto de cargas puntuales y una cierta distribución de carga, esto es

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_i}{|\vec{r}_q - \vec{r}_i|^3} + \int_Q \frac{\vec{r}_q - \vec{r}}{|\vec{r}_q - \vec{r}|^3} dq' \right). \quad (3.11)$$

donde  $dq'$  y  $Q$  dependerán de la geometría de la distribución espacial de carga (lineal, superficial o volumétrica). Por ejemplo, si la carga fuese superficial tendríamos  $dq' = \sigma(\vec{r})dS$ . Nótese que, aunque no lo escribimos de manera explícita, la fuerza sobre la carga depende obviamente de su posición, es decir,  $\mathbf{F}(\vec{r}_q)$ . Esto no es más que una consecuencia de la propia definición de fuerza electrostática ya que, para poder definirla, es necesario que exista interacción entre al menos dos cargas. Sin embargo, necesariamente debe haber un concepto más fundamental (el campo eléctrico que veremos a continuación) el cual permita conocer la perturbación en el espacio por el hecho de que exista una cierta carga, sin necesidad de que se ejerza una fuerza sobre otra.

### 3.4. El campo eléctrico

A partir de las ecuaciones vistas en la sección anterior, el concepto de campo eléctrico surge de manera natural. El campo eléctrico sería la región del espacio afectada por una cierta distribución de carga de tal forma que, al introducir una cierta carga  $q$ , esta se ve afectada por la fuerza descrita anteriormente <sup>2</sup>. Es decir, la fuerza resultante sobre la carga  $q$  sería consecuencia del campo eléctrico, esto es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{3.12}$$

Aplicando esta definición a la Ec.(3.11), podemos expresar el campo eléctrico generado por una cierta distribución de carga genérica en el punto dado por el vector  $\vec{r}_0$  como

$$\mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} + \int_Q \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dq' \right). \tag{3.13}$$

Fijémonos en que, efectivamente, el campo eléctrico es un campo vectorial. Para cada punto del espacio dado por  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  existe un vector  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  que cuantifica el campo eléctrico en dicho punto.

Aunque la diferencia entre el campo electrostático y la fuerza dada por la ley de Coulomb parezca sutil, la definición de campo eléctrico tiene importantes implicaciones. Para que exista una fuerza necesariamente la tenemos que referir a un cierto objeto, en este caso, a una carga. Sin embargo, el campo eléctrico se puede definir en todo el espacio sin necesidad de que exista una interacción directa entre dos o más cargas. Por ejemplo, una sola carga situada en una región vacía del espacio generará un campo eléctrico en todos los puntos de dicho espacio. Si colocásemos una segunda carga en dicha región, entonces podríamos observar la manifestación del campo eléctrico a través de la fuerza ejercida sobre el mismo.

A continuación, empleando la fórmula general del campo eléctrico (Ec.(3.13)), estudiaremos dos casos de interés: un disco circular y el caso ideal de una superficie plana infinita, ambos uniformemente cargados.

---

<sup>2</sup>Nótese que ésta es la definición clásica de campo eléctrico que, entre otras cosas, produce una fuerza instantánea sobre la carga  $q$ .

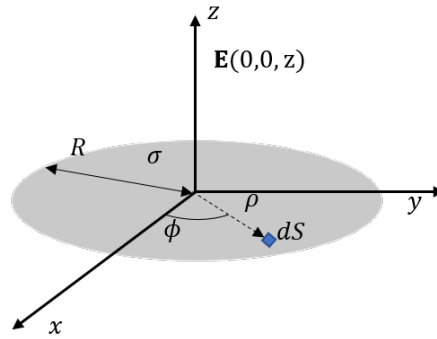


Figura 3.2: Ilustración del problema en el cual se calcula el campo eléctrico generado por un disco uniformemente cargado sobre su propio eje.

### 3.4.1. Disco circular uniformemente cargado

Consideremos un disco circular, de radio  $R$ , cargado uniformemente y en el cual la distribución superficial de carga es  $\sigma$ , y queremos conocer el campo eléctrico sobre el eje del disco (ver Fig. 3.2). Siempre que tengamos una cierta distribución de carga, el primer paso para calcular el campo eléctrico es encontrar el sistema de coordenadas más conveniente. En este caso, al tratarse de un disco, emplearemos obviamente coordenadas cilíndricas (ver Apéndice A) cuyo origen coincida con el centro del disco<sup>3</sup>.

Debemos emplear la Ec. (3.13) teniendo en cuenta que la contribución al campo eléctrico será debida a una densidad superficial de carga, es decir

$$\mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dS'. \quad (3.14)$$

Al considerar que el disco está uniformemente cargado, la densidad superficial de carga será constante a lo largo de todo el disco, esto es,  $\sigma(\vec{r}') = \sigma$ . Por tanto, la ecuación del campo queda como

$$\mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dS'. \quad (3.15)$$

Introducimos las coordenadas cilíndricas así como el elemento diferencial de superficie (Apéndice A), de forma que las coordenadas que describen las posibles posiciones en las que se encuentra el disco son

$$\vec{r}' = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0), \quad \text{con } 0 < \rho \leq R, \quad (3.16)$$

y, además,  $dS' = \rho d\rho d\phi$ . Recordemos que los elementos diferenciales de superficie dependen del plano que seleccionemos. En este caso, dado que el disco se describe mediante las

<sup>3</sup>Nota sobre notación: Dado que en la mayoría de textos se sigue esta convención, si se tiene una distribución de carga superficial en coordenadas cilíndricas emplearemos  $\rho$  como la coordenada correspondiente al radio. Si se tiene una distribución de volumen, recordemos que  $\rho$  será la densidad volumétrica de carga.

coordenadas  $\rho$  y  $\phi$ , empleamos el elemento diferencial de superficie que en el Apéndice A aparece como  $dS_z$ . El último paso será seleccionar el punto, línea, superficie o volumen en el cual se desea conocer el campo eléctrico. En el problema que nos atañe, es de interés la distribución de campo a lo largo del eje  $z$ , que es perpendicular al disco y lo corta por su centro. Por tanto, tendremos que  $\vec{r}_0 = (0, 0, z)$ . Introduciendo estos elementos en la ecuación del campo eléctrico se obtiene <sup>4</sup>:

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho \cos \phi, -\rho \sin \phi, z)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi. \quad (3.17)$$

Aunque en este caso en particular resulta relativamente sencillo resolver la integral de cada una de las componentes del campo eléctrico, es conveniente siempre separar dichas componentes para mejorar la claridad de los cálculos. Tendremos por tanto que:

$$\begin{aligned} E_x(z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-\rho^2 \cos \phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho d\phi \\ E_y(z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-\rho^2 \sin \phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho d\phi \\ E_z(z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{z\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho d\phi \end{aligned} \quad (3.18)$$

Las integrales de las componentes  $x$  e  $y$  se anulan por la integral en un ciclo del seno y el coseno<sup>5</sup>, de forma que solo nos queda la componente  $E_z$ . Este resultado era esperable dada la simetría de revolución del disco y el carácter vectorial del campo eléctrico que hacen que cada contribución del disco a las componentes transversales del campo sobre el eje  $z$  tenga una contribución de igual magnitud y sentido opuesto en una posición simétrica. De esta forma las componentes transversales del campo eléctrico se anulan. El campo eléctrico sobre el eje será por tanto

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho, \quad (3.19)$$

que, tras resolver la integral de la variable angular, queda como

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho. \quad (3.20)$$

Nos queda resolver la integral radial. Para ello, empleamos el siguiente cambio de variable

$$u = (\rho^2 + z^2), \rightarrow \frac{du}{d\rho} = 2\rho \rightarrow d\rho = \frac{du}{2\rho}, \quad (3.21)$$

<sup>4</sup>Recordemos que el módulo de un vector viene dado por  $|\vec{v}| = \sqrt{\sum_i v_i^2}$  y que  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ .

<sup>5</sup>Recordemos que  $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$  y  $\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \cos(0) - \cos(2\pi) = 0$

de modo que la parte integral de la ecuación se simplifica a

$$\frac{1}{2} \int u^{-3/2} du = \frac{u^{(1-3/2)}}{2(1-3/2)} = -\frac{1}{\sqrt{u}}. \quad (3.22)$$

Deshacemos el cambio de variable e incorporamos el resultado a la ecuación del campo eléctrico:

$$E_z(z) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left| \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right|_0^R, \quad (3.23)$$

que, finalmente, queda como

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \quad (3.24)$$

donde la función signo viene dada por  $\text{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$ .

Analicemos la ecuación anterior. La densidad de carga puede ser tanto positiva como negativa, dependiendo del tipo de carga que atribuyamos al disco. Supongamos que es positiva. En el centro del disco, esto es en  $z = 0$ , el campo será nulo ( $E_z(0) = 0$ ). Para pequeños desplazamientos positivos cercanos al origen del eje  $z$ , llamémosles  $\Delta z \approx 0$ , la función signo tomará su valor máximo, es decir,  $\text{sgn}(\Delta z) \approx 1$ . Por contra, el segundo término que aparece restando es una función de crecimiento suave cuyo valor máximo es 1. Reescribamos dicho término y calculemos el límite cuando  $z \rightarrow \infty$  en la forma

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} = 1. \quad (3.25)$$

Podemos concluir que, por tanto, el campo alcanzará su valor máximo en las cercanías del centro del disco  $E_z(\Delta z) = \sigma/2\epsilon_0$ , decrecerá conforme nos alejemos en la dirección del eje  $z$  y será nulo cuando la distancia tienda a infinito ( $E_z(z \rightarrow \infty) = 0$ ). Nótese que, si ahora consideramos que los desplazamientos son en el sentido negativo del eje  $z$ , el razonamiento es exactamente pero deberíamos cambiar el signo a todas las expresiones. Debemos recordar que estamos calculando un campo vectorial dado por  $\mathbf{E}(\vec{r}_0) = (0, 0, E_z)$  y que, por tanto, el signo de la expresión dada en la Ec.(3.24) nos indica la dirección y sentido en la que fluyen las líneas de campo. De esta forma, independientemente de si la distribución de carga es positiva o negativa, el campo eléctrico tendrá un sentido opuesto a ambos lados del disco.

### 3.4.2. Superficie plana infinita uniformemente cargada

A partir del resultado anterior podemos calcular el campo de un plano cargado uniformemente. Obviamente, este caso será una aproximación cuando las dimensiones del disco (o cualquier otra superficie que cuyas dimensiones se puedan considerar infinitas) son mucho más extensas que la zona en la que se quiere calcular el campo eléctrico. En el caso del disco

uniformemente cargado, podremos realizar esta aproximación si acotamos la variable  $z$ . Si definimos  $z \in (-z_m, z_m)$ , entonces podemos considerar que el plano es infinito si  $R \gg z_m$ . En tal caso, podemos considerar que el radio del disco tiende a infinito ( $R \rightarrow \infty$ ) lo cual da lugar a.

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \text{sgn}(z) - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \quad (3.26)$$

de donde se obtiene la expresión general del campo eléctrico sobre el eje perpendicular a un plano infinito

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Al igual que en el caso anterior, el signo de la componente  $E_z$  indica el sentido del vector de campo. Si la densidad de carga es positiva, los vectores de campo apuntarán en el sentido opuesto al plano, mientras que si es negativa dichos vectores apuntarán hacia el plano (ver Fig. 3.3). Por otro lado, analizando la simetría del problema, se puede concluir que el campo eléctrico será nulo cuando  $z = 0$ .

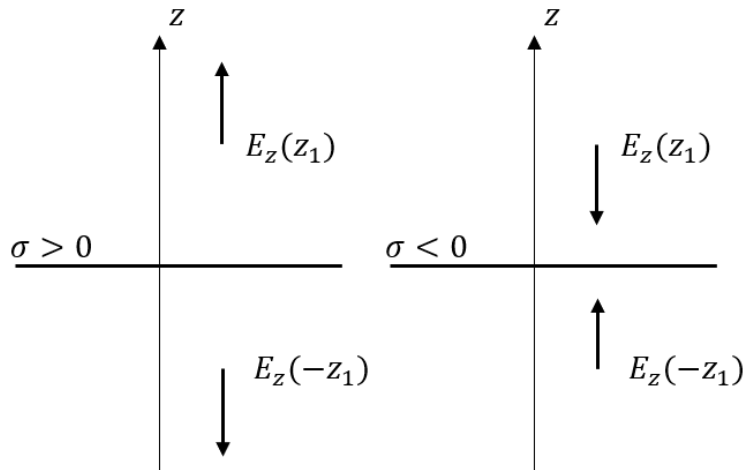


Figura 3.3: Representación del campo eléctrico generado por un plano infinito cargado de manera uniforme. Se representa el vector de campo en dos puntos opuestos con respecto al plano, para los casos en los que la densidad de carga superficial es positiva y negativa.

### 3.5. Operadores sobre el campo eléctrico

En esta sección veremos como la aplicación de los operadores del Capítulo 2 da lugar a nuevas magnitudes de interés o incluso a la proposición de nuevas leyes en electrostática.

### 3.5.1. Rotacional de un campo eléctrico estacionario

Calculemos el rotacional de la expresión general obtenida para el campo eléctrico (Ec.(3.13)) recordando que el rotacional aplica sobre las componentes vectoriales y, por tanto, lo podemos escribir de la siguiente forma

$$\nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \nabla \times \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} + \int_Q dq' \nabla \times \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}')}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} \right). \quad (3.28)$$

Es fácil ver que, para obtener el resultado del rotacional del campo eléctrico, basta con calcular  $\nabla \times (\vec{r}_0 - \vec{r})/|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3$  y luego particularizar para la integral o el sumatorio. Para realizar el cálculo escribamos los respectivos vectores de posición en coordenadas cartesianas tridimensionales, de modo que  $\vec{r}_0 - \vec{r} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ . Por tanto, el rotacional quedará de la siguiente manera

$$\nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}_0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial y_0} & \frac{\partial}{\partial z_0} \\ \frac{x_0 - x}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} & \frac{y_0 - y}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} & \frac{z_0 - z}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \end{vmatrix}, \quad (3.29)$$

que, tras algunos cálculos sencillos, resulta en

$$\nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}_0) = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = (0, 0, 0). \quad (3.30)$$

Por tanto, el rotacional del campo eléctrico (cuando las cargas se encuentren en reposo) es un vector nulo,  $\nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}_0) = \vec{0}$

### 3.5.2. El potencial electrostático: El campo eléctrico como gradiente de una función escalar

Volviendo a los conceptos matemáticos vistos en el Capítulo 2, recordemos que el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial. Además, dado que el rotacional del campo eléctrico es nulo, se puede asumir que el campo eléctrico es el gradiente de un cierto campo escalar (ver la identidad vectorial 4 de la sección 2.6). Es de esta forma como surge el concepto de potencial electrostático, que es un cierto campo escalar tal que:

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (3.31)$$

Más adelante veremos el motivo del signo negativo en la expresión anterior. Digamos que, para que la definición de potencial sea consistente, su variación y las líneas de campo deben ir en sentidos opuestos<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Como veremos, el potencial es nulo en el infinito. Dado que el gradiente indica la dirección de crecimiento de la función escalar y, si definimos el potencial como una cantidad positiva, necesariamente se debe incluir el signo negativo



El potencial, por tanto, será cualquier función que cumpla que  $U(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) + C$ , siendo  $C$  un valor constante. Para que el potencial quede unívocamente definido, se asume que en un cierto punto  $r_p$  el potencial electrostático es nulo. De esta forma, podríamos calcularlo sin más que realizar la siguiente integral

$$U(\vec{r}_0) = - \int_{r_p}^{\vec{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.32)$$

donde tenemos la integral del producto escalar del campo eléctrico y el elemento diferencial de longitud. En coordenadas cartesianas tendríamos que  $d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ . En el apéndice A se pueden encontrar dicho elemento diferencial en coordenadas cilíndricas y esféricas.

El potencial electrostático se puede interpretar físicamente como el trabajo necesario para desplazar una carga puntual desde  $r_0$  hasta  $r_p$ . Dicho de otra forma, el potencial electrostático en el punto  $r_0$  es la energía potencial que tendría una carga situada en dicho punto debido a la presencia del campo eléctrico, medida con respecto al origen de potenciales  $r_p$ .

Calculemos la fórmula general del campo electrostático a partir de las ecuaciones Ec.(3.13) y Ec. (3.32):

$$U(\vec{l}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_p}^{\vec{r}_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{l} - \vec{r}_i}{|\vec{l} - \vec{r}_i|^3} + \int_Q \frac{\vec{l} - \vec{r}}{|\vec{l} - \vec{r}|^3} dq' \right) \cdot d\vec{l} \quad (3.33)$$

Para simplificar la expresión, llamemos  $\vec{s}_i = \vec{l} - \vec{r}_i$  y  $\vec{s} = \vec{l} - \vec{r}$ . Fijémonos que  $d\vec{s}_i = d\vec{s} = d\vec{l}$ . Además,  $\vec{r}_n = \vec{s}_{i,n} + \vec{r}_i$ , siendo  $n$  los subíndices 0 y  $p$ . Obtenemos de esta forma la siguiente expresión:

$$U(\vec{s}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \int_{\vec{s}_{i,p} + \vec{r}_i}^{\vec{s}_{i,0} + \vec{r}_i} \frac{\vec{s}_i}{|\vec{s}_i|^3} d\vec{s}_i + \int_Q dq' \int_{\vec{s}_p + \vec{r}}^{\vec{s}_0 + \vec{r}} \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^3} d\vec{s} \right), \quad (3.34)$$

que da lugar a

$$U(\vec{s}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \sum_{i=1}^n q_i \frac{1}{|\vec{s}_i|} \Big|_{\vec{s}_{i,p} + \vec{r}_i}^{\vec{s}_{i,0} + \vec{r}_i} + \int_Q dq' \frac{1}{|\vec{s}|} \Big|_{\vec{s}_p + \vec{r}}^{\vec{s}_0 + \vec{r}} \right]. \quad (3.35)$$

Deshacemos el cambio para calcular el potencial

$$U(\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \left[ \sum_{i=1}^n q_i \frac{1}{|\vec{l} - \vec{r}_i|} \right]_{\vec{r}_p}^{\vec{r}_0} + \left[ \int_Q dq' \frac{1}{|\vec{l} - \vec{r}|} \right]_{\vec{r}_p}^{\vec{r}_0} \right). \quad (3.36)$$

Sustituyendo los valores de la integral definida obtenemos

$$U(\vec{r}_0) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \left( \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_i|} \right) + \int_Q dq' \left( \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|} \right) \right). \quad (3.37)$$

que sería la ecuación genérica del potencial electrostático creado por un conjunto de  $n$  cargas puntuales situadas en posiciones  $\vec{r}_i$  y una distribución continua de carga  $Q$  sobre el punto  $\vec{r}_0$ . Como dijimos anteriormente, para poder definir el potencial debemos considerar cual es su origen  $\vec{r}_p$ . Si existe presencia de una cierta distribución de carga, es natural definir el origen de potenciales en el infinito, es decir, si  $r_p \rightarrow \infty$ , entonces  $V(r_p = 0)$ . Dicho de otra forma, cuanto más nos alejemos de la distribución de carga, menor será su efecto y, por tanto, menor trabajo será necesario para desplazar una carga eléctrica bajo el efecto del campo eléctrico. Haciendo esta consideración, la fórmula general del potencial electrostático se simplifica y puede escribirse de la siguiente forma

$$U(\vec{r}_0) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|} + \int_Q \frac{dq'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \right). \quad (3.38)$$

que es la fórmula general para el cálculo del potencial electrostático generado por  $n$  cargas y una distribución de carga  $Q(\vec{r})$ .

### 3.5.3. Ley de Gauss: Divergencia del campo eléctrico

Recordemos que la divergencia de un cierto campo vectorial se puede entender como el producto escalar entre el operador nabla y dicho campo. Calculemos la expresión general de la divergencia del campo eléctrico

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \nabla \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} + \int_Q dq' \nabla \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \right). \quad (3.39)$$

Siguiendo las notas del apéndice B sobre las propiedades de la función delta de Dirac, se llega a la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_i) + \int_Q dq' \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) \right). \quad (3.40)$$

Es posible transformar la ecuación anterior en una relación sencilla haciendo dos consideraciones. Por un lado, consideraremos que la parte que tiene en cuenta una distribución de carga continua se debe, en general, a una distribución de carga volumétrica. Por lo tanto,  $dq' = \rho(\vec{r}_0)dV$ , lo cual, a partir de la propiedad 3 del apéndice B, nos lleva a

$$\int_Q \rho(\vec{r}_0) \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) dV = \rho(\vec{r}). \quad (3.41)$$

Por otro lado, la contribución de las cargas puntuales se podría tener en cuenta sin más que redefinir la distribución de carga de la siguiente forma:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) + \rho_c(\vec{r}) \quad (3.42)$$

donde  $\rho_c$  sería la contribución de la distribución continua de carga dada por la Ec.(3.41) y

$$\rho_p(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r}_i \neq \vec{r} \\ \sum q_i & \text{si } \vec{r}_i = \vec{r}, \end{cases} \quad (3.43)$$

sería la contribución de las cargas puntuales. De esta forma, se obtiene la siguiente expresión genérica para la divergencia del campo eléctrico (para cargas en estado estacionario):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (3.44)$$

Fijémonos que, como cabía esperar, la divergencia del campo es un campo escalar que depende exclusivamente de la distribución de carga. Este resultado nos permite interpretar de manera más sencilla las conclusiones del apéndice B. Dado que la divergencia del campo solo depende de la distribución espacial de la densidad de carga (y del valor de la carga) y, además, será en aquellos puntos donde no exista carga, es natural que, al aplicar el teorema de la divergencia, el resultado de la integral dependa únicamente de la carga englobada en el interior del volumen y no del tamaño del mismo.

### 3.5.4. Flujo del campo eléctrico

El flujo eléctrico (o electrostático) es otra magnitud escalar de interés. Nos permite obtener una medida de cómo es el campo eléctrico que atraviesa una cierta superficie. En concreto, el flujo eléctrico indica el "número" neto de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie. Por tanto, un flujo nulo no indica necesariamente que no exista campo eléctrico si no que, para la superficie seleccionada, existiría el mismo número de líneas de campo en un sentido y en su opuesto. Definamos, pues, el flujo eléctrico como la siguiente integral

$$\Phi = \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.45)$$

Sustituyamos la Ec. (3.13) que describe un campo eléctrico genérico en la expresión anterior, particularizando a una superficie cerrada

$$\Phi = \oiint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} + \int_Q \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dq' \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.46)$$

que resulta en

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \oiint_A \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} d\mathbf{S} + \int_Q dq' \oiint_A \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \cdot d\mathbf{S} \right). \quad (3.47)$$

Se puede demostrar que las integrales cerradas (apéndice C) resultan en  $4\pi$  para puntos en el interior de la superficie cerrada y 0 para el resto. Por tanto, el flujo del campo eléctrico (para el caso de una superficie cerrada) se simplifica a la siguiente expresión:

$$\Phi = \frac{Q_t}{\epsilon_0}, \quad (3.48)$$

siendo  $Q_t = \sum_{i=1}^n q_i + Q$  la carga total encerrada por la superficie  $A$ . Por tanto, el flujo del campo eléctrico es igual a la carga neta encerrada dividida entre la permitividad eléctrica del vacío. Podemos comprobar la similitud entre las Ecs.(3.44) y (3.48). En el fondo, ambas expresiones equivalen a la ley de Gauss, siendo la primera su forma diferencial y la segunda su forma integral.

### 3.5.5. Ecuaciones de Poisson y Laplace

Si partimos de la ecuación diferencial de la ley de Gauss (Ec.(3.44)) y sustituimos el potencial eléctrico (Ec.(3.31)) se llega a la siguiente expresión

$$\nabla^2 U = \Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.49)$$

que se conoce como *ecuación de Poisson*. Un caso particular de esta ecuación es la llamada ecuación de Laplace, que nos dice que en ausencia de carga se cumple que

$$\Delta U = 0. \quad (3.50)$$

Aunque esta última ecuación parece una obviedad, será fundamental en posteriores capítulos cuando se quiera conocer el potencial en una cierta región del espacio a partir de las condiciones de contorno.

## 3.6. El dipolo eléctrico y momento dipolar

El dipolo eléctrico es un tipo de distribución de carga en la cual se tienen dos cargas (idealmente puntuales) de signo opuesto ( $q_1 = q, q_2 = -q$ ) separadas una cierta distancia  $d = |\vec{d}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$  tal que la distancia de observación es mucho más grande que la separación entre ambas ( $|\vec{r}_0| \gg d$ ).

De manera general, se define el momento dipolar de una cierta distribución de carga como el siguiente vector

$$\vec{p} = \sum_i^n q_i \vec{r}_i, \quad (3.51)$$

si la distribución está formada por una cantidad discreta de cargas puntuales o

$$\vec{p} = \int_Q \vec{r} dq, \quad (3.52)$$

si la distribución es continua. El momento dipolar es una medida de la polaridad de la distribución de carga, esto es, la separación que existe entre cargas de signo opuesto.

### 3.6.1. Potencial electrostático de un dipolo eléctrico

Para calcular el potencial electrostático de un dipolo, apoyémonos en la Fig.(3.4). Referiremos las coordenadas de las cargas que constituyen del dipolo a partir del centro del mismo, es decir, la carga  $-q$  se localiza en  $\vec{r}_{-q} = \vec{r} + \vec{d}/2$  y la carga  $+q$  en  $\vec{r}_{+q} = \vec{r} - \vec{d}/2$ . Sustituyendo en la Ec.(3.38), se obtiene

$$U(\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_q|} - \frac{q}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_{-q}|} \right), \quad (3.53)$$

que podemos reescribir como

$$U(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r} - \vec{d}/2|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r} + \vec{d}/2|} \right). \quad (3.54)$$

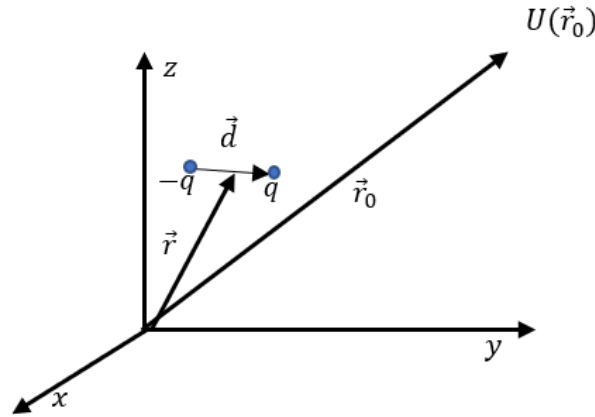


Figura 3.4: Relación entre vectores en presencia de un dipolo eléctrico.

Para simplificar la notación, llamemos  $\vec{R}$  al vector que indica la posición relativa entre el punto de observación y el centro del dipolo, esto es,  $\vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{r}$ . De esta forma, podemos simplificar las fracciones de manera sencilla:

$$U(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{R} - \vec{d}/2|} - \frac{1}{|\vec{R} + \vec{d}/2|} \right). \quad (3.55)$$

En este punto, para simplificar la ecuación y dada la condición de que  $\vec{R} \gg \vec{d}$ , podemos realizar el desarrollo de Taylor de la expresión anterior. Recordemos que el desarrollo de Taylor de una cierta función entorno a  $x = 0$  viene dado por

$$f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x - x_0)}{dx^n} \right|_{x=0} x^n. \quad (3.56)$$

Teniendo esto en cuenta, hagamos el desarrollo de Taylor entorno al punto  $\vec{d} = 0$  de la expresión del potencial

$$\begin{aligned} U(\vec{R}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{R} - \vec{d}/2|} - \frac{1}{|\vec{R} + \vec{d}/2|} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{R}|} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{R}}{2|\vec{R}|^3} - \frac{1}{|\vec{R}|} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{R}}{2|\vec{R}|^3} + O(d^2) \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Quedándonos a primer orden del desarrollo, podemos expresar el potencial electrostático del dipolo como

$$U(\vec{R}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \right). \quad (3.58)$$

donde aparece el momento dipolar  $\vec{p} = q\vec{d}$ . Deshaciendo el cambio de coordenadas, podemos también expresar el potencial de la siguiente forma:

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \right). \quad (3.59)$$

### 3.6.2. Campo eléctrico de un dipolo

Una vez conocido el potencial electrostático del dipolo, es directo calcular el campo eléctrico aplicando la Ec. (3.31). Se debe aplicar el operador nabla sobre la expresión del potencial, lo que lleva a

$$\mathbf{E}(\vec{R}) \propto \nabla \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3} = \vec{p} \cdot \vec{R} \nabla R^{-3} + R^{-3} \nabla(\vec{p} \cdot \vec{R}) \quad (3.60)$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena y  $R = |\vec{R}|$ . El segundo término es sencillo, ya que  $\vec{p}$  es un vector constante y, por tanto,  $\nabla \vec{p} \cdot \vec{R} = \vec{p}$ <sup>7</sup>. Por otro lado,

$$\nabla R^{-3} = \frac{-3}{R^4} \hat{u}_R \quad (3.61)$$

donde  $\hat{R}$  es el vector unitario en la dirección de  $\vec{R}$ . Podemos expresarlo de la siguiente forma

$$\nabla R^{-3} = -3 \frac{\vec{R}}{R^5}. \quad (3.62)$$

<sup>7</sup>Si se quiere ver de otra forma, el producto escalar en cartesianas será  $\vec{p} \cdot \vec{R} = p_x x + p_y y + p_z z$ , y, por tanto, el gradiente  $\nabla(\vec{p} \cdot \vec{R}) = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k} = \vec{p}$

Sustituyendo estos valores, el campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{R})\vec{R}}{|\vec{R}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{R}|^3} \right). \quad (3.63)$$

### 3.6.3. Superficies equipotenciales y líneas de fuerza de un dipolo

Como su propio nombre indica, las superficies equipotenciales de una cierta distribución de carga son aquellas para las cuales el potencial es el mismo. Para estudiar dichas superficies en el caso del dipolo eléctrico, resulta especialmente conveniente tomar las siguientes coordenadas en la Ec.(3.58). Por un lado, si tomamos como origen de coordenadas la posición del dipolo,  $\vec{r} = 0$ . Además, escribimos el producto escalar en función del ángulo que forman el vector del momento dipolar y el vector de posición, esto es,  $\vec{p} \cdot \vec{r}_0 = pr_0 \cos \theta$ , siendo  $p = |\vec{p}|$  y  $r_0 = |\vec{r}_0|$ . Con esto, podemos expresar el potencial electrostático del dipolo simplemente como

$$U(r_0, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r_0^2} \quad (3.64)$$

Para obtener las coordenadas de las superficies equipotenciales, basta con considerar que  $U(r_0) = U$  es una constante. Por tanto, dado un cierto dipolo con momento  $\vec{p}$ , tendrán el mismo potencial aquellas superficies que cumplan que

$$r_{eq}(\theta) = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{U} \right)^{1/2}. \quad (3.65)$$

En la Fig.3.5 se representan las líneas equipotenciales correspondientes al corte con  $y = 0$ .

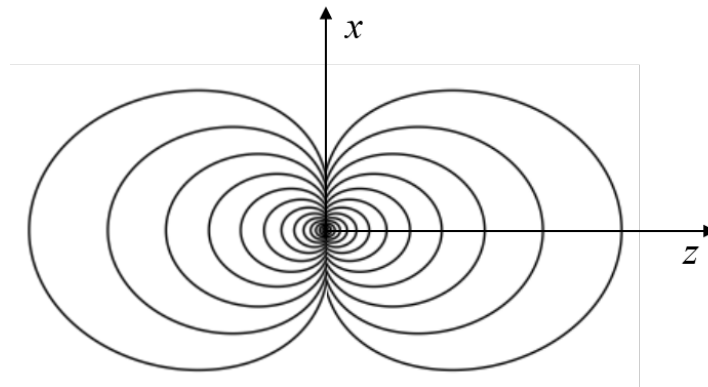


Figura 3.5: Líneas equipotenciales de un dipolo para  $y = 0$ . Cada línea representa un valor de  $U$  distinto.

Además, las líneas de campo eléctrico del dipolo son cerradas, tal como se muestra en la Fig. 3.6. Recordemos que, dada la relación entre el campo y el potencial, las superficies

equipotenciales serán perpendiculares a la líneas de campo que las atraviesan en cada punto del espacio.<sup>8</sup>

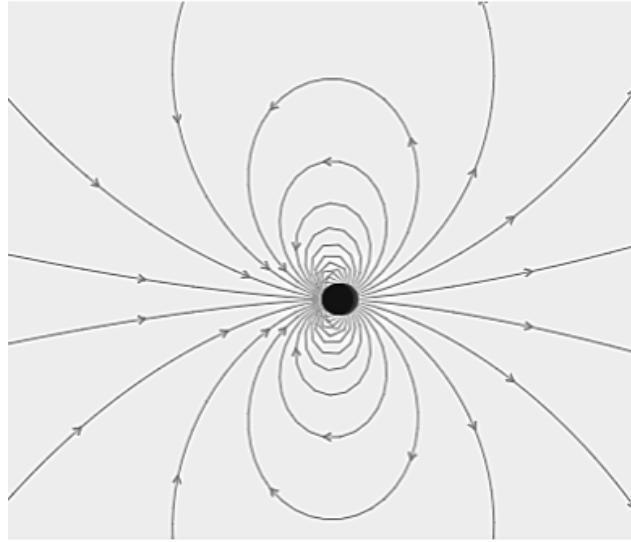


Figura 3.6: Líneas del campo eléctrico de un dipolo para  $y = 0$ . Cada línea representa un valor de  $U$  distinto.

### 3.6.4. Expansión multipolar del potencial eléctrico

Supongamos ahora que tenemos una cierta distribución continua de carga localizada en una región del espacio. En tal caso, el potencial debido a dicha distribución será

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}. \quad (3.66)$$

Si, al igual que hicimos en el apartado anterior, hacemos la expansión en serie de las coordenadas, podemos escribir

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q dq \left( \frac{1}{r_0} + \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}}{r_0^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{3(\vec{r}_0 \cdot \vec{r})^2}{r_0^5} - \frac{r^2}{r_0^3} \right) + \mathcal{O} \right). \quad (3.67)$$

donde  $r_0 = |\vec{r}_0|$ . Es decir, el potencial debido a una cierta distribución continua de carga se puede escribir como la suma un conjunto (infinito) de potenciales:

$$U(\vec{r}_0) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(\vec{r}_0). \quad (3.68)$$

Si nos fijamos en la expansión, es fácil ver que el primer término es directamente el potencial debido a la carga neta (momento monopolar) de la distribución, esto es

<sup>8</sup>La representación se ha obtenido a partir del simulador de líneas de campo de la página web <https://academo.org/demos/electric-field-line-simulator/>.



$$U_1(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0}. \quad (3.69)$$

Por otro lado, el segundo término lo podemos relacionar directamente con el momento dipolar de la distribución de carga:

$$U_2(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_0}{r_0^3}. \quad (3.70)$$

Aunque no lo veremos en detalle, el resto de términos se relacionan también con momentos de orden superior (por ejemplo, en  $U_3(\vec{r}_0)$  aparece el llamado momento cuadrupolar).

Nótese la utilidad de este tipo de desarrollo. El potencial debido a cualquier distribución de carga en primera aproximación se puede considerar como aquel que generaría una carga puntual. En segundo orden de aproximación, sería el de una carga puntual más el correspondiente a un dipolo. A tercer orden, serían esos dos términos más un tercero correspondiente al momento cuadrupolar. Obviamente, dependiendo del tipo de distribución de carga, cada uno de los términos tendrán un peso distinto. Este tipo de aproximación es especialmente relevante si la distribución de carga presenta una geometría compleja, de manera que no existe ninguna simetría que nos permita simplificar el cálculo del potencial.

Los cálculos anteriores se podrían extender al campo eléctrico, de manera que obtendríamos el desarrollo multipolar de dicho campo. Como sabemos, una vez conocido el potencial podemos obtener el campo sin más que aplicar el gradiente (con signo negativo) del potencial.

### 3.7. Energía potencial electrostática

La energía potencial electrostática de una cierta distribución de carga se puede definir como el trabajo realizado para que exista dicha distribución de carga (en otras palabras, sería *el esfuerzo hecho en contra* de la propia fuerza electrostática que impediría que dicha distribución existiese). Matemáticamente se expresaría como

$$W = - \int_{r_i}^{r_f} \mathbf{F} \cdot d\vec{l} \quad (3.71)$$

donde tendríamos que tener en cuenta el tipo distribución de carga dentro de la fuerza electrostática y las posiciones iniciales y finales de dicha distribución, ( $r_i$  y  $r_f$ ). Esta definición se entiende mejor a través de un ejemplo sencillo.

Consideremos que existen dos cargas puntuales,  $q_0$  situada en el origen de coordenadas, y  $q_1$ , situada en una cierta posición del espacio dada por  $\vec{r}_1$ . Si se quiere calcular la energía potencial electrostática de  $q_1$  (suponiendo que  $q_0$  se ha mantenido siempre en el origen)<sup>9</sup>, debemos calcular el trabajo necesario para llevar a  $q_1$  desde un cierto punto de referencia dado por las coordenadas  $\vec{r}_{ref}$  hasta  $\vec{r}_1$ . La propia definición de energía potencial electrostática nos lleva

<sup>9</sup>Si no hiciésemos esta consideración, la energía electrostática total sería  $W = W_0 + W_1$ . En este caso particular,  $W_0 = 0$ .

$$W_1 = - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{l} \quad (3.72)$$

Teniendo en cuenta que la fuerza electrostática vendrá dada por la ley de Coulomb, nos queda que

$$W_1 = - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}_1} \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{ref}} \right). \quad (3.73)$$

donde hemos considerado que  $d\vec{l} = dr\hat{u}_r$ .

Si recordamos la definición de potencial, para este caso particular, coincide exactamente con la energía potencial si tuviésemos en cuenta la presencia de la carga  $q_0$ . De la misma forma que hacemos con el potencial, tomaremos como posición de referencia el infinito y, por tanto, la energía electrostática en este caso será

$$W = W_0 + W_1 = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (3.74)$$

De forma más general, si la carga  $q_0$  estuviese en una cierta posición  $\vec{r}_0$ , es fácil ver que tendríamos la siguiente ecuación

$$W = W_0 + W_1 = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \quad (3.75)$$

donde simplemente tenemos en cuenta la posición relativa de la carga  $q_1$  con respecto a  $q_0$ .

Como hemos comentado, para este caso particular de dos cargas puntuales, podemos relacionar la energía potencial electrostática con el potencial debido a la carga  $q_0$ , de forma que

$$W = q_1 U(\vec{r}_1) \quad (3.76)$$

### 3.7.1. Energía potencial electrostática de una distribución de discreta de cargas puntuales

El resultado obtenido en la Ec. (3.76) es totalmente equivalente si intercambiamos ambas cargas, es decir

$$W = q_0 U(\vec{r}_0) \quad (3.77)$$

e, igualmente, podríamos expresarlo como una combinación lineal de ambas para, de alguna forma, tener presente que existen dos cargas puntuales. Por ejemplo, podríamos escribirla como

$$W = \frac{q_0 U(\vec{r}_0)}{2} + \frac{q_1 U(\vec{r}_1)}{2} \quad (3.78)$$

De esta forma, podemos pasar a considerar la energía potencial electrostática de un sistema de  $N$  cargas puntuales. Para ello consideraremos, por ejemplo, que dicha distribución de carga se ha creado desplazando en primer lugar la carga  $q_N$  desde el infinito a  $\vec{r}_N$ , posteriormente el mismo proceso para la carga  $q_{N-1}$  y así sucesivamente hasta la carga  $q_1$ <sup>10</sup>. Para simplificar la notación expresaremos las posiciones relativas como  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ .

Según la consideración que hemos realizado a la hora de construir la distribución de carga (que  $q_N$  fue la primera en ocupar su posición y  $q_1$  la última), cuando la carga  $q_1$  se *movió* el resto de cargas estaban presentes. Por tanto, la energía potencial de  $q_1$  tendrá en cuenta el trabajo realizado en contra de cada una de las fuerzas electrostáticas del resto de cargas, esto es

$$W_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{31}} + \dots + \frac{q_N}{r_{N1}} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^N \frac{q_n}{r_{n1}}, \quad (3.79)$$

Si consideramos ahora la segunda carga, tendríamos

$$W_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_3}{r_{32}} + \frac{q_4}{r_{42}} + \dots + \frac{q_N}{r_{N2}} \right) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=3}^N \frac{q_n}{r_{n2}} \quad (3.80)$$

Y podríamos seguir haciendo lo mismo para el resto hasta la última de las cargas que realiza un trabajo. Nótese que la última carga para la cual se realiza un trabajo es  $q_{N-1}$ , con lo cual

$$W_{N-1} = \frac{q_{N-1}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N}{r_{N,N-1}} \quad (3.81)$$

La energía potencial electrostática total será la suma de cada una de ellas, es decir

$$W = \sum_{m=1}^N W_m \quad (3.82)$$

que podríamos reescribir en la forma

$$W = q_N \sum_{m=1}^{N-1} U(r_{N m}) \quad (3.83)$$

Ahora bien, al igual que consideramos en la Ec. (3.78), el resultado anterior debe ser totalmente equivalente si permutamos la construcción de la distribución, considerando que  $q_1$  fue la primera en existir. Por tanto,

$$W = q_1 \sum_{m=2}^N U(r_{1 m}) \quad (3.84)$$

<sup>10</sup>Permitan que realice esta analogía con la construcción paso a paso de la distribución de carga. Estrictamente, la energía potencial es intrínseca a la propia distribución de carga y no a la forma en que ésta se ha construido. Sin embargo, resulta útil emplear este concepto para los cálculos de esta sección

y, de igual manera, podríamos combinar ambas expresiones:

$$W = \frac{1}{2} \left( q_1 \sum_{m=2}^N U(r_{1m}) + q_N \sum_{m=1}^{N-1} U(r_{Nm}) \right) \quad (3.85)$$

Lo anterior sigue siendo cierto para cualquiera de las permutaciones posibles en la construcción de la distribución de carga. Por tanto, podemos escribir la energía potencial como

$$W = \frac{1}{2} \sum_j^N q_j \sum_{i=1}^N U(r_{ji}), \text{ con } i \neq j. \quad (3.86)$$

### 3.7.2. Energía potencial de una distribución de carga volumétrica

A partir de la Ec. (3.86) es sencillo deducir la forma que tendrá la energía potencial de una distribución de carga continua que ocupe un cierto volumen,  $V_q$ . Si, al igual que hicimos anteriormente, llamamos al diferencial de carga  $dq = \rho(\vec{r})dV$ , los sumatorios del caso discreto se transforman en la siguiente integral

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_q} \rho(\vec{r}) U(\vec{r}) dV \quad (3.87)$$

## Resumen

A continuación se enumeran los puntos más relevantes del capítulo

- Expresión general de la ley de Coulomb y su relación con el campo eléctrico.
- Relación entre el campo eléctrico y el potencial y la obtención uno a partir del otro.
- Teorema de la divergencia y su aplicación.
- Ley de Gauss, tanto diferencial como integral.
- Concepto de densidad de carga en una distribución continua de carga
- Concepto de dipolo eléctrico.

## Ejercicios

- 3.1. Calcula el campo eléctrico debido a dos cargas puntuales idénticas separadas una cierta distancia  $d$  sobre la dirección perpendicular al segmento que las une y que pasa por la mitad del mismo.

*Solución:*

Para resolver este problema, aprovechamos la simetría del problema de tal forma que situamos las cargas sobre el eje  $x$  y el origen de coordenadas en el punto mitad del segmento que las une, tal como muestra la Fig. 3.7.

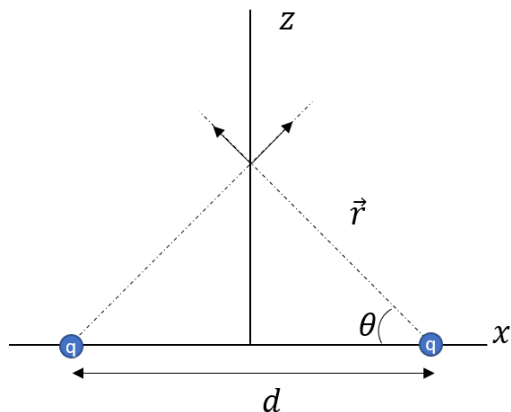


Figura 3.7: Dos cargas iguales separadas una distancia  $d$ .

Aplicando el principio de superposición, podemos expresar el campo total como la suma de los campos de cada una de las cargas, es decir

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

Si analizamos la simetría del problema, es fácil ver la siguiente relación entre las componentes de los campos sobre el eje  $z$ :

$$E_{1,x}(z) = -E_{2,x}(z), \quad E_{1,z}(z) = E_{2,z}(z), \quad E_{1,y}(z) = E_{2,y}(z) = 0.$$

Por tanto, el campo eléctrico neto sobre el eje  $z$  será igual a

$$\mathbf{E}(z) = (E_{1,x} - E_{2,x})\hat{i} + 2E_{1,z}\hat{k} = 2E_{1,z}\hat{k}$$

Es decir, será igual a dos veces la proyección del campo generado por una de las cargas sobre el eje  $z$ . Teniendo esto en cuenta, el campo se podrá expresar como

$$\mathbf{E}(z) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z^2 + (d/2)^2)} \sin \theta \hat{k}$$

*Nota:* Haciendo una analogía con la ecuación vista en teoría, tendríamos que  $\vec{r}_0 = z \hat{k}$  y  $\vec{r} = d/2 \hat{i}$ .

A partir de la figura es fácil ver la siguiente relación trigonométrica,  $\sin \theta = z / (x^2 + (d/2)^2)^{1/2}$ , con lo cual

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + (d/2)^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

Podemos comprobar que, si  $z \gg d$ , entonces quedaría

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2} \hat{k},$$

que, como era de esperar, es equivalente al campo generado por una carga puntual de valor  $2q$ .

3.2. Repite el ejercicio anterior para el caso en el que las cargas tienen distinto signo.

*Solución:*

En este caso, el esquema del problema quedaría de la siguiente forma:

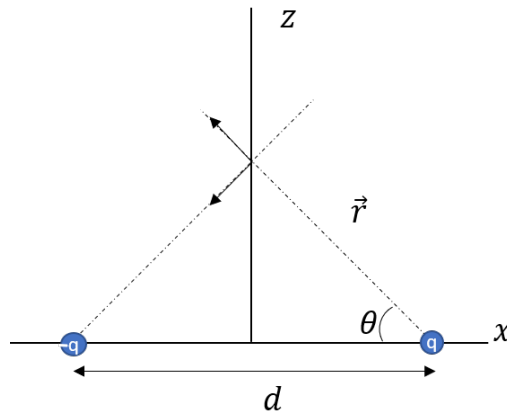


Figura 3.8: Dos cargas iguales de signo opuesto separadas una distancia  $d$ .

Como se puede ver, ahora las componentes axiales se cancelan mientras que las transversales no. Aplicando el principio de superposición tendríamos que

$$\mathbf{E}(z) = (E_{1,x} + E_{2,x}) \hat{i} + (E_{1,z} + E_{2,z}) \hat{k},$$

donde, en este caso  $E_{1,x}(z) = E_{2,x}(z)$ ,  $E_{1,z}(z) = -E_{2,z}(z)$ . Consecuentemente, el campo sobre el eje  $z$  será

$$\mathbf{E}(z) = 2E_{1,x} \hat{i}.$$

es decir, el campo eléctrico sobre el eje  $z$  solo tiene componente en la dirección  $x$ . Este caso es particularmente interesante para familiarizarse con la notación y entender el sentido de campo vectorial.

Por tanto, calculamos la componente transversal del campo eléctrico debido a una de las cargas y, para obtener el campo total, multiplicamos por dos. Quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z^2 + (d/2)^2)^2} \cos \theta \hat{i}.$$

En este caso,  $\cos \theta = \frac{d}{2(z^2 + (d/2)^2)^{1/2}}$ , por lo cual se llega a

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(z^2 + (d/2)^2)^{3/2}} \hat{i}.$$

Si ahora consideramos que la distancia de observación es mucho mayor que la separación entre cargas ( $z \gg d$ ), se obtiene la ecuación

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3} \hat{i}.$$

que se relaciona con el campo de un dipolo sobre el  $z$ .

- 3.3. Calcula el campo eléctrico a lo largo de la dirección perpendicular sobre el punto medio de un segmento lineal con carga uniforme.

*Solución:*

Para resolver este problema emplearemos la ecuación genérica del campo eléctrico (Ec.(3.13)), particularizando a una distribución de carga lineal, continua y uniforme. Para visualizar el problema, apoyémonos en la Fig. 3.9. Además, la manera de proceder será muy similar a la de los dos problemas anteriores.

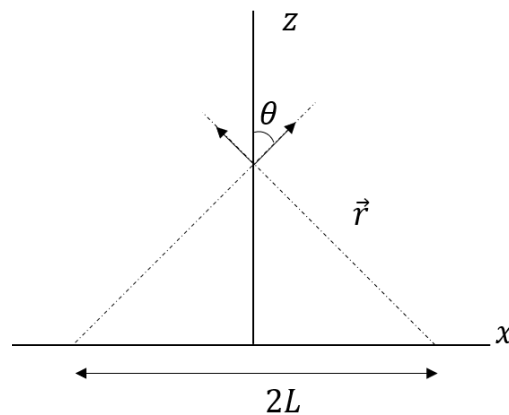


Figura 3.9: Distribución de carga lineal de longitud  $2L$ .

Consideremos que el segmento tiene longitud  $2L$  y se encuentra sobre el eje  $x$ , y el eje  $z$  corta al segmento por la mitad. Es fácil ver que, por razones de simetría, la componente transversal del campo se cancela, quedando exclusivamente la componente en la dirección  $z$ . La contribución sobre dicha dirección será:



$$E_z = E_z^{-L} + E_z^{+L} = 2E_z^L$$

ya que ambas componentes son iguales y en el mismo sentido en el eje  $z$ . Al tratarse de una distribución de carga lineal sobre el eje  $x$ , el diferencial de carga vendrá dado por  $dq = \lambda dx$ . Es fácil ver que la contribución de cada diferencial de carga del segmento será equivalente a la proyección del vector de campo eléctrico de una carga situada en  $\vec{r}$  sobre el eje  $z$ , es decir, tendrá un factor  $|\vec{r}| \cos \theta$ <sup>11</sup>.

Cada diferencial de carga tendrá la siguiente contribución

$$dE_z = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^3} r \cos \theta$$

donde  $r = |\vec{r}|$ . Podemos relacionar fácilmente con relaciones trigonométricas la ecuación anterior con las correspondientes coordenadas cartesianas ya que  $\cos \theta = z/r$  y, además,  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . El campo en su forma integral queda como

$$E_z = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx,$$

donde recordemos que solo tendremos que tener en cuenta la mitad del segmento (de 0 a  $L$ ) ya que hemos sumado ambas contribuciones anteriormente. Resolviendo la integral se obtiene

$$E_z = \frac{\lambda z}{2\pi\epsilon_0} \left. \frac{x}{z^2 (x^2 + z^2)^{1/2}} \right|_0^L,$$

y, por tanto, podemos expresar el campo eléctrico generado por el segmento, en su forma vectorial, como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z (L^2 + z^2)^{1/2}} \hat{k},$$

Es fácil ver que si consideremos el segmento infinitamente largo, la expresión anterior queda como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lambda L}{z (L^2 + z^2)^{1/2}} \hat{k} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z} \hat{k}.$$

que es la versión lineal del plano infinito cargado uniformemente.

---

<sup>11</sup>Nótese que, por variar el problema, en este caso hemos llamado  $\theta$  al ángulo complementario al que escogimos en el problema 3.1

- 3.4. Calcula el campo eléctrico sobre el eje que pasa por el centro de un anillo de grosor infinitesimal de radio  $R$  cargado uniformemente.

*Solución:*

El campo eléctrico, para este tipo de distribución de carga, lo calcularemos por medio de la expresión

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\text{anillo}} dq \frac{\vec{r}}{r^3}$$

donde el vector  $\vec{r}$  va desde una cierta posición en el anillo hasta otra sobre el eje  $z$ .

El anillo será una cierta distribución de carga lineal, es decir,  $dq = \lambda dl$ . Dada la simetría del problema, es obvia que las coordenadas cilíndricas facilitarán la solución del mismo.

Por tanto, emplearemos el elemento diferencial de desplazamiento en coordenadas cilíndricas (ver apéndice B), esto es  $dl = \rho d\theta$ . Al igual que en casos anteriores, las componentes transversales ( $x$  e  $y$ ) del campo eléctrico se cancelan, quedando exclusivamente la componente en la dirección axial. Tendremos pues que el campo eléctrico vendrá dado por

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anillo}} \frac{\vec{r}}{r^3} \rho d\theta \cos \theta \hat{k}.$$

que, empleando  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  y que  $\cos \theta = z / \sqrt{R^2 + z^2}$ , se puede reescribir como <sup>12</sup>

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{zR d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{k}.$$

con lo que

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{zR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

*Nota:* Como puede verse, este problema se podría haber deducido a partir del problema 3.1, sin más que realizar la revolución sobre el eje  $z$  aplicando la correspondiente integral.

- 3.5. Halla el campo eléctrico debido a la presencia de dos planos infinitos cargados uniformemente. con cargas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , separados una cierta distancia  $a$ .

*Solución:*

En primer lugar, recurrimos al resultado al que llegamos para un plano infinito uniformemente cargado (Ec. (3.27)). Este resultado se puede expresar como

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u} \tag{3.88}$$

<sup>12</sup>Se ha obviado la integral en la dirección radial ya que solo hay anillo cuando  $\rho = R$ .

donde  $\hat{u}$  es un vector unitario perpendicular al plano de forma que  $\mathbf{E}$  tomará valores positivos si tiene el mismo sentido que dicho vector y negativos si tiene sentido contrario. Igualmente, será nulo justo sobre el plano. Sabiendo esto y aplicando el principio de superposición, basta con hacer un pequeño esquema para encontrar el campo eléctrico en las distintas zonas del espacio.

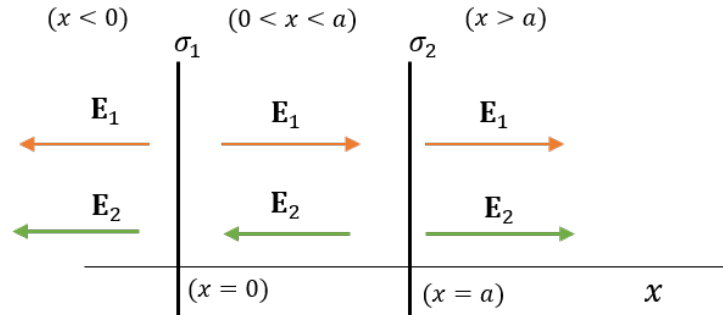


Figura 3.10: Campos eléctricos debidos a dos planos infinitos uniformemente cargados.

Se generan, por tanto, tres regiones con distintos campos netos dados por la suma y/o resta de los campos debidos a ambos planos infinitos. Considerando que el eje  $x$  es perpendicular a los planos y que, además, el plano de carga  $\sigma_1$  se encuentra en el origen de dicho eje, tendríamos que

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 & \text{si } 0 < x < a. \\ \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\hat{u}_x & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\hat{u}_x & \text{si } 0 < x < a. \\ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}\right)\hat{u}_x & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Nótese que se han considerado las cargas positivas. Sin embargo, no hay pérdida de generalidad ya que, en el resultado anterior, bastaría con cambiar el signo de  $\sigma_1$  o  $\sigma_2$ .

- 3.6. Suponiendo que el campo eléctrico en una cierta región del espacio viene dado por  $\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = kr^3\hat{u}_r$ , expresado en coordenadas esféricas, calcula la distribución de carga que causa dicho campo ( $k$  es una cierta constante).

*Solución:*

Para resolver este problema, partimos de la ley de Gauss en su forma diferencial, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Calculamos la divergencia del campo en coordenadas esféricas (ver apéndice A, teniendo en cuenta que el campo depende exclusivamente de la coordenada radial

$$\rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \mathbf{E})}{\partial r} = k\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^5}{\partial r} = 5k\epsilon_0 r^2,$$

sería la densidad de carga que, como vemos, tiene dependencia radial.

- 3.7. Obtén el campo eléctrico en el exterior de una esfera sólida uniformemente cargada de radio  $R$  y carga total  $q$ .

*Solución:*

Para realizar este cálculo, tomemos una superficie cerrada que envuelva la esfera sólida, por ejemplo, la superficie de una esfera de radio  $r_a$ , siendo  $r_a > R$ . La ley de Gauss (en su forma integral) nos dice que la integral del campo eléctrico a lo largo de dicha superficie es constante, dependiendo exclusivamente de la carga total encerrada. Es decir

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Para poder calcular el campo, necesitamos resolver la integral. Sin embargo, debido al producto escalar no parece una tarea sencilla. Para poder resolverla, debemos hacer un par de consideraciones sobre el campo eléctrico:

- i) Debido a la simetría del problema, el campo eléctrico en cualquier punto necesariamente será perpendicular a la superficie de ambas esferas, al igual que el vector diferencial de superficie.
- ii) La superficie de cualquier esfera cuyo centro coincida con la esfera sólida será una superficie equipotencial. (esto implica que el campo eléctrico depende exclusivamente de la componente radial).

Gracias a la condición i), podemos asumir que

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S |\mathbf{E}| dS.$$

Por otro lado, la condición ii) nos dice que, para la superficie de la esfera de integración, el campo eléctrico es constante, es decir

$$\oint_S |\mathbf{E}| dS = |\mathbf{E}| \oint_S dS = 4\pi r_a^2 |\mathbf{E}|,$$

y, por tanto, si volvemos a la ecuación inicial obtenemos que

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a^2}.$$

Además, teniendo en cuenta la condición ii), podemos escribir el campo en su forma vectorial

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} \hat{u}_r.$$

Como vemos, este resultado es bastante peculiar. El campo debido a la esfera sólida es exactamente el mismo que tendríamos si toda la carga de dicha esfera estuviese concentrada en el centro de la misma.

- 3.8. Calcula el campo eléctrico en el interior de un cilindro de radio  $s$  y altura  $l$ , sabiendo que la densidad de carga varía radialmente como  $\rho(r) = kr$ , siendo  $k$  una cierta constante. Asume que  $l \gg s$ .

*Solución:*

En primer lugar, hagamos un esquema del problema en el cual incluimos una superficie gaussiana de forma cilíndrica que contiene el cilindro cuyo campo queremos calcular.

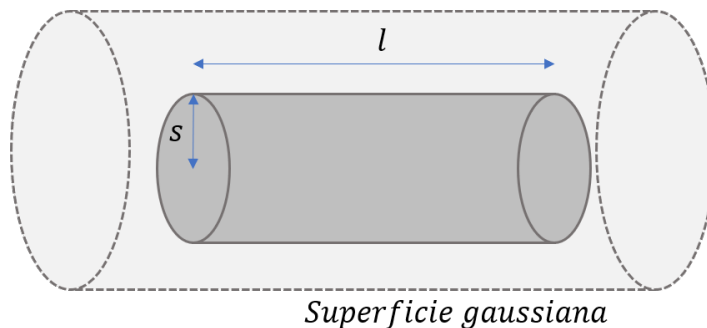


Figura 3.11: Cilindro cargado y superficie gaussiana que lo envuelve.

Para la superficie cerrada que hemos dibujado (igual que para cualquier otra superficie cerrada que contenga al cilindro) se cumple la ley de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

donde  $Q$  es la carga total contenida en el interior de la superficie. Para calcular dicha carga total, empleamos la fórmula de la densidad de carga que tiene el cilindro

$$Q = \int dq = \int \rho(r) dV.$$

Dada la simetría del problema, emplearemos el elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas (ver apéndice A) y, por tanto,

$$Q = \int_0^s \int_0^{2\pi} \int_0^l \rho(r) r dr d\phi dz.$$

con lo que se obtiene que

$$Q = 2\pi kl \int_0^s r^2 dr = \frac{2}{3}\pi kls^3$$

Al igual que en el ejercicio anterior, se pueden ciertas consideraciones sobre el campo eléctrico que simplifican la parte integral de la ley de Gauss. Si, como se nos dice en el enunciado,  $l \gg s$ , entonces podemos asumir que el campo sobre la superficie curva del cilindro es perpendicular a la misma. Es decir, será paralelo al diferencial de superficie. Por otro lado, las caras del cilindro no contribuirán a la integral ya que, en este caso, el vector de superficie de las caras es perpendicular al campo eléctrico, por lo que el producto escalar será nulo.<sup>13</sup>

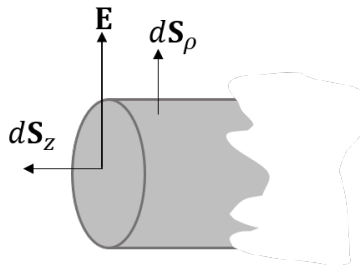


Figura 3.12: Campo eléctrico y vectores diferenciales de superficie.

Por tanto, al igual que en el problema anterior, podemos resolver la integral de manera sencilla

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int |\mathbf{E}| dS = |\mathbf{E}| 2\pi sl.$$

Sustituyendo en la ley de Gauss obtenemos el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} ks^2 \hat{u}_r$$

- 3.9. Calcula el campo eléctrico debido a un plano infinito cargado uniformemente empleando la ley de Gauss

*Solución:*

En la sección 3.4.2 hicimos este problema a partir de , en primer lugar, calcular el campo eléctrico de un disco cargado uniformemente y, posteriormente, considerando que dicho disco era infinito. Como veremos, dicho campo se puede calcular igualmente a partir de la ley de Gauss.

Si dibujamos una superficie cerrada en una cierta región del espacio, ésta encerrará una cierta carga correspondiente al plano. Por simetría, escogemos la superficie de un prisma cuadrangular como superficie de Gauss. Consideraremos que el plano infinito corta

<sup>13</sup> Siguiendo la notación del apéndice A tendríamos el diferencial  $dS_\rho$  para la superficie curva del cilindro y  $dS_z$  para las caras.

al prisma en dos mitades idénticas. El campo eléctrico será paralelo a los diferenciales de superficie de las caras paralelas al plano y perpendicular para el resto de caras. Apliquemos la ley de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Por un lado, la carga encerrada dependerá necesariamente de las dimensiones del prisma escogido. En realidad, dependerá exclusivamente del área,  $A$ , de las caras paralelas al plano infinito. Si la densidad superficial de carga del plano es  $\sigma$ , entonces la carga encerrada por el prisma será

$$Q = \sigma A.$$

Además, el campo eléctrico es constante para cualquier punto en la superficie  $A$  y la el producto escalar del campo y el diferencial de superficie es nulo en aquellas caras que no son paralelas al campo. Por tanto, la parte integral de la ley de Gauss queda como

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| \int_{-A}^A dS = 2A|\mathbf{E}|.$$

Sustituyendo obtenemos que

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

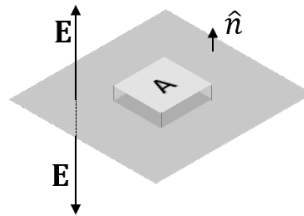


Figura 3.13: Ley de Gauss para un plano infinito.

Por último, debemos considerar el carácter vectorial del campo. Si la densidad de carga es positiva, entonces el vector normal a la superficie tendrá el mismo sentido que el campo, tanto en la región del espacio que queda por encima del plano infinito como por debajo. Por tanto, podemos expresar el campo de la siguiente forma

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}.$$

siendo  $\hat{n}$  al vector normal a la superficie del plano <sup>14</sup>. Como podemos comprobar, el resultado es exactamente el mismo al obtenido mediante el método directo.

<sup>14</sup>Nótese que la ecuación sigue siendo válida si la densidad de carga es negativa, ya que cambiaría automáticamente el sentido de los vectores de campo.

- 3.10. Calcula el potencial electrostático tanto en el interior como el exterior de una esfera hueca de radio  $R$

*Solución:*

Al igual que para una esfera sólida (ver ejercicio anterior), es fácil ver que el campo eléctrico en el exterior de la esfera hueca vendrá dado por

$$\mathbf{E}_{fuera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r.$$

Por otro lado, en el interior de la esfera el campo debe ser nulo (cualquier superficie esférica cuyo centro coincida con la esfera hueca no englobará carga alguna si  $r < R$ ).

Para poder calcular el potencial, tanto dentro como fuera de la esfera, es necesario tomar un origen de potenciales. Como suele ser común, tomaremos dicho origen en el infinito. Calculemos en primer lugar el potencial fuera de la esfera situado en  $r_0$ , con  $r_0 > R$

$$U_{fuera} = - \int_{\infty}^{r_0} \mathbf{E}_{fuera} \cdot d\vec{l} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_0} \frac{q}{r^2} dr,$$

y, por tanto,

$$U_{fuera}(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0}.$$

Para calcular el potencial en el interior, se debe separar el espacio en dos regiones. Obviamente, al tomar como origen de potenciales el infinito, toda aquella carga que este entre el infinito y el punto en el cual se quiere conocer el potencial se debe tener en cuenta. Es por ello que, en el interior de la esfera, el potencial será la suma de dos integrales (una desde el infinito hasta la superficie de la esfera hueca, y otra desde dicha superficie a un punto en el interior de la misma)

$$U_{dentro} = - \int_{\infty}^R \mathbf{E}_{fuera} \cdot d\vec{l} - \int_R^{r_0} \mathbf{E}_{dentro} \cdot d\vec{l},$$

Como  $\mathbf{E}_{dentro} = 0$ , resolviendo la primera integral se obtiene

$$U_{dentro} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Como vemos, el potencial en el interior de la esfera hueca no es nulo. Sin embargo, al ser una constante el campo eléctrico en el interior si lo es.

Debemos entender que el potencial depende de, efectivamente, donde elijamos su origen. Como dijimos en el desarrollo del capítulo, tiene sentido escoger el infinito como origen ya que, independientemente del tipo de carga, allí el campo eléctrico será nulo. Sin embargo, podríamos escoger cualquier otro punto como origen y los resultados seguirán siendo consistentes. Imaginemos que, en este problema, tomamos el centro de la



esfera hueca como origen de potenciales. En este caso, tanto el potencial como el campo serán nulos en el interior de la misma. Sin embargo, cuando calculemos el potencial en el exterior, aparecerá el factor constante que ahora aparece en  $U_{dentro}$ . Igualmente, los campos seguirán siendo exactamente los mismos ya que el gradiente del factor constante es nulo.

- 3.11. Calcula el potencial a lo largo del eje de Un disco de radio  $R$ , carga total  $Q$  y densidad de carga superficial  $\sigma(r) = kr$ , siendo  $k$  una cierta constante. Calcula, en primer lugar, el valor de la constante  $k$  en función de los parámetros del disco.

Primeramente, determinaremos el valor de la constante  $k$  en función de los parámetros del disco, es decir, de la carga total  $Q$  y el radio  $R$ . Para ello, empleamos la propia definición de carga total en función de la densidad superficial de carga, esto es

$$Q = \iint_S \sigma dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} kr^2 d\phi dr,$$

donde empleamos el diferencial de superficie en coordenadas polares. Tras realizar las integrales se obtiene

$$Q = \frac{2\pi k R^3}{3}.$$

Por tanto, podemos escribir como la constante como

$$k = \frac{3Q}{2\pi k R^3}.$$

Al igual que hicimos en problemas anteriores, podemos escribir el vector que relaciona la carga y la posición en la cual queremos obtener el potencial como  $\vec{r}_0 - \vec{r} = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Empleamos la fórmula del potencial para una distribución de carga continua superficial

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dS.$$

que, en coordenadas cilíndricas y definiendo los límites de integración para el disco, queda de la siguiente forma

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{kr}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr.$$

o, lo que es lo mismo

$$U(\vec{r}_0) = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^R r^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Resolviendo la integral anterior <sup>15</sup>

$$U(\vec{r}_o) = \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{z}{2} \left( R(R^2 + z^2)^{1/2} - z \ln \left( \frac{R + (R^2 + z^2)^{1/2}}{|z|} \right) \right).$$

Sirva este ejemplo para comprobar que un simple cambio como es considerar que la densidad de carga superficial varía radialmente puede complicar en gran medida la obtención del resultado analítico del campo (o el potencial en este caso). Además, tengamos en cuenta que estamos calculando exclusivamente el potencial en el eje de simetría del disco, lo cual simplifica notablemente el cálculo.

3.12. Se tiene una esfera de radio  $R$  con una carga total  $q$ . La carga se distribuyen a lo largo del volumen de manera no uniforme siguiendo la fórmula  $\rho(r) = A(R - r)$ , donde  $A$  es una cierta constante. Calcula:

(a) El valor de la constante en función de los parámetros de la esfera (carga y radio).

(b) El campo eléctrico y el potencial en todo el espacio.

(a) En primer lugar, calculemos el valor de la constante  $A$ . Para ello, empleamos la propia definición de diferencial de carga y planteamos la integral en coordenadas esféricas (dada la simetría del problema). Tendremos que

$$q = \iiint_{V_{esfera}} \rho(r) dV = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R A(R - r)r^2 dr$$

que nos lleva a

$$q = 4\pi \int_0^R A(R - r)r^2 dr.$$

Calculamos la integral

$$q = 4\pi \left( \frac{AR^4}{3} - \frac{AR^4}{4} \right) = \frac{\pi AR^4}{3}.$$

Y, por tanto, la constante  $A$  será

$$A = \frac{3q}{\pi R^4}.$$

(b) Aplicamos la ley de Gauss para calcular el campo en el interior de la esfera, es decir, consideramos que  $r < R$ . Basta con considerar que aplicamos una superficie esférica gaussiana de radio menor al de la esfera problema. Esto lo podemos hacer ya

---

<sup>15</sup>Esta integral no es sencilla, se recomienda el uso de software. En todo caso, se puede obtener la solución analíticamente mediante el cambio de variable  $u = \text{atan}\left(\frac{r}{z}\right)$

que conocemos como es la distribución de carga en su interior. Nos queda la siguiente integral

$$\oiint \mathbf{E}_{dentro} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_0^r A(R-r)dV.$$

Calculemos en primer lugar la integral que contiene el campo. Dada la simetría del problema, las superficies equipotenciales serán esféricas dentro de la propia esfera. Por tanto, en la superficie gaussiana el campo será uniforme. Además, el campo eléctrico y la normal a la superficie gaussiana serán paralelos. Teniendo esto en cuenta la integral queda simplemente como

$$\oiint \mathbf{E}_{dentro} \cdot d\mathbf{S} = E_{dentro} \oiint dS = 4\pi r E_{dentro}$$

Por otro lado, la integral de la derecha la calculamos en el apartado (a), aunque en este caso es indeterminada. Quedaría de la siguiente forma

$$q = 4\pi A \left( \frac{Rr^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)$$

Con esto, sustituyendo ambas en la ley de Gauss se obtiene

$$\mathbf{E}_{dentro} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^4} (4R - 3r) \hat{u}_r$$

donde, como ya asumimos anteriormente, hemos considerado que el campo es paralelo a la normal a la superficie esférica.

Por otro lado, como ya hemos comprobado en varias ocasiones, el campo en el exterior de cualquier esfera cargada con simetría radial es exactamente el mismo y, aplicando nuevamente la ley de Gauss pero en este caso con  $r > R$  se obtiene

$$\mathbf{E}_{fuera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r.$$

Por último, calcularemos el potencial tanto dentro como fuera de la esfera. El potencial en el exterior de la esfera será

$$U_{fuera} = - \int_r^\infty \mathbf{E}_{fuera} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} (\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donde recordemos una vez más que el origen de potenciales se encuentra en el infinito.

Como en problemas anteriores, para considerar el potencial en el interior, dado que el origen de potenciales se encuentra en el infinito, hay que tener en cuenta el potencial desde el infinito hasta la superficie de la esfera y, posteriormente, el potencial en el interior. Esto es

$$U_{dentro} = -\left(\int_R^\infty \mathbf{E}_{fuera} \cdot d\vec{l} + \int_r^R \mathbf{E}_{dentro} \cdot d\vec{l}\right)$$

de manera que nos queda

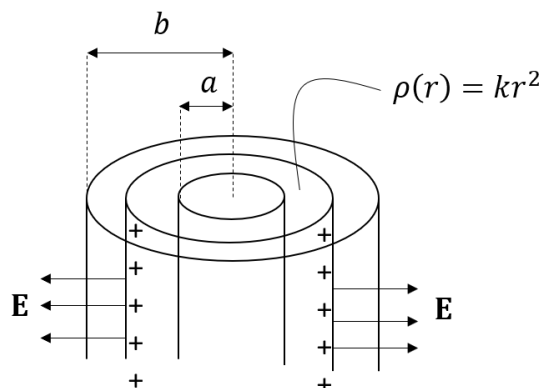
$$U_{dentro} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \int_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^4} (4R - 3r) dr$$

que, tras integrar y sustituir los límites de integración, queda en la forma

$$U_{dentro} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R} - \frac{2r^2}{R^3} + \frac{r^3}{R^4} \right)$$

3.13. El espacio comprendido entre dos cilindros centrados sobre el mismo eje de radios  $a$  y  $b$  tiene una densidad volumétrica de carga dependiente de la posición en la forma  $\rho(r) = kr^2$ , tal como muestra la figura inferior. Calcula:

- (a) El campo eléctrico en todo el espacio.
- (b) La diferencia de potencial entre las superficies situadas en  $r_1 = a$  y  $r_2 = b$ .



Calculamos el campo en las distintas regiones:

i) Interior del cilindro pequeño ( $r < a$ ):

Dada la simetría del problema, el campo en el interior del primer cilindro es nulo. Es decir, si  $r < a$ , entonces  $E = 0$ .

ii) Superficie intermedia entre cilindros ( $a < r < b$ ):

En esta región aplicamos la ley de Gauss. Para ello, empleamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio  $r_i$ , con  $a < r_i < b$  y altura  $h$ . Nos queda la siguiente expresión

$$\oiint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$$

Por un lado, el campo eléctrico será paralelo a la superficie lateral de los cilindros y, por tanto, perpendicular a las bases. Tomamos, por tanto, el diferencial de superficie  $dS_r = r d\phi dz$ . En ese caso, la integral del campo eléctrico queda como

$$\oiint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = E_i r_i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz dr (\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r)$$

Dado que en la superficie gaussiana el campo será uniforme la integral anterior resulta en

$$\oiint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r_i h E_i.$$

Por otro lado, para calcular la carga total encerrada empleamos

$$Q_{total} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \int_a^{r_i} A r^2 r dr,$$

donde se ha tenido en cuenta que si  $r < a$  no existe carga. Calculamos la integral y sustituimos los límites de integración

$$Q_{total} = 2\pi h A \left| \frac{r^4}{4} \right|_a^{r_i} = \frac{\pi h A}{2} (r_i^4 - a^4).$$

Sustituimos ambas integrales en la ley de Gauss para obtener

$$2\pi r_i h E_i = \frac{\pi h A}{2\epsilon_0} (r_i^4 - a^4).$$

y, por tanto, el campo en el volumen que separa a ambos cilindros será

$$\mathbf{E}_i = \frac{A}{4\epsilon_0} \frac{r^4 - a^4}{r} \hat{u}_r.$$

iii) Campo fuera del cilindro ( $r > b$ )

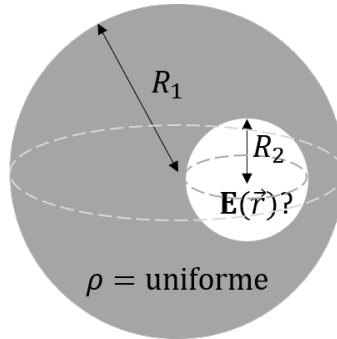
Este caso resulta directo si tenemos en cuenta el resultado del caso anterior. Calculémoslo igualmente, si  $r > b$ , al aplicar la ley de Gauss queda

$$2\pi r h E_e = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \int_a^b A r^2 r dr.$$

Nótese que solo existe carga en la región intermedia, es decir, entre  $a$  y  $b$  y, por tanto, la integral de carga debe estar limitada a dicha región. Despejando el campo eléctrico se obtiene que, en la zona exterior, éste viene dado por

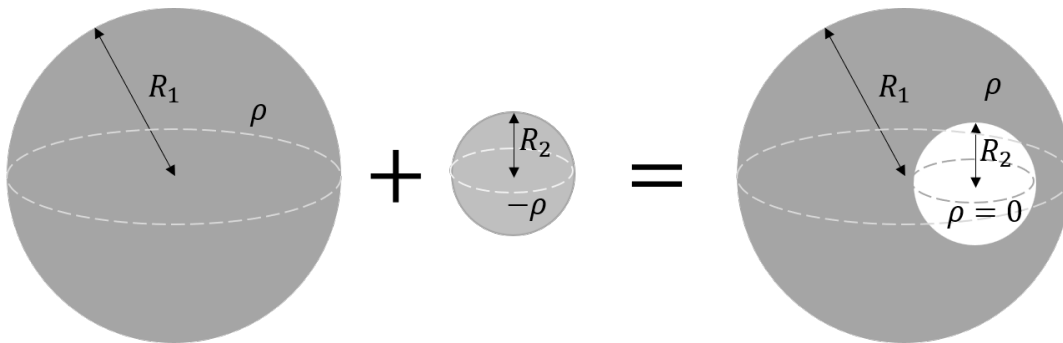
$$\mathbf{E}_e = \frac{A}{4\epsilon_0} \frac{b^4 - a^4}{r}$$

- 3.14. Se tiene una esfera maciza de radio  $R_1$  en cuyo interior existe una cavidad esférica de radio  $R_2$ . Suponiendo que la esfera maciza y la cavidad no comparten el centro, tal como muestra la figura inferior, calcula el campo eléctrico en el interior de dicha cavidad.



Este problema resulta muy útil para ilustrar el principio de superposición. Podemos descomponer el objeto en cuestión en dos esferas sólidas con cargas opuestas. Veámoslo:

Por un lado consideramos el campo de la esfera maciza de radio  $R_1$  y, después, podemos tener en cuenta la cavidad sin más que considerar que el campo de una esfera de radio  $R_2$  cargada con densidad de carga  $-\rho$ . La superposición de ambos campos dará como resultado el campo del objeto que queremos considerar.



Teniendo esto en cuenta, podemos calcular la contribución de cada parte y aplicar el principio de superposición para obtener el campo total, es decir,  $\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ .

El campo eléctrico de una esfera maciza cargada uniformemente se obtiene aplicando la ley de Gauss con una superficie menor al radio de la esfera, es decir,  $r < R_i$ . Hemos empleado  $R_i$ , con  $i = 1, 2$ , ya que el resultado será útil tanto para la esfera maciza como para la cavidad de su interior. Escribamos la ley de Gauss en este caso

$$\oiint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$$

donde  $S'$  es la superficie gaussiana y  $Q_{total}$  es la carga encerrada en su interior. Dada la simetría del problema, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana

será el mismo y, además, siempre será normal a dicha superficie. Por tanto, la integral del campo eléctrico en la superficie cerrada queda como

$$\oiint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E.$$

Por otro lado, calculamos la carga total encerrada en el volumen dentro de la superficie gaussiana, esto es,

$$Q_{total} = \rho \iiint_{V_{Gauss}} dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

A continuación, sustituimos el resultado de las integrales en la ley de Gauss

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3\epsilon_0}\pi r^3 \rho.$$

de donde se obtiene el campo en el interior de la esfera maciza

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{u}_r.$$

Con este resultado podemos, aplicando el razonamiento anterior, calcular el campo en el interior de la cavidad. Supongamos que colocamos el sistema de referencia en el centro de la cavidad. Si consideramos, para posteriormente aplicar el principio de superposición, que la cavidad es una esfera maciza de carga uniforme  $-\rho$ , el campo eléctrico en su interior será

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho |\vec{r}_0|}{3\epsilon_0} \hat{u}_{r_0}.$$

donde  $\vec{r}_0$  es el vector de posición relativo al centro de la cavidad en el cual queremos evaluar el campo eléctrico. Si consideramos que la distancia entre el centro de la cavidad y la esfera maciza viene dada por el vector  $\vec{d}$ , podemos obtener el campo eléctrico de la esfera maciza referido a su propio centro, es decir, en coordenadas  $\vec{r}_1$ . Fijándonos en la geometría del problema, es fácil ver que podemos referir dichas coordenadas al centro de la cavidad por medio de la relación vectorial  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - \vec{d}$  como

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho |\vec{r}_1|}{3\epsilon_0} \hat{u}_{r_1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (|\vec{r}_0| \hat{u}_{r_0} - |\vec{d}| \hat{u}_d).$$

Aplicando el principio de superposición se obtiene que el campo en el interior de la cavidad viene dado por

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}.$$

donde el signo negativo se podría absorber si definimos  $\vec{d}$  en la dirección contraria (el vector que une el centro de la cavidad con el centro de la esfera).



# Capítulo 4

## Electrostática en medios materiales

### 4.1. Conductores

Recordemos que, hasta ahora, solo hemos estudiado casos en los que las cargas se encuentran en el vacío. Tampoco hemos pretendido describir la naturaleza de dichas cargas ni siquiera si se encontraban distribuidas en algún tipo de material. Sin necesidad de abordar la causa, sabemos que ciertos materiales (cerámicos, plásticos, vidrios, ...) son aislantes, es decir, no conducen la electricidad, mientras que otros son muy buenos conductores (metales) o presentan conductividad intermedia (semiconductores)<sup>1</sup>.

#### 4.1.1. Modelización de un conductor

A partir de lo visto hasta ahora, podemos modelizar un conductor suponiendo que cumple las siguientes condiciones:

- $E = 0$  en el interior de un conductor.

En lo desarrollado hasta ahora, recordemos que siempre hemos considerado que las cargas están en reposo. Para que esto ocurra, necesariamente debe existir una condición de equilibrio en el conductor que, si se encuentra cargado, solo será posible si la carga se ha acumulado en la superficie. Apoyémonos en la Fig. 4.1 para entender este proceso. Si el conductor se encuentra cargado, significa que un cierto campo eléctrico  $E_0$  ha inducido la carga, haciendo que esta se acumule en la superficie. En el interior del conductor se genera obviamente un campo eléctrico,  $E_1$ , debido a la acumulación de cargas positiva y negativa a ambos lados del conductor. Si el conductor es perfecto (y así lo consideraremos), dicho campo presenta la misma dirección, igual magnitud y sentido contrario que el campo original que indujo la carga. Por tanto, el campo neto en el interior del conductor es, efectivamente, nulo.

---

<sup>1</sup>Las propiedades eléctricas las determina el tipo de enlace atómico que tiene lugar entre los átomos que componen el material. En el enlace metálico los electrones de cada átomo conforman una *nube electrónica* que rodea a los núcleos, empaquetándolos. En este caso, al no quedar los electrones ligados al propio enlace en los metales, éstos se pueden mover libremente. Por contra, en los enlaces iónico y covalente los electrones actúan como medio de enlace entre átomos, quedando de esta forma ligados o parcialmente ligados a la propia estructura del material.

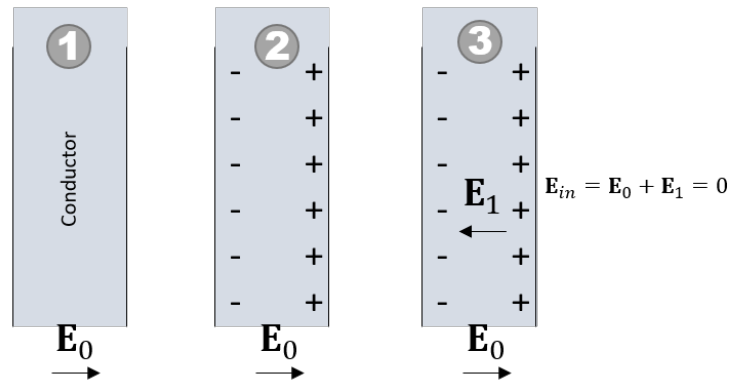


Figura 4.1: Proceso de inducción de carga en un conductor. Aunque sea un proceso prácticamente instantáneo, podemos entender que (1) un cierto campo  $\mathbf{E}_0$  induce una carga sobre el conductor, de forma que, cuando se alcanza el equilibrio, (2) ésta queda distribuida en la superficie con cargas opuestas a cada lado. (3) Dicha distribución de carga superficial genera igualmente un campo eléctrico en el interior del conductor (igual y de sentido opuesto al  $\mathbf{E}_0$ , de forma que el campo en el interior del conductor es nulo.

- $\rho(\vec{r}) = 0$  en el interior del conductor.  
Si aplicamos la ley de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , para  $\mathbf{E} = 0$ , necesariamente  $\rho = 0$ .
- El conductor es equipotencial  
Otra consecuencia de que  $\mathbf{E}$  sea nulo en el conductor es que dos puntos cualesquiera del mismo siempre tendrán el mismo potencial.
- El vector de campo eléctrico siempre será perpendicular la superficie del conductor.  
Al igual que en la primera condición, esta debe darse para que la carga permanezca en reposo y distribuida a lo largo de la superficie (que impide que se mueva).
- Si existe una cierta distribución de carga en las proximidades de un material conductor descargado, ésta hará que el material quede cargado.

Es lo que se conoce como carga inducida. En la Fig. 4.2 se muestran dos ejemplos. La presencia de la carga en la proximidad del conductor atrae (o repele) los portadores de carga a la superficie del material. Un caso particular es cuando la carga se encuentra envuelta por un conductor que presenta una cierta cavidad. En ese caso, el campo no será nulo en el interior de la cavidad. Sin embargo, dentro del conductor el campo seguirá siendo nulo.

## 4.2. Medios dieléctricos

Los medios dieléctricos (también llamados aislantes) son aquellos cuya capacidad de conducir la electricidad es muy limitada (prácticamente nula). A pesar de ello, como vamos a ver, la presencia de un campo eléctrico puede variar las propiedades del material.

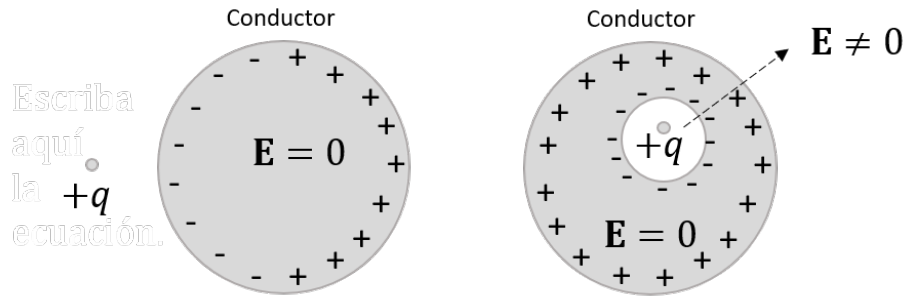


Figura 4.2: Esquema de la carga inducida por una distribución puntual de carga sobre un medio conductor.

### 4.2.1. Polarización

Sin entrar en profundidad en los detalles, a pesar de que la carga neta de un medio dieléctrico sea nula si pueden existir distribuciones de carga locales en su interior. Básicamente, si consideramos que el medio está compuesto por moléculas, estas podrán tener distribuciones de carga asimétricas que las doten de cierta polaridad. Por otro lado, en presencia de un campo eléctrico, cada una de las moléculas (incluso si su distribución de carga es simétrica), tenderá a *alinearse* en la dirección de las líneas del campo eléctrico. En tal caso, podemos modelizar el material dieléctrico como si cada una de esas moléculas fuese un dipolo y diremos que el material está polarizado<sup>2</sup>.

Con este modelo, si consideramos una pequeña región del espacio  $V_m$  que contenga exclusivamente una molécula (o dipolo), entonces el momento dipolar de dicha región se puede expresar como

$$\vec{p}_m = \iiint_{V_m} \vec{r}\rho(\vec{r})dV. \tag{4.1}$$

Si la distribución de dipolos fuese discreta en una región del espacio  $\Delta V$ , tenemos que el momento dipolar total será

$$\vec{p} = \sum_m \vec{p}_m, \quad \forall m \in \Delta V \tag{4.2}$$

y, si consideramos la distribución de dipolos continua, quedaría

$$\vec{p}_m = \iiint_{\Delta V} \vec{r}\rho(\vec{r})dV. \tag{4.3}$$

Definimos la polarización de un medio dieléctrico como la densidad de momento dipolar por unidad diferencial de volumen, esto es

<sup>2</sup>Si bien nos interesan los efectos a escala macroscópica, resulta conveniente usar un modelo de moléculas polarizadas para comprender este fenómeno

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \quad (4.4)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mathbf{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \quad (4.5)$$

En la práctica, existen distintos tipos de materiales según su polarización como, por ejemplo, los dieléctricos polares que tienen cierta polarización local en ausencia de campo eléctrico, aunque su polarización neta es nula debido a la orientación aleatoria de las moléculas. También están los materiales ferroeléctricos que presentan polarización a escala macroscópica aún en ausencia de campo eléctrico externo. Dicho esto, a partir de ahora nos centraremos en estudiar los materiales dieléctricos polarizados sin tener en cuenta la naturaleza de su polarización.

#### 4.2.2. Campo eléctrico en el exterior de un medio polarizado

Si tenemos un cierto medio polarizado, el vector de polarización es, en cierto modo, similar al momento dipolar de la distribución espacial del medio. Es decir, si se tiene un cierto volumen de un medio polarizado,  $\Delta V_{medio}$ , localizado en coordenadas  $\vec{r}$ , entonces el momento dipolar de dicha distribución será

$$\Delta \vec{p} = \mathbf{P}(\vec{r}) \Delta V_{medio}. \quad (4.6)$$

Si consideramos un cierto punto del espacio, localizado en  $\vec{r}_0$ , lo suficientemente alejado del medio material, éste puede considerarse como un único dipolo de momento dipolar  $\Delta \vec{p}$ . Recordando la fórmula obtenida en el capítulo anterior (Ec.(3.59), tendríamos que

$$\Delta U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}) \Delta V}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad (4.7)$$

Por otro lado, podemos calcular el potencial debido a un trozo finito del medio polarizado en cualquier punto exterior a éste aplicando el principio de superposición

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_{medio}} \frac{\mathbf{P} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dV \quad (4.8)$$

Para poder interpretar mejor el resultado de la integral anterior, es conveniente usar algunas de las identidades que vimos en capítulos anteriores. Por un lado tenemos que

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \quad (4.9)$$

Por otro lado, recordando la sección 2.6, tenemos la identidad matemática  $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\nabla f)$ . Donde podemos identificar  $\mathbf{F} = \mathbf{P}$  y  $f = 1/|\vec{r}_0 - \vec{r}|$ . Por tanto, podemos reescribir la expresión anterior como

$$\mathbf{P} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} = \nabla \cdot (|\vec{r}_0 - \vec{r}|^{-1} \mathbf{P}) - |\vec{r}_0 - \vec{r}|^{-1} \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.10)$$

Si sustituimos en la ecuación del potencial, nos queda

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_{medio}} \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \nabla \cdot \mathbf{P} \right) dV. \quad (4.11)$$

Como se observa, el potencial se puede separar en dos contribuciones. En la primera de ellas es posible aplicar el teorema de la divergencia, de forma

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_{medio}} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} - \iiint_{V_{medio}} \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} \nabla \cdot \mathbf{P} dV. \quad (4.12)$$

Por tanto, el potencial en el exterior de un medio dieléctrico polarizado se puede expresar como la contribución de dos distribuciones de carga. Por un lado, una distribución superficial tal que

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_s, \quad (4.13)$$

donde  $\hat{u}_s$  sería el vector unitario perpendicular en cada punto a la superficie de integración  $S_d$ , y una cierta distribución volumétrica de carga dada por

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (4.14)$$

Mediante esta interpretación, podemos reescribir el potencial como

$$U(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_{medio}} \frac{\sigma_P}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dS + \iiint_{V_{medio}} \frac{\rho_P}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dV. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico debido a la presencia del medio polarizado vendrá dado por <sup>3</sup>

$$\mathbf{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S_{medio}} \frac{\sigma_P (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dS + \iiint_{V_{medio}} \frac{\rho_P (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dV. \quad (4.16)$$

Nótese que siempre que la polarización sea constante en el medio material tendremos que  $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  y, por tanto, solo habrá contribución debida a la carga superficial.

<sup>3</sup>Este se puede deducir simplemente por analogía con las ecuaciones del capítulo anterior

### 4.2.3. Carga neta debida a polarización

En condiciones electrostáticas, en un medio polarizado la carga neta total es nula. Es decir, la suma de la carga total en la superficie del medio y la carga total en su volumen es cero. Demostremoslo:

$$Q_{neta} = \oiint \sigma_p dS + \iiint \rho_p dV.$$

Sustituyamos las ambas cargas en función del vector de polarización

$$Q_{neta} = \oiint \mathbf{P} \hat{u}_S dS - \iiint (\nabla \cdot \mathbf{P}) dV. \quad (4.17)$$

Por un lado, en la integral de superficie tenemos que  $\hat{u}_S dS = d\mathbf{S}$ . Por otro, podemos aplicar el teorema de la divergencia en la integral de volumen y, por tanto, se obtiene que

$$Q_{neta} = \oiint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} - \oiint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (4.18)$$

Para que esto se cumpla pueden darse varios casos. Por un lado, si la polarización en el medio es constante, tendremos que  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ . Lógicamente, debe darse que la carga superficial total sea nula. En el fondo, ambas condiciones son equivalentes. Si la polarización es constante dicho vector mantendrá su dirección en todo el material. Si nos fijamos, la integral de superficie de la Ec.(4.18) es el flujo del vector de polarización en la superficie que encierra el material. Dada una polarización constante, el número de líneas de campo que entran es igual al número de líneas de campo que salen de dicha superficie o, lo que es lo mismo, se produce un flujo nulo.

Si la polarización no es constante, entonces la carga total debida a polarización en el volumen debe compensar a la carga total en superficie para que se cumpla la Ec.(4.18). Esto ocurre, básicamente, cuando se tienen cargas encerradas en el interior de un medio dieléctrico. En ese caso, aparecen cargas en volumen en el medio dieléctrico, localizadas en la misma posición de la carga embebida y de signo contrario a la misma, que compensan la carga total en superficie.

### 4.2.4. Susceptibilidad eléctrica

De lo visto en la sección anterior podemos entender que la polarización requiere que exista un cierto campo eléctrico. A su vez, la propia polarización del material genera un campo eléctrico, de forma que resulta complicado establecer una relación causa-efecto (¿es la polarización causa del campo eléctrico o efecto del mismo, y viceversa?) debido a la ligadura existente. Típicamente se suele entender que, dado un cierto material dieléctrico polarizado, parte del campo eléctrico es debido a causas externas y otra parte es debida a la propia polarización,  $\mathbf{E} = E_{ext} + E_d$ , donde  $E_d$  es el campo propio generado por los dipolos del material y que se conoce típicamente como campo despolarizante. Recibe este nombre ya que, debido a la orientación de los dipolos, va en sentido contrario al campo eléctrico externo.

Sea como fuere, se podrá establecer una relación vectorial entre el campo eléctrico y la polarización que, lógicamente, dependerá de las propiedades del medio dieléctrico. Conocidos el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la polarización  $\mathbf{P}$ , deberá existir un tensor tal que

$$\mathbf{P} = \bar{\chi} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (4.19)$$

donde  $\bar{\chi}$  es la permitividad eléctrica del material, dada en general por

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Recordemos que  $\varepsilon_0$  es la llamada susceptibilidad eléctrica del vacío.

Dependiendo del tipo de material, el tensor de susceptibilidad eléctrica presenta distintas propiedades:

**1. Material isotrópico**

Los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$  son paralelos de manera que el tensor  $\bar{\chi}$  que los relaciona se convierte constante de proporcionalidad.

**2. Material lineal**

$\bar{\chi}$  no depende del módulo del campo eléctrico.

**3. Material homogéneo**

El tensor  $\bar{\chi}$  es siempre el mismo en el interior del material.

Una gran cantidad de materiales presentan las tres propiedades anteriores, es decir, son isotrópicos, lineales y homogéneos, de forma que la relación entre la polarización y el campo eléctrico es sencilla:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (4.21)$$

### 4.3. El desplazamiento eléctrico: Ley de Gauss generalizada

Como hemos visto, empleando el modelo de dipolos para los medios dieléctricos, tanto el campo eléctrico como la polarización quedan estrechamente ligados. Si pensamos en distribuciones de carga, podemos separar la distribución de carga en presencia de un dieléctrico como la suma de la carga propia debido a la polarización del medio ( $\rho_P$ ) y cualquier otra carga que pueda estar presente y no sea propia al dieléctrico ( $\rho_{ext}$ ). Es decir,

$$\rho = \rho_P + \rho_{ext}. \quad (4.22)$$

Los términos  $\rho$  y  $\rho_p$  están relacionados con el campo eléctrico. Por un lado,  $\rho_p$  se puede expresar como la divergencia de la polarización en negativo (Ec. (4.14)). Si el medio es isotrópico, lineal y homogéneo, será también proporcional a la divergencia del campo eléctrico. Por otro, sobre la carga total se puede aplicar la ley de Gauss (Ec. 3.44). Tendríamos por tanto que

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{ext} \quad (4.23)$$

que podemos reescribir en la forma

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{ext}. \quad (4.24)$$

Es fácil ver que la expresión anterior no es más que la ley de Gauss generalizada, teniendo en cuenta la posible presencia de un medio dieléctrico. Como es de esperar, si no existe polarización se recupera la ley de Gauss en el vacío.

Ahora bien, si analizamos la Ec. (4.24) vemos que podemos definir un nuevo campo vectorial, al que llamaremos desplazamiento eléctrico, el cual permite simplificar la expresión de la ley de Gauss a:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext}. \quad (4.25)$$

donde el llamado desplazamiento eléctrico viene dado por

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (4.26)$$

Al igual que la ley de Gauss en el vacío, es posible reformular la ecuación en forma integral, de manera que

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{ext}, \quad (4.27)$$

siendo  $Q_{ext}$  la carga total externa al dieléctrico que queda dentro del volumen de la superficie cerrada.

Nótese que la ley de Gauss puede expresarse igualmente de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon}.$$

### 4.3.1. Vector de desplazamiento en medios isótropos, lineales y homogéneos

A partir de lo visto en las últimas dos secciones, es posible reescribir el vector de desplazamiento en medios isótropos, lineales y homogéneos de la siguiente forma

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (4.28)$$



Si, además, definimos la permitividad eléctrica del medio dieléctrico como  $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$ , el desplazamiento eléctrico queda expresado simplemente como

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (4.29)$$

Ahora podemos entender que a  $\varepsilon_0$  le llamemos la permitividad del vacío. En el vacío la susceptibilidad es nula y, por tanto, nos quedaría dicha constante.

*Comentario:* Cabe destacar que en algunos textos se le llama erróneamente constante dieléctrica al término  $\varepsilon$ . La constante dieléctrica se define a partir de la permitividad como

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \quad (4.30)$$

y es un valor relativo que carece de dimensiones. De esta forma, la constante dieléctrica del vacío es uno y todos los materiales tendrán una constante dieléctrica mayor a la unidad.

#### 4.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos

La definición de potencial sigue siendo exactamente igual en presencia de cargas en medios dieléctricos y, por tanto, se mantiene la relación

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (4.31)$$

Consecuentemente, también se cumplirá la ecuación de Poisson que vimos en el capítulo anterior, con la particularidad de que la permitividad ahora es la del medio dieléctrico, es decir

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (4.32)$$

Y, recordando que la ecuación de Laplace es el caso particular en el que no hay cargas, quedaría exactamente igual que en el vacío, esto es

$$\Delta U = 0. \quad (4.33)$$

#### 4.5. Condiciones de frontera: Campos en la interfase de dos medios

Una vez introducidos los medios materiales (tanto conductores como aislantes) es necesario estudiar el comportamiento de los campos (tanto el campo eléctrico como el desplazamiento) y del potencial en la interfase de dos medios. Como veremos, dicho comportamiento se puede describir a través de leyes sencillas.

### 4.5.1. Desplazamiento eléctrico en la interfase

Consideremos que se tienen dos medios que ocupan un cierto volumen del espacio que se encuentran en contacto. Podemos aplicar la ley de Gauss a una superficie que contenga un cierto volumen de ambos medios. Por simplicidad, consideremos el esquema de la Fig. 4.3 en el que la interfase se supone plana. Además, tomamos como superficie de integración un cilindro con las bases paralelas a la interfase y centrado en la misma.

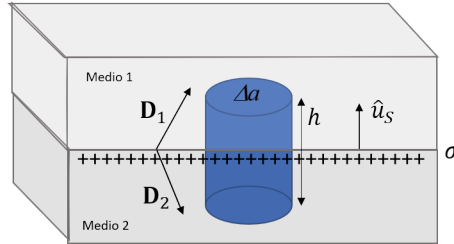


Figura 4.3: Esquema de la interfase entre dos medios.

Suponiendo que el área de las bases es  $\Delta a$  y que la altura del cilindro es  $h$ , tendríamos que

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{ext}, \quad (4.34)$$

que, aplicando el principio de superposición, queda como

$$\oint_S (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \cdot d\mathbf{S} = Q_{ext}, \quad (4.35)$$

Si suponemos que hay cargas externas al dieléctrico, tanto en volumen como en superficie, tendríamos que la carga externa total será la suma de la carga en superficie y la carga en volumen. Suponiendo una densidad de carga superficial en la interfase igual a  $\sigma$  y una densidad de carga en volumen  $\rho_1$  y  $\rho_2$  para los medios 1 y 2, respectivamente, es fácil ver que la carga total vendrá dada por

$$Q_{ext} = \sigma \Delta a + (\rho_1 + \rho_2) h / 2 \Delta a. \quad (4.36)$$

Si queremos considerar exclusivamente la interfase, deberíamos tomar el límite en el cual la altura del cilindro es despreciable, es decir, tomamos  $h \rightarrow 0$ . En tal caso la carga externa al dieléctrico será

$$Q_{ext} = \sigma \Delta a. \quad (4.37)$$

Por otro lado, del producto escalar de la integral cerrada solo quedarán las componentes del desplazamiento que sean paralelos al vector normal a la interfase. Si llamamos  $D_{i,n}$ , con  $i = 1, 2$ , a las componentes normales del vector desplazamiento eléctrico, nos quedaría

$$\oint_S (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \cdot dS \hat{u}_S = (D_{1,n} - D_{2,n}) \Delta a. \quad (4.38)$$

Nótese que, si existe cierta distribución de carga superficial en la interfase, ésta es una fuente de campo eléctrico. Por tanto, tanto el campo eléctrico como el desplazamiento tendrán sentidos opuestos a ambos lados de la interfase.

Si igualamos la ecuación anterior a la carga total externa, nos queda

$$D_{1,n} - D_{2,n} = \sigma. \quad (4.39)$$

Es decir, la resta de las componentes normales del desplazamiento en la interfase es igual a la densidad de carga superficial externa al dieléctrico. Podemos particularizar para los siguientes casos:

■ **En ausencia de cargas externas:**

En tal caso,  $\sigma = 0$  y, por tanto, las componentes normales tanto del desplazamiento son iguales a ambos lados de la interfase:

$$D_{1,n} = D_{2,n} \quad (4.40)$$

Además, si suponemos medios lineales, isótropos y homogéneos, las componentes normales del campo eléctrico tendrán la siguiente relación:

$$\varepsilon_1 E_{1,n} = \varepsilon_2 E_{2,n} \quad (4.41)$$

■ **Interfase dieléctrico-conductor**

El campo eléctrico en el interior del conductor es nulo, por tanto, suponiendo que el conductor es el segundo medio, nos queda

$$D_{1,n} = \sigma \quad (4.42)$$

## 4.5.2. Componente paralela del campo eléctrico en la interfase

Ya hemos visto la relación que tiene la componente normal del desplazamiento eléctrico en la interfase de dos medios. Resulta de interés estudiar lo que ocurre con la componente paralela a la superficie del campo eléctrico, también llamada componente tangencial.

Dado que el campo eléctrico es conservativo, la integral a lo largo de un lazo cerrado,  $L$ , debe ser nula (esto se conoce como la segunda ley de Kirchhoff)<sup>4</sup>. Matemáticamente lo expresaríamos como

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4.43)$$

<sup>4</sup>Esta ley se demuestra a partir de las tensiones en un circuito, que veremos en el siguiente capítulo. Es, básicamente, una consecuencia de la conservación de la energía

Cabe decir que la ecuación anterior es cierta siempre y cuando no existan posibles fuentes secundarias del campo eléctrico <sup>5</sup>.

Es fácil ver que, si se sigue el esquema de la Fig. 4.4, la suma de las integrales de los campos en cada tramo del lazo cerrado debe ser nula, es decir

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \mathbf{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4.44)$$

Si queremos considerar solo el campo en eléctrico en la interfase, debemos tomar el límite en el cual  $h \rightarrow 0$ . Es posible considerar que, en dicho límite, las puntos  $A$  y  $D$  serán iguales, y lo mismo sucede para  $B$  y  $C$ . Por tanto, las integrales correspondientes a los tramos  $\overline{DA}$  y  $\overline{BC}$  se anularán.

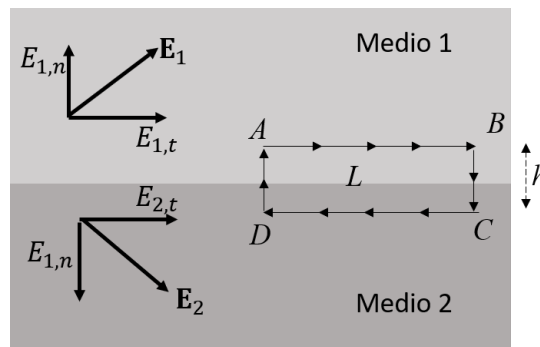


Figura 4.4: Esquema de la integral a lo largo de un lazo cerrado en la interfase de dos medios.

Con la consideración anterior, tendríamos la suma de las integrales del campo eléctrico a lo largo de los dos tramos paralelos a la interfase

$$\int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_C^D \mathbf{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4.45)$$

Lógicamente, el desplazamiento diferencial a lo largo de la línea será igualmente paralelo a la interfase y, por tanto, el producto escalar con el campo eléctrico anulará todas las componentes de este excepto la componente paralela. Asimismo, el sentido del diferencial de desplazamiento es opuesto en los tramos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  y, por tanto, cambiará el signo de la componente paralela. Dicho esto, obtendríamos la siguiente expresión

$$E_{1,t} - E_{2,t} = 0, \quad (4.46)$$

o, lo que es lo mismo

$$E_{1,t} = E_{2,t}. \quad (4.47)$$

Por tanto, la componente paralela del campo eléctrico debe ser continua en la interfase.

<sup>5</sup>Nos referimos en este caso a campos magnéticos dinámicos. Dicho caso lo veremos en capítulos posteriores.

### 4.5.3. Reglas sobre los campos en la interfase

Concluimos que en la interfase de dos medios dieléctricos se deben cumplir dos reglas básicas (siempre que no existan fuentes secundarias de campo eléctrico como cargas externas o campos magnéticos dinámicos):

- La componente normal del vector de desplazamiento es continua en la interfase y, por tanto, al pasar de un medio a otro ( $D_{1,n} = D_{2,n}$ ).
- La componente paralela del campo eléctrico es continua en la interfase y, por tanto, al pasar de un medio a otro ( $E_{1,t} = E_{2,t}$ ).

### 4.5.4. Conclusiones sobre el campo en la interfase de dos medios

Cabe recordar que, en la primera condición ( $D_{1,n} = D_{2,n}$ ) la magnitud de la componente normal del campo eléctrico no se conserva al pasar de un medio al otro. Es decir, si empleamos la expresión en términos del campo eléctrico tenemos que  $\varepsilon_1 E_{1,n} = \varepsilon_2 E_{2,n}$ . Por otro lado, hemos visto que si la interfase es entre un dieléctrico y un conductor, entonces tendremos la expresión  $D_{1,n} = \sigma$ . Es decir, si un conductor con una cierta carga superficial (recordemos que en electrostática es el único tipo de carga que puede presentar un conductor) esta en contacto con un dieléctrico, la componente normal del campo eléctrico, en la región de contacto y en el interior de éste, será proporcional a la carga del conductor. Expresado en términos del campo eléctrico nos quedaría  $E_{1,n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ , siendo  $\varepsilon$  la permitividad del dieléctrico.

#### Comentario:

Hagamos un breve inciso para poder apreciar la relevancia de las condiciones obtenidas, aunque debemos hacer ciertas suposiciones algunas de las cuales se verán más adelante en este curso. Supongamos que un haz de luz presenta una cierta componente de campo eléctrico<sup>6</sup> y éste se encuentra en la interfase de dos medios dieléctricos. Si imponemos las condiciones anteriores, es decir, que la componente normal del vector de desplazamiento y la componente tangencial del campo eléctrico han de conservarse y el haz incide con un cierto ángulo, tendríamos que deben cumplirse ambas condiciones, es decir

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 E_{1,n} &= \varepsilon_2 E_{2,n} \\ E_{1,t} &= E_{2,t}\end{aligned}$$

A partir de estas condiciones y, teniendo en cuenta que el índice de refracción de un medio es igual a  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ , siendo  $\mu$  la permeabilidad magnética (que veremos más adelante), se puede obtener la conocida ley de Snell de la refracción.

<sup>6</sup>Como es comúnmente sabido, la luz es una onda electromagnética cuya forma, de hecho, se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell

## 4.6. Comportamiento de los conductores y dieléctricos frente a cargas y campos eléctricos

De lo visto hasta ahora y, mediante los modelos empleados de conductor y dieléctrico, podemos llevar a cabo el siguiente razonamiento: Los conductores y los dieléctricos tienen comportamientos *opuestos* frente a cargas y campos eléctricos.

Por un lado, los conductores quedan cargados superficialmente en presencia de una cierta carga (o, lo que es lo mismo, de un campo eléctrico), pero el campo eléctrico en su interior es nulo. Si por un momento dejamos de pensar en electrostática, los conductores permiten el libre movimiento de cargas en su interior. Ahora bien, una vez la carga se encuentra en equilibrio, un campo eléctrico nunca atravesará el medio conductor. Por otro lado, en el interior de los dieléctricos el campo eléctrico se puede transmitir (gracias a la polarización de los dipolos que lo componen). Sin embargo, las cargas no pueden circular en su interior, de ahí que los dieléctricos sean aislantes eléctricos.

## 4.7. Energía potencial electrostática en presencia de medios materiales

En el capítulo anterior introdujimos el concepto de energía potencial electrostática. En esta sección estudiaremos dicha energía para un caso general en el cual tenemos un cierto medio dieléctrico y un conductor cargado. Para estudiar este caso, pensemos en el esquema de la Fig. 4.5. En este caso, tendremos dos términos para la energía potencial: uno para la distribución de carga en volumen dentro del dieléctrico,  $\rho$ , y otro para la distribución de carga en la superficie del conductor,  $\sigma$ . Teniendo esto en cuenta, la energía potencial electrostática se puede escribir como la suma de ambas contribuciones, esto es

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho U dV + \frac{1}{2} \iint_{S_c} \sigma U dS. \quad (4.48)$$

donde  $S_c$  es la superficie del conductor y  $V$  el volumen en el cual existe una densidad de carga volumétrica. Para poder simplificar en pasos posteriores esta fórmula, es posible realizar la siguiente consideración. La densidad de carga en volumen es una cierta función  $\rho(\vec{r})$  existe solo en el volumen  $V$  y, por tanto, la podríamos escribir de la siguiente manera

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & \text{si } \vec{r} \in V \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$

De esta forma, podemos tomar la integral en volumen como la integral en un volumen infinito, es decir, en todo  $\mathbb{R}^3$ . Si, además, aplicamos las relaciones entre las cargas y el desplazamiento eléctrico, podemos escribir la integral como

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} U(\nabla \cdot \mathbf{D}) dV + \frac{1}{2} \iint_{S_c} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS. \quad (4.49)$$

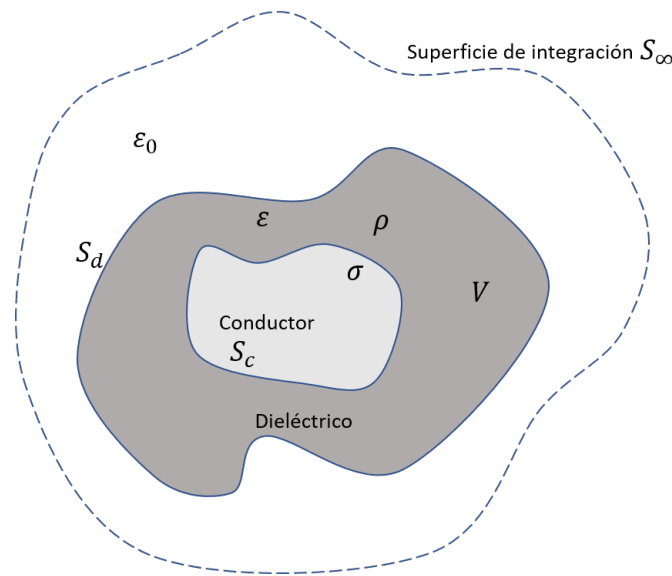


Figura 4.5: Caso general para el cálculo de la energía potencial en presencia de un conductor y un dieléctrico.

Ahora tendremos en cuenta la identidad que vimos en el Capítulo 2,  $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}\nabla f$ , de forma que podemos escribir

$$U\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (U\mathbf{D}) - \mathbf{D}\nabla U, \quad (4.50)$$

que, además, teniendo en cuenta que  $\mathbf{E} = -\nabla U$ , la energía potencial electrostática queda como

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (U\mathbf{D}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV + \frac{1}{2} \iint_{S_c} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS. \quad (4.51)$$

Nótese que, en el interior del conductor, tanto  $\mathbf{D}$  como  $\mathbf{E}$  serán nulos. Apliquemos el teorema de la divergencia al primer sumando

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (U\mathbf{D}) dV = \oiint_A U\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.52)$$

Si empleamos la propia definición de divergencia, podemos dividir la parte de la integral de superficie en dos. Queremos tener en cuenta exclusivamente la carga en volumen y no la carga superficial del conductor. Recordemos que la propia integral proviene de la densidad de carga superficial. Por tanto, para calcular exclusivamente dicha contribución podemos, por ejemplo, tomar la superficie de una esfera cuyo radio tiene a infinito ( $S_\infty$ ) y le restaremos la contribución de la superficie del conductor tomando una superficie que englobe a éste. Es decir

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (U\mathbf{D}) dV = \iint_{S(R \rightarrow \infty)} U\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_c} U\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.53)$$

Ahora sustituimos en la ecuación de la energía potencial para obtener

$$W = \frac{1}{2} \left( \iint_{S_\infty} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS - \iint_{S_c} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS + \iiint_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV + \iint_{S_c} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS \right). \quad (4.54)$$

que, finalmente, resulta en la siguiente expresión

$$W = \frac{1}{2} \left( \iint_{S_\infty} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS + \iiint_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV \right). \quad (4.55)$$

Es decir, se puede generalizar la energía potencial de una determinada distribución de carga superficial y en volumen en presencia de un material dieléctrico y un conductor como la suma de las integrales anteriores en todo el espacio. Obviamente, habrá que tener en cuenta las condiciones de contorno en cada caso. Por ejemplo, en el interior del conductor  $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$ . Además, las componentes de los campos deben cumplir las reglas vistas en el apartado anterior cuando pasen de un medio a otro.

En la ecuación anterior, podemos hacer la siguiente aproximación. Si consideramos que tanto el potencial como el desplazamiento son constantes en la superficie de integración, la integral de superficie se podría escribir como

$$\iint_{S_\infty} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS = U(R)D(R)4\pi R \Big|_{R \rightarrow \infty} \quad (4.56)$$

Recordemos que, aplicando la ley de Gauss, se obtenía que

$$\begin{aligned} U(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \\ D(R) &= \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

y, por lo tanto, la Ec. (4.56) queda como

$$\iint_{S_\infty} U(\mathbf{D} \cdot \hat{u}_S) dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \Big|_{R \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.58)$$

Con esto, llegamos a la sencilla ecuación para el cálculo de la energía potencial en presencia de medios (tanto conductores como dieléctricos)

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV. \quad (4.59)$$



La ecuación anterior se puede interpretar considerando que la energía total de un sistema es la suma de las energías de cada elemento diferencial de volumen. Podríamos escribirla en función del elemento diferencial de energía potencial como

$$dW = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})dV \quad (4.60)$$

De esta forma, podemos interpretar que la densidad de energía (por unidad de volumen),  $w$ , del sistema viene dada por

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}). \quad (4.61)$$

#### 4.7.1. Energía potencial en medios lineales, isotrópicos y homogéneos

Si la Ec.(3.86) es cierta para medios dieléctricos en general, obviamente se cumplirá si consideramos medios dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos. En este caso, además, podemos escribir el desplazamiento eléctrico como el campo eléctrico multiplicado por la permitividad del medio y, por tanto,

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3} \varepsilon |\mathbf{E}|^2 dV. \quad (4.62)$$

Por tanto, la densidad de energía en este caso viene dada por

$$w = \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{E}|^2. \quad (4.63)$$

Vemos que, en este caso, la energía en presencia de un campo eléctrico es proporcional al módulo cuadrado de dicho campo.

*Comentario:* El resultado anterior es especialmente relevante en otros campos de la Física como, por ejemplo, la óptica electromagnética. Bajo ciertas aproximaciones, se llega a la misma conclusión: la irradiancia de una onda electromagnética es proporcional al módulo cuadrado del campo eléctrico.

### 4.8. Condensadores eléctricos

Sin entrar de momento en detalles sobre cuál es su función, podemos definir un condensador eléctrico como un sistema formado por dos conductores separados una cierta distancia por, típicamente, un medio dieléctrico de permitividad  $\varepsilon$ .

Aunque, en general, los condensadores pueden tener cualquier forma, estudiemos el caso de interés más práctico en el cual está formado por dos conductores planos paralelos entre sí separados una cierta distancia  $d$ . Además, la carga superficial de uno de ellos, que consideraremos uniforme, será igual en magnitud pero de signo opuesto en el otro. Teniendo esto en cuenta y aplicando la ley de Gauss entre las placas, el campo eléctrico entre las placas conductoras será

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{u}_S \quad (4.64)$$

donde el vector unitario  $\hat{u}_S$  es normal a la superficie de las placas conductoras. Por definición, podemos considerar que la densidad de carga superficial es igual a la carga total,  $Q$ , dividida entre la superficie de las placas,  $A$ , y, por tanto, tendríamos

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon A} \hat{u}_S. \quad (4.65)$$

Podemos calcular la diferencia de potencial eléctrico entre las placas,  $U_{dif} = U_1 - U_2$ , por medio de

$$U_{dif} = - \int_d^0 \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = - \int_d^0 \frac{Q}{\varepsilon A} dx = \frac{Q}{\varepsilon A} d \quad (4.66)$$

donde hemos considerado que la primera placa se encuentra en  $x = 0$  y la segunda en  $x = d$ . Cabe hacer notar que podíamos haber calculado la diferencia entre la segunda y la primera placa. En tal caso, el signo del potencial sería el contrario. Si nos fijamos en la ecuación anterior vemos que todos los parámetros, exceptuando la carga total, dependen del diseño del condensador. Por ello, se define la capacitancia del condensador como dicha relación entre parámetros:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}. \quad (4.67)$$

Es fácil definir la capacitancia para cualquier otra geometría del condensador si tenemos en cuenta la relación entre ésta y la diferencia de potencial. En general, la capacitancia vendrá dada por

$$C = \frac{Q}{U_{dif}}. \quad (4.68)$$

#### 4.8.1. Energía potencial electrostática de un condensador

La energía potencial electrostática en presencia de cargas superficiales se puede calcular como

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U dS \quad (4.69)$$

Teniendo en cuenta que en un condensador tendríamos dos superficies conductoras cargadas, tendríamos

$$W = \frac{1}{2} \left( \iint_{S_1} \sigma_1 U_1 dS + \iint_{S_2} \sigma_2 U_2 dS \right) \quad (4.70)$$

Ahora bien, si consideramos el caso anterior en el cual las placas poseen la misma densidad de carga uniforme y de signo contrario, tendríamos la siguiente expresión

$$W = \frac{1}{2} \left( \iint_{S_1} \sigma U_1 dS - \iint_{S_2} \sigma U_2 dS \right) \quad (4.71)$$

Teniendo en cuenta que el potencial será constante en ambas superficies, que  $S_1 = S_2$  y que  $Q = \int \sigma dS$ , se obtiene la expresión

$$W = \frac{1}{2} Q U_{dif}. \quad (4.72)$$

Esta expresión se puede escribir de distintas formas empleando la definición de capacitancia que podrían ser útiles dependiendo de los datos que conozcamos. Por ejemplo, se podría dejar en función de la capacitancia y la diferencia de potencial

$$W = \frac{1}{2} C (U_{dif})^2 \quad (4.73)$$

o, bien, de la carga y la capacitancia

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (4.74)$$

Nótese que las expresiones anteriores son genéricas para cualquier condensador en el que las cargas sean iguales y de signo opuesto. Si cambiase la geometría, es decir, ya no tuviésemos condensadores planos, cambiaría exclusivamente la fórmula de la superficie que se tiene en cuenta en la capacitancia.

## Ejercicios

- 4.1. Se tiene una barra de un material ferroeléctrico en forma de cilindro de longitud  $L$  y radio  $R$ . Si el material está polarizado en la dirección del eje del cilindro, con una polarización uniforme de magnitud  $P$ , calcula el campo eléctrico en cualquier punto fuera de la barra y en la dirección del eje de la misma.

*Solución:*

Dada la simetría del problema, emplearemos coordenadas cilíndricas. Como la barra está polarizada en la dirección del eje del cilindro, podemos considerar que

$$\mathbf{P} = P\hat{k}.$$

Por tanto, por un lado tendremos que la densidad volumétrica de carga debida a la polarización será nula ya que

$$\rho_p = \nabla \cdot \mathbf{P} = 0.$$

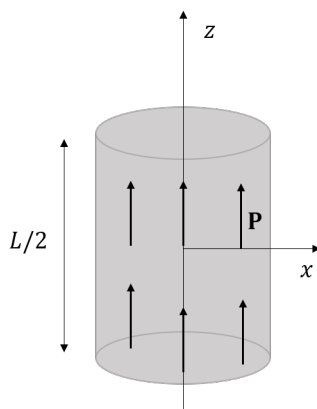


Figura 4.6: Esquema del problema.

Para tener en cuenta la contribución en superficie, se deben considerar cada una de las superficies del cilindro por separado. En las bases del cilindro el vector de polarización será paralelo, teniendo el mismo sentido que el vector unitario de la base para una de ellas y opuesto para la otra. Por otro lado, en la superficie lateral del cilindro el vector normal a la superficie es perpendicular al vector de polarización. Tendremos que

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_s = \begin{cases} P & \text{si } z = L/2 \\ 0 & \text{en la superficie lateral} \\ -P & \text{si } z = -L/2 \end{cases}$$

Por tanto, podemos concluir que la barra se comporta como si tuviésemos dos discos cargados, con cargas  $P$  y  $-P$ , de radio  $R$ , separados una distancia  $L$ .

Recordando el resultado del capítulo 3, el campo eléctrico sobre el eje de un disco viene dado por

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{k}$$

Podemos calcular el campo eléctrico debido a cada uno de los discos y, posteriormente, aplicar el principio de superposición. Por un lado, para puntos del eje por encima de la barra, tendríamos que

$$\mathbf{E}_1(z) = \frac{P}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \hat{k}$$

Por otro lado, para puntos por debajo de la barra

$$\mathbf{E}_2(z) = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \hat{k}.$$

Por tanto, el campo eléctrico en cualquier punto fuera de la barra será  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , es decir

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \hat{k}, \quad |z| > L/2.$$

- 4.2. Una esfera de metal de radio  $a$  y con una carga total  $Q$  está rodeada de un material dieléctrico (isotrópico, lineal y homogéneo) de permitividad  $\epsilon$ . Dicho material mantiene la forma esférica del metal de forma que aumenta su radio hasta una cierta cantidad  $b$ . Encuentra el potencial en el centro de la esfera (relativo al infinito).

*Solución:*

Para poder calcular el potencial necesitamos conocer el campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , y, consecuentemente, el desplazamiento eléctrico.

Recordando el modelo que empleamos para conductores eléctricos, en el interior de la esfera del metal el campo será nulo y, por tanto,

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{P} = 0, \quad \text{para } r < a.$$

Para calcular el desplazamiento eléctrico podemos usar la ley de Gauss generalizada ya que conocemos la carga total de la esfera conductora. Empleando la forma integral dada por la Ec. (4.27), tenemos que

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{ext},$$

donde, si tenemos en cuenta la simetría esférica y que el desplazamiento eléctrico será constante y paralelo al vector de superficie, nos queda que

$$\mathbf{D}4\pi r^2 \hat{u}_r = Q, \text{ para } r > a.$$

Despejando obtenemos la ya de sobra conocida fórmula:

$$\mathbf{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{u}_r, \text{ para } r > a.$$

Para calcular el campo eléctrico basta con emplear la relación:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon},$$

donde la permitividad va a depender de la zona que consideremos. Asumiendo que la esfera se encuentra en el vacío, tendremos que entre el radio de la esfera metálica y el recubrimiento dieléctrico la permitividad será la del dieléctrico, en el exterior será la del vacío. Es decir:

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \hat{u}_r & \text{si } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{si } r > b. \end{cases}$$

Tomando como referencia el infinito, el potencial en el centro de la esfera se puede calcular como la suma de los respectivos potenciales en el espacio, esto es

$$U = - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

lo cual nos lleva a

$$U = - \int_{\infty}^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr,$$

que, resolviendo las integrales definidas, resulta en

$$U = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{\varepsilon a} - \frac{1}{\varepsilon b} \right).$$

4.3. Calcula en el problema anterior las cargas debidas a polarización en el dieléctrico.

Aplicamos la relación entre la polarización del medio, de susceptibilidad  $\chi$ , y el campo eléctrico

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0 \chi Q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{u}_r$$

Las densidades de carga superficiales debidas a polarización (en la superficie interior y exterior del dieléctrico) serán

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_r = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi Q}{4\pi \epsilon b^2}, & \text{en la superficie externa} \\ -\frac{\epsilon_0 \chi Q}{4\pi \epsilon a^2}, & \text{en la superficie interna} \end{cases}$$

- 4.4. Calcula la carga debida a polarización en una esfera uniformemente polarizada de radio  $R$  y polarización  $\mathbf{P}$ .

*Solución:*

Teniendo en cuenta que la polarización es constante en toda la esfera, la carga en volumen debida a polarización será nula también ya que

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0.$$

Por otro lado, dado que la esfera está uniformemente polarizada y, dada la simetría, podremos expresar el vector de polarización de la esfera en cualquier punto de la superficie de la misma como

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_S.$$

Si tomamos uno de los ejes coordenados como referencia, por ejemplo el eje  $z$ , podemos escribir la carga superficial debida a polarización en función del ángulo que forme ésta con respecto al eje en la forma:

$$\sigma_P = P \cos \theta.$$

- 4.5. Un hilo de carga lineal uniforme,  $\lambda$ , se encuentra rodeado por un dieléctrico de manera que se forma un cilindro de radio  $a$ . Calcula el vector de desplazamiento tanto dentro como fuera del dieléctrico.

*Solución:*

Empleemos la ley de Gauss generalizada para calcular el vector de desplazamiento. En su forma integral, la podemos escribir como

$$\oiint_{S_{\text{gauss}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{total}}.$$

Dada la simetría del problema, escogemos una superficie cilíndrica para aplicar la ley de Gauss, de radio  $r$  y altura  $L$ . Con esto, la integral del vector de desplazamiento queda como

$$\oiint_{S_{\text{gauss}}} D dS (\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r) = D(2\pi rL)$$

donde se ha tenido en cuenta que el vector de desplazamiento será perpendicular a las bases del cilindro y, por tanto, no tendrán contribución en la integral. Además, sobre la superficie del cilindro de integración el vector de desplazamiento será uniforme.

Calculemos, por otro lado, la carga total encerrada por la superficie gaussiana de forma cilíndrica, sabiendo que está contenida en el hilo, con densidad de carga lineal  $\lambda$ . Nos queda que

$$Q_{total} = \int_0^L \lambda dl = \lambda L.$$

Sustituimos el resultado de ambas integrales en la ley de Gauss generalizada para obtener

$$D(2\pi rL) = \lambda L.$$

Despejando el vector de desplazamiento y asumiendo que tiene dirección radial se llega a

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{u}_r.$$

Nótese que este resultado vale tanto para el exterior como el interior del medio dieléctrico.

Sin embargo, si quisiéramos calcular el campo eléctrico en el interior del medio dieléctrico a partir del vector de desplazamiento necesitaríamos conocer la polarización. Dado que no sabemos su polarización, no es posible obtener el campo eléctrico a partir del vector de desplazamiento en el interior. A pesar de ello, si asumimos que en el exterior del dieléctrico solo hay vacío, es posible calcular el campo eléctrico sin más que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r, \quad \text{si } r > a.$$

- 4.6. Una carga puntual, de valor  $q$ , está incrustada en el centro de una esfera sólida de un material dieléctrico lineal, isotrópico y homogéneo. Suponiendo que dicho material tiene susceptibilidad  $\chi$  y radio  $R$ , calcula:
- El vector de desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico.
  - La polarización en la esfera.
  - Las densidades de carga debidas a polarización.
  - La carga total en la superficie de la esfera.

Dado que la carga se encuentra en el centro de la esfera dieléctrica, el vector de desplazamiento vendrá directamente dado por



$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r.$$

(a)

A partir de la relación con el campo eléctrico se obtiene que

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(r), \text{ para } r > R$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}(r), \text{ para } r < R.$$

Centrémonos en el interior de la esfera dieléctrica, es decir, en el caso  $r < R$ . El campo eléctrico, en términos de la susceptibilidad del material, queda como

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1 + \chi)r^2} \hat{u}_r.$$

(b)

Una vez conocido el campo eléctrico, podemos calcular la polarización inducida sobre la esfera dieléctrica por la carga puntual. Vendrá dada por

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} = \frac{q\chi}{4\pi(1 + \chi)r^2} \hat{u}_r.$$

(c)

A partir del vector de polarización se pueden obtener las densidades de carga debidas a polarización,  $\rho_P$  y  $\sigma_P$ . Por un lado, tenemos que

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{q\chi}{4\pi(1 + \chi)} \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right).$$

donde, por conveniencia, hemos escrito  $\frac{\hat{u}_r}{r^2}$  en la forma  $\frac{\vec{r}}{r^3}$ . Si recordamos el resultado del apéndice B, la divergencia de este vector da como resultado  $4\pi\delta(\vec{r})$ , siendo  $\delta()$  la función delta de Dirac. Aplicando este resultado, la carga en volumen debido a polarización queda como

$$\rho_P = -\frac{q\chi}{4\pi(1 + \chi)} 4\pi\delta(\vec{r}) = -\frac{q\chi}{(1 + \chi)} \delta(\vec{r}).$$

Como vemos, el resultado obtenido es bastante peculiar. De hecho, es una aparente contradicción. La carga en volumen se localiza exclusivamente en el punto  $\vec{r} = 0$ . Es precisamente en dicho punto en el que se localiza la carga incrustada en la esfera y, lógicamente, el resultado es que solo existe carga en todo el volumen en aquel punto en el que tenemos la carga incrustada. Además, esta carga es de signo contrario a la de la

carga original. De alguna manera, podemos considerar que el material dieléctrico trata de compensar la carga en su interior por medio de una carga despolarizante. Fijémonos también en que, si la susceptibilidad del material fuese muy alta o, lo que es lo mismo, tuviese una alta tendencia a polarizarse en presencia de un campo eléctrico, entonces la magnitud de la carga  $\rho_P$  tendería a ser  $-q$  de manera que la carga en su interior quedase totalmente compensada.

Por otro lado, la carga superficial debida a polarización se puede calcular mediante la expresión

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_S = \frac{q\chi}{4\pi(1 + \chi)R^2}.$$

(d)

Por último, calculemos la carga total en la superficie de la esfera dieléctrica. Aplicando directamente la definición de densidad de carga obtenemos

$$Q_{superficial} = \int \sigma_P dS = \sigma_P(4\pi R^2) = \frac{q\chi}{(1 + \chi)}$$

Comparando este resultado con el valor  $\rho_P$ , obtenemos precisamente lo esperado debido a la simetría del problema, es decir, que la carga total debida a polarización en la superficie es igual a la carga en volumen y de signo contrario. Este resultado se puede interpretar de distintas maneras. Por un lado, al tener una carga puntual en el interior, como dijimos anteriormente, el material intentará compensar esa carga, de manera que se creará una carga en volumen en el mismo punto que la carga puntual y de signo contrario. La capacidad de compensar dicha carga dependerá exclusivamente de la susceptibilidad del material. Por otro lado, podemos interpretarlo de la forma siguiente. Al tener una carga en su centro, se genera una carga superficial debida a polarización en el dieléctrico proporcional a la carga en su interior. Esta carga superficial tenderá a ser compensada por un campo despolarizante que, en última instancia, sería como considerar una carga de signo contrario e igual magnitud a la carga total en la superficie de la esfera.

- 4.7. Se tiene un cubo dieléctrico polarizado de arista  $a$ . Si consideramos que el cubo esta centrado en el origen de coordenadas, la polarización del mismo viene dada por  $\mathbf{P} = k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ , donde  $k$  es un cierto valor constante. Calcula las cargas debidas a polarización y la carga total en el medio.

Calculemos en primer lugar la carga volumétrica debida a polarización

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -k\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}),$$

con lo que se obtiene

$$\rho_P = -k(1 + 1 + 1) = -3k.$$

Por otro lado, la densidad de carga superficial por polarización en una de las caras del cubo será

$$\sigma_{P,cara} = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_S = k(x\hat{i} \cdot \hat{i}) + y(\hat{j} \cdot \hat{i}) + z(\hat{k} \cdot \hat{i}) \Big|_{x=a/2} = \frac{ka}{2}.$$

Una vez tenemos ambas densidades de carga, podemos calcular la carga total como la suma de la carga total en volumen y la carga total en superficie, nos queda que

$$Q_{tot} = \iiint \rho_P dV + \oiint \sigma_P dS.$$

Dado que en superficie solo calculamos una de las caras del cubo, para calcular la carga total la multiplicaremos por seis:

$$Q_{tot} = \iiint \rho_P dV + 6 \oiint \sigma_{P,cara} dS = -3ka^3 + 3ka^3 = 0.$$

Como era de esperar, la carga total debida a polarización es nula.

# Capítulo 5

## Corriente eléctrica: circuitos y magnitudes fundamentales

Como vimos en el capítulo introductorio del curso, el desarrollo de la pila voltaica supuso un gran avance que permitió la fabricación de los primeros circuitos. Gracias a esto, se terminó de desarrollar el electromagnetismo clásico y se pudo estudiar con precisión la interacción entre los distintos campos en presencia de medios materiales. Lo visto hasta ahora durante el curso podría considerarse como una primera etapa del electromagnetismo. Sin la capacidad de crear circuitos, cualquier estudio sobre la electricidad debía considerar que las cargas eran estáticas. Ahora bien, gracias a la capacidad de generar corrientes en un medio conductor mediante una pila, se llegó a una serie de leyes y ecuaciones que tienen en cuenta que las cargas pueden estar en movimiento.

### 5.1. Definición de corriente eléctrica

Podemos definir una corriente eléctrica como la variación de la carga con respecto al tiempo a través de una cierta superficie, es decir

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

Cabe decir que, como hemos venido haciendo, no nos preocuparemos de la naturaleza de dicha variación de carga.<sup>1</sup> Sin necesidad de hablar de electrones o huecos electrónicos, modelizaremos la variación de la carga total con respecto al tiempo como una serie de cargas puntuales positivas que se encuentran en movimiento. Si la corriente resultante a partir de la definición anterior es independiente del tiempo, diremos que dicha corriente es estacionaria.

El sentido de la corriente se establece por convención y, típicamente, consideramos que el sentido de la corriente positivo es aquel en el que se desplazaría una carga positiva.

---

<sup>1</sup>Actualmente sabemos que la variación de la carga y, por ende, las corrientes eléctricas se deben al movimiento de los portadores de carga (electrones o huecos electrónicos en el conductor). Sin embargo, para ser fieles a la propia teoría electromagnética clásica, no introduciremos el concepto de electrón.

## 5.2. Densidades de corriente

A partir de la definición de corriente eléctrica realizada en la sección anterior, pensemos en un caso en el que se tienen  $N$  cargas puntuales positivas idénticas, de carga  $q$ , por unidad de volumen. Dichas cargas se encuentran en movimiento, con una velocidad promedio  $\vec{v}$ . Queremos estudiar la corriente con respecto a una cierta superficie  $S$ . Mediante la propia definición de corriente, podemos deducir que

$$I_{promedio} = \frac{dQ}{dt} = N q(\vec{v} \cdot \hat{u}_S) S \quad (5.2)$$

es decir, la corriente promedio sería debida a un cierto número de cargas promedio que atraviesan la superficie  $S$  por unidad de tiempo. En general, siempre estaremos considerando de alguna forma la corriente promedio y, por tanto, a partir de ahora suprimiremos dicho subíndice. Podemos, por tanto, definir el diferencial de corriente que atraviesa una superficie como

$$dI = \frac{dQ}{dt} = N q(\vec{v} \cdot d\mathbf{S}) \quad (5.3)$$

Esto nos permite definir la densidad de corriente como el vector

$$\mathbf{J} = N q\vec{v} \quad (5.4)$$

de forma que el diferencial de intensidad puede escribirse simplemente como

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.5)$$

### 5.2.1. Densidades de corriente superficiales

Anteriormente hemos asumido que las cargas se podían mover libremente en un cierto volumen. Sin embargo, es posible llegar a expresiones equivalentes si consideramos que las cargas se pueden mover exclusivamente sobre una superficie, por ejemplo, de un cierto conductor. En este caso, si  $N$  es la densidad de cargas por unidad de superficie, la corriente la definiríamos con respecto a un cierto segmento sobre la superficie conductora. Es decir, tendríamos

$$dI = N q\vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5.6)$$

y, en este caso, la densidad de corriente,  $\mathbf{J} = N q \vec{v}$  sería superficial.

### 5.2.2. Corrientes de convección

En esta sección hemos asumido que la variación de la carga se produce por el movimiento de cargas que, si estuviesen en un cierto medio, éste se mantendría estático. Esto es lo que se conoce como corriente de conducción. Sin embargo, dentro de la propia definición de corriente, también es posible considerar el caso en el que las cargas se encuentran estáticas y es el medio el que se mueve. Este caso es el que se conoce como corriente de convección.

Para corrientes de convección la densidad de corriente se puede escribir simplemente como

$$\mathbf{J} = \rho \vec{v}_{medio} \quad (5.7)$$

donde  $\rho$  sería la densidad volumétrica de carga en el medio y  $\vec{v}_{medio}$  su velocidad.

### 5.3. Ecuación de continuidad

A partir de la densidad de corriente, podemos entender que la corriente no es más que el flujo de dicha densidad de corriente a través de la superficie  $S$ , es decir

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.8)$$

Podemos, por tanto, deducir que si la corriente es estacionaria (es decir,  $I(t) = I$ ) entonces la densidad de corriente necesariamente también lo es.

A continuación demostraremos que, si la corriente es estacionaria, se cumple que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.9)$$

Para ello, apliquemos la Ec. (5.8) a una superficie cerrada, de forma que

$$I = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.10)$$

Si aplicamos la definición estricta de corriente, es decir, variación de la carga en volumen, tendríamos que

$$\frac{dQ}{dt} = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.11)$$

Ahora bien, si expresamos la carga total en función de la densidad de carga, nos quedaría

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.12)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.13)$$

Nótese que, en general, la carga será una función de cuatro variables, la posición  $\vec{r} = (x, y, z)$  y el tiempo, por ello aplicamos la derivada parcial. Si aplicamos el teorema de la divergencia a la parte derecha de la ecuación anterior, nos queda

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV. \quad (5.14)$$

Ahora bien, en este punto debemos considerar el criterio del signo de la corriente que hemos definido anteriormente. Si nos fijamos en la ecuación anterior, obviamente la variación de la densidad de carga en el volumen está directamente relacionada con la divergencia de la densidad de corriente. Si aumenta la densidad de corriente en un cierto instante temporal, el flujo a través de la superficie cerrada aumentará y, por tanto, la divergencia será positiva. Sin embargo, según el criterio de signos que hemos definido, esto implicaría que la carga dentro del volumen debe disminuir y, por tanto, la derivada con respecto al tiempo ha de ser negativa. Es decir, la derivada de la densidad de carga con respecto al tiempo y la divergencia de la densidad de corriente tienen signo contrario.

*Comentario:* Nótese que el cambio de signo se debe exclusivamente a la propia definición de corriente que hemos empleado y al criterio de signos. Independientemente del criterio que se emplee, la corriente ha de conservarse y, por tanto, ambos términos deben ser iguales. Ahora bien, si volvemos al inicio de la sección, hubiese bastado con definir la corriente como  $I = -\frac{dQ}{dt}$  para evitar tener que realizar el razonamiento anterior.

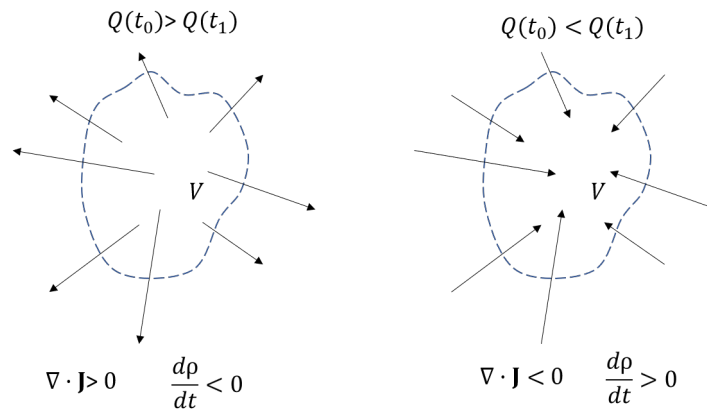


Figura 5.1: Representación del flujo de la densidad de corriente en los casos en que la carga disminuye dentro de volumen (izquierda) y aumenta (derecha) con respecto al tiempo.

Con esto, llegamos a la conocida como ecuación de continuidad eléctrica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{J}), \tag{5.15}$$

más comúnmente escrita de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{5.16}$$

Podemos ver que, si la corriente es estacionaria, entonces la divergencia de la densidad de corriente es nula ( $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ).

## 5.4. Ley de Ohm

Hasta ahora hemos definido la corriente sin preocuparnos de cual es su naturaleza, es decir, simplemente hemos considerado que las cargas están en movimiento y ese movimiento es el

que en última instancia crea la corriente. Sin embargo, en una corriente de conducción, para que dicho movimiento se produzca, necesariamente debe existir un campo eléctrico. De esta forma, podemos considerar que la velocidad promedio de las cargas debe ser proporcional al campo eléctrico que provoca su movimiento, siempre que el material sea lineal, isotrópico y homogéneo. Tendríamos que, en una corriente de conducción, debe cumplirse que

$$\vec{v} \propto \mathbf{E}. \quad (5.17)$$

Por tanto, si volvemos a la definición de densidad de corriente, ésta también ha de ser proporcional a dicho campo, es decir

$$\mathbf{J} \propto \mathbf{E}. \quad (5.18)$$

Podemos, por lo tanto, relacionar el campo eléctrico y la densidad de corriente a través de una constante de proporcionalidad:

$$\mathbf{J} = c \mathbf{E}. \quad (5.19)$$

Dicha constante dependerá exclusivamente de las propiedades material en cuestión.

Existen distintos modelos que nos permiten llegar a la relación anterior y otorgarle un valor a la constante  $c$ . En este caso, emplearemos uno de los más sencillos.

El modelo de Drude-Lorentz es un modelo sencillo que nos permite relacionar la densidad de carga con el campo eléctrico. Si bien es un modelo muy simplista en el que las cargas se consideran esferas que pueden rebotar y cuyos campos no interaccionan entre sí, permite de alguna forma estimar como es la acción del campo eléctrico sobre la densidad de corriente. Si se considera que existe un cierto campo eléctrico,  $\mathbf{E}$  y que se tiene un material con cargas libres (conductor), dichas cargas tenderán a viajar en el sentido de dicho campo eléctrico.

Partiendo de la propia definición de fuerza, cada carga sufrirá la acción del campo eléctrico como

$$\mathbf{F} = m\vec{a} \quad (5.20)$$

siendo  $m$  la masa de la carga. Recordando igualmente la definición de campo eléctrico ( $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ ), obtendríamos que la aceleración promedio de cada carga puntual,  $q$ , por la acción del campo eléctrico es

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{q}{m} \mathbf{E}. \quad (5.21)$$

La velocidad promedio de las cargas se puede expresar como <sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Es cierto que no estamos considerando el efecto de las posibles colisiones entre cargas. Si lo hiciésemos, tendríamos una cierta reducción de la velocidad promedio pero seguiría siendo proporcional a la expresión obtenida.



$$\langle \vec{v} \rangle = \dot{\vec{r}} = \frac{q}{m} \mathbf{E} t. \quad (5.22)$$

Si ahora tenemos en cuenta la definición de la densidad de corriente, llegamos a

$$\mathbf{J} = \frac{Nq^2 t}{m} \mathbf{E} \quad (5.23)$$

Por tanto, empleando este modelo, se llega a que

$$c = \frac{Nq^2}{m} t. \quad (5.24)$$

Esta constante está directamente relacionada con la facilidad que tiene un cierto material para conducir las cargas de su interior debido a la acción de un campo eléctrico. Es por ello que se le denomina conductividad eléctrica.

En realidad, la Ec. (5.19) es la versión generalizada de la archiconocida ley de Ohm para circuitos eléctricos,  $V = IR$ , siendo  $V$  el voltaje,  $I$  la intensidad de corriente y  $R$  la resistencia eléctrica. Consideremos un hilo conductor de forma cilíndrica que tiene una longitud  $l$  y un área de la sección transversal  $A$ . La diferencia de potencial entre los dos extremos del hilo vendrá dada por

$$U_{dif} = \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = E l, \quad (5.25)$$

donde hemos considerado que el campo es uniforme a lo largo del hilo y paralelo a éste. Por otro lado, si existe una cierta densidad de corriente, a través de un corte trasversal del hilo tendremos la siguiente corriente

$$I = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J A, \quad (5.26)$$

donde, siguiendo el cálculo de la diferencia de potencial, la densidad de corriente y el vector normal a la superficie trasversal serán paralelos. Por tanto, obtenemos las siguientes relaciones para el campo eléctrico y la densidad de corriente en el hilo conductor

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{U_{dif}}{l} \hat{u}_z \\ \mathbf{J} &= \frac{I}{A} \hat{u}_z \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde hemos considerado que el hilo se encuentra a lo largo de la dirección del eje  $z$ .

Si sustituimos en la Ec.(5.19), llegamos a la siguiente relación

$$\frac{I}{A} = c \frac{U_{dif}}{l} \quad (5.28)$$

que ordenamos de la siguiente manera:

$$U_{dif} = I \frac{l}{cA}. \quad (5.29)$$

En este punto, definimos la resistividad como la inversa de la conductividad, es decir

$$\eta = \frac{1}{c}. \quad (5.30)$$

La resistividad, por tanto, será una medida de la resistencia a la conducción que presente un cierto material y es independiente del tamaño o forma que tenga éste. Ahora bien, en la Ec.(5.29) aparecen las dimensiones del hilo. Por tanto, si juntamos la resistividad y dichas dimensiones, tendremos una medida de la resistencia a conducción de la porción de hilo considerada. Esto es, precisamente, lo que conocemos como resistencia eléctrica propiamente dicha (sería algo así como la manifestación macroscópica de la resistividad), es decir

$$R = \eta \frac{l}{A} \quad (5.31)$$

Por lo tanto, vemos que a partir de la Ec. (5.19) obtenemos fácilmente la ley de Ohm "macroscópica", esto es

$$U_{dif} = I R \quad (5.32)$$

donde  $U_{dif}$  suele denominarse voltaje en circuitos eléctricos<sup>3</sup>.

## 5.5. Resistencias y condensadores en circuitos

En esta sección recordaremos brevemente dos de los componentes más relevantes en un circuito eléctrico como son las resistencias y los condensadores. Ambos pueden estar conectados entre sí en la misma línea de un hilo conductor sin bifurcaciones, de manera que diríamos que se encuentran conectados en serio. Igualmente, pueden estar conectados por hilos que comparten nodos de corriente, es decir, hilos conductores que comparten la misma diferencia de potencial en sus extremos pero para los cuales la corriente se ha distribuido de manera distinta. Diremos entonces que los elementos están conectados en serie.

### 5.5.1. Resistencias

Es fácil ver que dos resistencias conectadas en serie se pueden reemplazar por una resistencia equivalente igual a la suma de ambas. En general, para  $N$  resistencias en serie tendremos que

$$R_{eq} = \sum_{n=0}^N R_n. \quad (5.33)$$

<sup>3</sup>Nótese que evitamos la denominación V para el voltaje pues reservamos esa letra para los volúmenes.

Si las resistencias están conectadas en paralelo, entonces la diferencia de potencial entre los nodos será la misma. Por otro lado, la corriente total  $I$  se divide en dos corrientes que deben cumplir que  $I = I_1 + I_2$ . Teniendo esto en cuenta, es fácil obtener la resistencia equivalente sin más que

$$I_i = \frac{U_{dif}}{R_i}, \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (5.34)$$

$$I = I_1 + I_2 = U_{dif} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = U_{dif} R_{eq}$$

En general, si se tienen  $N$  resistencias en paralelo éstas se pueden sustituir por la siguiente resistencia equivalente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{R_n} \quad (5.35)$$

### 5.5.2. Condensadores en circuitos

Los condensadores suelen representarse en circuitos por medio de dos líneas paralelas. En el capítulo anterior vimos que la capacitancia se definía como

$$C = \frac{Q}{U_{dif}}, \quad (5.36)$$

siendo  $Q$  la carga total del condensador y  $U_{dif}$  la diferencia de potencial entre las placas. Es fácil ver que, si en un circuito se tienen dos condensadores en serie, se podrían sustituir dichos condensadores por uno equivalente que tuviese en cuenta el efecto de ambos. Llamamos  $U_{dif,i}$  con  $i = 1, 2$  a las diferencias de potencial entre las placas de cada uno de los condensadores. La diferencia de potencial creada en el circuito por ambos será igual a la suma de las diferencias de potencial, esto es,

$$U_{dif} = U_{dif,1} + U_{dif,2} = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (5.37)$$

Considerando la carga total constante, es fácil ver que

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (5.38)$$

y, por tanto, cuando se tengan  $N$  condensadores en serie se pueden sustituir por una capacitancia equivalente que será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{C_n} \quad (5.39)$$

Por otro lado, si los condensadores están en paralelo, la diferencia de potencial entre ambas placas de cada condensador será necesariamente igual. En este caso, si los condensadores no tienen la misma capacitancia la carga debe de ser distinta. Podemos igualmente considerar un condensador equivalente al efecto de ambos ya que

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U_{dif,1} + C_2 U_{dif,2} = C_{eq} U_{dif} \quad (5.40)$$

donde  $C_{eq} = C_1 + C_2$ . Es decir, que para  $N$  condensadores en paralelo, la capacitancia equivalente será

$$C_{eq} = \sum_{n=0}^N C_n. \quad (5.41)$$

## 5.6. La fuerza electromotriz

En este capítulo hemos considerado la capacidad de las cargas para moverse en un cierto medio conductor. Incluso hemos deducido la ley de Ohm a partir de consideraciones sencillas sobre la corriente y su relación con el campo eléctrico. De esta manera, efectivamente, asumimos que una corriente de conducción implica necesariamente la presencia de un campo eléctrico que haga que las cargas se muevan en el medio conductor. Un circuito eléctrico, por propia definición, implica un recorrido cerrado. Como sabemos, tanto para el campo como para la densidad de corriente la integral a lo largo de cualquier trayectoria cerrada son necesariamente nulos

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} &= 0, \\ \oint \mathbf{J} \cdot d\vec{l} &= 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

Sin embargo, si suponemos que una la corriente eléctrica puede fluir en un circuito, las ecuaciones anteriores no se cumplen. Si consideramos un cierto circuito y una determinada densidad de corriente, el vector  $d\vec{l}$  y  $\mathbf{J}$  serán siempre paralelos y no cambiarán sus sentidos, por lo que  $\oint \mathbf{J} \cdot d\vec{l} \neq 0$ .

Obviamente nos está faltando considerar que, para que circule una corriente, se ha de tener un generador de la misma. En ese caso se puede considerar que el campo eléctrico efectivo,  $\mathbf{E}_{ef}$ , sobre los portadores de carga es el resultado de la interacción con un cierto campo electrostático,  $\mathbf{E}$ , y campo electromotriz,  $\mathbf{E}_{em}$ , debido al generador. Es decir, el campo eléctrico efectivo será

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{em}.$$

Expliquémoslo de manera sencilla. Para que se pueda generar una corriente estacionaria en el circuito el campo eléctrico en cada instante de tiempo ha de ser constante. Es decir, la componente electrostática en cada instante no ha de variar. Para ello, es necesario que exista otro

campo eléctrico que genere una diferencia de carga continua entre los extremos del circuito. Si no fuese así, la diferencia de carga entre los extremos del circuito acabaría desapareciendo debido al flujo de portadores de carga. Eso es precisamente lo que haría una pila: mediante un proceso químico es capaz de mantener cargas estáticas de signo opuesto en los extremos del circuito (bornes) de forma que el campo electrostático se mantiene constante y, por tanto, la corriente también. Consideraremos, además, que el campo electromotriz existe solo en el interior de la pila (ver Figura 5.2. Dicho de otra forma, para considerar el proceso químico que genera una cierta diferencia de carga en los bornes de la pila incluimos el campo electromotriz que, simplemente, tendrá el efecto de generar dicha diferencia de carga constante.

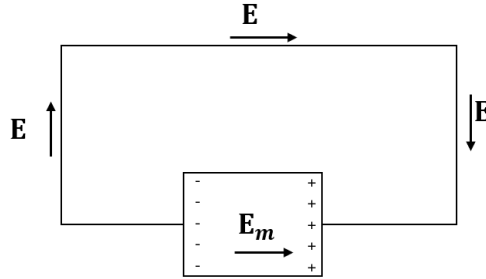


Figura 5.2: Representación del campo eléctrico efectivo en un circuito en presencia de una batería.

Dicho esto, la Ec.(5.42) debe seguir siendo cierta para el campo efectivo, y por tanto

$$\oint \mathbf{E}_{ef} \cdot d\vec{l} = 0. \tag{5.43}$$

lo cual tiene sentido ya que el campo electrostático y el campo electromotriz necesariamente tendrán igual magnitud y sentido contrario.

Llamamos fuerza electromotriz (fem) o, de manera más precisa, voltaje inducido<sup>4</sup> a la siguiente integral

$$\xi_{em} = \int_A^B \mathbf{E}_{em} \cdot d\vec{l}. \tag{5.44}$$

donde  $A$  y  $B$  son los extremos del circuito o, dicho de otra forma, los bornes de la batería. Para que la Ec. (5.43) sea cierta, ha de cumplirse que

$$\xi_{em} = \int_A^B \mathbf{E}_{em} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\vec{l}. \tag{5.45}$$

Recordando la definición de potencial electrostático, el voltaje inducido no será más que

$$\xi_{em} = U_B - U_A = \Delta U, \tag{5.46}$$

<sup>4</sup>Como vemos, la integral resultante es una diferencia de potencial y no una fuerza. Sin embargo, comúnmente se emplea el término fuerza electromotriz.

o, lo que es lo mismo, la fuerza electromotriz es, básicamente, la diferencia de potencial generada por la batería.

Más adelante veremos que dicha fuerza electromotriz no solo puede ser la representación de una pila si no que también puede tener en cuenta la presencia de un campo magnético que varía con el tiempo.

## 5.7. Corrientes en medios sin fuentes

Como hemos visto, es necesario introducir el voltaje inducido para que exista una corriente estacionaria en un circuito cerrado (suponiendo que no existen campos magnéticos variables). Además, el campo generado por la pila existe exclusivamente en su interior. Por tanto, en cualquier punto del circuito externo a la pila el campo eléctrico efectivo será simplemente

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E},$$

en cuyo caso el campo se podría obtener a partir del potencial electrostático

$$\mathbf{E} = -\nabla U.$$

Además, si la corriente es estacionaria se satisface que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

y, si el medio es lineal y no existen cargas externas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Podemos decir, pues, que el potencial electrostático en cualquier punto del circuito que no sea el interior de la pila, es decir, en el que no exista una fuente de fuerza electromotriz, satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta U = 0.$$

## 5.8. Corriente en la interfase de dos medios

Pensemos que se tienen dos medios con distinta conductividad en contacto. Como vimos en el capítulo anterior, se pueden encontrar ciertas condiciones de frontera que debe cumplir el campo eléctrico. Como vimos, la componente normal del vector de desplazamiento y la componente tangencial del campo eléctrico deben conservarse. Podemos llevar a cabo un procedimiento análogo para encontrar la condición que debe cumplir el flujo del vector de densidad de corriente eléctrica. Si calculamos el flujo a través de un cilindro cuyas bases sean paralelas y localizadas cada una en un medio distinto (ver Fig.(5.3) , el flujo de la densidad de corriente vendrá dada por

$$\oiint_{\text{cilindro}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si, además, tomamos el límite cuando la altura del cilindro tiene a cero ( $h \rightarrow 0$ ), entonces nos estaremos situando en la interfase y la integral de flujo queda como

$$\oiint_{\text{cilindro}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{base1}} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{base2}} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S}.$$

Podemos, además, descomponer las densidades de corriente como la suma de la componente normal a la superficie y la componente tangencial a la misma, esto es,  $\mathbf{J}_i = J_{i,n}\hat{u}_n + J_{i,t}\hat{u}_t$ , con  $i = 1, 2$ . Si llamamos  $\Delta a$  a la superficie de las bases, directamente se obtiene

$$\oiint_{\text{cilindro}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J_{1,n}\Delta a - J_{2,n}\Delta a.$$

Dado que la corriente debe conservarse en la interfase el resultado anterior debe ser igual a cero y, por tanto, nos queda

$$J_{1,n} = J_{2,n},$$

es decir, la componente normal de la densidad de corriente debe conservarse.

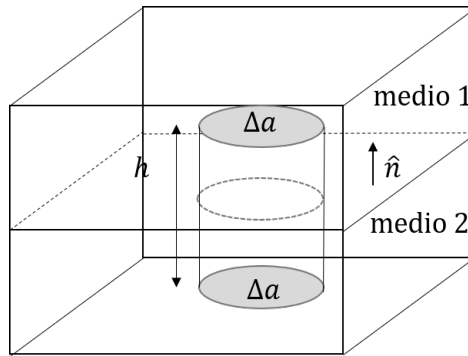


Figura 5.3: Esquema de la interfase de dos medios en la cual se quiere medir el flujo a través de una superficie cilíndrica.

## 5.9. Resumen

Este capítulo nos servirá de puente entre la electrostática y magnetostática en la que, como veremos en el siguiente capítulo, el concepto de densidad de corriente es esencial.

# Capítulo 6

## Magnetostática en el vacío

Hasta ahora, en el desarrollo del curso, tan solo hemos tenido en cuenta las interacciones debidas a la fuerza electrostática. A partir de esta magnitud descubierta de manera experimental (ley de Coulomb), definimos el concepto de campo eléctrico y potencial electrostático. De manera similar, en este capítulo partiremos de la fuerza magnética observada, por ejemplo, cuando se tienen dos hilos por los cuales circula una cierta corriente. En el capítulo anterior definimos el concepto de corriente a partir del movimiento estacionario de cargas. Como veremos en este capítulo, cuando tenemos una cierta carga en movimiento, ésta genera un campo magnético.

Para comprender la diferencia fundamental entre electrostática y magnetostática, permitidme hacer la siguiente comparación:

- **Electrostática:** Las cargas estacionarias generan campos eléctricos constantes.
- **Magnetostática:** Las corrientes estacionarias generan campos magnéticos constantes.

Cabe destacar la diferencia conceptual entre una carga estacionaria y una corriente estacionaria. En el primer caso, podríamos decir que las cargas se encuentran estáticas, lo que implica que dichas cargas deben estar sujetas a ciertas condiciones (estar en la superficie de un conductor y que el sistema esté en equilibrio, por ejemplo). En el caso de una corriente estacionaria, las cargas están efectivamente en movimiento. En dicho caso, suponemos que la corriente se mantiene constante a lo largo del tiempo o, dicho de otra forma, la velocidad promedio de las cargas es constante.

Relacionándolo con el capítulo anterior, en magnetostática se debe cumplir que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

y, como ya vimos anteriormente, que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Una consecuencia importante de esta condición es que, en magnetostática, no podemos considerar la fuerza magnética generada por una única carga en movimiento. Este caso aparece en



algunos textos como el primer ejemplo. Sin embargo, una única carga en movimiento jamás podrá generar una corriente estacionaria ya que solo existirá corriente en el punto en que dicha carga se encuentre en cada instante. Por tanto, cuando estudiemos la fuerza magnética debemos considerar que tenemos distribuciones de carga en movimiento.

## 6.1. Campo magnético: Ley de Biot-Savart

Al igual que la fuerza de atracción-repulsión entre dos cargas (ley de Coulomb), la fuerza magnética se descubrió experimentalmente. Gracias a los desarrollos que permitieron crear circuitos de corriente estacionaria (la pila voltaica), Faraday se percató de que dos hilos que conducen una corriente estacionaria se ejercen una fuerza entre sí. Dicha fuerza es debida al llamado campo magnético, que llamaremos  $\mathbf{B}$ <sup>1</sup>. Experimentalmente se puede demostrar que la dirección de la fuerza y, por tanto, las líneas de campo magnético, son perpendiculares a la dirección de movimiento de las cargas. Es decir, son perpendiculares al vector de densidad de corriente  $\mathbf{J}$  en cada punto. Si tenemos un circuito cerrado en forma de aro, esto implica que el campo magnético será paralelo al vector de superficie que encierra dicho aro (ver Fig.(6.1)). Para saber su sentido es común emplear la llamada regla de la mano derecha: si nuestro dedo índice apunta en la dirección de la corriente, entonces el dedo pulgar (formando un ángulo recto con el índice) apuntará en el sentido del campo magnético.

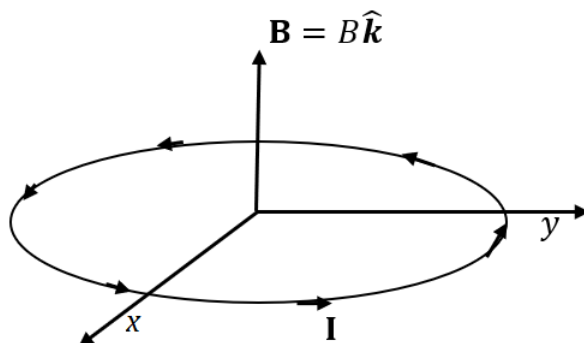


Figura 6.1: Esquema del campo magnético generado por un aro conductor por el que circula una corriente estacionaria.

Matemáticamente, la *regla de la mano derecha* no es más que la consecuencia de que el campo magnético y el vector de corriente están relacionados a través de un producto vectorial. De hecho, esta relación viene dada por la ley de Biot-Savart. Para comprender esta ley, consideremos un circuito cerrado por el que circula una corriente estacionaria  $\mathbf{I}$ . La ley de Biot-Savart nos dice que el campo magnético en un punto situado en coordenadas dadas por  $\vec{r}_0$  se podrá calcular como la suma de las contribuciones al campo magnético de cada pedazo infinitesimal de hilo y que, además, dicho campo magnético vendrá dado por

$$\mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{I} \times \hat{u}_r}{|\vec{r}|^2}, \quad (6.1)$$

<sup>1</sup>A riesgo de no ser precisos en el lenguaje, llamaremos de manera general al vector  $\mathbf{B}$  campo magnético. Clásicamente a este vector se le ha llamado vector de inducción magnética o densidad de flujo magnética. Sin embargo, dadas sus similitudes en forma y fondo con el campo eléctrico, resulta conveniente emplear esta nomenclatura que se adopta en numerosos textos modernos.

siendo  $\vec{r}$  el vector que relaciona la posición sobre el hilo conductor y el punto en el cual queremos conocer el campo magnético, es decir,  $\vec{r}_0$ , tal como se muestra en la Fig.(6.2). Si quisiéramos podríamos escribir la ecuación anterior en función de las coordenadas del hilo conductor,  $\vec{r}_l$ , sin más que tener en cuenta que  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_l$ . En la ecuación anterior,  $\mu_0$  es una constante de proporcionalidad que se puede medir experimentalmente y que recibe el nombre de permeabilidad magnética en el vacío cuyo valor es  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$ .

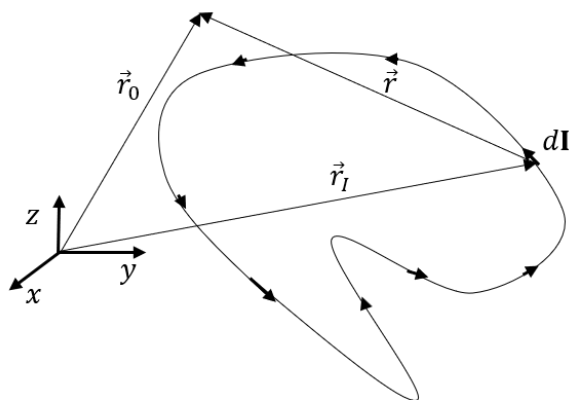


Figura 6.2: Esquema general de la ley de Biot-Savart.

Si observamos la ley de Biot-Savart para el campo magnético podemos observar ciertas similitudes con el campo eléctrico obtenido a partir de la ley de Coulomb para el caso de una distribución de carga continua:

- La magnitud de ambos campos decrece con el cuadrado de la distancia a la que nos situemos de, en el caso del campo eléctrico, el diferencial de carga  $q$ , en el caso del campo magnético, del diferencial de corriente.
- Ambos campos presentan una constante de proporcionalidad,  $1/4\pi\epsilon_0$  en el caso del campo eléctrico y  $\mu_0/4\pi$ .

En sentido estrictamente matemático, la fórmula del campo eléctrico de una distribución de carga continua y el campo magnético se diferencian exclusivamente en la dirección que toma el campo. En el campo eléctrico, teniendo en cuenta que el diferencial de carga es una magnitud escalar, el campo apunta directamente en la dirección por el vector  $\vec{r}$ . Por otro lado, en la fórmula del campo magnético el diferencial de corriente es una magnitud vectorial que multiplica vectorialmente al vector unitario en la dirección y sentido del vector  $\vec{r}$ .

Antes de pasar a aplicar operadores sobre el campo magnético, estudiemos dicho campo en un par de casos de interés.

### 6.1.1. Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz (o fuerza magnética) en magnetostática se refiere a la fuerza que ejerce un campo magnético sobre un cierto hilo conductor de longitud  $L$  por el que circula una corriente estacionaria  $\mathbf{I}$ .<sup>2</sup> Dado un cierto campo magnético  $\mathbf{B}$ , éste ejercerá la siguiente fuerza

<sup>2</sup>La expresión clásica de la fuerza de Lorentz de una partícula de carga  $q$  que viaja a velocidad  $\vec{v}$  por el efecto de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es  $F = q(\vec{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E})$ . Recordemos que, al hablar de magnetostática, no podemos considerar este caso.

sobre el hilo conductor

$$\mathbf{F}_m = \int_L d\mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad (6.2)$$

donde típicamente consideraremos que  $d\mathbf{I} = Id\vec{l}$ .

## 6.2. Campo magnético de un hilo infinito con corriente estacionaria

Consideremos un pedazo diferencial de un hilo infinito por el que circula una cierta corriente estacionaria  $\mathbf{I}$ . El diferencial de corriente vendrá dado por  $d\mathbf{I} = Id\vec{l}$ , donde  $\vec{l}$  apunta en la dirección y sentido de la corriente. En este caso, podríamos escribir la ley de Biot-Savart como

$$\mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{|\vec{r}|^2}. \quad (6.3)$$

Supongamos que colocamos nuestro sistema de coordenadas tal como se muestra en la Fig.(6.3), es decir, que la corriente (y por tanto el diferencial de longitud) apunten en la dirección de la coordenada  $y$ , por tanto,  $d\vec{l} = dy\hat{j}$ . Además, suponemos que podemos referir las coordenadas del punto donde queremos conocer el campo magnético como  $\vec{r}_0 = z_0\hat{k}$ , siendo  $z_0$  la distancia del punto al hilo. Nótese que, dado que queremos conocer el campo magnético en un determinado punto del espacio, la elección del sistema de coordenadas anterior será siempre posible. Además, es fácil ver que, dada la simetría del problema, podremos hacer una revolución entorno al hilo para conocer el campo magnético en el resto de puntos.

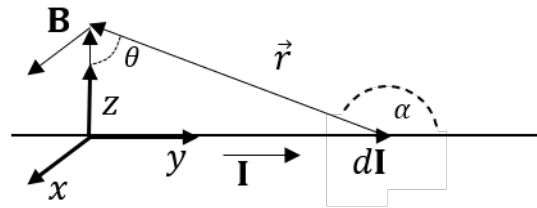


Figura 6.3: Esquema del campo magnético generado por un hilo infinito por el que circula una corriente estacionaria.

Teniendo en cuenta el sistema coordinado escogido y dado que en la ley de Biot-Savart tenemos  $d\vec{l} \times \vec{r}$ , ya podemos deducir que el campo magnético será de la forma  $\mathbf{B}(\vec{r}_0) = B(\vec{r}_0)\hat{i}$ . Recordemos que el producto vectorial de dos vectores tiene una dirección normal al plano que dichos vectores forman. Dicho esto, para poder aplicar la ley de Biot-Savart hemos de, en primer lugar, conocer la relación entre las coordenadas del diferencial de superficie y el punto donde queremos calcular el campo magnético, es decir, hemos de obtener el vector  $\vec{r}$ . A partir del esquema de la figura, podemos obtener que

$$|\vec{r}_0| = z_0 = |\vec{r}| \cos \theta.$$

y, por tanto, en la ley de Biot-Savart sustituiremos  $|\vec{r}| = \frac{z_0}{\cos \theta}$ . Lógicamente, si cambia la distancia  $z_0$  o la posición del pedazo de hilo que queremos considerar, el ángulo  $\theta$  también cambia.

Por otro lado, necesitamos conocer el diferencial de línea. La distancia del hilo al centro del sistema de coordenadas viene dada por el módulo del vector de posición sobre el hilo, que se puede relacionar de la siguiente forma con el ángulo

$$\tan \theta = \frac{|\vec{r}_l|}{|\vec{r}_0|} = \frac{|\vec{r}_l|}{z_0},$$

que nos lleva a  $\vec{r}_l = z \tan \theta \hat{j}$ . Resulta evidente que el vector  $\vec{r}_l$  es exactamente el mismo que el vector de longitud sobre el hilo, es decir, que  $\vec{r}_l = \vec{l}$ . Por tanto, basta con diferenciar este vector para obtener el diferencial de longitud  $d\vec{l}$ . Para ello, fijémonos nuevamente en el dibujo. El punto en el que queremos conocer el campo magnético,  $z_0$  se mantendrá fijo en todo momento al hacer la integral de línea dada por la ley de Biot-Savart. Sin embargo, conforme nos desplazemos a lo largo del hilo, el ángulo  $\theta$  irá variando. Es por ello que, para obtener el diferencial de longitud, debemos diferenciar  $\vec{l}$  con respecto a  $\theta$ , esto es

$$d\vec{r}_l = d\vec{l} = z_0 \frac{d}{d\theta}(\cos \theta) \hat{j} = \frac{z_0}{\cos^2 \theta} d\theta \hat{j}.$$

Por último, necesitamos conocer la magnitud del vector que resulta del producto vectorial  $d\vec{l} \times \hat{u}_r$ . Para ello, recordemos que el módulo del producto vectorial de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  se puede escribir como  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo entre ambos vectores. Por tanto, apoyándonos nuevamente en la Fig. (6.3, se obtiene

$$|d\vec{l} \times \hat{u}_r| = dl \sin \alpha.$$

Además, el ángulo  $\alpha$  y el ángulo  $\theta$  son complementarios y, por tanto,  $\sin \alpha = \cos \theta$ . Con esto, podemos obtener finalmente la dirección y magnitud del producto vectorial en función del ángulo  $\theta$ , es decir,

$$d\vec{l} \times \hat{u}_r = dl \cos \theta \hat{i},$$

que, sustituyendo el valor de  $dl$  queda finalmente en la forma

$$d\vec{l} \times \hat{u}_r = \left(\frac{z_0}{\cos^2 \theta} d\theta\right) \cos \theta \hat{i} = \left(\frac{z_0}{\cos \theta} d\theta\right) \hat{i},$$

Con esto, tenemos todo lo necesario para aplicar la ley de Biot-Savart. Sustituyendo el campo magnético queda como

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{hilo}} \frac{\cos^2 \theta}{z_0^2} \frac{z_0}{\cos \theta} d\theta \hat{i},$$

que, tras simplificar y teniendo en cuenta que  $z_0$  es constante, se puede escribir en la forma

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi z_0} \int_{\text{hilo}} \cos \theta \, d\theta \, \hat{i},$$

En la integral anterior debemos definir los límites. Podemos, en primer lugar, calcular el campo magnético debido a un segmento de hilo cuyos extremos formen un ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . En este caso, obtenemos

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi z_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \, d\theta \, \hat{i} = \frac{I\mu_0}{4\pi z_0} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \, \hat{i}. \quad (6.4)$$

Nótese que la ecuación anterior es el campo magnético generado por cualquier segmento de hilo cuyos extremos formen un ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con respecto al vector de posición del punto en el que queremos conocer el campo. En la fórmula anterior y, basándonos en la figura, el ángulo se mide en sentido horario. Si el ángulo es mayor que  $\pi$  podríamos medir en sentido antihorario pero cambiando el signo del ángulo, como se observa en la Fig.(6.4).

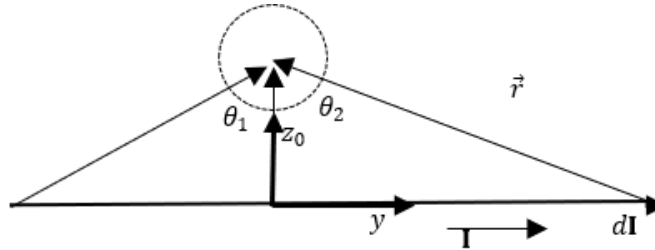


Figura 6.4: Esquema del campo magnético generado por un segmento de hilo por el que circula una corriente estacionaria y cuyos extremos forman ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con respecto al vector de posición del campo.

Lógicamente, un segmento de hilo no puede transportar una corriente por sí solo. Sin embargo, este caso se podría utilizar en cualquier circuito compuesto por una serie de segmentos que acaban formando una línea cerrada. Posteriormente, aplicaríamos el principio de superposición al campo magnético y, como resultado, el campo total sería la suma de los campos creados por cada segmento de hilo conductor.

Ahora bien, volviendo al caso que nos concierne, ¿qué ocurre cuando el hilo tiene una longitud infinita? <sup>3</sup> En ese caso, observando la Fig.(6.4), vemos que tanto  $\theta_1$  como  $\theta_2$  alcanzarían idealmente el ángulo límite, es decir,  $\pi/2$ . Según el criterio de signos que hemos tomado para medir los ángulos, tendríamos que  $\theta_1 = -\pi/2$  y  $\theta_2 = \pi/2$ . Sustituyendo estos valores en la Ec.(6.4) se obtiene que el campo magnético creado por un hilo infinito que transporta una corriente estacionaria en el punto situado en  $z_0$  es igual a

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{I\mu_0}{2\pi z_0} \hat{i}. \quad (6.5)$$

<sup>3</sup>Recordemos que este caso es una aproximación que empleamos, típicamente, cuando la distancia a la que queremos medir el campo es mucho más pequeña que las dimensiones del hilo, esto es,  $|\vec{r}_0| \ll L$

Dada la simetría del problema, podemos deducir que las líneas de campo magnético de igual magnitud forman circunferencias por cuyo centro pasa el hilo conductor, como se observa en la Fig.(6.5). Es decir, podemos reescribir el resultado en la forma

$$\mathbf{B}(r_0) = \frac{I\mu_0}{2\pi r_0} \hat{u}_\phi. \quad (6.6)$$

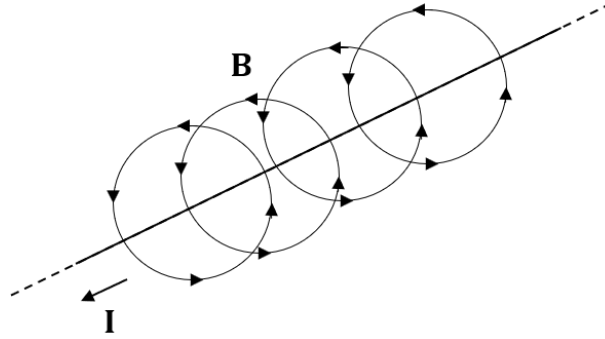


Figura 6.5: Esquema de las líneas de campo magnético generado por hilo infinito por el que circula una corriente estacionaria.

### 6.2.1. Fuerza magnética entre dos hilos conductores paralelos

A partir del resultado anterior podemos calcular la fuerza que ejercen entre ellos dos hilos conductores infinitos y paralelos. Para ello, consideraremos que por cada uno de los hilos circula una corriente estacionaria  $\mathbf{I}_1$  y  $\mathbf{I}_2$ , respectivamente. Consideraremos que las corrientes circulan en el mismo sentido. Si quisiéramos el caso opuesto, bastaría con cambiar el signo a una de las corrientes. Si, por ejemplo, consideramos el campo magnético creado por el primer hilo, la fuerza de Lorentz (Ec.(6.2)) quedará como

$$\mathbf{F}_m = \int_L d\mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}_1.$$

que podemos reescribir como

$$\mathbf{F}_m = I_2 \int_L d\vec{l}_2 \times \mathbf{B}_1.$$

Para calcular la fuerza sobre el segundo hilo debida al campo magnético creado por el primero,  $\mathbf{B}_1$ , obviamente debemos calcular el campo magnético sobre el segundo hilo. Si suponemos que la distancia entre ambos es  $d$ , entonces el campo magnético en cualquier punto del segundo hilo debido a  $\mathbf{I}_1$  será

$$\mathbf{B}_1 = \frac{I_1\mu_0}{2\pi d} \hat{i},$$

donde estamos asumiendo que  $\mathbf{I}_1 = I_1\hat{j}$  y  $\mathbf{I}_2 = I_2\hat{j}$ . Sustituyendo en la fuerza de Lorentz queda que

$$\mathbf{F}_m = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d} \int_L dl (\hat{j} \times \hat{i}).$$

que simplemente queda como

$$\mathbf{F}_m = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d} \int_L dl \hat{k}.$$

Nótese que el signo negativo se debe al producto vectorial ya que  $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$ . Recordemos que el sentido del vector resultante del producto vectorial también se puede obtener a partir de la regla de la mano derecha.

Obviamente, si consideramos que los hilos son infinitos, la fuerza total a lo largo de ambos resulta infinita<sup>4</sup> Sin embargo, la expresión anterior nos indica directamente la fuerza por unidad de longitud. Podemos decir, por tanto, que la fuerza magnética por unidad de longitud ejercida entre dos hilos infinitos paralelos es

$$\mathbf{f}_m = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi d} \hat{k}.$$

La fórmula anterior es consistente con las observaciones experimentales: dos hilos paralelos por los que circulan corrientes estacionarias en el mismo sentido se atraen mutuamente. La fuerza de atracción es proporcional a las intensidades de corriente que circulan por ambos hilos y, además, disminuye de manera proporcional a la distancia entre ellos. Podemos observar que, de alguna forma, la fuerza de Lorentz presenta ciertas similitudes y discrepancias con la fuerza de Coulomb debida a dos cargas puntuales. Analicemos ambos casos:

- **Similitudes entre fuerza magnetostática y electrostática:** En ambas, la fuerza resultante es proporcional a las fuentes del campo: En un caso, las cargas puntuales y, en el otro, las corrientes estacionarias.
- **Diferencias entre fuerza magnetostática y electrostática:** La fuerza en electrostática es paralela al campo eléctrico y disminuye de manera cuadrática con la distancia entre cargas. La fuerza en magnetostática es perpendicular al campo magnético y disminuye proporcionalmente a la distancia entre las corrientes estacionarias.

Como dijimos anteriormente, si quisiéramos considerar el caso en que las corrientes tienen sentidos opuestos (corrientes antiparalelas) bastaría con cambiar el signo a una de ellas. En ese caso, la fuerza de Lorentz actuará como una fuerza repulsiva entre ambos hilos. El esquema de la Fig.(6.6) ayuda a visualizar las direcciones de las distintas magnitudes (corriente, campo magnético y fuerza de Lorentz).

<sup>4</sup>Al realizar la integral queda  $L$  evaluado entre  $-\infty$  y  $\infty$ .

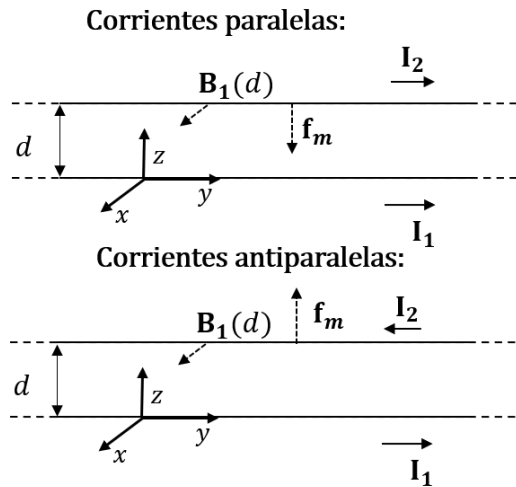


Figura 6.6: Fuerza ejercida entre dos hilos paralelos por los que circulan corrientes estacionarias.

### 6.3. Campo magnético de una espira conductora por la que circula una corriente estacionaria

Un segundo caso de interés es el del campo magnético sobre el eje que pasa por el centro de una espira conductora por el que circula una corriente estacionaria. La espira no es más que una corriente con forma de aro. Resulta evidente que cualquier diferencial de línea generará un diferencial de campo magnético en la dirección perpendicular a los vectores  $d\vec{l}$  y  $\vec{r}$ . La relación entre las componentes tangencial y normal dependerá, para una misma corriente, exclusivamente del radio  $R$  de la espira y de la posición  $\vec{r}_0$  en la que se evalúe el campo magnético. Dicho esto, dada la simetría del problema, las componentes tangenciales del campo magnético se anularán (por cada elemento diferencial del aro existe uno opuesto a éste, que genera una componente tangencial igual y de sentido opuesto). De esta manera, podemos deducir que el campo magnético sobre el eje que pasa por su centro, llamémosle eje  $z$ , irá en la misma dirección de éste, tal como se observa en la Fig.(6.7).

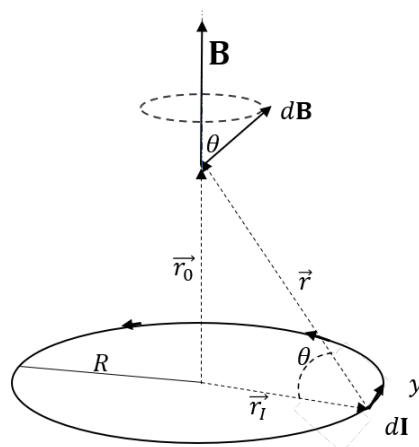


Figura 6.7: Campo magnético sobre el eje  $z$  generado por una espira por la que circula una corriente estacionaria.



Podemos concluir, pues, que el campo magnético total será la suma de todas las componentes normales del vector diferencial de campo magnético. Atendiendo a la Fig. (6.7) podemos escribir el campo como

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{aro}} \frac{dl}{|\vec{r}|^2} \cos \theta \hat{k}.$$

donde, como hemos dicho, debido a la simetría solo hemos considerado la componente normal del campo magnético, es decir, hemos aplicado la relación  $\mathbf{B} = |B| \cos \theta \hat{k}$ . Nótese que, en la integral anterior, el ángulo  $\theta$  y la distancia  $|\vec{r}|$  son constantes. Dicho de otra manera, la integral es en las coordenadas de la espira, que dependen estrictamente de  $dl$ . Este diferencial será  $Rd\phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo en coordenadas polares del elemento diferencial de línea. Teniendo esto en cuenta, resolvemos la integral

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi |\vec{r}|^2} \int_{\text{aro}} dl \hat{k},$$

que da lugar a

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi |\vec{r}|^2} (2\pi R) \hat{k}.$$

Por otro lado, podemos relacionar el vector  $\vec{r}$  con el radio de la espira y la distancia  $z$  a la que se evalúa el campo magnético a través del triángulo que forman, es decir,  $|\vec{r}|^2 = R^2 + z^2$ . Además, el coseno del ángulo  $\theta$  también se puede expresar en función de  $R$  y  $z$ . Fijándonos de nuevo en la Fig.(6.7), vemos que  $\cos \theta = R/|\vec{r}|$ . Igualmente, sustituyendo el valor de  $|\vec{r}|$ , se obtiene  $\cos \theta = R/\sqrt{R^2 + z^2}$ . Por último, sustituimos las relaciones anteriores en la expresión del campo magnético, lo que da como resultado

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

## 6.4. Ley de Biot-Savart generalizada: Densidades de corriente superficiales y en volumen

Al igual que ocurría con las cargas, en general, una corriente eléctrica puede fluir a lo largo de una línea, una superficie o un volumen. Podremos definir, por tanto, los elementos diferencial de cada tipo de corriente a través de una relación sencilla. En el caso de una corriente lineal, como ya vimos en este mismo apartado, tenemos que

$$d\mathbf{I} = Id\vec{l} = \mathbf{I}dl. \tag{6.7}$$

Si la corriente estacionaria se distribuye en una superficie, definiremos la densidad de corriente superficial a partir del diferencial

$$d\mathbf{I} = Kd\mathbf{S} = \mathbf{K}dS. \quad (6.8)$$

Por último, como ya definimos en el capítulo anterior, la densidad de corriente en un cierto volumen la podremos expresar a través del diferencial

$$d\mathbf{I} = \mathbf{J}dV. \quad (6.9)$$

Podemos, por tanto, obtener una expresión de la ley de Biot-Savart tanto para la densidad de corriente superficial como para su equivalente en volumen. En el caso de tener una densidad de corriente superficial, el campo magnético generado viene dado por

$$\mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_I} \frac{\mathbf{K}(\vec{r}_I) \times \hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} dS. \quad (6.10)$$

donde  $S_I$  es la superficie por la que fluye la corriente estacionaria y, recordando lo visto anteriormente,  $r_I$  las coordenadas que indican la posición de dicha superficie. Y, de manera análoga, si la densidad de corriente es volumétrica, tendríamos que

$$\mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_I} \frac{\mathbf{J}(\vec{r}_I) \times \hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} dV. \quad (6.11)$$

Permitidme recordar que, como nos estamos centrando en magnetostática, no podemos aplicar la ley de Biot-Savart a una carga puntual. Dado que esta ley solo se cumple para el caso de corrientes estáticas, no tiene sentido estudiar dicho caso y, si aún así quisiéramos aplicar la ecuación a una carga puntual, el campo magnético resultante que obtenemos es incorrecto.

## 6.5. Operadores sobre el campo magnético

Al igual que hicimos en el capítulo 3 con el campo eléctrico, resulta útil aplicar algunos operadores básicos (divergencia y rotacional) sobre el campo magnético para poder comprender mejor su forma. Antes de aplicar dichos operadores sobre un campo genérico dado por la formula general de la ley de Biot-Savart, estudiemos el caso más sencillo de corrientes que viajan en línea recta.

### 6.5.1. Operadores sobre corrientes rectilíneas

Partamos del resultado obtenido para este capítulo del campo magnético debido a un hilo infinito por el que circula una corriente estacionaria. En dicho caso, como vimos, el campo magnético resultante en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi.$$

Planteemos la integral del campo magnético a lo largo de un lazo cerrado situado sobre una línea de campo cuya distancia sea  $r$  al hilo, es decir

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{\hat{u}_\phi \cdot d\vec{l}}{r}.$$

Recordemos que el diferencial de desplazamiento en coordenadas cilíndricas (apéndice A) viene dado por

$$d\vec{l} = dr\hat{u}_r + r d\phi\hat{u}_\phi + dz\hat{k},$$

y que, por tanto, el producto escalar de la integral quedará como  $\hat{u}_\phi \cdot d\vec{l} = r d\phi$ . Sustituimos en la integral para obtener

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi.$$

Por tanto, la integral en un lazo cerrado que contenga una línea de campo magnético situada a distancia  $r$  viene dada por

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Aunque parezca sorprendente, el resultado es independiente del radio del lazo cerrado. De alguna forma, obtenemos un resultado similar al de la ley de Gauss en electrostática. En este caso, el resultado de una integral de línea que envuelva al hilo depende exclusivamente de la corriente que atraviesa la superficie encerrada por el lazo.

Si, en lugar de un solo hilo, tuviésemos una serie de hilos que transportan distintas corrientes  $I_1, I_2, I_3, \dots$ , entonces, tras aplicar el principio de superposición, el resultado de la integral sería  $\mu_0(I_1 + I_2 + I_3 + \dots = \mu_0 I_{enc})$ , donde  $I_{enc}$  sería la corriente total que atraviesa la superficie que encierra el lazo. Es decir, en general, tendremos que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}. \tag{6.12}$$

Ahora bien, si la corriente fuese, en lugar de rectilínea, una cierta densidad de corriente en volumen, la corriente que atraviesa la superficie que encierra el lazo será

$$I_{enc} = \iint_{S_{lazo}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Antes de continuar, recordemos el teorema de Stokes. Este teorema relaciona la integral a lo largo de una línea cerrada de un campo vectorial, llamémosle  $\mathbf{F}$ , con la integral de superficie de su rotacional, es decir<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Dado que la demostración no es tan directa como para el teorema de la divergencia, en este caso no haremos la demostración del teorema.

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_L} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.13)$$

Si aplicamos este teorema a la Ec.(6.12) y teniendo en cuenta una densidad de corriente en volumen, llegamos a

$$\iint_{S_L} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_L} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.14)$$

A partir de la relación anterior se deduce que el rotacional del campo magnético viene dado por

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.15)$$

La ecuación anterior es conocida como la ley de Ampère y, como veremos más adelante, es una de las ecuaciones de Maxwell cuando no hay presencia de campos eléctricos que varíen su forma con el tiempo. Pudiera parecer que el resultado anterior se debe a que hemos particularizado a una corriente rectilínea para, posteriormente, hacer una generalización heurística de la ecuación obtenida. Es por ello que, en la siguiente sección, estudiaremos tanto el rotacional como la divergencia del campo magnético de forma genérica.

## 6.6. Rotacional y divergencia de un campo magnético: caso general

Consideremos una cierta densidad de corriente estacionaria en volumen de forma arbitraria,  $\mathbf{J}$ . El campo magnético debido a la presencia de dicha corriente estacionaria en un punto situado a una cierta distancia  $\vec{r}$  del diferencial de corriente  $d\mathbf{I} = \mathbf{J}dV$ , viene dado por

$$\mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_I} \frac{\mathbf{J}(\vec{r}_I) \times \hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} dV. \quad (6.16)$$

donde, recordemos la relación entre vectores  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_I$ , siendo  $\vec{r}_0$  el vector que localiza el punto donde se evalúa el campo magnético y  $\vec{r}_I$  el vector de posición que indica la posición de la densidad de corriente en cada punto de la integral. Es conveniente hacer hincapié en este punto para evitar confusiones con la notación. Por un lado, la integral se realizará sobre las coordenadas dadas por  $\vec{r}_I$ . Por otro lado, al aplicar un operador sobre el campo magnético, éste actuará sobre las coordenadas dadas por  $\vec{r}_0$ .

### 6.6.1. Rotacional del campo magnético: Ley de Ampère

Calculemos, en primer lugar, el rotacional del campo magnético dado por la Ec.(6.16), esto es

$$\nabla \times \mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_I} \nabla \times \mathbf{J}(\vec{r}_I) \times \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} dV. \quad (6.17)$$

Como vemos, dentro de la integral, nos queda el rotacional del producto vectorial de dos vectores. Para poder simplificar el cálculo, empleamos la identidad 7 vista en el capítulo dos, es decir,  $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$ . Aplicado al caso que nos concierne, se obtiene

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \right) = (\nabla \cdot \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2})\mathbf{J} + (\frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \cdot \nabla)\mathbf{J} - (\nabla \cdot \mathbf{J})\frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} - (\mathbf{J} \cdot \nabla)\frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2}.$$

Aunque pudiera parecer que, en lugar de simplificar, hemos complicado el cálculo, los términos que implican derivadas sobre la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  se anulan. Recordemos que, dado que la corriente es estacionaria,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . De hecho, solo uno de los términos no implica derivadas sobre la densidad de corriente. Si observamos bien, el primer término lo ha aparecido en múltiples ocasiones a lo largo del curso (apéndice B). Recordemos una vez más que

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r}).$$

Es precisamente gracias a esta propiedad que el primer término no se anula. Si observamos el resto implican derivadas espaciales sobre la densidad de corriente de una u otra forma. Por tanto, nos queda simplemente que

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \right) = 4\pi\delta(\vec{r})\mathbf{J}.$$

Insertando este resultado en el rotacional del campo magnético y, recordando la relación del vector  $\vec{r}$  con la posición de la corriente y la posición en que evaluamos el campo magnético, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{B}(\vec{r}_0) = \mu_0 \iiint_{V_I} \mathbf{J}(\vec{r}_I)\delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_I)dV. \quad (6.18)$$

La integral se calcula simplemente empleando la propiedad B.4 del apéndice B, con lo que se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{B}(\vec{r}_0) = \mu_0\mathbf{J}(\vec{r}_0). \quad (6.19)$$

Como vemos, hemos recuperado la ley de Ampère obtenida de manera sencilla en el apartado anterior.

Como dijimos anteriormente, esta ley es la equivalente a la ley de Gauss que vimos en electrostática y, de igual manera, también tiene su forma integral que se obtiene, en este caso, a partir del teorema de Stokes

$$\iint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.20)$$

De manera que se obtiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}. \quad (6.21)$$

### 6.6.2. Divergencia del campo magnético: Segunda ecuación de Maxwell

Apliquemos la divergencia al campo magnético recordando una vez más que el operador actuará sobre las coordenadas  $\vec{r}_0$ . Nos queda que

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_l} \nabla \cdot \left( \mathbf{J}(\vec{r}_l) \times \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \right) dV. \quad (6.22)$$

Como vemos, dentro de la integral nos queda la divergencia del producto vectorial de la densidad de corriente y el vector de posición. Aplicando la identidad 6 de los operadores vista en el capítulo 2, se obtiene que

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J}(\vec{r}_l) \times \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \right) = \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}(\vec{r}_l)) - \mathbf{J}(\vec{r}_l) \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}|^2} \right). \quad (6.23)$$

El primer término de la expresión anterior se anula ya que, por un lado, la derivación es en coordenadas  $\vec{r}_0$  y  $\mathbf{J}$  depende de las coordenadas  $\vec{r}_l$  y, además, la corriente es estacionaria. El segundo término también es nulo ya que las derivadas parciales se aplican sobre variables independientes.<sup>6</sup> Con esto, llegamos a la conclusión de que la divergencia del campo magnético es nula, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.24)$$

La ecuación anterior se incluye en las ecuaciones de Maxwell y tiene importantes implicaciones. En el fondo, la ecuación nos indica que las líneas de campo magnético son siempre cerradas.

## 6.7. Electrostática vs. Magnetostática

Llegados a este punto, podemos hacer un paralelismo entre la electrostática y la magnetostática. En cierto modo, la ley de Biot-Savart es a la magnetostático lo que la ley de Coulomb es a la electrostática. Ambas son leyes empíricas a partir de las cuales podemos definir los campos que actúan sobre las fuentes de carga o las fuentes de corriente. Nótese que, si bien la fuerza de Coulomb actúa sobre cargas en reposo, la fuerza magnética (o de Lorentz) se ejerce entre dos corrientes estacionarias. Es decir, para que una carga pueda verse afectada por un campo magnético, ésta debe estar en movimiento (de ahí la forma de la fuerza de Lorentz para la una carga puntual en la que ésta debe llevar una velocidad  $\vec{v}$  para que el campo magnético produzca un efecto sobre ella). Tenemos, por tanto, que las cargas estacionarias (o distribuciones de ellas) son fuentes de campos electrostáticos mientras que las corrientes estacionarias (o distribuciones de ellas) son fuentes de campos magnetostáticos. Por otro lado, la aplicación de

<sup>6</sup>El rotacional contiene todos sus términos del tipo  $(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x})\hat{k}$  cada uno de los cuales es, obviamente, nulo.

la divergencia y el rotacional sobre los campos eléctrico y magnético en condiciones estáticas producen, de alguna forma, resultados simétricos. Para el campo eléctrico tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.26)$$

donde hemos considerado el caso en el vacío ya que, de momento, no hemos estudiado el campo magnético en presencia de materia. Para el campo magnético tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.28)$$

Como veremos, las cuatro ecuaciones anteriores son, básicamente, las ecuaciones de Maxwell en condiciones de campos constantes en el tiempo. La forma de las mismas es consecuencia directa de la naturaleza de las fuentes de los campos. Por un lado, una carga puntual sería una fuente fundamental de campo eléctrico. Ésta genera un campo eléctrico cuyas líneas divergen con respecto a la fuente siguiendo trayectorias rectilíneas. Es por ello que el rotacional es nulo y, además, la divergencia es proporcional a la propia fuente (ya que las líneas de campo son abiertas). En el caso del campo magnético ocurre justo lo contrario. Podíamos considerar que un hilo de grosor infinitesimal por el que circula un campo magnético es la fuente fundamental de un campo magnético. Este tipo de fuente genera, como hemos visto, un campo magnético cuyas líneas de campo son cerradas (no divergen) y, por tanto, rotan entorno a la propia fuente. Por tanto, en este caso, el rotacional es proporcional a la fuente y, además, la divergencia es nula.

## 6.8. El potencial vector (magnético)

Siguiendo el razonamiento empleado para definir el potencial electrostático, podemos pensar que existe una magnitud más fundamental que el campo magnético a partir de la cual se pueda calcular el valor de éste. Sin duda, las Ecs.(6.27) invitan a pensar que dicha magnitud ha de ser un vector que se relacione con el campo magnético a través del rotacional. Consideremos, pues, que existe un cierto vector  $\mathbf{A}$ , al que llamaremos potencial vectorial o potencial vector,<sup>7</sup> que se relaciona con el campo magnético a través de la siguiente ecuación

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.29)$$

Una vez supuesto que dicho potencial vector existe, podemos obtener ciertas condiciones que debe cumplir. A partir de la ley de Ampère vemos que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.30)$$

<sup>7</sup>Si al potencial electrostático le llamamos potencial escalar, entonces al potencial magnético le llamaríamos potencial vectorial. Permittedme que, por simplificar su nombre, le llamemos simplemente potencial vector.

Se puede demostrar que el rotacional del rotacional de un vector viene dado por

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Nótese que tenemos cierta libertad a la hora de definir la forma del potencial vector. La única condición que debe cumplir es que su rotacional dé como resultado el campo magnético. En general, la divergencia del potencial vector podría ser un cierto campo escalar, esto es,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = f(r)$ . Este resultado no tiene ningún efecto sobre la forma del rotacional y, por tanto, podemos suponer que  $f(r) = 0$ . Dicho de otra forma, podríamos añadir al potencial vector cualquier función cuyo rotacional sea nulo de manera que no alteraría el resultado. Aprovechando esta condición, escogemos simplemente que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

De esta forma, obtenemos la ecuación de Poisson para el campo magnético

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.31)$$

Recordando la definición del vector densidad de corriente

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{dV},$$

la ecuación de Poisson se puede reescribir como

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \iiint \mathbf{I} dV. \quad (6.32)$$

que tomará distintas formas dependiendo de si la corriente es lineal, superficial o en volumen.

### 6.8.1. Relación integral entre el campo magnético y el potencial vector

Resulta evidente que, en general, el cálculo del potencial vector a partir del campo magnético no va a ser una tarea sencilla. Sin embargo, para resolver este problema, en algunos casos, se puede emplear una relación matemática que resulta muy conveniente. Consideremos que queremos calcular la integral del potencial vector a lo largo de un lazo cerrado para, de alguna forma, encontrar una expresión del mismo. Tendremos que

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{l}.$$

Ahora bien, aplicamos el teorema de Stokes, nos queda

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_{\text{lazo}}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}.$$

donde  $S_{\text{lazo}}$  es la superficie que encierra el lazo. Por definición, el rotacional del potencial vector es el campo magnético y, por tanto, se tiene que



$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_{\text{lazo}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.33)$$

Tenemos, por tanto, que la integral en un lazo cerrado del potencial vector es igual al flujo del campo magnético a lo largo de la superficie que encierra el lazo. Si existe cierta simetría, la resolución de la ecuación integral anterior puede ser realmente sencilla. En los casos de interés, como se verá en los problemas de este capítulo, se elige un lazo que vaya en dirección de la corriente. En algunos casos, el potencial vector va en la misma dirección de la corriente y, además, es constante si esta es estacionaria. Con esto, la parte izquierda de la ecuación integral se resuelve de manera inmediata. Por otro lado, para conocer el flujo del campo magnético a través de la superficie que encierra el lazo es necesario conocer el campo magnético sobre la superficie. Es por ello que, típicamente, aplicaremos la ley de Ampère para conocer  $\mathbf{B}$  y, posteriormente, calcularemos el flujo del campo magnético si se desea conocer el potencial vector.

### 6.8.2. Interpretación del potencial vector

Si bien la interpretación física del potencial vector no es directa, cosa que si ocurría con el potencial escalar en electrostática, si que podemos hacer algunas interpretaciones sobre su forma y comprender su utilidad. El potencial vector se podrá definir en cualquier punto del espacio siempre que exista un cierto campo magnético localizado en algún punto del espacio. Esto se puede ver directamente con la forma diferencial del potencial vector  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  o, de forma más intuitiva, con su relación integral vista en el apartado anterior (Ec.(6.33)). Además, su relación con la corriente es directa. En muchos casos, al aplicar la ley de Ampère en regiones exteriores a la corriente no es posible obtener información acerca del campo magnético. Esto es así ya que la corriente encerrada en este caso es nula y se obtiene una integral de la cual no podemos extraer información ya que no conocemos el campo magnético. Sin embargo, el potencial vector se puede relacionar de forma sencilla con la densidad de corriente a través de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\vec{r}_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{r} dl && \text{Corriente lineal,} \\ \mathbf{A}(\vec{r}_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{K}}{r} dS && \text{Corriente superficial,} \\ \mathbf{A}(\vec{r}_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}}{r} dV && \text{Corriente volumétrica.} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores se obtienen a partir de la ecuación de Poisson ( $\Delta A = -\mu_0 \mathbf{J}$ ) en coordenadas esféricas asumiendo que el potencial vector en el infinito es nulo.

De esta forma, si conocemos la forma de la corriente, podemos calcular el potencial vector en cualquier punto del espacio. Aplicando el rotacional al potencial vector resultante obtendríamos el campo magnético (ver el ejemplo en el problema 9).

Además, al igual que ocurría con el potencial electrostático, el potencial vector no tiene por que ser nulo en regiones del espacio en las que no existe un campo magnético. Nuevamente,

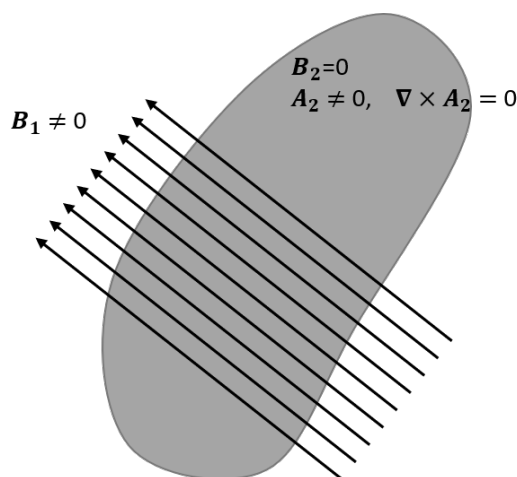


Figura 6.8: Esquema a partir del cual se puede entender que, aunque el campo magnético sea nulo en una región del espacio, el potencial vector no tiene por qué ser cero.

esto se puede deducir de las ecuaciones anteriores. Es posible que el campo magnético este confinado en una región del espacio. Si aplicamos un lazo de forma que exista un flujo de campo magnético a través de su superficie, en principio, podemos definir el potencial vector a cualquier distancia de dicho campo sin necesidad de que el potencial vector se anule, ver Fig.(6.8).

## 6.9. Condiciones de contorno de las componentes normal y tangencial del campo magnético

Como hemos visto, la divergencia del campo magnético es nula, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Si recordamos lo visto en capítulos anteriores, la expresión anterior en forma integral se puede escribir como

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Consideremos ahora que se tiene una cierta superficie por la que fluye una densidad de corriente  $\mathbf{K}$ . Consideremos que aplicamos la ecuación anterior a un cubo que encierra parte de esa corriente. El campo magnético generado por la corriente tendrá, en general, una dirección cualquiera. Si situamos el cubo de la manera apropiada, es decir, de manera que las caras superior e inferior sean paralelas a la superficie y consideramos que la altura del cubo tiende a cero, solo dichas caras del cubo tendrán una contribución a la integral anterior. De esta forma, solo tendríamos en cuenta lo que ocurre al pasar de la parte inferior a la superior de la superficie, de manera similar a lo que hacíamos en una interfase con el campo eléctrico. Por otro lado, el campo magnético mantendrá su sentido en todo el espacio, tanto por en la parte superior como en la inferior de la superficie. Si suponemos que podemos separar el campo

magnético en sus componentes normal y tangencial,  $\mathbf{B}_i = B_{i,n}\hat{n} + B_{i,t}\hat{t}$ , donde  $i = 1$  representa el campo en la parte superior de la superficie y  $i = 2$  en la parte inferior, nos queda que

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{1,n} - B_{2,n} = 0.$$

y, por tanto, la componente normal del campo magnético se conserva,  $B_{1,n} = B_{2,n}$

Por otro lado, si escogemos un lazo amperiano que corte de manera perpendicular a la superficie y cuyos diferenciales de línea sean perpendiculares a la dirección de la corriente, se tiene que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = (B_{1,t} - B_{2,t})l = \mu_0 I_{enc}.$$

Teniendo en cuenta que la corriente encerrada en el loop es  $I_{enc} = Kl$  se obtiene

$$B_{1,t} - B_{2,t} = \mu_0 K,$$

donde recordemos que hemos impuesto que el diferencial de línea sea perpendicular a la corriente.

## 6.10. Expansión multipolar del potencial vector

Al igual que hicimos con el potencial escalar, podemos hacer una expansión multipolar del potencial vector. Para ello, haremos un breve inciso en el cual determinaremos, a partir de las coordenadas del potencial vector, el tipo de desarrollo que vamos a emplear.

### 6.10.1. Desarrollo de las coordenadas para un punto arbitrario del espacio

Si tenemos una cierta densidad de corriente en el espacio y queremos determinar el potencial vector en un punto arbitrario del espacio, en general haremos uso de los dos vectores que ya conocemos,  $\vec{r}_0, \vec{r}_l$ , de forma que la posición relativa del sistema de coordenadas, la corriente y el punto donde deseamos conocer el potencial viene dada por  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_l$ . Si consideramos que el ángulo entre los vectores  $\vec{r}_0$  y  $\vec{r}_l$  es  $\theta$ , entonces podemos encontrar la siguiente relación entre módulos

$$r^2 = |\vec{r}_0 - \vec{r}_l|^2 = r_0^2 + r_l^2 - 2r_0 r_l \cos \theta$$

donde, para abreviar la notación, consideramos que  $r_j = |\vec{r}_j|$ . Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$r^2 = r_0^2 \left( 1 + \frac{r_l^2}{r_0^2} - 2 \frac{r_l}{r_0} \cos \theta \right).$$

De esta forma, si hacemos  $\epsilon = \left(\frac{r_I}{r_O}\right)^2 - 2\left(\frac{r_I}{r_0}\right)\cos\theta$ , nos queda una relación sencilla a partir de este parámetro

$$r = r_0 \sqrt{1 + \epsilon}.$$

Ahora bien, el potencial vector es proporcional a  $\frac{1}{r}$  y, por tanto, será proporcional a la función

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.34)$$

Si consideramos que la corriente está confinada en una región del espacio y que nos alejamos lo suficiente, es fácil ver que el parámetro  $\epsilon$  tenderá a cero. Esto así ya que, en fondo, depende de la relación de distancias entre la carga,  $r_I$  y el punto donde queremos conocer el potencial vector,  $r_0$ . En el fondo, estamos diciendo que si  $r_0 \gg r_I$ , entonces  $\epsilon \rightarrow 0$ . En ese caso, podemos desarrollar la función dada en la Ec.(6.34) entorno al punto  $\epsilon = 0$  y, por tanto, obtenemos

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \right)$$

Ahora bien, si sustituimos  $\epsilon$  tenemos

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{r_I}{r_O}\right)^2 - 2\left(\frac{r_I}{r_0}\right)\cos\theta \right] + \frac{3}{8} \left[ \left(\frac{r_I}{r_O}\right)^2 - 2\left(\frac{r_I}{r_0}\right)\cos\theta \right]^2 - \frac{5}{16} \left[ \left(\frac{r_I}{r_O}\right)^2 - 2\left(\frac{r_I}{r_0}\right)\cos\theta \right]^3 + O(\epsilon^4) \right).$$

En la expresión anterior se puede ver que el desarrollo de la función  $\frac{1}{r}$  presenta la forma de los llamados polinomios de Legendre <sup>8</sup>. De esta forma, la expresión anterior se puede representar de manera compacta como una serie de la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_I}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), \quad (6.35)$$

donde  $P_n$  son los llamados polinomios de Legendre que siguen la siguiente serie

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Nótese que la expresión obtenida Ec.(6.35) podría emplearse para cualquier magnitud que presentase la dependencia con  $r$ ,  $r_I$  y  $r_0$  que hemos supuesto. Si bien, en este caso, emplearemos esta expresión para llevar a cabo el desarrollo multipolar del potencial vector.

<sup>8</sup>Los polinomios de Legendre son una serie polinómica que resultan de resolver la llamada ecuación diferencial de Legendre. En este caso, el polinomio se identifica tomando  $\cos\theta$  como variable.

### 6.10.2. Desarrollo multipolar en polinomios de Legendre

Podemos aplicar ahora el desarrollo obtenido a cualquiera de las expresiones del potencial vector, es decir, para una corriente lineal, superficial o volumétrica. Por simplicidad, hagámoslo para una corriente lineal. Además, podemos pensar que dicha corriente lineal circulará a lo largo de un lazo cerrado como ocurriría, por ejemplo, en un circuito. Recordemos la expresión del potencial vector para una corriente lineal estacionaria y aplicándola a un lazo cerrado tenemos que

$$\mathbf{A}(\vec{r}_O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\vec{l}.$$

Si ahora insertamos el desarrollo dado por la Ec.(6,35), nos queda

$$\mathbf{A}(\vec{r}_O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_I}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta) d\vec{l}.$$

Tengamos en mente que las variables de integración en la expresión anterior son las coordenadas de la corriente, es decir,  $r_I$ . Por tanto, las coordenadas del punto donde deseamos conocer el potencial vector,  $r_O$ , pueden salir fuera de la integral. Es posible, además, introducir el factor  $\frac{1}{r_0}$  dentro del sumatorio de manera que quede  $\frac{1}{r_0^{n+1}}$ . Haciendo estos cambios se llega a la expresión

$$\mathbf{A}(\vec{r}_O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_0^{n+1}} \oint r_I^n P_n(\cos \theta) d\vec{l},$$

que es precisamente el desarrollo multipolar del potencial vector.

Al igual que hicimos con el potencial electrostático, se puede identificar distintos términos del desarrollo ligados a propiedades físicas del potencial vector. En el caso del potencial electrostático teníamos una suma de términos relacionada con el potencial de una sola carga (momento monopolar), de un dipolo (momento dipolar) o de un cuadrupolo (momento cuadrupolar) y, así, sucesivamente para los distintos órdenes del desarrollo. Hagamos lo mismo con el potencial vector.

### 6.10.3. Propiedades físicas del campo a partir de su expansión multipolar

Si escribimos explícitamente el potencial vector en su forma de expansión multipolar hasta tercer orden tenemos que

$$\mathbf{A}(\vec{r}_O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r_0} \oint d\vec{l} + \frac{1}{r_0^2} \oint r_I \cos \theta d\vec{l} + \frac{1}{r_0^3} \oint r_I^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right] + \mathcal{O}^4.$$

De la expresión anterior se pueden deducir algunas propiedades tanto del potencial vector como del campo magnético. Si nos fijamos, el desarrollo es bastante similar al obtenido con

el potencial electrostático. Es fácil identificar los términos de mayor a menor orden como término monopolar, término dipolar y término cuadrupolar. Ahora bien, si nos fijamos en el término monopolar, vemos que

$$\oint d\vec{l} = 0,$$

ya que la integral en un lazo cerrado del diferencial de línea es siempre nula. Si bien el cálculo lo hemos realizado para una corriente lineal a lo largo de un lazo cerrado, se puede demostrar que dicho término es siempre nulo independientemente del tipo de corriente que consideremos. Esto se puede interpretar de varias formas y, evidentemente, es consecuente con las propiedades del campo magnético:

- **No existen monopolos magnéticos.** Un monopolo magnético sería, de alguna forma, una carga fundamental que actuase como fuente del campo magnético. Sería el equivalente a la carga eléctrica en electrostática. Sin embargo, como hemos mencionado en varias ocasiones a lo largo del capítulo, en magnetostática las fuentes de campo magnético son las corrientes estacionarias o, lo que es lo mismo, las cargas moviéndose a velocidad constante. Por tanto, el hecho de que el término monopolar sea nulo no solo es consistente con nuestras hipótesis si no que, además, también lo es con las observaciones realizadas en la naturaleza.
- **Dado que la divergencia del campo magnético es nula, el término monopolar también debe serlo.** Desde un punto de vista matemático, si  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  es imposible que pueda existir un monopolo. Esto es así ya que esta expresión implica que las líneas de campo son siempre cerradas. Un monopolo (al igual que una carga puntual electrostática) genera líneas de campo rectilíneas y que divergen conforme crece la distancia y, consecuentemente, en el caso de existir tendríamos  $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ .

Una vez el término monopolar desaparece, el segundo término pasa a ser directamente el término dominante de la expansión. En este caso, se trata del término dipolar. Recordando la interpretación del desarrollo multipolar del potencial eléctrico, en este caso podemos concluir lo siguiente:

*El campo generado por cualquier distribución de corriente, independientemente de su forma, se puede aproximar en primer término al de un dipolo magnético.*

Dicho esto, el término dipolar magnético del potencial vector viene dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{A}_{dip}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \oint r_l \cos \theta d\vec{l}. \quad (6.36)$$

Ahora bien, recordemos que definimos el ángulo  $\theta$  como aquel que formaban los vectores  $r_0$  y  $r_l$ . Teniendo esto en cuenta es posible escribir  $r_l \cos \theta$  como el siguiente producto escalar  $\hat{u}_{r_0} \cdot \vec{r}_l$ , donde  $\hat{u}_{r_0}$  es el vector unitario en la dirección del vector  $\vec{r}_0$ . Sustituyendo en el potencial vector del dipolo magnético se llega a

$$\mathbf{A}_{dip}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \oint (\hat{u}_{r_0} \cdot \vec{r}_l) d\vec{l}. \quad (6.37)$$

Empleando el teorema de Stokes

$$\oint (\hat{u}_{r_0} \cdot \vec{r}_l) d\vec{l} = -\hat{u}_{r_0} \times \iint d\mathbf{S},$$

se llega a

$$\mathbf{A}_{dip}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\vec{m} \times \hat{u}_{r_0}}{r^2} \right), \quad (6.38)$$

donde hemos definido el momento dipolar magnético como

$$\vec{m} = I \iint d\mathbf{S}. \quad (6.39)$$

Cabe recordar que la integral de superficie anterior es a lo largo de la superficie encerrada por el lazo de la Ec.(6.37). Nuevamente, aparece una magnitud similar a la definida en el campo electrostático con la salvedad de que, una vez más, en este caso aparece un producto vectorial en la expresión.

## 6.11. Campo magnético de un dipolo magnético

Como hemos visto en la sección anterior, el primer término del desarrollo multipolar del potencial es el término dipolar. Debemos pensar que dicho desarrollo es, en el fondo, una aproximación. Una pregunta que debemos hacernos es si es posible que exista una densidad de corriente cuyo potencial vector solo contenga el término dipolar. Podemos pensar en dicho término como una corriente circular infinitesimal (recordemos que impusimos  $r_0 \gg r_l$ ). Por tanto, siempre que estemos lo suficientemente lejos de dicha corriente dicha corriente sea lo suficientemente pequeña, podremos aproximar el potencial vector de dicha corriente a un dipolo magnético.

Para calcular el campo magnético producido por el término dipolar del potencial vector resulta conveniente suponer que el dipolo esta orientado en la dirección de uno de los ejes cartesianos, por ejemplo, el eje  $z$  y lo centramos con respecto al origen de coordenadas. En ese caso,  $\text{vecr}_0 \vec{r}$ . Además,  $\vec{m} = m d\mathbf{S}$ , deforma que nos queda que

$$\vec{m} \times \hat{u}_r = |\vec{m}| \sin \theta \hat{u}_\phi,$$

donde hemos aplicado que  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |a||b| \sin \theta$ . Llamaremos  $m = |\vec{m}|$ .

En ese caso, el potencial vector irá en la dirección  $\hat{u}_\phi$  y es fácil ver que, en coordenadas esféricas, nos queda la expresión

$$\mathbf{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{u}_\phi.$$

Podemos calcular el campo magnético del dipolo a partir de la expresión anterior, aplicando la propia definición de potencial vector

$$\mathbf{B}_{dip}(\vec{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)$$

Si comparamos la forma del campo obtenido resulta similar a la de un dipolo eléctrico, aunque su naturaleza parezca totalmente distinta. Además, las líneas de campo generadas presentan la misma forma, ver Fig.(6.9).

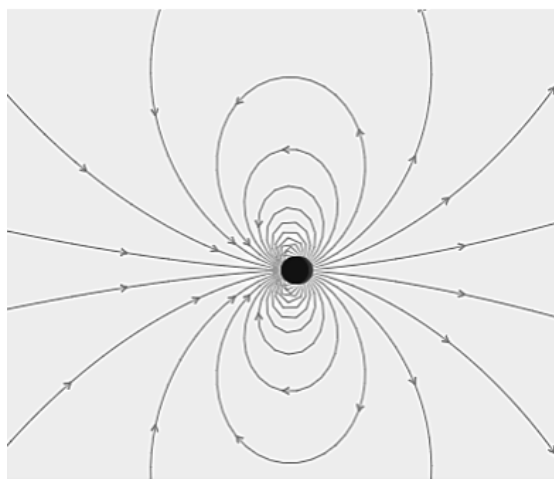


Figura 6.9: Esquema de las líneas de campo magnético generadas por un dipolo puro magnético.

Como veremos en el próximo capítulo, este modelo de dipolo magnético resulta muy útil cuando se quiere considerar la presencia de materia y como puede afectar un campo magnético a la misma. De alguna forma, emplearemos un modelo similar al que vimos en electrostática cuando supusimos que los dieléctricos estaban formados por un continuo de dipolos eléctricos.



## Problemas

- 6.1 Calcula el campo magnético de un hilo infinito por el que circula una corriente estacionaria empleando la ley de Ampère.

*Solución:*

En el apartado de teoría resolvimos este problema empleando la ley de Biot-Savart. En este caso, el problema se simplifica gracias a la ley de Ampère. Si aplicamos un lazo cerrado que envuelva el hilo conductor, aplicando dicha ley, se obtiene que

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}.$$

Si el lazo cerrado sigue una de las líneas de campo magnético, entonces la magnitud de dicho campo será uniforme en todo el lazo. Dada la simetría del problema, empleamos coordenadas cilíndricas de manera que  $d\vec{l} = rd\phi\hat{u}_\phi$ . Con esto, la integral de la parte izquierda de la ecuación queda como

$$B \oint_L \hat{u}_\phi \cdot (rd\phi\hat{u}_\phi) = Br \int_0^{2\pi} d\phi = B2\pi r.$$

Si llamamos  $I$  a la corriente que atraviesa el lazo amperiano, llegamos a

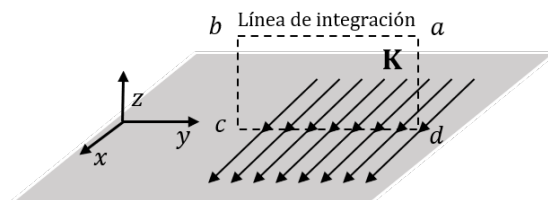
$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\phi.$$

donde, para conocer la dirección del campo (al igual que al calcular la integral), hemos de saber cual es la dirección del campo magnético.

- 6.2 Calcula, empleando la ley de Ampère, el campo magnético creado por un plano por el que circula una corriente estacionaria  $\mathbf{K} = K\hat{i}$ .

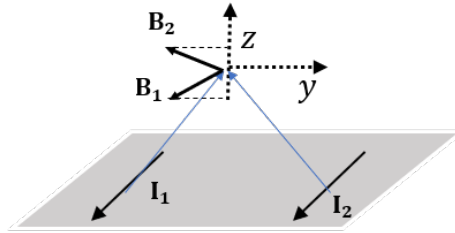
*Solución:*

Hagamos, en primer lugar, un esquema del problema planteado.



Tenemos una densidad superficial de corriente estacionaria circulando en el plano  $x - y$  en el sentido del vector  $\hat{i}$ . Lo primero que deberíamos deducir es la dirección que lleva el campo magnético. Podemos concluir, aplicando la regla de la mano derecha sobre el vector de posición de un punto arbitrario sobre la superficie y cualquier línea de corriente que vaya en el sentido de la corriente superficial, que el campo magnético estará contenido en el plano  $y - z$ . Ahora bien, dado que la superficie es infinita, para cualquier

línea de corriente situada en una cierta posición  $y_l$  podemos encontrar una equivalente en coordenadas  $-y_l$ . Esto implica que, al calcular el campo magnético de dicho par de líneas simétricas con respecto a la normal a la superficie el campo magnético presenta distintas direcciones. Esto se puede corroborar aplicando la regla de la mano derecha al sentido de la corriente y el vector de la posición donde se desea evaluar el campo magnético. Hagamos un esquema para visualizarlo mejor.



Como vemos, por la simetría del problema, la componente normal del campo eléctrico se anula y el campo resultante es la suma de las componentes tangenciales. Es decir, el campo magnético total tendrá dirección  $\mathbf{B} = -B\hat{j}$ . Nótese que, además, si el punto se encuentra por debajo del plano, es decir, en  $z < 0$ , el campo magnético va en sentido opuesto.

Dicho esto, apliquemos la ley de Ampère sobre el lazo de la primera figura

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Nótese que el lazo corta el plano y sus lados superior e inferior son equidistantes al mismo.

Dada la simetría, solo tendremos que integrar sobre el diferencial de línea de la coordenada  $y$ , esto es  $dy\hat{j}$  (la componente  $z$  es perpendicular al campo  $y$ , por tanto, el producto escalar se anula). Si llamamos  $l$  al lado del cuadrado de integración, entonces tenemos que

$$\oint_L \mathbf{B}_{z>0} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B_{z>0} dy + \int_c^d B_{z<0} dy = 2l B_{z>0}.$$

Por otro lado, la parte a la derecha de la igualdad de la ley de Ampère queda como

$$\mu_0 I_{enc} = \mu_0 K \int_0^l dy$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\mathbf{K}$  es uniforme en toda la línea de integración. Sustituyendo ambos resultados en la ley de Ampère y, teniendo en cuenta el cambio de sentido del campo magnético, obtenemos el siguiente resultado

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2} K \hat{j} & \text{si } z > 0 \\ \frac{\mu_0}{2} K \hat{j} & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

que, como era de esperar, es independiente de la longitud del lazo.

- 6.3 Supongamos una varilla delgada de longitud  $L$  con una carga eléctrica uniforme  $\lambda$  que rota entorno a uno de sus extremos. Calcula el campo magnético generada por la misma.

En este caso, en primer lugar, tendremos que realizar una aproximación. Si recordamos el capítulo 5, puede existir dos tipos de corrientes: de conducción (cargas moviéndose en un medio) o de convención (una carga estática en un medio que se mueve). Si bien la ley de Biot-Savart, en principio, no puede considerar el segundo caso, hagamos una aproximación. Dicha ley solo puede emplearse en casos en los que la corriente no varía con el tiempo. Es evidente que al rotar la varilla se produce una corriente de convección, sin embargo, dicha corriente solo existe en aquellos puntos en los que se encuentra la varilla para cada instante de tiempo. Para resolver este problema, obviaremos dicho efecto y supondremos que la varilla gira a velocidad suficiente como para considerar que la corriente generada es continua. Con esta premisa, podemos considerar que el diferencial de corriente viene dado por

$$dI = dr\lambda\frac{\omega}{2\pi}.$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de la varilla y donde, por simetría, identificamos que la corriente depende de la coordenada radial. En el capítulo calculamos el campo magnético de una espira infinitesimal sobre el eje que corta su centro. En este caso, podemos considerar la varilla giratoria como un conjunto de espiras infinitesimales que forman un continuo. Si partimos del resultado de una espira por la que circula una corriente estacionaria, es fácil ver que el campo magnético en el caso de la varilla vendrá dado por

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{\lambda\omega}{2\pi} \right) \int_0^L \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

Aunque la integral anterior es analítica, se recomienda el uso de software para obtener el resultado. Tras integrar, el campo magnético generado por la varilla queda como

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{L^2 + z^2}}{z} + \frac{L}{z} \right| + \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}} \right) \hat{k}.$$

- 6.4 Calcula el campo magnético de un solenoide muy largo formado por  $n$  vueltas por unidad de longitud sobre un cilindro de radio  $R$ . Considera que el solenoide transporta una corriente estacionaria  $I$ .

Consideremos que las  $n$  vueltas del hilos solenoide se encuentran juntas de manera que podemos considerar que la corriente efectiva es una corriente superficial que gira entorno al cilindro. En ese caso, la corriente superficial será  $\mathbf{K} = nI\hat{u}_\phi$ .

Podemos pensar en distintos lazos amperianos para calcular el campo magnético. Si pensamos en un lazo amperiano que forme una circunferencia que corte justo la superficie lateral del cilindro, es fácil ver que el campo magnético y el diferencial de línea serán perpendiculares y, por tanto, la integral de la ley de Ampère sera nula. Pensemos que, en su lugar, optamos por un lazo amperiano rectangular que corta transversalmente el

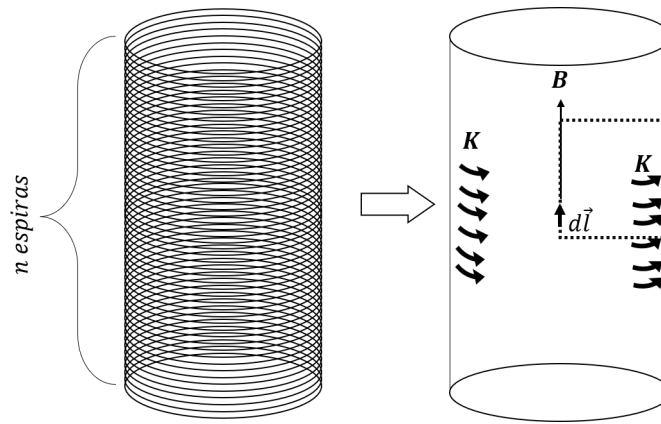


Figura 6.10: Aproximación de la corriente en un solenoide a una corriente superficial que circula por la superficie de un cilindro

cilindro pasando por su centro, tal como muestra la Fig.(6.10. Ciertamente, sabemos por simetría que el campo magnético en el eje del cilindro será paralelo al mismo. Además, si suponemos que el cilindro es infinito, los lados superior e inferior del rectángulo serán perpendiculares al campo magnético. Además, en la porción del lazo que atraviesa la corriente el campo magnético será nulo. Nos queda por tanto que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

donde

$$BL = \mu_0 KL.$$

o, en términos de la corriente lineal

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{k}.$$

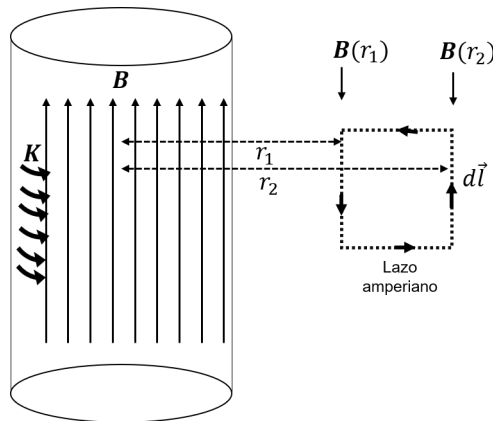


Figura 6.11: Aproximación de campos paralelos para un solenoide de longitud infinita y el lazo amperiano empleado para el cálculo del campo magnético en el exterior.

Si se quiere calcular el campo magnético en el exterior del solenoide existen distintos procedimientos. Obviamente, se podría aplicar la ley de Biot-Savart pero calcularlo de esta forma resulta bastante complicado. En su lugar, apoyándonos en la ley de Ampère y en los principios del campo magnético que ya conocemos, aplicaremos un método heurístico. Por un lado, sabemos que las líneas del campo magnético deben ser cerradas. Por tanto, si suponemos que el campo magnético apunta en el sentido positivo en el interior del cilindro, en el exterior deberá apuntar necesariamente en el sentido contrario para permitir que las líneas de campo se cierren. Además, si el cilindro es, como estamos suponiendo, infinitamente largo, las líneas de campo en su interior deben ser paralelas. Teniendo esto en cuenta, en el exterior del cilindro serán igualmente paralelas. Ahora bien, si aplicamos la ley de Ampère a un lazo cuadrangular en el exterior, tal como muestra la Fig.(6.11), se tiene que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = 0,$$

ya que el lazo no atraviesa ninguna corriente. Si ahora tenemos en cuenta que las líneas del campo magnético ha de ser paralelas al eje del cilindro en su exterior, solo contribuirán a la integral las partes del lazo paralelas a dicho eje. Se obtiene, por tanto que

$$(B(r_1) - B(r_2))L = 0$$

de donde se deduce que  $B(r_1) = B(r_2)$ . Ahora bien, tenemos total libertad a la hora de elegir el lazo y la condición anterior debe cumplirse independientemente de su tamaño. Si hacemos, por ejemplo,  $r_2 \rightarrow \infty$ , el campo magnético en dicho punto debe ser  $B(r_2) \rightarrow 0$ , ya que sabemos que el campo magnético en general disminuye con la distancia. De esta forma, se deduce que el campo magnético en el exterior es nulo y nos quedaría que

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{k} & \text{en el interior del solenoide} \\ 0 & \text{en el exterior del solenoide} \end{cases}$$

Realicemos un análisis de lo obtenido:

(a) Si consideramos un solenoide de longitud infinita formado por un continuo de  $n$  espiras el campo magnético en el interior depende exclusivamente del número de espiras y de la corriente que circula por ellas. Por tanto, no depende del radio del cilindro ni de su longitud.

(b) Obviamente, este es un caso poco realista ya que el campo magnético tenderá a infinito siempre que  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo, nos muestra como conseguir un campo magnético de gran intensidad por medio de un solenoide en el que, gracias al principio de superposición, el campo magnético en su eje es igual a la suma de los campos magnéticos de todas las espiras. Es fácil ver que, independientemente de donde nos coloquemos o de la espira que consideremos, el campo magnético en el eje apunta siempre en la misma dirección y sentido, haciendo que se sumen todas las contribuciones para conseguir un campo magnético amplificado.

(c) Es fácil ver que, si el solenoide no fuese infinito, el campo magnético en el exterior no sería nulo. Si es cierto que, si el solenoide es lo suficientemente largo, el campo magnético en el exterior es prácticamente despreciable. Esto es así ya que, si bien en el interior del cilindro las líneas de campo se encuentran concentradas, cuando salen al exterior del cilindro por un extremo trazan largas trayectorias en el espacio hasta cerrarse por el otro, ver la Fig.(6.12).

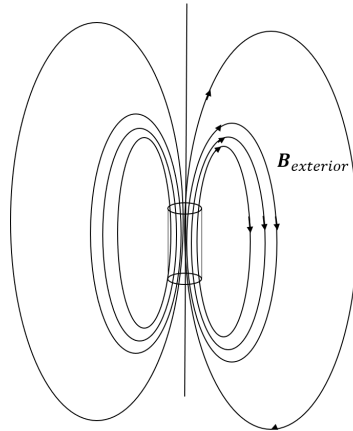


Figura 6.12: Aproximación de campos paralelos para un solenoide de longitud infinita y el lazo amperiano empleado para el cálculo del campo magnético en el exterior.

6.5 Calcula el potencial vector del solenoide del ejercicio anterior.

Para resolver este problema vamos a emplear la relación matemática existente entre la integral de línea en un lazo cerrado del potencial vector y el flujo del campo magnético:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_{\text{lazo}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Por simetría, tomemos un lazo cerrado en la dirección de una de las espiras que forman el solenoide en el interior del cilindro, es decir, con un radio  $r < R$ . Como sabemos, el potencial vector va en el mismo sentido que la corriente y, además, si esta es estacionaria será uniforme en cualquier punto del lazo. Por tanto, la parte a la izquierda de la igualdad queda como

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\vec{l} = A2\pi r.$$

Por otro lado, como conocemos el campo magnético en el interior del cilindro, podemos calcular el flujo a través de la superficie que encierra el lazo, es decir

$$\iint_{S_{\text{lazo}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 n I \pi r^2,$$

donde se ha tenido en cuenta que el campo magnético es uniforme en el interior y que, además, su dirección es paralela a la superficie que encierra el lazo. Igualando ambas expresiones tenemos que

$$A2\pi r = \mu_0 n I \pi r^2,$$

y, por tanto,

$$A = \frac{\mu_0 n I r}{2}, \quad \text{para } r < R.$$

Con esto tenemos la magnitud del potencial vector pero, como dijimos, su dirección en este caso será la misma que la de la corriente y, por tanto, nos queda que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \hat{u}_\phi, \quad \text{para } r < R.$$

Ahora bien, podemos tomar un lazo que encierre un corte transversal del cilindro, es decir, en el que  $r > R$ . En ese caso, la integral de línea del potencial vector será igual mientras que el flujo del campo magnético solo tendrá contribución la parte interior del cilindro. En este caso se tiene que

$$\iint_{S_{\text{lazo}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 n I \pi R^2,$$

de manera que el potencial vector da lugar a

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \hat{u}_\phi, \quad \text{para } r > R.$$

Como vemos, incluso en los puntos donde el campo magnético es nulo se puede definir el potencial vector. Esto no debería sorprendernos. Recordemos, por ejemplo, lo que ocurría con el potencial electrostático en el interior de una esfera conductora cargada. Si bien el campo en eléctrico en el interior era nulo, el potencial tenía un valor constante. De esta forma, al realizar el gradiente del potencial, se obtenía un campo eléctrico nulo. De manera similar, en este caso, se puede comprobar que  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  en el exterior del cilindro que, como cabía esperar, es un campo magnético nulo en el exterior del cilindro.

Comprobemos que, efectivamente, el rotacional del potencial vector es igual al campo magnético. Escribamos el rotacional en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\hat{u}_\phi & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

Tanto en el exterior como en el interior, el potencial vector solo tiene componente  $A_\phi$ . Además, en ambos casos, solo depende de la coordenada radial  $r$ . Por tanto, de todos los términos posibles solo queda  $\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \hat{k}$ . De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} \hat{k} = \mu_0 n I \hat{k} && \text{en el interior,} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \frac{\partial(1)}{\partial r} \hat{k} = 0 && \text{en el exterior.}\end{aligned}$$

Podemos ver que, efectivamente, el potencial vector cumple la premisa inicial de su definición: su rotacional debe ser igual al campo magnético. Además, comprobamos que, aunque el campo magnético sea nulo en una región del espacio, el potencial vector no tiene por qué ser cero.

### 6.6 Resuelve el problema anterior empleando la ley de Biot-Savart.

Supongamos en primer lugar un cilindro finito de longitud  $L$  cuyo eje coincide con el eje de coordenadas  $z$ . A partir del campo magnético de una espira calculado en el capítulo a partir de la ley de Biot-Savart, es decir,

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

podemos aplicar el principio de superposición para calcular el campo creado por el solenoide. Supongamos que el solenoide tiene  $n$  espiras por unidad de longitud, es decir, que  $n = \frac{N}{L}$  donde  $N$  sería el número total de espiras. Supongamos que el eje  $z$  pasa por el centro de todas las espiras. Es fácil ver que, para extender la ecuación anterior a un conjunto de espiras, tenemos que considerar la contribución de cada espira localizada, en coordenadas cilíndricas, en  $r_I = R$  y  $r_I = z_I$ . Recordando las relaciones empleadas en el cálculo de una espira, es fácil ver que el diferencial de campo magnético debido a un diferencial del cilindro viene dado por

$$d\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \frac{R^2 dz_I}{(R^2 + (z_0 - z_I)^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

y, por tanto, el campo magnético resultante de todas las contribuciones del solenoide sobre el eje  $z$  será

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R^2 dz_I}{(R^2 + (z_0 - z_I)^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

Resolvemos la integral anterior y sustituimos los límites para obtener

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{\frac{L}{2} + z}{(R^2 + (\frac{L}{2} + z)^2)^{1/2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{(R^2 + (\frac{L}{2} - z)^2)^{1/2}} \right) \hat{k}.$$

Si ahora consideramos que el cilindro es infinito, es decir, que  $L \rightarrow \infty$ , nos queda que



$$\mathbf{B}(z) = \mu_0 n I \hat{k},$$

que, como vemos, coincide con el resultado empleando la ley de Ampère en el interior del solenoide.

Debemos darnos cuenta que, si queremos calcular el campo en el exterior del cilindro (o cualquier punto del espacio), el problema resulta extremadamente complicado sin recurrir a la ley de Ampère. Si volvemos al campo de una espira y, en lugar de colocarnos en el eje  $z$  tratásemos de calcular el campo en un punto arbitrario del espacio, resulta evidente que la integral resultante no se puede resolver de manera sencilla.

6.7 Se tiene la siguiente distribución de corriente en un plano

$$\mathbf{J} = \begin{cases} J_0 e^{x/a} \hat{k} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

de manera que ocupa la mitad del espacio  $x - y - z$ . Calcula el campo magnético debido a dicha distribución de corriente. Los valores  $a$  y  $J_0$  son constantes.

Dada la forma de la corriente, podemos escoger una lamina infinitesimal de la dirección  $x$  de forma que, dicho elemento diferencial, tendrá una corriente superficial igual a

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} dx$$

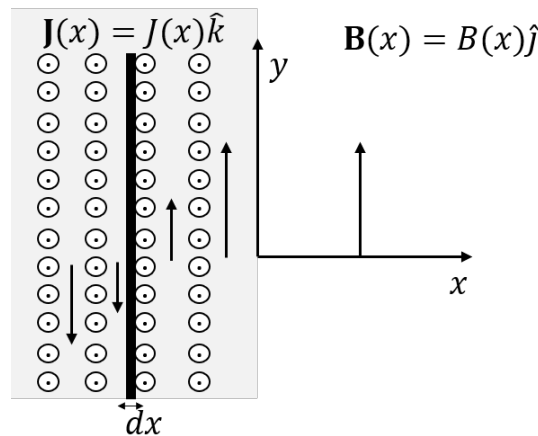


Figura 6.13: La mitad del espacio ocupado por una corriente que apunta en la dirección del eje  $z$  y varía según la posición en el eje  $x$ .

De esta forma, podemos considerar que la corriente esta compuesta por una serie de láminas infinitas cuya corriente es estacionaria. Teniendo esto en cuenta y, empleando el resultado obtenido en el ejercicio 2, podemos concluir que el diferencial de campo en coordenadas  $x > 0$  debido a una de dichas láminas infinitesimales será

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{J}(x) dx}{2} \hat{j}.$$

Si calculamos la contribución de cada lamina individual al campo en un cierto punto aplicando el principio de superposición, nos queda

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \int_{-\infty}^0 e^{x/a} dx \hat{j}.$$

y, por tanto

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} \left[ e^{x/a} \right]_{-\infty}^0 \hat{j}.$$

Finalmente, sustituyendo los límites de integración llegamos a

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} \hat{j}, \text{ para } x > 0.$$

Como puede observar, la corriente en el exterior es constante e independiente de  $x$ .

Por otro lado, para calcular el campo en la zona donde se encuentra la propia corriente, debemos tener en cuenta que las contribuciones del campo irán en sentido contrario para posiciones de  $x = -\infty$  hasta  $x = x_0$ , y de  $x = x_0$  hasta  $x = 0$ , siendo  $x_0$  el punto donde deseamos evaluar el campo magnético. Por tanto, tendremos las siguientes contribuciones

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2} \left( \int_{-\infty}^{x_0} e^{x/a} dx - \int_{x_0}^0 e^{x/a} dx \right) \hat{j}.$$

Resolviendo la integral y sustituyendo los límites de integración se llega a

$$\mathbf{B}(x_0) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} (2e^{x_0/a} - 1) \hat{j}, \text{ para } x < 0,$$

que, como vemos, depende de la posición  $x_0$ . Además, podemos identificar que el cambio de signo del campo se produce cuando

$$2e^{x_0/a} = 1,$$

o, lo que es lo mismo, para

$$x_0 = a \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Efectivamente, si sustituimos ese valor

$$\mathbf{B}(x_0) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} \left( 2e^{a/a \ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 \right) \hat{j} = 0.$$

y, por tanto, el para valores  $x < a \ln(1/2)$  el campo magnético será negativo.

6.8 Se tiene un bloque de corriente estacionaria cuyo espesor es  $2a$  y de longitud infinita por el que circula una densidad de corriente estacionaria  $\mathbf{J} = J\hat{k}$ . Calcula el campo magnético tanto dentro como fuera del bloque.

Al igual que en el problema anterior, podemos considerar el bloque como un conjunto de planos infinitesimales en la dirección  $x$ . y podría resolver de manera similar a dicho problema.

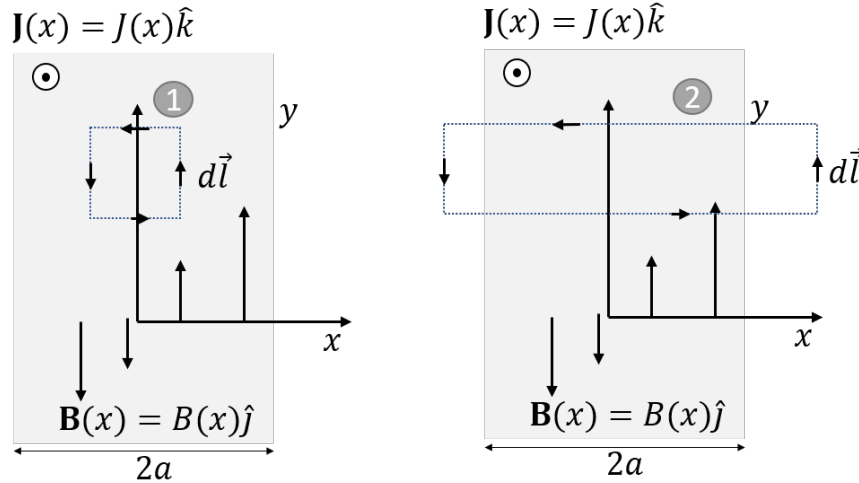


Figura 6.14: Bloque por el que circula una corriente en la dirección  $y$  (hacia dentro del papel).

En su lugar, empleamos en este caso la ley de Ampère, es decir,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Si escogemos de manera conveniente el lazo amperiano número uno mostrado en la Fig.(6.14), solo las líneas laterales contribuirán a la integral cerrada. Si llamamos  $L$  a la longitud del lado del cuadrado que forma el lazo amperiano queda que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = 2BL,$$

donde, basándonos en el problema anterior, hemos concluido que los vectores de campo magnético tienen las dirección y sentidos mostrados en la figura. Por otro lado, la corriente que atraviesa el lazo amperiano será

$$I_{enc} = JL(2x).$$

donde estamos considerando que los lados superior e inferior del rectángulo del lazo amperiano tienen una longitud igual a  $2x$ .

De esta forma, tras igualar en la ley de Ampère ambos resultados, nos queda que en el interior del bloque el campo magnético es

$$\mathbf{B} = \mu_0 J x \hat{j}, \text{ para } |x| < a.$$

Es fácil extender este resultado al exterior del bloque, es decir, si  $|x| > a$ . Para el lazo número dos mostrado en la figura, simplemente queda que

$$2Bl = \mu_0 2JLa,$$

de forma que

$$B = \mu_0 JLa.$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta la forma del campo, la dirección será siempre la misma pero el vector cambia de sentido dependiendo de si estamos en valores positivos o negativos del eje  $x$ . Consecuentemente, el campo en el todo el espacio se puede expresar como

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 JLa \hat{j} & \text{si } x > a \\ \mu_0 Jx \hat{j}, & \text{si } |x| < a. \\ -\mu_0 JLa \hat{j} & \text{si } x < a. \end{cases}$$

- 6.9 Se tiene una esfera hueca de radio  $R$  cargada uniformemente con una densidad de carga  $\sigma$ . Dicha esfera rota entorno a un eje que pasa por su centro con velocidad angular  $\omega$ . Calcula el potencial vector generado por la esfera.

En este caso, al igual que teníamos en el ejercicio 3, tenemos una corriente de convección. Si bien en este caso no debemos hacer ninguna suposición sobre la corriente ya que, debido a la simetría del problema, ahora sí se tiene una corriente estacionaria en la superficie de la esfera.

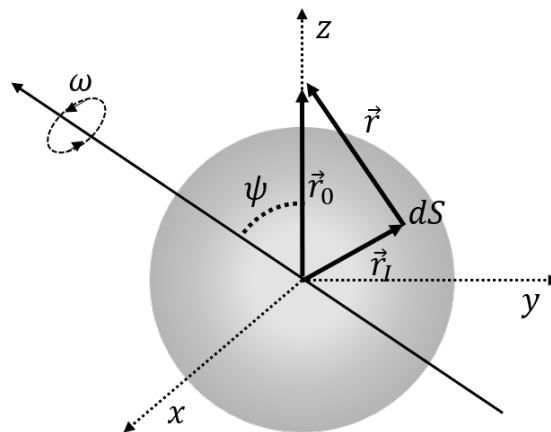


Figura 6.15: Esfera giratoria cargada uniformemente.

Nótese que, en este caso, aplicar la ley de Ampère no es trivial y si, además, queremos conocer el campo magnético en el exterior de la esfera, no obtendríamos ninguna información relevante a través de su aplicación. Es por ello que, para calcular el campo

magnético, recurrimos al potencial vector. Dado que la corriente es superficial, podemos aplicar la siguiente ecuación

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{K}}{r} dS.$$

En este caso,  $\mathbf{K} = \sigma\vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad lineal sobre la superficie de la esfera que, obviamente, dependerá del punto que consideremos. Sabemos que la velocidad en un punto de coordenadas  $\vec{r}$  de un cuerpo rígido rotatorio  $v$  dada por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_I$$

donde hemos particularizado para un cierto punto de la superficie localizado en coordenadas  $\vec{r}_I$ .

Ciertamente, tenemos libertad a la hora de escoger la dirección del eje de rotación de la esfera y, en principio, podíamos alinearlo con cualquiera de los ejes del sistema de coordenadas. Sin embargo, el resultado resulta más sencillo si escogemos el eje de rotación de manera que forme un ángulo  $\psi$  con el eje  $z$ , tal como muestra la Fig.(6.15). En este caso, la esfera giratoria presenta una corriente superficial que es debida a la densidad de carga superficial,  $\sigma$ , y la velocidad de rotación, es decir

$$\mathbf{K} = \sigma\vec{v}.$$

Por otro lado, la posición sobre cada punto de la esfera viene dada por la relación  $r = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta}$ , donde hemos tomado  $r_I = R$ . Además, el diferencial de superficie es coordenadas esféricas es  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Por otro lado, un punto cualquiera de la superficie esférica, en coordenadas cartesianas, vendrá dado por

$$(x, y, z) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta),$$

mientras que la velocidad de rotación será

$$\vec{\omega} = (\omega \sin \psi, 0, \omega \cos \psi).$$

Teniendo todo esto en mente, calculamos en primer lugar la velocidad lineal sobre un cierto punto de la esfera

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_I = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ (R \sin \theta \cos \phi) & (R \sin \theta \sin \phi) & (R \cos \theta) \end{vmatrix}$$

de donde se obtiene que

$$\vec{v} = R\omega(-\cos \psi \sin \theta \sin \phi \hat{i} + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \psi \cos \theta) \hat{j} + \sin \psi \sin \theta \sin \phi \hat{k}).$$

Sustituimos todos los valores (excepto la velocidad por el momento) en el potencial vector

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma\mu_0 R^3 \omega}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\vec{v} \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta}}.$$

Fijándonos en la integral y la forma que presenta la velocidad, es fácil darse cuenta que la mayoría de términos desaparecerán. Básicamente, todos los términos que dependen de  $\sin \phi$  o  $\cos \phi$  darán como resultado una integral nula ya que

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0,$$

de manera que el único término que resultará en una integral no nula es  $-\sin \psi \cos \theta \hat{j}$ . Tendremos por tanto que

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = -\frac{\sigma\mu_0 R^3 \omega \sin \psi}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta}} \hat{j}.$$

que, tras integrar en  $\phi$ , queda como

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = -\frac{\sigma\mu_0 R^3 \omega \sin \psi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta}} \hat{j}.$$

Para llevar a cabo la integral, hagamos un cambio de variable. Llamamos  $u = \cos \theta$ , de manera que  $du = -\sin \theta d\theta$ . Los límites de integración serán  $[-1, 1]$ . Con este cambio, el potencial vector queda como

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma\mu_0 R^3 \omega \sin \psi}{2} \int_{-1}^1 \frac{udu}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 u}} \hat{j}.$$

Calculemos la integral. Para ello, llamamos  $A = R^2 + r_0^2$  y  $B = 2Rr_0$ . La integral queda como

$$\int \frac{udu}{\sqrt{A - Bu}},$$

donde realizamos el cambio  $v = A - Bu$ , de donde  $dv = -du$ , para obtener

$$\int \frac{1}{B^2} \frac{v-A}{\sqrt{v}} dv = \frac{1}{B^2} \left( \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} - 2A \sqrt{v} \right).$$

Deshaciendo el segundo cambio y sustituyendo las constantes tenemos que

$$\int \frac{udu}{\sqrt{A-Bu}} = -\frac{2\sqrt{A-Bu}(Bu+2A)}{3B^2} = -\frac{2\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0u}(2Rr_0u+2(R^2+r_0^2))}{6R^2r_0^2}.$$

Ahora, sustituimos en el potencial vector incluyendo los límites de integración

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = -\frac{\sigma\mu_0R^3\omega\sin\psi}{2} \left| \frac{\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0u}(2Rr_0u+2(R^2+r_0^2))}{3R^2r_0^2} \right|_{-1}^1 \hat{j}.$$

que da lugar a

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma\mu_0R^3\omega\sin\psi}{2} \left( \frac{(2(R^2+r_0^2-2Rr_0))|R-r_0|}{3R^2r_0^2} - \frac{(2(R^2+r_0^2+2Rr_0))(R+r_0)}{3R^2r_0^2} \right) \hat{j}.$$

Podemos intuir que gran parte de los términos se van a cancelar pero, para ello, hemos de particularizar para ciertos valores de  $r_0$  ya que tenemos el factor  $|R-r_0|$ . En primer lugar, para puntos dentro de la esfera tenemos que  $r_0 < R$ . En ese caso, la expresión anterior se reduce a

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma\mu_0R^3\omega\sin\psi}{2} \frac{2r_0}{3R^2} \hat{j} = \frac{\sigma\mu_0R\omega r_0\sin\psi}{3} \hat{j}, \text{ para } r_0 < R.$$

Por otro lado, para puntos fuera de la esfera ( $r > R$ ) tenemos

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma\mu_0R^3\omega\sin\psi}{2} \frac{2R}{3r_0^2} \hat{j} = \frac{\sigma\mu_0\sin\psi R^4\omega}{3r_0^2} \hat{j}, \text{ para } r_0 > R.$$

El campo anterior podría relacionarse de forma sencilla con la rotación de la esfera aplicando que  $r_0\sin\psi\hat{j} = \omega \times r_0$ .

- 6.10 Calcula el campo magnético en el interior de la esfera del ejercicio anterior pero suponiendo que la esfera rota entorno al eje  $z$ .

En este caso, el problema se simplifica ya que podemos emplear directamente coordenadas esféricas en las que definiremos la corriente  $y$ , por tanto, el potencial vector directamente en la dirección de rotación. Es fácil ver que en ese caso, el potencial vector se reduce a

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0R\omega\sigma}{3} r \sin\theta \hat{u}_\phi & \text{si } r_0 < R \\ \frac{\mu_0R^4\omega\sigma}{3r^2} \sin\theta \hat{u}_\phi & \text{si } r_0 > R \end{cases}$$

Es fácil ver que, si aplicamos el rotacional al potencial vector, solo se obtendrá una componente, es decir

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos \theta \hat{u}_r - \sin \theta \hat{u}_\theta) = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} \hat{k}.$$



# Capítulo 7

## Magnetostática en medios materiales

De la misma forma que hicimos con los medios dieléctricos en electrostática, en magnetostática podemos emplear un modelo de dipolos magnéticos para representar el comportamiento ciertos medios. Existen ciertos fenómenos macroscópicos en los que, sin que aparentemente existan cargas en movimiento, aparece la acción de un campo magnético, por ejemplo, en un imán o una brújula orientándose hacia el polo norte. Si pensamos que los medios están compuestos de dipolos magnéticos infinitesimales,<sup>1</sup> dichos dipolos tendrán una orientación totalmente aleatoria. Como veremos, en algunos casos, al aplicar un campo magnético los dipolos tenderán a tener una dirección preferente. En este caso diremos que el medio está magnéticamente polarizado o, simplemente, magnetizado.

Ciertos medios materiales poseen la peculiar característica de permanecer magnetizados durante largos períodos de tiempo incluso cuando se deja de aplicar un campo magnético. Estos materiales son los llamados ferromagnéticos (el hierro es el mejor ejemplo) y forman lo que conocemos como imanes permanentes. El ferromagnetismo es bastante complejo de comprender desde el punto de vista teórico y, por ello, dejaremos este caso para el final como mera anécdota.

Nos centraremos en el resto de materiales magnetizables, como son los materiales diamagnéticos y lo paramagnéticos. Dado que la diferencia entre ambos se debe estudiar a un nivel más fundamental de lo que abarca el electromagnetismo clásico (básicamente está relacionado con las características de los electrones que interactúan con el campo magnético), trataremos ambos casos de la misma forma, es decir, como medios magnetizables siempre y cuando exista la acción de un campo magnético. Los materiales diamagnéticos y los paramagnéticos suelen presentar un grado de magnetización bajo por lo que su magnetización puede parecer nula a efectos macroscópicos. Sin embargo, si el campo magnético que produce la magnetización es lo suficientemente fuerte, es posible observar el efecto de dicha magnetización.

---

<sup>1</sup> Actualmente sabemos que este modelo representa en cierta medida lo que ocurre en el interior de un átomo: los electrones se mueven entorno al núcleo y, además, podemos entender que rotan sobre sí mismos generando ciertamente una corriente a escala atómica.

## 7.1. Magnetización

La magnetización de un cierto medio material en magnetostática es el equivalente a la polarización que vimos en electrostática. Si consideramos que los medios materiales están formados por dipolos magnéticos infinitesimales, podemos definir el vector de magnetización como la cantidad de momento dipolar magnético por unidad de volumen, es decir

$$\mathbf{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (7.1)$$

Como hemos comentado en la introducción del capítulo, en general, la orientación de los dipolos magnéticos será completamente aleatoria si no existe un campo externo que les otorgue una dirección preferente. Por ello, en ausencia de campos la magnetización neta en todo el volumen de un cierto medio será nula. Nuevamente, esto no quiere decir que localmente la magnetización sea cero ya que si el volumen considerado es lo suficientemente pequeño se tendrán en cuenta solo unos pocos dipolos y su contribución definitivamente no será nula.

### 7.1.1. Potencial vector de un medio magnetizado

Recordemos la fórmula del potencial vector de un dipolo magnético:

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Si consideramos ahora un medio de un cierto volumen  $V_m$  formado por un dipolos infinitesimales, es fácil extender el potencial vector de un dipolo a un volumen de ellos empleando el concepto de magnetización:

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_m} \frac{\mathbf{M}(\vec{r}_I) \times \hat{u}_r}{r^2} dV \quad (7.2)$$

Para poder interpretar la integral anterior, resulta útil emplear un desarrollo matemático equivalente al que hicimos con la polarización. recordando que  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_I$ , podemos escribir

$$\frac{\hat{u}_r}{r^2} = \frac{\hat{u}_r}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_I|^2} = \nabla_{r_I} \left( \frac{1}{|r_0 - r_I|} \right) \quad (7.3)$$

donde, como se muestra explícitamente, el gradiente actúa sobre las coordenadas  $\vec{r}_I$ , es decir, las coordenadas del medio magnetizado. Teniendo en mente que el operador nabla aplica sobre dichas coordenadas, por simplicidad, escribimos la relación anterior como

$$\frac{\hat{u}_r}{r^2} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

donde el signo el signo negativo de la derivación se cancela como puede verse en la Ec.(7.3) explícitamente. Teniendo esto en cuenta, el potencial vector queda como

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_m} \mathbf{M}(\vec{r}_l) \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dV. \quad (7.4)$$

En la expresión anterior se puede aplicar la siguiente identidad:

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla f,$$

donde, recordemos,  $f$  es una función escalar y  $\mathbf{F}$  una función vectorial. Identificando  $f = \frac{1}{r}$  y  $\mathbf{F} = \mathbf{M}$ , vemos que podríamos identificar la operación dentro de la integral con

$$\mathbf{F} \times \nabla f = f\nabla \times \mathbf{F} - \nabla \times (f\mathbf{F}),$$

que, en el caso que nos concierne, quedará como

$$\mathbf{M} \times \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{M} - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right).$$

Sustituimos la relación anterior en la integral, de manera que se obtienen dos términos

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_m} \left( \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{M} - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right) \right) dV,$$

es decir, nos quedan, en principio, dos integrales de volumen independientes

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iiint_{V_m} \frac{1}{r} (\nabla \times \mathbf{M}) dV - \iiint_{V_m} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right) dV \right].$$

En realidad, como vamos a ver, uno de los términos anteriores se puede expresar como una integral de superficie. Para verlo, permítanme hacer un pequeño inciso matemático.



**Teorema de la divergencia aplicado a un vector resultante de un producto vectorial.**

Pensemos en un cierto vector  $\vec{v}$  que proviene del producto vectorial de otros dos, llamémosles  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Ciertamente, podemos aplicar el teorema de la divergencia al vector  $\vec{v}$ , es decir

$$\iiint \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \oiint \vec{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ahora bien, si sustituimos en función de los vectores de origen tenemos que

$$\iiint \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \, dV = \oiint \vec{a} \times \vec{b} \cdot d\mathbf{S}.$$

El término a la izquierda de la igualdad es la identidad 6 vista en el capítulo 2 y, por tanto, lo podemos escribir como

$$\iiint \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \, dV = \oiint \vec{a} \times \vec{b} \cdot d\mathbf{S}.$$

Como vemos, obtenemos una expresión que relaciona los rotacionales de ambos vectores con la integral de superficie que encierra el volumen. Si tenemos en cuenta la hipótesis de partida, es decir, que el producto vectorial de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es otro vector, tenemos la libertad de escoger la forma de ambos vectores a voluntad. Por conveniencia, impondremos que  $\vec{b}$  sea un vector constante y que  $\vec{a}$  dependerá de las coordenadas espaciales. En ese caso, dado que  $\nabla \times \vec{b} = 0$ , nos queda simplemente que

$$\vec{b} \cdot \iiint (\nabla \times \vec{a}) \, dV = \oiint \vec{a} \times \vec{b} \cdot d\mathbf{S}.$$

Aplicemos ahora un par de propiedades matemáticas a la integral de superficie. Por un lado, empleamos la propiedad del producto vectorial  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ . Y por otro, usaremos la propiedad cíclica del producto mixto, es decir  $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot d\mathbf{S} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times d\mathbf{S})$ , se llega a

$$\vec{b} \cdot \iiint (\nabla \times \vec{a}) \, dV = -\vec{b} \cdot \oiint (\vec{a} \times d\mathbf{S}).$$

o, eliminando el vector  $\vec{b}$  a ambos lados

$$\iiint (\nabla \times \vec{a}) \, dV = - \oiint \vec{a} \times d\mathbf{S}.$$

Como vemos, hemos obtenido algo similar al teorema de la divergencia pero con un rotacional en lugar de la divergencia en la integral de volumen y un producto vectorial en lugar del producto escalar en la integral de superficie.

Aplicando el resultado de la demostración anterior al potencial vector de un medio magnetizado nos queda

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iiint_{V_m} \frac{1}{r} (\nabla \times \mathbf{M}) dV + \oiint_{S_m} \frac{1}{r} (\mathbf{M} \times d\mathbf{S}) \right].$$

Nótese que en el primer término no se puede aplicar la relación anterior ya que  $\frac{1}{r}$  está dentro de la integral pero fuera del rotacional y, por tanto, no tenemos la misma expresión.

Podemos interpretar el potencial vector anterior de manera similar a lo que obtuvimos en el caso de la polarización y el potencial escalar en el tema 4. Llamamos

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

la densidad de corriente en volumen debida a magnetización y

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{u}_S$$

la densidad de corriente superficial debida a magnetización, donde  $\hat{u}_S$  es el vector unitario normal a la superficie del medio. Podemos reescribir el potencial vector como

$$\mathbf{A}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iiint_{V_m} \frac{\mathbf{J}_M}{r} dV + \iint_{S_m} \frac{\mathbf{K}_M}{r} dS \right]. \quad (7.5)$$

De esta forma, un medio con una cierta magnetización presentará, en general, una corriente en volumen y una corriente superficial debidas a dicha magnetización.

Si el medio presenta una magnetización uniforme, entonces  $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = 0$  y solo presentará una corriente superficial  $\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{u}_S$ . Aunque no sea una norma general, si podemos ver que, mientras las fuentes del campo eléctrico son escalares las del campo magnético son vectoriales.

Una vez más, tenemos un cierto paralelismo con electrostática. Recordemos que la carga debida a polarización en volumen venía dada por  $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  y la carga superficial  $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{u}_S$ . Aunque no sea una norma general, podemos ver que en muchas de las relaciones donde en el campo eléctrico aparece un producto escalar en el campo magnético aparece un producto vectorial. En el fondo, esto es una consecuencia natural del tipo de fuentes que presentan ambos campos.

## 7.2. El campo magnético en un medio material: Ley de Ampère generalizada

Como hemos visto, un efecto de la magnetización de un medio material es la aparición de dos corrientes: una en volumen ( $\mathbf{J}_M$ ) y otra en superficie ( $\mathbf{K}_M$ ). Evidentemente, dichas corrientes tienen un potencial vector asociado (Ec.7.5) y, por tanto, también un campo magnético. Cuando vimos la definición del campo  $\mathbf{B}$ , dijimos que clásicamente se llamaba campo de inducción magnética. En realidad, el campo magnético clásico está relacionado con  $\mathbf{B}$  y tiene especial utilidad cuando se tiene un medio magnetizado. Dicho campo, al que llamaremos  $\mathbf{H}$ , es el equivalente magnético al vector de desplazamiento  $\mathbf{D}$  en electrostática. Para evitar redundancias en el nombre, le llamaremos el campo auxiliar magnético<sup>2</sup>. Dicho esto, veamos de donde surge dicho campo.

De manera general, la corriente en un cierto material se puede expresar como

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_{ex},$$

donde  $\mathbf{J}_{ex}$  es la corriente externa presente debida, por ejemplo, a una fuerza electromotriz. Si aplicamos la ley de Ampère en forma diferencial a dicho medio genérico, tendríamos que

<sup>2</sup>En algunos textos se les llama campo magnético tanto a  $\mathbf{H}$  como a  $B$ . En ocasiones, también se le llama intensidad de campo magnético a  $\mathbf{H}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Reescribiendo la expresión anterior y sustituyendo la corriente total tenemos que

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_{ex} = \nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{J}_{ex}.$$

Agrupando los términos del campo y de la magnetización se obtiene finalmente que

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{ex}. \quad (7.6)$$

En la expresión anterior resulta natural la definición de un nuevo campo, el campo magnético auxiliar

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (7.7)$$

de manera que la ley de Ampère generalizada en forma diferencial depende exclusivamente de la corriente externa, es decir

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ex}.$$

Es fácil llegar a la forma integral de la ley de Ampère aplicando el teorema de Stokes, que resulta en

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = I_{ex}^{enc}$$

donde  $I_{ex}^{enc}$  es la corriente total que atraviesa el lazo de integración.

Nótese que el nuevo campo magnético auxiliar no tiene que cumplir las mismas condiciones que el campo  $\mathbf{B}$ . Por ejemplo, sabemos que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Sin embargo, si aplicamos la divergencia al campo magnético auxiliar resulta en

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (7.8)$$

Por tanto, si aplicamos el teorema de la divergencia al campo  $\mathbf{H}$  obtenemos

$$\oiint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

Es fácil ver que las condiciones en la interfase de una cierta corriente superficial de  $\mathbf{H}$  y de  $\mathbf{B}$  van a ser distintas.

### 7.3. Condiciones del campo en la frontera

En el capítulo anterior obtuvimos las condiciones que debían cumplir las componentes normal y tangencial del campo magnético al atravesar una cierta corriente superficial. Llegamos a la conclusión de que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{1,n} - B_{2,n} = 0.$$

y, para la componente tangencial

$$B_{1,t} - B_{2,t} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{u}_S.$$

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento y, teniendo en cuenta que para el campo magnético auxiliar la divergencia no es nula (Ec.(7.8)), se llega a

$$H_{1,n} - H_{2,n} = -(M_{1,n} - M_{2,n}), \quad (7.9)$$

o, lo que es lo mismo,

$$H_{1,n} + M_{1,n} = H_{2,n} + M_{2,n}. \quad (7.10)$$

Es decir, la suma de las componentes normales del campo auxiliar y el vector de magnetización se conserva <sup>3</sup>. Por otro lado, las componentes tangenciales en la interfase mantienen exactamente la misma forma que en el campo magnético con la salvedad de que, en el campo auxiliar, hemos de explicitar que la densidad de corriente es externa al medio (es decir, no es debida a magnetización). Además, la permeabilidad magnética no aparece explícitamente ya que la incluimos de manera implícita en el propio campo  $\mathbf{H}$ . Por tanto, se obtiene que

$$H_{1,t} - H_{2,t} = \mathbf{K}_{ext} \times \hat{u}_S.$$

### 7.4. Susceptibilidad magnética

En el caso de los materiales diamagnéticos y paramagnéticos, la magnetización del medio ocurre en presencia de un campo magnético externo. Si el campo desaparece también lo hace la magnetización <sup>4</sup>. Es un hecho experimental que, para la mayoría de sustancias de este tipo, la magnetización es directamente proporcional al campo aplicado. En realidad es proporcional al campo auxiliar  $\mathbf{H}$ . Consecuentemente, podemos escribir la siguiente relación

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (7.11)$$

<sup>3</sup>Obviamente, dicha suma está directamente relacionada con las componentes normales de  $\mathbf{B}$  si nos fijamos en la propia definición de  $\mathbf{H}$ .

<sup>4</sup>En los medios ferromagnéticos no tiene por qué ocurrir de esta forma.

Al igual que ocurría en electrostática con la polarización y el campo eléctrico, la ecuación anterior será solo cierta para medios lineales, homogéneos e isótropos. La constante de proporcionalidad  $\chi_m$  se conoce como susceptibilidad magnética. La susceptibilidad magnética nos dirá la tendencia que tiene un material a ser magnetizado en presencia de un campo magnético. Los materiales diamagnéticos y paramagnéticos presentan una baja susceptibilidad (en el orden de  $10^{-2}$  a  $10^{-9}$ ). La diferencia entre ambos es la orientación que toma el vector de magnetización. En el caso de los materiales **diamagnéticos** la susceptibilidad es **negativa** mientras que en los **paramagnéticos** es **positiva**. Es decir, en el primer caso la magnetización se orienta en sentido opuesto al campo mientras que en el segundo presenta la misma orientación que el campo.

Dadas las condiciones anteriores, podemos reescribir el campo magnético como

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}. \quad (7.12)$$

A partir de la fórmula anterior surge, de manera natural, la definición de la permeabilidad del medio magnetizado

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m). \quad (7.13)$$

Si no existe medio material, es decir, en el vacío, tenemos que  $\chi_m = 0$ , de manera que recuperaríamos las ecuaciones del campo magnético vistas en el capítulo anterior.

En cuanto al tipo de material, podemos concluir que si es diamagnético los dipolos se orientarán en sentido contrario al campo lo que producirá corrientes debidas a magnetización que irán igualmente en el sentido contrario a la propia corriente. En el caso paramagnético, tanto los dipolos como las corrientes debidas a magnetización llevarán la misma dirección y sentido que el campo y la corriente externa, respectivamente.

## 7.5. Medios ferromagnéticos

Los materiales ferromagnéticos son un caso muy particular en el cual los dipolos magnéticos mantienen una orientación preferente incluso en ausencia de un campo magnético externo. Este fenómeno se puede explicar a un nivel más fundamental de lo que concierne a esta asignatura por lo cual no entraremos en profundidad en su estudio. Sin entrar en detalles, digamos que está relacionado con el principio de exclusión de Pauli y el spin de los electrones libres del material. Además, los materiales ferromagnéticos son intrínsecamente no lineales y, por tanto, la relación entre el campo magnético y la polarización no es directa.



## Problemas

- 7.1 Calcula el campo magnético sobre el eje en el interior de un medio cilíndrico de radio  $R$  y longitud  $L$  magnetizado. Supón que el medio está magnetizado uniformemente a lo largo del eje del cilindro. ¿Cuál sería el campo si  $L \rightarrow \infty$ ?

*Solución:*

En primer lugar, dado que la magnetización es uniforme, la corriente volumétrica debida a magnetización es nula, es decir

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = 0.$$

Por otro lado, la corriente superficial debida a magnetización viene dada por

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{u}_S.$$

En este caso particular,  $\mathbf{M} = M\hat{k}$ , donde escogemos que el eje del cilindro vaya en la dirección  $z$ . En ese caso, si empleamos coordenadas cilíndricas, el cilindro presenta tres superficies: la superficie lateral cuya normal va en la dirección  $\hat{u}_r$  y las dos bases cuya normal va en dirección  $\hat{k}$ . El producto vectorial con las bases será nulo, ya que su vector normal va en la misma dirección que el vector de magnetización y, por tanto, solo la superficie lateral presentará una corriente debida a magnetización

$$\mathbf{K}_M = M\hat{u}_r \times \hat{k} = M \mathbf{u}_\phi.$$

Como vemos, el resultado es una corriente estacionaria sobre la superficie lateral que gira entorno al eje del cilindro. Es decir, el campo magnético será equivalente al de un conjunto de espiras por las que circula una corriente estacionaria  $M\hat{u}_\phi$ . Por tanto, el campo magnético será

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 MR^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz_I}{(R^2 + (z_0 - z_I)^2)^{3/2}} \hat{k},$$

es decir, aplicando el principio de superposición sumamos todas las contribuciones de cada diferencial de superficie del medio sobre el eje  $z$ . Resolviendo la integral se llega a

$$\mathbf{B}(z_0) = \frac{\mu_0 MR^2}{2} \left( \frac{\frac{L}{2} + z}{(R^2 + (\frac{L}{2} + z)^2)^{1/2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{(R^2 + (\frac{L}{2} - z)^2)^{1/2}} \right), \text{ para } |z| < \frac{L}{2}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\mathbf{M} = M\hat{k}$ .

Por último, si suponemos que el cilindro es infinito, es decir, que  $L \rightarrow \infty$ , nos queda

$$\mathbf{B}(z) = \mu_0 \mathbf{M}.$$

7.2 Calcula las corrientes debidas a magnetización en una esfera uniformemente magnetizada

*Solución:*

Si la esfera está uniformemente magnetizada, el vector de magnetización mantendrá su dirección y sentido en todo el interior de la esfera. Supongamos, por ejemplo, que dicho vector viene dado por  $\mathbf{M} = M\hat{k}$ . En cualquier caso, si la magnetización es uniforme, no existirá corriente debida a magnetización en volumen ya que

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = 0.$$

Por otro lado, para considerar la posible corriente superficial debida a magnetización, debemos tener en cuenta que el vector normal a la superficie de la esfera varía con la posición. Podemos considerar que el vector normal que recorre la superficie de la esfera con respecto al vector  $\mathbf{M}$  es  $\hat{n} = \hat{u}_r \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo del vector normal con el eje  $z$ . Por tanto, la corriente superficial debida a magnetización será

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{u}_\phi.$$

7.3 Calcula el campo magnético auxiliar en un cilindro de radio  $R$  de un cierto material diamagnético que transporta una corriente uniformemente distribuida en dirección del eje del cilindro,  $\mathbf{I} = I\hat{k}$ . Considera que la corriente  $I$  es la corriente total en una sección transversal del cilindro.

Dado que nos dicen que el material es diamagnético, la susceptibilidad será negativa. Ello implica que los dipolos del material se orientarán en sentido contrario al campo y, consecuentemente, cualquier corriente debida a magnetización será antiparalela a la propia corriente.

Para realizar este problema aplicamos la ley de Ampère generalizada

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = I_{ext}.$$

Tomamos el lazo amperiano que se muestra en la Fig(7.1), de manera que se obtiene que

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H.$$

y, por otro lado

$$I_{ext} = \pi r^2 \frac{I}{\pi R^2},$$

donde hemos tenido en cuenta que, como se nos dice en el enunciado,  $I$  es la corriente total por sección transversal del cilindro y, por tanto, la corriente por unidad de superficie

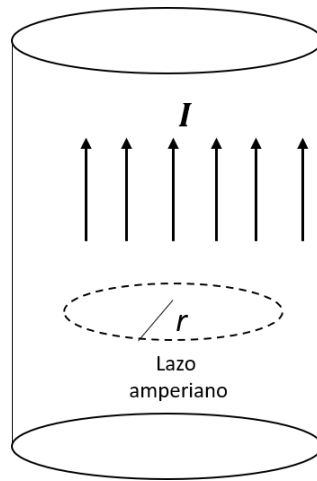


Figura 7.1: Lazo amperiano para calcular el campo en el interior del cilindro.

en el cilindro será  $K = \frac{I}{\pi R^2}$ . Igualando ambos resultados dados por la ley de Ampère se llega a

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r.$$

Ahora bien, dado que la corriente circula en la dirección del eje del cilindro, es decir, en la dirección y sentido del vector unitario  $\hat{k}$ , si empleamos coordenadas cilíndricas, es fácil ver que el campo magnético irá en la dirección del vector  $\hat{u}_\phi$ . El campo magnético en el interior será

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi R^2} r \hat{u}_\phi, \text{ para } r \leq R.$$

Si ahora tomamos un lazo cuyo radio sea mayor que el radio del cilindro, nos queda

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r,$$

mientras que la corriente encerrada es

$$I_{enc} = I \frac{\pi R^2}{\pi R^2} = I,$$

lo cual es, básicamente, la propia definición que nos da el problema de la corriente  $I$  (corriente total por sección transversal del cilindro). Por tanto, el campo magnético auxiliar en el exterior es

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{u}_\phi, \text{ para } r \geq R.$$

Nótese que, en la región exterior del cilindro si consideramos que hay vacío, tenemos que la magnetización es nula, es decir,  $\mathbf{M} = 0$ . Por tanto, la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  es directa

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{I\mu_0}{2\pi r} \hat{u}_\phi, \text{ para } r \geq R.$$

Con los datos que nos proporciona el problema no tenemos forma de conocer el vector de magnetización en el interior del cilindro.

- 7.4 Supón que el cilindro del problema anterior presenta un vector de magnetización  $\mathbf{M} = Cr\hat{k}$ , siendo  $C$  una cierta constante. Además, considera que, en este caso, no existe ninguna corriente externa y que la longitud del cilindro es mucho mayor a su radio. Calcula el campo magnético en todo el espacio.

*Solución:*

En este problema, podemos aplicar dos procedimientos que deben conducir al mismo resultado.

*Primer procedimiento*

En este caso, calculamos las corrientes debidas a magnetización, es decir

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{u}_r.$$

Calculemos en primer lugar la corriente en volumen. Aplicamos el rotacional en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\hat{u}_\phi & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & Cr \end{vmatrix} = -C\hat{u}_\phi$$

Por otro lado, la corriente superficial será

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{u}_r|_{r=R} = CR(\hat{k} \times \hat{u}_r) = CR\hat{u}_\phi.$$

Como vemos, ambas corrientes son estacionarias e uniformes a lo largo del cilindro.

Una vez conocemos las corrientes debidas a magnetización, podemos directamente aplicar la ley de Ampère para calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$ . Si nos fijamos en la dirección de las corrientes, es fácil ver que, al igual que hicimos en problemas anteriores en los que la corriente en un cilindro iba en dirección  $\hat{u}_\phi$ , el lazo más conveniente será un rectángulo con dos de sus lados paralelos al eje del cilindro. Escribamos la ley de Ampère <sup>5</sup>

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}.$$

<sup>5</sup>Nótese que, si aplicáramos la ley de Ampère generalizada la corriente encerrada sería nula ya que, en ese caso, se refiere explícitamente a la corriente externa, es decir, a corriente no debida a magnetización del medio.

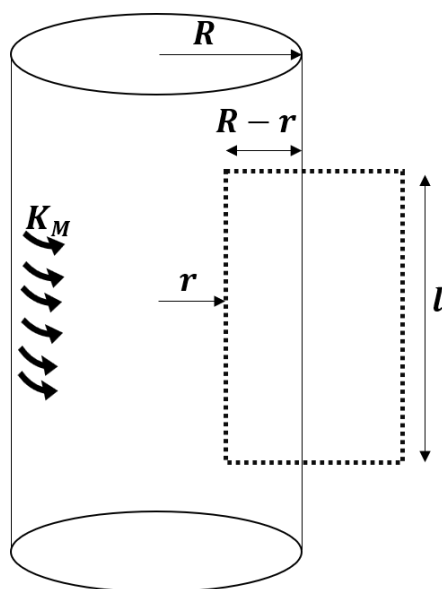


Figura 7.2: Lazo amperiano para calcular el campo en el interior del cilindro a partir de las corrientes debidas a magnetización.

La corriente encerrada en el lazo será directamente la suma de la contribución de las corrientes debidas a magnetización, es decir

$$I_{enc} = \int K_M dl + \iint J_M dS.$$

En este caso, resulta conveniente optar por un lazo como el que aparece en la Fig. (7.2) (podría emplearse otro tipo de lazo, simplemente el resultado quedará más elegante de esta forma). A partir de este lazo, las corrientes quedarán como

$$I_{enc} = \int_0^l K_M dl + \int_0^l \int_0^{R-r} J_M dS,$$

que, tras sustituir las corrientes, da lugar a

$$I_{enc} = CRl - (R - r)lC = Crl.$$

Por otro lado, dada la geometría del problema y dado que las corrientes son constantes, es fácil intuir que el campo magnético debido a magnetización irá en la dirección del eje del cilindro. Además, su magnitud será constante si consideramos que el cilindro tiene una longitud infinita y, por tanto, como vimos en el problema del solenoide del capítulo anterior, el campo magnético en el exterior del cilindro será nulo. Es decir, la integral del campo será directamente

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = B \int_0^l dl = Bl,$$

ya que solo contribuye uno de los lados del rectángulo a dicha integral (en los otros dos, o bien el diferencial de desplazamiento es perpendicular al lado o bien el campo magnético es nulo). Igualando ambas contribuciones a la ley de Ampère y asumiendo por simetría la dirección del campo magnético llegamos a

$$\mathbf{B} = \mu_0 Cr \hat{k}.$$

*Segundo procedimiento*

Pudiera parecer que hemos realizado algún paso que no debiéramos en el primer procedimiento. Si tenemos un medio material, ¿por qué no es posible aplicar la ley de Ampère generalizada? Como vamos a ver, podemos aplicar dicha ley de forma directa y el resultado lo obtendremos de manera inmediata. Dicha ley nos dice que

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = I_{ext}.$$

Es una premisa de esta ley y, además consecuencia natural de la misma, que si no existen corrientes externas (no debidas a magnetización) necesariamente el campo magnético auxiliar será nulo. Es decir, tenemos que  $\mathbf{H} = 0$  en todo el espacio. Ahora bien, si vamos a la propia definición del campo magnético auxiliar tenemos que

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Y, por tanto, tenemos que

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 Cr \hat{k}.$$

que es exactamente la misma forma que obtuvimos mediante el primer procedimiento.

Como vemos, este segundo procedimiento es mucho más sencillo y podremos aplicarlo siempre que:

- i) **No existan corrientes externas.**
- ii) Conozcamos la forma del **vector de magnetización.**

7.5 Se tiene un solenoide infinito formado por  $n$  espiras por unidad de longitud por las que circula una cierta corriente  $I$ . Se rellena el solenoide con un medio lineal de susceptibilidad magnética  $\chi_m$ . Calcula el campo magnético en el interior del solenoide.

Si aplicamos la ley de Ampère generalizada a un lazo que sea una sección transversal del solenoide, es fácil ver que obtenemos directamente el campo magnético auxiliar. Es decir

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = I_{ext},$$

que quedará como

$$H2\pi R = nI2\pi R,$$

y, por tanto,  $H = nI$ . Además, el campo  $\mathbf{H}$  es paralelo al campo  $B$  por lo que la dirección del campo auxiliar será la del eje  $z$ , es decir,  $\mathbf{H} = nI\hat{k}$ .

Por otro lado, en presencia de un medio material de susceptibilidad  $\chi_m$ , ambos campos están ligados a través de la susceptibilidad magnética. Empleamos la expresión que los liga para obtener

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0(1 + \chi_m)nI\hat{k}.$$

Podemos concluir que, dependiendo del tipo de medio que exista en el interior del solenoide el campo magnético se verá amplificado o reducido, esto es:

- i) Medio paramagnético ( $\chi_m > 0$ ) El campo magnético se amplifica.
- ii) Medio diamagnético ( $\chi_m < 0$ ) El campo magnético se reduce.

Obviamente, este efecto se debe a las corrientes de magnetización. Como hemos comentado a lo largo del capítulo, si el medio es paramagnético la corriente de magnetización va en el mismo sentido que la propia corriente externa, lo que generará un campo magnético que se sumará al campo magnético externo. Si el material es diamagnético ocurrirá lo contrario: la corriente debida a magnetización irá en sentido contrario a la corriente externa, creando un campo magnético que se restará al campo magnético externo. En este caso, se puede calcular la magnetización directamente a partir de

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} = nI\hat{k}.$$

Por tanto, la corriente superficial debida a magnetización es

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \hat{u}_r = \chi_m nI \hat{u}_\phi.$$

Como habíamos intuido, si el medio es paramagnético la corriente fluye en el mismo sentido que la corriente externa y, en el caso diamagnético, en el sentido contrario.

# Capítulo 8

## Inducción electromagnética y ecuaciones de Maxwell

En todo el desarrollo del curso hemos considerado que los campos son estacionarios, es decir, que no presentan una variación temporal. Ello nos ha llevado a la obtención de las ecuaciones de Maxwell estacionarias que, en su forma más general, son

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{ex}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{ex}\end{aligned}$$

Sin embargo, las ecuaciones anteriores deben cambiar cuando los campos presentan variación temporal como se demostró experimentalmente. En primer lugar, veamos un primer experimento que permitió completar la dependencia temporal de una de las ecuaciones de Maxwell.

### 8.1. Ley de Faraday

La ley de Faraday proviene de una serie de experimentos realizados por Michael Faraday en 1831. Sin bien su hipótesis inicial era que, al igual que una serie de cargas moviéndose de manera estacionaria por efecto de un campo eléctrico generan un campo magnético, pudiera ser que un campo magnético fuese capaz de generar a su vez una corriente estacionaria. A pesar que su hipótesis inicial no era del todo correcta (consideraba un campo magnético estacionario) si se percató de que, siempre que el campo magnético variase con respecto al tiempo, se generaba una cierta corriente en el circuito. De esta forma, su hipótesis inicial, con la puntualización de que el campo magnético debe ser variable, pasó a ser una evidencia:

**Un campo magnético variable induce un campo eléctrico.**

Faraday comprobó experimentalmente que el campo eléctrico inducido es proporcional a la variación del flujo magnético a través del circuito. Es decir, la fuerza electromotriz inducida en el circuito viene dada por



$$\mathcal{E}_{EM} = -\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Recordando la definición de fuerza electromotriz nos queda que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Por otro lado, el flujo del campo magnético viene dado por

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Por tanto, nos queda que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ahora bien, aplicando el teorema de Stokes a la parte del campo eléctrico, finalmente se deduce que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \quad (8.1)$$

que es la fórmula de la conocida como ley de Faraday.

## 8.2. El campo eléctrico inducido

De alguna forma, podemos entender que existen dos tipos de campos eléctricos. Unos debidos a cargas eléctricas, para los cuales podemos emplear la ley de Coulomb y aquellos inducidos por campos magnéticos en movimiento. Nótese que, una vez supuesta una cierta variación temporal de uno de los campos, debemos abandonar la nomenclatura de electro- y magnetoestática. A partir de ahora hablaremos en todo caso de electrodinámica. De alguna forma, podíamos distinguir explícitamente la naturaleza intrínseca de ambos campos eléctricos y nombrar un nuevo campo vectorial que fuese áquel debido a un campo magnético cambiante. Sin embargo, dado que el efecto de ambos campos (el electrostático y el inducido) es el mismo, llamaremos a ambos  $\mathbf{E}$ . Ciertamente en este punto se ha de tener la precaución de distinguir la procedencia de dicho campo. Por ejemplo, si el campo eléctrico es puramente generado por un cambio del flujo magnético, éste no será debido a la presencia de cargas externas ( $\rho_{ext} = 0$ ). En consecuencia, si aplicamos la ley de Gauss en forma diferencial a dicho campo se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

En este caso particular, podemos ver que el campo eléctrico y el campo magnético tienen un paralelismo matemático ya que para ambos la divergencia es nula y el rotacional depende de

la fuente del campo. En el caso del campo eléctrico inducido, podemos decir que la fuente del campo es la variación del flujo magnético.

### 8.3. Inductancia

La inductancia no es más que la posible corriente generada en un cierto circuito por la presencia otro. Es decir, pensemos que tenemos dos circuitos cerrados por los que circula una cierta corriente. Cada uno de ellos generará un cierto campo magnético que podrá atravesar el otro y, por tanto, existirá un cierto flujo de campo magnético del primer circuito sobre el segundo y viceversa. Consideremos el campo generado por el primer circuito a partir de la ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{u}_r}{r^2}.$$

Podemos, por tanto, considerar el flujo magnético de dicho campo a través del segundo circuito como

$$\Phi_2 = \iint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2.$$

Ahora bien, si expresamos el campo magnético en función del potencial vector y aplicamos el teorema de Stokes, tenemos que

$$\Phi_2 = \iint (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\vec{l}_2,$$

donde el potencial vector viene dado por

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1}{r}.$$

Sustituyendo en el flujo magnético tenemos

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \oint \frac{d\vec{l}_1}{r} \cdot d\vec{l}_2,$$

La expresión anterior la podemos expresar como

$$\Phi_2 = M_{21} I_1, \tag{8.2}$$

donde llamaremos  $M_{21}$  es la llamada inductancia mutua que viene dada por

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r},$$

Como puede verse, la inductancia mutua es exactamente igual si cambiamos el orden de los circuitos y, por tanto,  $M_{21} = M_{12}$ . De manera que el flujo debido al campo magnético del segundo circuito sobre el primero será

$$\Phi_1 = M_{21}I_2.$$

Teniendo en mente que la forma explícita de la inductancia cambiará si existe un campo magnético variable (hemos partido de la ley de Biot-Savart que solo aplica a corrientes estacionarias), la fórmula dada por la Ec. (8.2) mantendrá su forma y, por tanto, tendremos que la fuerza electromotriz inducida sobre el segundo circuito debida a cambios de corriente en el primero será

$$\mathcal{E}_{FEM,2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}.$$

Es fácil ver a través de la ley de Faraday que, si el campo magnético del primer circuito varía, no solo inducirá una cierta fuerza electromotriz en el segundo circuito si no que también lo hará sobre sí mismo. En este último caso suele hablarse de auto-inductancia,  $L$ , cuya fuerza electromotriz inducida será

$$\mathcal{E}_{FEM} = -L\frac{dI}{dt}.$$

## 8.4. Ley de Ampère en electrodinámica

Una de las principales contribuciones de Maxwell, a parte de escribir las ecuaciones que describen la interacción electromagnética de manera compacta y elegante, fue aplicar una corrección a la ley de Ampère que, en condiciones de campos variables con el tiempo, lleva a una fórmula inconsistente. Veamos dicha inconsistencia:

En primer lugar apliquemos la divergencia a la ley de Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \left(-\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{B}}{\partial t}\right).$$

Como vemos, la ecuación anterior es consistente ya que ambas partes son iguales a cero y, por tanto, no existe ningún conflicto.

Ahora bien, hagamos lo mismo con la ley de Ampère

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J}).$$

La ecuación anterior es perfectamente válida en condiciones magnetostáticas, es decir, si la corriente es estacionaria. Sin embargo, en electrodinámica dicha corriente no será estacionaria y, por tanto, la parte de la derecha no se anulará de manera general. Esto, en el fondo, es una consecuencia lógica ya que, si recordamos el capítulo 6, la ley de Ampère la derivamos

a partir de la ley de Biot-Savart que, como hemos mencionado en múltiples ocasiones, solo aplica a corrientes estáticas.

Esta aparente incongruencia no es tal si volvemos a la definición fundamental de densidad de corriente. Recordemos que la densidad de corriente la definíamos a partir de una cierta densidad de carga en movimiento. Además, llegamos a la conclusión de que, si la carga es estacionaria, entonces  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Sin embargo, la forma general de la divergencia anterior era, recordando la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La densidad de carga se puede expresar a partir de la ley de Gauss como

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$

que, sustituyendo en la divergencia de la densidad de corriente, lleva a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

o, escrito de otra forma,

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Podemos observar que, en el fondo, hemos obtenido un término extra que desaparece en condiciones electrostáticas pero que, cuando existen campos variables, hacen que la ley de Ampère se siga cumpliendo. Es decir, si añadimos el término obtenido a partir de la ecuación de continuidad a la ley de Ampère nos queda

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.3)$$

y, ahora sí, al aplicar la divergencia se cumple que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

La Ec.(8.3) es conocida como la ecuación de Maxwell-Ampère y tiene importantes implicaciones. No solo evita la inconsistencia de la ley de Ampère magnetostática si no que, además, implica que:

**Un campo eléctrico variable induce un campo magnético.**

Aunque sea una nomenclatura algo engañosa, Maxwell llamo al nuevo término corriente de desplazamiento de forma que dicha corriente sería

$$\mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

nomenclatura que mantendremos ocasionalmente teniendo en mente que dicho término no implica una corriente tal como la definimos en el capítulo 5 (es un campo variable con el tiempo no necesariamente debido a cargas que cambian su velocidad con el tiempo).

## 8.5. Ecuaciones de Maxwell

Con lo visto en este capítulo hemos llegado a nuestro objetivo inicial, encontrar las ecuaciones que definen las posibles interacciones entre los campos eléctrico y magnético en presencia (o no) de medios materiales y para campos variables (o no) con el tiempo. Escribámoslas de manera compacta

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{Ley de Gauss})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère Maxwell})$$

Las ecuaciones anteriores no solo describen el campo magnético y eléctrico si no que, además, implican la existencia de ondas electromagnéticas. De hecho, el factor  $\mu_0 \varepsilon_0$  está relacionado con la velocidad de la luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Las ecuaciones anteriores también se pueden escribir en función de las leyes de Gauss y Ampère generalizadas como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext}, \quad (\text{Ley de Gauss})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère Maxwell})$$

de donde es fácil ver por qué Maxwell llamó al nuevo término de la ley de Ampère como corriente de desplazamiento ya que, en la forma anterior, puede expresarse directamente como

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

## 8.6. Conclusión

Con este último capítulo hemos completado el objetivo principal de la asignatura, obtener las ecuaciones de Maxwell. Éstas suponen la base de la electrodinámica que se estudiará a fondo en la asignatura Electromagnetismo II. Como hemos visto, a partir de una serie de leyes experimentales (ley de Coulomb, ley de Biot-Savart, Ley de Faraday) hemos logrado aunar cualquier interacción electromagnética tanto en el vacío como en medios materiales mediante cuatro sencillas ecuaciones. Podemos intuir que, en general, la resolución de las ecuaciones de Maxwell implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Por ejemplo, imponiendo ciertas condiciones iniciales y algunas aproximaciones, las ecuaciones de Maxwell llevan a la ecuación de onda electromagnética que es la base de la Óptica electromagnética.

## Problemas

1. Se tiene un solenoide de longitud finita,  $l$  y radio  $a$ , con  $n_1$  vueltas por unidad de longitud. Este solenoide está contenido en uno de mayor tamaño, de radio  $b > a$ ,  $n_2$  vueltas por unidad de longitud y cuya longitud puede considerarse infinita. Por el solenoide corto circula una cierta corriente  $I$ . Calcula el flujo a través del solenoide largo. *Solución:*

Como sabemos, si queremos considerar el campo generado por el solenoide corto y, más aún, su flujo, estaríamos delante de una ardua tarea, especialmente para obtener una expresión analítica. Sin embargo, podemos emplear la inductancia mutua para conocer el flujo directamente. Sabemos que el campo magnético del solenoide largo es constante en su interior, con magnitud

$$B = \mu_0 n_2 I.$$

Podemos, por tanto, calcular el flujo de este campo a través del solenoide corto

$$B \pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2.$$

Podemos calcular el flujo del campo a través del solenoide, teniendo en cuenta que hay  $n_1 l$  vueltas en total

$$\Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 I l.$$

De donde identificamos la inductancia mutua

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l.$$

# Apéndice A

## Sistemas de coordenadas

Recordemos brevemente la relación entre las coordenadas cilíndricas y esféricas y las coordenadas cartesianas.

### A.1. Coordenadas cilíndricas

Coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (\text{A.1})$$

Coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z. \quad (\text{A.2})$$

Vector de posición:

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k} \quad (\text{A.3})$$

Vectores unitarios:

Relación directa (A.4)

$$\begin{aligned} \hat{u}_\rho &= \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j} \\ \hat{u}_\phi &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \\ \hat{u}_z &= \hat{k}. \end{aligned}$$

Relación inversa (A.5)

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \cos \phi \hat{u}_\rho - \sin \phi \hat{u}_\phi \\ \hat{j} &= \sin \phi \hat{u}_\rho + \cos \phi \hat{u}_\phi \\ \hat{k} &= \hat{u}_z. \end{aligned}$$



Elementos diferenciales:

de desplazamiento (A.6)

$$d\vec{l} = d\rho\hat{u}_\rho + \rho d\phi\hat{u}_\phi + z\hat{k}$$

de área

$$dS_\rho = \rho d\phi dz$$

$$dS_\phi = d\rho dz$$

$$dS_z = \rho d\rho d\phi$$

de volumen

$$dV = \rho d\rho d\phi dz.$$

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{u}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{u}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial z}\right)\hat{k}$$

## A.2. Coordenadas esféricas

Coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{A.7})$$

Coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right). \quad (\text{A.8})$$

Vector de posición:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k} \quad (\text{A.9})$$

Vectores unitarios:

Relación directa (A.10)

$$\begin{aligned}\hat{u}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} - \cos \theta \hat{k} \\ \hat{u}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \\ \hat{u}_\phi &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}.\end{aligned}$$

Relación inversa (A.11)

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \sin \theta \cos \phi \hat{u}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{u}_\theta - \sin \phi \hat{u}_\phi \\ \hat{j} &= \sin \theta \sin \phi \hat{u}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{u}_\theta + \cos \phi \hat{u}_\phi \\ \hat{k} &= \cos \theta \hat{u}_r - \sin \theta \hat{u}_\theta.\end{aligned}$$

Elementos diferenciales:

de desplazamiento (A.12)

$$d\vec{l} = dr\hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{u}_\phi$$

de área

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi$$

$$dS_\phi = r d\theta dr$$

de volumen

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{u}_\phi$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{u}_\phi$$

# Apéndice B

## Delta de Dirac tridimensional

La función delta de Dirac se puede definir en  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente manera

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq 0 \\ \infty & \text{si } \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Cumple, además, las siguientes propiedades

$$1. \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 1. \quad (\text{B.2})$$

$$2. \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r} - \vec{a}) d^3 \vec{r} = 1, \quad (\text{B.3})$$

$$3. \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d^3 \vec{r} = f(\vec{a}), \quad (\text{B.4})$$

siendo  $f$  una cierta función y  $\vec{a}$  un vector constante. Fijémonos en que basta con conocer la propiedad (3) para obtener el resto. Si, en dicha expresión, consideramos que  $f(\vec{r}) = 1$ , tendríamos que  $f(\vec{a}) = 1$ , cumpliéndose la segunda expresión. La primera expresión la tendríamos sin más que considerar que el vector constante es nulo.

### B.1. Delta de Dirac como divergencia de un campo vectorial

Existen algunos casos particulares en los que al aplicar un cierto operador  $O$  sobre una cierta función  $f(\vec{r})$ , el resultado es una función delta de Dirac. Bastaría que dicha operación fuera la siguiente

$$O(f(\vec{r})) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq 0 \\ \infty & \text{si } \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Lógicamente, este tipo de resultado ocurrirá cuando la operación dé lugar a una indeterminación de algún tipo.

Un caso particularmente interesante es cuando se aplica la divergencia sobre un campo vectorial cuya variación con la distancia cumple la ley cuadrática inversa ( $1/r^2$ ). Se puede demostrar que

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r}). \quad (\text{B.6})$$

Si bien la demostración de la ecuación anterior dista de ser trivial, demos algunos detalles de la misma. En primer lugar, calculemos la divergencia a partir del producto escalar del campo y el operador nabla (escrito en coordenadas esféricas por simplicidad):

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho^2} \hat{u}_r \right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho^2}{\rho^2} \right) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Podíamos pensar que la divergencia de un campo con este tipo de variación es nula en todo el espacio. Sin embargo, si observamos la ecuación anterior, claramente existe una indeterminación en  $\rho = 0$ , es decir, justo donde se encuentra la fuente del campo. Podemos proceder de otra forma, a partir del teorema de la divergencia para tratar de resolver esta aparente inconsistencia:

$$\oiint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oiint \left( \frac{1}{R^2} \hat{u}_r \right) \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{u}_r \quad (\text{B.8})$$

donde se integra sobre la superficie cerrada de una esfera de radio  $R$ . De la expresión anterior podemos intuir una particularidad. El resultado de la integral es independiente del radio de la esfera, es irrelevante cuán grande o pequeña sea. De hecho, si evaluamos la integral obtenemos lo siguiente

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = (\cos(0) - \cos(\pi)) 2\pi = 4\pi. \quad (\text{B.9})$$

Por tanto, independientemente del radio de la esfera, la integral del campo en la superficie es, efectivamente  $4\pi$ . En el fondo, tanto la indeterminación en la expresión (B.7) como la aparente paradoja encontrada en (B.9) tienen la misma causa. En el punto dado por  $\rho = 0$  o, lo que es lo mismo, cuando  $R = 0$ , nos encontramos con el origen del campo. Es, por tanto, la fuente del campo la única que contribuye en la integral dada en (B.9), mientras que el resto de puntos englobados por la superficie tienen una contribución nula. Dicho de otro modo, la fuente del campo, al aplicar la divergencia, se comporta como una función delta de Dirac. El factor  $4\pi$ , se suele incorporar dentro del propio campo de modo que la ecuación B.6 queda como

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{4\pi|\vec{r}|^3} \right) = \delta(\vec{r}). \quad (\text{B.10})$$

# Apéndice C

## Ángulo sólido

El ángulo sólido es, básicamente, la proyección de una cierta superficie situada en el espacio vista desde un cierto punto. Por tanto, resulta en un cono cuyas dimensiones dependen de la forma de la superficie y la distancia entre ésta y el punto de observación. Resulta particularmente interesante definir el elemento diferencial de ángulo sólido. Vendría dado por el ángulo sólido subtendido por un elemento diferencial de área  $dS$  ubicado en un punto del espacio coordenado dado por el vector  $\vec{r}$  con respecto a otro punto situado en  $\vec{r}'$  viene dado por

$$d\Omega = \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS. \quad (\text{C.1})$$

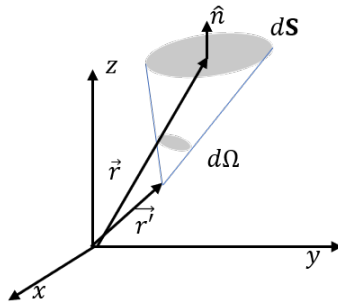


Figura C.1: Representación gráfica del ángulo sólido.

Se puede demostrar que, para cualquier superficie cerrada, la Ec. (C.1) resulta en

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{si el punto situado en } \vec{r}' \text{ está dentro de la superficie cerrada.} \\ 0 & \text{si el punto situado en } \vec{r}' \text{ está fuera de la superficie cerrada.} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Este resultado se puede demostrar de manera sencilla a partir de lo obtenido en la sección B.1 ya que, a partir del teorema de la divergencia, se obtiene que

$$\Omega = \int_A \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS = \int_V \nabla \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV, \quad (\text{C.3})$$

y, por tanto, obtenemos que el ángulo sólido vale  $4\pi$  para puntos localizados en el volumen que encierra la superficie y 0 para puntos en el exterior.