



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Diseño preliminar y determinación orbital de una misión de
exploración espacial hacia Proxima Centauri b.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

AUTOR/A: Ugalde García-Vera, Jon

Tutor/a: Moll López, Santiago Emmanuel

Cotutor/a: Morano Fernández, José Antonio

Cotutor/a: Herrero Debón, Alicia

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Universitat Politècnica de València

ETSID

DISEÑO PRELIMINAR Y DETERMINACIÓN
ORBITAL DE UNA MISIÓN DE
EXPLORACIÓN ESPACIAL HACIA
PROXIMA CENTAURI B

Grado en Ingeniería Aeroespacial
Trabajo de Fin de Grado

Autor:

Jon Ugalde García-Vera

Tutores:

Santiago Emmanuel Moll López

Jose Antonio Morano Fernández

Alicia Herrero Debón

2023

Resumen

A día de hoy, la investigación espacial representa uno de los más complicados rompecabezas para la raza humana. Es por esto que una misión de exploración a Próxima Centauri b supone un proyecto de cierta relevancia científica. Al igual que la Tierra, se encuentra en una Zona Habitable (HZ) de su respectiva estrella, lo que lleva a imaginar la posible existencia de vida.

En este trabajo se plantea una aproximación inicial de la primera etapa de una misión para enviar un satélite no tripulado desde la Tierra hasta el límite del Sistema Solar, para luego enlazar con el recorrido de 4.2 años luz de distancia que nos separan del exoplaneta. Para esta aproximación inicial se ha desarrollado un propagador orbital con motor de bajo empuje, teniendo en cuenta las principales perturbaciones que afectan la trayectoria, para determinar la trayectoria que podría seguir el vehículo espacial hasta salir del Sistema Solar. El interés de una misión de este tipo radica en obtener toda la información posible sobre la habitabilidad del destino, además de poder aprovechar la trayectoria para la recopilación de datos sobre el Sistema Solar.

Abstract

As of today, space research represents one of the most complex puzzles for the human race. This is why an exploration mission to Proxima Centauri b represents a project of significant scientific relevance. Like Earth, it is located in a Habitable Zone (HZ) of its respective star, leading us to imagine the possible existence of life.

This work proposes an initial approach to the first stage of a mission to send an unmanned satellite from Earth to the edge of the Solar System, and then to bridge the gap of 4.2 light-years that separate us from the exoplanet. For this initial approach, a low-thrust orbital propagator has been developed, taking into account the main disturbances that affect the trajectory, to determine the path the spacecraft could follow to exit the Solar System.

The interest in a mission of this type lies in obtaining all possible information about the habitability of the destination, in addition to being able to take advantage of the trajectory for data collection about the Solar System.

Resum

Avui dia, la recerca espacial representa un dels trencaclosques més complexos per a la raça humana. Per això, una missió d'exploració a Proxima Centauri b representa un projecte de rellevant importància científica. Com la Terra, es troba en una Zona Habitada (HZ) de la seva respectiva estrella, cosa que ens porta a imaginar la possible existència de vida.

En aquest treball es proposa una aproximació inicial a la primera etapa d'una missió per enviar un satèl·lit no tripulat des de la Terra fins al límit del Sistema Solar, i després enllaçar amb el recorregut de 4.2 anys llum de distància que ens separen de l'exoplaneta. Per a aquesta aproximació inicial, s'ha desenvolupat un propagador orbital de baixa empena, tenint en compte les principals perturbacions que afecten la trajectòria, per determinar el camí que podria seguir l'espai-nau fins a sortir del Sistema Solar.

L'interès d'una missió d'aquest tipus radica en obtenir tota la informació possible sobre l'habitabilitat de la destinació, a més de poder aprofitar la trajectòria per a la recopilació de dades sobre el Sistema Solar.

Índice

1	Introducción	9
1.1	Contexto de investigación espacial	9
1.2	Justificación de la misión a Próxima Centauri b	11
2	Próxima Centauri b: características y habitabilidad	12
2.1	Descripción del exoplaneta	12
2.2	Atmósfera y habitabilidad	13
3	Tecnología	14
3.1	Diseño de la nave	14
3.2	Instrumentos de medición y ensayos	16
4	Fundamentos de la mecánica orbital. El problema de dos cuerpos	17
4.1	Ecuación de movimiento	18
4.2	Momento Angular y ecuación de la órbita	19
4.3	Coefficientes de Lagrange	20
4.4	Problema de Lambert	21
5	Perturbaciones en las órbitas	23
5.1	Marco teórico	25
5.1.1	Perturbaciones gravitatorias	25
5.1.2	Perturbación de resistencia aerodinámica	29
5.1.3	Efectos relativistas	31
5.1.4	Perturbación por gravedad lunar	32
5.1.5	Perturbación por gravedad solar	33
5.1.6	Perturbación por los planetas del Sistema Solar	34
5.1.7	Presión por radiación solar	35
5.1.8	Maniobra orbital no impulsiva	37
6	Maniobras orbitales	38
6.1	Transferencia de Hohmann	38
6.2	Transferencia de Hohmann interplanetaria	40
6.3	Ventanas de lanzamiento	41
6.4	Esfera de influencia	42
6.5	Ajuste de cónicas	43
6.6	Salida planetaria	44
6.7	Encuentro con el planeta objetivo	46
6.8	Flyby planetario	47
7	Validación: Comparación con casos reales	49
7.1	Beidou-M3	50
7.2	New Horizons	52

7.3	Sonda Dawn	54
8	Características de herramienta	56
8.1	Obtención de efemérides	56
8.2	Conversión de las órbitas a circulares y coplanarias	57
8.3	Integración numérica	57
9	Diseño de la misión	57
9.1	Salida de la esfera de influencia terrestre	57
9.1.1	Trayectoria sin influencia lunar	58
9.1.2	Trayectoria con influencia lunar	60
9.1.3	Flyby en Júpiter	62
9.2	Salida del sistema solar sin flyby	70
10	Conclusiones	72
11	Pliego de condiciones	73
11.1	Objeto del pliego de condiciones	73
11.2	Condiciones técnicas	73
11.2.1	Hardware	73
11.2.2	Software	73
11.2.3	Condiciones del puesto de trabajo	74
12	Presupuesto	75
12.1	Costes de personal	75
12.2	Costes de Hardware	75
12.3	Costes de software	76
12.4	Presupuesto total	76

Índice de figuras

3.1	Transferencia de datos con y sin el uso de TWTA's [9]	15
4.1	Diagrama interacciones en problema de dos cuerpos [11]	18
4.2	Orbitas de distintas excentricidades, con foco 'F' y periápside 'P' comunes [11]	20
4.3	Marco perifocal $\hat{p}\hat{q}\hat{w}$	20
4.4	Problema de Lambert [11]	22
5.1	Aceleraciones de perturbación en función de la altitud [12]	24
5.2	Sistema de referencia esférico [11]	25
5.3	Armónicos esféricos [15]	27
5.4	Polinomio de Legendre	28
5.5	Evolución de densidad frente a altitud [11]	30
5.6	Sistema de referencia con centro terrestre incluyendo perturbación lunar	32
5.7	Sistema de referencia con centro terrestre incluyendo perturbación solar	34
5.8	Situación para obtener la función sombra	36
6.1	Transferencia de Hohmann [11]	39
6.2	Transferencia Hohmann desde planeta 1 a planeta 2 [11]	40
6.3	Ángulos característicos de transferencia de Hohmann [11]	42
6.4	Disminución de fuerza gravitatoria con la distancia [11]	43
6.5	Salida de órbita hacia otro planeta [11]	45
6.6	Nave aproximándose a un planeta exterior desde uno interior [11]	46
6.7	Flyby planetario [11]	48
7.1	Evolución del error de integración en posición y velocidad para Beidou M-3 incluyendo perturbaciones	51
7.2	Diferencia entre órbita real de Beidou y la órbita integrada en km	51
7.3	Diferencia entre posición [km] y velocidad [km/s] real de Beidou y la órbita integrada sin perturbaciones	52
7.4	Evolución del error de integración en posición [km] y velocidad [km/s] para New Horizons	53
7.5	Evolución del error de integración para New Horizons sin perturbaciones en posición [km] y velocidad [km/s]	54
7.6	Evolución del error de integración en posición [km] y velocidad [km/s] para Dawn	55
7.7	Evolución del error de integración en posición [km] y velocidad [km/s] para Dawn sin perturbaciones	56
9.1	Órbita de salida de esfera de influencia terrestre	59
9.2	Criterio de ángulos	60
9.3	Comparación entre distintas anomalías verdaderas de partida. Ejes en [km]	61
9.4	Comparación entre distintas fechas de partida. Ejes en [km]	62
9.5	Trayectoria de transferencia entre Tierra y Júpiter	63
9.6	Trayectoria hasta Júpiter con impulso de 0.1 N. Ejes en [km]	63
9.7	Flyby con desviación de 5° desde punto inicial	65
9.8	Flyby con desviación de 3° desde punto inicial. Ejes en [km]	66
9.9	Flyby con desviación de 1.5° desde punto inicial. Ejes en [km]	66

9.10	Flyby con desviación de -5° desde punto inicial. Ejes en [km]	67
9.11	Flyby con desviación de -3° desde punto inicial. Ejes en [km]	67
9.12	Flyby con desviación de -1.5° desde punto inicial. Ejes en [km]	68
9.13	Salida del sistema solar desde Júpiter con flyby. Ejes en [km]	69
9.14	Salida de sistema solar desde Júpiter con flyby y empuje inicial	70
9.15	Salida de la Tierra hasta órbita joviana sin interceptar Júpiter. Ejes en [km]	71
9.16	Salida del sistema solar sin flyby. Ejes en [km]	71
9.17	Salida del sistema solar sin flyby con empuje. Ejes en [km]	72

Índice de tablas

1	Comparación salida esfera de influencia terrestre para distintos ángulos de partida]	61
2	Comparación salida esfera de influencia terrestre para distintas fechas de partida .	61
3	Comparación entre tiempo y combustible consumido según el motor en la transferencia a Júpiter	64
4	Características de distintos flybys	68
5	Comparación de características principales según la misión desarrollada	72
6	Costes asociados a personal	75
7	Costes asociados a Hardware	76
8	Costes asociados a Software	76
9	Coste total del proyecto	76

1 Introducción

1.1 Contexto de investigación espacial

La exploración espacial representa un hito formidable en la historia de los logros humanos, uniendo disciplinas científicas y tecnológicas para desafiar las fronteras de nuestro conocimiento y capacidad. Esta hazaña ha permitido la comprensión profunda de fenómenos cósmicos y ha sentado las bases para avances tecnológicos significativos, particularmente en el diseño y desarrollo de vehículos espaciales.

Los progresos realizados en esta área, desde los primeros satélites orbitales hasta las misiones tripuladas interplanetarias, son testimonio de la persistente inventiva y tenacidad humanas. Además, la exploración espacial ha redefinido continuamente el paradigma del descubrimiento científico y ha establecido un camino para futuros avances en múltiples campos de estudio, garantizando así su relevancia duradera en la evolución académica y tecnológica de nuestra especie.

El interés por los cuerpos celestes surgió con la transición de las sociedades humanas desde un estilo de vida nómada a uno sedentario. El dominio de ciertos ciclos astronómicos permitió predecir períodos de abundancia y cambios estacionales, proporcionando herramientas esenciales para la supervivencia y el desarrollo. Este conocimiento gradualmente se incorporó a las estructuras religiosas y culturales, vinculando los astros con la mitología. Así, podemos conceptualizar la astronomía en dos etapas: la astronomía pre-telescópica y la astronomía moderna. El hito que permite poner el límite a estas dos etapas es el descubrimiento del telescopio, atribuido al holandés Hans Lippershey en 1608, y que cambió radicalmente la forma en que se estudiaron los cielos.

La era post-telescópica comenzó con la revolucionaria observación de Galileo Galilei. En 1610, Galileo empleó un telescopio para explorar los cielos, y sus descubrimientos, como los cráteres de la Luna, las fases de Venus y los satélites de Júpiter, ayudaron a confirmar el sistema heliocéntrico propuesto por Copérnico, transformando radicalmente nuestra comprensión del universo. A lo largo de los siglos XVII y XVIII, el desarrollo y perfeccionamiento de instrumentos astronómicos permitieron avances significativos, incluyendo la determinación de la distancia entre la Tierra y el Sol, la identificación de nuevos planetas y la descripción de la forma y el tamaño de la Vía Láctea.

El siglo XIX fue testigo de avances en la astrofísica, con la invención del espectroscopio y el desarrollo de la fotografía astronómica. Estas tecnologías posibilitaron la clasificación de estrellas por sus espectros y el cálculo de sus distancias relativas, así como la observación detallada de cuerpos celestes lejanos. A medida que el siglo XX se acercaba, la naciente era de la radioastronomía y el desarrollo de cohetes permitió un salto cuántico en la exploración espacial, estableciendo las bases para la era espacial.

La Guerra Fría (1947-1991), aunque nunca desembocó en un conflicto militar directo y tuvo consecuencias políticas, económicas y sociales, tuvo como consecuencia el desarrollo de nuevas tecnologías que marcaron el inicio de la carrera espacial. Aunque la narrativa popular a menudo destaca el triunfo de Estados Unidos, los verdaderos

pioneros en la exploración espacial fueron los científicos soviéticos. En 1957, lograron lanzar el primer satélite artificial, el Sputnik 1, bajo la dirección de Sergei Pavlovich Korolev, considerado el padre del programa espacial soviético. A raíz de este logro, Estados Unidos estableció la NASA en 1958, marcando el inicio de un intenso período de competencia tecnológica y descubrimiento científico. Este período culminó con logros notables como el Apollo 11 y la Estación Espacial Internacional (ISS), ejemplos sobresalientes del esfuerzo incansable por explorar y comprender el espacio.

La historia de la investigación espacial ineludiblemente nos lleva a misiones interplanetarias. Entre las más destacadas se encuentran la misión New Horizons (2006), que logró observar Plutón de cerca, y las misiones Voyager (1977), cuyo propósito fue explorar los planetas del sistema solar.

Los beneficios que se han obtenido de la exploración espacial son muchos. Entre ellos se pueden destacar los siguientes:

- Desarrollo de tecnologías aplicadas en las áreas de informática, comunicaciones, física y energía. Un ejemplo es el desarrollo de la tecnología de las cámaras en los teléfonos móviles, que originalmente se perfeccionó para facilitar la implementación de cámaras más compactas y eficientes en las naves espaciales.
- El sistema de posicionamiento global (GPS) es un testimonio destacado del progreso tecnológico impulsado por la exploración espacial, con su operación dependiendo completamente del uso y la optimización de los satélites. Además, esta misma tecnología de satélites ha sido fundamental para el desarrollo de sistemas avanzados de pronóstico del tiempo, permitiendo una monitorización y predicción cada vez más precisa del comportamiento meteorológico.
- Otro beneficio es la posibilidad de proteger el planeta y nuestro entorno. Un uso muy relevante a día de hoy es la observación de indicadores de cambio climático, como la desaparición de hielo en los polos. Además, se han desarrollado técnicas que permiten medir la contaminación del aire, agua y suelo, lo que ayudará también a cuidar de las especies animales y vegetales en determinadas zonas.
- La investigación espacial ha contribuido a la mejora de las relaciones entre distintos países. Un ejemplo claro es la ISS, constituida por módulos enviados desde varios países.
- La exploración espacial ha contribuido significativamente al avance de las ciencias médicas, incluyendo la mejora y el descubrimiento de tratamientos para diversas enfermedades. Los retos únicos que presenta el cuidado de la salud en el espacio han llevado al desarrollo de tecnologías y métodos innovadores, que a su vez han tenido aplicaciones terrestres. Un ejemplo destacado es el surgimiento y la expansión de la telemedicina y la telesalud, campos que han experimentado un auge considerable gracias en parte a las tecnologías y experiencias derivadas de la medicina espacial.

En la actualidad, las inversiones privadas han tenido una especial importancia en el desarrollo de las misiones espaciales, con empresas como SpaceX, Boeing, Virgin Galactic

o Blue Origin liderando la nueva era de la exploración espacial comercial. Algunas de las misiones de exploración más recientes y relevantes incluyen:

- La misión *Mars 2020* de la NASA, que llevó el rover Perseverance a Marte.
- Descubrimientos con el telescopio James Webb que revolucionan y desafían las teorías de cómo se originó el universo.
- La misión *Juice* a Júpiter, con el fin de descubrir posibles hábitats y explorar el entorno en profundidad. [1]
- La misión *Artemis* que tiene como objetivo establecer presencia humana sostenible en 2024 en la Luna. Además sentará las bases para futuras misiones tripuladas a Marte. [2]

1.2 Justificación de la misión a Próxima Centauri b

En la actualidad, los astrónomos están descubriendo una multitud de exoplanetas con una amplia variedad de características. El estudio de estos cuerpos celestes es crucial, ya que abre la posibilidad de determinar su potencial habitabilidad.

La misión *Kepler* de la NASA, junto con los estudios de efecto Doppler, han permitido establecer criterios para identificar planetas con características similares a las de la Tierra. Estos criterios sugieren que tanto la masa como el tamaño del planeta deberían ser comparables a los de nuestro propio planeta. Además, se ha definido un rango aceptable para el flujo de luz estelar recibida, denotado por $S = \frac{L_*}{4\pi a^2}$, donde L_* representa la luminosidad de la estrella y a es la distancia orbital. Este rango para S se ha seleccionado de tal manera que la Zona Habitable (HZ, por sus siglas en inglés) permita la presencia de agua líquida en estado estable[3].

Ciertas estimaciones sugieren que existen alrededor de 10^{10} planetas del tamaño de la Tierra y que orbitan en HZ de sus respectivas estrellas, en la Vía Láctea. Esto ha motivado muchas investigaciones sobre las HZ de enanas-M. El interés en esta área ha recibido un impulso significativo gracias al descubrimiento de una 'super-Tierra' que orbita Próxima Centauri, bautizada como Próxima Centauri b (PCb).

La investigación sobre las atmósferas de varios exoplanetas constituye un avance crucial en la búsqueda de potenciales objetivos para la colonización y expansión espacial. Este tipo de estudio puede proporcionar información vital acerca de las posibilidades de supervivencia en estos planetas distantes.

En lo que respecta a los exoplanetas, es de suma importancia poder llevar a cabo análisis espectroscópicos de sus atmósferas. Un fenómeno conocido como 'Pérdida Atmosférica' o *Atmospheric Loss*, es crucial para entender los efectos de la erosión atmosférica provocada por la radiación solar. Este fenómeno consiste en la pérdida de partículas atmosféricas debido a la interacción con partículas energéticas, como las que emite el Sol. En los planetas de nuestro sistema solar, la importancia de este fenómeno ha sido documentada con cierta facilidad. Misiones como MAVEN (Mars Atmosphere and Volatile EvolutioN, por sus siglas en inglés), se han llevado a cabo para determinar

con mayor precisión los mecanismos dominantes durante dicho fenómeno. Se llegó a la conclusión de que para realizar estimaciones realistas, se requirieron modelos magneto-hidrodinámicos más sofisticados.

Se piensa que PCb, al orbitar una estrella particularmente activa que emite llamaradas con regularidad, puede enfrentar factores que afecten su habitabilidad, aunque esto aún no está completamente claro. En este contexto, la relevancia de la misión radica en la capacidad para desarrollar estimaciones y modelos más precisos sobre las características de PCb. Al estar ubicado en la HZ de su estrella, este exoplaneta es uno de los candidatos más cercanos a la Tierra con una alta probabilidad de albergar vida. Adicionalmente, el conocimiento detallado de ciertas propiedades de este planeta podría ayudarnos a extrapolar información a otros planetas similares.

2 Próxima Centauri b: características y habitabilidad

2.1 Descripción del exoplaneta

Próxima Centauri b, un planeta rocoso identificado en 2016 gracias al *Spitzer Space Telescope*, se ubica en la zona habitable de Próxima Centauri, la estrella más cercana a nosotros. Dicha estrella es menos luminosa y fría que nuestro Sol, lo que sitúa su zona habitable mucho más cerca.

Este planeta presenta una masa muy similar a la de la Tierra, siendo aproximadamente 1.7 veces mayor, y su radio es 1.1 veces el terrestre. Próxima Centauri b se sitúa a 0.05 unidades astronómicas (UA) de su estrella, equivalente a cerca de 7.5 millones de kilómetros, lo que representa una distancia 20 veces menor que la órbita de la Tierra alrededor del Sol. A través de mediciones, se ha concluido que este exoplaneta completa su órbita en aproximadamente 11.2 días terrestres. Además, su temperatura de equilibrio se estima en 234 K, algo similar a los 255 K de la Tierra. La incidencia de flujo estelar, mencionada en el *Apartado 1.2*, es aproximadamente 0.65 veces la de nuestro planeta.

Sin embargo, la proximidad de Próxima Centauri b a su estrella también implica un nivel elevado de actividad magnética y numerosos destellos. Esto conlleva que el exoplaneta reciba grandes cantidades de rayos X y radiación ultravioleta. Para determinar la existencia de una magnetosfera capaz de proteger la superficie del planeta de estos fenómenos adversos, se necesitan estudios más exhaustivos.

Estas condiciones, que incluyen la pérdida atmosférica, el calentamiento y la evaporación, son bastante severas y podrían agravarse aún más debido a la actividad de Próxima Centauri y a efectos transitorios como los vientos solares.

2.2 Atmósfera y habitabilidad

Los modelos magnetohidrodinámicos (MHD) mencionados en el *Apartado 1.2* arrojan algo de luz sobre la incertidumbre que supone el estudio de cuerpos tan lejanos. Las simulaciones predicen que PCb sufre unas presiones causadas por vientos solares unas 4 veces mayores que las de la Tierra, además de cambios en dicha presión en períodos tan cortos como un día. Junto a esto, las simulaciones muestran que los planetas cercanos a enanas-M sufren un intenso efecto Joule, junto con una elevada erosión de la atmósfera. A todo esto se suma que las condiciones del plasma de viento estelar cambian de sub-Alfvénico a lo largo de la órbita. [4]

Las presiones predichas por los modelos no son uniformes, aumentando hasta 10 a 1000 veces en las regiones más densas de los vientos estelares. PCb experimentará estas fluctuaciones intensas de presión dos veces en cada órbita, lo que dará lugar a notables compresiones y expansiones de su magnetosfera. Estos efectos tendrían un impacto considerable en cualquier atmósfera que PCb pueda poseer.

Algunos estudios han tratado de caracterizar o simular una posible atmósfera capaz de proteger PCb. Mediante test observacionales [5] y combinando programas de observación tanto desde tierra como del espacio, es posible medir la cantidad de flujo que se redirige hacia el lado nocturno. Si no se encuentra evidencia de tal redistribución, se podría llegar a la conclusión de que no existe ninguna atmósfera capaz de proteger al planeta de la radiación. Por otra parte, si se encuentra transporte de energía, significaría la existencia de una atmósfera o de un océano capaz de dicha redistribución.

En la Tierra, las dinámicas de los océanos suponen un importante papel en el transporte de calor y nutrientes, por lo que se ha establecido que la presencia de océanos en exoplanetas podría suponer una forma de redistribución de calor y nutrientes entre los lados diurno y nocturno del planeta, lo que provocaría asimetrías en la temperatura superficial.

Otros estudios [6] han investigado cómo afectan los continentes subestelares a los dos procesos descritos anteriormente, considerando que la rotación de PCb es sincrónica (siempre muestra la misma cara a la estrella). Las conclusiones a las que se llegaron fueron las siguientes:

1. Para los parámetros planetarios considerados en el estudio, la habitabilidad de PCb es independiente de las dinámicas oceánicas.
2. La temperatura superficial es más sensible a la convección y a las estructuras de nubes considerados que a la dinámica de los océanos.
3. PCb experimenta un amplio florecimiento de nutrientes en el lado diurno, lo que es esencial para la recuperación de aquellos nutrientes que se pueden llegar a hundir en el fondo oceánico.
4. Para los tamaños de continente subestelar estudiados, las condiciones oceánicas en el lado diurno hacían viable la fotosíntesis marina. Para un planeta con rotación sincrónica esto es esencial para poder permitir no solo la habitabilidad sino también la vida.

En el trabajo se llega a la conclusión de que los planetas de rotación síncrona con un océano superficial pueden llegar a mantener las condiciones necesarias para la habitabilidad, sin importar el tamaño del continente subestelar. Esto puede llegar a reforzar la idea de la vida extraterrestre en planetas con las características mencionadas.

Como conclusiones generales, se puede decir que la evolución del planeta y el impacto de los factores externos tendrán una gran relevancia en la habitabilidad. En el trabajo de *Meadows et al.* [7] se muestran distintos escenarios, incluso con condiciones casi extremas de evaporación o incremento de temperatura, en los que sería posible la vida. Dentro de los posibles estados, se habla de una atmósfera rica en O_2 capaz de albergar los remanentes de un océano, incluso después de una pérdida masiva de agua. También se mencionan casos semejantes a la Tierra, siendo protegidos de la estrella por una capa de hidrógeno.

No obstante, todos estos son escenarios potenciales. En última instancia, la caracterización precisa de PCb depende de la adquisición de datos que permitan establecer analogías entre el comportamiento de distintos flujos en este exoplaneta y los que ya conocemos dentro de nuestro sistema solar, para así poder compararlos con planetas familiares. En este sentido, es aquí donde la misión de exploración adquiere una relevancia crucial.

3 Tecnología

3.1 Diseño de la nave

Es esencial que la nave sea capaz de operar de forma autónoma debido a las grandes distancias a las que será enviada. Además, para poder ser viable, la nave deberá poder albergar todos los instrumentos de medida necesarios, con su respectivo suministro eléctrico, métodos de control, refuerzos estructurales, etc. Tendrá una carga de pago científica de unos 100 a 120 kg. Aparte, contará con estabilización de actuaciones en los tres ejes, considerando Proxima Centauri (estrella destino), Canopus y Sirio como estrellas de referencia.

Se requiere de una estructura reforzada que pueda albergar los instrumentos más sensibles, como aquellos usados para comunicaciones y medición. Esto será importante en las primeras fases de la misión, para poder absorber posibles vibraciones, golpes y otras perturbaciones que puedan dañar la instrumentación más sensible.

Debido a las características de la misión, será necesaria una fuente de energía independiente del Sol, por lo que se usarán los RTGs (Radioisotope Thermoelectric Generator). Tal y como se hizo en la misión *Voyager*, se podrían usar más de 20 esferas cerámicas de dióxido de plutonio como fuente calórica, que dan 100 W térmicos. El sistema consiste en la transformación de energía calorífica del plutonio en electricidad. Actualmente la ESA tiene un programa para el desarrollo de esta tecnología. El programa ha conseguido mejorar el sistema eléctrico hasta 10 W, pero se está intentando diseñar otro modelo de 50 W mediante la optimización de salida de potencia y de la fiabilidad.

También se usará una unidad reguladora de derivación (Shunt Regulator Unit en inglés) para regular el voltaje o la corriente. Su función principal es desviar parte la corriente para mantener los valores deseados en los elementos que estén conectados. A su vez disipará el exceso de potencia proveniente del RTG en unos dispositivos resistivos externos o en unos calentadores internos, dependiendo de las necesidades de control térmico. Además se añadirá un sistema de almacenamiento capacitivo de potencia de unos 5 W para poder manejar posibles cargas transitorias que excedan el límite permitido por los sistemas conectados.

El **Sistema de Comunicaciones** estará formado por una antena principal de alta ganancia (HGA en inglés) y una antena hemisférica de baja ganancia (LGA en inglés) para cubrir los posibles 'puntos ciegos'. Será necesaria una combinación de sistemas tanto en tierra como en la nave para poder sobrellevar la disipación de energía en esas distancias. El receptor de comandos utilizará un diseño de baja-potencia que reducirá el consumo a sólo 4 W. Finalmente, la velocidad en el envío de información dependerá de la distancia a la que se encuentre la nave de la Tierra. Es por eso que se facilita la Figura 3.1, donde se muestra la cantidad de información enviada según la distancia en un sistema de comunicaciones similar al de la nave *New Horizons*, utilizando dos formas. Una basada tan solo en la Deep Space Network (DSN) y otro usando una combinación con los amplificadores de señal conocidos como Traveling Wave Tube Amplifiers (TWTA).

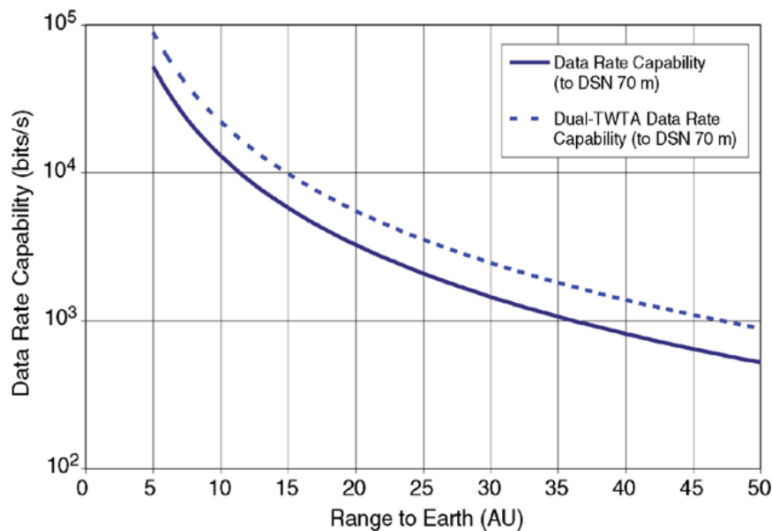


Figura 3.1: Transferencia de datos con y sin el uso de TWTA's [9]

El **Subsistema de Control de Actitud (ACS)** debe ser capaz de mantener la orientación de la antena en todo momento, así como realizar posibles correcciones en la trayectoria. El ACS lleva señales desde los sensores inerciales y celestiales para hacer trabajar a unos pequeños motores que harán que el satélite mantenga la actitud deseada. Aparte se usará una computadora que implementará las funciones necesarias para

el control en software digital. El ACS es un sistema con mucha redundancia.

Se dispondrá de varios giróscopos de 2 grados de libertad, de tal forma que si uno falla la Unidad Inercial de Referencia pueda seguir controlando los tres ejes. El uso de computadora para mecanizar la electrónica de control permite fijar parámetros de control y leyes de control que se podrán reprogramar durante el vuelo. Así se introduce una protección contra un posible fallo en algún sistema.

El **Sistema de Propulsión** consistirá en el motor de baja propulsión HiPEP. Este motor fue probado por la NASA en 2003 e incluso iba a ser utilizado en misiones como *Jupiter Icy Moons Orbiter*, pero finalmente no lo hicieron. Este tipo de propulsores utilizan un proceso conocido como resonancia de ciclotrón de electrones (ECR, sus siglas en inglés) para lograr la ionización. Realmente este proceso resulta en una forma realmente eficiente de generar plasma. El motor dispone de un empuje de 540 mN, un impulso específico de 8900 s, y una eficiencia de 0.8. Se ha visto en estudios [20] que la configuración de tres motores es mucho más rápida, pero la de un solo motor es mucho más eficiente. Debido a que el tiempo no supone una restricción para esta misión, se ha decidido que será conveniente utilizar únicamente un motor. Realmente es el mejor motor posible para la misión que se pretende realizar, ya que presenta un consumo bastante más reducido que otros modelos considerados.

3.2 Instrumentos de medición y ensayos

A continuación se presentará una lista con los instrumentos que será necesario llevar a la misión de exploración:

- **Espectrógrafo:** es capaz de analizar la interacción entre radiación infrarroja y materia mediante absorción, reflexión o emisión. Necesario para obtener información de cómo reacciona el planeta ante la radiación infrarroja y poder conocer así su composición y su estructura atmosférica.
- **Radiómetro:** instrumento para medir la intensidad de la energía radiante. Sus principales funciones son medir radiación e irradiación, por lo que se utilizarían para medir la radiación estelar que recibe el planeta, así como la radiación que este emite. Proxima Centauri (la estrella sobre la que orbita PCb) es una enana roja que emite mucha radiación. Sería importante conocer el nivel de radiación que llega a la superficie de PCb para poder evaluar su habitabilidad.
- **Cámaras y sensores:** para poder obtener imágenes de la superficie y la atmósfera de Proxima Centauri b. Podría servir además para analizar la topografía, patrones climáticos y fenómenos geológicos.
- **Termómetros y medidores de presión:** para obtener datos sobre temperatura y presión atmosférica, datos cruciales para determinar la habitabilidad.
- **Espectrómetro de masas:** permitiría analizar las muestras de suelo y rocas recogidas en PCb para determinar su composición química y buscar signos de vida microbiana.

- **Espectrómetro de luz UV:** permitiría analizar la radiación UV presente en la superficie de Próxima Centauri b. Esto es importante para evaluar el impacto de la radiación en la habitabilidad del planeta y estudiar posibles procesos químicos en su atmósfera.

4 Fundamentos de la mecánica orbital. El problema de dos cuerpos

La mecánica orbital es la rama de la física que se encarga del estudio del movimiento de objetos celestes en órbita alrededor de otros cuerpos. Su aplicación resulta fundamental para conocer, predecir y analizar el movimiento de cuerpos celestes en el espacio.

La mecánica orbital se basa en la aplicación de las leyes de la física a los objetos celestes que se mueven en el espacio, en particular la ley de la gravitación universal de Newton. Establece que la fuerza de atracción entre dos objetos depende de sus masas y la distancia entre ellos. Puede expresarse de la siguiente forma:

$$F_{ij} = \frac{Gm_i m_j (r_j - r_i)}{\|r_j - r_i\|^3} \quad (4.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal ($G = 6,6738 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$), m_i y m_j las masas de los cuerpos i y j , y r_i y r_j los vectores de posición de los cuerpos.

Se conoce como *el problema de los n cuerpos* al estudio del movimiento de un conjunto de cuerpos que interactúan entre ellos siguiendo las leyes de gravitación. Sin embargo, este tiene un elevado coste computacional, así que para casos en los que no sea necesaria una elevada precisión, se recurrirán a simplificaciones y casos más sencillos de resolver. Así aparece el *problema de los dos cuerpos*, que dispone de solución cerrada, logrando que la resolución del problema sea más rápida. Esta simplificación puede resultar algo limitada, pero su uso junto a otras herramientas permite obtener resultados bastante aproximados a los reales.

Se deberán tener en cuenta las siguientes hipótesis:

- Los cuerpos son de simetría esférica. Permitirá tratarlos como masas puntuales (masa concentrada en su centro)
- El sistema está aislado del resto del universo, es decir, no hay fuerzas externas ni internas aparte de las gravitatorias actuando sobre la línea que une los centros.

Gracias a las hipótesis anteriores, la integración de las ecuaciones permite obtener el movimiento relativo entre los dos cuerpos considerados. El resultado nos indica que dicho movimiento se corresponde con una curva cónica, que puede ser una elipse, una circunferencia, una parábola o una hipérbola.

4.1 Ecuación de movimiento

Para poder analizar el problema desde un enfoque vectorial, se deben considerar dos masas puntuales m_1 y m_2 mostradas en la Figura 4.1.

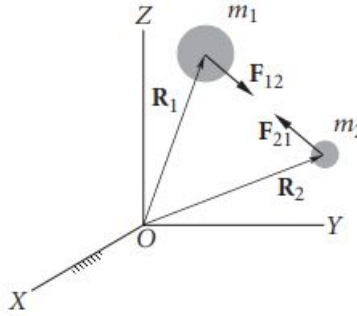


Figura 4.1: Diagrama interacciones en problema de dos cuerpos [11]

El vector \mathbf{r} , que determina la posición de m_2 relativa a m_1 , viene dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad (4.2)$$

Denotaremos por \hat{u}_r al vector unitario de \mathbf{r}

$$\hat{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

La fuerza gravitatoria a la que está sometido el cuerpo m_1 proviene únicamente de m_2 , definida por la Ecuación 4.1

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}u_r \quad (4.3)$$

Según la tercera Ley de Newton, $F_{21} = -F_{12}$, y aplicando la segunda ley de Newton en la parte izquierda, los ecuaciones de los dos cuerpos quedan

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.4)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = Gm_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.5)$$

Si se deriva dos veces la Ecuación 4.2, se obtiene

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (4.6)$$

Considerando que el parámetro gravitacional μ es

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

La Ecuación 4.6 queda como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.7)$$

La Ecuación 4.7 se conoce como ecuación de movimiento relativo, y describe el movimiento de m_2 con respecto a m_1 .

4.2 Momento Angular y ecuación de la órbita

Si partimos de la ecuación

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (4.8)$$

donde \mathbf{h} es el momento angular relativo de m_2 por unidad de masa ($\mathbf{H}_{2/1}/m_2$) y calculamos su derivada (Ecuación 4.8) se obtiene que

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

Pero $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$. Además, haciendo uso de la Ecuación 4.7 se tiene que

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$$

Esto implica que

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0$$

lo que significa que en cualquier momento, la posición del vector \mathbf{r} y el vector velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ están en el mismo plano. Así, se puede probar que

$$h = rv_{\perp} \quad (4.9)$$

donde v_{\perp} es la componente perpendicular del vector velocidad.

Finalmente, tras aplicar las leyes de conservación de momento angular y energía, se llega a la solución del problema

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \quad (4.10)$$

donde h, μ y e denotan el momento angular, el parámetro gravitacional y la excentricidad respectivamente. θ es la anomalía verdadera, y es el ángulo entre el vector \mathbf{e} y el vector posición \mathbf{r} , es decir, la posición angular del cuerpo respecto al periapsis. El desarrollo completo para obtener la solución mostrada en la Ecuación 4.10 se puede encontrar en la bibliografía ([11]).

La Ecuación 4.10 es la ecuación de la órbita, y describe la trayectoria del cuerpo m_2 alrededor de m_1 , relativo a m_1 . Esta ecuación describe secciones cónicas (parábolas, hipérbolas, elipses y circunferencias). Esto cumple con la primera ley de Kepler. Así, las órbitas correspondientes al problema de dos cuerpos son comúnmente conocidas como órbitas keplerianas.

De la Figura 4.2 se puede ver fácilmente una distinción en la geometría de las órbitas dependiendo de su excentricidad. Hay que destacar que una excentricidad negativa no tiene significado físico. Entonces las órbitas pueden clasificarse en

- órbitas circulares ($e=0$)
- órbitas elípticas ($0 < e < 1$)
- órbitas parabólicas ($e=1$)
- órbitas hiperbólicas ($e > 1$)

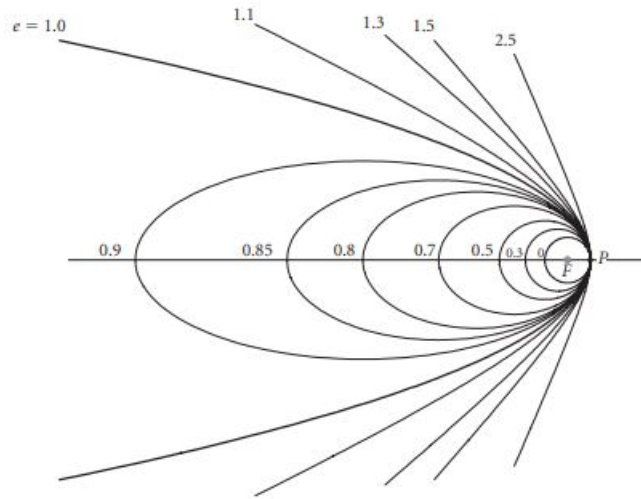


Figura 4.2: Orbitas de distintas excentricidades, con foco 'F' y periápside 'P' comunes [11]

4.3 Coeficientes de Lagrange

Primero de todo es necesario introducir un nuevo sistema de referencia, el sistema perifocal.

Dicho sistema (Figura 4.3) es el marco de referencia 'natural' de una órbita. Este sistema tiene en cuenta:

- Origen: foco primario de la órbita
- Plano: orbital
- Dirección principal: periapsis de la órbita

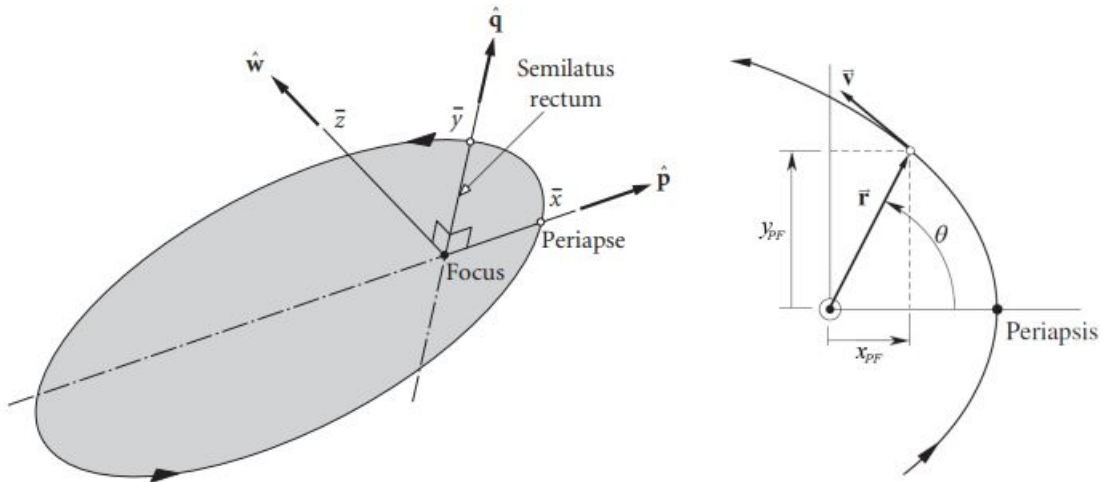


Figura 4.3: Marco perifocal $\hat{p}\hat{q}\hat{w}$

Donde, según la Figura 4.3, el vector posición en coordenadas perifocales sería

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_{PF} \\ y_{PF} \\ z_{PF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\theta \\ r \cdot \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si se conocen tanto la posición como la velocidad de un objeto en un determinado instante de tiempo t_0

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \bar{x}_0 \hat{\mathbf{p}} + \bar{y}_0 \hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{v}_0 &= \dot{\bar{x}}_0 \hat{\mathbf{p}} + \dot{\bar{y}}_0 \hat{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

es posible determinar y expresar la posición y velocidad de dicho cuerpo en cualquier instante posterior en términos de los valores iniciales

$$\mathbf{r} = f \mathbf{r}_0 + g \mathbf{v}_0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v} = \dot{f} \mathbf{r}_0 + \dot{g} \mathbf{v}_0 \quad (4.12)$$

donde f y g son los coeficientes de Lagrange. El desarrollo de estos coeficientes se puede encontrar en [11], así que se pasará a mostrar directamente el resultado obtenido.

Los coeficientes de Lagrange pueden ser expresados como parámetros de la órbita, específicamente la posición. Es por eso que se pueden tomar en función de la anomalía verdadera entre los instantes t y t_0 como

$$f = 1 - \frac{\mu \cdot r}{h^2} (1 - \cos\Delta\theta) \quad (4.13a)$$

$$g = \frac{r \cdot r_0}{h} \sin\Delta\theta \quad (4.13b)$$

$$\dot{f} = \frac{\mu}{h} \frac{1 - \cos\Delta\theta}{\sin\Delta\theta} \left(\frac{\mu}{h^2} (1 - \cos\Delta\theta) - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad (4.13c)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\mu \cdot r_0}{h^2} (1 - \cos\Delta\theta) \quad (4.13d)$$

Una propiedad a tener en cuenta de los coeficientes de Lagrange, derivada de su desarrollo, es

$$\dot{g}f - f\dot{g} = 1 \quad (4.14)$$

Los coeficientes serán necesarios para la resolución del problema de Lambert

4.4 Problema de Lambert

Suponiendo conocidos los vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de dos puntos P_1 y P_2 en la trayectoria de un cuerpo de masa m alrededor de otro cuerpo de masa M como se muestra en la Figura 4.4 donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 determinan la variación en la anomalía verdadera.

$$\cos\Delta\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2}$$

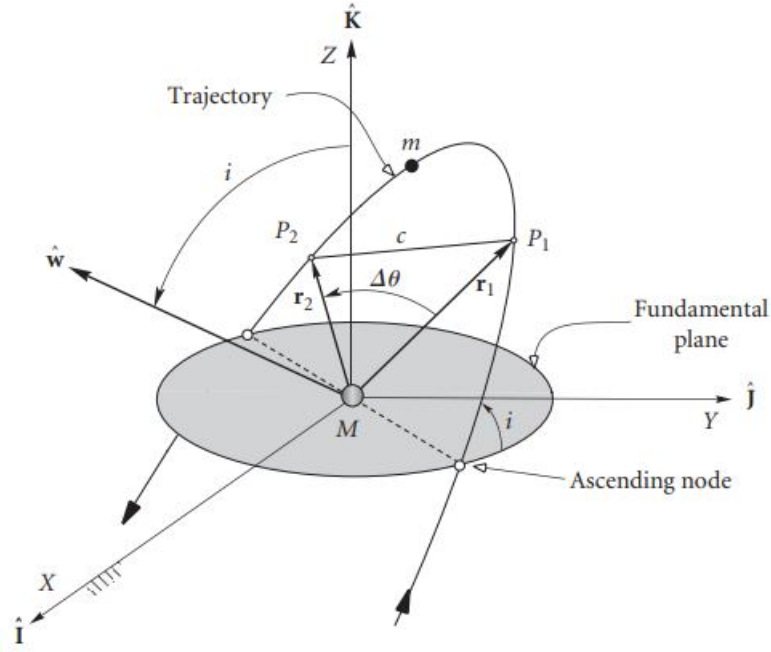


Figura 4.4: Problema de Lambert [11]

donde

$$r_1 = \sqrt{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \quad r_2 = \sqrt{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2}$$

Según el teorema de Lambert, el tiempo de transferencia Δt desde P_1 hasta P_2 es independiente de la excentricidad de la órbita, y sólo depende de la suma de las magnitudes de los vectores de posición ($r_1 + r_2$), el semieje mayor a y la longitud c de la recta que une P_1 y P_2 .

Si el Δt entre P_1 y P_2 es conocido, entonces el problema es calcular la trayectoria que los une.

A partir de las Ecuaciones (4.11) y (4.12) se pueden obtener las velocidades de ambos puntos. La trayectoria queda determinada una vez hemos hallado \mathbf{v}_1 , porque tanto la posición como la velocidad de cualquier punto en la órbita quedan definidas por \mathbf{r}_1 y \mathbf{v}_1 . Al resolver \mathbf{v}_1 queda

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{g}(\mathbf{r}_2 - f\mathbf{r}_1) \quad (4.15)$$

y para \mathbf{v}_2

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\dot{g}}{g}\mathbf{r}_2 - \frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{g}\mathbf{r}_1 \quad (4.16)$$

Pero aplicando esta vez la Ecuación 4.14, nos queda

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{g}(\dot{g}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (4.17)$$

Claramente, observando las ecuaciones anteriores, el problema de Lambert se puede resolver una vez se han determinado los coeficientes de Lagrange.

Los coeficientes de Lagrange (Ecuaciones (4.13a) a (4.13d)) han sido obtenidos para órbitas elípticas, usando las ecuaciones que caracterizan a estas órbitas. Es por esto que usarlas en otro tipo de órbitas llevará a errores en los resultados. Para evitar esto, en [11] se desarrollan las expresiones de lo que se conoce como *variables universales*.

Las variables universales permiten formular las ecuaciones orbitales independientemente del tipo de órbita que se esté tratando, mediante la modificación de los parámetros orbitales tradicionales. La formulación final de estas variables universales es

$$f = 1 - \frac{y(z)}{r_1} \quad (4.18a)$$

$$g = A \sqrt{\frac{y(z)}{\mu}} \quad (4.18b)$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)} [zS(z) - 1]} \quad (4.18c)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{y(z)}{r_2} \quad (4.18d)$$

donde

$$z = \alpha \chi^2 \quad (4.19)$$

$$A = \sin \Delta \theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta \theta}} \quad (4.20)$$

$$y(z) = r_1 + r_2 + A \frac{zS(z) - 1}{\sqrt{C(z)}} \quad (4.21)$$

donde χ es la anomalía universal y $\alpha = 1/a$. Se puede encontrar todo el desarrollo de estos coeficientes en [11].

5 Perturbaciones en las órbitas

El principal punto de este capítulo recae en el hecho de que el problema de los dos cuerpos no puede limitarse únicamente a la ecuación fundamental del movimiento relativo, en el que la única fuerza que actúa es la atracción gravitatoria mutua (Ecuación (4.7)). Para realizar una aproximación más fiel a la realidad, será necesario tener en cuenta una serie de consideraciones en forma de perturbación que se añadirán a la órbita kepleriana.

Dichas perturbaciones serán añadidas al cálculo del vector estado mediante la adición de términos sobre la ecuación fundamental de movimiento relativo (Ecuación (4.1)), en

la forma de aceleraciones, donde el conjunto se nombrará como \tilde{p} . A este método se le conoce como el método de Cowell, y consiste en realizar una integración paso por paso de la Ecuación (5.1).

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p} \quad (5.1)$$

Esta ecuación de segundo orden será llevada a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden como el mostrado en la Ecuación (5.2) para poder llevar a cabo las integraciones numéricas.

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p} \end{cases} \quad (5.2)$$

El término \vec{p} contiene efectos tales como perturbaciones por rozamiento atmosférico, radiación solar, efecto de la gravedad de distintos cuerpos o efectos relativistas que empezarán a ser notables cuando la velocidad alcanzada por el satélite llega a valores considerablemente altos.

Cabe destacar que la magnitud de aquellas aceleraciones debidas a las mencionadas perturbaciones será mucho menor que la aceleración provocada por la propia atracción entre los dos cuerpos principales considerados. El rozamiento atmosférico, por ejemplo, será notable cuando el satélite está orbitando a altitudes en el rango de 100-1000 km. Se puede observar en la Figura 5.1 una comparación entre los órdenes de magnitud de las diferentes aceleraciones que perturban el problema de los dos cuerpos. En el caso de órbitas terrestres, los efectos de J2 y de la resistencia atmosférica serán aquellos más importantes en bajas altitudes después de la propia gravedad terrestre.

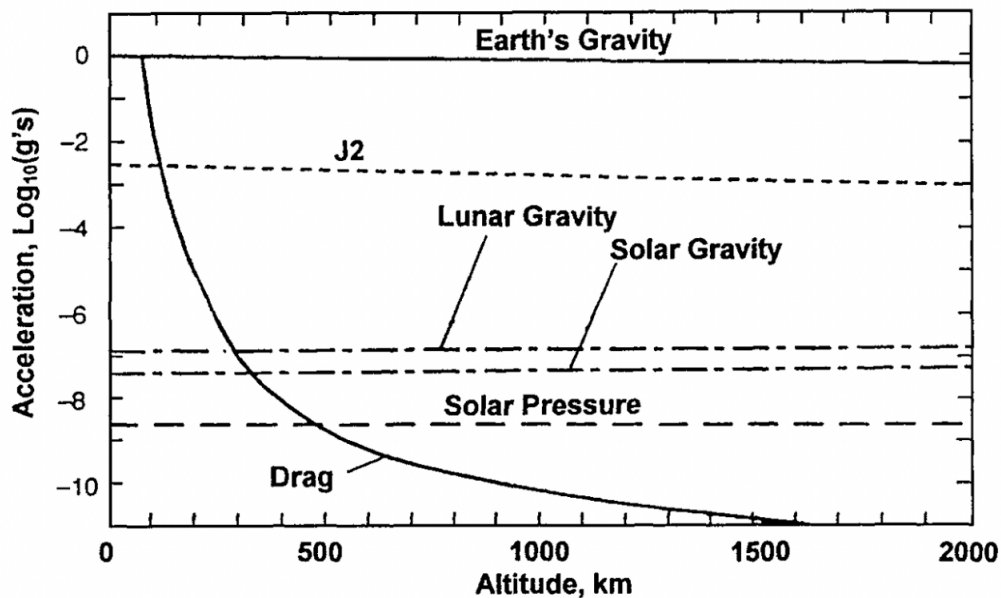


Figura 5.1: Aceleraciones de perturbación en función de la altitud [12]

5.1 Marco teórico

5.1.1 Perturbaciones gravitatorias

Al igual que cualquier otro objeto en el universo, la Tierra no es una esfera perfecta con distribución simétrica de masa. Se trata de un elipsoide achatado, y es por esto por lo que su campo gravitatorio varía dependiendo de la latitud y el radio, debido a la forma abultada en el ecuador como consecuencia de fuerzas centrífugas.

Hay que definir un sistema de referencia, cuyo centro se localiza en el centro de masas del elipsoide, donde el eje Z se corresponde con el eje de giro de la Tierra. Para el propósito de esta sección, el eje X se asumirá apuntando al punto vernal, y el eje Y se colocará formando un triedro dextrógiro. Estos ejes cartesianos se pueden ver en la Figura 5.2, donde también se muestra el ángulo polar ϕ (Ecuación (5.3)) y el ángulo azimutal θ . Actúan como latitud y longitud respectivamente.

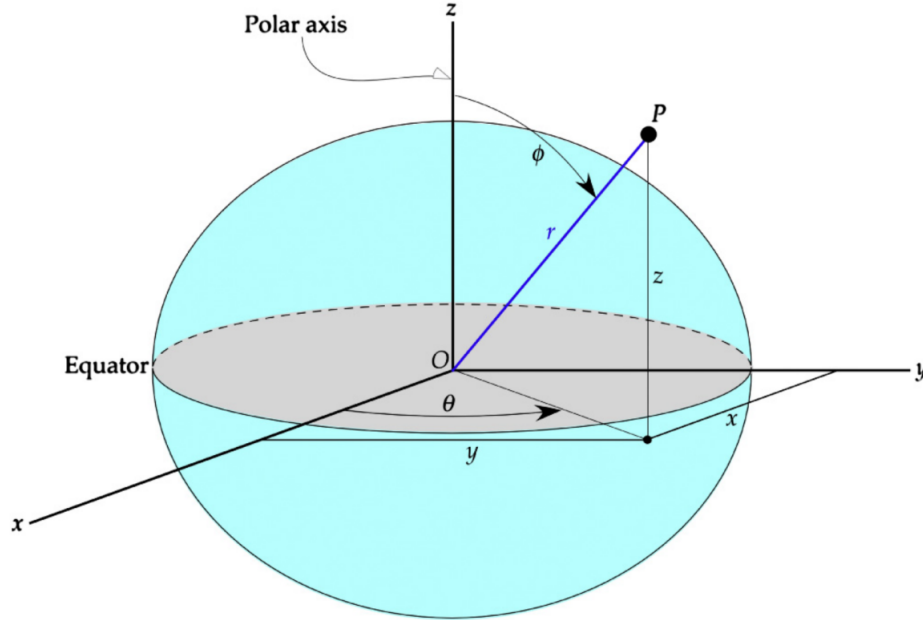


Figura 5.2: Sistema de referencia esférico [11]

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \quad (5.3)$$

$$V = -\frac{\mu}{r} \quad (5.4)$$

El potencial gravitacional debido al achatamiento de la Tierra se define en la Ecuación (5.4), donde r es al valor absoluto del vector posición \vec{r} .

Una hipótesis importante a realizar en este punto es que, en vez de considerar las irregularidades en la distribución de masa, se asumirá que el campo gravitatorio es

simétrico respecto al ángulo azimutal θ . Sólo se considerarán las variaciones respecto al ángulo ϕ y r . Por eso a la expresión del potencial gravitatorio se le deberá un término dependiente de ϕ y r . Así, la expresión final quedará como en la Ecuación (5.5)

$$V(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} + \Phi(r, \phi) \quad (5.5)$$

El término $\Phi(r, \phi)$ hace referencia a las perturbaciones en el potencial gravitacional, y se puede definir de acuerdo a series infinitas [13], como se muestra en la Ecuación (5.6).

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\cos \phi) \quad (5.6)$$

El parámetro R es el radio de la Tierra en el ecuador, cuyo valor se aproxima a 6378 km. J_k es conocido como *armónicos esféricos zonales* del cuerpo principal. Consisten en una serie de coeficientes adimensionales que han sido derivados empíricamente de observaciones y experimentos de cuerpos orbitales. Cada planeta tiene sus propios armónicos esféricos zonales. En el caso de la Tierra, los más importantes se muestran abajo [14]. El primer armónico J_1 se ha omitido porque el origen del sistema de referencia establecido coincide con el centro de masas del cuerpo principal, y por ello J_1 es nulo. Los siguientes armónicos zonales son:

$$J_2=0.00108263$$

$$J_3=-2.33936 \cdot 10^{-3} J_2$$

$$J_4=-1.49601 \cdot 10^{-3} J_2$$

$$J_5=-0.20995 \cdot 10^{-3} J_2$$

$$J_6=0.49941 \cdot 10^{-3} J_2$$

$$J_7=0.32547 \cdot 10^{-3} J_2$$

Obviamente J_2 es mucho más importante a efectos de perturbación que el resto de armónicos zonales, que son tres órdenes de magnitud menor. Además, desde J_7 en adelante, los valores de los armónicos se vuelven tan pequeños en comparación con J_2 que al realizar el sumatorio en la Ecuación (5.6) no influyen realmente. Obviamente, para mayor precisión será necesario añadir más términos al sumatorio. Sin embargo, para el análisis actual será suficiente con considerar únicamente J_2 .

Se debe comentar que, aparte de este tipo de armónicos esféricos, existen dos más: *teseral* y *sectorial*. Se muestran en la Figura 5.3 y se pueden considerar despreciables para el análisis actual. Los armónicos *sectoriales* básicamente consideran variaciones en la forma longitudinal, mientras que los *teserales* sirven para regiones más específicas en las que la forma de la superficie cambia drásticamente [15].

El segundo armónico zonal de la Tierra es debido a su forma de elipsoide. La diferencia entre el radio ecuatorial y el polar permite definir un nuevo parámetro, llamado

achatamiento, que se define en la Ecuación (5.7)

$$\text{achatamiento} = \frac{\text{radio ecuatorial} - \text{radio polar}}{\text{radio ecuatorial}} = \frac{6378 - 6357}{6378} = 0,00330293 \quad (5.7)$$

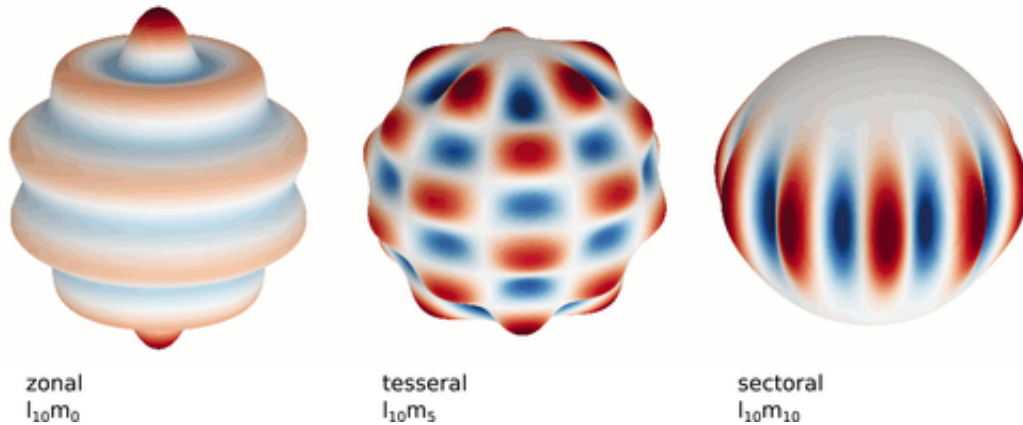


Figura 5.3: Armónicos esféricos [15]

Este efecto lleva a variaciones a lo largo del tiempo en dos elementos orbitales: Ascensión Recta del Nodo Ascendente Ω , y el Argumento del Perigeo ω . Dichas variaciones se expresan en las Ecuaciones

$$\frac{d\Omega}{dt} = - \left(\frac{3J_2\sqrt{\mu}R^2}{2a^7/2(1-e^2)^2} \right) \cos i \quad [\text{rad/s}] \quad (5.8)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} \frac{\frac{5}{2}\sin^2 i - 2}{\cos i} \quad [\text{rad/s}] \quad (5.9)$$

Cabe destacar qué representa cada armónico zonal del tercero al sexto. Por una parte, J_3 representa efectos en largos períodos, J_4 considera variaciones seculares en los parámetros orbitales por el achatamiento ecuatorial del planeta, y aunque el quinto y el sexto armónico tienen muy poca influencia a la hora de determinar la órbita, también son causados por el achatamiento terrestre.

Volviendo a la Ecuación (5.6), el término P_k es conocido como *polinomios de Legendre*. Podrán ser calculados por medio de la expresión conocida como *fórmula de Rodrigues*, representada en la Ecuación (5.10).

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d}{dx^k} (x^2 - 1)^k \quad (5.10)$$

Como únicamente se va a considerar el término correspondiente a $k=2$ para el desarrollo de las perturbaciones, es interesante obtener el polinomio de Legendre y representarlo gráficamente.

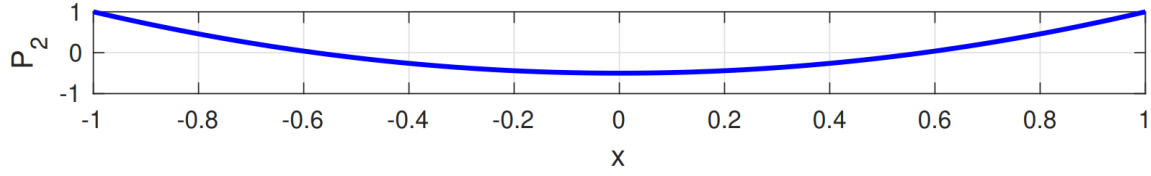


Figura 5.4: Polinomio de Legendre

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (5.11)$$

Así que considerando únicamente J_2 , la Ecuación (5.6) se convierte en la Ecuación (5.12).

$$\Phi(r, \phi) = \frac{J_2 \mu}{2 r} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) \quad (5.12)$$

El siguiente paso consiste en buscar una expresión para la aceleración perturbadora debida a J_2 a partir de la expresión de perturbación del potencial gravitatorio, que se obtiene mediante el desarrollo de la Ecuación (5.13).

$$\vec{p} = -\nabla \Phi(r, \phi) \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.14a)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5.14b)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5.14c)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial r} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) \quad (5.15a)$$

$$\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial \phi} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin \phi \cdot \cos \phi \quad (5.15b)$$

Derivando la Ecuación (5.3), las derivadas parciales de ϕ con respecto a cada componente son:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x \cdot z}{r^3 \sin \phi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y \cdot z}{r^3 \sin \phi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\sin \phi}{r} \quad (5.16)$$

Considerando la Ecuación (5.13) y usando la expresión $\cos \phi = z/r$, se obtiene cada componente de la perturbación debido a J_2 . Estos componentes se añadirán a la ecuación fundamental de movimiento relativo (Ecuación (4.7)) para obtener la expresión del vector aceleración, que finalmente será integrada para obtener el vector estado del cuerpo orbital.

$$p_{J_2,x} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial x} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{x}{r} \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.17a)$$

$$p_{J_2,y} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial y} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{y}{r} \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) \quad (5.17b)$$

$$p_{J_2,z} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial z} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{z}{r} \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 3 \right) \quad (5.17c)$$

Obviamente, cuantos más términos de perturbación se añadan ($J_3, J_4, J_5 \dots$) más precisa será la estimación. Pero como ya se ha comentado anteriormente, para el caso de estudio actual y la simplificación de los cálculos se considerará únicamente la perturbación J_2 . Además, se ha probado que la inclusión de estos términos no mejora aumenta significativamente la precisión, sobre todo en órbitas que se alejan de la Tierra, como es la que se considerará en este trabajo.

5.1.2 Perturbación de resistencia aerodinámica

En esta sección se presenta la desviación del satélite de su órbita, así como el calentamiento aerodinámico, causado por las fuerzas de resistencia debidas a la atmósfera a altitudes relativamente bajas.

El límite a partir del cual la atmósfera terrestre empieza a ser considerada como espacio son unos 100 km. Sin embargo, la atmósfera terrestre es capaz de provocar variaciones en la órbita en un rango comprendido entre 100 y 1000 km. Así, para el cálculo de órbitas LEO (150-1000 km), será necesario considerar la resistencia aerodinámica como fuente de perturbación.

Dentro del rango de actuación previamente mencionado, la resistencia tendrá como principal efecto una reducción en la velocidad orbital del satélite, con su respectiva pérdida de altitud. Sin embargo, este efecto va disminuyendo con la altitud, debido a la relación exponencial negativa entre la densidad y la altitud (Ecuación (5.18)). Al llegar a unos 1000 km de altitud, la magnitud de la perturbación se vuelve prácticamente despreciable, ya que supone un 10^{-10} de la aceleración del satélite.

Existen varios modelos atmosféricos que permiten modelizar la variación de densidad según la altitud, pero según [11], el más utilizado es *US Standard Atmosphere 1976*. La Ecuación (5.18) representa dicha variación con una función exponencial.

$$\rho(z) = \rho_i e^{-\frac{z-z_i}{H_i}} \quad (5.18)$$

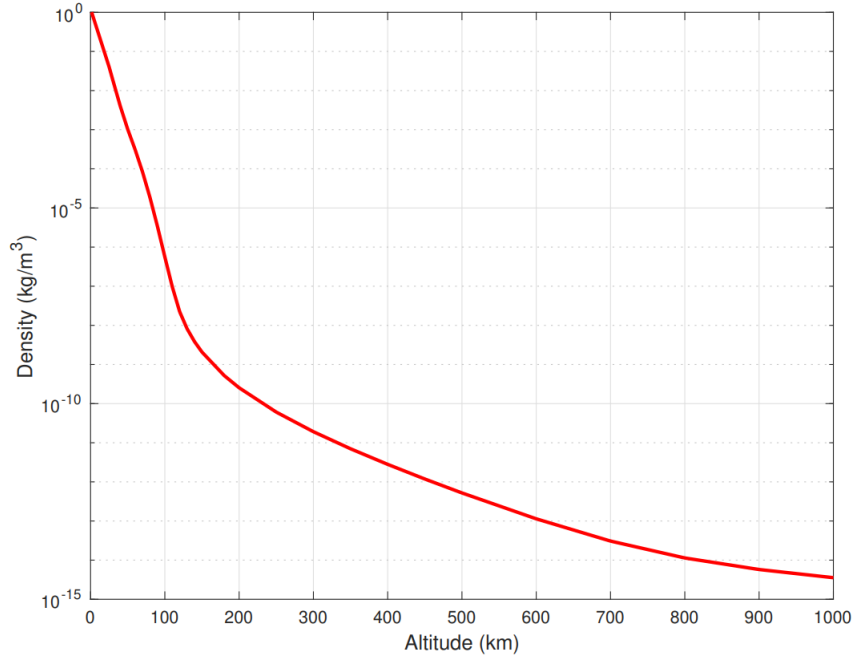


Figura 5.5: Evolución de densidad frente a altitud [11]

$$H_i = -\frac{z_{i+1} - z_i}{\ln\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}\right)} \quad (5.19)$$

En la Figura 5.5 se puede apreciar cómo varía el valor de la densidad dependiendo de la altitud a la que nos encontremos dentro del rango considerado en el que afectará la resistencia aerodinámica.

Buscando una expresión para la aceleración perturbadora debida a la resistencia aerodinámica, es importante darse cuenta de que el término \vec{p} se puede expresar como la fuerza de resistencia (D) dividida por la masa del cuerpo que orbita. Así, la magnitud del *Drag* vendrá dada por la Ecuación (5.20), donde $\rho(z)$ es la densidad obtenida mediante la Ecuación (5.18). Además, v_{rel} es la velocidad del satélite relativa a la atmósfera. A es la superficie transversal del satélite perpendicular a la dirección del vector velocidad y C_D es el coeficiente de Drag.

$$D = \frac{1}{2} \rho(z) v_{rel}^2 A C_D \quad (5.20)$$

Obviamente, la dirección de la fuerza de resistencia es contraria al vector velocidad del cuerpo, ya que la resistencia actúa como un freno, de tal forma que $\vec{D} = -D \vec{u}_{v_{rel}}$. Finalmente, como $\vec{p}_{Drag} = \vec{D}/m_{sat}$, se llega a la expresión para la aceleración perturbadora debida a la resistencia aerodinámica (Ecuación (5.21))

$$\vec{p}_{Drag} = -\frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho(z) v_{rel}^2 A C_D \frac{v_{rel}^{\vec{}}}{v_{rel}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{m_{sat}} \rho(z) v_{rel} A C_D v_{rel}^{\vec{}} \quad (5.21)$$

Esta última expresión es la que se añadirá a la ecuación fundamental de movimiento relativo (Ecuación (4.7)) para integrarla numéricamente y obtener el valor del vector estado del satélite.

Cabe mencionar que el parámetro $\frac{A C_D}{m_{sat}}$ en la Ecuación (5.21) se representa normalmente como B , y se llama *coeficiente balístico*. Además, la expresión para la velocidad relativa del satélite viene dada por la Ecuación (5.22), donde \vec{v} es la velocidad inercial y \vec{v}_{atm} es la velocidad atmosférica. A su vez, para el cálculo de la velocidad atmosférica será necesario asumir un movimiento circular en concordancia con la Tierra ($\vec{\omega}_T = 7,2921159 \cdot 10^{-5} \vec{k}$).

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{atm} = \vec{v} - \vec{\omega}_T \times \vec{r} \quad (5.22)$$

5.1.3 Efectos relativistas

Para determinar los parámetros orbitales, así como el vector estado, el satélite suele ir equipado con un reloj atómico de cesio y fuentes de frecuencia, mediante los cuales son capaces de tomar mediciones muy precisas del tiempo para asegurar que se comete el mínimo error posible.

Sin embargo, el tiempo no es absoluto, sino relativo. La teoría de la relatividad establece que dos eventos separados en el espacio, vistos desde distintos sistemas de referencia, no son completamente simultáneos: la simultaneidad es relativa. Por eso el reloj de un satélite orbitando a cientos de kilómetros por encima de la superficie terrestre no dará la misma medición que un reloj situado en la superficie, ya que la diferencia en el campo gravitatorio impide la sincronización. Además, de acuerdo con principios relativistas, el tiempo tampoco puede ser sincronizado en un sistema de referencia en rotación. Una solución aceptable sería considerar un sistema sin rotación. [16]

La causa principal de aparición de estos efectos relativistas es que ni la Tierra ni el satélite son sistemas de referencia inerciales, sino que están en un constante movimiento relativo entre ellos. Estos efectos, que deberán ser considerados, son las diferencias de tiempo causadas por la gravedad, la dilatación de tiempo y la aceleración del satélite [16]. Esta aceleración puede considerarse como una perturbación. De acuerdo con Beutler (2008) [17], las componentes del vector aceleración perturbador por efectos relativistas vienen dados por la Ecuación (5.23a) a (5.23c), donde c es la velocidad de la luz ($c = 299792458 m/s$).

$$p_{Rel,x} = -3 \frac{\mu^2}{c^2 r^3} x \quad (5.23a)$$

$$p_{Rel,y} = -3 \frac{\mu^2}{c^2 r^3} y \quad (5.23b)$$

$$p_{Rel,z} = -3 \frac{\mu^2}{c^2 r^3} z \quad (5.23c)$$

Es importante mencionar que el orden de magnitud de esta perturbación es de $10^{-10} m/s^2$, por lo que el efecto introducido puede llegar a ser difícil de apreciar. [17]

5.1.4 Perturbación por gravedad lunar

A lo largo de esta sección se obtendrá la expresión correspondiente a la aceleración perturbadora provocada por la Luna. Esto supone añadir un tercer cuerpo al problema. La situación se representa en la Figura 5.6, donde \vec{r} es la posición del satélite con respecto a la Tierra, \vec{r}_{moon} es la posición de la Luna vista desde la Tierra, y $\vec{r}_{m/s}$ es la posición de la Luna con respecto al satélite.

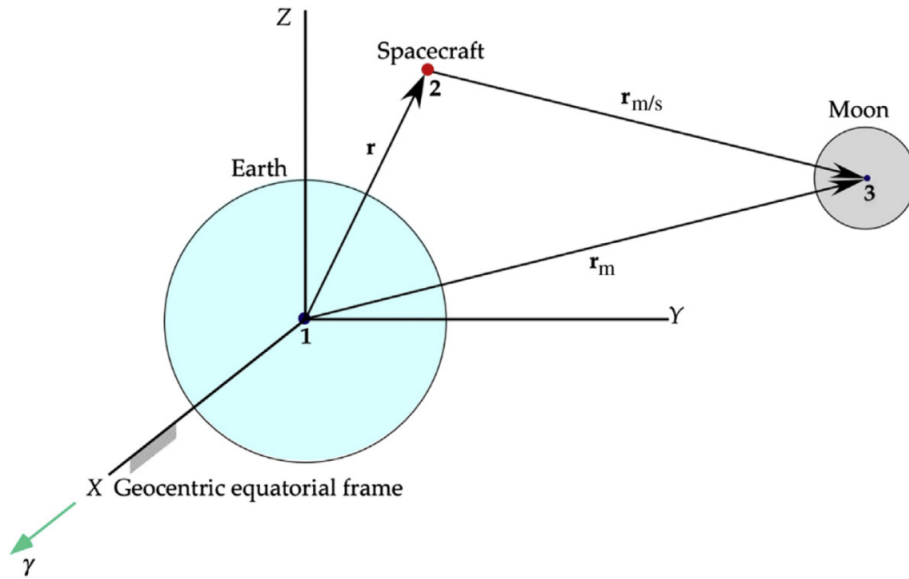


Figura 5.6: Sistema de referencia con centro terrestre incluyendo perturbación lunar

El desarrollo matemático comienza incluyendo la aceleración perturbadora del tercer cuerpo (Luna) sobre el segundo (satélite) respecto al cuerpo principal (Tierra), como se ve en la Ecuación (5.24).

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{2/1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \left(-Gm_1 \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} \right) - \left(Gm_2 \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_{moon}}{r_{moon}^3} \right) \quad (5.24)$$

Sabiendo que $\mu = G(m_1 + m_2)$ y considerando $\mu_{moon} = Gm_3$, se obtendrá la Ecuación (5.25). Es importante darse cuenta de que el segundo término es realmente la aceleración perturbadora por el efecto lunar, que se añadirá a la ecuación fundamental de movimiento relativo (Ecuación (4.7)).

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu_{moon} \left(\frac{\vec{r}_{m/s}}{r_{m/s}^3} - \frac{\vec{r}_{moon}}{r_{moon}^3} \right) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p}_{moon} \quad (5.25)$$

Para poder introducir el término \vec{p}_{moon} en el programa matemático, será necesario haber definido previamente cada vector y cada coeficiente. μ_{moon} es el parámetro gravitacional de la Luna, y vale $4902.800066 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

Relativo a \vec{r}_{moon} , la posición de la Luna se ha obtenido de la web *Horizons*. Para encontrar una expresión en función del tiempo que se pueda utilizar en la ecuación diferencial, se ha utilizado un polinomio interpolador para cada uno de los componentes x , y y z . Los valores de los polinomios dependerán de las fechas que se cojan.

Una vez se ha obtenido la posición de la Luna \vec{r}_{moon} , la posición de la Luna respecto al satélite es algo bastante trivial. Se puede calcular como la diferencia entre \vec{r}_{moon} y el vector \vec{r} , como se muestra en la Ecuación (5.26).

$$r_{m/s,x} = r_{moon,x} - x \quad r_{m/s,y} = r_{moon,y} - y \quad r_{m/s,z} = r_{moon,z} - z \quad (5.26)$$

Por último, las expresiones correspondientes a la perturbación por gravedad lunar son mostradas en las Ecuaciones (5.27a) - (5.27c)

$$p_{moon,x} = \mu_{moon} \left(\frac{r_{m/s,x}}{r_{m/s}^3} - \frac{r_{moon,x}}{r_{moon}^3} \right) \quad (5.27a)$$

$$p_{moon,y} = \mu_{moon} \left(\frac{r_{m/s,y}}{r_{m/s}^3} - \frac{r_{moon,y}}{r_{moon}^3} \right) \quad (5.27b)$$

$$p_{moon,z} = \mu_{moon} \left(\frac{r_{m/s,z}}{r_{m/s}^3} - \frac{r_{moon,z}}{r_{moon}^3} \right) \quad (5.27c)$$

Cabe destacar que, si a_0 es la aceleración del satélite provocada por la gravedad terrestre, la perturbación lunar es alrededor de $a_0 \cdot 10^{-7}$ [11], por lo que la solución introducida no variará de forma significativa los resultados obtenidos.

5.1.5 Perturbación por gravedad solar

El procedimiento será el mismo utilizado para obtener la perturbación por gravedad lunar. El esquema de la nueva situación, considerando la trayectoria aparente del Sol alrededor de la Tierra, se presenta en la Figura 5.7

El parámetro gravitacional del Sol es $\mu_{sun} = 132712440041,93938 \text{ km}^3/\text{s}^2$. En este caso los vectores \vec{r}_{sun} y $\vec{r}_{s/s}$ tienen el mismo significado que los respectivos a la Luna, pero considerando el Sol como tercer cuerpo. Se realiza el mismo procedimiento del polinomio interpolador para la posición del Sol, que tendrá distintas formas dependiendo la fecha de inicio y fin que se escojan.

Finalmente, las expresiones resultantes de llevar a cabo el mismo proceso que en el apartado anterior, pero con los datos del Sol, se muestran de la Ecuación (5.28a) a (5.28c).

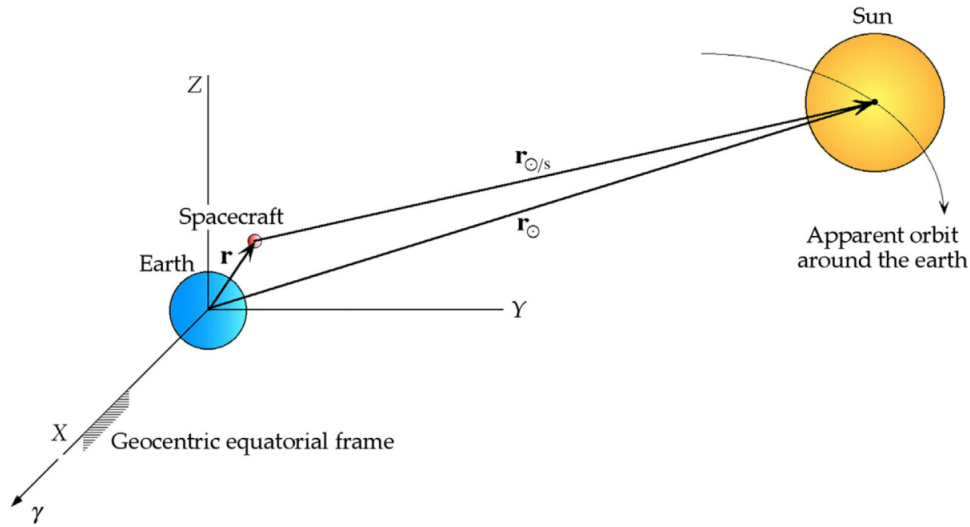


Figura 5.7: Sistema de referencia con centro terrestre incluyendo perturbación solar

$$p_{sun,x} = \mu_{sun} \left(\frac{r_{s/s,x}}{r_{s/s}^3} - \frac{r_{sun,x}}{r_{sun}^3} \right) \quad (5.28a)$$

$$p_{sun,y} = \mu_{sun} \left(\frac{r_{s/s,y}}{r_{s/s}^3} - \frac{r_{sun,y}}{r_{sun}^3} \right) \quad (5.28b)$$

$$p_{sun,z} = \mu_{sun} \left(\frac{r_{s/s,z}}{r_{s/s}^3} - \frac{r_{sun,z}}{r_{sun}^3} \right) \quad (5.28c)$$

5.1.6 Perturbación por los planetas del Sistema Solar

El objetivo de esta sección es considerar las perturbaciones causadas por los planetas. En este caso también será necesario utilizar tanto coordenadas geocéntricas como heliocéntricas, y servirá para reducir aún más el error numérico de integración. Para esto, la gravedad de todos los planetas tiene que ser considerada.

En este caso, el procedimiento será exactamente el mismo que el utilizado para la Luna como para el Sol, pero sustituyendo el tercer cuerpo por cada uno de los planetas. Lo único necesario serán los parámetros gravitacionales de cada planeta, y la expresión de la aceleración perturbadora, que será similar a la Ecuación (5.25), y por consiguiente, las perturbaciones tendrán la forma de las Ecuaciones (5.27a), (5.27b) y (5.27c).

$$\mu_{mercurio} = 22031,86855 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{venus} = 324858,592 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{marte} = 42828,375214 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{jupiter} = 126686531,900 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{saturno} = 37931206,159 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{urano} = 5793951,322 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{neptuno} = 6835099,97 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_{pluton} = 869,96 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

Los datos de la posición de los planetas, tanto en coordenadas geocéntricas como heliocéntricas se obtendrán de la web *Horizons Nasa*, de las que más tarde se obtendrán los polinomios interpoladores correspondientes para cada coordenada x , y , y z . La evolución de las coordenadas dependerá de las fechas de inicio y fin que se escojan.

5.1.7 Presión por radiación solar

En esta sección se procederá a definir la última aceleración perturbadora e implementarla en pos de una mayor precisión final. Esta perturbación es debida a que el Sol es un cuerpo grande que emite fotones constantemente, que no tienen masa pero transportan energía y momento. El Sol es considerado un cuerpo negro y conocido como *fotosfera*. Para poder calcular la intensidad de la potencia radiada en esta superficie, se procederá a usar la ley de Stefan-Boltzmann, de acuerdo con lo que establece la Ecuación (5.29), donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y T_p es la temperatura efectiva de la fotosfera, con un valor de 5777 K.

$$S_0 = \sigma T_p^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5777^4 = 63,15 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 \quad (5.29)$$

Sabiendo que la intensidad multiplicada por el cuadrado del radio es constante, la intensidad de la radiación solar en la órbita puede ser fácilmente determinada, ya que el radio medio del Sol y la distancia media entre el Sol y la Tierra son valores conocidos. Este parámetro se conoce como flujo de energía transportado, y se representa como S_{E-S} . También es conocido como *constante solar*. [11]

$$S_{E-S} \cdot R_{E-S}^2 = S_0 \cdot R_0^2 \rightarrow S_{E-S} = S_0 \left(\frac{R_0}{R_{E-S}} \right)^2 \quad (5.30)$$

$$S_{E-S} = 63,15 \cdot 10^6 \left(\frac{696000}{149 \cdot 10^6} \right)^2 = 1367 \text{ W/m}^2 \quad (5.31)$$

Para poder obtener la constante de presión de radiación solar, el flujo de energía tiene que ser dividido por la velocidad de la luz, como se muestra en la Ecuación (5.32). Se puede observar que el valor resultante lo hace despreciable frente a la presión atmosférica a nivel del mar (101325 Pa).

$$P_{SR} = \frac{S_{E-S}}{c} = 4,56 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2 = 4,56 \text{ } \mu\text{Pa} \quad (5.32)$$

$$\vec{p}_{SRP} = -\nu \frac{S_{E-S}}{c} \frac{C_R A_S}{m_s} \vec{u}_{r_{sun}} \quad (5.33)$$

La Ecuación (5.33) es la expresión para la aceleración perturbadora por radiación solar, donde ν es la función sombra que deberá devolver 0 si el satélite está en sombra, y 1 si es alcanzado por luz solar. C_R es el coeficiente de presión de radiación y cuyo valor oscila entre 1 y 2: 1 para cuerpos negros, que absorben radiación, y 2 para cuerpos blancos, que la reflejan. El coeficiente A_S es el área transversal que recibe la radiación. Finalmente, m_s es la masa del satélite, y $\vec{u}_{r_{sun}}$ el vector unitario correspondiente a la posición del Sol con respecto al Satélite, que irá variando a lo largo de su misión. Dentro de la esfera de influencia (SOI en inglés) de la Tierra se podrá aproximar como el vector unitario correspondiente a la posición del Sol con respecto a la Tierra. Cabe mencionar que la aceleración perturbadora es negativa porque la fuerza ejercida por los fotones aleja al satélite del Sol.

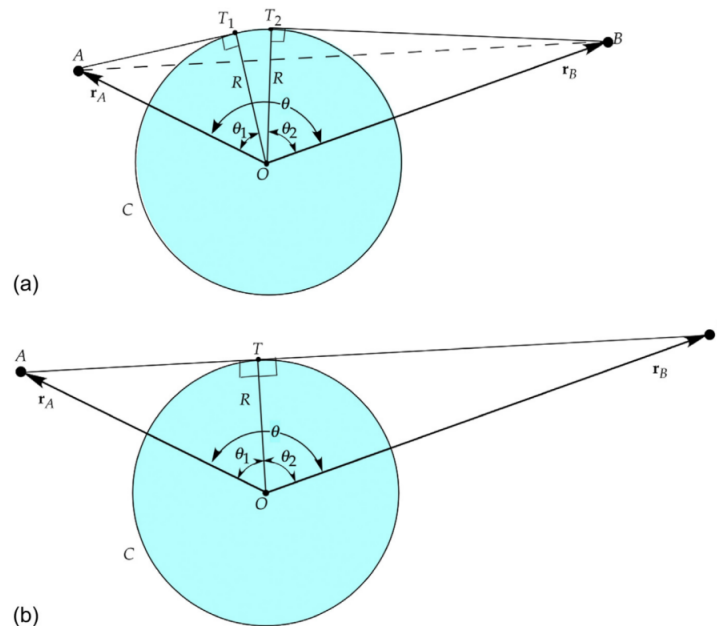


Figura 5.8: Situación para obtener la función sombra

Para finalizar, se presenta el procedimiento necesario para obtener la función sombra en cada instante de tiempo. La Figura 5.8 muestra cómo es el problema, así como los

vectores y ángulos más relevantes. El método consiste en obtener inicialmente el ángulo entre los vectores \vec{r} y \vec{r}_{sun} , que es el ángulo θ en la Figura 5.8. θ_1 corresponde al ángulo entre \vec{r} y la línea tangente a la Tierra desde el satélite. Lo mismo ocurre con θ_2 , pero con la tangente restante.

El procedimiento para la función sombra se trata de añadir los valores de los ángulos θ_1 y θ_2 , y comparar el resultado con θ . Si θ es mayor o igual, el satélite está en sombra y ν es 0. Si no es así, ν es igual a 1 y el satélite está siendo alcanzado por luz solar, considerando el efecto de la perturbación por radiación solar.

La aceleración provocada por este efecto tiene un orden de magnitud 9 veces menor que la aceleración no perturbada. Es por eso que será difícilmente apreciable, pero a la hora de integrar en un amplio período de tiempo, es importante considerar cualquier perturbación por pequeña que sea.

5.1.8 Maniobra orbital no impulsiva

En este tipo de maniobras, el empuje trabaja durante un período de tiempo prolongado, no únicamente un instante. Esto hace que el impulso tenga que ser considerado como una perturbación a la hora de integrar.

Hay que considerar que la velocidad en cualquier punto puede obtenerse determinarse mediante el momento h , la excentricidad e y la anomalía verdadera θ

$$\vec{v} = \left(-\frac{\mu}{h} \sin \theta, \frac{\mu}{h} (e + \cos \theta), 0 \right) \quad (5.34)$$

Partiendo de la ecuación de movimiento relativo (Ecuación (4.7)), al aplicar el impulso se debe considerar una fuerza \vec{F} . Si la consideramos causada por un empuje T apuntando en la dirección de la velocidad $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, llegamos a la Ecuación (5.35).

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\vec{v}}{v} \quad (5.35)$$

Y que al separarlo en las distintas coordenadas nos queda:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{x}}{v} \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{y}}{v} \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{T}{m} \frac{\dot{z}}{v} \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

La masa del satélite vendría dada en función del tiempo por el consumo de propelente

$$m(t) = m_0 - \dot{m}_e t \quad (5.37)$$

Por otra parte, se puede obtener la variación de masa de propelente gracias a la expresión del empuje T , lo que resulta en:

$$T = \dot{m}_e I_{sp} g_0 \quad \rightarrow \quad \dot{m}_e = \frac{T}{I_{sp} g_0} \quad \rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{I_{sp} g_0} \quad (5.38)$$

Finalmente, la Ecuación (5.38) se introducirá en la Ecuación (5.37) para obtener la evolución de la masa del vehículo en función del tiempo.

$$\dot{m} = -\frac{T}{I_{sp} g_0} \quad (5.39)$$

6 Maniobras orbitales

Las maniobras orbitales tienen como propósito realizar la transferencia entre órbitas de la nave. Para este cambio, será necesario el funcionamiento de los motores cohete. Tendremos en cuenta únicamente maniobras impulsivas, que se tratan de breves encendidos de los motores que provocarán un delta-v.

Durante la maniobra impulsiva, la posición de la nave se considera constante. Lo único que varía es la velocidad. Esto es una 'idealización' que nos permite resolver las ecuaciones del movimiento sin considerar el empuje. La magnitud de Δv está relacionada con el Δm , que es la masa de propelente consumida, mediante la Ecuación (6.1).

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \quad (6.1)$$

donde m es la masa de la nave antes del impulso, g_0 es la aceleración de la gravedad al nivel del mar, e I_{sp} es el impulso específico, que se calcula como el 'Thrust' partido de la razón de consumo de combustible a nivel del mar.

Al plantear las transferencias, se considerarán entre órbitas coplanarias, que generan un resultado aproximado muy bueno. Sin embargo, las velocidades heliocéntricas de los planetas son muy elevadas, por lo que cualquier pequeña variación en las supuestas órbitas va a tener una gran influencia en el delta-v necesario para la mencionada transferencia.

6.1 Transferencia de Hohmann

Esta aproximación es la forma más eficiente energéticamente de realizar una maniobra bi-impulsiva entre dos órbitas circulares coplanarias que comparten un mismo foco. La transferencia resulta en una órbita elíptica tangente a ambas órbitas circulares en su línea de ápsides. Así, el periápside y el apoápside de la elipse de transferencia resultan en los radios de los círculos interno y externo, respectivamente. Realmente tan sólo se llega a recorrer la mitad de la elipse, que puede ocurrir en cualquier dirección, tanto del círculo externo al interno como del interno al externo.

Es importante recordar que la energía de una órbita depende de su semieje mayor a . Para una elipse (Ecuación (6.2)), la energía específica es negativa

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (6.2)$$

El incremento de energía se traduce en hacer ϵ menos negativo. Así, para un semieje mayor, la órbita tendrá una mayor energía.

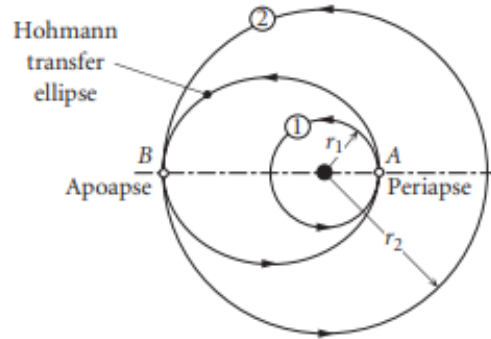


Figura 6.1: Transferencia de Hohmann [11]

En la Figura 6.1 la energía aumentará para la transferencia desde la órbita interior hacia la exterior. Empezando en el punto A , se necesitará un impulso Δv_A en la dirección de vuelo para poder llegar al punto B . Una vez en B , si no se aplica otro impulso la nave permanecerá en la órbita de transferencia. Es por eso que se necesitará otro impulso Δv_B , que colocará finalmente a la nave en la órbita exterior (de mayor energía). Entonces, se puede decir que $\Delta v_{total} = \Delta v_A + \Delta v_B$. El mismo delta-v será necesario si se pretende pasar desde la órbita 2 en el punto B hasta la órbita 1, pero con signo contrario. En este caso se necesitaría reducir la energía de la órbita, es decir, decelerar la nave mediante un impulso en sentido contrario al de vuelo.

$$h = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_a r_p}{r_a + r_p}} \quad (6.3)$$

$$v = \frac{h}{r} \quad (6.4)$$

Para encontrar cuál es la mejor órbita de transferencia en general, se debe calcular el delta-v total en dos casos, aplicando empuje inicialmente en el apogeo o en el perigeo. Y para calcular el momento angular en cualquiera de las órbitas, se debe utilizar la Ecuación (6.3), del que se obtendrán las velocidades mediante la Ecuación (6.4). Así se podrá determinar la mejor órbita de transferencia, correspondiente al menor Δv

6.2 Transferencia de Hohmann interplanetaria

Las órbitas de la mayoría de los planetas del sistema solar yacen muy cercanas al plano orbital de la Tierra (plano eclíptico). Los que más se desvían son Mercurio y Plutón (con 7° y 17° respectivamente), mientras que el resto oscila en unos 3.5° . También cabe destacar la poca excentricidad de las órbitas planetarias, exceptuando también Mercurio y Plutón. Para simplificar los cálculos, ya que se trata de un estudio preliminar, se considerarán las órbitas circulares y coplanarias.

Considerando la Figura 6.2, el punto D es el lugar de salida (Departure), y el punto A el de llegada (Arrival). Claramente, el punto D se corresponde con el periápside de la elipse de transferencia, mientras que el punto A con el apoápside. Sabiendo que la velocidad circular de un planeta con respecto al Sol viene dada por la Ecuación (6.5)

$$v_{circular} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (6.5)$$

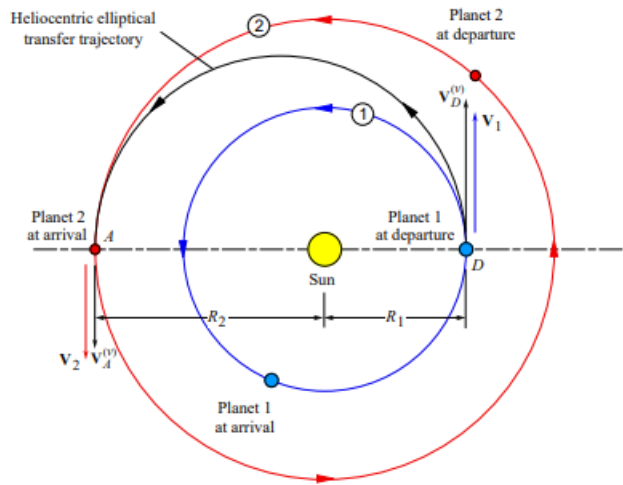


Figura 6.2: Transferencia Hohmann desde planeta 1 a planeta 2 [11]

Así, la velocidad del vehículo en el punto D sobre la elipse de transferencia es

$$V_D^{(v)} = \frac{h}{R_1} = \sqrt{2\mu_{Sun}} \sqrt{\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)}} \quad (6.6)$$

Donde la expresión de h se puede encontrar en la Ecuación (6.3). Cabe destacar que $V_D^{(v)}$ debe ser mayor que la velocidad del planeta, llegando a un delta-v equivalente a

$$\Delta V_D = V_D^{(v)} - V_1 \quad (6.7)$$

donde V_1 se sustituye por la Ecuación (6.5).

Lo mismo se podrá aplicar en el punto A , obteniendo así el ΔV_A necesario como

$$\Delta V_A = V_2 - V_A^{(v)}$$

que será positivo, ya que el planeta 2 tendrá una velocidad en el punto A mayor que el que tendrá la nave.

6.3 Ventanas de lanzamiento

A la hora de diseñar una misión interplanetaria, el objetivo no es únicamente llegar a la órbita del planeta, sino también completar el *rendezvous*¹. De acuerdo con la Figura 6.2, para que se produzca el encuentro será necesario que la posición del planeta 2 en el instante de salida del vehículo (punto D) sea tal que el planeta 2 alcance el ápside de la elipse de transferencia a la misma vez que lo hará la nave.

Considerando nuevamente órbitas circulares, se puede elegir fácilmente una línea de ápsides horizontal desde la que medir la anomalía verdadera θ , que será:

$$\theta_i = \theta_{i0} + n_i t \quad i = 1, 2 \quad (6.8)$$

correspondiendo i a los planetas que forman el sistema. θ_{i0} es la anomalía verdadera en un instante inicial $t = t_0$, y n_i el movimiento medio del planeta i . Así se llega a la posición angular ϕ del planeta 2 con respecto al planeta 1 (Ecuación (6.9)), habiendo considerado que $\phi = \theta_2 - \theta_1$

$$\phi = \phi_0 + (n_2 - n_1)t \quad (6.9)$$

donde $\phi_0 = \theta_{20} - \theta_{10}$ es el ángulo de fase inicial.

Como se puede deducir de la Ecuación (6.9), el ángulo de fase ϕ es variable con el tiempo. Entonces, ¿cuál será el tiempo necesario para la transferencia? Corresponderá con la mitad del periodo de la órbita. De acuerdo con la tercera ley de Kepler, y sabiendo que el semieje mayor de la órbita de transferencia se corresponde con la semisuma de los radios de las órbitas de origen y destino (se puede apreciar en la Figura 6.3), se llega a una expresión para el tiempo de transferencia (Ecuación (6.10))

$$t_{12} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)^{3/2} \quad (6.10)$$

En el tiempo que tarda la nave en completar la transferencia desde la órbita 1 hasta la 2 (en total equivale a π radianes), el planeta 2 debe de moverse sobre su órbita y acabar en el punto exactamente contrario a la posición del planeta 1 cuando se produjo la salida (punto D). Teniendo en cuenta que n_2 es la velocidad angular del planeta 2, la distancia angular viajada por este se calcula fácilmente como $n_2 \cdot t_{12}$. Así, como se puede observar en la Figura 6.3, el ángulo de fase inicial ϕ_0 es

$$\phi_0 = \pi - n_2 t_{12} \quad (6.11)$$

¹Término francés que significa 'encuentro'. Se usa para describir una aproximación entre dos vehículos o cuerpos espaciales

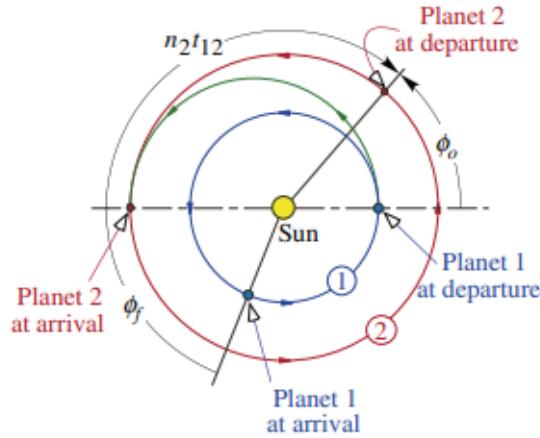


Figura 6.3: Ángulos característicos de transferencia de Hohmann [11]

que será equivalente a la fase necesaria entre los planetas para que pueda producirse la transferencia $\phi_0 = \phi_t$. Si se desea conocer el ángulo de fase entre planetas una vez ha llegado la nave al punto A , solo será necesario combinar las Ecuaciones (6.9) y (6.11), llegando a

$$\phi_f = \pi - n_1 t_{12}$$

El tiempo necesario para que el ángulo de fase sea el correcto se conoce como t_{wait} . Para poder calcular este tiempo, habrá que calcular ϕ_0 , y con la Ecuación (6.9) obtener el tiempo de espera.

$$\phi_t = \phi_0 + (n_2 - n_1) t_{wait} \quad (6.12)$$

Así, el instante en el cual se podría alcanzar el objetivo se conoce como *ventana de lanzamiento*. En la transferencia de Hohmann, esta ventana es sólo un instante, pero en otro tipo de transferencias se cuenta con un intervalo de tiempo dentro del cual se debe buscar la optimización de valores como ΔV o el tiempo de transferencia.

Otro parámetro importante es el periodo sinódico. Se trata del tiempo necesario para que el ángulo de fase entre los planetas vuelva a su valor inicial. Considerando esto en la Ecuación (6.9) se llega a la expresión de T_{syn} .

$$T_{syn} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} \quad (6.13)$$

donde T_1 y T_2 son los períodos orbitales de los planetas 1 y 2 respectivamente.

6.4 Esfera de influencia

El sol es el cuerpo celestial dominante en el sistema solar. Su atracción gravitatoria afecta a todos los planetas. Sin embargo, cerca de un planeta dado, la atracción gravitatoria del propio planeta sobrepasa a la del sol. Por ejemplo, la atracción gravitatoria que

ejerce la Tierra en su superficie es unas 1600 veces mayor que la que ejerce el Sol en ese mismo punto. La propia naturaleza de la fuerza de gravedad hace que ésta tienda a decrecer rápidamente conforme aumenta la distancia al cuerpo que la genera, como se puede ver en la Figura 6.4. Entonces, a una distancia considerable del planeta, se volverá a imponer la atracción del Sol.

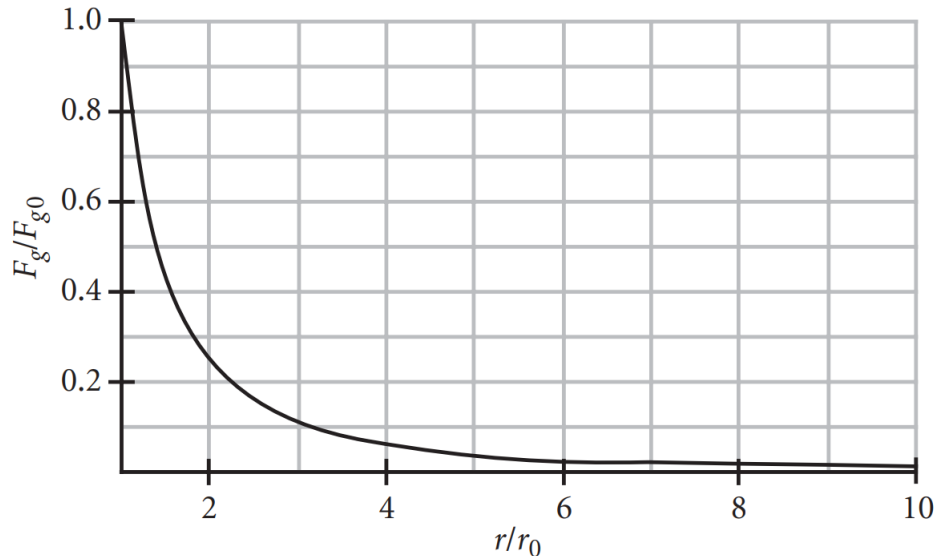


Figura 6.4: Disminución de fuerza gravitatoria con la distancia [11]

Para poder establecer una zona en la que la atracción del planeta se sobreponga a la del Sol, hay que considerar un sistema con tres cuerpos formado por el Sol s de masa m_s , el planeta p de masa m_p y el vehículo espacial v de masa m_v , donde $m_v \ll m_p$ y $m_v \ll m_s$. Es posible expresar el valor de las fuerzas sobre m_v provocadas por los otros dos cuerpos relativas al planeta, y compararlas para saber en qué momento una fuerza es mayor que la otra. La expresión que define esto delimitará la zona de influencia del planeta. El límite de dicha zona se determina igualando ambas fuerzas, lo que proporciona la siguiente expresión:

$$\frac{r_{SOI}}{R} = \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{2/5} \quad (6.14)$$

donde R se refiere a la distancia entre el planeta y el Sol. El desarrollo completo de la Ecuación (6.14) se puede encontrar en [11]. Dicha ecuación limita la zona de influencia del planeta, que se trata de una esfera de radio R_{SOI} y se denomina Esfera de Influencia (Sphere Of Influence).

6.5 Ajuste de cónicas

Con 'cónicas' se refiere al hecho de que las órbitas Keplerianas son secciones cónicas. Para estudiar las trayectorias, se supondrá que cuando la nave no está dentro de la esfera

de influencia de un planeta sigue una órbita heliocéntrica kepleriana sin perturbar. Sin embargo, al ser las distancias interplanetarias tan extensas, se podría despreciar el efecto de las esferas de influencia y considerarlas como puntos que coinciden con los centros de los planetas. Mientras que la esfera aparece como un punto en órbitas interplanetarias, desde el punto de vista del planeta es muy grande y puede considerarse como infinita.

Para poder utilizar el método de ajuste de cónicas en el cálculo de una trayectoria interplanetaria, será necesario fijar la trayectoria heliocéntrica de transferencia entre los planetas objetivo. Como a la salida y la llegada la nave se encontrará dentro de las esferas de influencia, las velocidades heliocéntricas pasan a ser las velocidades relativas al planeta para establecer la velocidad que se necesitará en el infinito (salir de la esfera de influencia). Esto finalmente se usarán a la hora de calcular las trayectorias de partida y de llegada.

6.6 Salida planetaria

Para poder escapar de la atracción gravitatoria de un planeta, la nave deberá de ser capaz de viajar con una órbita hiperbólica respecto al planeta, y llegar a la esfera de influencia con una velocidad v_∞ mayor que 0.

En la Figura 6.5 se ve la trayectoria de una nave escapando del planeta 1 para llegar a otro planeta más lejano del Sol. Al cruzar la esfera de influencia, la velocidad de la nave ($V_D^{(v)}$) y la velocidad heliocéntrica del planeta (V_1) deben ser paralelas en la misma dirección para que ΔV_D sea positivo en la Ecuación (6.7).

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu_{sun}}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right) \quad (6.15)$$

Normalmente la salida planetaria se suele realizar desde una órbita de parking cuyo radio es equivalente al periápside r_p de la trayectoria de partida. Esto significa que el impulso que iniciará la partida de la nave se realiza desde la órbita de parking.

El exceso de velocidad en trayectorias hiperbólicas se define conforme la Ecuación (6.16).

$$v_\infty = \frac{\mu}{h} \sqrt{e^2 - 1} \quad (6.16)$$

de donde, despejando el momento específico h , se llega a la Ecuación (6.17).

$$h = \frac{\mu}{v_\infty} \sqrt{e^2 - 1} \quad (6.17)$$

Sustituyendo en la Ecuación (4.10), evaluándola en el periápside ($\theta = 0$) y despejando la excentricidad, se obtiene la expresión de la excentricidad para órbitas hiperbólicas (Ecuación (6.18)).

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_1} \quad (6.18)$$

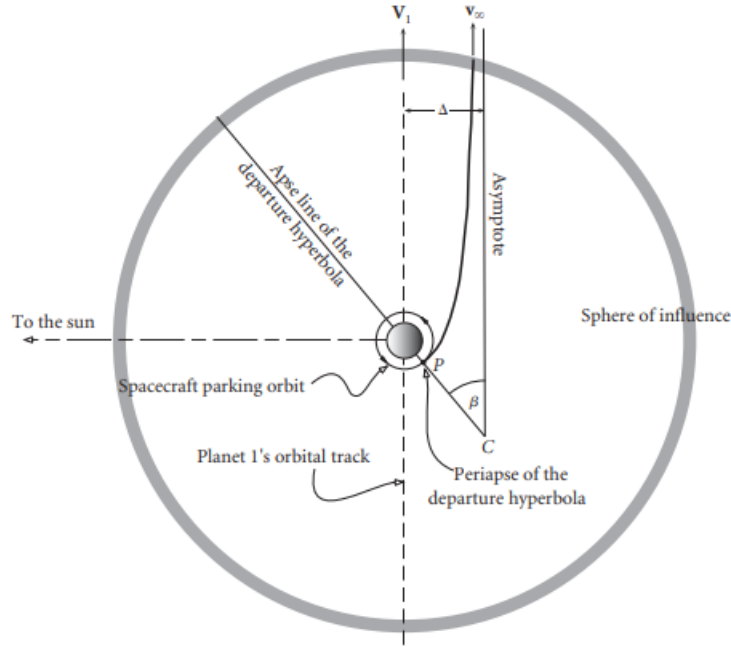


Figura 6.5: Salida de órbita hacia otro planeta [11]

Sustituyendo en la Ecuación (6.17) la expresión obtenida en la Ecuación (6.18), se obtiene una expresión para el momento angular (Ecuación (6.19)) h a partir de parámetros conocidos.

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_1}{r_p}} \quad (6.19)$$

A partir del momento angular es sencillo obtener la velocidad en el periapeo de la hipérbola de partida, que se corresponderá con la velocidad de la órbita de parking.

$$v_p = \frac{h}{r_p} \quad (6.20)$$

Con la Ecuación (6.20) se podrá calcular el Δv necesario para poner la nave en la órbita hiperbólica deseada.

$$\Delta v = v_p - v_c = v_c \left(\sqrt{2 + \left(\frac{v_\infty}{v_c} \right)^2} - 1 \right) \quad (6.21)$$

Finalmente, para poder definir completamente la trayectoria de partida se debe conocer la localización del periapeo, es decir, donde debe ocurrir el impulso. Para ello se utiliza el parámetro β . Para una órbita hiperbólica genérica

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) \quad (6.22)$$

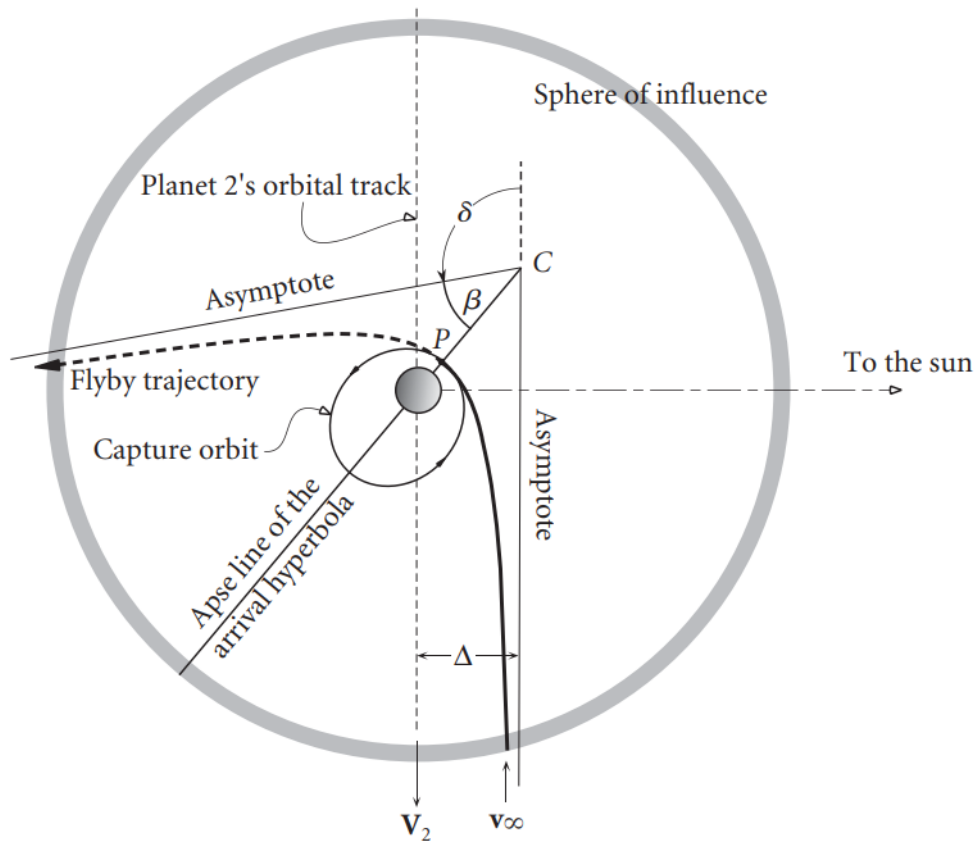


Figura 6.6: Nave aproximándose a un planeta exterior desde uno interior [11]

donde se sustituye la e por la Ecuación (6.18), resultando en

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_1}} \right) \quad (6.23)$$

donde β , que es la orientación de la línea de ápside respecto al vector heliocéntrico de velocidad del planeta, termina de definir la órbita de salida.

6.7 Encuentro con el planeta objetivo

La nave llega al planeta de destino con un exceso de velocidad hiperbólica v_∞ relativo al planeta (Figura 6.6). En el caso de salida de un planeta interior a uno exterior, la velocidad heliocéntrica del vehículo $V_A^{(v)}$ es menor que la del planeta. Si el trayecto se realizara al contrario, sería mayor.

En esta maniobra aparece el parámetro Δ , conocido como el parámetro de impacto. Como se puede observar en la Figura 6.6, se trata de la distancia entre la asíntota de la hipérbola de llegada y una línea paralela que pasa por el foco.

Lo que ocurre tras atravesar la esfera de influencia dependerá de la naturaleza de la misión. Se puede buscar tanto un impacto con el planeta como conseguir que la nave orbite. Si se trata del primer caso, el parámetro de impacto Δ deberá ser tal que el radio del periápside sea igual que el radio del planeta. Si lo que se desea es poner la nave en órbita, se debe elegir un Δ adecuado para que el impulso en el periápside ocurra a la altura adecuada. Sin embargo, si no se quiere impactar ni poner en órbita, la nave continuará en una trayectoria de flyby, saliendo de la esfera de influencia con la misma velocidad relativa v_∞ que con la que entró pero con el vector velocidad rotado un ángulo δ .

$$\delta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) \quad (6.24)$$

$$\Delta = \frac{h^2}{\mu_2} \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad (6.25)$$

En ambas se sustituirá e por la Ecuación (6.18), y se obtiene h de la Ecuación (6.19), pero esta vez con los datos correspondientes al planeta 2.

Ahora supongamos que el propósito de la misión es entrar en una órbita elíptica alrededor del planeta con excentricidad e . Será necesario aplicar un delta-v en el periápside P (Figura 6.6), que coincide con el periápside de la elipse. La velocidad de la trayectoria hiperbólica viene dada por la Ecuación (6.20). Para conocer la velocidad en el periápside de la órbita de parking, se usa la Ecuación (4.10) y resolviendo la velocidad v . Esto nos deja con:

$$\Delta v = v_p)_{hyp} - v_p)_{park} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_2}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{r_p}} \quad (6.26)$$

6.8 Flyby planetario

Ocurre cuando la nave entra en la esfera de influencia del planeta, pero no impacta contra éste ni entra en órbita, sino que continua con su trayectoria hiperbólica pasando por el periápside y finalmente escapa de la esfera de influencia.

Los excesos de velocidad $v_{\infty 1}$ y $v_{\infty 2}$ son de la misma magnitud, estando $v_{\infty 2}$ rotado un ángulo δ con respecto a $v_{\infty 1}$, como se muestra en la Figura 6.7. Entonces, Δv_∞ es un vector que reside en la línea de ápside y siempre apunta hacia el periápside de la hipérbola. Dependiendo de si la nave realiza el flyby en el mismo sentido o no que la velocidad heliocéntrica del planeta, el resultado será un aumento o una reducción en la velocidad heliocéntrica de la nave ($\Delta V^{(v)}$ positivo o negativo respectivamente). Para el caso mostrado en la Figura 6.7, la nave saldrá de la esfera de influencia del planeta en sentido contrario a la velocidad heliocéntrica de este, lo que resultará en un decremento de la velocidad heliocéntrica de la nave.

Para poder analizar la maniobra será necesario introducir algunos parámetros. En primer lugar, $\hat{\mathbf{u}}_v$ es el vector unitario en la dirección de la velocidad heliocéntrica del

En la partida, el ángulo entre \mathbf{v}_{∞_2} y \mathbf{V} es ϕ_2 , y se expresa como

$$\phi_2 = \phi_1 + \delta \quad (6.30)$$

El ángulo de giro δ será positivo o negativo, dependiendo de si el flyby ocurre en sentido de la velocidad heliocéntrica del planeta o no. En el caso de la Figura 6.7, δ será positivo. Como la magnitud de \mathbf{v}_{∞_2} es v_∞ , se puede expresar en componentes como

$$\mathbf{v}_{\infty_2} = v_\infty \cos \phi_2 \hat{\mathbf{u}}_V + v_\infty \sin \phi_2 \hat{\mathbf{u}}_S \quad (6.31)$$

Así, la velocidad heliocéntrica de la nave a la salida de la esfera de influencia vendrá dada por

$$\mathbf{V}_2^{(v)} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{\infty_2} = [V_2^{(v)}]_V \hat{\mathbf{u}}_V + [V_2^{(v)}]_S \hat{\mathbf{u}}_S \quad (6.32)$$

donde los componentes de $\mathbf{V}_2^{(v)}$ son

$$[V_2^{(v)}]_V = V + v_\infty \cos \phi_2 \quad [V_2^{(v)}]_S = v_\infty \sin \phi_2 \quad (6.33)$$

Estos componentes de la velocidad nos permiten obtener las velocidades radial y transversal heliocéntricas

$$V_{\perp_2} = [V_2^{(v)}]_V \quad V_{r_2} = -[V_2^{(v)}]_S \quad (6.34)$$

Finalmente se obtienen los tres elementos (e_2 , h_2 y θ_2) de la nueva trayectoria heliocéntrica por medio de la Ecuación (4.9)

$$h_2 = R V_{\perp_2} \quad (6.35)$$

La Ecuación (4.10)

$$R = \frac{h_2^2}{\mu_{sun}} \frac{1}{1 + e_2 \cos \theta_2} \quad (6.36)$$

y también

$$V_{r_2} = \frac{\mu_{sun}}{h_2} e_2 \sin \theta_2 \quad (6.37)$$

Cabe destacar que el flyby se considera como una maniobra impulsiva, durante la cual el radio heliocéntrico de la nave permanece fijo a R .

7 Validación: Comparación con casos reales

Se procederá a realizar una comparación entre el integrador de órbitas desarrollado con dos satélites distintos para poder validar la efectividad del código. Se elegirá un satélite que orbite alrededor de la Tierra (órbita geocéntrica), otro que orbite alrededor del Sol (órbita heliocéntrica) y finalmente uno que utilice maniobras con motores de bajo impulso.

El propósito es obtener el vector de estado a lo largo del tiempo y compararlo con aquel obtenido de la web *Horizons* para poder obtener una medición aproximada del error cometido. Se considerarán también las perturbaciones desarrolladas en la Sección 5.

7.1 Beidou-M3

Beidou se trata de una misión de investigación china. Para esta misión se lanzaron 2 satélites, el M3 y el M4. Estos satélites forman parte de una constelación mayor, conocida como CNSS (Compass Navigation Satellite System). Este es capaz de proporcionar información sobre posicionamiento y velocidad de forma continua y en tiempo real. Sus principales objetivos son la independencia tecnológica, mejorar la precisión y cobertura en el posicionamiento, proporcionar beneficios militares y ampliarse internacionalmente cooperando y ofreciendo nuevos servicios de posicionamiento.

En este caso, y para agilizar la explicación, se procederá introduciendo todas las perturbaciones a la vez. Como se mencionó anteriormente, respecto al achatamiento terrestre tan solo se considerará el factor J_2 .

A continuación, para incorporar la perturbación por resistencia atmosférica se deberá considerar el radio orbital del satélite. Beidou se encuentra en una órbita MEO (a unos 20000 km sobre la superficie) por lo que de acuerdo con la Sección 5.1.2 se puede despreciar el efecto al estar bastante por encima de los 1000 km establecidos como límite.

Por último, para el resto de efectos será necesario conocer la posición del satélite en cada instante, así como su distancia respecto a los cuerpos que lo perturbarán. En este caso, la Luna será aquel cuerpo con más influencia sobre Beidou, pero también se considerarán el resto de planetas para realizar una aproximación lo más fidedigna posible.

Se procederá a realizar la comparación con los datos sacados de la web *Horizons* en coordenadas geocéntricas sobre el plano eclíptico desde el *01-06-2023 00:00:00* hasta el *20-06-2023 00:00:00* con un intervalo de muestreo de 1 minuto. Para poder compararlos, se presentan las Figuras 7.1 y 7.2.

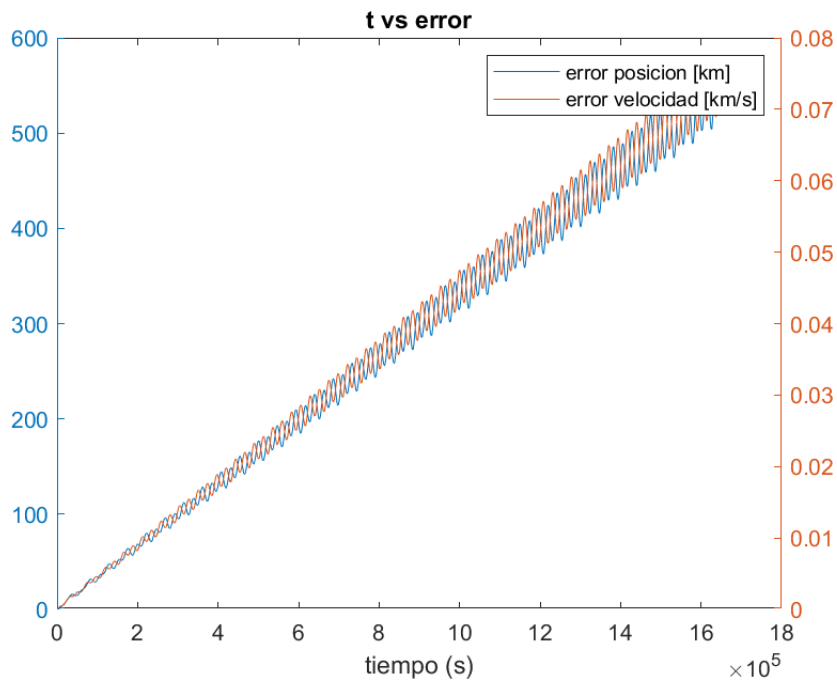


Figura 7.1: Evolución del error de integración en posición y velocidad para Beidou M-3 incluyendo perturbaciones

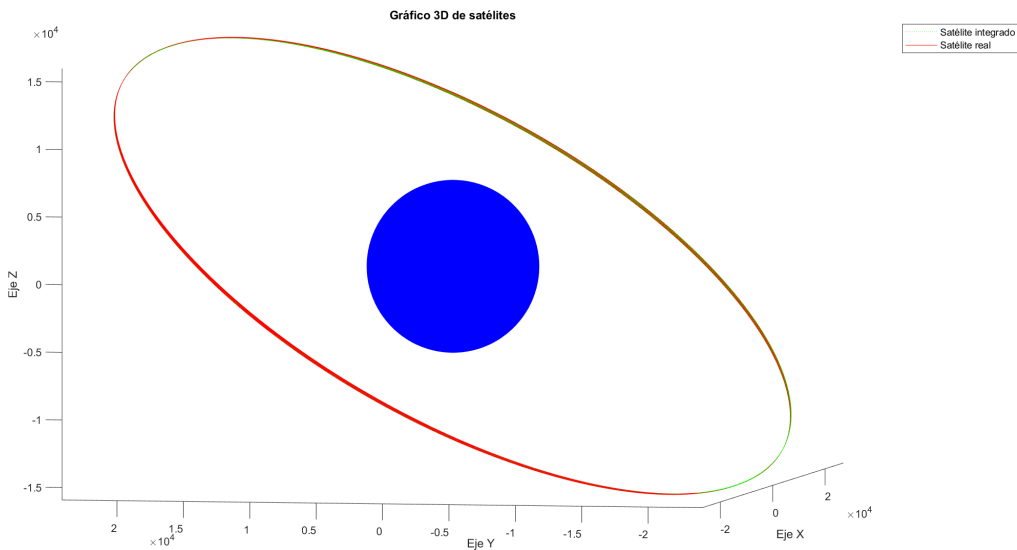


Figura 7.2: Diferencia entre órbita real de Beidou y la órbita integrada en km

En la Figura 7.1 se observa el incremento en el error cometido por el integrador. Esto es normal, por lo que se necesitarán correcciones periódicas. Se observa un error de 1000 km en la posición y 0.14 km/s en la velocidad al final de los 20 días. Considerando una órbita de 20000km con una velocidad media de unos 4 km/s, el error es significativamente

pequeño. Además, como se puede apreciar en la Figura 7.2, donde se han representado la órbita real y la calculada, ambas representaciones se superponen en casi toda la órbita, lo que parece indicar que el integrador es bastante preciso.

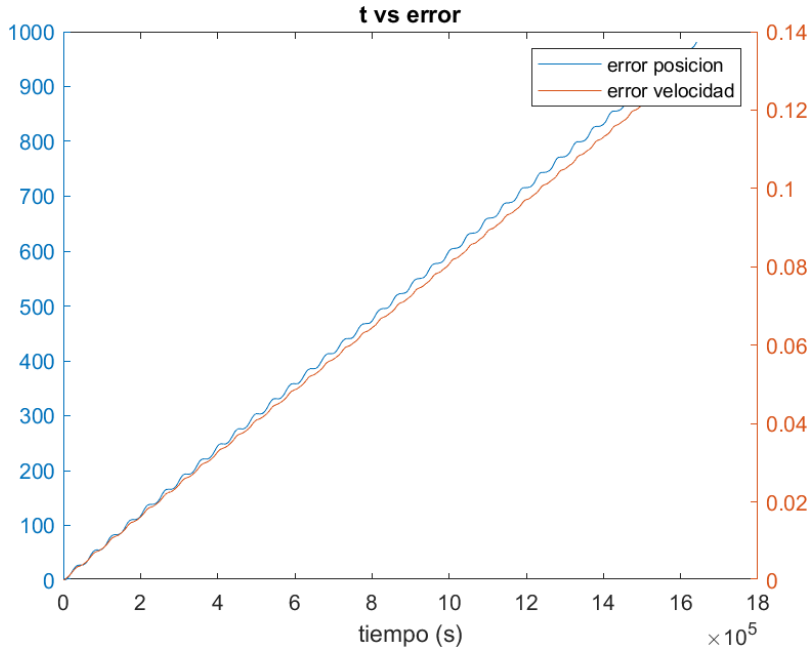


Figura 7.3: Diferencia entre posición [km] y velocidad [km/s] real de Beidou y la órbita integrada sin perturbaciones

Se ha calculado también la órbita sin aplicar las perturbaciones implementadas (Figura 7.3), para estudiar el aumento del error cometido al compararlo con el caso en el que sí se tienen en cuenta las perturbaciones.

7.2 New Horizons

Se trata de una misión no tripulada enviada por la NASA con destino a Plutón, sus satélites y los asteroides del cinturón de Kuiper. Fue lanzada en 2006 y llevó a cabo un viaje de casi una década hasta llegar a Plutón, al que llegó en 2015. Recopiló datos cruciales sobre éste, como atmósfera, geología y entorno espacial. Además de Plutón, se estudiaron otros objetos del cinturón de Kuiper como el asteroide Ultima Thule, conocido oficialmente como 2014 MU69. La misión *New Horizons* ha servido para ampliar nuestro conocimiento sobre lo que sucede en aquellos planetas más lejanos.

Se procederá de la misma forma que en el caso anterior, aunque esta vez se trata de una órbita heliocéntrica, por lo que será necesario cambiar las expresiones de las aceleraciones, considerando esta vez al Sol como cuerpo principal, e incluyendo la Tierra en la lista de planetas que provocan aceleraciones perturbadoras. Así, en la Ecuación (4.7) la μ deberá ser la del Sol, que toma el valor $1,3271 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$. Para este caso, se

considerarán coordenadas heliocéntricas con el plano eclíptico como plano de referencia. Además, como en el caso anterior, se comparará con los datos obtenidos para la *New Horizons* desde el *01-06-2023 00:00:00* hasta el *20-06-2023 00:00:00* con un intervalo de cálculo de 1 minuto.

En este caso, los efectos de la resistencia atmosférica terrestre son nulos debido a la lejanía del satélite con respecto a la Tierra. Así finalmente se llegan a las Figuras 7.4.

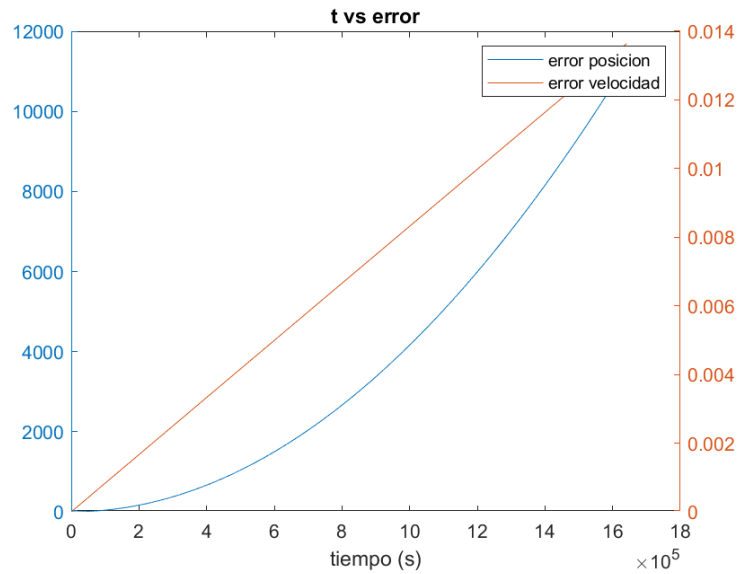


Figura 7.4: Evolución del error de integración en posición [km] y velocidad [km/s] para New Horizons

De la Figura 7.4 hay que tener en cuenta que para las fechas seleccionadas el radio orbital medio de la *New Horizons* es de $8,5 \cdot 10^9$ km, por lo que el error es menor a 0.0002%. Con esto se puede llegar a la conclusión de que el integrador para una órbita heliocéntrica es también válido y funciona correctamente.

Igual que en el apartado anterior, se presenta el error cometido por el integrador sin perturbaciones en la Figura 7.5. Como cabía esperar, este es mucho mayor.

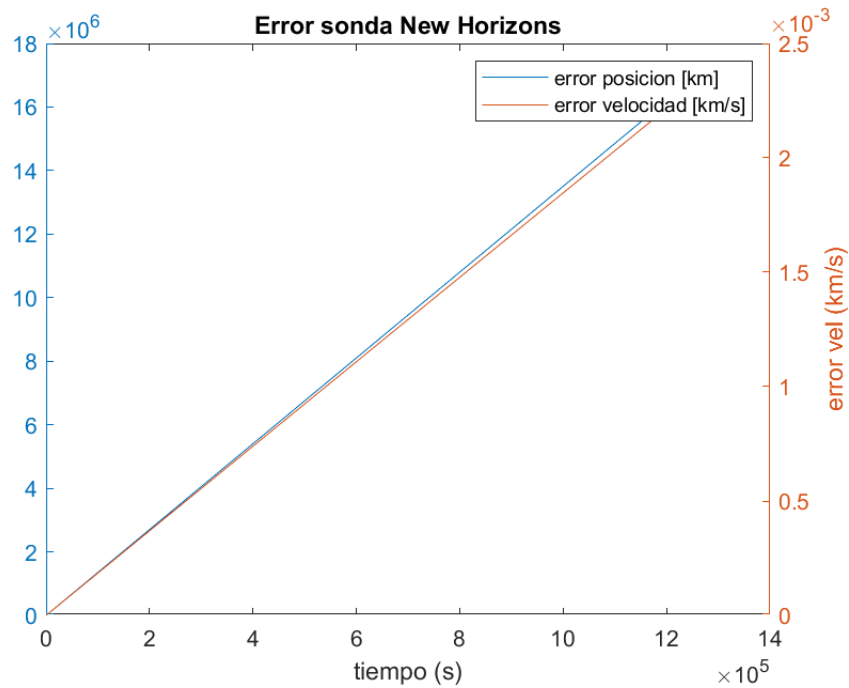


Figura 7.5: Evolución del error de integración para New Horizons sin perturbaciones en posición [km] y velocidad [km/s]

7.3 Sonda Dawn

Una de las misiones más importantes que ha llegado a utilizar maniobras orbitales de bajo impulso es la sonda *Dawn*. Fue lanzada en 2007 y exploró los dos asteroides más grandes del cinturón principal de asteroides: Vesta y Ceres. Utilizó un motor de iones llamado Motor de Iones de Alta Eficiencia (HIT), que es un tipo de motor de bajo impulso. Durante la misión, utilizó varias veces la maniobra previamente mencionada para cambiar de forma gradual su velocidad y poder ajustar así su órbita. Estas maniobras son perfectas para aquellas misiones que requieren un gran cambio en su velocidad pero que no tienen límites en el tiempo.

La nave está formada por tres propulsores iónicos, cuyo empuje máximo es de 91 mN y con un impulso específico de 3200 a 1900 s, datos que se introducirán en forma de aceleración perturbadora. Sin embargo, la misión debería poder ser completada con tan solo dos de los tres motores, dejando este último como auxiliar. Desde que se lanzó la nave, se han usado los tres motores, pero sólo se encendía uno cada vez. Dawn ha usado la propulsión con pequeñas interrupciones de apenas unas horas semanales para conseguir que la antena apuntara hacia la Tierra. Esto debe ser considerado, ya que provocará también un incremento en el error al compararlo, ya que en el caso de integración se considerará el impulso constante. [19]

En este caso, las fechas consideradas para la comparación serán elegidas de tal forma que la nave esté todavía en camino del destino final, de tal forma que todavía se encuentre en

una órbita heliocéntrica y todavía no haya entrado en la esfera de influencia de ninguno de los cuerpos objetivo. Por ello, las fechas elegidas son entre *01-06-2010* hasta el *15-06-2010*, año en el que la nave ya había realizado una maniobra de asistencia gravitatoria alrededor de Marte (2009), pero todavía no había llegado a Vesta (2011). Se considerará el Sol como centro de coordenadas, con el plano de la eclíptica como plano de referencia. Así se obtiene la Figura 7.6 en la que se puede apreciar que el error aumenta.

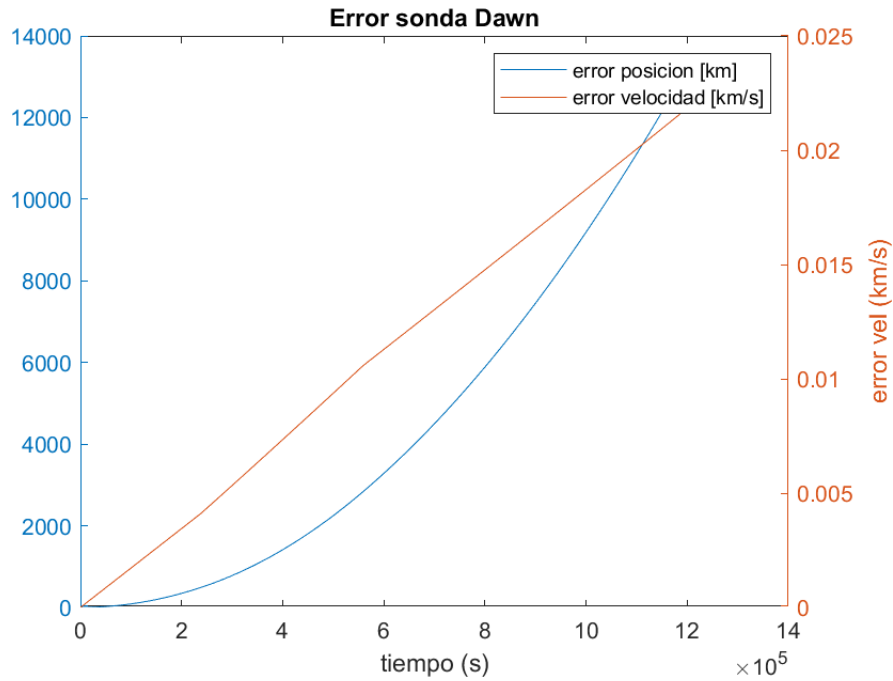


Figura 7.6: Evolución del error de integración en posición [km] y velocidad [km/s] para Dawn

Al igual que en los dos apartados anteriores, se presenta el error cometido por el integrador sin incluir perturbaciones en la Figura 7.7. El resultado es que al suprimir las perturbaciones los errores aumentan.

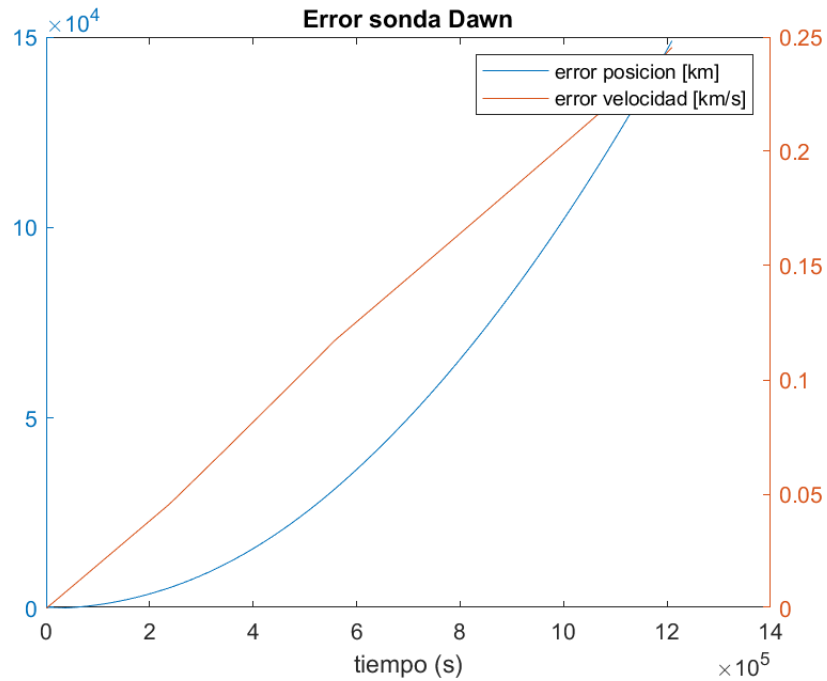


Figura 7.7: Evolución del error de integración en posición [km] y velocidad [km/s] para Dawn sin perturbaciones

8 Características de herramienta

8.1 Obtención de efemérides

Una de las características que otorgan de gran flexibilidad a la herramienta es la posibilidad de obtener efemérides de distintos cuerpos de forma personalizada. En este caso, se podrá elegir una fecha inicial y una final, así como el paso temporal.

La herramienta funciona obteniendo los datos directamente de la web de HORIZONS. Para ello se envía una petición con las características que se desean (cuerpo, formato, fechas, unidades, intervalo, plano de referencia, etc.). En este caso se ha elegido como referencia el plano eclíptico para no tener que realizar rotaciones en ejes al pasar de coordenadas geocéntricas a heliocéntricas. Si los datos introducidos son correctos, se obtendrá una matriz numérica de 6 columnas (3 primeras de posición y 3 últimas de velocidad) con las filas correspondientes a las fechas e intervalo elegidos.

Se han desarrollado tres opciones: coordenadas geocéntricas, coordenadas heliocéntricas y coordenadas jovianas. Para el primer caso, se podrá obtener tanto la posición como la velocidad de los planetas del sistema solar, la Luna y el Sol respecto a la Tierra, sobre el plano eclíptico. Para el segundo caso, se podrán obtener los datos de los planetas del sistema solar respecto al Sol sobre la eclíptica. Por último, para el caso de Júpiter (donde se realizará un flyby) se pueden obtener los datos de los planetas del sistema solar, el Sol y las cuatro lunas más importantes (Calisto, Ganímedes, Io y Europa).

8.2 Conversión de las órbitas a circulares y coplanarias

Para poder transformar las órbitas de los satélites en circulares y coplanarias con el plano eclíptico se deberá considerar un radio de órbita constante para cada planeta, así como una velocidad angular constante alrededor del Sol. Una vez se ha obtenido esto, para una representación fidedigna de las posiciones de los planetas será necesario obtener, mediante la herramienta mencionada en la sección 8.1, las posiciones de los planetas al iniciar cada maniobra.

Una vez obtenidas las posiciones iniciales, se procederá a calcular la anomalía verdadera de cada planeta considerando únicamente los componentes X e Y , mediante $\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$. Se deberá tener en cuenta que si la componente X es negativa, se deberá corregir el resultado sumando π radianes al valor obtenido. Una vez obtenida la anomalía verdadera inicial θ_0 , las ecuaciones que describirán el movimiento de los planetas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}X_i &= R_{orbital,i} \cdot \cos(\theta_{0,i} + w_i \cdot t) \\Y_i &= R_{orbital,i} \cdot \sin(\theta_{0,i} + w_i \cdot t) \\Z_i &= 0\end{aligned}$$

Donde i hace referencia a cualquier cuerpo del que se quiera describir una órbita circular y coplanaria con el plano eclíptico.

8.3 Integración numérica

Finalmente se presenta la parte de la integración, donde se ha definido la función que se integrará y que nos proporcionará tanto las expresiones de las velocidades y de las aceleraciones en cada componente e instante. Para la integración se empleará la función de MATLAB `ode45`, que se basa en el método de Runge-Kutta. El empleo de esta función proporciona como solución las componentes de la posición y la velocidad en cada instante del intervalo de integración, que se define al principio. En la función a resolver se ha incluido tanto la ecuación básica de movimiento orbital (Ecuación (4.7)) como cada una de las perturbaciones mostradas en la Sección 5. .

Para optimizar el proceso, se ha añadido al código un criterio de parada que depende de la distancia desde el objeto primario. De esta forma, el proceso iterativo se detiene si se ha alcanzado una altura predefinida, incluso si el tiempo de integración no ha terminado.

9 Diseño de la misión

9.1 Salida de la esfera de influencia terrestre

La primera fase del vuelo interplanetario consiste en alcanzar la velocidad adecuada para garantizar las necesidades del vuelo entre planetas del sistema solar. Para esta etapa hablaremos de la esfera de influencia terrestre, que es la entorno en el que la fuerza principal de perturbación es la atracción de la Tierra, y tiene unos 900 000 km

de radio. Desde la superficie terrestre, la velocidad necesaria para escapar de la esfera de influencia es 11.19 km/s. Como la órbita de parking está situada a 20 000 km, la velocidad de salida disminuye hasta los 5.49 km/s.

Es importante señalar que la maniobra se inicia a una altitud de 20000 km sobre la superficie terrestre. Cabe destacar que esta altura podría variar en función de los requisitos de la misión, y el código facilitaría todos los nuevos valores de la misión. Además, se asumirá que la masa del satélite al inicio de la maniobra es de 2500 kg.

9.1.1 Trayectoria sin influencia lunar

Se ha realizado un estudio de la trayectoria que seguiría la sonda si no se tuviese en cuenta la perturbación de la Luna ni el Sol, para luego compararla con el caso en que sí se consideran estas perturbaciones. Al tratarse de una aproximación inicial, queremos estudiar cómo se altera la trayectoria cuando se tiene en cuenta la presencia de la Luna y de su atracción.

En este primer estudio, al no considerar la gravedad de la Luna ni la del Sol, la trayectoria que realizará el satélite, así como el tiempo de vuelo empleado y la velocidad al llegar al límite de la esfera de influencia de la Tierra ($9.267 \cdot 10^5$ km), es independiente de cuándo y dónde se inicie la maniobra.

Si se considera una órbita de parking circular a 20000 km de altura, se obtiene que el tiempo empleado para salir de la esfera de influencia es de 15051600 s, lo que equivale a 174.20 días. Además, la velocidad del satélite al llegar al límite de la esfera de influencia será de 0.8020 km/s. En la Figura 9.1 se puede ver la trayectoria que seguirá la nave.

El consumo de combustible al alcanzar el límite de la esfera de influencia ha sido de 93.1 kg, lo que representa un 4 % del combustible, por lo que quedan en reserva 2406.9 kg.

Para comenzar la maniobra desde el límite de la esfera de influencia de la Tierra hasta Júpiter, donde se estudiará la viabilidad de realizar un flyby, se tomará el momento exacto de partida (ver Sección 9.1.3) para maximizar la velocidad de partida, haciendo que la velocidad en el momento inicial de la órbita de transferencia sea la de salida de la esfera de influencia más la de la velocidad de traslación de la Tierra.

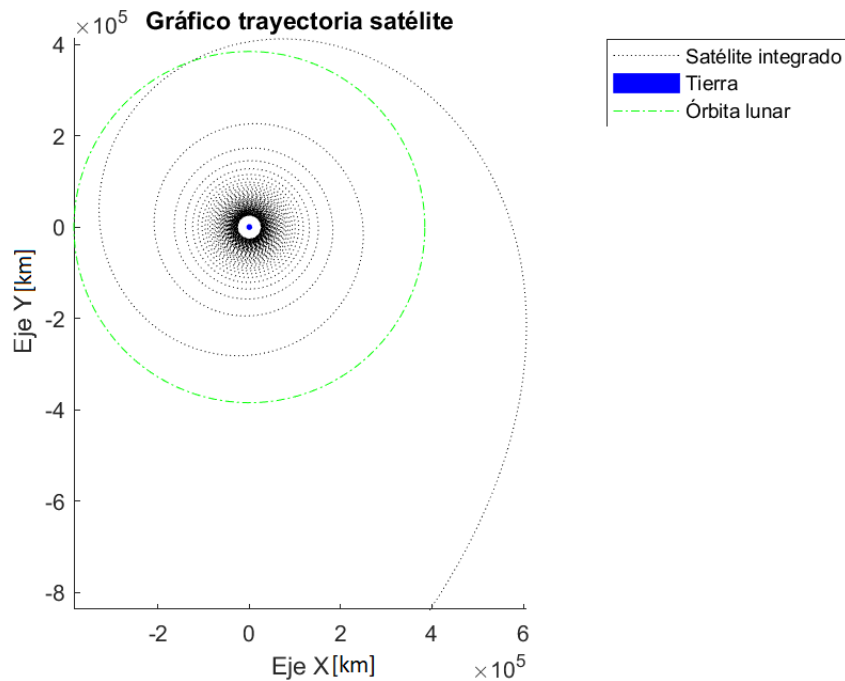


Figura 9.1: Órbita de salida de esfera de influencia terrestre

Para garantizar que el vector velocidad de la sonda coincida con la dirección del vector velocidad de la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol, se indica aquí un procedimiento para estudiar los ángulos iniciales y finales que se originan al inicio y final de la trayectoria.

En la Figura 9.2 se representa el criterio de ángulos para el viaje de salida de la esfera de influencia terrestre, donde la línea roja representa una trayectoria ficticia que realizada por el satélite. Se ha de tener en cuenta que se considera positivo el sentido antihorario. θ representa el ángulo en el se inicia la maniobra, β el ángulo en el que acaba y ζ el ángulo entre estos puntos. Finalmente, ϕ representa el ángulo entre la velocidad final y la línea que une el punto final con el centro. Como ya se ha comentado, se considera que dicho ángulo va a permanecer constante ya que la trayectoria dibujada no cambiará su forma, sino que sólo rotará sobre el eje de coordenadas dependiendo del punto de inicio.

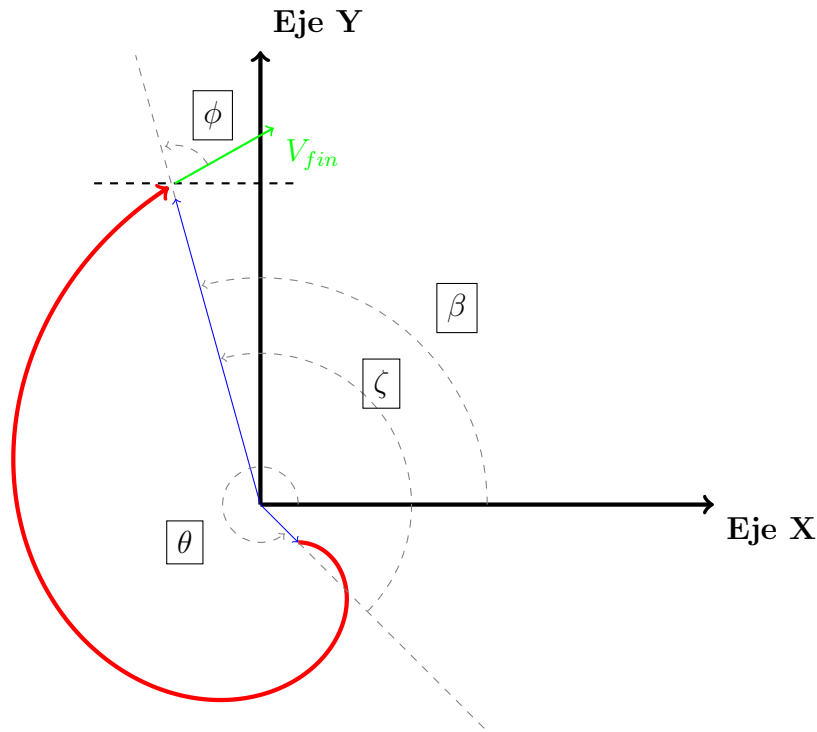


Figura 9.2: Criterio de ángulos

En el momento de iniciar la transferencia de la Tierra a Júpiter (el 16-02-2025), la Tierra tiene una velocidad correspondiente al vector $[-16.59 \ -25.76 \ 0]$, que se traduce en un ángulo de 237.21° respecto del punto Aries. Al usar el plano eclíptico en todos los sistemas de referencia, no es necesario realizar ninguna rotación entre ellos. Sabemos que el ángulo (ϕ) entre el vector velocidad de salida y la dirección del eje X es de 57.9762° (ver Figura 9.1). Esto nos indica que el punto de encuentro con la SOI debe estar en 295.186° . Sabiendo esto, y que el ángulo entre el punto en el que se comienza a aplicar la propulsión y el punto de partida es de 116.9233° , el punto inicial debe de estar en 178.263° . Efectivamente, al aplicar dicha condición inicial, el vector velocidad final es $[-0.4343 \ -0.6742 \ 0]$, lo que se traduce en un ángulo de 237.2° y un módulo de 0.8020 km/s . En la Figura 9.1 se ve cómo quedaría finalmente dicha trayectoria.

9.1.2 Trayectoria con influencia lunar

En primer lugar se comparará la diferencia entre iniciar la misión en el mismo momento, pero desde puntos distintos de la órbita de parking, y luego se comparará la diferencia entre iniciar la misión desde el mismo punto de partida pero en fechas distintas.

Para el primer caso, el inicio de la maniobra tendrá lugar el día 01/04/2023. Los ángulos de partida elegidos serán de 0° y 90° por ejemplo. En la Tabla 1 se comparan las diferencias entre el tiempo total, así como de la velocidad final.

Ángulo inicial [deg]	Tiempo total [días]	Velocidad final [km/s]
0	140.7292	0.8964
170	117.9792	0.9917

Tabla 1: Comparación salida esfera de influencia terrestre para distintos ángulos de partida]

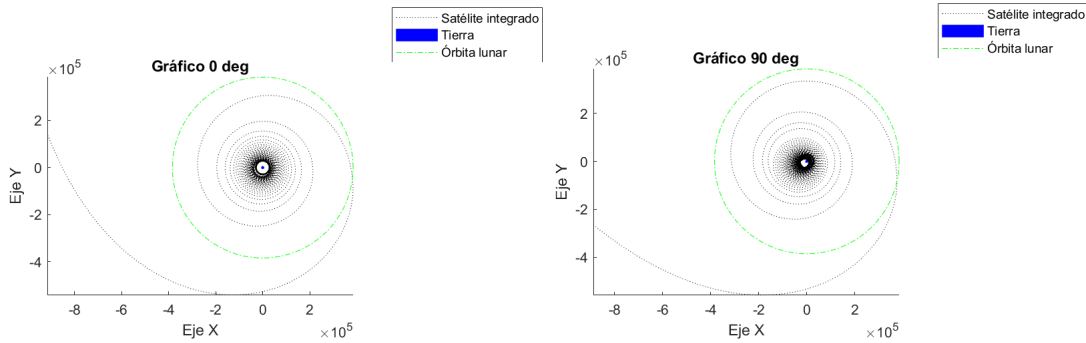


Figura 9.3: Comparación entre distintas anomalías verdaderas de partida. Ejes en [km]

Se puede observar en la Figura 9.3 cómo el punto de salida no es el mismo, aunque ambas trayectorias son parecidas. Además, de la Tabla 1 se puede ver una gran diferencia en el tiempo que le toma al satélite llegar hasta el límite de la esfera de influencia terrestre iniciando la maniobra en 0° , mientras que para 170° tarda unos 22 días menos. Por último también se aprecia que la velocidad que alcanza el satélite para el segundo caso es bastante mayor que la del primero.

Para el segundo caso, ambas órbitas comenzarán en 0° de anomalía verdadera, pero se dejarán 15 días de diferencia entre cada una. Así, los datos finales se recogen en la Tabla 2.

Fecha inicial	Tiempo total [días]	Velocidad final [km/s]
01/05/2023	117.9167	0.8994
15/05/2023	120.2083	0.9119

Tabla 2: Comparación salida esfera de influencia terrestre para distintas fechas de partida

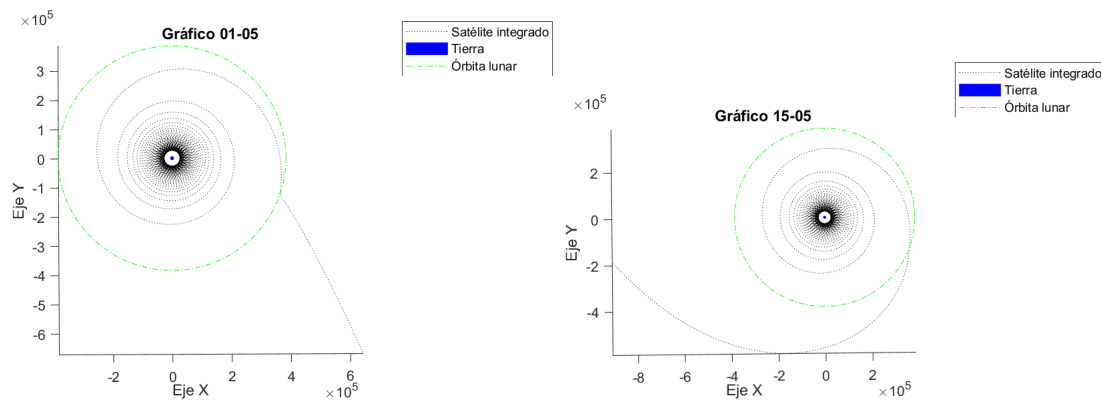


Figura 9.4: Comparación entre distintas fechas de partida. Ejes en [km]

Se ve cómo en el primer caso de la Figura 9.4 el satélite llega a encontrarse en su trayectoria de partida con la Luna, lo que hace que se desvíe de forma bastante notable.

9.1.3 Flyby en Júpiter

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante el propagador para la trayectoria interplanetaria entre la Tierra y Júpiter. Se parte del límite de la esfera de influencia de la Tierra, que se considera puntual para los cálculos, y se integra la trayectoria que se seguiría hasta el rendezvous con Júpiter. En la integración se tienen en cuenta las perturbaciones debidas a la influencia de los planetas del sistema solar, la radiación solar y el impulso generado por el motor seleccionado.

El empleo del propagador y los datos obtenidos de Horizons permiten calcular que para el rendezvous con Júpiter la fecha ideal es el día 16-02-2025 00:00:00. Una vez se haya iniciado la misión, llegar a Júpiter tomará alrededor de 2.7 años, exactamente 988 días. Por lo tanto llegará el día 02-12-2027. La trayectoria del satélite durante la misión se muestra en la Figura 9.5.

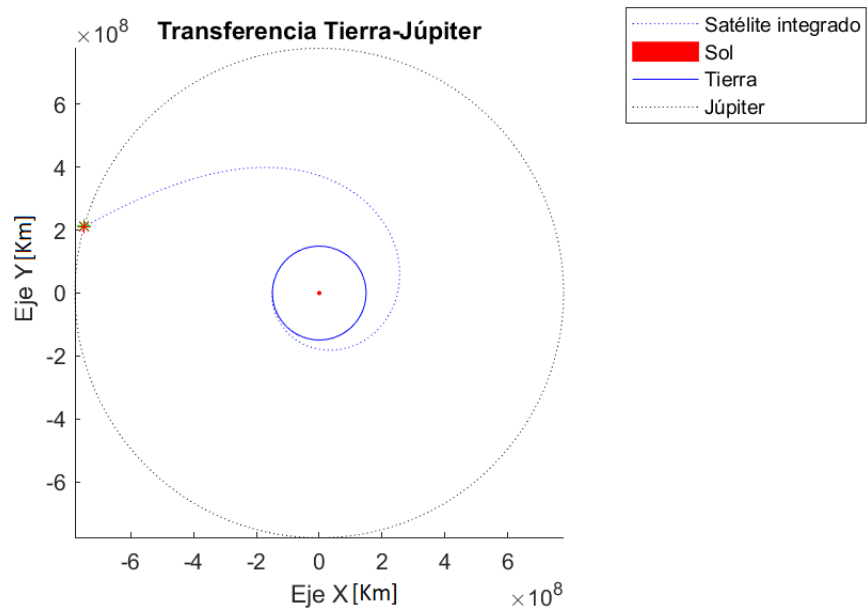


Figura 9.5: Trayectoria de transferencia entre Tierra y Júpiter

Como se puede apreciar, y debido al empuje significativo que se aplica en la trayectoria, esta es bastante directa en su rendezvous con Júpiter. Se ha realizado el estudio con diferentes empujes para estudiar los tiempos y velocidades relativas con el planeta de destino. Como se puede apreciar en la Figura 9.6, si el empuje se redujera a un cuarto del que se ha empleado, la trayectoria llevaría mucho más tiempo aunque la velocidad relativa se reduciría.

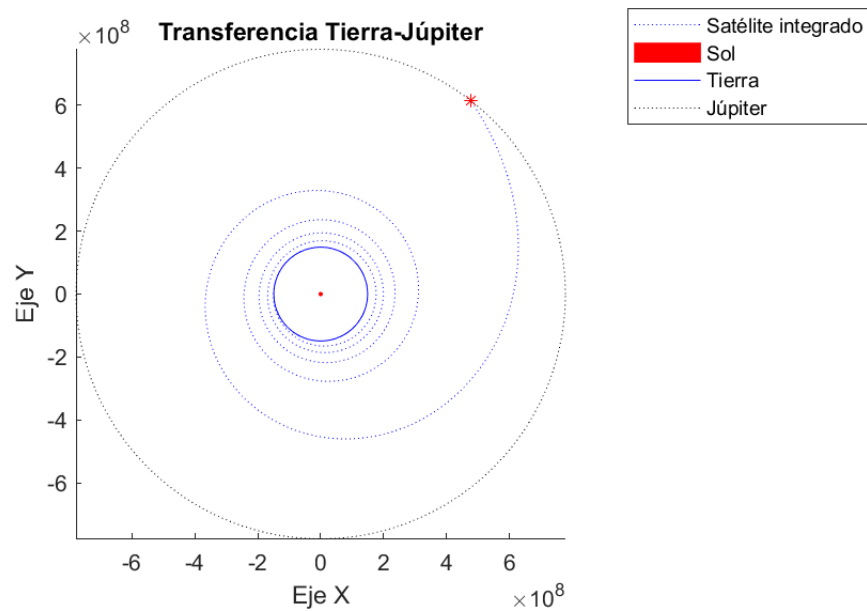


Figura 9.6: Trayectoria hasta Júpiter con impulso de 0.1 N. Ejes en [km]

En la Tabla 3 se presenta la variación del tiempo de vuelo y la velocidad final en función de diferentes empujes. Cuando se disminuye el empuje se obtiene un tiempo de vuelo superior, aunque no sigue una relación lineal.

Propulsor	Empuje [mN]	I_{sp} [s]	Tiempo [años]	Combustible consumido [kg]
HiPEP	540	8900	2.71	21.95
NEXT	236	4190	4.98	901.35
RIT-22	150	4500	7.52	805.57
ETS-8	23.2	2665	39.45	1103.90

Tabla 3: Comparación entre tiempo y combustible consumido según el motor en la transferencia a Júpiter

El flyby se estudia en función de pequeñas variaciones en la dirección de la velocidad, y se analizan los resultados obtenidos. El objetivo de esta sección es estudiar diversas opciones de flyby para estudiar, principalmente los cambios de dirección que se producen, con el fin de orientar el vehículo para que alcance los límites del sistema solar en la dirección adecuada.

Justo en el momento de llegar a la órbita de Júpiter, el satélite lleva una velocidad de 20.99 km/s. La velocidad de Júpiter alrededor del Sol es de 13.0676 km/s, por lo que al entrar en la SOI, el satélite llevará una velocidad relativa de alrededor de 7.9 km/s, considerando que entra en la misma dirección que la velocidad del planeta. En el momento del *rendezvous*, el vector velocidad de Júpiter es $[-3.5487 \ -12.5765 \ 0]$, lo que significa que forma un ángulo de 254.2426° con el eje X , del sistema de referencia eclíptico y centrado en Júpiter. Se supondrá que el satélite entra por un punto colineal con la velocidad de traslación de Júpiter, por lo que se realiza el *rendezvous* con un ángulo de 74.24° . A continuación se realizará una comparación entre diversas trayectorias según el ángulo de incidencia del satélite. Desde la esfera de influencia en la posición previamente mencionada (correspondiente a 74.24°) se aplicarán pequeñas desviaciones con respecto a la línea que une el satélite y el planeta. Se considerarán los siguientes ángulos: $\pm 1.5^\circ, \pm 3^\circ$ y $\pm 5^\circ$. En todo momento se realiza la maniobra sin empuje.

Se compararán dos casos, uno incluyendo los cuatro satélites más importantes de Júpiter (Europa, Io, Ganímedes y Calisto) y otro con tan sólo la influencia de Júpiter y utilizando las ecuaciones de la Sección 6.8.

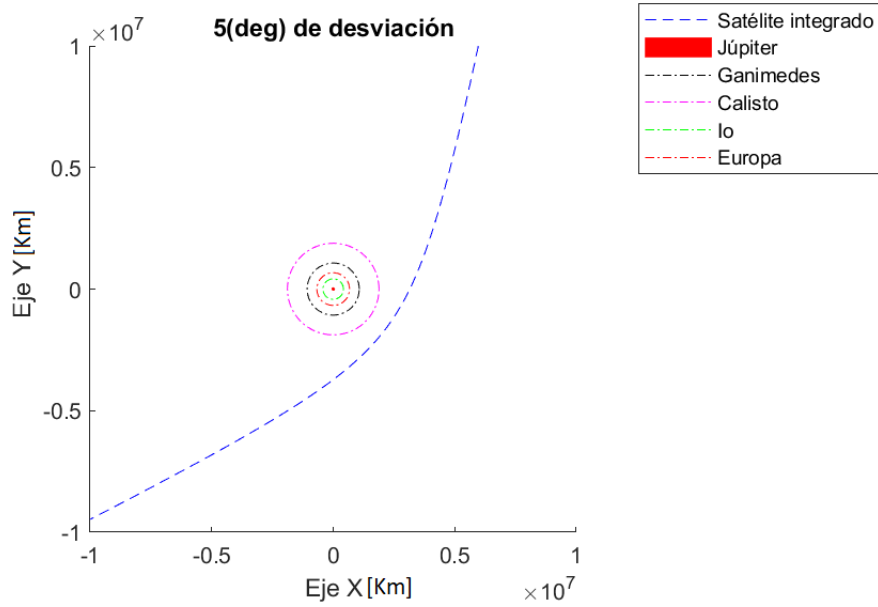


Figura 9.7: Flyby con desviación de 5° desde punto inicial

En la Figura 9.7 se aprecia un flyby considerando los 4 satélites, con un ángulo de desviación sobre la línea que une el satélite y el centro de Júpiter de 5° . De acuerdo con la Figura 6.7, la desviación final de trayectoria es de $\delta = -52.96^\circ$, y una velocidad final de 7.98 km/s. El ángulo de la velocidad final respecto del eje X en el plano eclíptico es de 206.29° .

En la Figura 9.8 se aprecia un flyby considerando los 4 satélites, con un ángulo de desviación inicial de 3° . Así, se logra $\delta = -76.53^\circ$ y una velocidad final de 8.03 km/s. El ángulo de la velocidad final respecto del eje X en el plano eclíptico es de 177.71° .

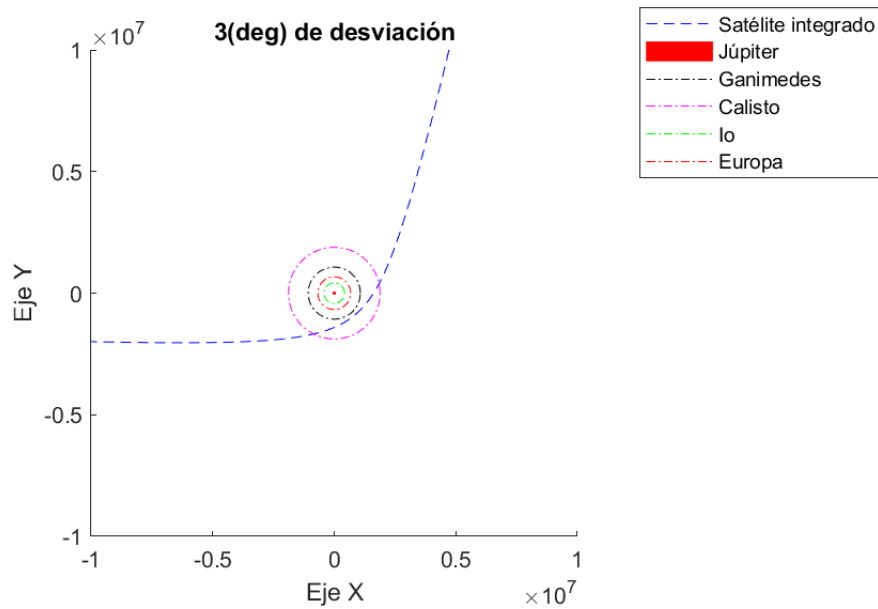


Figura 9.8: Flyby con desviación de 3° desde punto inicial. Ejes en [km]

En la Figura 9.9 se aprecia un flyby considerando los 4 satélites, con un ángulo de desviación inicial de 1.5° . Así, se logra $\delta = -116.41^\circ$ y una velocidad final de 7.968 km/s. El ángulo de la velocidad final respecto del eje X en el plano eclíptico es de 137.83° .

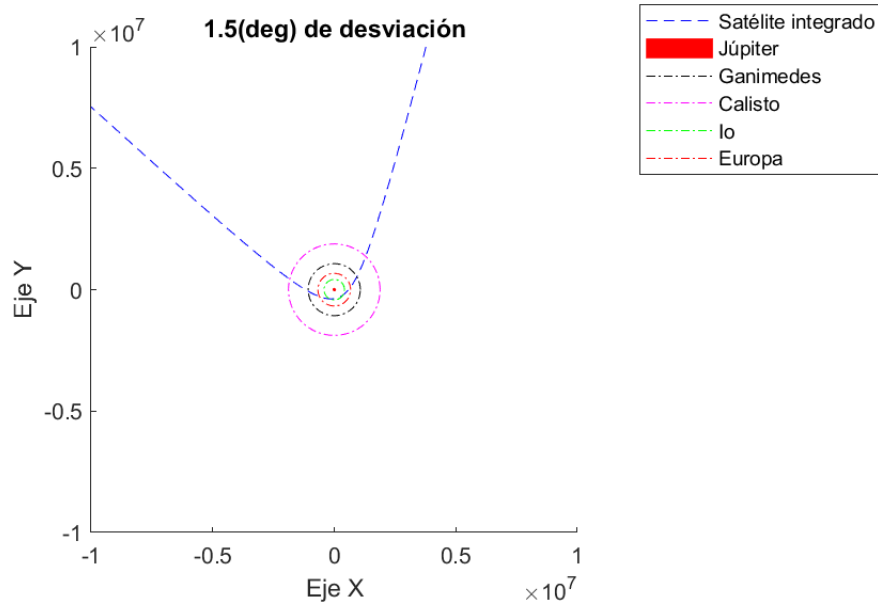


Figura 9.9: Flyby con desviación de 1.5° desde punto inicial. Ejes en [km]

En la Figura 9.10 se aprecia un flyby considerando los 4 satélites, con un ángulo de desviación inicial de -5° . Así, se logra $\delta = 53.2^\circ$ y una velocidad final de 7.95 km/s. El ángulo de la velocidad final respecto del eje X en el plano eclíptico es de 302.43° .

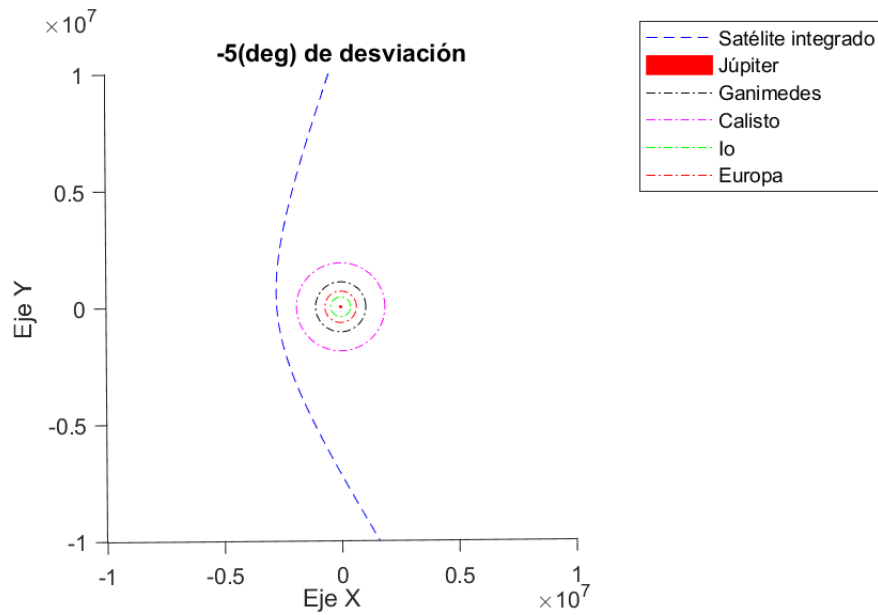


Figura 9.10: Flyby con desviación de -5° desde punto inicial. Ejes en [km]

En la Figura 9.11 se aprecia un flyby considerando los 4 satélites, con un ángulo de desviación inicial de -3° . Así, se logra $\delta=79.661^\circ$ y una velocidad final de 8.02 km/s. El ángulo de la velocidad final respecto del eje X en el plano eclíptico es de 330.901° .

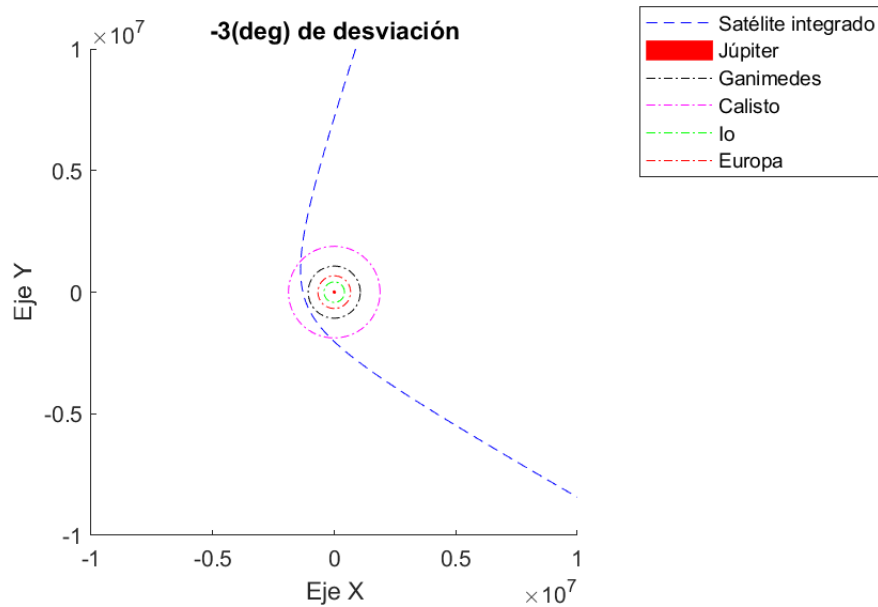


Figura 9.11: Flyby con desviación de -3° desde punto inicial. Ejes en [km]

En la Figura 9.12 se aprecia un flyby considerando los 4 satélites, con un ángulo de desviación inicial de -1.5° . Así, se logra $\delta=114.31^\circ$ y una velocidad final de 8.04 km/s.

El ángulo de la velocidad final respecto del eje X en el plano eclíptico es de 10.05° .

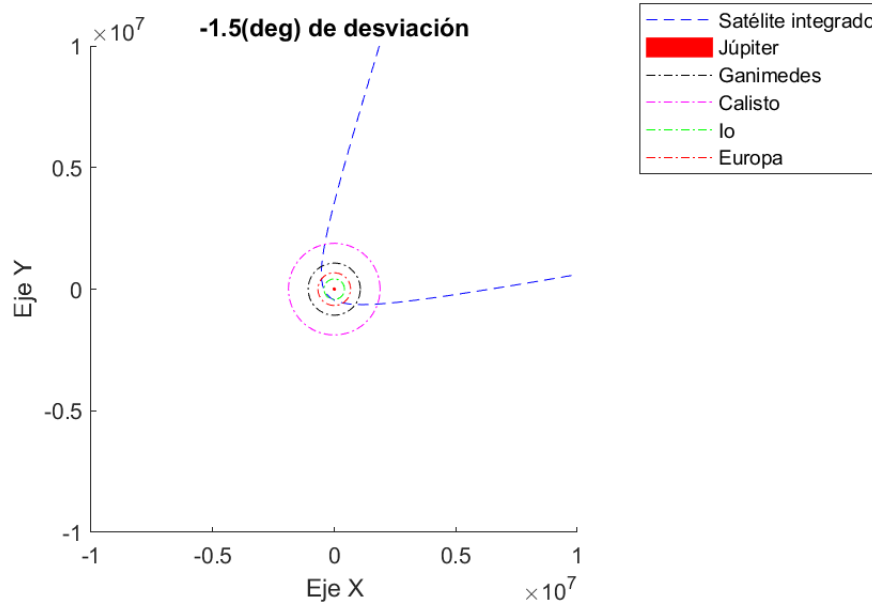


Figura 9.12: Flyby con desviación de -1.5° desde punto inicial. Ejes en [km]

En la Tabla 4 se pueden apreciar las diferencias entre los distintos flybys expuestos anteriormente, siendo θ_{fin} el ángulo final del satélite en la eclíptica

Desviación inicial [deg]	δ [deg]	V_{fin} [km/s]	θ_{fin} [deg]
5	52.96	7.98	211.42
3	76.53	8.03	180.75
1.5	116.41	7.968	139.08
-5	-53.20	7.95	297.17
-3	-79.66	8.02	327.66
-1.5	-114.31	8.04	8.71

Tabla 4: Características de distintos flybys

Finalmente para iniciar la transición hacia la salida de la SOI solar, se considerará el caso de los expuestos anteriormente en el que el vector final de velocidad sea lo más elevado posible. Sabiendo que el vector velocidad de Júpiter en coordenadas heliocéntricas es $[-1.09 \ -13.02 \ 0]$ km/s (un ángulo correspondiente a 265.22°) en el momento en el que la nave llega al límite de la esfera de influencia, el flyby que mayor velocidad tiene es el de una desviación inicial de -1.5° . Así, sumando la velocidad del planeta a la del satélite para pasar a coordenadas heliocéntricas, queda una velocidad de $[3.17 \ -19.73 \ 0]$. Al utilizar esto como datos iniciales en el integrador solar, nos queda una trayectoria capaz de escapar de la esfera de influencia solar, incluso sin seguir aplicando empuje. Se representa en la Figura 9.13.

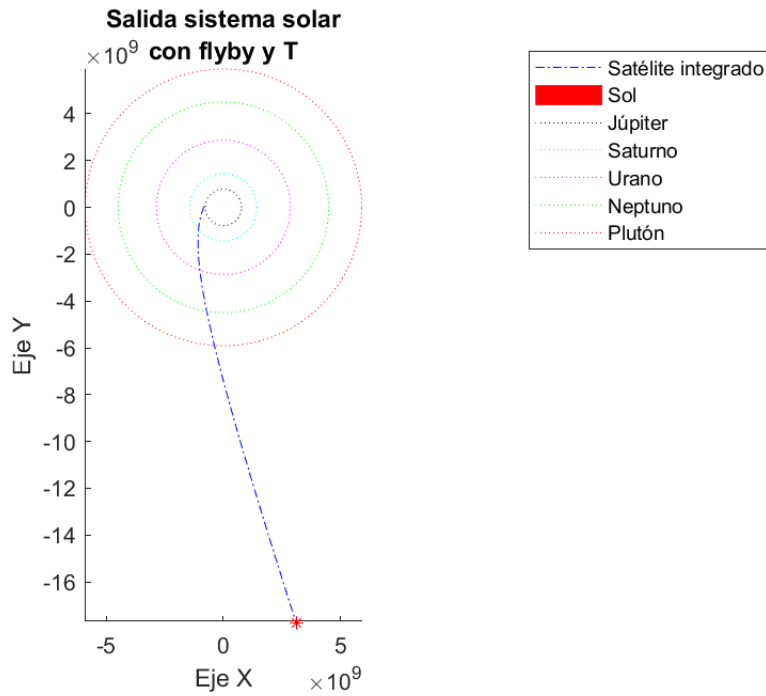


Figura 9.13: Salida del sistema solar desde Júpiter con flyby. Ejes en [km]

La maniobra tendrá una duración de 79.7 años, a lo que habrá que sumar la salida de la esfera de influencia terrestre y la transferencia a Júpiter. La nave llegará al límite del sistema solar con una velocidad de 5.67 km/s.

Sin embargo, si se aplica un impulso durante un año y medio, este tramo de la misión tardará 18.5 años, y se llegará con una velocidad final de 27.99 km/s. El principal problema es que quedará menos combustible para utilizar en caso de ocurrir cualquier imprevisto, ya que se consumen 363.5 kg. La trayectoria quedaría como se muestra en la Figura 9.14, y en ella se aprecia la trayectoria del satélite habiendo aplicado empuje hasta el punto indicado por el asterisco rojo.

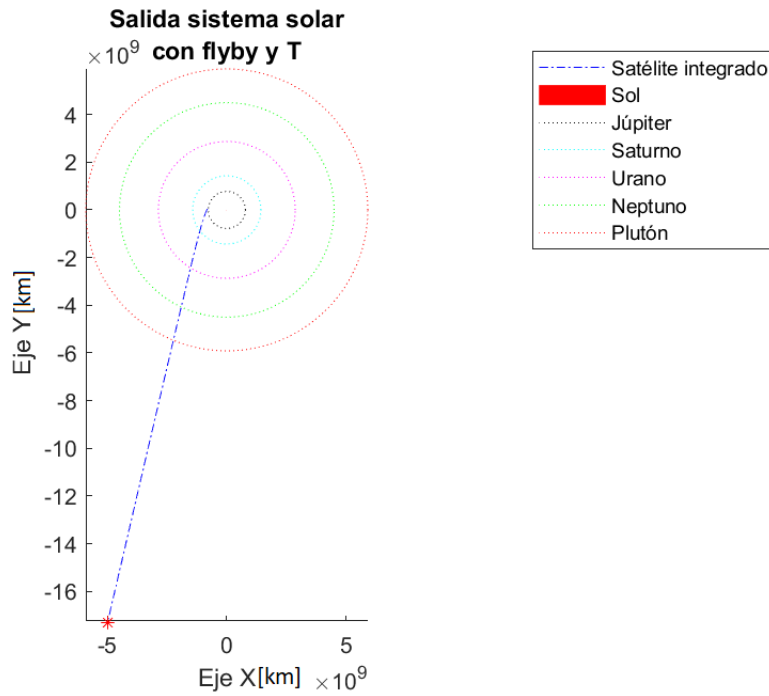


Figura 9.14: Salida de sistema solar desde Júpiter con flyby y empuje inicial

9.2 Salida del sistema solar sin flyby

En esta sección se estudia la posibilidad de realizar la salida del sistema solar sin flyby en Júpiter. Esto implica que cualquier cambio de velocidad necesario en la misión se debería hacer con el impulso del motor. En este caso, se adelanta la fecha de lanzamiento un mes para evitar encontrarse con Júpiter, como se puede ver en la Figura 9.15. En este apartado también se compararán los dos casos presentados en la sección anterior: el primero aplicando empuje hasta la órbita joviana, y el segundo aplicando el empuje hasta un año y medio después de haber llegado a la órbita joviana.

El primer caso se observa en la Figura 9.16. En esta gráfica se representa la trayectoria completa, desde que sale de la Tierra hasta que llega al límite de la SOI solar. En total la misión duraría 46.9 años, llegando al límite de la SOI con una velocidad de 10 km/s. Comparado con el caso con flyby, se ve una reducción de casi 35 años. Esto se debe a que al llegar a la órbita joviana, en el caso sin flyby lo hace con una velocidad de 21.95 km/s, mientras que al realizar el flyby, sale de la esfera de influencia de Júpiter con una velocidad de 18.5 km/s.

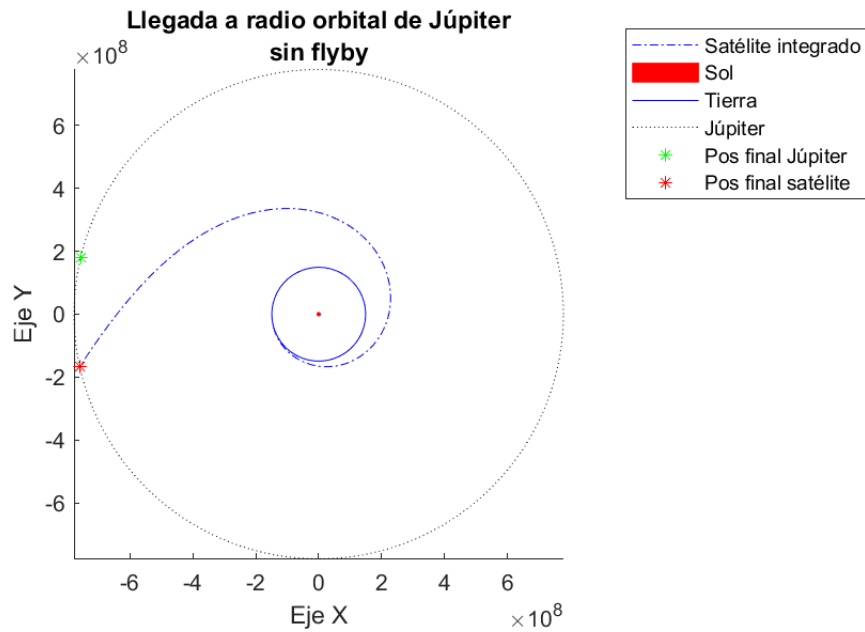


Figura 9.15: Salida de la Tierra hasta órbita joviana sin interceptar Júpiter. Ejes en [km]

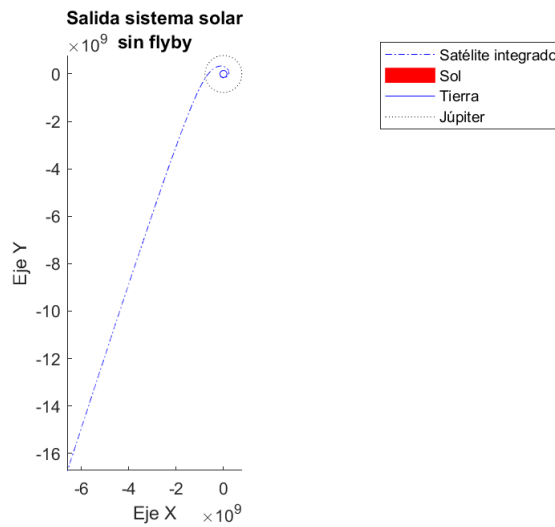


Figura 9.16: Salida del sistema solar sin flyby. Ejes en [km]

Si se aplica empuje durante año y medio tras haber llegado a la órbita de Júpiter, la trayectoria obtenida será la mostrada en la Figura 9.17. Además, el tiempo total de misión se verá reducido hasta 18.06 años, dedicando 14.95 años desde la órbita de Júpiter hasta el límite del sistema solar. Se llega a dicho límite con una velocidad de 37.37 km/s. En lo que a tiempo de vuelo se refiere, el caso sin flyby supone una mejora considerable. Sin embargo, de cara a realizar cualquier tipo de cambio de dirección el flyby supone una herramienta fundamental en la misión.

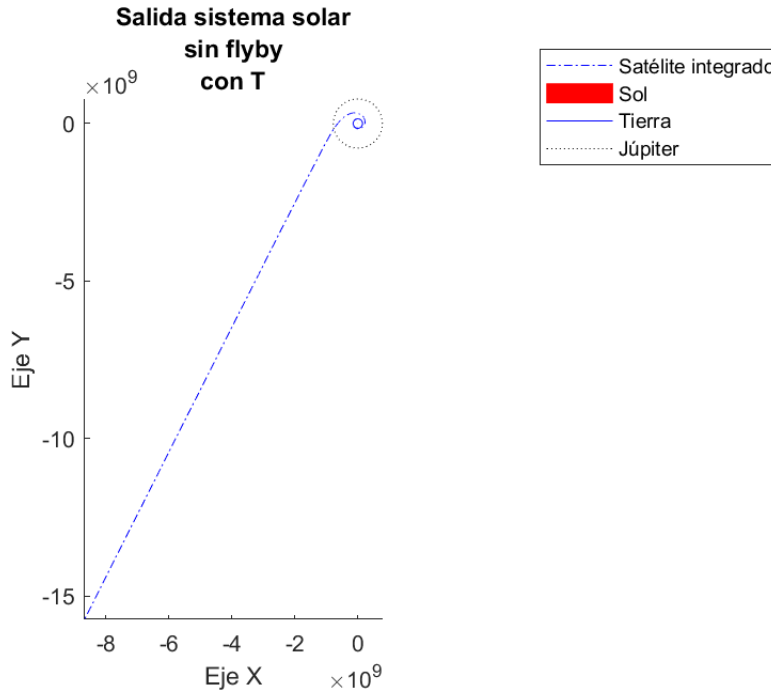


Figura 9.17: Salida del sistema solar sin flyby con empuje. Ejes en [km]

Finalmente se presenta la comparación entre las opciones vistas hasta el momento, para poder elegir las condiciones óptimas dependiendo de los requisitos de la misión.

TIPO	TIEMPO [años]	m_{fin} [kg]
Flyby	82.7	1878.9
Flyby + T	21.5	1590.3
No flyby	48.2	1867.3
No flyby + T	18.06	1585.6

Tabla 5: Comparación de características principales según la misión desarrollada

10 Conclusiones

En resumen, en este Trabajo de Fin de Grado se ha logrado estudiar la trayectoria que seguiría una sonda en un viaje interplanetario para alcanzar los límites del sistema solar.

Para realizar el cálculo de esta trayectoria se ha desarrollado una herramienta que permite calcular el vector estado de la sonda en cada instante, y capaz de incluir las perturbaciones más relevantes como son la atracción de los cuerpos celestes, la radiación solar, efectos relativistas, o el rozamiento atmosférico. Se incluye en la herramienta el impulso producido por un motor de bajo empuje, y que puede ser ajustado en función del motor elegido y de los requisitos de la misión.

Además, se ha desarrollado una función capaz de obtener las efemérides directamente de la página web Horizons de la NASA, lo que permite la obtención de datos de forma mucho más rápida y flexible.

La herramienta se ha validado empleando las órbitas de diferentes satélites y sondas, obtenidas de la página de Horizons y calculando la propagación del error cometido.

Mediante el empleo del propagador se ha estudiado la órbita que seguiría la sonda en su camino hacia los límites del sistema solar, para que sea capaz de comenzar una trayectoria entre el sistema solar y Alfa Centauri. Se presenta también el estudio de un flyby en Júpiter.

11 Pliego de condiciones

11.1 Objeto del pliego de condiciones

El pliego de condiciones es aquella sección que incluye todas las condiciones necesarias para la realización del proyecto. Durante el desarrollo, el trabajador se encuentra bajo una serie de condiciones que determinarán tanto el resultado final como el rendimiento del propio trabajador, además de su salud. Por eso es recomendable controlar esas condiciones para poder optimizar el trabajo y reducir cualquier riesgo.

11.2 Condiciones técnicas

11.2.1 Hardware

Las condiciones que debe cumplir el equipo físico utilizado deben ser básicamente el poder soportar los requerimientos de cálculo y procesamiento que sean demandados durante el desarrollo del trabajo. A continuación se especifica el modelo utilizado:

- Modelo: ASUS VivoBook X580GD_N580GD
- Procesador: Intel Core i7-8750H
- Memoria RAM: 8 GB
- Almacenamiento: HDD 256 GB
- Tarjeta gráfica: NVIDIA GeForce GTX 1050
- Teclado estándar
- Ratón: HP G3K
- Sistema Operativo: Windows 11

11.2.2 Software

Durante el proyecto se han usado los siguientes programas informáticos:

- MATLAB R2022a
- Wolfram Mathematica 12.3

- Microsoft Office

11.2.3 Condiciones del puesto de trabajo

Se deben considerar las condiciones a las que está expuesto el autor durante el desarrollo del proyecto, ya que pueden afectar tanto a la salud como al propio rendimiento.

Es por ello que se deben tener en cuenta analizar los posibles riesgos, sobre todo en términos ergonómicos.

El Real Decreto 488/1997 del 14 de abril, sobre disposiciones mínimas requeridas para seguridad y salud en el trabajo, constituye el documento oficial por el que se rigen las condiciones laborales para este proyecto.

Se procederá a detallar los posibles riesgos durante la realización del trabajo:

- **Seguridad:** contactos eléctricos, caídas, desplazamiento de equipo.
- **Ergonomía:** correcta postura durante el desempeño laboral, así como fatiga visual, física y mental.
- **Higiene industrial:** relacionado con factores externos como ruido, iluminación y temperatura.

El Real Decreto 488/1997 establece unas condiciones mínimas en base a posibles riesgos, donde se detalla:

Teclado

Debe ser independiente del equipo, facilitando su uso y retrasando la fatiga de manos y brazos. Debe existir espacio suficiente para la colocación de brazos, de forma que se llegue sin problemas a cualquier tecla.

Equipo

Es importante tener especial precaución con la luminosidad de la pantalla, evitando posibles destellos y parpadeos. El texto debe ser nítido, con un espaciado y disposición correctos. Además, la posición de la pantalla debe ajustarse de manera adecuada para satisfacer las necesidades del usuario.

Mesa de trabajo

La mesa de trabajo debe tener dimensiones suficientes para acomodar el equipo y el material necesario para realizar el trabajo. El soporte o mesa debe ser estable y ajustable para evitar movimientos incómodos de los ojos y la cabeza.

Asiento

El asiento debe ser estable y proporcionar al usuario una postura cómoda, permitiendo libertad de movimientos. Tanto la altura como el respaldo del asiento deben ser regulables y reclinables.

A continuación se mencionan las condiciones mínimas relacionadas con el entorno de trabajo:

- **Iluminación:** Los niveles de iluminación, ya sea artificial o natural, deben ser apropiados y mantener una relación adecuada con la iluminación de la pantalla,

teniendo en cuenta las características del trabajo y las necesidades visuales del usuario. Es importante evitar deslumbramientos y reflejos molestos en el lugar de trabajo.

- **Espacio:** El puesto de trabajo debe tener suficiente espacio para permitir cambios de postura o posición.
- **Reflejos:** Cualquier fuente de luz en el lugar de trabajo debe estar instalada de manera que no cause deslumbramientos directos o indirectos. Las ventanas deben contar con dispositivos regulables para controlar la entrada de luz según las necesidades del usuario.
- **Calor:** Los equipos utilizados no deben generar calor adicional.
- **Ruido:** El ruido emitido por los equipos debe ser lo suficientemente bajo como para no perturbar la atención del usuario ni causar fatiga.
- **Humedad:** El entorno de trabajo debe mantenerse dentro de límites establecidos que garanticen el confort del usuario.
- **Emisiones:** Cualquier radiación emitida fuera del espectro electromagnético visible debe mantenerse en niveles despreciables, asegurando la seguridad del usuario.

12 Presupuesto

12.1 Costes de personal

Todo aquel trabajo activo de una persona involucrada en el proyecto se considerará como coste asociado. La Tabla 6 representa los costes de personal en este proyecto.

Nº personas	Categoría	Coste [€/h]	Tiempo [h]	Subtotal [€]
1	Estudiante Grado Ingeniería Aeroespacial	16.25	260	4225
1	Doctor	41.95	30	1258.5
Total				5483.5

Tabla 6: Costes asociados a personal

12.2 Costes de Hardware

Los costes de hardware engloban los equipos usados para realizar el proyecto. Utilizando el coeficiente de amortización lineal de 25 % para *Equipos para procesos de información* (Agencia Tributaria [21]), los costes asociados se muestran en la Tabla 7

Cantidad	Equipo	Coste [€/h]	Tiempo [años]	Coef. amortización	Subtotal [€]
1	ASUS Viva-Book	1100	0.5	0.25	137.5
Total					137.5

Tabla 7: Costes asociados a Hardware

12.3 Costes de software

En esta sección se agrupan los programas que han sido utilizados para desarrollar el proyecto. El coeficiente de amortización se extrae también de [21], para la categoría *Sistemas y programas informáticos*. La Tabla 8 recoge los costes de software.

Programa	Coste [€]	Tiempo [año]	Coef. amortización	Subtotal [€]
MATLAB R2022a	860 (anual)	0.5	0.33	141.9
Wolfram Mathematica 12.3	2347.40 (anual)	0.5	0.33	387.321
Total				529.22

Tabla 8: Costes asociados a Software

12.4 Presupuesto total

Una vez se han analizado los subcostes totales por categoría, se procede a calcular el presupuesto total del proyecto. Esto supone la suma de todos los costes, al que habrá que añadir el Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA) del 21 %.

En la Tabla 9 se presenta un resumen con los costes del proyecto.

Categoría	Subtotal [€]
Personal	5483.5
Hardware	137.5
Software	529.22
Subtotal	6150.22
IVA (21 %)	1291.55
TOTAL	7441.77

Tabla 9: Coste total del proyecto

Referencias

- [1] Juice. (s. f.). https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Juice
- [2] NASA: Artemis. (s. f.). NASA. <https://www.nasa.gov/specials/artemis/>
- [3] Winn, J. N., & Fabrycky, D. C. (2015). *The Occurrence and Architecture of Exoplanetary Systems*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 53, 409-447. <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082214-122246>
- [4] Cohen, O., Drake, J., Glocer, A., Garraffo, C., Poppenhaeger, K., Bell, J. F., Ridley, A. J., & Gombosi, T. I. (2014). *Magnetospheric structure and atmospheric joule heating of habitable planets orbiting M-dwarf stars*. The Astrophysical Journal, 790(1), 57. <https://doi.org/10.1088/0004-637x/790/1/57>
- [5] Kreidberg, L., & Loeb, A. (2016). *Prospects for characterizing the atmosphere of Proxima Centauri b*. The astrophysical journal, 832(1), L12. <https://doi.org/10.3847/2041-8205/832/1/L12>
- [6] Salazar, A. M., Olson, S. L., Komacek, T. D., Stephens, H., & Abbot, D. S. (2020). *The Effect of Substellar Continent Size on Ocean Dynamics of Proxima Centauri b*. The astrophysical journal, 896(1), L16. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab94c1>
- [7] Meadows, V. S., Arney, G., Schwieterman, E. W., Lustig-Yaeger, J., Lincowski, A. P., Robinson, T. D., Domagal-Goldman, S., Deitrick, R., Barnes, R., Fleming, D. A., Luger, R., Driscoll, P., Quinn, T. C., & Crisp, D. (2018). *The Habitability of Proxima Centauri b: Environmental States and Observational Discriminants*. Astrobiology, 18(2), 133-189. <https://doi.org/10.1089/ast.2016.1589>
- [8] Dong, C., Lingam, M., Ma, Y., & Cohen, O. (2017). *Is Proxima Centauri b Habitable? A Study of Atmospheric Loss*. The astrophysical journal, 837(2), L26. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa6438>
- [9] Fountain, G. H., Kusnierkiewicz, D. Y., Hersman, C. B., Herder, T. S., Coughlin, T. M., Biesecker, L. G., Clancy, D. A., DeBoy, C. C., Hill, T. A., Kinnison, J., Mehoke, D. S., Ottman, G., Rogers, G., Stern, S. A., Stratton, J., Vernon, S., & Williams, S. B. (2008). *The New Horizons Spacecraft*. Space Science Reviews, 140(1-4), 23-47. <https://doi.org/10.1007/s11214-008-9374-8>
- [10] Heacock, R. L. (1980). *The Voyager Spacecraft*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 194(1), 211-224. https://doi.org/10.1243/pime_proc_1980_194_026_02
- [11] Curtis, H. D. (2013). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann. ISBN: 9780080977485.
- [12] Brown, C.D. *Spacecraft Mission Design*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1801 Alexander Bell Drive, Reston, VA 20191, 2 edition, 1998. <https://doi.org/10.2514/4.862434>
- [13] Battin, R.H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*.

- AIAA, Education Series, Reston, Virginia, revised edition, 1999. <https://doi.org/10.2514/4.861543>
- [14] Vallado, D.A. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. Microcosm Press/Springer, 3 edition, 2007. <https://doi.org/10.2514/2.4291>
- [15] Meschede, M., Wieczorek, M. SHTools: Tools for Working with Spherical Harmonics. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, AGU and the Geochemical Society, 2018 <https://doi.org/10.1029/2018GC007529>
- [16] Hećimović, Ž. (2013). *Relativistic effects on satellite navigation*. Tehnicki Vjesnik-technical Gazette, 20(1), 195-203. https://www.researchgate.net/profile/Zeljko_Hecimovic/publication/266515947_Relativistic_effects_on_satellite_navigation/links/5460d60c0cf27487b452615b.pdf
- [17] Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., & Wasle, E. (2008). *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and More*. Springer Vienna, AUT. ISBN 13: 9783211730126
- [18] Moraño Fernández, J.A. *Maniobra orbital no impulsiva*. Depto. de Matemática Aplicada-ETSID, Universitat Politècnica de Valencia
- [19] Ion Propulsion — Technology – NASA Solar System Exploration. (s. f.). NASA Solar System Exploration. <https://solarsystem.nasa.gov/missions/dawn/technology/ion-propulsion/>
- [20] Macía González, D. (2022). *Estudio comparativo de motores de bajo impulso para misiones interplanetarias. Estudio del caso de una misión a (617)Patroclus* [TFM]. Universitat Politècnica de València.
- [21] Tabla de coeficientes de amortización lineal, Agencia Tributaria. <https://sede.agenciatributaria.gob.es>