



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Análisis estructural de un dron de aeromodelismo

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

AUTOR/A: Cirilo Hidalgo, Guillermo

Tutor/a: Tiseira Izaguirre, Andrés Omar

Cotutor/a: Lázaro Navarro, Mario

CURSO ACADÉMICO: 2022/2023

Universitat Politècnica de València

Escuela técnica superior de ingeniería del diseño

Análisis estructural de un dron de competición

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Tutor

Mario Lázaro Navarro

Cotutor:

Andrés Omar Tiseira Izaguirre

Autor:

Guillermo Cirilo Hidalgo

Resumen

La estructura de una aeronave es de gran importancia para que esta pueda soportar los diferentes esfuerzos a los que está sometida durante el vuelo. En específico, los drones suelen realizar maniobras bruscas que inducen elevados factores de carga que la estructura debe soportar. Optimizar la estructura resulta en la minimización de recursos económicos por lo que es conveniente realizar este tipo de análisis. El análisis estructural realizado ha sido sobre un dron creado por el grupo AeroDesign UPV bautizado como Stingray.

Se ha hecho primeramente un análisis sobre la mecánica del vuelo del Stingray hallando todos los coeficientes aerodinámicos y propulsivos y aplicando las ecuaciones desarrolladas por Bryan para la mecánica del vuelo con el fin de obtener el factor de carga al que dicho dron está sometido durante los vuelos que realiza. Debido a los requisitos de su misión y al pilotaje, se ha obtenido un factor de carga mínima de $n = 0.99$ para el ascenso del dron y un factor de carga máximo de $n = 1.414$ para un viraje coordinado.

A continuación, se ha hecho un análisis estructural sobre los elementos más críticos de dron: el ala y el estabilizador horizontal. Se han desarrollado expresiones para una distribución elíptica de la sustentación y se han hallado los esfuerzos internos en función del factor de carga de la aeronave. Posteriormente, se han calculado los valores de las tensiones máximas sobre las secciones más críticas de cada elemento aplicando la teoría de pared delgada para ciertas secciones y teoría de secciones macizas para otras. Estas tensiones han resultado ser muy reducidas en comparación con las tensiones máximas admisibles de los materiales empleados (fibra de carbono mayoritariamente).

Por último, se han ofrecido ideas para poder optimizar al máximo la estructura. Se puede, o bien aumentar los esfuerzos a los que está sometida la aeronave, aumentando la velocidad de vuelo o el factor de carga de esta; o bien cambiar parámetros de la estructura como puede ser el espesor de las secciones o la cantidad de material empleado, o también plantearse cambiar los materiales empleados por unos más baratos que soporten los esfuerzos necesarios, asumiendo el riesgo de tener que modificar toda la estructura por los métodos de fabricación disponibles.

Índice

RESUMEN	2
NOMENCLATURA	6
INTRODUCCIÓN	9
PLIEGO DE CONDICIONES	10
CARACTERÍSTICAS AERODINÁMICAS	11
ATMÓSFERA ISA	11
CONDICIONES DE VUELO	11
PLANOS DEL STINGRAY	11
CARACTERÍSTICAS DEL ALA Y EL EMPENAJE TRASERO	12
COEFICIENTES AERODINÁMICOS	13
• <i>Coefficiente de sustentación, C_L</i>	13
• <i>Coefficiente de resistencia aerodinámica, C_D</i>	16
• <i>Coefficiente de momento aerodinámico, C_M</i>	17
• <i>Coefficientes laterales direccionales aerodinámicos, C_Y, C_I y C_N</i>	17
CARACTERÍSTICAS PROPULSIVAS	19
ECUACIONES DE BRYAN	20
SISTEMA DE REFERENCIA	20
ECUACIONES EN EJES CUERPO	21
ECUACIONES EN EJES VIENTO	22
CÁLCULO DEL FACTOR DE CARGA	24
DESPEGUE	24
ASCENSO	25
GIRO ESTACIONARIO HELICOIDAL	26
VIRAJE COORDINADO	28
DESCENSO	29
ATERRIZAJE	29
CÁLCULO DE ESFUERZOS ESTRUCTURALES	31
CÁLCULO DE ESFUERZOS SOBRE EL ALA	32
• <i>Sección 1</i>	36
• <i>Secciones 2 y 3</i>	44
CÁLCULO DE ESFUERZOS SOBRE EL ESTABILIZADOR HORIZONTAL	47
RESUMEN DE RESULTADOS	51
OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE	52
PRESUPUESTO	54
CONCLUSIONES	56
REFERENCIAS	57

ANEXO 1	58
ANEXO 2	61
PLANOS 2D	62

Índice de Figuras

FIGURA 1. PLANOS DEL DRON STINGRAY. _____	12
FIGURA 2. GEOMETRÍA DE REFERENCIA PARA LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE 2D DE GLAUERT. _____	14
FIGURA 3. PROCEDIMIENTO GRÁFICO PARA DETERMINAR $(A_0)_{cl}$. _____	15
FIGURA 4. PROCEDIMIENTO GRÁFICO PARA OBTENER EL VALOR DE K_c . _____	15
FIGURA 5. DEFINICIONES GRÁFICAS PARA DETERMINAR K_b . _____	15
FIGURA 6. PROCEDIMIENTO GRÁFICO PARA OBTENER EL VALOR DE K_b . _____	16
FIGURA 7. REGRESIÓN LINEAL PARA LA MODELIZACIÓN DEL EMPUJE DE LA AERONAVE. _____	19
FIGURA 8. SISTEMA DE REFERENCIA EJES CUERPO. _____	20
FIGURA 9. SISTEMA DE REFERENCIA EJES VIENTO. _____	21
FIGURA 10. SISTEMA DE REFERENCIA EJES HORIZONTE. _____	21
FIGURA 11. FASE DE DESPEGUE [1]. _____	24
FIGURA 12. FACTOR DE CARGA Y PALANCA DE GASES PARA VUELO EN ASCENSO. _____	26
FIGURA 13. TRAYECTORIA DE UN VUELO ASCENDENTE HELICOIDAL. _____	26
FIGURA 14. ESQUEMA VIRAJE COORDINADO. _____	28
FIGURA 15. FACTOR DE CARGA Y PALANCA DE GASES PARA VUELO EN DESCENSO. _____	29
FIGURA 16. FASE DE ATERRIZAJE [1]. _____	30
FIGURA 17. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y PESO SOBRE EL ALA Y COORDENADA LOCAL X [4]. _____	32
FIGURA 18. DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES, FLECTORES Y TORSORES EN EL ALA [4]. _____	33
FIGURA 19. PLANOS DEL STINGRAY. _____	34
FIGURA 20. DIFERENTES SECCIONES ALARES PARA ESTUDIAR. _____	35
FIGURA 21. REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES EMPLEADAS PARA REDEFINIR EL PERFIL ALAR. _____	36
FIGURA 22. COORDENADAS LOCALES PARA CADA UNA DE LAS BARRAS DE LA SECCIÓN DE PARED DELGADA. _____	37
FIGURA 23. FLUJO DE CORTANTE EVALUADO PARA LA BARRA HORIZONTAL Y CORTANTES UNITARIOS. _____	37
FIGURA 24. FLUJO DE CORTANTE EVALUADO PARA LA BARRA OBLICUA Y CORTANTES UNITARIOS. _____	38
FIGURA 25. FLUJO DE CORTANTE EVALUADO PARA LA BARRA ELÍPTICA Y CORTANTES UNITARIOS. _____	38
FIGURA 26. CENTRO DE MASAS DE LA SECCIÓN DE PERFIL ALAR DE PARED DELGADA. _____	40
FIGURA 27. TENSIÓN TANGENCIAL SOBRE LA BARRA OBLICUA PARA LA SECCIÓN DEL ENCASTRE. _____	42
FIGURA 28. TENSIÓN TANGENCIAL SOBRE LA BARRA OBLICUA PARA LA SECCIÓN D_{M1} . _____	43
FIGURA 29. CORTE DE LA SECCIÓN 2 (SUPERIOR) Y LA SECCIÓN 3 (INFERIOR). _____	44
FIGURA 30. TENSIONES NORMALES DEBIDAS A M_y SOBRE LA SECCIÓN MACIZA. _____	45
FIGURA 31. DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN Y FUERZA AERODINÁMICA SOBRE EL ESTABILIZADOR HORIZONTAL. _____	47
FIGURA 32. SECCIÓN AERODINÁMICA DEL ESTABILIZADOR HORIZONTAL. _____	48
FIGURA 33. ESQUEMA DEL MOMENTO DE REACCIÓN INTERNO AL ESTABILIZADOR HORIZONTAL. _____	49
FIGURA 34. TENSIONES NORMALES SOBRE LA SECCIÓN CENTRAL DEL ESTABILIZADOR HORIZONTAL. _____	49

Nomenclatura

Símbolo	Variable	Unidades
z	Altitud	m
V	Velocidad	m/s
a	Velocidad del sonido	m/s
T_0	Temperatura	K
M	Número de Mach	-
b	Envergadura alar	m
c	Cuerda media aerodinámica alar	m
S	Superficie alar	m ²
$\Lambda_{c/x}$	Flecha alar para una cuerda c/x	°
λ	Estrechamiento alar	-
AR	Aspect ratio o alargamiento	-
L	Sustentación	N
D	Resistencia aerodinámica	N
L	Momento aerodinámico en el eje x	N·m
M	Momento aerodinámico en el eje y	N·m
N	Momento aerodinámico en el eje z	N·m
CL	Coefficiente de sustentación	-
CD	Coefficiente de resistencia aerodinámica	-
Cl	Coefficiente de momento aerodinámico en x	-
CM	Coefficiente de momento aerodinámico en y	-
CN	Coefficiente de momento aerodinámico en z	-
$\frac{\delta\epsilon}{\delta\alpha}$	Deflexión de la corriente o downwash	-
e	Factor de Oswald	-
CD_0	Resistencia parásita	-
α	Ángulo de ataque	rad
β	Ángulo de derrape	rad
δE	Deflexión del estabilizador horizontal	rad

δA	Deflexión de los alerones	rad
δR	Deflexión de los estabilizadores verticales	rad
u	Velocidad en el eje x	m/s
v	Velocidad en el eje y	m/s
w	Velocidad en el eje z	m/s
p	Velocidad angular en el eje x	rad/s
q	Velocidad angular en el eje y	rad/s
r	Velocidad angular en el eje z	rad/s
ϕ	Ángulo de alabeo	rad
θ	Ángulo de cabeceo	rad
ψ	Ángulo de guiñada	rad
μ	Ángulo de asiento lateral	rad
γ	Ángulo de la trayectoria	rad
χ	Ángulo sobre el eje viento z	rad
n	Factor de carga	-
p_w	Distribución de presiones sobre el ala	Pa
m_w	Distribución del momento aerodinámico del ala	N·m/m
cec	Centro de esfuerzos cortantes	m
V_z	Esfuerzo cortante en el eje local Z	N
M_y	Momento flector sobre el eje local Y	N·m
T_x	Momento torsor sobre el eje local X	N·m
e_{cgw}	Distancia entre el cec y el CdG del ala	m
e_{caw}	Distancia entre el cec y el CA del ala	m
e_m	Distancia entre el cec y el motor	
e_t	Distancia entre el cec y el CA de la cola	
d	Distancia hasta una sección X específica	
Q	Esfuerzo cortante	N
q	Flujo de cortante	N/m
θ_x	Giro a torsión por unidad de longitud	rad/m
\hat{A}	Área de la sección	m ²

G	Módulo de cortante	Pa
τ	Tensión tangencial	Pa
σ	Tensión normal	Pa
σ_{ad}	Tensión máxima admisible por el material	Pa
a	Semieje mayor de la elipse	m
b	Semieje menor de la elipse	m
F	Factor de seguridad	-

Cabe destacar que los subíndices de cada variable hacen referencia a cada superficie sustentadora del avión, donde el subíndice w hace referencia al ala principal del dron, el t al empenaje horizontal de la cola y el v al empenaje vertical de la cola.

Introducción

Este trabajo consiste en el análisis de las cargas estructurales soportadas en vuelo de un dron de competición. Este dron ha sido diseñado por el equipo AeroDesign de generación espontánea de la Universitat Politècnica de València para una competición de SAE (SAE Aero Design West), en Estados Unidos, Texas.

Para analizar una aeronave se ha de comprender su misión y limitaciones, para ello se ha de conocer la competición en la que este dron participa. SAE Aero Design West es una competición estadounidense en la que existen tres categorías distintas: Micro, Regular y Advanced. Este dron en cuestión, bautizado como Stingray por el equipo, participa en la categoría Advanced.

La categoría Advanced es la que presenta una mayor complejidad en la misión del dron y en su diseño. Esta categoría simula una misión antiincendios, se ha de partir de un avión que no debe exceder los tres metros de envergadura y ha de ser pilotada por control remoto, este dron debe contener agua en su interior como carga de pago y ha de transportar un dron de menor tamaño cuyo control ha de ser completamente autónomo y debe aterrizar en localizaciones marcadas con dianas en el terreno que han de ser reconocidas mediante cámaras incorporadas en el dron principal.

A grandes rasgos, esta es la misión principal de esta categoría, pero se necesita conocer la misión específica del Stingray. El Stingray tiene que despegar y realizar un ascenso, ha de volar en crucero y realizar giros para poder mapear el terreno y obtener las coordenadas de las dianas y tiene que descender y aterrizar. Traducido a las actuaciones que se deben realizar, el Stingray ha de despegar desde la pista cargado, ha de realizar un ascenso controlado hasta una altura aproximada de 15-20 metros, una maniobra de transición del ascenso a vuelo en crucero realizando un giro, vuelo en crucero, virajes coordinados, descenso controlado y aterrizaje.

Una vez conocida la misión del dron y las actuaciones de este, para poder calcular las cargas estructurales se debe conocer el factor de carga de la aeronave durante el vuelo. Para ello se va a realizar un análisis teórico sobre la mecánica de vuelo del Stingray, se van a hallar las características aerodinámicas del dron y, a través de las ecuaciones de Bryan, se van a plantear las actuaciones que debe realizar el Stingray y se va a obtener el factor de carga al que está sometido para, posteriormente, obtener el factor de seguridad y un análisis de la posible optimización de los recursos empleados para la fabricación del dron.

Pliego de condiciones

Pliego de Condiciones para la Aeronave en la Competición SAE Aero Design West, categoría Advanced:

1. Dimensiones y Peso:

La aeronave debe tener una envergadura máxima de 3 metros y una longitud máxima de 3 metros. La altura desde el suelo hasta el punto más elevado del dron ha de ser como máximo de 1.83 metros y el peso máximo de despegue (incluyendo la carga que debe llevar el dron) ha de ser como máximo de 20 kilos

2. Materiales:

Los materiales utilizados deben ser seguros y cumplir con los estándares de calidad y resistencia establecidos. Se permite el uso de materiales compuestos avanzados, como fibra de carbono, para mejorar la eficiencia y rendimiento.

3. Propulsión:

La aeronave debe ser impulsada por un motor eléctrico. La potencia máxima del motor eléctrico no debe exceder los 1000 vatios. Se permiten hélices de alta eficiencia y diseño personalizado para maximizar el rendimiento.

4. Carga:

La aeronave debe transportar una carga útil específica, proporcionada por los organizadores de la competición. La carga útil debe ubicarse dentro de un compartimento designado y estar asegurada adecuadamente.

5. Regulación de Vuelo:

La aeronave debe ser capaz de despegar y aterrizar en una distancia específica establecida por los organizadores (120 metros). Se valorará la capacidad de realizar maniobras precisas durante el vuelo y la eficiencia energética en el aire.

Durante el periodo de liberación del PADA la aeronave no debe volar por encima de los 15 metros de altura.

6. Sistema de Energía:

Se debe utilizar un sistema de batería o fuente de energía eléctrica segura y confiable para alimentar el motor y otros sistemas eléctricos de la aeronave. La autonomía de vuelo será evaluada y tomada en cuenta para el rendimiento general.

7. Seguridad:

Se debe implementar un sistema de parada de emergencia que permita detener el motor de la aeronave de manera rápida y segura. Todas las partes móviles deben estar protegidas adecuadamente para evitar lesiones durante el manejo o vuelo.

Características aerodinámicas

Las características aerodinámicas de cualquier avión vienen dadas por la geometría que este presenta y sus condiciones de vuelo. Para el Stingray se tienen las siguientes características y condiciones de vuelo:

Atmósfera ISA

$$\rho(z) = \rho_0 \cdot ((1 - 22.57 \cdot 10^{-6} \cdot z)^{4.256})$$

$$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$P(z) = P_0 \cdot ((1 - 22.57 \cdot 10^{-6} \cdot z)^{5.256})$$

$$P_0 = 101325 \text{ Pa}$$

$$a(z) = 20.5 \cdot (T_0 \cdot (1 - 22.57 \cdot 10^{-6} \cdot z))^{\frac{1}{2}}$$

$$T_0 = 288.16 \text{ K}$$

Condiciones de vuelo

Altitud

$$z_0 = 20 \text{ m}$$

Velocidad

$$V_0 = 15 \text{ m/s}$$

Según la atmósfera ISA

$$a(20) = 340.28 \text{ m/s}$$

Número de Mach

$$M = \frac{V_0}{a(z)} = \frac{15}{340.28} = 0.044$$

Planos del Stingray

Para una mejor visualización se presentan las tres vistas del avión, con una vista 3D isométrica y sus características en la Figura 1.

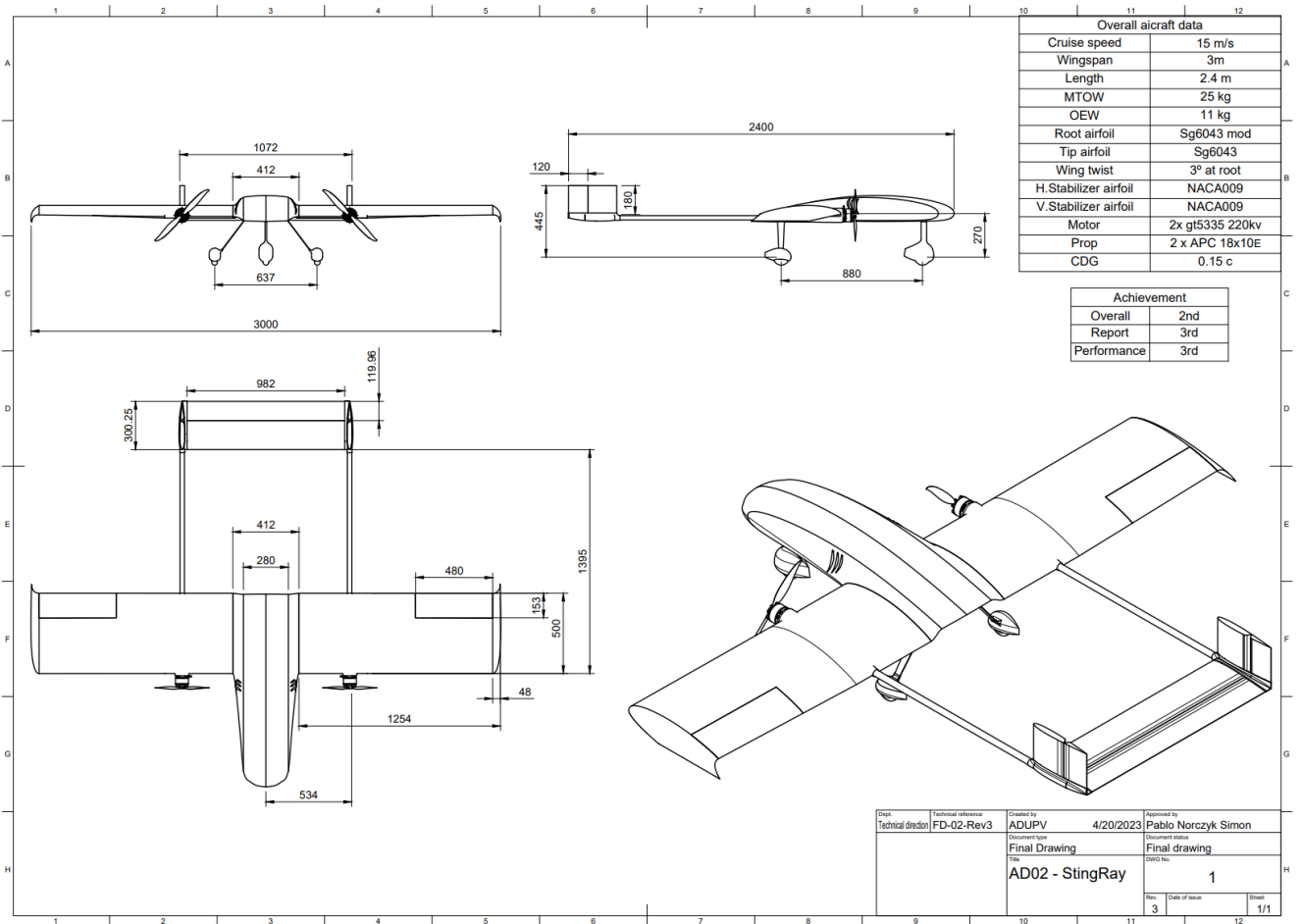


Figura 1. Planos del dron Stingray.

Características del ala y el empenaje trasero

Ala

$$\begin{aligned}
 b_w &= 2.92 \text{ m} \\
 c_w &= 0.5 \text{ m} \\
 S_w &= 1.659 \text{ m}^2 \\
 \Lambda_{LE,w} &= 0^\circ \\
 \Lambda_{TE,w} &= 0^\circ \\
 \lambda_w &= 1 \\
 AR_w &= \frac{b_w^2}{S_w} = 5.14
 \end{aligned}$$

Estabilizador horizontal

$$\begin{aligned}
 b_t &= 0.988 \text{ m} \\
 c_t &= 0.3 \text{ m} \\
 S_t &= 0.307 \text{ m}^2 \\
 \Lambda_{LE,t} &= 0^\circ \\
 \Lambda_{TE,t} &= 0^\circ \\
 \lambda_t &= 1
 \end{aligned}$$

$$AR_t = \frac{b_t^2}{S_t} = 3.18$$

Estabilizador vertical

$$\begin{aligned} b_v &= 0.17 \text{ m} \\ c_v &= 0.3 \text{ m} \\ S_v &= 0.054 \text{ m}^2 \\ \Lambda_{LE,v} &= 0^\circ \\ \Lambda_{TE,v} &= 0^\circ \\ \lambda_v &= 1 \\ AR_v &= \frac{b_v^2}{S_v} = 0.53 \end{aligned}$$

Coeficientes aerodinámicos

Los coeficientes aerodinámicos, que son adimensionales, representan las variaciones que se producen en cada fuerza o momento debido a cada variable. La nomenclatura empleada es la siguiente: La primera letra es una C mayúscula que indica que se trata de un coeficiente, la segunda letra indica la fuerza o momento al que hace referencia y el subíndice indica la variable a la que está referida el coeficiente.

Para entender los coeficientes aerodinámicos se debe saber que en las ecuaciones que se van a emplear para analizar la mecánica de vuelo del avión (las ecuaciones de Bryan), las fuerzas aerodinámicas son: sustentación, L ; resistencia aerodinámica D ; y fuerza aerodinámica lateral Y_A ; y los momentos son: momento aerodinámico en el eje x , L ; momento aerodinámico en el eje y , M ; y momento aerodinámico en el eje z , N .

Hay que tener en cuenta que en ingeniería aeronáutica la fuerza de sustentación que produce un avión se representa con una L de *Lift* en inglés y según la nomenclatura empleada en las ecuaciones de Bryan el momento generado en el eje x longitudinal de un avión se representa con la letra L también. Para los coeficientes aerodinámicos, que es el propósito de esta parte, el coeficiente representado por CL representará las variaciones la fuerza de sustentación y para el coeficiente de momento se empleará una Cl , con una l minúscula.

Por último, los coeficientes con subíndice δE , δP , δA y δR hacen referencia a los controles de las superficies de control del avión, siendo δE el control sobre el timón de profundidad, δP el control sobre la palanca de gases, δA el control sobre los alerones y δR el control sobre el timón de dirección.

- Coeficiente de sustentación, CL

Coeficiente que modifica a la fuerza de sustentación.

$$L = \frac{1}{2} \rho(z) V^2 S_w \cdot CL(\alpha, \delta E, q)$$

Donde la expresión para CL queda de la siguiente forma:

$$CL = CL_0 + CL_\alpha \cdot \alpha + CL_{\delta E} \cdot \delta E + CL_q \cdot \left(\frac{c_w \cdot q}{2V} \right) + CL_{\dot{\alpha}} \cdot \left(\frac{c_w \cdot \dot{\alpha}}{2V} \right)$$

Y cada uno de los coeficientes se calcula como sigue:

Se asume que la línea de sustentación neutra coincide con el eje x del avión y entonces CL_0 es nulo:

$$CL_\alpha = CL_{\alpha w} + CL_{\alpha t} \cdot \left(1 + \frac{\delta\epsilon}{\delta\alpha}\right) \cdot \frac{S_t}{S_w}$$

$$CL_{\alpha w/t} = \frac{CL_{\alpha w}}{2 + \sqrt{4 + AR_{w/t} \cdot \left(1 - M^2 + \tan\left(\Lambda_{cw/t}\right)\right)}}$$

$$\frac{\delta\epsilon}{\delta\alpha} = -\frac{16 \cdot CL_{\alpha w}}{\pi^3 \cdot AR_w}$$

$$CL_{\delta E} = \Delta CL_{\delta E} \cdot \frac{S_t}{S_w}$$

$$\Delta CL_{\delta E} = \frac{2 \cdot AR_t \cdot K_b \cdot K_c \cdot (\pi - \theta_F \cdot \sin \theta_F)}{2 + \sqrt{4 + AR_t \cdot \left(1 - M^2 + \tan\left(\Lambda_{ct}\right)\right)}}$$

Donde K_b , y K_c son valores que se obtienen de la Figura 2, Figura 3, Figura 4, Figura 5 y Figura 6 [1], y para este avión en concreto son $K_b = 1$, $K_c = 1.02$ y θ_F se puede calcular como $\theta_F = \arccos\left[1 - 2\left(1 - \frac{c_F}{c_{tail}}\right)\right] = 1.77$ rad.

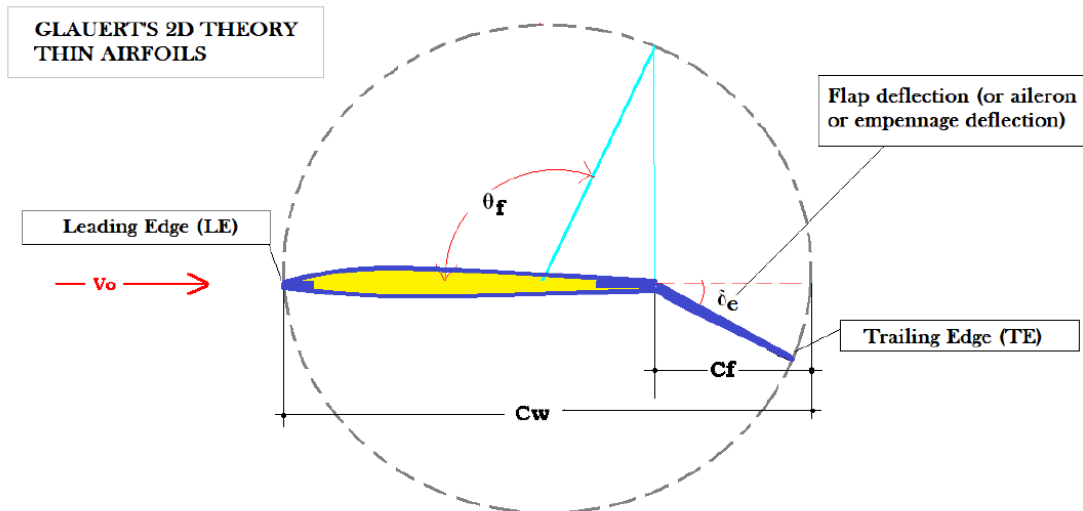


Figura 2. Geometría de referencia para la aplicación de la teoría de 2D de Glauert.

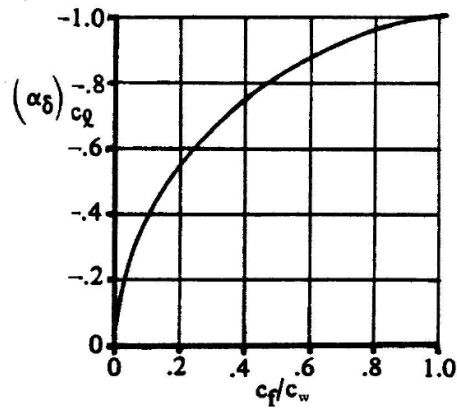


Figura 3. Procedimiento gráfico para determinar $(\alpha_\delta)_{cl}$.

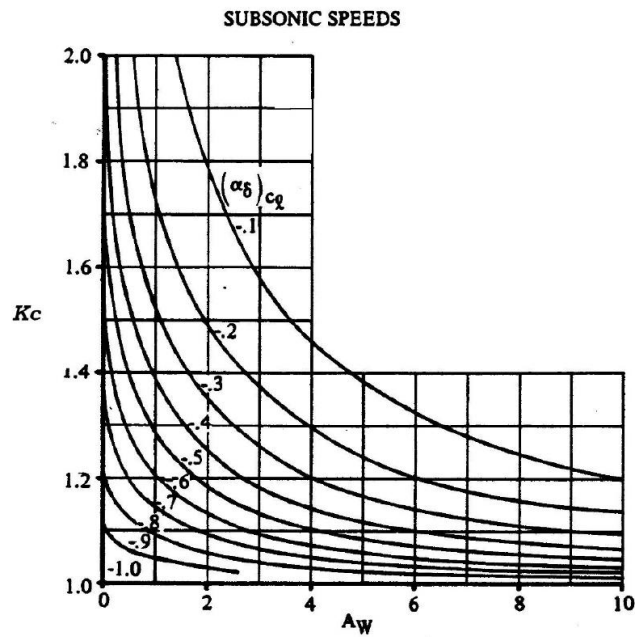


Figura 4. Procedimiento gráfico para obtener el valor de K_c .

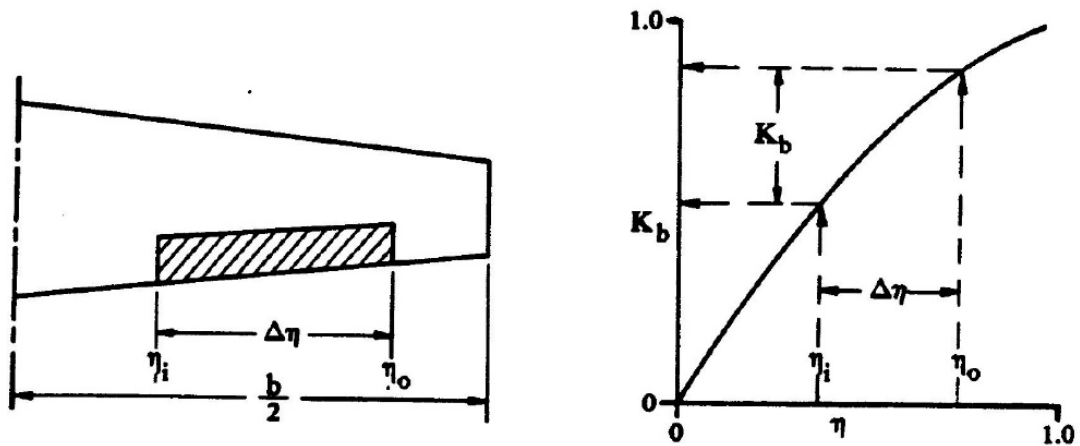


Figura 5. Definiciones gráficas para determinar K_b .

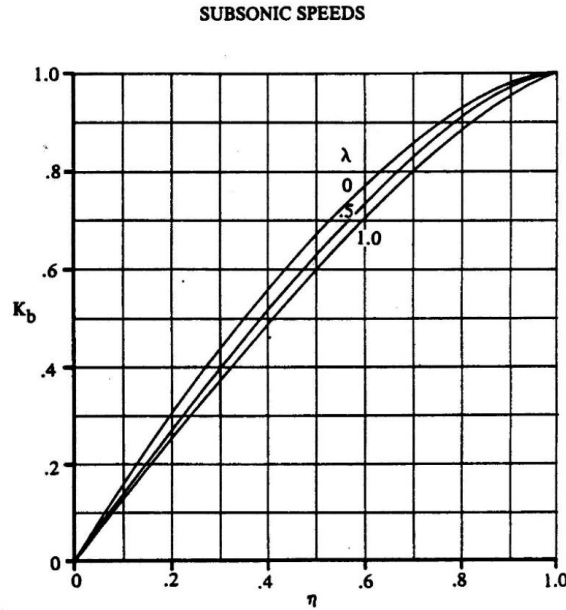


Figura 6. Procedimiento gráfico para obtener el valor de K_b .

$$CL_q = 2 \cdot CL_{\alpha t} \cdot \frac{S_t}{S_w} \cdot \frac{x_{CA t} - x_{CoG}}{c_w}$$

$$CL_{\dot{\alpha}} = 2 \cdot CL_{\alpha t} \cdot \frac{S_t}{S_w} \cdot \frac{x_{CA t} - x_{CA w}}{c_w} \cdot \left| \frac{\delta \epsilon}{\delta \alpha} \right|$$

Si se evalúan todos los coeficientes se obtiene la siguiente expresión para el coeficiente de sustentación del Stingray:

$$CL = 6.665 \cdot \alpha + 0.490 \cdot \delta E + 0.027 \cdot q + 0.013 \cdot \dot{\alpha} \quad (1)$$

- *Coeficiente de resistencia aerodinámica, CD*

Coeficiente que modifica a la resistencia aerodinámica.

$$D = \frac{1}{2} \rho(z) V^2 S_w \cdot CD(CL(\alpha, \delta E, q))$$

Donde la expresión para CD queda de la siguiente forma:

$$CD = CD_0 + \frac{1}{\pi \cdot AR_w \cdot e} \cdot CL^2 = CD_0 + K \cdot CL^2$$

El coeficiente de resistencia parásita es un dato obtenido por el grupo de aerodinámica del equipo de generación espontánea AeroDesign UPV.

$$CD_0 = 0.02$$

El factor de Oswald, e , se puede calcular mediante una aproximación estadística para un ala trapezoidal.

$$e = (1 - 0.045 \cdot AR_w^{0.68}) \left(1 - 0.227 \cdot \Lambda \frac{c_w^{1.615}}{4} \right)$$

Con esto se obtiene la siguiente expresión:

$$CD = 0.02 + 0.0718 \cdot CL^2$$

Sustituyendo la ecuación (1) se obtiene la expresión en función de las variables aerodinámicas de control.

$$CD = 0.02 + 5.06 \cdot 10^{-5} \cdot (251.063 \cdot \alpha + 18.45 \cdot \delta E + q + 0.484 \cdot \dot{\alpha})^2 \quad (2)$$

- *Coefficiente de momento aerodinámico, CM*

Coefficiente que modifica el momento aerodinámico sobre el eje y.

$$M = \frac{1}{2} \rho(z) V^2 S_w c_w \cdot CM(\alpha, \delta E, q)$$

Donde la expresión para CM queda de la siguiente forma:

$$CM = CM_{\alpha} \cdot \alpha + CM_{\delta E} \cdot \delta E + CM_q \cdot \left(\frac{c_w \cdot q}{2V} \right) + CM_{\dot{\alpha}} \cdot \left(\frac{c_w \cdot \dot{\alpha}}{2V} \right)$$

Y los coeficientes se pueden calcular de la siguiente forma:

$$CM_{\alpha} = CL_{\alpha w} \cdot \frac{x_{CoG} - x_{CAw}}{c_w} + CL_{\alpha t} \cdot \left(1 + \frac{\delta \epsilon}{\delta \alpha} \right) \cdot \frac{x_{CoG} - x_{CAt}}{c_w} \cdot \frac{S_t}{S_w}$$

$$CM_{\delta E} = \Delta CL_{\delta E} \cdot \frac{x_{CoG} - x_{CAt}}{c_w} \cdot \frac{S_t}{S_w}$$

$$CM_q = -CL_q \cdot \frac{x_{CAt} - x_{CoG}}{c_w}$$

$$CM_{\dot{\alpha}} = -CL_{\dot{\alpha}} \cdot \frac{x_{CAt} - x_{CoG}}{c_w}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en el apartado Coeficiente de sustentación, CL se llega a la siguiente expresión para CM .

$$CM = -0.173 \cdot \alpha - 1.097 \cdot \delta E - 0.023 \cdot q - 0.016 \cdot \dot{\alpha} \quad (3)$$

- *Coefficientes laterales direccionales aerodinámicos, CY, Cl y CN*

Estos tres coeficientes son muy importantes para la dinámica lateral-direccional de la aeronave. Su obtención resulta demasiado extensa como para explicar en este documento ya que el objetivo de este no es el proceso de obtención de estos coeficientes, si no su uso para un análisis estructural. El proceso empleado para hallar los valores de estos coeficientes es el que utiliza Napolitano [2].

El coeficiente CY modifica las fuerzas aerodinámicas en el eje y y presenta la siguiente forma:

$$CY = CY_{\beta} \cdot \beta + CY_p \cdot \frac{b \cdot p}{2V} + CY_r \cdot \frac{b \cdot r}{2V} + CY_{\delta R} \cdot \delta R + CY_{\delta A} \cdot \delta A$$

$$CY = -2.109 \cdot \beta - 0.003 \cdot p + 0.002 \cdot r + 0.011 \cdot \delta R \quad (4)$$

El coeficiente Cl modifica el momento aerodinámico en el eje x y presenta la siguiente forma:

$$Cl = Cl_{\beta} \cdot \beta + Cl_p \cdot \frac{b \cdot p}{2V} + Cl_r \cdot \frac{b \cdot r}{2V} + Cl_{\delta R} \cdot \delta R + Cl_{\delta A} \cdot \delta A$$

$$Cl = -0.136 \cdot \beta - 0.044 \cdot p + 0.020 \cdot r - 0.001 \cdot \delta R + 0.130 \cdot \delta A \quad (5)$$

El coeficiente CN modifica el momento aerodinámico en el eje z y presenta la siguiente forma:

$$CN = CN_{\beta} \cdot \beta + CN_p \cdot \frac{b \cdot p}{2V} + CN_r \cdot \frac{b \cdot r}{2V} + CN_{\delta R} \cdot \delta R + CN_{\delta A} \cdot \delta A$$

$$CN = 0.177 \cdot \beta - 0.004 \cdot p - 0.018 \cdot r + 0.006 \cdot \delta R - 0.141 \cdot \delta A \quad (6)$$

Características propulsivas

La aeronave cuenta con dos hélices que proporcionan el empuje necesario para el vuelo del dron. Para modelizar este empuje se ha empleado una base de datos empírica sobre las hélices y se ha realizado un análisis de regresión con dichos datos para obtener una ecuación que proporcione la evolución del empuje con la velocidad del dron para unas revoluciones determinadas del motor.

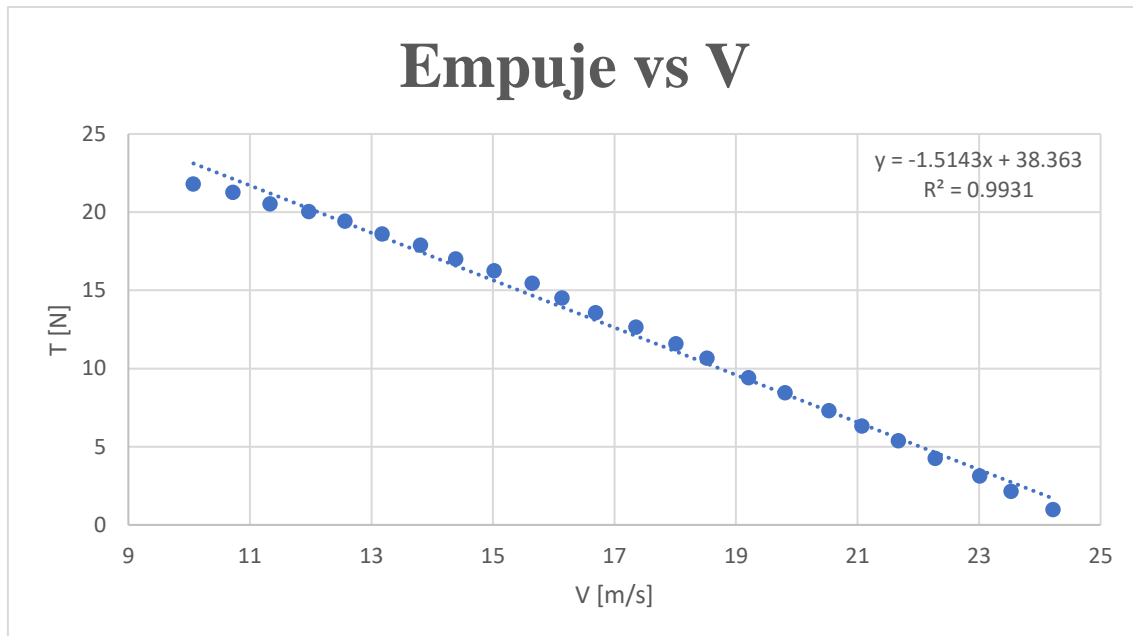


Figura 7. Regresión lineal para la modelización del empuje de la aeronave.

En la Figura 7 se observa la regresión realizada. Esta presenta un valor de R^2 muy próximo a la unidad, es decir, el modelo de empuje se puede considerar válido.

$$T(V) = -1.5143 V + 38.363$$

Ecuaciones de Bryan

En 1911 el profesor inglés George Hartley Bryan, planteó las ecuaciones del movimiento que rigen la mecánica de un avión [3]. Estas doce ecuaciones se siguen empleando en la actualidad para el estudio de los aviones modernos.

Sistema de referencia

Para poder utilizar las ecuaciones adecuadamente, se debe conocer los sistemas de referencia empleados. Existen muchos sistemas de referencia, pero se van a explicar los tres más importantes.

En primer lugar, existe el sistema de referencia ejes cuerpo. Este sistema tiene como origen el centro de masas de la aeronave, el eje x sale del centro de masas hacia el morro de la aeronave; el eje y sale del centro de masas y es positivo hacia el ala derecha del avión y el eje z forma el triedro con los otros quedando positivo hacia abajo. Se puede observar este sistema en la Figura 8.

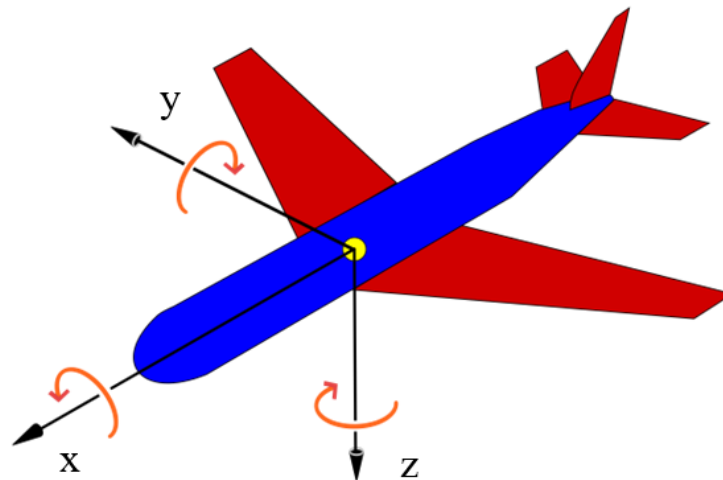


Figura 8. Sistema de referencia ejes cuerpo.

En segundo lugar, existe el sistema de referencia ejes viento. Este sistema tiene como origen el centro de masas de la aeronave. El eje x está alineado con la dirección de la velocidad y es positivo hacia el morro de la aeronave, el eje z está contenido en el plano de simetría de la aeronave y es positivo hacia abajo, y el eje y forma el triedro con los otros. Se puede observar este sistema en la Figura 9.

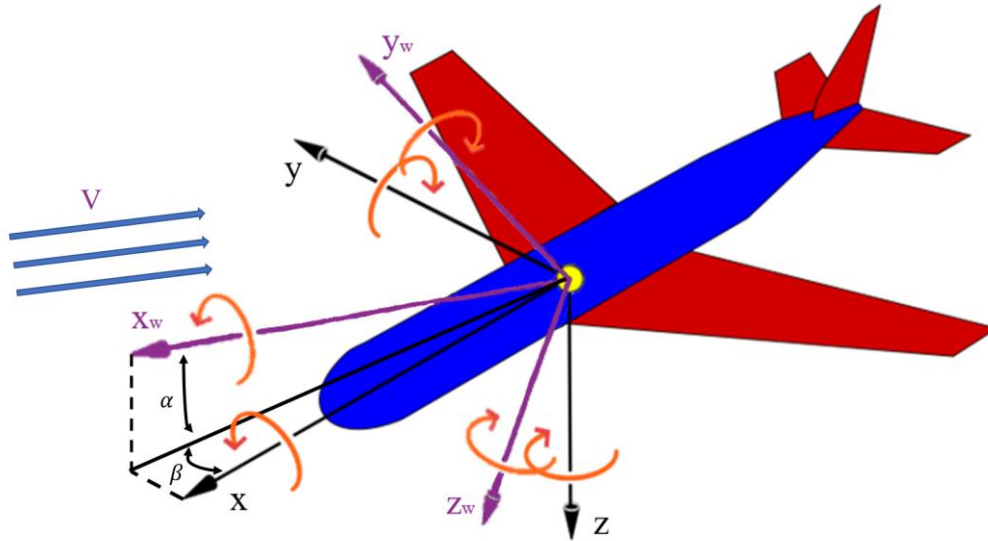


Figura 9. Sistema de referencia ejes viento.

Por último, existe el sistema de referencia ejes horizonte. Este sistema tiene como origen el centro de masas del avión, pero los ejes permanecen paralelos a los del sistema ejes Tierra. El eje x apunta al norte de la Tierra, el eje y apunta hacia el este, y el eje z forma el triedro con los otros apuntando hacia el centro de la Tierra. Se puede observar el sistema ejes Tierra en la Figura 10, los ejes horizonte serían idénticos, pero con el origen en el centro de masas del avión.

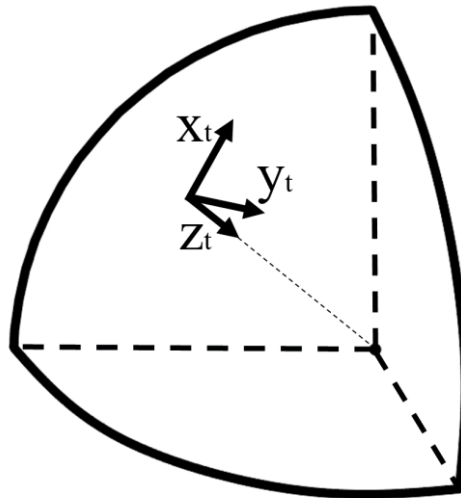


Figura 10. Sistema de referencia ejes horizonte.

Ecuaciones en ejes cuerpo

El sistema de doce ecuaciones que planteó G. H. Bryan, empleando el sistema de referencia ejes cuerpo, es el siguiente:

$$m(\dot{u} + q w - r v) = T_x + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_X - m g \sin \theta \quad (7)$$

$$m(\dot{v} + r u - p w) = T_y + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_Y + m g \cos \theta \sin \phi \quad (8)$$

$$m(\dot{w} + p v - q u) = T_z + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_Z + m g \cos \theta \cos \phi \quad (9)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{I_{zz}}{A} L + \frac{I_{xz}}{A} N + \left(\frac{I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})}{A} \right) p q + \left(\frac{I_{zz}(I_{yy} - I_{zz}) - I_{xz}^2}{A} \right) r q \quad (10)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{M}{I_{yy}} + \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} p r + \frac{I_{xz}}{I_{yy}} (r^2 - p^2) \quad (11)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{I_{xx}}{A} N + \frac{I_{xz}}{A} L + \left(\frac{(I_{xx} - I_{yy})I_{xz} + I_{xz}^2}{A} \right) p q + \left(\frac{I_{xz}(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz})}{A} \right) r q \quad (12)$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \quad (13)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \quad (14)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \cos \psi \cos \theta + v(\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi) + w(\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \quad (16)$$

$$\frac{dy}{dt} = u \sin \psi \cos \theta + v(\cos \psi \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi) \quad (17)$$

$$\frac{dz}{dt} = -u \sin \theta + v(\cos \theta \sin \phi) + w(\cos \theta \cos \phi) \quad (18)$$

Donde $A = (I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)$

Cabe destacar que en las ecuaciones (7), (8) y (9) los coeficientes CX , CY y CZ son los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas sobre los ejes cuerpo de la aeronave, que expresados en función de los coeficientes aerodinámicos CD , CY_w y CL ; y los ángulos aerodinámicos α y β quedan:

$$CX = -CD \cos \alpha \cos \beta + CL \sin \alpha + CY_w \cos \alpha \sin \beta$$

$$CY = -CY_w \cos \beta - CD \sin \beta$$

$$CZ = -CL \cos \alpha - CD \cos \beta \sin \alpha + CY_w \sin \alpha \sin \beta$$

Las ecuaciones (7), (8) y (9) son las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, donde u , v y w son las velocidades en los ejes x , y y z respectivamente; T_x , T_y y T_z son las fuerzas propulsivas en cada eje y CX , CY y CZ son los coeficientes de las fuerzas aerodinámicas de cada eje del sistema ejes cuerpo.

Las ecuaciones (10), (11) y (12) son las ecuaciones de equilibrio de momentos, donde L , M y N son los momentos aerodinámicos en los ejes x , y y z respectivamente y p , q y r son las velocidades angulares en los ejes x , y y z respectivamente.

Las ecuaciones (13), (14) y (15) son las relaciones de Euler y las ecuaciones (16), (17) y (18) son las relaciones entre las velocidades en ejes horizonte y la velocidades en ejes cuerpo.

Ecuaciones en ejes viento

El sistema de doce ecuaciones que planteó G. H. Bryan, empleando el sistema de referencia ejes viento, es el siguiente:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = T \cos \beta \cos \alpha + \frac{\rho V^2 S_w}{2} CX_w - mg \sin \gamma \quad (19)$$

$$mV r_w = -T \sin \beta \cos \alpha + \frac{\rho V^2 S_w}{2} CY_w + mg \cos \gamma \sin \mu \quad (20)$$

$$mV q_w = -T \sin \alpha + \frac{\rho V^2 S_w}{2} CZ_w + mg \cos \gamma \cos \mu \quad (21)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{I_{zz}}{A} L + \frac{I_{xz}}{A} N + \left(\frac{I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})}{A} \right) p q + \left(\frac{I_{zz}(I_{yy} - I_{zz}) - I_{xz}^2}{A} \right) r q$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{M}{I_{yy}} + \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} p r + \frac{I_{xz}}{I_{yy}} (r^2 - p^2)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{I_{xx}}{A} N + \frac{I_{xz}}{A} L + \left(\frac{(I_{xx} - I_{yy})I_{xz} + I_{xz}^2}{A} \right) p q + \left(\frac{I_{xz}(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz})}{A} \right) r q$$

$$p_w = \dot{\mu} - \dot{\chi} \sin \gamma \quad (22)$$

$$q_w = \dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \mu \quad (23)$$

$$r_w = \dot{\chi} \cos \gamma \cos \mu - \dot{\gamma} \sin \mu \quad (24)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \chi \cos \gamma \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (26)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \sin \gamma \quad (27)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} CX_w \\ CY_w \\ CZ_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -CD \cos \beta + CY_w \sin \beta \\ -CD \sin \beta - CY_w \cos \beta \\ -CL \end{bmatrix}$$

Para hallar la relación entre $\{p_w, q_w, r_w\}$ y $\{p_B, q_B, r_B\}$, que es necesaria para el desarrollo de las ecuaciones de momentos (10), (11) y (12), se puede utilizar la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} p_B \\ q_B \\ r_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} p_w \\ q_w \\ r_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\beta} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \\ -\dot{\beta} \cos \alpha \end{pmatrix} \right] \quad (28)$$

Cabe destacar que las ecuaciones de los momentos siempre se utilizan en ejes cuerpo debido a las hipótesis utilizadas para el desarrollo general de las ecuaciones, que considera que los momentos de inercia en ejes cuerpo se mantienen constantes, cosa que no ocurre si se plantean las ecuaciones de los momentos en ejes viento y habría que considerar entonces variaciones temporales de los momentos de inercia.

Cálculo del factor de carga

Despegue

En esta maniobra el avión acelera desde el punto 1 de la Figura 11 hasta el punto 3 y asciende con una pendiente que se considera constante hasta el punto 4. El punto en el que el avión comienza a rotar para empezar el vuelo (punto 3) el avión debe llevar una velocidad, llamada velocidad de rotación, $V_R \approx 1.2 \cdot V_{stall}$, mientras que en el punto 3, que es el momento en el que el avión empieza el vuelo, la velocidad no tiene por qué ser la misma. La definición de velocidad de despegue (V_{LO}) que se va a emplear en este caso es la misma que la velocidad de rotación, es decir, se asume que se produce una aceleración desde V_R a V_{LO} y una rotación de forma instantánea. Esto induce un error muy pequeño y aceptable para el cálculo del factor de carga.

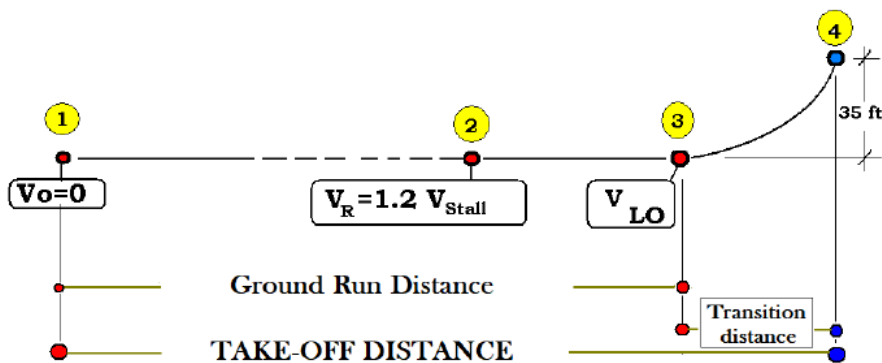


Figura 11. Fase de despegue [1].

El factor de carga durante la fase de despegue es, por definición, menor que la unidad. Empieza a aumentar conforme el avión aumenta su velocidad y es capaz de generar una sustentación suficiente que iguale al peso. El valor máximo en esta maniobra se encuentra en la distancia de transición (distancia entre los puntos 3-4 de la Figura 11).

Como se ha asumido $V_R = V_{LO}$ y que la pendiente de la trayectoria es aproximadamente constante $\gamma \approx cte$, el factor de carga en esta transición también lo es y se puede calcular de forma sencilla.

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{\rho(z_0) S_w C L_{max}}}$$

$$V_{LO} = 1.2 \cdot V_{stall} = 1.2 \sqrt{\frac{2 \cdot W}{\rho(z_0) S_w C L_{max}}}$$

$$C_{L0} = 0.83 \cdot C L_{max}$$

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\rho(z_0) V_{LO}^2 S_w C_{L0}}{2 \cdot W} \approx 1.2$$

Empleando un Robot matemático para calcular este factor de carga se obtiene un resultado muy parecido.

$$n = 1.1952$$

Ascenso

Para el cálculo del factor de carga se empleará la ecuación (21). Asumiendo un ascenso con pendiente constante, algo habitual, se tiene $\frac{dy}{dt} = 0$. Además, el empuje se asume alineado con el eje x y el vuelo se asume nivelado y sin derrape, es decir, el ángulo de asiento lateral μ y el ángulo aerodinámico β son nulos. Esto deja la siguiente ecuación:

$$0 = -L + W \cos \gamma$$

$$n = \frac{L}{W} = \cos \gamma$$

Es decir, el factor de carga depende del ángulo de la pendiente de la trayectoria, que suele ser bastante pequeño. Valores típicos para la pendiente de ascenso son entre 5-8°, con esto el factor de carga queda:

$$n_{\gamma=5} = 0.996$$

$$n_{\gamma=8} = 0.990$$

También se ha realizado una simulación numérica resuelta por un robot matemático. Se considera un vuelo quasi-estacionario cuyas condiciones iniciales son:

- Velocidades angulares nulas $p_0 = q_0 = r_0 = 0$.
- Ángulo de derrape nulo $\beta_0 = 0$.
- Ángulo de ataque constante $\alpha = \alpha_{trim}$.
- Velocidad inicial $V_0 = 15$ m/s.
- Aceleraciones lineales y angulares nulas $\dot{u}_0 = \dot{v}_0 = \dot{w}_0 = \dot{p}_0 = \dot{q}_0 = \dot{r}_0 = 0$.
- Velocidades de alabeo, cabeceo y guiñada nulas $\dot{\phi}_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$.
- Pendiente de la trayectoria $\gamma = 4^\circ$.
- Controles δE , δA y δR constantes, pero δP variable con el tiempo.

Para estas condiciones se evalúa el equilibrio del Stingray y se obtienen los valores necesarios de los controles para mantener el avión equilibrado.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.130 \text{ rad} \\ \delta E &= -0.0205 \text{ rad} \\ \delta P &= 0.976 \\ \delta A &= 0 \text{ rad} \\ \delta R &= 0 \text{ rad} \end{aligned}$$

Nótese que para mantener el avión equilibrado se requiere de un valor δP constante ya que se ha evaluado para una altitud específica (en este caso la altitud es $z_0 = 1$ m porque se considera que la fase de ascenso comienza a esa altitud). Sin embargo, a la hora de sacar una expresión de δP para la maniobra completa si que se va a considerar una dependencia temporal.

Una vez se tienen los valores en el equilibrio, se emplean las ecuaciones (19), (21) y (23). Las únicas variables dependientes del tiempo que quedan son $V(t)$, $\delta P(t)$ y $z(t)$, por lo que

resolviendo numéricamente se obtienen interpolaciones para estas variables. Si ahora se escribe el factor de carga en función del tiempo queda:

$$n(t) = \frac{\rho(z(t)) \cdot V(t)^2 \cdot S_w \cdot CL(\alpha_{trim}, \delta E, 0, 0)}{2 \cdot W}$$

Se puede ahora representar gráficamente la evolución temporal del factor de carga y de la palanca de gases.

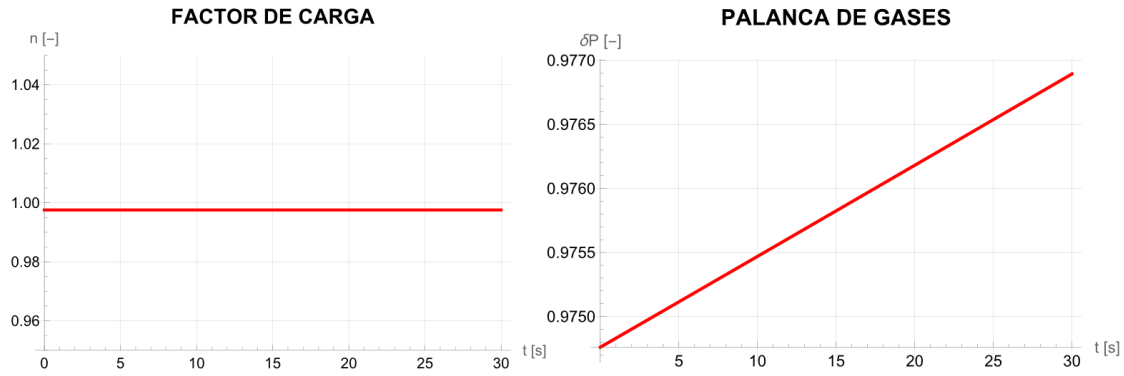


Figura 12. Factor de carga y palanca de gases para vuelo en ascenso.

Para un tiempo de vuelo de treinta segundos, la altitud alcanzada por el Stingray es $z = 29.09 \text{ m}$, altitud razonable para la misión y vuelo del avión. Con esto se observa que el factor de carga es muy cercano a la unidad, cosa que cuadra con los resultados obtenidos teóricamente.

Giro estacionario helicoidal

Un vuelo estacionario helicoidal es aquel realizado por una aeronave que, a la vez que cambia de rumbo, cambia de altitud. Esta maniobra queda reflejada en la Figura 13.

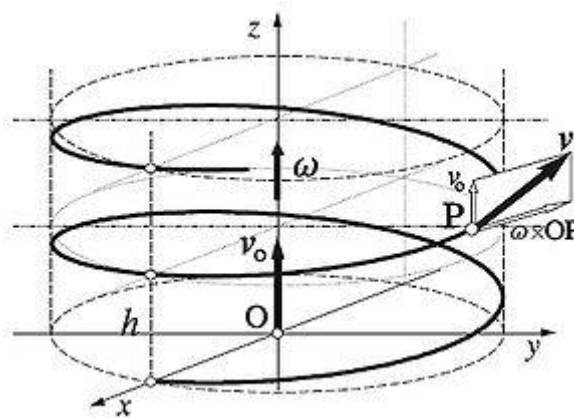


Figura 13. Trayectoria de un vuelo ascendente helicoidal.

Las hipótesis realizadas para analizar este tipo de vuelo son:

- Se va a trabajar en ejes cuerpo
- Velocidad constante V_0 .
- Velocidad angular constante $\dot{\psi} = \Omega$.
- Ángulo de asiento longitudinal constante $\theta_0 = cte$.

- Ángulo de alabeo constante $\phi_0 = cte$.
- Empuje alineado con el eje x cuerpo.
- Ángulos aerodinámicos pequeños.

En primer lugar, se obtiene el valor de las velocidades angulares p , q y r de las ecuaciones (13), (14) y (15). Para el valor de la velocidad angular Ω se ha cronometrado lo que el prototipo Stingray giraba 180° y se ha obtenido un valor de $\Omega = \frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$

$$\begin{aligned} p &= -\Omega \sin \theta_0 \\ q &= \Omega \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ r &= \Omega \cos \theta_0 \cos \phi_0 \end{aligned}$$

Una vez halladas, al haber asumido ángulos aerodinámicos pequeños se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u &\approx V_0 \\ v &\approx \beta \cdot V_0 \\ w &\approx \alpha \cdot V_0 \end{aligned}$$

Sabiendo esto, sustituyendo en las ecuaciones (7), (8), (9), (10), (11) y (12); y reorganizando los términos, se puede obtener el siguiente sistema matricial:

$$[A_{5 \times 5}] \begin{bmatrix} \alpha_{trim} \\ \beta_{trim} \\ \delta E_{trim} \\ \delta A_{trim} \\ \delta R_{trim} \end{bmatrix} = [B_{5 \times 1}]$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2mp}{\rho S_w V_0} & CY_\beta & 0 & 0 & CY_{\delta R} \\ CL_\alpha & \frac{2mp}{\rho S_w V_0} & CL_{\delta E} & 0 & 0 \\ 0 & Cl_\beta & 0 & Cl_{\delta A} & Cl_{\delta R} \\ CM_\alpha & 0 & CM_{\delta E} & 0 & 0 \\ 0 & CN_\beta & 0 & CN_{\delta A} & CN_{\delta R} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2mV_0 r - 2mg \sin \theta_0 \cos \phi_0}{\rho S_w V_0^2} - \frac{b_w}{2V_0} (CY_p \cdot p + CY_r \cdot r) \\ \frac{2mV_0 q - 2mg \cos \theta_0 \cos \phi_0}{\rho S_w V_0^2} - \frac{c_w}{2V_0} CL_q \cdot q \\ \frac{2[(I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq]}{\rho S_w c_w V_0^2} - \frac{b_w}{2V_0} (Cl_p \cdot p + Cl_r \cdot r) \\ \frac{2[(I_{xx} - I_{zz})pr - I_{xz}(p^2 - r^2)]}{\rho S_w c_w V_0^2} - \frac{c_w}{2V_0} CM_q \cdot q \\ \frac{2[(I_{yy} - I_{xx})pq - I_{xz}pr]}{\rho S_w c_w V_0^2} - \frac{b_w}{2V_0} (CN_p \cdot p + CN_r \cdot r) \end{bmatrix}$$

Es interesante destacar que para esta maniobra se consideran parámetros conocidos los ángulos ϕ_0 y θ_0 . Valores razonables para este tipo de maniobra realizada por un dron de competición son $\phi_0 = 45^\circ$ y $\theta_0 = 3^\circ$

Este sistema matricial se puede resolver con un robot matemático de la forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{trim} \\ \beta_{trim} \\ \delta E_{trim} \\ \delta A_{trim} \\ \delta R_{trim} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \times [B] = \begin{bmatrix} 0.134 \text{ rad} \\ -0.124 \text{ rad} \\ -0.026 \text{ rad} \\ -0.160 \text{ rad} \\ -0.191 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidos los controles necesarios para realizar la maniobra se puede calcular el factor de carga que esta requerirá. Como tanto la velocidad, como la trayectoria y los controles se mantienen constantes, lo único que varía con el tiempo es la altitud (y el rumbo, pero no influye en el cálculo de n), sin embargo, esta se puede asumir constante, ya que la distancia ascendida apenas llega a los 3 metros. Por lo tanto, nos queda una expresión para el factor de carga en función de los controles del Stingray.

$$n = \frac{\rho(z_0) \cdot V_0^2 \cdot S_w \cdot CL(\alpha_{trim}, \delta E_{trim}, q, 0)}{2 \cdot W} = 1.035$$

Viraje coordinado

Un viraje coordinado se realiza a altitud constante, lo que conlleva que $\gamma = 0$. Además, como refleja el esquema de la Figura 14 se puede obtener una relación sencilla entre el ángulo de asiento lateral μ y el factor de carga.

$$L \cdot \cos \mu = W$$

$$n = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos \mu}$$

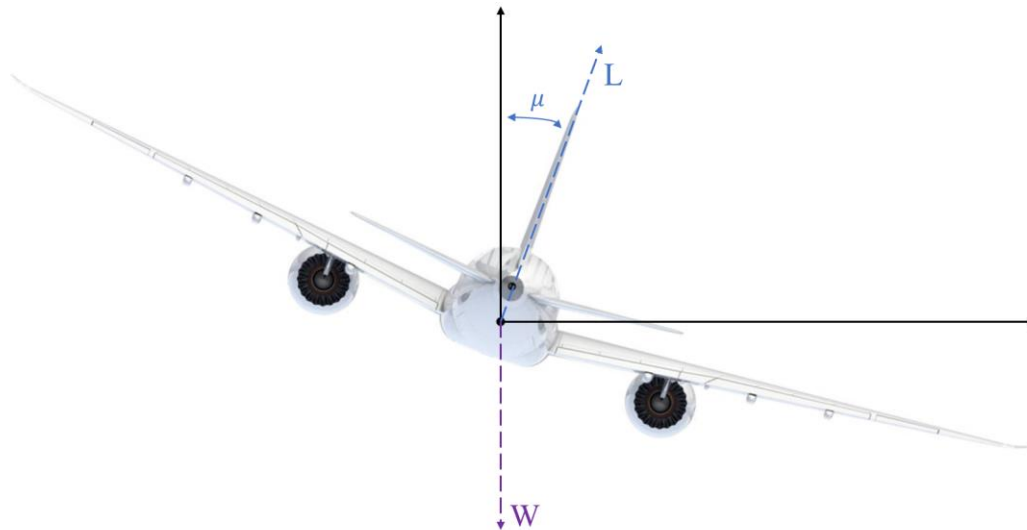


Figura 14. Esquema viraje coordinado.

Con esto se puede calcular el máximo factor de carga al que estará sometido el Stingray si se asume conocido el ángulo μ al que estará sometido. Valores máximos razonables para un dron de competición pueden ser entre 40-45°.

$$n = \frac{1}{\cos \mu} = \frac{1}{\cos 45} = 1.414$$

Descenso

Para el descenso se tiene el mismo caso que en el ascenso, salvo porque la pendiente debe ser negativa, es por esto por lo que el factor de carga se puede calcular también como:

$$n = \frac{L}{W} = \cos \gamma$$

Valores típicos para la pendiente de descenso son 5-6° (en valor absoluto), con esto el factor de carga queda:

$$n_{\gamma=5} = 0.996$$

$$n_{\gamma=6} = 0.994$$

Al igual que para el ascenso, se ha realizado una simulación numérica empleando el mismo procedimiento que en el ascenso con la salvedad de un cambio de signo en el ángulo de la trayectoria γ .

Se obtienen de esta forma las siguientes gráficas, representadas en la Figura 15, para el factor de carga y la palanca de gases. Se observa que el factor de carga es muy similar, mientras que la palanca de gases está al mínimo, en contraposición con la fase de ascenso. Esto es debido a que las propias fuerzas gravitatorias y aerodinámicas permiten al Stingray realizar un descenso controlado.

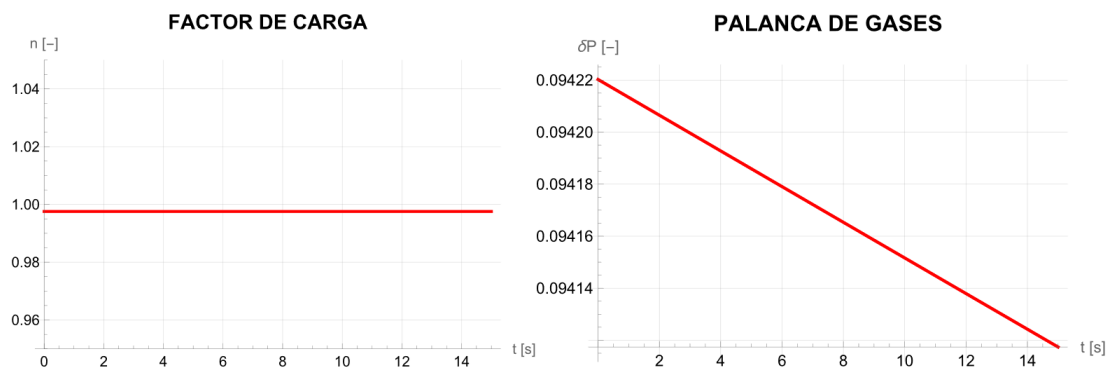


Figura 15. Factor de carga y palanca de gases para vuelo en descenso.

Aterrizaje

Para el cálculo del factor de carga en el aterrizaje hay que saber que, para realizar esta maniobra la aeronave debe descender durante la fase de transición con un factor de carga unitario y una pendiente constante y pequeña, según la Figura 16, hasta realizar el touch down. Posteriormente, el factor de carga disminuirá conforme vaya frenando el avión.

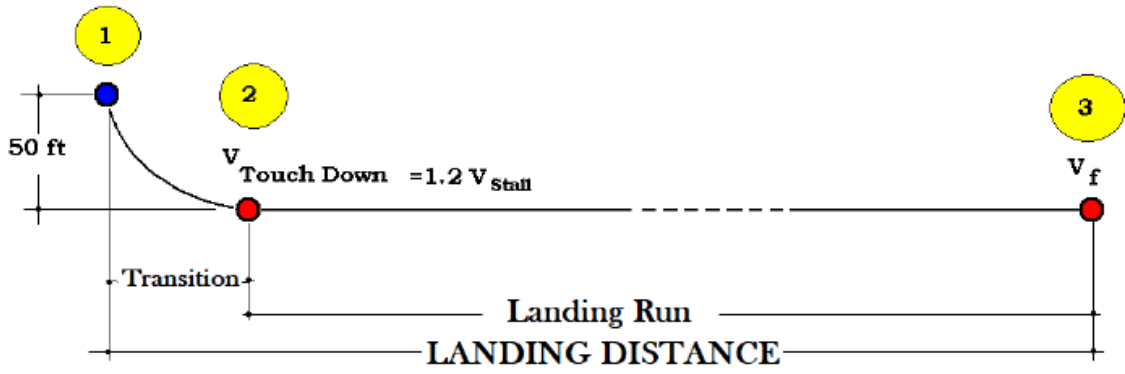


Figura 16. Fase de aterrizaje [1].

Cálculo de esfuerzos estructurales

Para calcular los esfuerzos estructurales que sufre la aeronave en las distintas actuaciones se ha de calcular el factor de cada una de ellas n , la distribución de presiones sobre cada superficie p , así como la distribución de pesos de cada una μ .

En primer lugar, el factor de carga se ha calculado (en el apartado anterior Cálculo del factor de carga) para régimen estacionario de cada maniobra realizada por el dron.

En segundo lugar, la sustentación. El valor neto de sustentación generado por el dron se puede calcular de forma sencilla si se conocen las condiciones de vuelo y la geometría de este a través de la fórmula $L = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S_w \cdot CL(\alpha, \delta E, q)$. Sin embargo, esto solo proporciona un único valor y es de interés poder calcular la distribución de sustentación a lo largo de toda la envergadura alar. Para ello hay que saber que la sustentación, por lo general, presenta un valor nulo en la punta del ala y aumenta de forma creciente hacia el encastre con una distribución casi elíptica [4]. Se puede asumir que el encastre se encuentra en el eje x sin tener en cuenta el diámetro del fuselaje para simplificar el problema. De esta forma se puede decir que la distribución de presiones de cada sección alar se puede calcular como:

$$p_w(y) = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot c_w(y) \cdot c_L(y)$$

Y sabiendo que la sustentación en el ala es:

$$L_w = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p_w(y) dy = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_w(y) \cdot c_L(y) dy$$

Se puede hallar igualando las presiones dinámicas la siguiente relación entre presión y sustentación:

$$p_w(y) = \frac{c_w(y) \cdot c_L(y)}{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_w(y) \cdot c_L(y) dy} L_w \quad (29)$$

Como la cuerda del ala es constante, la distribución de $c_L(y)$ debe ser elíptica y se emplea la siguiente función para definirla:

$$c_L(y) = CL_{max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (30)$$

Sustituyendo la ecuación (30) en la (29) se obtiene una expresión para la distribución elíptica de presión.

$$p_w(y) = \frac{4 L_w}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (31)$$

En tercer lugar, la distribución de momentos distribuidos se puede hallar de forma análoga a la presión si se emplean las ecuaciones (32), (33), (34), (35) y (36).

$$m_w(y) = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot c_w^2(y) \cdot c_M(y) \quad (32)$$

$$M_w = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} m_w(y) dy = \frac{1}{2} \rho V^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_w^2(y) \cdot c_M(y) dy \quad (33)$$

$$m_w(y) = \frac{c_w^2(y) \cdot c_M(y)}{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c_w^2(y) \cdot c_M(y) dy} L_w \quad (34)$$

$$c_M(y) = CM_{max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (35)$$

$$m_w(y) = \frac{4 M_w}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (36)$$

Por último, hay que conocer la distribución de pesos tanto del ala como de los estabilizadores y el fuselaje. En cada apartado se calculará específicamente dicha distribución ya que se van a tener que dividir los elementos y quedará mejor ejemplificado.

Cálculo de esfuerzos sobre el ala

Para analizar las reacciones de cada elemento específico se va a emplear una variable local X cuyo eje está alineado con el centro de esfuerzos cortantes (cec) de cada elemento. En el caso de cada semiala, en la Figura 17 se representa la distribución de presiones y de peso, así como la coordenada local X .

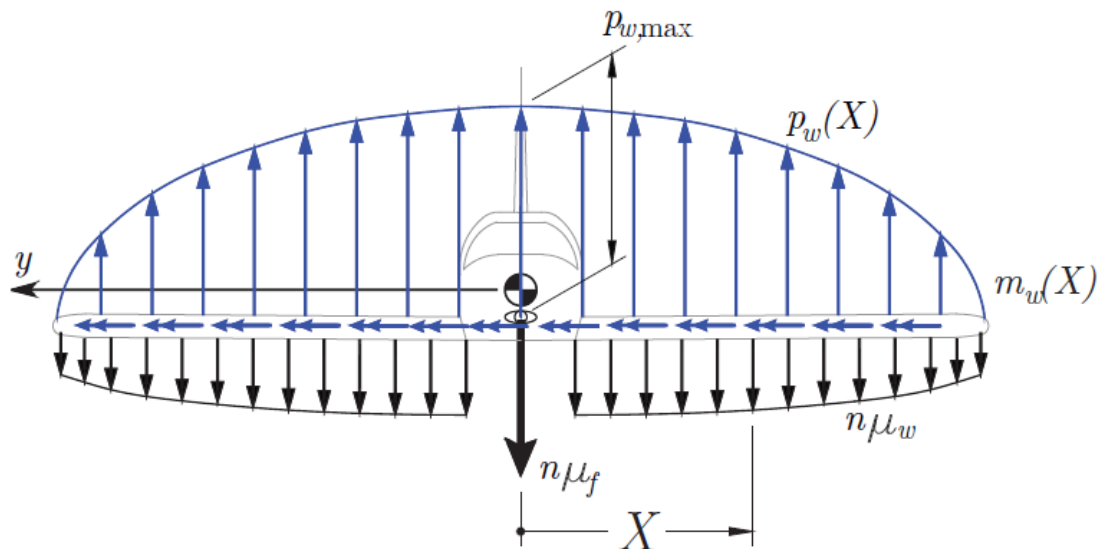


Figura 17. Distribución de presiones y peso sobre el ala y coordenada local X [4].

Como una primera aproximación, el comportamiento del ala se puede aproximar al de una viga empotrada, pudiéndose calcular los esfuerzos estructurales como muestra el diagrama de la Figura 18, teniendo en cuenta que el eje Z es positivo hacia arriba y el Y forma el triedro con los otros.

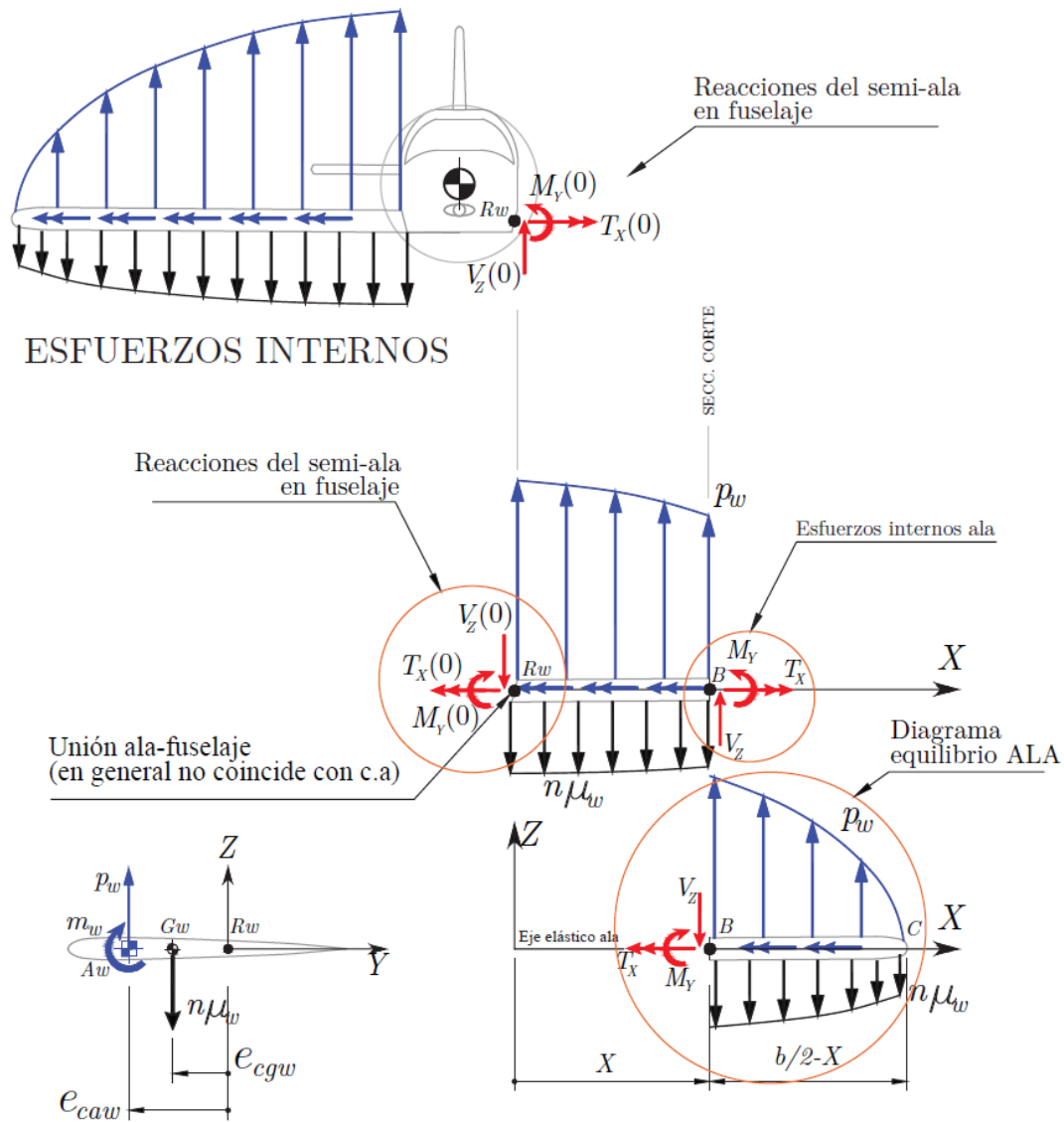


Figura 18. Diagrama de esfuerzos cortantes, flectores y torsores en el ala [4].

Ahora hay que realizar el equilibrio de fuerzas y momentos para hallar las reacciones y los esfuerzos. Nótese que la Figura 18 es una representación genérica de un avión, en el caso del Stingray se deben considerar más fuerzas y momentos. El peso de los motores que se encuentran en el ala como se muestra en la Figura 19 (figura recuperada para una mejor visualización del problema a tratar), se va a tratar como fuerza puntual y se genera un nuevo momento torsor en la piel del ala debido al momento aerodinámico que genera la cola y su conexión directa.

$$0 = V_Z(X) + n \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} \mu_w(x) dx - \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} p_w(x) dx + n W_m \quad (37)$$

$$0 = M_Y(X) + n \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} (x - X) \mu_w(x) dx - \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} (x - X) p_w(x) dx + n W_m d_m \quad (38)$$

$$0 = T_x(X) - n \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} \mu_w(x) e_{cgw} dx + \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} p_w(x) e_{caw} dx + \int_{x=X}^{\frac{b}{2}} m_w(x) dx + -n W_{motor} e_m + \frac{L_t}{2} e_t \quad (39)$$

Donde x es una variable de integración entre la sección estudiada X y la punta alar de la semiala correspondiente, d_m es la distancia entre la sección donde se encuentra el motor y el origen de coordenadas (en la Figura 20 se muestra que dicha distancia es de 534 mm) y e_t es la distancia entre el CA del estabilizador horizontal y el cec del ala.

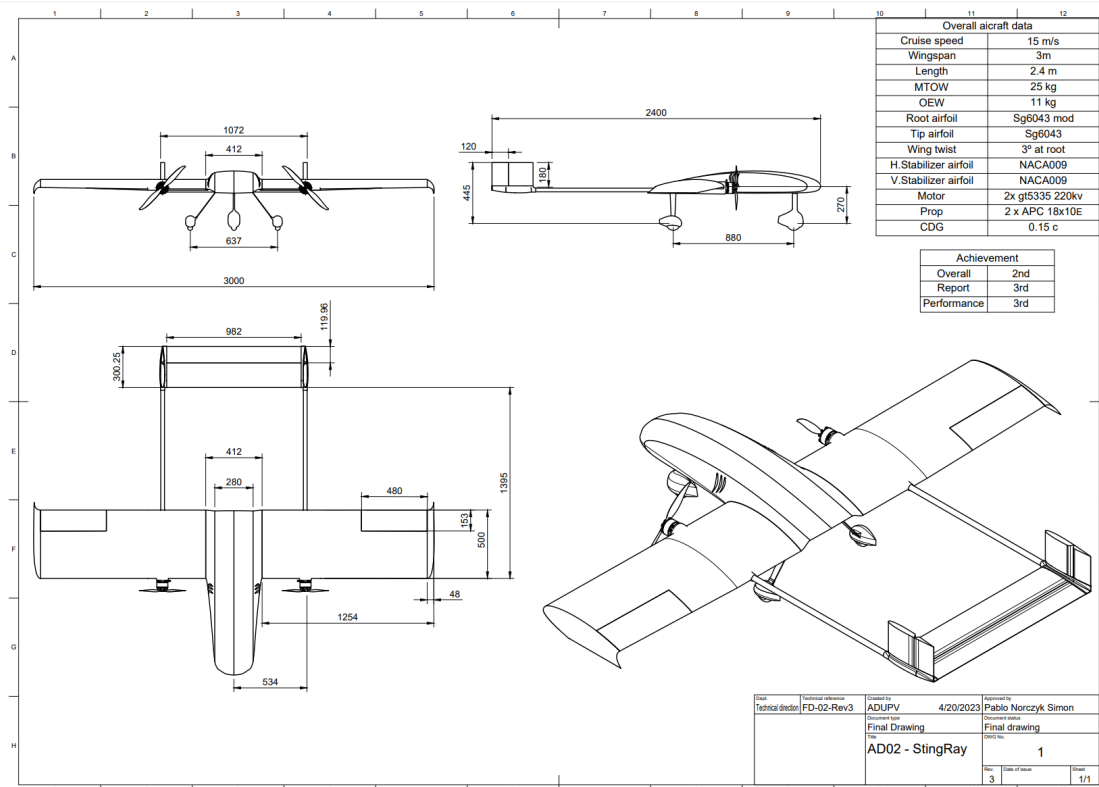


Figura 19. Planos del Stingray.

Se puede empezar calculando las reacciones en el encastre, es decir, en la unión entre el ala y el fuselaje. Si se realiza un equilibrio de fuerzas verticales se puede hallar el cortante V_z . La fuerza total aerodinámica sobre el ala será igual a la integral de la presión a lo largo de una semiala y por tanto será la mitad de la sustentación L_w ; el peso será la mitad del peso total de las alas y lo mismo sucede con el momento aerodinámico, y la reacción V_z será la suma de las fuerzas verticales del peso y la sustentación correspondientes a una semiala con los signos correspondientes de cada fuerza según el sistema de referencia empleado. Para el momento torsor se ha de multiplicar cada una de las fuerzas verticales por las distancias que existen entre el punto de aplicación de estas y el cec del ala, en el caso de la sustentación esta se aplica sobre el centro aerodinámico y e_{caw} es la distancia entre el cec y el centro aerodinámico; y en el caso del peso este está aplicado sobre el centro de masas del ala, e_{cgw} es la distancia entre el cec y el centro de masas del ala y e_m es la distancia entre el cec y la posición del motor; además, se ha de tener en cuenta el momento aerodinámico que genera la semiala y el momento generado por el empenaje trasero.

$$V_z(0) = -n \frac{W_w}{2} + \frac{L_w}{2} - n W_m \quad (40)$$

$$T_X(0) = n \frac{W_w}{2} e_{cgw} - \frac{L_w}{2} e_{caw} - \frac{M_w}{2} - \frac{L_t}{2} e_t + n W_m e_m \quad (41)$$

Para el momento flector M_Y no es tan obvio hallar la distancia entre el punto de aplicación de las fuerzas y el punto de rotación del momento. Se puede hallar el centroide de cada distribución y calcular cada distancia, o se puede aplicar directamente la ecuación (38) sustituyendo $X = 0$.

$$M_Y(0) = \int_0^{\frac{b}{2}} x p_w(x) dx - n \int_0^{\frac{b}{2}} x \mu_w(x) dx - n W_m d_m \quad (42)$$

Una vez analizada el ala de forma general ahora se va a analizar específicamente su estructura. El ala se va a dividir en 3 secciones distintas debido a su estructura interna, la primera sección va desde el encastre hasta el motor, esta sección es una sección que solo cuenta con la piel, que absorbe los esfuerzos torsores, y un larguero que absorbe los esfuerzos flectores; además, se puede considerar que es una sección de pared delgada. La segunda sección va desde el motor hasta el inicio del flap y es una sección que cuenta con la piel como recubrimiento externo y el interior está relleno de espuma de poliestireno expandido. Por último, la tercera sección va desde el inicio del flap hasta la punta alar, esta sección tiene un recubrimiento exterior y está rellena de espuma de poliestireno expandido, sin embargo, esta sección cuenta con una parte móvil, el flap. Estas secciones quedan representadas en la Figura 20.

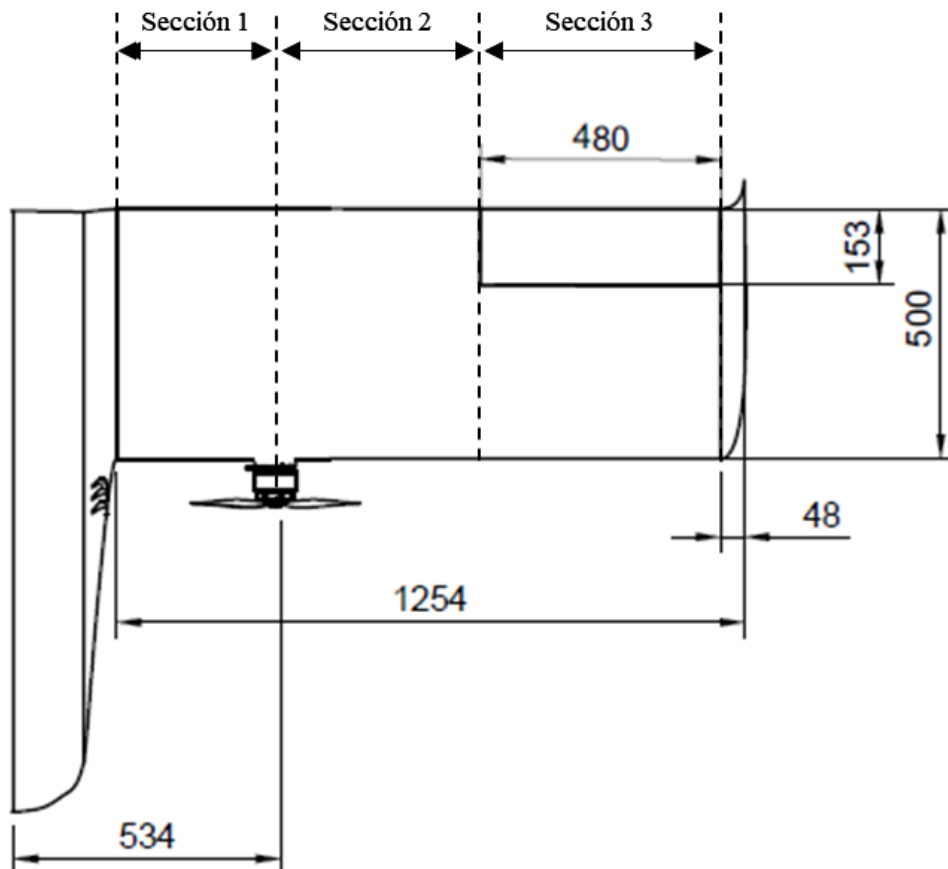


Figura 20. Diferentes secciones alares para estudiar.

- *Sección 1*

La sección 1 es una sección de pared delgada con forma de perfil aerodinámico no simétrico. Para estudiar esta sección se han definido una serie de funciones que permiten representar y analizar este perfil aerodinámico. El borde de ataque se ha representado como una elipse, el intradós como una recta horizontal y el extradós como una recta oblicua.

$$\frac{y}{0.05} + \frac{z_{elipse}}{0.025} = 1 \quad (43)$$

$$z_{hor} = 0.025 \quad (44)$$

$$z_{obl} = -0.111 \cdot y - 0.025 \quad (45)$$

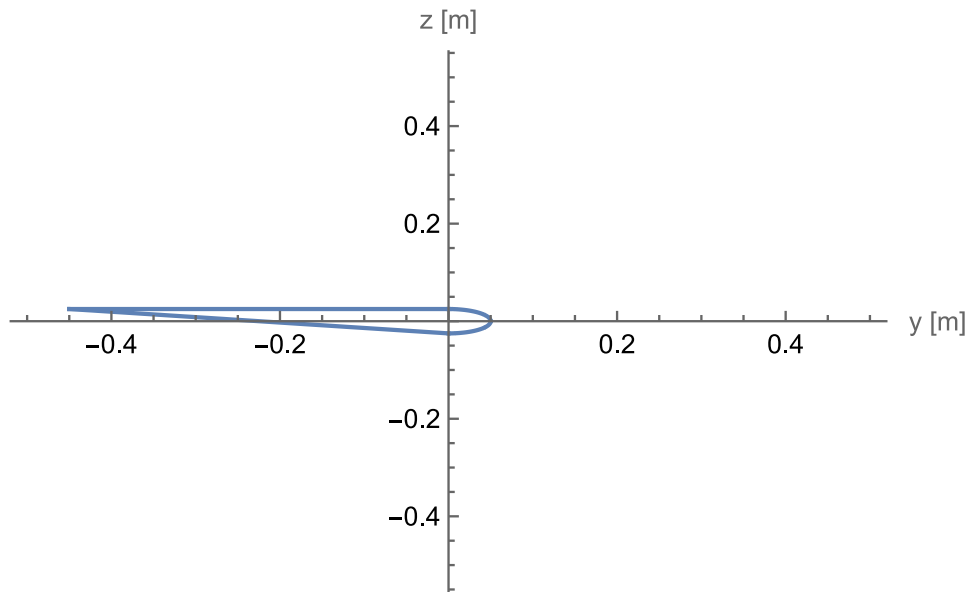


Figura 21. Representación de las funciones empleadas para redefinir el perfil alar.

Nótese que en la Figura 21 muestra el perfil invertido debido al sistema de referencia empleado para el análisis estructural.

Las secciones más críticas de esta parte del ala son, lógicamente, las uniones con otras secciones, es decir, la unión ala-fuselaje y la sección de unión entre la Sección 1 y la Sección 2. En estas secciones la semiala está sometida a los siguientes esfuerzos: fuerza de sustentación hasta esa sección, resistencia aerodinámica, peso del motor, momento aerodinámico del ala y momento generado por la cola. Todos estos esfuerzos se pueden analizar como un cortante vertical Q_z y un cortante horizontal Q_y aplicados en el cec y un momento torsor que será la suma de los momentos previamente mencionados y el efecto de los cortantes al haber sido desplazados de su punto de aplicación.

Para hallar las tensiones primero se debe conocer la posición del cec, para ello se va a resolver la sección ante un cortante vertical y un cortante horizontal ambos aplicados en el cec.

En primer lugar, se calculan los flujos de cortante que producen estas fuerzas. Al tratarse de una sección cerrada, primero se va a cortar la sección en un punto y se va a comenzar a analizar el cortante por ahí asumiendo que se trata de un borde libre y el flujo es nulo. Para ello se definen unas coordenadas locales independientes para cada una de las barras, como se muestra en la Figura 22.

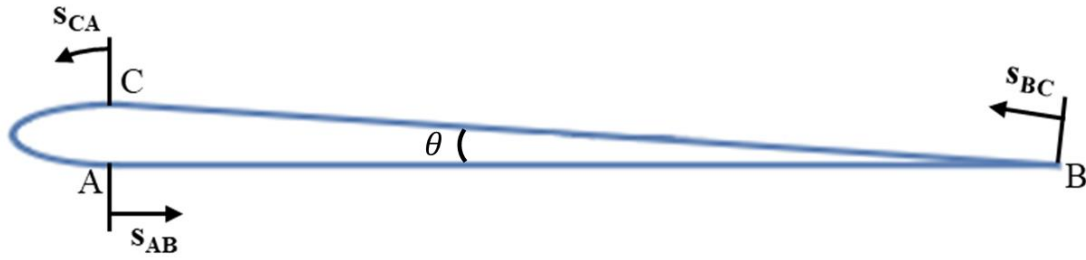


Figura 22. Coordenadas locales para cada una de las barras de la sección de pared delgada.

Una vez se tiene esto se pueden calcular los flujos de cortante a lo largo de la sección según la siguiente fórmula [5]:

$$q = q_0 + \frac{1}{I_d} [-(Q_z I_z - Q_y I_{yz}) \cdot m_y(s) + (-Q_y I_y + Q_z I_{yz}) \cdot m_z(s)] \quad (46)$$

Una vez se obtienen los momentos de inercia y los momentos estáticos de cada barra (desarrollado en el Anexo 1), se pueden calcular los flujos de cortante de la sección, teniendo en cuenta que q_0 representa el valor del flujo al inicio de la barra, que en borde libre será nulo, pero en los demás casos será igual al valor final de la barra anterior.

Debido a la complejidad de las expresiones se ha creído conveniente representar gráficamente la evolución de los flujos de cortante en lugar de su expresión analítica. En la Figura 23, Figura 24 y Figura 25 se muestra la evolución del flujo a lo largo de la sección. Se puede observar que tanto para el inicio de la sección como al final (inicio de la Figura 23 y final de la Figura 25) el flujo de cortante es nulo, ya que se ha considerado que era borde libre y el flujo al final de cada barra coincide con el valor del inicio de la siguiente. Matemáticamente se puede representar de la siguiente forma.

$$q_1(0) = q_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad q_1(L_1) - q_2(0) = 0 \quad q_2(L_2) - q_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Flujo de cortante sobre la barra horizontal

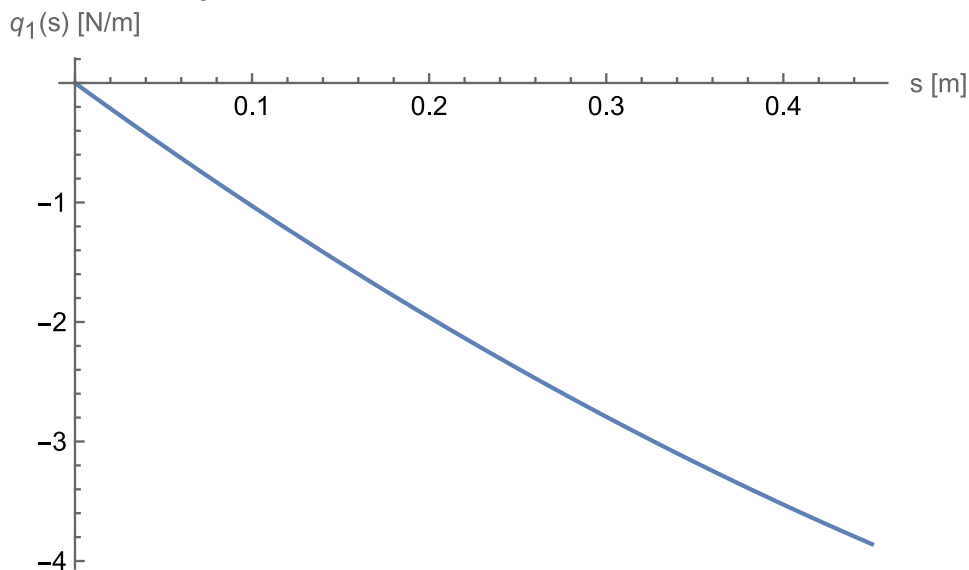


Figura 23. Flujo de cortante evaluado para la barra horizontal y cortantes unitarios.

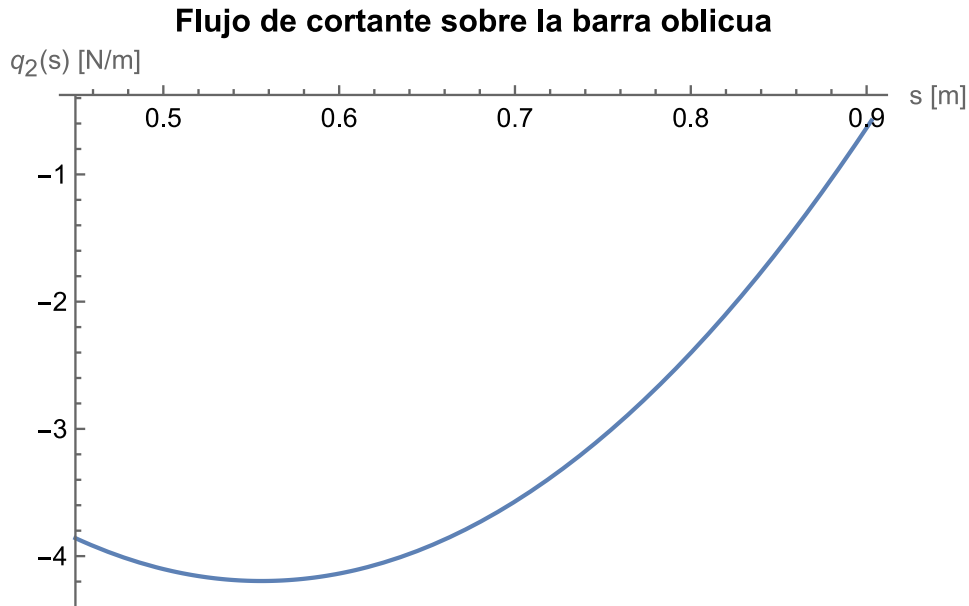


Figura 24. Flujo de cortante evaluado para la barra oblicua y cortantes unitarios.

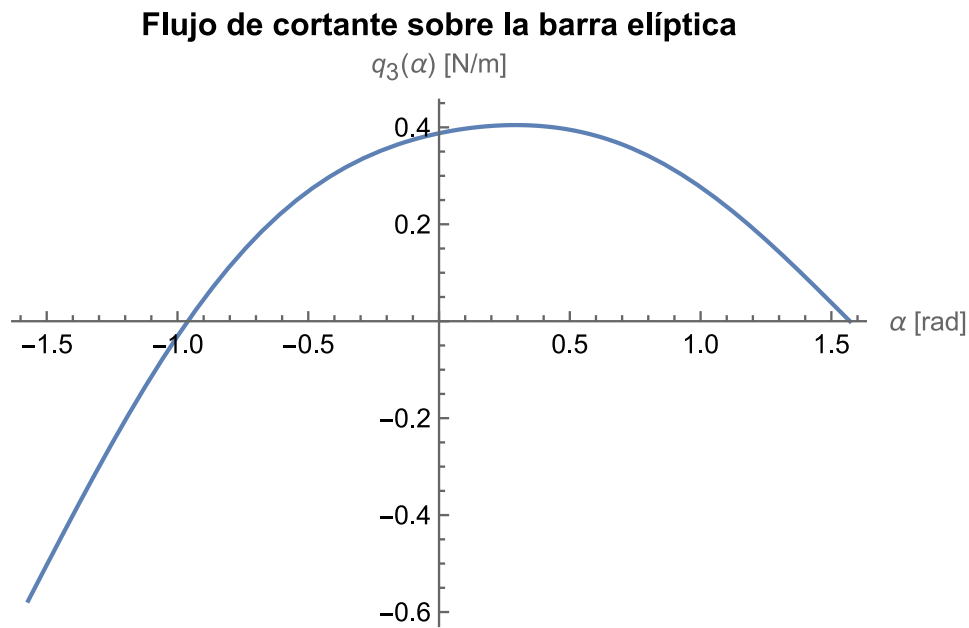


Figura 25. Flujo de cortante evaluado para la barra elíptica y cortantes unitarios.

Ahora, se necesita calcular el valor de q_0 de la sección entera mencionado previamente al no tratarse de una sección abierta. Para ello hay que obtener las fuerzas generadas sobre cada barra por los cortantes y el giro por unidad de longitud por torsión θ_x .

$$F_{eq} = \int_C q(s) ds \quad (47)$$

$$F_1 = \int_0^{L_1} q_1(s) ds = -0.0316 Q_y - 0.9111 Q_z$$

$$F_2 = \int_0^{L_2} q_2(s) ds = 0.0842 Q_y - 1.5535 Q_z$$

$$F_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q_3(\alpha) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} d\alpha = 0.2402 Q_y + 0.2884 Q_z$$

El giro θ_x se puede calcular según la ecuación (48), donde el subíndice i representa cada barra y \hat{A} es el área encerrada en la sección [5].

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2 \hat{A} G} \sum \left(\frac{F_i + q_0 l_i}{t_i} \right) \\ \theta_x &= \frac{1}{2 \hat{A} G} \left(\frac{F_1 + F_2 + F_3 + q_0 \cdot (L_1 + L_2 + L_3)}{t} \right) \\ \hat{A} &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot 0.05 = 0.0145 \text{ m}^2 \\ \theta_x &= \frac{34.560(1.024 q_0 - 0.196 Q_y - 1.166 Q_z)}{G t} \end{aligned} \quad (48)$$

De esta forma, como la torsión producida debe ser nula se puede obtener el valor de q_0

$$\begin{aligned} \theta_x = 0 &= 1.024 q_0 - 0.196 Q_y - 1.166 Q_z \\ q_0 &= 0.191 Q_y + 1.139 Q_z \end{aligned}$$

Una vez conocidos todos los esfuerzos que actúan sobre la sección, para hallar el cec se realiza una igualación de momentos tomados desde el origen de coordenadas.

$$\begin{aligned} \sum M_o &= 0 \\ -Q_y e_{cy} - Q_z e_{cz} &= M_{F_1} + M_{F_2} + M_{F_3} + M_{q_0} \end{aligned} \quad (49)$$

Si se calculan los momentos (Anexo 1) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_{F_1} &= -0.0008 Q_y - 0.0228 Q_z \\ M_{F_2} &= 0.0021 Q_y - 0.0386 Q_z \\ M_{F_3} &= 0.0174 Q_y + 0.0378 Q_z \end{aligned}$$

Si se sustituye entonces en la ecuación (49) y se simplifica se llega a la siguiente expresión:

$$(0.02439 + e_{cy})Q_y + (0.00267 + e_{cz})Q_z = 0$$

Que se debe cumplir para todo valor de cortante horizontal y vertical por lo que obtenemos que el centro de esfuerzos cortantes se encuentra a una distancia vertical de $e_{cy} = -24.39$ mm y una distancia horizontal de $e_{cz} = -2.67$ mm respecto al centro de masas de la sección. Al tratarse de órdenes de magnitud muy reducidos, para simplificar ligeramente el problema, se puede asumir que el cec y el centro de masas son coincidentes. En la Figura 26 se representa gráficamente la posición del dentro de masas (CdG) respecto al perfil alar.

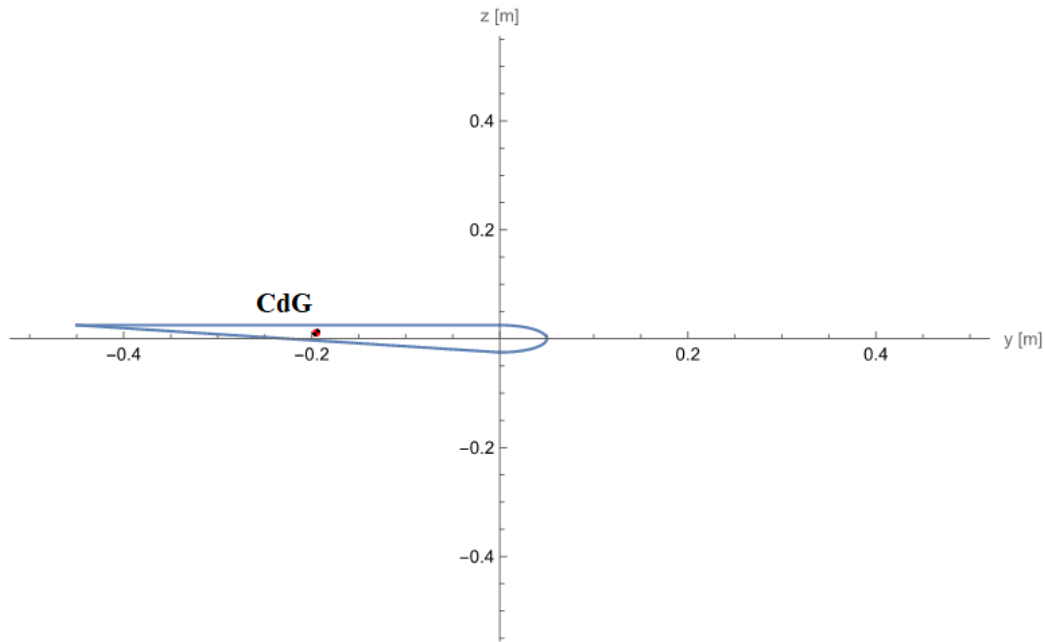


Figura 26. Centro de masas de la sección de perfil alar de pared delgada.

Ahora, se pueden obtener las distancias hasta el cec necesarias para calcular los momentos torsores.

$$e_{cgw} = 0 \text{ m} \quad e_{caw} = 0.123 \text{ m} \quad e_m = 0.248 \text{ m} \quad e_t = 1.427 \text{ m}$$

Ahora hay que analizar las tensiones en las secciones de importancia, es decir, el encastre alar y la sección de unión entre la Sección 1 y la Sección 2 de la semiala. La sección del encastre alar se ha analizado previamente, aplicando las ecuaciones (40), (41) y (42) se obtienen los esfuerzos que tiene que soportar la sección.

$$V_Z(0) = -n \frac{W_w}{2} + \frac{L_w}{2} - n W_m$$

$$T_X(0) = n \frac{W_w}{2} e_{cgw} - \frac{L_w}{2} e_{caw} - \frac{M_w}{2} - \frac{L_t}{2} e_t + n W_m e_m$$

$$M_Y(0) = \int_0^{\frac{b}{2}} x p_w(x) dx - n \int_0^{\frac{b}{2}} x \mu_w(x) dx - n W_m d_m$$

Para esta sección, la distribución de peso μ_w se considera constante y para hallar su valor se necesita saber el material del que está compuesta la sección. Se trata de una sección de fibra de carbono, cuya densidad es $\rho_{FC} = 1750 \text{ kg/m}^3$ y si el área de la sección es la longitud de cada barra por su espesor $A_T = (L_1 + L_2 + L_3)t$ y el espesor es $t = 1 \text{ mm}$ se puede hallar la distribución de peso de la sección como $\mu_w = \rho_{FC} \cdot A_T = 1.792 \text{ N/m}$. Sin embargo, como hay tres secciones distintas en la semiala, que tienen distribuciones de peso distintas, hay que seccionar las integrales en tres partes distintas. De esta forma queda que el momento que genera el peso del ala para las Secciones 2 y 3 es el peso total de cada sección por la distancia entre su centro de masas y el eje Y de referencia, y para la sección 1 se analiza mediante la integral propuesta de su distribución de peso.

$$M_Y(0) = \int_0^{\frac{b}{2}} x p_w(x) dx - n \int_0^{d_{m1}} x \mu_{w1}(x) dx - n(W_{w2} d_{m2} + W_{w3} d_{m3} + W_m \cdot d_m)$$

Donde d_{m1} es la distancia hasta el final de la primera sección, d_{m2} es la distancia entre el CdG de la Sección 2 y el eje Y , d_{m3} es la distancia entre el CdG de la Sección 3 y el eje Y , μ_{w1} es la distribución de pesos de la Sección 1 y W_{w2} y W_{w3} son los pesos de las secciones 2 y 3 respectivamente.

El peso de las Secciones 2 y 3 se puede calcular de la misma forma. Para calcular los pesos se debe conocer la densidad del recubrimiento externo, que es de fibra de carbono (ya conocida) y la densidad del material interno, que es poliestireno extruido $\rho_P = 25 \text{ kg/m}^3$. Por lo que el peso de las Secciones 2 y 3 es:

$$W_{w2} = (\rho_{FC} \cdot A_{ext} + \rho_P \cdot A_{int}) \cdot 0.398 = 8.41 \text{ N}$$

$$W_{w3} = (\rho_{FC} \cdot A_{ext} + \rho_P \cdot A_{int}) \cdot 480 = 10.14 \text{ N}$$

El peso del ala es $W_w = 42.86 \text{ N}$, el peso del motor es $W_m = 7.06 \text{ N}$ y las sustentaciones del ala y la cola son $L_w = 196.58 \text{ N}$ y $L_t = 36.34 \text{ N}$. Con esto se obtienen las siguientes reacciones, las cuales dependen del factor de carga de la aeronave:

$$V_Z(0) = 98.289 - 9.680 n$$

$$T_X(0) = -37.994 + 1.750 n$$

$$M_Y(0) = 60.904 - 22.074 n$$

Cabe destacar que el momento torsor no depende del factor de carga, ya que al asumir que el cec y el CdG son coincidentes las fuerzas másicas no generan ningún momento.

El factor de carga más limitante se da en condiciones de viraje coordinado, éste toma un valor de $n = 1.414$ para el que las reacciones en el encastre son:

$$V_Z(0) = 84.602 \text{ N}$$

$$T_X(0) = -35.520 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_Y(0) = 29.692 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Las tensiones que ha de soportar la estructura se pueden obtener a partir del flujo de cortante calculado. Las tensiones totales serán la suma de las que generan los cortantes aplicadas sobre el cec más las que generan los momentos torsores debidos a la aerodinámica y al desplazamiento realizado de las fuerzas verticales de su posición original al cec.

$$\tau = \frac{q(s)}{t} \quad (50)$$

El flujo de cortante que generan los cortantes se puede calcular según la ecuación (46), como se ha hecho previamente, y el flujo de cortante debido a la torsión se puede calcular según la ecuación (51).

$$q_T = \frac{T}{2 \hat{A}} \quad (51)$$

Siendo \hat{A} el área encerrada dentro de la sección. Evaluando todo obtenemos la siguiente tensión tangencial.

$$\tau = \frac{q(s)}{t} + \frac{T}{2 \hat{A} t}$$

Si evaluamos dicha expresión para un cortante vertical $Q_z = V_z(0)$ y un momento torsor $T = T_x(0)$ obtenemos una distribución de tensiones tangenciales que alcanza el máximo para la barra oblicua con un valor de $\tau_{max} = -1.6$ MPa, como se muestra en la Figura 27.

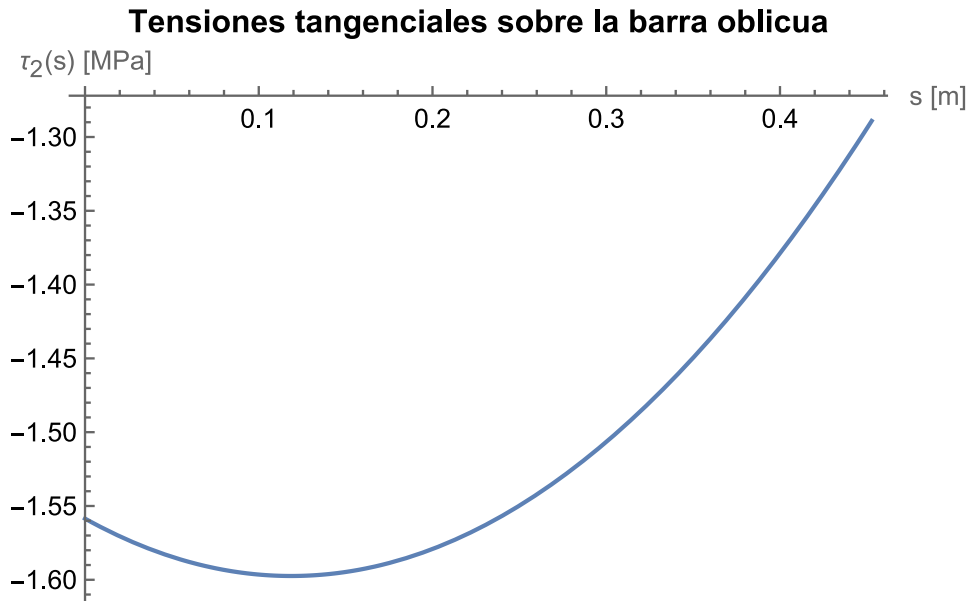


Figura 27. Tensión tangencial sobre la barra oblicua para la sección del encastre.

Ahora falta por calcular los esfuerzos que genera el momento flector M_Y . Esta sollicitación estructural la soporta completamente un larguero que atraviesa la aeronave de fibra de carbono. El momento flector produce tensiones normales según la Ley de Navier (ecuación (52)).

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y}{I_d} \quad (52)$$

El larguero es un tubo cilíndrico de fibra de carbono, de 4 cm de diámetro y de un espesor de 3 mm. Una sección circular tiene los siguientes momentos de inercia $I_z = I_y = \pi r^3 t$, $I_{yz} = 0$ [5] y como solo hay momento M_y la ecuación de Navier se simplifica en:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

La línea neutra se encuentra en $z = 0$ y las tensiones máximas se encuentran en $z = \pm r$

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_y(0)}{\pi r^3 t} \cdot r = \frac{M_y(0)}{\pi r^2 t} = 7.876 \text{ MPa}$$

Ahora queda por analizar la sección que une la Sección 1 con la Sección 2, que se encuentra a una distancia $X = d_{m1}$ del origen de coordenadas. En dicha sección las reacciones serán:

$$V_z(d_{m1}) = \int_{d_{m1}}^{\frac{b}{2}} p_w(x) dx - n(W_{w2} + W_{w3} + W_m)$$

$$T_x(d_{m1}) = n(W_{w2} + W_{w3}) e_{cgw} - \int_{d_{m1}}^{\frac{b}{2}} p_w(x) e_{caw} dx - \frac{L_t}{2} e_t - n W_m e_m$$

$$M_y(d_{m1}) = \int_{d_{m1}}^{\frac{b}{2}} x p_w(x) dx - n(W_{w2} d_{m2} + W_{w3} d_{m3} + W_m \cdot d_m)$$

Realizando las operaciones para un viraje coordinado se obtienen los siguientes valores para las reacciones:

$$\begin{aligned} V_Z(d_{m1}) &= 17.345 \text{ N} \\ T_X(d_{m1}) &= -30.032 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_Y(d_{m1}) &= 18.250 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Realizando el mismo proceso que para la sección del encastre, se obtiene el valor de la tensión máxima para la barra elíptica con un valor de $\tau_{max} = -1.12 \text{ MPa}$, como se observa en la Figura 28.

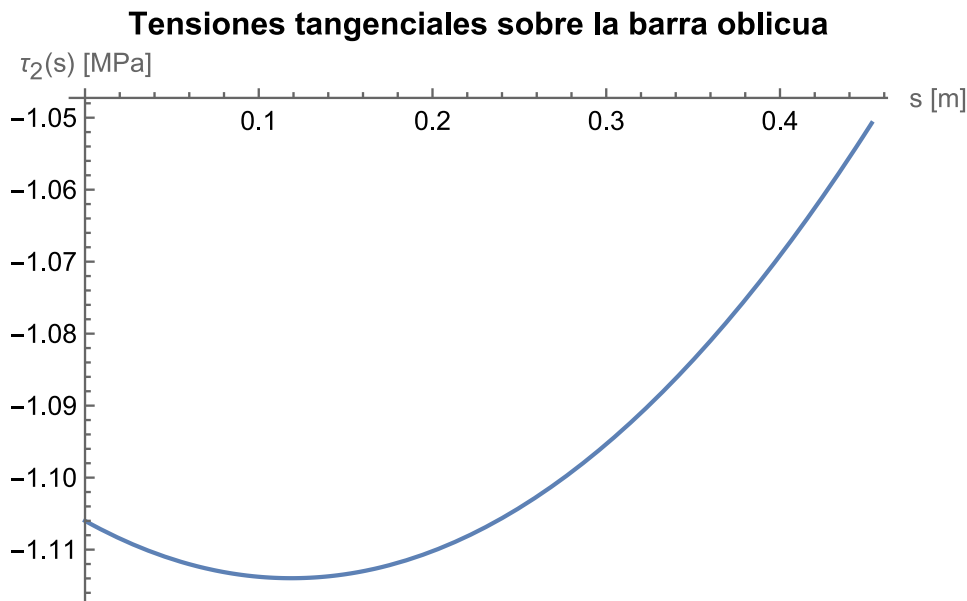


Figura 28. Tensión tangencial sobre la barra oblicua para la sección d_{m1} .

El momento flector también lo soporta un larguero cilíndrico, por lo que las tensiones que éste soporta son:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_y(d_{m1})}{\pi r^2 t} = 4.841 \text{ MPa}$$

La piel está hecha de fibra de carbono, cuya tensión máxima es de 2.7 GPa. Si se compara dicha tensión máxima con los valores máximos obtenidos por los esfuerzos sobre el ala se observa que estos últimos son varios órdenes de magnitud inferiores, lo que proporciona un muy elevado factor de seguridad, es decir, la estructura es completamente capaz de aguantar dichos esfuerzos

- *Secciones 2 y 3*

Las Secciones 2 y 3 son estructuralmente distintas en un principio. La Sección 2 es idéntica a la Sección 1 pero lleva un refuerzo interior de poliestireno expandido y en vez de tratarse de una sección de pared delgada se trata de una sección maciza. Por otro lado, la Sección 3 también presenta un interior macizo de poliestireno expandido, pero la sección está cortada debido a la existencia del flap y no cuenta con un larguero de carbono. La Figura 29 muestra ambas secciones.

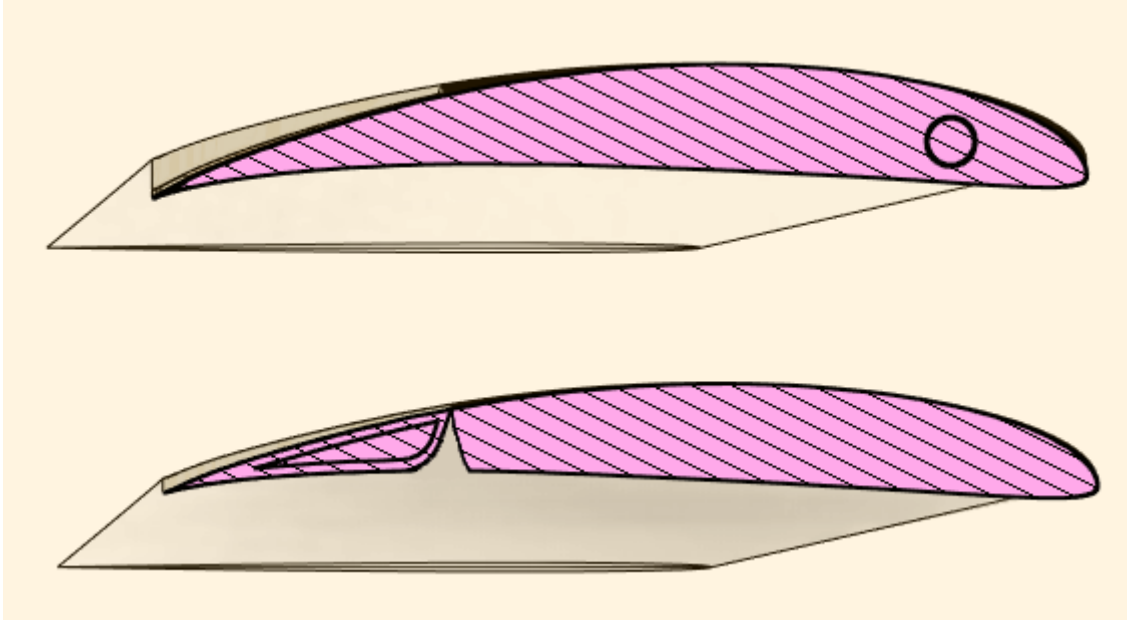


Figura 29. Corte de la Sección 2 (superior) y la Sección 3 (inferior).

La única sección crítica del ala que queda por analizar es la sección de unión entre la Sección 2 y la 3. Para ello se va a trabajar con la Sección 2 y se va a analizar la unión entre secciones desde ahí. Esta sección se va a tratar matemáticamente de la misma forma que la Sección 1, es decir, con una elipse que simule el borde de ataque del ala y dos rectas, una horizontal y otra oblicua, que simulen el resto del ala, sin embargo, se va a tratar como una sección maciza, por tanto, se deben conocer los nuevos momentos de inercia y centro de gravedad de la sección (desarrollados en el Anexo 2).

$$y_{CG} = -0.127 \text{ m}$$

$$z_{CG} = 0.007 \text{ m}$$

$$I_y = 2.173 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = 3.846 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{yz} = -6.079 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ahora se calculan las reacciones internas que ha de soportar la estructura en dicha sección.

$$V_z(d_{m2}) = \int_{d_{m2}}^{\frac{b}{2}} p_w(x) dx - n(W_{w3})$$

$$T_x(d_{m2}) = n(W_{w3}) e_{cgw} - \int_{d_{m2}}^{\frac{b}{2}} p_w(x) e_{caw} dx - \frac{L_t}{2} e_t$$

$$M_y(d_{m2}) = \int_{d_{m2}}^{\frac{b}{2}} x p_w(x) dx - n(W_{w3} d_{m3})$$

En esta sección por simplicidad se asume que el cec se encuentra en el mismo punto que el centro del larguero, por lo que hay que calcular las nuevas distancias e_{caw} , e_{cgw} y e_t .

$$e_{caw} = 0.051 \text{ m} \quad e_t = 1.601 \text{ m} \quad e_{cgw} = 0.102 \text{ m}$$

Por lo que las reacciones quedan para un viraje coordinado:

$$\begin{aligned} V_Z(d_{m1}) &= 23.871 \text{ N} \\ T_X(d_{m1}) &= -29.546 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_Y(d_{m1}) &= 22.592 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Una vez se conocen los esfuerzos internos que debe soportara las tensiones se pueden hallar fácilmente, aplicando la ecuación (52) se obtienen las tensiones normales.

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z)z - (M_y I_{yz})y}{I_d} = 1.197 \cdot 10^7 (1.373 \cdot 10^{-4} y + 8.688 \cdot 10^{-3} z)$$

Y se puede obtener una representación 3D de las tensiones sobre la sección, como se muestra en la Figura 30.

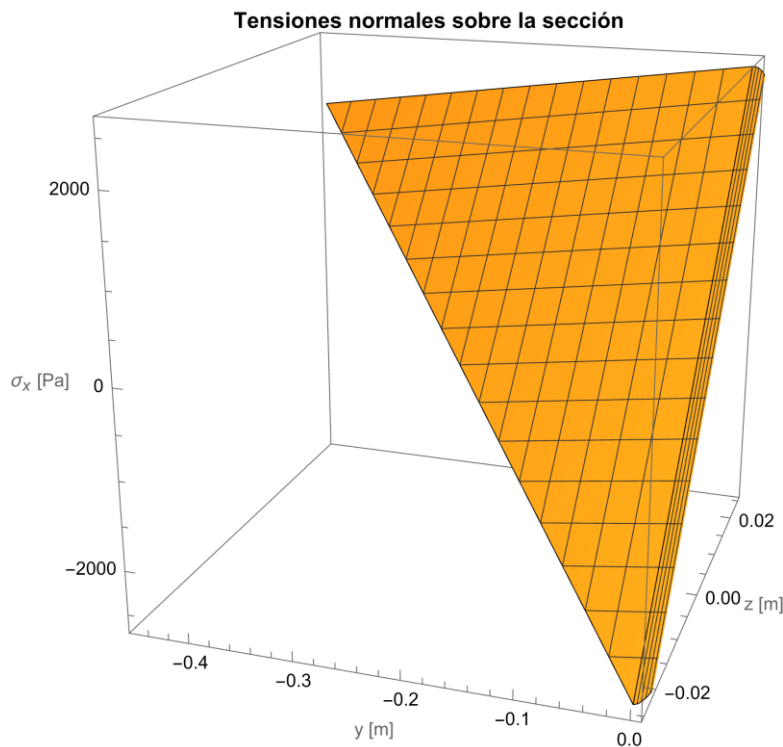


Figura 30. Tensiones normales debidas a M_y sobre la sección maciza.

Se aprecia que las tensiones máximas que se generan son del orden de $\sigma_x = \pm 2.6 \text{ kPa}$ para los máximos valores de z .

Por último, las tensiones tangenciales en secciones macizas debidas a cortante se pueden calcular según la ecuación (53) [5], sin embargo, como se ha observado que las tensiones son muy

pequeñas, se va a realizar un cálculo previo de la tensión media para comprobar si las tensiones son lo suficientemente elevadas como para realizar un desarrollo exhaustivo sobre estas.

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{1}{c(y)I_d} [(Q_z I_z - Q_y I_{yz})m_y(y) - (-Q_y I_y + Q_z I_{yz})m_z(y)] \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{c(z)I_d} [(Q_z I_z - Q_y I_{yz})m_y(z) - (-Q_y I_y + Q_z I_{yz})m_z(z)]\end{aligned}\quad (53)$$

La tensión tangencial media producida por un cortante se puede calcular como $\tau = Q/A$, donde A es el área efectiva que trabaja para soportar los esfuerzos tangenciales, es decir, el área reducida de cortante. Para este caso y como primera aproximación se va a suponer que el área reducida a cortante es el área de la elipse entera, en vez del área de la semielipse sumada a la del triángulo. Esto supone que el área reducida a cortante es un 27.15% del área total de la sección, un valor muy reducido pero que se aceptará ya que proporcionará un mayor factor de seguridad debido a la proporcionalidad inversa del área en la ecuación de la tensión (una menor área tenderá a aumentar las tensiones). Además, debido a que las tensiones no se distribuyen de forma uniforme, la tensión máxima de la sección siempre va a ser más elevada que la tensión media, para tener este efecto en cuenta, la tensión se va a multiplicar por un factor de corrección k que suele variar entre 2 y 3 y en el caso a estudiar va a tomar este último valor para estar del lado de la seguridad

$$\tau = \frac{Q_z}{A} k = \frac{V_z(d_{mz})}{\pi a b} k = 18.236 \text{ kPa}$$

Como se ha supuesto antes, las tensiones son extremadamente bajas con respecto a las tensiones máximas admisibles de los materiales empleados y no requiere de un análisis más exhaustivo para saber si la sección podría romper en algún punto de esta.

Por último, se van a evaluar los esfuerzos tangenciales que produce el momento torsor sobre la sección. Para la torsión, se va a suponer que el módulo de torsión que presenta la sección es el mismo que el de una elipse, ya que para el caso del cortante el área reducida era también la de una elipse. Con esto, los esfuerzos tangenciales que soporta la sección debido al momento torsor se pueden calcular como:

$$\tau = \frac{T_x}{J} r \quad J_{elipse} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = 1.964 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Otra opción que existe para tomar un valor del módulo de torsión en secciones macizas es aplicar la aproximación de Saint-Venant que da buenos resultados para la mayoría de las secciones. El factor κ se toma frecuentemente entre 35 y 40.

$$J = \frac{\hat{A}^4}{\kappa \cdot (I_y + I_z)}$$

Si se toma un valor intermedio de κ , por ejemplo, $\kappa = 37$ se obtiene:

$$J = 1.965 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Valor muy similar al obtenido por la aproximación a elipse previamente realizado.

Calculando ahora las tensiones tangenciales para los puntos más críticos $r = \pm a$ se obtienen los siguientes resultados:

$$\tau = \pm 0.752 \text{ MPa}$$

Como ocurre en la Sección 1, las tensiones que se generan sobre la sección son ridículas en comparación con las tensiones máximas admisibles para los materiales empleados.

Cálculo de esfuerzos sobre el estabilizador horizontal

El estabilizador horizontal se va a analizar como una viga biapoyada sometido a una distribución de presión elíptica p_t cuya resultante es $L_t = 36.341 N$, como se muestra en la Figura 31. Se emplea este modelo para estar del lado de la seguridad, ya que produce los flectores más desfavorables. Además, los largueros que unen el estabilizador con las alas presentan una rigidez a torsión baja y su giro relativo permite tomar la hipótesis de que el estabilizador está apoyado.

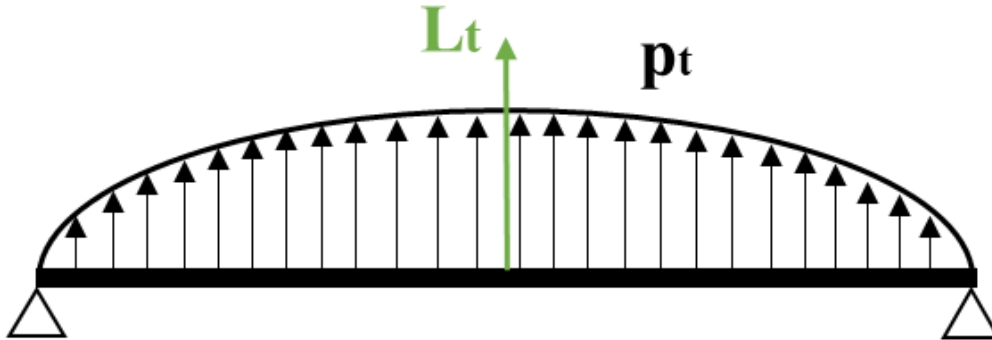


Figura 31. Distribución de presión y fuerza aerodinámica sobre el estabilizador horizontal.

Las reacciones en cada soporte serán $R = \frac{L_t}{2}$ y de sentido contrario a la sustentación.

La sección mas crítica del estabilizador horizontal es la central debido a que el momento flector es máximo. Como se trata de una sección maciza las secciones de los apoyos donde el cortante es máximo no son tan críticas como la central donde el flector es máximo.

El estabilizador horizontal presenta un perfil aerodinámico muy similar al ala, pero con una cuerda menor. Las ecuaciones empleadas para simular este perfil son las ecuaciones (54) y la sección del perfil está representada en la Figura 32.

$$\frac{y_{elipse}^2}{a^2} + \frac{z_{elipse}^2}{b^2} = 1 \quad a = 0.03 \quad b = 0.015$$

$$z_{oblicua} = -0.12 y - 0.015 \quad (54)$$

$$z_{horizontal} = 0.015$$

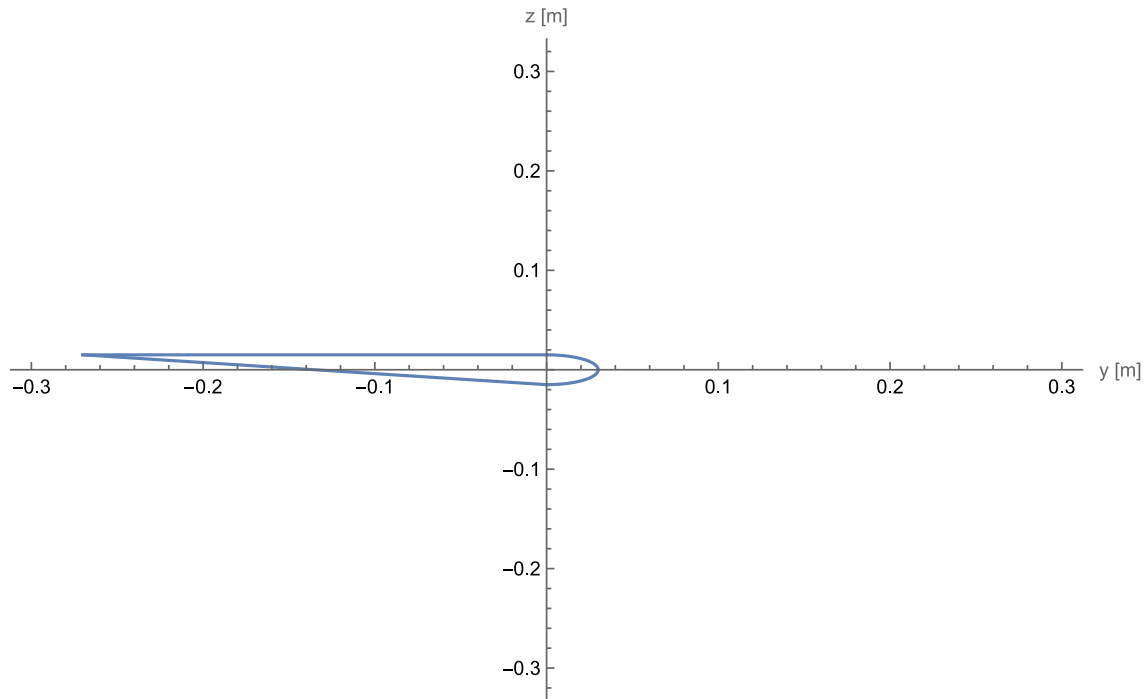


Figura 32. Sección aerodinámica del estabilizador horizontal.

Aplicando exactamente el mismo procedimiento del Anexo 2 para el cálculo del centro de gravedad y los momentos de inercia de la sección maciza del ala, pero cambiando los valores para la sección de la cola se obtiene:

$$y_{CG,t} = -0.083 \text{ m}$$

$$z_{CG,t} = -0.002 \text{ m}$$

$$I_{y,t} = 3.361 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{z,t} = 5.048 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{yz,t} = -2.764 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

El momento de reacción en la sección central se puede calcular tomando momentos desde la izquierda según la Figura 33. En ella se muestra la distribución de presión sobre medio estabilizador horizontal y la resultante de esta distribución en su punto de aplicación (centroide de un cuarto de elipse), también se muestra la reacción en el apoyo y el momento interno a calcular. A esto faltaría añadirle la influencia del peso del estabilizador W_t y el factor de carga de la aeronave.

$$W_t = 5.845 \text{ N}$$

$$M_y = \frac{L_t}{2} \cdot \left(\frac{4a}{3\pi}\right) - \frac{L_t}{2} \cdot \frac{b_t}{2} - \frac{W_t}{2} \cdot \frac{b_t}{4} \cdot n = -8.836 - 0.729 n$$

Para un viraje coordinado:

$$M_y = -9.867 \text{ N} \cdot \text{m}$$

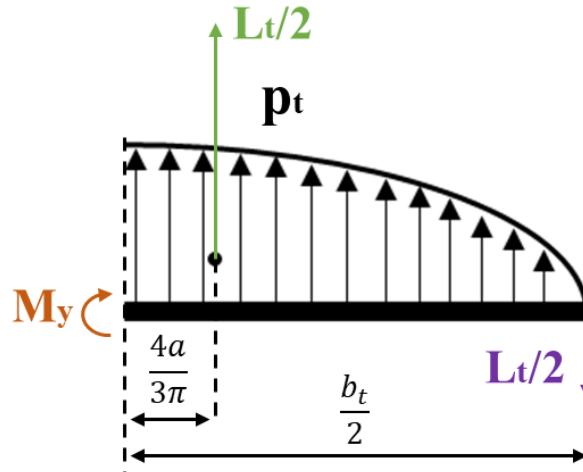


Figura 33. Esquema del momento de reacción interno al estabilizador horizontal.

Aplicando la ecuación (52), se puede obtener una expresión para las tensiones normales.

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z)z - (M_y I_{yz})y}{I_d} = 1.197 \cdot 10^7 (-5.998 \cdot 10^{-5} y - 3.795 \cdot 10^{-3} z)$$

Dicha expresión permite representar gráficamente las tensiones normales sobre la superficie de la sección, como se muestra en la Figura 34.

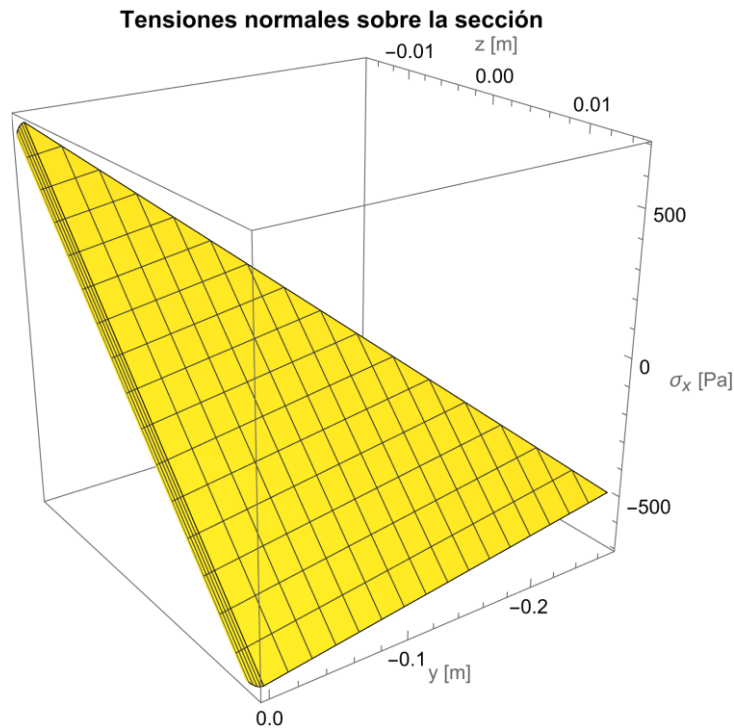


Figura 34. Tensiones normales sobre la sección central del estabilizador horizontal.

Se aprecia que las tensiones máximas que se generan son del orden de $\sigma_x = \pm 600$ Pa para los máximos valores de z .

De la misma forma que para el ala, las tensiones que se generan sobre la sección más crítica presentan valores muy bajos en comparación con las tensiones máximas admisibles de los materiales con los que se ha construido la estructura

Resumen de resultados

Como resumen se va a calcular el factor de seguridad para caso específico. El factor de seguridad se define como F y se puede calcular según la ecuación (55), donde σ es la tensión a la que está sometida el elemento estructural y σ_{ad} es la máxima tensión admisible de cada elemento según el material empleado. Para el Stingray, tanto las alas como el estabilizador horizontal están contruidos principalmente de fibra de carbono, por ello se va a utilizar $\sigma_{ad} = 2.7$ GPa.

$$F = \frac{\sigma_{ad}}{|\sigma|} \quad (55)$$

Factor de seguridad

	Encastre alar	Unión Sección 1 y 2	Unión Sección 2 y 3	Estabilizador horizontal
Despegue	296	444	3658	$4.03 \cdot 10^6$
Ascenso	261	370	3639	$4.09 \cdot 10^6$
Giro helicoidal	267	384	3643	$4.07 \cdot 10^6$
Viraje coordinado	343	558	3678	$3.97 \cdot 10^6$
Descenso	261	370	3639	$4.09 \cdot 10^6$

Objetivos de desarrollo sostenible

Los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) son una serie de metas globales establecidas por las Naciones Unidas para abordar los desafíos a los que se enfrenta nuestro planeta y la humanidad. Adoptados en septiembre de 2015, los ODS representan un llamado universal a la acción para poner fin a la pobreza, proteger el medio ambiente y garantizar que todas las personas gocen de paz y prosperidad para el año 2030.

La importancia de los ODS radica en que busca equilibrar aspectos económicos, sociales y ambientales del desarrollo humano. Estas metas ofrecen una visión compartida y ambiciosa para un futuro más justo, inclusivo y sostenible, donde ninguna persona o región quede rezagada.

La misión principal de la aeronave Stingray es la de un avión de prevención y detección temprana de incendios. Un avión de prevención de incendios es una herramienta valiosa y efectiva para combatir incendios forestales y proteger comunidades y ecosistemas. Equipados con sistemas de dispersión de agua o retardantes de fuego, estos aviones pueden llegar rápidamente a áreas remotas y de difícil acceso, lo que les permite atacar incendios en etapas tempranas y evitar que se propaguen descontroladamente. Su capacidad para soltar grandes cantidades de agua o retardante sobre el fuego ayuda a enfriar las llamas y crear barreras que limitan la expansión del incendio, brindando tiempo crucial para que los equipos terrestres puedan combatir el fuego desde tierra de manera más segura y efectiva.

Al tratar de optimizar esta aeronave, de forma pasiva se está ayudando a mejorar las nuevas tecnologías que podrían permitir una mayor y mejor protección del medio ambiente.

Los ODS con los que este trabajo se alinea específicamente se pueden comprobar a continuación.

Objetivos de desarrollo sostenibles	Alto	Medio	Bajo	No procede
ODS 1. Fin de la pobreza.			X	
ODS 2. Hambre cero.			X	
ODS 3. Salud y bienestar.		X		
ODS 4. Educación de calidad.			X	
ODS 5. Igualdad de género.			X	
ODS 6. Agua limpia y saneamiento.		X		
ODS 7. Energía asequible y no contaminante.		X		
ODS 8. Trabajo decente y crecimiento económico.			X	
ODS 9. Industria innovación e infraestructuras.		X		
ODS 10. Reducción de las desigualdades.			X	
ODS 11. Ciudades y comunidades sostenibles.	X			
ODS 12. Producción y consumo responsables.			X	

ODS 13. Acción por el clima.	X			
ODS 14. Vida submarina.			X	
ODS 15. Vida de ecosistemas terrestres.	X			
ODS 16. Paz, justicia e instituciones sólidas.			X	
ODS 17. Alianzas para lograr objetivos.			X	

Presupuesto

Para finalizar se calcula el presupuesto asociado a un proyecto de ingeniería como el realizado.

Los diversos costes se pueden desglosar en varias categorías diferentes.

En primer lugar, los costes asociados a las horas de trabajo realizado por un ingeniero recién egresado (el alumno) y por dos ingenieros senior (el tutor y cotutor del trabajo). El sueldo de un ingeniero recién egresado es de aproximadamente 22000 €/año, o 11.46€/h; mientras que el de un ingeniero senior es de 80000€/año, o 41.67 €/hora. Además, se estima que el tiempo de los tutores de este trabajo es un 5% del tiempo empleado por el alumno

Presupuesto de los ingenieros

	Número	Precio por hora	Horas empleadas	Precio total
Ingeniero junior	1	11.46 €/h	350 h	4011 €
Ingeniero senior	2	41.67 €/h	18 h	1500 €

En segundo lugar, se ha necesitado emplear software tanto de diseño 3D para todo lo relacionado con el modelo del avión (licencias de Autodesk Fusion360) como las licencias de Office 365 para la realización de documentos Word, PowerPoint o Excel; y licencias de robots matemáticos de cálculo (Wolfram Mathematica).

Presupuesto del software

	Número	Precio por mes	Meses	Precio total
Fusion360	1	60 €/mes	3 meses	180 €
Office 365	1	9.80 €/mes	3 meses	29.40 €
Mathematica	1	148.50 €/mes	3 meses	445.50 €

Por último, está el presupuesto asociado al gasto eléctrico que conlleva la utilización constante de un ordenador para el proyecto. Un ordenador consume de promedio en una jornada laboral 0.275 kWh.

Presupuesto del gasto eléctrico

	Mayo	Junio	Julio
Precio medio del consumo de luz	75.2 €/MWh	92.09 €/MWh	93 €/MWh
Consumo realizado	41.25 kWh	41.25 kWh	13.75 kWh
Precio total	3.10 €	3.80 €	1.28 €

Con esto se puede calcular el presupuesto total asociado al proyecto.

Presupuesto total del proyecto

	Precio
Presupuesto de los ingenieros	5511 €
Presupuesto del software	654.9 €
Presupuesto del gasto eléctrico	8.18 €
Total neto	6174.08 €
Total con I.V.A.	7470.64 €

Conclusiones

Los drones de competición son aeronaves que, dependiendo de las categorías donde compiten, realizan cierta clase de maniobras que pueden inducir elevados factores de carga. En el caso del dron Stingray, del equipo AeroDesign UPV, las maniobras que realiza son muy suaves y el factor de carga que experimenta la aeronave es muy reducido y similar al de algún avión de transporte de pasajeros. Este hecho provoca que la aeronave no esté sometida a elevadas aceleraciones inerciales que aumentarían los esfuerzos que la estructura interna debería soportar.

Estructuralmente hablando, el Stingray es un dron que no presenta la típica estructura semimonocasco de los aviones convencionales. Este presenta una piel como recubrimiento externo, un larguero y espuma de poliestireno expandido en algunas zonas como refuerzo interno. Esto provoca que gran parte de los esfuerzos que se generan en él los ha de soportar la piel del avión, que está hecha de fibra de carbono al igual que el larguero. Estos materiales ofrecen una muy buena resistencia específica y como el dron no está soportando grandes cargas aerodinámicas ni inerciales, la estructura es capaz de soportar con creces todos los esfuerzos que se generan ofreciendo un elevado factor de seguridad.

Por lo tanto, si como objetivo se pretende optimizar los recursos que se emplean en el desarrollo y la fabricación del dron, habría que tomar una decisión sobre cómo actuar debido a los resultados observados en el análisis.

Si se deseara mantener la estructura intacta, para obtener el mayor rendimiento posible de la estructura habría que aumentar las fuerzas a las que está sometida la aeronave, es decir, se podría realizar un cambio en la planta propulsiva que permitiese realizar vuelos a mayor velocidad, aumentando así las fuerzas y momentos aerodinámicos; o bien se podrían realizar manobras mucho más bruscas aumentando el factor de carga lo máximo posible para aumentar las fuerzas inerciales a las que está sometido el dron. En ambos casos la misión de la aeronave es un factor indispensable, ya que, si esta no permite volar a velocidades altas ni realizar maniobras bruscas, la optimización de recursos no sería posible.

Otra opción es rediseñar la propia estructura. Se pueden cambiar los materiales empleados permitiendo reducir el coste económico, o se puede reducir la cantidad de material utilizado en la fabricación, reduciendo el espesor de la piel o el larguero utilizado. En el caso de cambiar los materiales empleados, existe la posibilidad de tener que cambiar por completo la estructura interna, por lo que la mejor opción sería emplear menos material en la fabricación del dron.

Referencias

- [1] J. P. Magraner Rullan, M. Carreres Talens y P. Martí Gómez-Aldaraví, «Flight Mechanics Complete Notes,» Universitat Politècnica de València, Valencia, 2022.
- [2] «Modeling of Lateral Directional Aerodynamic Forces and Moments,» de *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*, Wiley, 2012, pp. 135-189.
- [3] G. Heartly Bryan, *Stability in Aviation: an Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aëroplanes*, Londres: Macmillan and Co., 1911.
- [4] M. Lázaro, TEMA 4 MANIOBRAS SIMÉTRICAS ESTACIONARIAS, Valencia: Universitat Politècnica de València.
- [5] J. L. Pérez Aparicio y M. Lázaro, *Teoría de vigas en ingeniería aeroespacial*, Valencia: Universitat Politècnica de València, 2019.

Anexo 1

Cálculo del centro de gravedad de la sección de pared delgada (Figura 21).

Para analizar la elipse se van a usar coordenadas polares, donde α es el ángulo en sentido antihorario que parte desde el eje y positivo.

$$y_3(\alpha) = a \cos(\alpha) \quad z_3(\alpha) = b \sin(\alpha)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} d\alpha$$

$$y_{CG,elipse} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha} = 0.028 \text{ m}$$

$$z_{CG,elipse} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \cdot \sin(\alpha) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha} = 0 \text{ m}$$

$$y_{CG} = \frac{L_1 \cdot \left(-\frac{L_1}{2}\right) + L_2 \cdot \left(-\frac{L_1}{2}\right) + L_3 \cdot y_{CG,elipse}}{L_1 + L_2 + L_3} = -0.195 \text{ m}$$

$$z_{CG} = \frac{L_1 \cdot \left(\frac{0.05}{2}\right) + L_2 \cdot (0) + L_3 \cdot z_{CG,elipse}}{L_1 + L_2 + L_3} = 0.011 \text{ m}$$

Donde L_1 es la longitud de A a B, L_2 es la longitud de B a C y L_3 es la longitud del arco de elipse que va de C a A de la Figura 22.

Cálculo de los momentos de inercia.

$$I_y = \int_0^C z^2(s) t ds = \int_0^{S_{AB}} z_1^2(s) t ds + \int_0^{S_{BC}} z_2^2(s) t ds + \int_0^{S_{CA}} z_3^2(s) t ds$$

$$I_z = \int_0^C y^2(s) t ds = \int_0^{S_{AB}} y_1^2(s) t ds + \int_0^{S_{BC}} y_2^2(s) t ds + \int_0^{S_{CA}} y_3^2(s) t ds$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_0^C y(s) z(s) t ds = \\ &= \int_0^{S_{AB}} y_1(s) z_1(s) t ds + \int_0^{S_{BC}} y_2(s) z_2(s) t ds + \int_0^{S_{CA}} y_3(s) z_3(s) t ds \end{aligned}$$

Las ecuaciones del sistema de referencia local quedan de la siguiente forma, teniendo en cuenta que para la elipse se ha hecho un cambio a coordenadas polares, como para el cálculo del centro de masas.

$$\begin{aligned}
 y_1(s) &= -s - y_{CG} & z_1(s) &= \frac{0.05}{2} - z_{CG} \\
 y_2(s) &= -L_1 + s \cos \theta - y_{CG} & z_2(s) &= \frac{0.05}{2} - s \sin \theta - z_{CG} \\
 y_3(\alpha) &= a \cos(\alpha) - y_{CG} & z_3(\alpha) &= b \sin(\alpha) - z_{CG}
 \end{aligned}$$

Si se sustituyen las coordenadas en las integrales de los momentos de inercia y con la ayuda de un robot matemático se llega a la siguiente solución:

$$\begin{aligned}
 I_y &= 8.836 \cdot 10^{-5} t + 14.899 \cdot 10^{-5} t + 136.103 \cdot 10^{-5} t = 0.00136 t m^4 \\
 I_z &= 7.998 \cdot 10^{-3} t + 8.048 \cdot 10^{-3} t + 162.41 \cdot 10^{-3} t = 0.1785 t m^4 \\
 I_{yz} &= -1.891 \cdot 10^{-4} t - 6.998 \cdot 10^{-4} t - 11.863 \cdot 10^{-4} t = -0.00119 t m^4 \\
 I_d &= I_y \cdot I_z - I_{yz}^2 = 0.00028 t^2 m^8
 \end{aligned}$$

Cálculo de los momentos estáticos

$$\begin{aligned}
 m_y &= \int_0^s z(s) t ds & m_z &= \int_0^s y(s) t ds \\
 m_{y1} &= \int_0^s z_1(s) t ds = 0.014 s t & m_{z1} &= \int_0^s y_1(s) t ds = 0.195 s t - \frac{s^2 t}{2} \\
 m_{y2} &= \int_0^s z_2(s) t ds = 0.014 s t - 0.055 s^2 t & m_{z2} &= \int_0^s y_2(s) t ds = -0.255 s t + 0.497 s^2 t
 \end{aligned}$$

La integral del momento estático se va a quedar definida como una integral debido a su compleja resolución incluso con el uso de un robot matemático. A la hora de resolver cualquier cálculo que requiera de esta solución se hará de forma numérica.

$$\begin{aligned}
 m_{y3} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (b \cdot \sin(\alpha) - z_{CG}) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha \\
 m_{z3} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (a \cdot \cos(\alpha) - y_{CG}) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \cdot d\alpha
 \end{aligned}$$

Cálculo de los momentos debido al flujo de cortante.

$$\begin{aligned}
 M_{F_1} &= F_1 \cdot 0.025 = -0.0008 Q_y - 0.0228 Q_z \\
 M_{F_2} &= F_2 \cdot d_2
 \end{aligned}$$

Donde d_2 es la distancia entre el origen de coordenadas y la barra oblicua. Esta distancia se puede calcular según la fórmula:

$$d_2 = \left| \frac{A \cdot y_0 + B \cdot z_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Donde A , B y C son los coeficientes de la ecuación de la recta que define la barra oblicua en la forma general $A \cdot y + B \cdot z + C = 0$, y y_0 y z_0 son las coordenadas del punto desde el que se quiere obtener la distancia y al ser este el origen de coordenadas son ambos valores nulos.

$$d_2 = \left| \frac{-0.025}{\sqrt{1 + 0.111^2}} \right| = 0.0248$$

$$M_{F_2} = F_2 \cdot d_2 = 0.0021 Q_y - 0.0386 Q_z$$

Para el cálculo del momento generado por el flujo de cortante sobre la elipse se va a realizar una aproximación numérica en la que se va a evaluar la fuerza de cada pequeño segmento de elipse y se va a multiplicar por la distancia a la recta tangente de la elipse en dicho punto.

Una recta tangente a un cierto punto P de una elipse se puede escribir como:

$$z - z_0 = -\frac{b^2 y_0}{a^2 z_0} (y - y_0)$$

Y cada punto de la elipse (y_0, z_0) de dicha ecuación es un punto de la elipse que se puede representar como $(y_0 = a \cdot \cos(\alpha), z_0 = b \cdot \sin(\alpha))$. Pasando la ecuación a la forma general de la recta la distancia se puede calcular como sigue.

$$d_{elipse} = \left| \frac{z_0 + \frac{b^2 \cdot y_0^2}{a^2 \cdot z_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2 \cdot y_0}{a^2 \cdot z_0}\right)}} \right| = \left| \frac{b \cdot \sin(\alpha) + \frac{b^2 \cdot (a \cdot \cos(\alpha))^2}{a^2 \cdot (b \cdot \sin(\alpha))}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2 \cdot (a \cdot \cos(\alpha))}{a^2 \cdot (b \cdot \sin(\alpha))}\right)}} \right|$$

$$M_{F_3} = \sum_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_3(\alpha) \cdot d_{elipse}(\alpha) = \sum_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(F_3(\alpha) \cdot \left| \frac{b \cdot \sin(\alpha) + \frac{b^2 \cdot (a \cdot \cos(\alpha))^2}{a^2 \cdot (b \cdot \sin(\alpha))}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2 \cdot (a \cdot \cos(\alpha))}{a^2 \cdot (b \cdot \sin(\alpha))}\right)}} \right| \right)$$

$$M_{F_3} = 0.0174 Q_y + 0.0378 Q_z$$

Anexo 2

Cálculo del centro de gravedad de la sección maciza.

El centro de gravedad de un triángulo rectángulo se encuentra a un tercio de las alturas desde la base y el centro de gravedad de la media elipse se encuentra desplazado una distancia $\left(\frac{4a}{3\pi}\right)$ del origen de coordenadas en el eje y al ser simétrica coordenada $z = 0$.

$$y_{CG} = \frac{\frac{\pi}{2} ab \left(\frac{4a}{3\pi}\right) + \frac{1}{2} L_1 a \left(-\frac{L_1}{3}\right)}{\hat{A}} = -0.127 m$$

$$z_{CG} = \frac{\frac{1}{2} L_1 a \left(b - \frac{a}{3}\right)}{\hat{A}} = 0.007 m$$

Cálculo de los momentos de inercia de la sección maciza.

Es fácil obtener valores para los momentos de inercia de una semi elipse y un triángulo rectángulo, a estos, que están referidos a un centro de referencia que no es el centro de masas de la sección, hay que añadirles el término de Steiner para poder obtener el valor del momento de inercia respecto al centro de masas de la sección.

$$I_y = I_{y,elipse} + I_{y,triángulo} = \frac{\pi a b^3}{8} + A_{elipse}(0 - y_{CG})^2 + \frac{L_1 a^3}{12} + A_{triángulo}(0 - y_{CG})^2$$

$$I_y = 2.173 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_z = I_{z,elipse} + I_{z,triángulo} = \frac{\pi a^3 b}{8} + A_{elipse}(0 - z_{CG})^2 + \frac{L_1^3 a}{12} + A_{triángulo}(0 - (b - z_{CG}))^2$$

$$I_z = 3.846 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$I_{yz} = I_{yz,elipse} + I_{yz,triángulo}$$

$$I_{yz} = 0 + A_{elipse}(0 - y_{CG})(0 - z_{CG}) + \frac{L_1^2 a^2}{24} + A_{triángulo}(0 - y_{CG})(0 - (b - z_{CG}))$$

$$I_{yz} = -6.079 \cdot 10^{-6} m^4$$

Planos 2D

