

# Flujo de agua en el suelo bajo condiciones de simetría radial. Contraste entre modelos

## *Radial symmetry soil water front advance. Comparison among models*

Ángel del Vigo \*

Profesor Permanente. Instituto CAI-Lab. Facultad de Tecnología y Ciencia. Universidad Camilo José Cela. Calle Almagro 5, 28010. Madrid (España).

E-mail: angel.delvigo@ucjc.edu

\*Autor para correspondencia

Recibido: 20/02/2023

Aceptado: 11/05/2023

Publicado: 31/07/2023

**Citar como:** del Vigo, Á. 2023. Radial symmetry soil water front advance. Comparison among models. *Ingeniería del agua*, 27(2), 169-181. <https://doi.org/10.4995/ia.2023.19290>

---

## RESUMEN

En este artículo se presenta una revisión de algunos modelos analíticos y modelos analíticos simplificados existentes en la bibliografía para la evolución del frente de avance del flujo de agua en el suelo bajo condiciones de riego por goteo superficial y con simetría esférica, es decir, asumiendo condiciones de suelo homogéneo e isótropo, ausencia del efecto gravitatorio y sin acumulación de agua en la superficie. Además, se propone un nuevo modelo analítico para la evolución del bulbo, en base a simplificaciones asumibles en condiciones de contorno de riego por goteo superficial, que ha sido deducido a partir de la combinación entre la ecuación de Darcy y la ecuación de continuidad del flujo desde una fuente cuasi-puntual en superficie. Al final del artículo se presenta un contraste entre todos los modelos analíticos mencionados en este trabajo y resultados de simulación que fueron obtenidos a través de un modelo numérico de elaboración propia, validado y presentado en publicaciones previas.

**Palabras clave** | ecuación de Darcy; simetría esférica; modelo analítico; riego por goteo; fuente cuasi-puntual.

---

## ABSTRACT

*A review of some analytical models existing in the bibliography for the evolution of spherical symmetry bulb front advance is presented in this article. Surface drip irrigation is considered from a point (or quasi-point) source for a homogeneous, uniform and isotropic soil, in absence of gravitational force, neither water accumulation on the surface. Furthermore, a new analytical model for spherical symmetric bulb front advance evolution is proposed, based on simplifications in boundary conditions that can be assumed for surface drip irrigation. The model was deduced from the Darcy and continuity equations from a quasi-point source on the surface. At the end of the article, it is shown a comparison among all the analytical models mentioned and simulation results obtained through a numerical model that was validated and presented in previous publications.*

**Key words** | Darcy equation; spherical symmetry; Analytical model; trickle irrigation; quasi-point source.

## INTRODUCCIÓN

Los métodos de riego tradicional como el riego por inundación a manta, o en menor medida el riego por surcos y aspersión involucran pérdidas por filtración de agua profunda o evaporación en superficie, lo que reduce la eficiencia de los riegos. Por el contrario, en el riego por goteo se suministra con una alta frecuencia reducidas aplicaciones de volumen lo que permite un régimen más constante del contenido de humedad del suelo, favoreciendo el crecimiento de la planta y minimizando el consumo hídrico. En estas condiciones, el flujo se puede considerar aproximadamente simétrico respecto a una fuente puntual en superficie, siempre que el caudal aplicado no exceda el límite (en función de las características del suelo) para el que se produce una acumulación de agua en superficie. Diferentes soluciones analíticas a este problema arquetípico han ido apareciendo desde mediados del s. xx habiéndose obtenido resultados de interés; sin embargo, el problema aún no está cerrado ya que todos estos modelos de base física están sujetos a condiciones de simplificación, que siendo necesarias para la resolución de las ecuaciones, no siempre se adecúan a la realidad del riego por goteo.

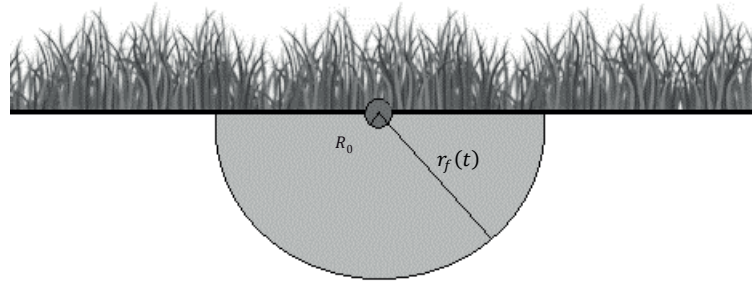
Los modelos de base física, se fundamentan en la resolución de las ecuaciones de la filtración en un medio poroso, es decir, la ecuación de Darcy-Buckingham (Darcy, 1856; Buckingham, 1907), la ecuación de continuidad, o la ecuación de Richards (1931) que es una combinación de las dos anteriores. Se habla de modelos analíticos de filtración cuando estas ecuaciones se pueden integrar de forma exacta. En este contexto, se suele referir a modelos analíticos simplificados cuando se realiza alguna simplificación sobre las condiciones iniciales, condiciones de contorno, o la simetría del sistema que se pueda aproximar a la realidad del fenómeno, como por ejemplo, el modelo de Green-Ampt (1911). En caso contrario, para obtener una solución analítica es necesario asumir funciones de caracterización del medio poroso lo suficientemente sencillas como para poder resolver la ecuación de Richards; este es el caso de modelos como Wooding (1968), Raats (1971), Warrick (1974), Warrick y Lomen (1976) o Philip (1984) que basándose en las funciones de caracterización del suelo tipo Gardner (1958), han conseguido integrar la ecuación de Richards con éxito para diferentes condiciones de contorno. Sin embargo, las funciones del tipo Gardner, que representan la conductividad hidráulica como una función exponencial del potencial matricial del suelo, no siempre describen de una forma adecuada la complejidad inherente al suelo. Para los casos en los que no existe una solución analítica de las ecuaciones de la filtración, se desarrollan modelos numéricos para la resolución de la ecuación de Richards, que sin restricciones tan severas pueden alcanzar soluciones que, sin ser exactas, son muy aproximadas a la realidad de fenómenos más complejos en los procesos de filtración de agua en el suelo, como por ejemplo, los modelos de Brandt *et al.* (1971), Šimůnek *et al.* (2006) o del Vigo *et al.* (2020).

Los modelos analíticos simplificados, a pesar de ser los que inicialmente más restricciones imponen para el sistema de estudio, tienen dos ventajas importantes sobre el resto de los modelos. La primera es una mayor sencillez de las ecuaciones resultantes, de modo que, personal no cualificado o con pocos medios de cálculo a su alcance (por ejemplo, por estar sobre el terreno), pueden obtener estimaciones para la evolución del flujo y patrones de filtración. En segundo lugar, y posiblemente más importante, es que la mayoría de estos modelos no están ligados a funciones de caracterización del suelo, que en muchos casos no describen convenientemente su naturaleza; ya sea porque el tipo de función no es adecuado, o también, por el desconocimiento de los parámetros del suelo ligados a estas funciones de caracterización. En este sentido, es interesante seguir avanzando en la mejora de los modelos analíticos simplificados existentes, y también, obtener otros nuevos, que puedan describir con sencillez y en buena aproximación los procesos de filtración de agua en suelos.

En este artículo se hace una revisión de cinco modelos analíticos existentes en la bibliografía (Roth, 1974; Philip, 1984; Ben Asher *et al.*, 1986; Chu, 1994; del Vigo *et al.*, 2021) para el estudio de la evolución del frente de avance del bulbo en condiciones de simetría esférica, y desde una fuente puntual en superficie. Paralelamente, se presenta el desarrollo de un nuevo modelo analítico simplificado que se ha deducido a través de la combinación de la ecuación de Darcy y la ecuación de continuidad, asumiendo condiciones de contorno compatibles con el riego por goteo superficial y simetría esférica. Al final del trabajo, se presenta una comparación de la predicción que arrojan estos seis modelos analíticos frente a resultados de simulación para la evolución temporal del frente de avance del bulbo que se toman como referencia. Las simulaciones fueron obtenidas a través de un modelo numérico de elaboración propia que ha sido validado y presentado en publicaciones previas (del Vigo *et al.*, 2019a, 2019b; del Vigo, 2020; del Vigo *et al.*, 2020). Dadas las fuertes restricciones de los modelos analíticos introducidos en este artículo se puede asumir, razonablemente, que los resultados de simulación que se toman como referencia se aproximan a la realidad del fenómeno de filtración, en mayor medida, que cualquiera de los modelos analíticos mencionados.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Considerar un suelo homogéneo e isótropo, de conductividad hidráulica en saturación  $k_s$  [m/s], y con un contenido de humedad inicial constante  $\theta_0$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>]. Despreciando el efecto gravitatorio y asumiendo que el total del volumen aplicado se infiltra en el suelo se puede considerar que el bulbo es hemi-esférico y, por tanto, el frente de avance tiene una simetría radial. Para flujo bajo estas condiciones los siguientes modelos analíticos describen la evolución del frente de avance  $r_f$  [m], o radio del bulbo, en función del tiempo. La Figura 1 muestra una ilustración aproximada del sistema descrito por estos modelos.



**Figura 1** | Ilustración artística del sistema que se analiza en este artículo. El radio de la fuente ( $R_0$ ) es despreciable frente al radio del bulbo  $r_f(t)$  en el modelo analítico propuesto. Fuente cuasi-puntual.

### Modelo de Roth (1974)

Seguramente la primera estimación para el avance del frente mojado en condiciones de simetría radial es el modelo de Roth (1974). Este sencillo modelo se deduce asumiendo que todo el bulbo mojado tiene un contenido de humedad constante e igual al del frente de avance  $\theta_f$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>]. Considerando el caudal  $q$  [m<sup>3</sup>/s] constante:

$$q = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V(t) = q \cdot t + C$$

Siendo  $V$  el volumen de agua infiltrado [m<sup>3</sup>], y  $C=0$  una constante de integración que es nula debido a la condición inicial (volumen de agua inicial infiltrado igual a cero,  $V(0)=0$ ). Por la geometría del sistema (semiesfera) y considerando que todo el bulbo adquiere el contenido de humedad del frente de avance, el volumen infiltrado es:

$$V = (\theta_f - \theta_0) \cdot \frac{2}{3} \pi r_f^3 = qt$$

Siendo  $r_f$  el radio [m] del frente de avance o radio del bulbo. Despejando este valor se llega a:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_f - \theta_0)}} \quad (1)$$

Este modelo fue contrastado con datos experimentales obteniendo un buen ajuste, por lo que en muchas fuentes se cita como si fuera un modelo empírico.

### Modelo de Philip (1984)

Utilizando la ecuación de Richards, la transformada de Kirchhoff y una conductividad hidráulica del tipo Gardner, Philip en 1984 obtuvo una solución analítica para una fuente puntual en régimen estacionario ( $\partial\theta/\partial t = 0$ ) que permite determinar el tiempo

de viaje de una partícula fluida desde la fuente hasta una distancia  $r(t)$ . La ecuación en derivadas parciales es del tipo de ecuaciones cuasi-lineales. Se concluye que, en los instantes iniciales, cuando el radio del bulbo tiende a cero, su geometría es esférica según la ecuación:

$$\lim_{R \rightarrow 0} T = \frac{1}{3} R^3$$

Siendo  $T$  y  $R$  dos variables adimensionales que se refieren al tiempo de viaje y radio del bulbo, respectivamente, tal que:

$$\begin{cases} T = \frac{\alpha^3 qt}{16\pi\theta_m} \\ R = \frac{\alpha r_f}{2} \end{cases}$$

Donde  $\alpha$  [ $\text{m}^{-1}$ ] es un parámetro típico del medio conocido como constante de escala macroscópica de capilaridad y  $\theta_m$  un valor medio (constante) para el contenido de humedad volumétrica del bulbo. Sustituyendo las variables adimensionales y despejando el radio del bulbo ( $r_f$ ) se llega a:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi\theta_m}} \quad (2)$$

El valor del contenido de humedad medio ( $\theta_m$ ) se puede calcular en cada instante de tiempo (Ben Asher *et al.*, 1986), dividiendo el volumen total infiltrado ( $V$ ) entre el volumen del bulbo que considera este modelo. Adicionalmente, a este valor se le puede sumar el contenido de humedad inicial del suelo, tal que:

$$\theta_m = \frac{V}{\frac{2}{3}\pi r_f^3} + \theta_0$$

## Modelo de Ben Asher (1986)

El modelo de Ben Asher *et al.* (1986) es un modelo analítico aproximado deducido desde la ecuación de continuidad. Este modelo asume una simetría radial del bulbo, en ausencia de campo gravitatorio, y para regímenes de caudal suficientemente pequeños como para que no se llegue a formar un charco en la superficie (flujo desde fuente puntual). El modelo general asume la existencia de evaporación (como una condición de contorno en la superficie), transpiración (condición de contorno sobre el bulbo mojado) y extracción radicular (a través de un término que se le añade a la ecuación de continuidad). Los términos de evaporación, transpiración y extracción se consideran con simetría axial (respecto al eje vertical que pasa por la fuente). En el caso particular en que se omite la evapotranspiración y la extracción radicular se llega a la siguiente expresión sencilla para el radio del bulbo:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_m - \theta_0)}} \quad (3)$$

Siendo  $\theta_m$  [ $\text{m}^3/\text{m}^3$ ] y  $\theta_0$  [ $\text{m}^3/\text{m}^3$ ] el contenido de humedad medio del bulbo e inicial del suelo, respectivamente. Según el criterio de este autor en buena aproximación se puede considerar que  $\theta_m - \theta_0 \cong \theta_s/2$ . Utilizando datos experimentales de publicaciones previas (Ben Yosef y Skeikholslami, 1976; Clothier y Scotter, 1982; Taghavi *et al.*, 1984) en las que se midió el frente de avance del bulbo como función del tiempo, se reportó una desviación máxima de los datos de tan solo el 7% respecto a la Ecuación (3).

## Modelos basados en la aproximación de Green-Ampt

Los autores Chu S.T. (1994) y del Vigo *et al.* (2021), de forma independiente y asumiendo las mismas condiciones de simetría que se han mencionado anteriormente, dedujeron a través de dos procedimientos distintos, la siguiente ecuación que

expresa de forma implícita el avance del frente mojado en función del tiempo ( $r_f(t)$ ) desde una fuente semi-esférica en saturación, y asumiendo hipótesis para bulbo mojado del estilo Green-Ampt:

$$t = \frac{\theta_s - \theta_0}{k_s \tau_f R_0} \left[ \frac{1}{3} (r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{R_0}{2} (r_f^2(t) - R_0^2) \right] \quad (4)$$

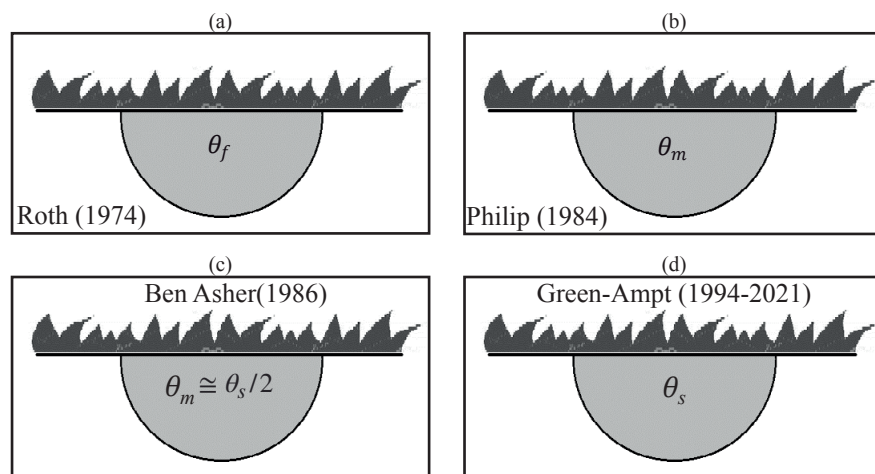
Donde se ha utilizado la tensión en el frente de avance  $\tau_f$  [m] que es un parámetro típicamente ligado a los modelos que asumen hipótesis de Green-Ampt. Este parámetro se puede calcular a través de la expresión de Neuman (1976), aunque también existen bases de datos con valores de referencia para distintos tipos de suelo (Rawls *et al.*, 1983). Hay que tener en cuenta que, a diferencia de los casos anteriores, estos dos modelos no consideran un caudal aplicado constante, sino una fuente de radio constante ( $R_0$ ) y en saturación, a través de la que fluye agua a un bulbo creciente, cuyo contenido de humedad también es igual al de saturación del suelo (hipótesis de Green-Ampt).

Como se ha comentado en la bibliografía (del Vigo, 2020; del Vigo *et al.*, 2021) aunque el modelo de Chu S.T. realiza un planteamiento inicial en el que utiliza ecuaciones propias de la simetría radial, posteriormente introduce un potencial de Green-Ampt que depende de la cota en el desarrollo de sus ecuaciones, con intención de incluir el efecto gravitatorio. Por consiguiente, este autor alcanza una ecuación para el frente de avance que no tiene simetría esférica. La Ecuación (4) representaría el avance del frente mojado sobre la superficie en el modelo de Chu S.T.

Por el contrario, en el modelo analítico simplificado de los autores del Vigo *et al.*, se han asumido condiciones a lo largo de todo el desarrollo que son enteramente de simetría radial, es decir, sin considerar el campo gravitatorio. La Ecuación (4) representaría, por tanto, el radio para un bulbo de geometría hemi-esférica dentro del modelo que proponen estos autores. Cabe decir que, en el modelo analítico de del Vigo *et al.* se introduce la acción del campo gravitatorio *a posteriori*, a través de un factor corrector de base física que modifica las ecuaciones adimensionales obtenidas para el caudal y volumen infiltrado en función del tiempo (del Vigo *et al.*, 2019c). Así mismo, se ha ampliado el modelo para otras condiciones de contorno distintas como es una fuente circular en superficie y de radio constante, de naturaleza equivalente a un infiltrómetro de sección circular.

Es importante señalar que este tipo de modelos no están restringidos a los suelos del tipo Gardner, ni a la condición de régimen estacionario (antes mencionada) del modelo analítico de Philip.

La Figura 2 muestra una ilustración de los tipos de bulbo que consideran los distintos modelos analíticos introducidos en esta sección.



**Figura 2** | Ilustración esquemática de los contenidos de humedad del bulbo que se han asumido en los modelos analíticos que se han introducido en esta sección: (a) contenido de humedad del frente de avance (Roth, 1974), (b) contenido de humedad medio (Philip, 1984), modelo restringido a suelos del tipo Gardner en régimen estacionario, (c) contenido de humedad medio, aproximadamente igual a la mitad del contenido de humedad en saturación (Ben Asher, 1986) y (d) contenido de humedad de saturación del suelo (Chu, 1994 y del Vigo, 2021), hipótesis de Green-Ampt.

## Modelo de simulación

Se desarrolló un código en MATLAB para el estudio de la filtración de agua a través de la ecuación de Richards. El código fue ampliamente validado (del Vigo *et al.*, 2020, del Vigo, 2020) por comparación con soluciones analíticas conocidas (Warrick, 1974; Warrick y Lomen, 1976), el programa HYDRUS (Šimůnek *et al.*, 2006) y ensayos experimentales. Por la simetría del sistema (infiltración desde una fuente de caudal conocido en superficie) el modelo de integración utiliza coordenadas cilíndricas ( $r, z$ ) para la resolución numérica de las ecuaciones<sup>1</sup>, lo que permite reducir el número de variables espaciales y, por tanto, el tiempo de computación. La ecuación de Richards en 3-D, en términos del potencial matricial  $h(\theta)$  [m], conductividad hidráulica  $k(\theta)$  [m/s] y el contenido de humedad  $\theta$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>], expresada en este sistema de coordenadas y del tiempo  $t$  [s], es:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ k \frac{\partial h}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5)$$

Para la que se propuso la siguiente discretización:

$$h_{t+\Delta t} = h + \frac{\Delta t \Delta h}{2 \Delta \theta} \left[ \frac{k}{r} \frac{h_2 - h_4}{\Delta r} + \frac{(k + k_1)(h_1 - h)}{(\Delta z)^2} + \frac{(k + k_2)(h_2 - h)}{(\Delta r)^2} + \frac{(k + k_3)(h_3 - h)}{(\Delta z)^2} + \frac{(k + k_4)(h_4 - h)}{(\Delta r)^2} + \frac{k_1 - k_3}{\Delta z} \right] \quad (6)$$

Donde se ha utilizado la media aritmética de la conductividad hidráulica sobre un entorno de cada nodo de la red. Se comprobó que el programa es estable numéricamente bajo la siguiente condición de resolución espacio-temporal, que fue derivada a partir de argumentos matemáticos discutidos en la bibliografía (Carnahan, 1979):

$$\Delta t < \frac{\theta_s \cdot \Delta z^2}{8000 k_s} \quad (7)$$

Donde  $k_s$  y  $\theta_s$  son, respectivamente, la conductividad hidráulica y el contenido de humedad en saturación del suelo y  $\Delta z$  [m] es la resolución espacial sobre el eje-Z.

El código permite estudiar fenómenos de interés del riego por goteo como son la sobrepresión en el entorno de la fuente, la redistribución de agua, la absorción de flujo a través de la raíz de la planta, y la evolución del charco (exceso de agua en superficie) si el caudal aplicado es mayor que el infiltrado al suelo. En este sentido, el código está siendo utilizado con diversos fines, como por ejemplo, para calcular patrones de infiltración en plantaciones de tomate en la provincia de Imbabura (República del Ecuador) con objeto de optimizar el diseño, calendario y eficiencia de los riegos por goteo en esta zona de Sudamérica (del Vigo *et al.*, 2023a), o también, para estudiar la evolución del charco y su radio máximo sobre los distintos tipos de suelo que han sido catalogados bajo los principales esquemas de caracterización de suelos que existen en la bibliografía (del Vigo *et al.*, 2023b). Para más detalles sobre las condiciones de contorno, estructura del código y su validación se puede consultar la bibliografía (del Vigo, 2020), donde también se podrá encontrar una versión del código en formato editor de texto.

## RESULTADOS

### Nuevo modelo propuesto

Considerar una fuente semiesférica de radio  $R_0$  [m], suficientemente pequeña como para asumir que la fuente es cuasi-puntual frente a las distancias de estudio. Considerar el suelo homogéneo e isótropo, de conductividad hidráulica en saturación  $k_s$  [m/s], y con un contenido de humedad inicial constante  $\theta_0$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>]. Despreciando el efecto gravitatorio, la ecuación de Darcy-Buckingham en la frontera entre la fuente y suelo, y al inicio del proceso de filtración es:

$$\vec{v} = -k_s \vec{\nabla} h \Rightarrow v_0 \hat{r} \equiv -k_s \frac{dh}{dr} \hat{r} \cong k_s \frac{h_s - h_0}{R_0} \hat{r} \quad (8)$$

<sup>1</sup> Estando el gotero en el origen del sistema de referencia, la coordenada  $r$  [m] representa la distancia de cualquier punto sobre la dirección radial, mientras que la coordenada  $z$  [m] es la cota del punto sobre el eje vertical.



Donde  $h$  [m] representa la función potencial matricial del suelo, siendo  $h_s$  [m] el potencial matricial de saturación (sobre la fuente) y  $h_0$  [m] el potencial matricial inicial del suelo. Esta aproximación es aceptable, al considerar, el radio de la fuente cuasi-puntual ( $R_0$ ) lo suficientemente pequeño. La velocidad del flujo a la salida de la fuente en el instante inicial es  $v_0$  [m/s]. Dadas las condiciones supuestas el flujo tiene simetría radial, siendo  $\hat{r}$  el vector unitario radial en coordenadas esféricas. Por tanto, el caudal  $q$  [m<sup>3</sup>/s] sobre la superficie de la fuente al inicio del proceso de filtración es:

$$q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v_0 \hat{r} \cdot dS \hat{r} = v_0 2\pi R_0^2 \quad (9)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se llega a la siguiente expresión para el caudal:

$$q = 2\pi k_s (h_s - h_0) R_0 \quad (10)$$

La Ecuación (10) ha sido deducida bajo condiciones de infiltración inicial, sin embargo, asumiendo que el caudal es un parámetro (típicamente) constante en el riego por goteo superficial, que no hay pérdidas de agua por escorrentía o acumulación de agua (charco) en la superficie, y si el radio de la fuente cuasi-puntual ( $R_0$ ) no cambia a lo largo de todo el proceso de infiltración, se puede considerar que esta ecuación es general para cualquier instante de tiempo en este proceso. Advertir, en este punto que, se está considerando que todo el caudal aplicado por la fuente se infiltra a través del suelo. Como además, el flujo del campo de velocidades es invariante para cualquier superficie semiesférica, cerrada, y concéntrica a la fuente cuasi-puntual (teorema de Gauss), en ausencia de otras fuentes o sumideros, se puede generalizar que:

$$q = 2\pi k_s (h_s - h_0) R_0 = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = v(r) \cdot 2\pi r^2 \quad (11)$$

Donde  $v(r)$  es la velocidad del flujo a una distancia  $r$  del origen de coordenadas (sobre la fuente cuasi-puntual). Por tanto, despejando la velocidad, se llega a:

$$\vec{v} = \frac{k_s (h_s - h_0) R_0}{r^2} \hat{r} = \frac{cte}{r^2} \hat{r} \quad (12)$$

Resultado que indica, como cabría esperar que, el módulo de la velocidad del fluido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente. Utilizando la ecuación de continuidad se puede estudiar la evolución temporal del sistema:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{2k_s (h_s - h_0) R_0}{r^3} \quad (13)$$

Y, al integrar con respecto al tiempo:

$$\theta(r, t) = \frac{2k_s (h_s - h_0) R_0}{r^3} \cdot t + \theta_0 \quad (14)$$

Tal que,  $\theta_s(r, t) \in [\theta_0, \theta_s]$ . Esta función describe la evolución del contenido de humedad del sistema respecto de la distancia al gotero y el tiempo. El contenido de humedad tiene, por tanto, una simetría radial debido a las condiciones simplificadas del sistema. Se puede observar que, en todos los puntos el contenido de humedad crece linealmente con el tiempo hasta un valor máximo ( $\theta_s$ ); por el contrario, el contenido de humedad es inverso al cubo de la distancia, de modo que, los puntos más alejados del gotero contienen una menor cantidad de agua (aunque siempre mayor a  $\theta_0$ ) para cualquier instante de tiempo. A través de la Ecuación (14), y dadas las condiciones de simetría radial, se puede calcular la posición (radio) del frente de avance ( $r_f$ ) en función del tiempo, para un valor concreto de contenido de humedad  $\theta_f = \theta(r_f, t) \in [\theta_0, \theta_s]$ , tal que:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{2k_s (h_s - h_0) R_0}{(\theta_f - \theta_0)} t} = \sqrt[3]{\frac{q \cdot t}{\pi(\theta_f - \theta_0)}} \quad (15)$$

Donde se ha utilizado el caudal (magnitud constante) que describe la Ecuación (10). El radio del frente de avance que describe este modelo depende del contenido de humedad que se haya asumido para la frontera del bulbo. Este es un parámetro que se puede medir para cada tipo de suelo. Observar que, cuanto más próximo sea el contenido de humedad del frente de avance al contenido de humedad inicial del suelo, mayor es el radio del bulbo previsto por este modelo. Esta es una característica que comparte este modelo con el modelo de Roth.

Llamando  $V_b$  al volumen de agua que contiene el bulbo (interior al frente de avance), se cumple que:

$$V_b = \int_{R_0}^{r_f} 2\pi r^2 \theta(r, t) dr \quad (16)$$

Que representa la suma del contenido de humedad infiltrado dentro de cada corteza semiesférica de radio  $r$  interior al bulbo. Integrando y utilizando la Ecuación (15) para despejar el tiempo de riego en función del radio del frente de avance, se llega, después de algunas operaciones, al siguiente valor para el volumen de agua dentro del bulbo:

$$V_b = \frac{2\pi}{3} \theta_0 (r_f^3 - R_0^3) + 2\pi^2 (\theta_f - \theta_0) r_f^3 \ln \left( \frac{r_f}{R_0} \right) \quad (17)$$

El primer término corresponde al contenido de humedad inicial del espacio que ocupa el bulbo. El segundo término, sería el agua infiltrada al bulbo a través de la fuente de radio  $R_0$ .

**Tabla 1** | Resumen de las ecuaciones analíticas para el radio del bulbo ( $r_f(t)$ ). Modelos analíticos, y analíticos simplificados.

Roth (1974)	Philip (1984)	Ben Asher (1986)	Chu S.T. (1994), del Vigo <i>et al.</i> (2021)	Ecuación 15
$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_f - \theta_0)}}$	$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi\theta_m}}$	$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_m - \theta_0)}}$	$t = \frac{\theta_s - \theta_0}{k_s \tau_f R_0} \left[ \frac{1}{3} (r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{R_0}{2} (r_f^2(t) - R_0^2) \right]$	$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{qt}{\pi(\theta_f - \theta_0)}}$

## DISCUSIÓN

La Tabla 1 muestra un resumen de los modelos analíticos y analíticos simplificados, para la evolución del frente de avance del bulbo que se han mencionado en este artículo; el nuevo modelo propuesto se muestra en la última columna. Se puede observar que, las cuatro expresiones explícitas para la evolución del frente de avance  $r_f(t)$  son muy similares. En particular, la diferencia entre el modelo propuesto en este artículo y el modelo de Roth es, únicamente, un factor  $\sqrt[3]{3/2} = 1.1447$ ; de modo que, el modelo propuesto estima un valor para el frente de avance que es sistemáticamente inferior al del modelo de Roth en una cantidad igual a un 14%. Por otro lado, los modelos de Philip y Ben Asher están ligados al valor del contenido de humedad medio en el interior del bulbo ( $\theta_m$ ), el cual, ha de ser siempre mayor al valor del contenido de humedad en el frente de avance ( $\theta_f$ ) que tienen en consideración los otros dos modelos. En este sentido, los modelos de Philip y Ben Asher proporcionan un valor para el radio del bulbo,  $r_f(t)$ , que es inferior al modelo de Roth, y que, dependiendo del valor medio del contenido de humedad en el bulbo podrían ser también menor a la predicción del modelo propuesto. Consecuentemente, las estimaciones para  $r_f(t)$  de los modelos de Philip y Ben Asher se han de aproximar en mayor medida al nuevo modelo propuesto que al modelo de Roth. La comparación de estos cuatro modelos explícitos con la expresión implícita para el frente de avance del modelo de Chu (1994) y del Vigo *et al.* (2021), no es sencilla, y requiere de una representación gráfica de las ecuaciones como se muestra en las siguientes figuras.

La Figura 3 muestra el frente de avance estimado para cada uno de los cinco modelos analíticos mencionados en este artículo (ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (15), líneas continuas de color), junto con resultados de simulación (líneas discontinuas) obtenidos mediante el modelo numérico de base física que se introduce en la bibliografía (del Vigo *et al.*, 2019a; del Vigo *et al.*, 2019b; del Vigo *et al.*, 2020; del Vigo, 2020) y que se utiliza de referencia para el contraste de los modelos analíticos. Para la simulación, y posterior análisis de los modelos, se ha elegido un suelo caracterizado por las funciones del tipo Gardner, ya que este es un requisito



del modelo de Philip, Ecuación (2). Los parámetros del suelo se han obtenido del catálogo de Mualem (1976), y se resumen en la Tabla 2. Para garantizar las condiciones de simetría esférica, se ha elegido deliberadamente un caudal aplicado pequeño ( $q=16 \text{ cm}^3/\text{min} < 1 \text{ L/h}$ ), con objeto de evitar, en los resultados de simulación, efectos de acumulación de agua sobre la superficie del suelo, el cual, se ha elegido de textura arenosa con el mismo propósito. Este es un aspecto que también han mencionado los autores Ben Asher y Philip; de hecho, la solución aproximada de Philip tiende a una solución exacta para los primeros instantes de filtración (cuando  $t \rightarrow 0$ ) en los que el bulbo se puede considerar con simetría esférica. Obviamente, a medida que avanza el tiempo y el bulbo adquiere un mayor tamaño, y contenido de humedad, el efecto gravitatorio produce un alargamiento del bulbo en la dirección vertical que rompe la simetría esférica; efecto, que se aprecia claramente en los resultados de simulación, y que no contempla ninguno de los modelos analíticos debido a sus condiciones de simetría. La resolución espacial que se ha utilizado en las simulaciones es  $dr=dz=0.5 \text{ cm}$ . La resolución temporal del modelo de simulación ( $dt=5.9 \cdot 10^{-4} \text{ min}$ ) viene determinada en función de la resolución espacial, Ecuación (7), siguiendo los criterios de convergencia numérica establecidos para el modelo, y que se pueden consultar, con mayor profundidad, en la bibliografía (del Vigo *et al.*, 2020; del Vigo, 2020). La tensión en el frente ( $\tau_f$ ), que es un parámetro necesario para calcular el radio del bulbo en los modelos analíticos de Chu y del Vigo *et al.*, se ha estimado a través de la integral de Neuman (1976). Por otro lado, el radio de la fuente cuasi-puntual ( $R_0$ ) del modelo analítico propuesto (dato, también requerido, para el cálculo de  $r_f$  en los modelos de fuente hemisférica de Chu y del Vigo *et al.*), como ha de ser pequeño, se ha considerado igual a la resolución espacial de las simulaciones.

**Tabla 2** | Parámetros del suelo utilizados en la simulación y condiciones de contorno. Suelo de Oso flaco 'fine sand' (Mualem, 1976).

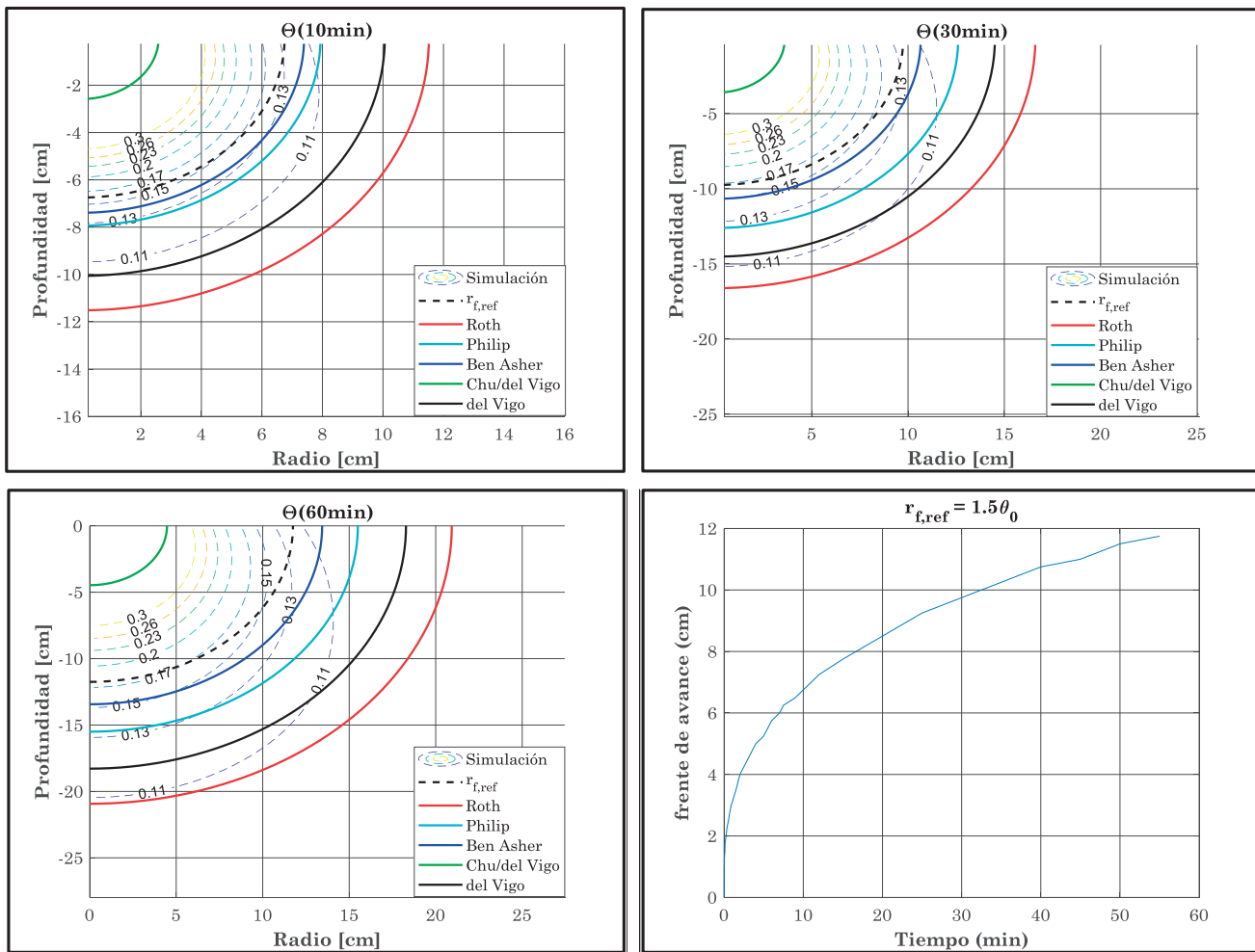
$\theta_s$ [m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	$\theta_0$ [m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	$\alpha$ [cm <sup>-1</sup> ]	$k_s$ [cm/min]	$q$ [cm <sup>3</sup> /min]	$R_0$ [cm]	$\tau_f$ [cm]
0.378	0.10	0.072	0.02	16	0.5	11.46

En la Figura 3 se representa con línea negra discontinua (gruesa) el frente de avance del bulbo que se ha calculado por simulación, y que se toma como referencia. Este valor promedio, se ha obtenido a través de la siguiente ecuación:

$$r_{f,ref}(t) = \frac{x_f(t) + z_f(t)}{2} \quad (18)$$

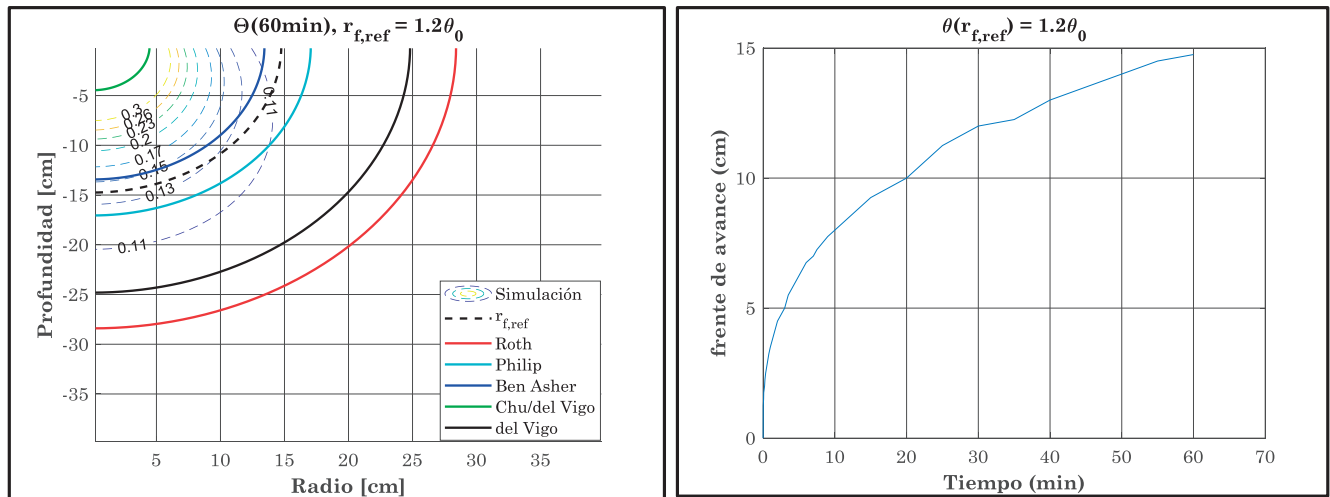
Donde  $x_f$  y  $z_f$  son los valores de distancia a la fuente sobre la horizontal y vertical, respectivamente, para los que la simulación indica que hay un contenido de humedad igual o superior al que se toma de referencia para la frontera del bulbo ( $\theta_f$ ). Este parámetro, que depende de cada suelo, es un dato necesario para la estimación del frente de avance del bulbo ( $r_f$ ) en el modelo analítico propuesto en este artículo, y también, en el modelo de Roth. Para el caso particular de la prueba que se muestra en la Figura 3, se ha asumido que, el contenido de humedad en la frontera del bulbo es de un valor superior al 50% del contenido de humedad inicial del suelo en cada instante del tiempo, es decir,  $\theta_f = 1.5 \cdot \theta_0$ . Otros valores de líneas de nivel, para el contenido de humedad, que se han obtenido por simulación se representan en esta figura con líneas discontinuas y siguiendo un diagrama de colores. El contenido de humedad medio del bulbo ( $\theta_m$ ), que es un parámetro necesario para el modelo de Philip, se ha calculado promediando (en cada iteración) el contenido de humedad de los puntos interiores a la frontera  $r_{f,ref}$ . Finalmente, el resultado para el bulbo del modelo de Ben Asher que se muestra en esta prueba, se ha obtenido utilizando la aproximación que el este mismo autor sugiere en su artículo ( $\theta_m - \theta_0 \cong \theta_s/2$ ).

Como muestra la Figura 3 se observa un avance del bulbo para todos los modelos a medida que avanza el tiempo. Para estas condiciones de riego y parámetros del suelo se puede ver, en todos los casos que, los modelos analíticos predicen un tamaño para el bulbo que, en orden creciente es: modelo de Chu - del Vigo *et al.* (hipótesis de Green-Ampt), modelo de Ben Asher, modelo de Philip, modelo propuesto en este artículo, modelo de Roth. Por otro lado, se puede advertir que el modelo de Ben Asher es el que más se aproxima al radio del bulbo que se toma como referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ) para estas condiciones de riego. Advertir también que, la estimación de los modelos de Ben Asher y Philip es muy próxima para los primeros minutos de riego, aunque luego, se van distanciando la una de la otra, como se ve en la gráfica para 30 minutos de filtración. Por su parte, se observa claramente que los modelos de Chu - del Vigo *et al.* (por defecto) y Roth (por exceso) son los que peor aproximan el radio del frente mojado al valor de referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ) que se ha obtenido por simulación, para todos los patrones de filtración que muestra esta figura.



**Figura 3** | Evolución del contenido de humedad y tamaño del bulbo hasta 60 minutos de riego a caudal constante desde una fuente puntual (o cuasi-puntual) en superficie. Comparativa del frente de avance del bulbo para los cinco modelos analíticos mencionados en este artículo (líneas continuas de diferente color) frente a resultados de simulación (líneas discontinuas). En la última gráfica se representa la evolución del frente de avance de referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ), que se ha calculado por simulación, para un contenido de humedad asumido sobre la frontera del bulbo igual a  $\theta_f=1.5\theta_0$ . Suelo: Oso flaco 'fine sand' (Mualem, 1976).

Con objeto de valorar estos modelos para otro contenido de humedad sobre la frontera del bulbo, en la Figura 4, se muestran resultados para el suelo y caudal aplicado de la Tabla 2, después de 60 minutos de riego, y considerando, en este caso, un contenido de humedad para la frontera del bulbo igual a  $\theta_f=1.2\cdot\theta_0$ . Consecuentemente, el alcance del bulbo ( $r_{f,ref}$ ) calculado por simulación a los 60 minutos de riego es mayor que en el caso anterior. Se puede observar que, el frente de avance del bulbo estimado por simulación en la Figura 4 se sitúa entre las predicciones de los modelos de Ben Asher y Philip. Es interesante notar que, el nuevo modelo analítico propuesto, el modelo de Philip y el modelo de Roth, que están todos ellos vinculados al nuevo contenido de humedad asumido para el frente de avance, dan lugar a un radio del bulbo mayor que en el caso de la Figura 3. Por su parte, el modelo de Ben Asher, que está asociado al contenido de humedad en saturación (parámetro que no ha cambiado para este tipo de suelo), arroja la misma predicción para el tamaño del bulbo que en el caso analizado en la figura anterior. Igualmente, el modelo implícito de Chu – del Vigo *et al.* (basados en hipótesis Green-Ampt) tampoco ha variado su predicción, que también está ligada a parámetros del suelo que siguen siendo los mismos para los resultados que se muestran en esta figura.



**Figura 4** | Izquierda: contenido de humedad después de 60 minutos de riego. Comparativa de los cinco modelos analíticos para el frente de avance del bulbo con los resultados de la simulación. Derecha: evolución del frente de avance de referencia calculado por la simulación. Contenido de humedad asumido para la frontera del bulbo:  $\theta_f = 1.2\theta_0$ . Suelo: Oso flaco 'fine sand' (Mualem, 1976).

## CONCLUSIONES

En base a las simulaciones realizadas, se concluye que, los modelos analíticos aproximados de Philip y Ben Asher son los que más se aproximan al radio del bulbo estimado a través de su contenido de humedad. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, en función de la elección para el contenido de humedad sobre la frontera del bulbo, el tamaño del mismo cambia, y por tanto, las predicciones de cualquiera de los otros tres modelos, dependiendo de las circunstancias, podrían ser más adecuadas. Además, no hay que ignorar que, en función de las características del suelo todos los parámetros de los que dependen estos cinco modelos pueden verse alterados, y con ello su capacidad predictiva. Seguramente, un análisis más detallado del comportamiento de estos modelos para los distintos tipos del suelo sería interesante para determinar cuál es el más adecuado para cada tipo textural.

Recordar que, estos cinco modelos analíticos son de simetría esférica, y por tanto, no tienen en cuenta el efecto de la succión debida al campo gravitatorio. En este sentido, se puede observar en las dos últimas figuras que para las simulaciones referentes a los tiempos de riego más largos (60 min) el aspecto del bulbo es alargado respecto a la dirección vertical, aunque el caudal aplicado no es muy grande. Sin embargo, la ventaja de los modelos analíticos contrastados respecto a otros modelos analíticos más complejos como puede ser Warrick (1974) que si tiene en consideración el efecto del campo gravitatorio, es que pueden hacer predicciones para el frente de avance de forma muy simple y sin necesidad de calcular integrales impropias, o la integral asociada a la función error complementaria de Gauss, que requiere el modelo de Warrick. En este sentido, los modelos numéricos requieren incluso muchos más recursos y tiempo de computación para la integración de las ecuaciones.

Aunque, seguramente, la ventaja principal de estos modelos analíticos simplificados frente a otras alternativas de cálculo para la modelización del bulbo reside en el hecho de que dependen de muy pocos parámetros del suelo, siendo, la mayoría de ellos de fácil obtención por vía experimental.

## REFERENCIAS

Ben Yosef, B., Sheikholami, M.R. 1976. Distribution of water and ions in soils irrigated and fertilized from a trickle source. *Soil. Sci. Soc. Am. J.*, 40, 575-582. <https://doi.org/10.2136/sssaj1976.03615995004000040033x>

- Ben Asher, J., Charach, Ch., Zemel, A. 1986. Infiltration and water extraction from trickle source: the effective hemisphere model. *Soil Sci Soc Am J.*, 50, 882-887. <https://doi.org/10.2136/sssaj1986.03615995005000040010x>
- Brandt, A., Bresler, E., Diner, N., Ben-Asher, J., Heller, J., Goldberg, D. 1971. Infiltration from trickle source: I. mathematical model. *Soil Sci Soc Am Proc.*, 35, 675-682. <https://doi.org/10.2136/sssaj1971.03615995003500050018x>
- Buckingham, E. 1907. Studies on the movement of soil moisture. Bull. 38. U.S. *Dept. of Agr. Bureau of soils*, Washington, D.C.
- Carnahan, B. 1979. *Cálculo numérico. Métodos y aplicaciones*. Rueda ed. Madrid.
- Chu, S.T. 1994. Green-Ampt analysis of wetting patterns for surface emitters. *J. Irrig. Drain E.*, 120(2), 414-421. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1994\)120:2\(414\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1994)120:2(414))
- Clothier, B.E., Scotter, D.R. 1982. Constant-flux infiltration from a hemispherical cavity. *Soil. Sci. Soc. Am. J.*, 46, 696-700. <https://doi.org/10.2136/sssaj1982.03615995004600040006x>
- Darcy, H. 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
- del Vigo, Á. 2020. *Simulación del flujo del agua en el suelo en riego por goteo superficial, soluciones analíticas aproximadas, caracterización del suelo y diseño de los riegos*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid. Madrid. <https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.63840>
- del Vigo, Á., Zubezlu, S., Juana, L. 2019a. Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-D para riego por goteo: Método, validación y resultados preliminares. *XXXVII Congreso Nacional de Riegos*. Don Benito. Spain. <https://doi.org/10.17398/AERYD.2019.A06>
- del Vigo, Á., Zubezlu, S., Juana, L. 2019b. Study of water infiltration in soil by Richards equations in 3D: summary and methodology validation. *11th World Congress on Water Resources and Environment*. Madrid. Spain. [http://ewra.net/pages/EWRA2019\\_Proceedings.pdf](http://ewra.net/pages/EWRA2019_Proceedings.pdf)
- del Vigo, Á., Zubezlu, S., Juana, L. 2019c. Soluciones analíticas aproximadas bajo hipótesis de Green-Ampt desde fuentes semiesférica y circular en superficie. *Jornadas Ingeniería del Agua (J.I.A)*. Toledo. Spain. [https://oa.upm.es/65070/1/INVE\\_MEM\\_2019\\_324240.pdf](https://oa.upm.es/65070/1/INVE_MEM_2019_324240.pdf)
- del Vigo, Á., Zubezlu, S., Juana, L. 2020. Numerical routine for soil dynamics from trickle irrigation. *Applied Mathematical Modeling*, 83, 371-385. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.058>
- del Vigo, Á., Zubezlu, S., Juana, L. 2021. Infiltration models and soil characterization for hemispherical and disc sources based on Green-Ampt assumptions. *Journal of Hydrology*, 595, 1259-1266. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.125966>
- del Vigo, Á., Colimba, J., Juana, L., Rodriguez-Sinobas, L. 2023a. Numerical model for the simulation of soil water flow under root-absorption conditions. Application to tomato plant crop. *Irrigation Sciences*, 41, 141-154. <https://doi.org/10.1007/s00271-022-00806-x>
- del Vigo, Á., Zubezlu, S., Juana, L. 2023b. Radio máximo de la zona saturada en superficie bajo riego por goteo a caudal constante. Modelos analítico y empírico. *Ingeniería del Agua*, 27(2), 111-124. <https://doi.org/10.4995/ia.2023.19328>
- Gardner, W.R. 1958. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.*, 85, 228. <https://doi.org/10.1097/00010694-195804000-00006>
- Green, W.H., Ampt G.A. 1911. Studies in soil physics I: the flow of air and water through soils. *Journal of Agricultural Science*, 4, 1. <https://doi.org/10.1017/S0021859600001441>
- Mualem, Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resource Journal*, 12, 513. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>
- Neuman, S.P. 1976. Wetting front pressure head in the infiltration model of Green and Ampt. *Water Resources Research*, 12, 564-565. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00564>

- Philip, J.R. 1984. Travel times from buried and surface infiltration point sources. *Water Resources Research*, 20(7), 990-994. <https://doi.org/10.1029/WR020i007p00990>
- Raats, P.A.C. 1971. Steady infiltration from point sources, cavities and basins. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 35, 689-694. <https://doi.org/10.2136/sssaj1971.03615995003500050020x>
- Rawls, W.J., Brakensiek, D.L., Soni, B. 1983. Agricultural management effects on soil water process. Part I: Soil water retention and Green and Ampt infiltration parameters. *Trans. Amer. Soc. Agric. Engrs.*, 26(6), 1747-1752. <https://doi.org/10.13031/2013.33837>
- Richards, L.A. 1931. Capillary conduction of liquids in porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1, 318-333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- Roth, R.L. 1974. Soil moisture distribution and wetting pattern from a point source. In *Proceedings of 2nd international drip irrigation congress*. California. EEUU. 246–251
- Šimůnek, J., van Genuchten, M., Šejna, M. 2006. The HYDRUS Software Package for Simulating the Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, *Technical Manual Version 1.0*. University of California Riverside. Riverside, CA, 3PC. Progress, Prague. Czech Republic.
- Taghavi, S.A., Marino, M.A., Rolston D.E. 1984. Infiltration from trickle irrigation source. *J. Irrig. Drain Eng. Eng. ASCE*, 110(4), 331-341. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(1984\)110:4\(331\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(1984)110:4(331))
- Warrick, A.W. 1974. Time-dependent linearized infiltration: I. Point source. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 34, 383. <https://doi.org/10.2136/sssaj1974.03615995003800030008x>
- Warrick, A.W. y Lomen, D.O. 1976. Time-dependent linearized infiltration: III. Strip and disc sources. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 40, 639-643. <https://doi.org/10.2136/sssaj1976.03615995004000050014x>
- Wooding, R.A. 1968. Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resources Research*, 4, 1259-1273. <https://doi.org/10.1029/WR004i006p01259>