

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

Dinámica estructural de cuerpos de
revolución rotatorios: aplicación al
eje de un vehículo ferroviario

Presentada por: D. Juan Fayos Sancho

Dirigida por: Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, mayo de 2008

TESIS DOCTORAL

**Dinámica estructural de cuerpos de
revolución rotatorios: aplicación al
eje de un vehículo ferroviario**

que para la obtención
del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

presenta

D. Juan Fayos Sancho

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
de la Universidad Politécnica de Valencia

Dirigida por

Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, mayo de 2008

TESIS DOCTORAL

**DINÁMICA ESTRUCTURAL DE CUERPOS DE
REVOLUCIÓN ROTATORIOS: APLICACIÓN AL
EJE DE UN VEHÍCULO FERROVIARIO**

Presentada por: D. Juan Fayos Sancho

Dirigida por: Dr. D. Luis Baeza González

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. Fco. Javier Fuenmayor Fernández

VOCALES: Dr. D. Ernesto García Vadillo

Dr. D. José Luis Escalona Franco

Dr. D. Antonio Pérez González

SECRETARIO: Dr. D. Francisco David Denia Guzmán

En Valencia, a 9 de mayo de 2008.

Resumen

Esta Tesis se centra en el desarrollo de una metodología para el modelado de la dinámica de sólidos flexibles de revolución que giran en torno a su eje principal. La técnica propuesta es especialmente adecuada para ser aplicada en la simulación dinámica de este tipo de cuerpos cuando interactúan con estructuras no rotatorias. En la memoria se presentan diferentes modelados en grado creciente de complejidad, que concluyen con la aplicación a un eje flexible y rotatorio de un vehículo ferroviario.

El primer caso que se presenta en la memoria corresponde al estudio de la dinámica de una viga de Rayleigh biarticulada rotatoria. La respuesta, tanto libre como forzada, tiene solución analítica, y ha podido ser caracterizada a través de un único parámetro adimensional. Se ha identificado la trayectoria de los puntos de la viga en su respuesta libre como una superposición de curvas de tipo hipotrocoide.

En el núcleo central de la Tesis, se desarrolla una metodología para sólidos de revolución basada en técnicas de síntesis modal mixta lagrangiana-euleriana. Se demuestra que, para sólidos de revolución, es posible definir una transformación de las coordenadas modales clásicas de tipo lagrangianas a eulerianas, lo que conduce a una formulación computacionalmente eficiente. El método sólo puede ser aplicado analíticamente a vigas, por lo que para geometrías de revolución generales, se ha desarrollado un procedimiento numérico basado en elementos finitos.

La validación del método propuesto se realiza a través del desarrollo de las ecuaciones del movimiento para un cilíndrico biarticulado rotatorio. Este caso es realizado a través de la comparación de resultados correspondientes a tres planteamientos diferentes: el correspondiente a síntesis modal obtenida analíticamente, el análogo numérico basado en elementos finitos, y como un modelo de viga de Rayleigh rotatoria biarticulada. Se obtienen también las ecuaciones del cilindro rotatorio libre, mediante el planteamiento numérico, con el objeto de mostrar otra dinámica algo más compleja.

En la parte final de la memoria se obtiene la ecuación del movimiento de un eje rotatorio de un vehículo ferroviario, aislado, y se estudia su respuesta dinámica, comparándola con la del eje no rotatorio. Por último, el eje se integra en un modelo para la simulación dinámica de un vehículo ferroviario con la vía, obteniendo la fuerza de contacto entre la rueda y el carril en dos casos: cuando el vehículo circula con un plano en la rueda, y cuando el vehículo pasa sobre una vía corrugada. Los resultados se comparan con los obtenidos empleando ejes rígidos y ejes flexibles no rotatorios.

Palabras clave: dinámica, vibraciones, dinámica ferroviaria, síntesis modal, viga de Rayleigh, sólido de revolución, rotación, elementos finitos, modelos analíticos, modelos numéricos, coordenadas lagrangianas, coordenadas eulerianas, coordenadas mixtas.

Abstract

The present Thesis focuses on the development of a methodology for modelling the dynamics of a solid of revolution rotating about its main axis. The proposed technique is especially adequate to be applied in the dynamic simulation of this type of bodies when they interact with non-rotating structures. In this document, different increasingly complex models are presented which conclude with the application to a flexible rotating railway wheelset.

The first case analysed corresponds to the study of the dynamics of a spinning pinned-pinned Rayleigh beam. The free and forced responses have analytical solutions, and they are characterized through an only adimensional parameter. The free response trajectory of points of the beam is identified as the superposition of hypotrochoid curves.

In the core of the document, a methodology for solids of revolution is presented which is based on arbitrary lagrangian–eulerian modal synthesis. It is demonstrated for solids of revolution that it is possible to define a transformation of the classic lagrangian modal coordinates into the eulerian ones, which leads to an efficient computational formulation. This method only can be applied analytically to beams, therefore a numerical procedure based on finite elements is developed for general geometries of revolution.

The validation of the proposed method is performed through the development of the equations for a spinning pinned-pinned cylinder. This case is benchmarked by means of three different approaches: the corresponding one to modal synthesis obtained analytically, the numerical analogue of the former, and a spinning pinned-pinned Rayleigh beam. The equations of motion of the free-ends spinning cylinder are also obtained, with the purpose of showing a more complex response.

In the final part of the document, the equation of motion of a rotating railway wheelset and its dynamic response are studied and compared with the non-rotating behaviour of this solid. Finally, the wheelset model is implemented in a global railway vehicle–track model. Results of the complete system are obtained for two cases: the impact due to a wheel flat, and a vehicle running on a corrugated track. The contact forces derived from the proposed model are compared with those obtained by using rigid wheelsets and non-rotating wheel.

Keywords: dynamics, vibrations, railway dynamics, modal synthesis, Rayleigh’s beam, body of revolution, rotation, finite elements, analytical models, numerical models, lagrangian coordinates, eulerian coordinates, mixed coordinates.

Resum

Aquesta Tesi es centra en el desenvolupament d'una metodologia per al modelatge de la dinàmica de sòlids flexibles de revolució que giren entorn del seu eix principal. La tècnica proposada és especialment adequada per a ser aplicada en la simulació dinàmica d'aquest tipus de cossos quan interaccionen amb estructures no rotatòries. A la memòria es presenten diferents modelatges en grau creixent de complexitat, que conclouen amb l'aplicació a un eix flexible i rotatori d'un vehicle ferroviari.

El primer cas que es presenta en la memòria correspon a l'estudi de la dinàmica d'una biga de Rayleigh biarticulada rotatòria. La resposta, tant lliure com forçada, té solució analítica, i ha pogut ser caracteritzada a través d'un únic paràmetre adimensional. S'ha identificat la trajectòria dels punts de la biga en la seua resposta lliure com una superposició de corbes de tipus hipotrocoide.

En el nucli central de la Tesi, es presenta una metodologia per a sòlids de revolució basada en tècniques de síntesi modal mixta lagrangiana-euleriana. Es demostra que, per a sòlids de revolució, és possible definir una transformació de les coordenades modals clàssiques de tipus lagrangianes a eulerianes, el que conduïx a una formulació computacionalment eficient. El mètode només pot ser aplicat analíticament a bigues, per la qual cosa i per a geometries de revolució generals, s'ha desenrotllat un procediment numèric basat en elements finits.

La validació del mètode proposat es realitza mitjançant l'obtenció de les equacions del moviment per a un cilindre biarticulat rotatori. Aquest cas és realitzat a través de la comparació de resultats relatius a tres plantejaments diferents: el corresponent a síntesi modal obtinguda analíticament, l'anàleg numèric basat en elements finits, i com un model de biga de Rayleigh rotatòria biarticulada. S'obtenen també les equacions del cilindre rotatori lliure, per mitjà del plantejament numèric, amb la finalitat de mostrar una altra dinàmica més complexa.

En la part final de la memòria s'obté l'equació del moviment d'un eix rotatori d'un vehicle ferroviari, aïllat, i s'estudia la seua resposta dinàmica, comparant-la amb la de l'eix no rotatori. Finalment, l'eix s'integra en un model d'interacció dinàmica del vehicle ferroviari amb la via, obtenint la força de contacte entre la roda i el carril en dos casos: quan el vehicle circula amb un pla de bloqueig en les rodes, i quan passa per una via corrugada. Els resultats es comparen amb els obtinguts emprant models d'eixos rígids i d'eixos flexibles no rotatoris.

Paraules clau: dinàmica, vibracions, dinàmica ferroviària, síntesi modal, biga de Rayleigh, sòlid de revolució, rotació, elements finits, models analítics, models numèrics, coordenades lagrangianes, coordenades eulerianes, coordenades mixtes.

Resum ¹

Esta Tesis se centra en el desenroll d'una metodologia per al modelage de la dinàmica de sòlits flexibles de revolució que giren entorn del seu eix principal. La tècnica proposta és especialment adequada per a ser aplicada en la simulació dinàmica d'este tipo de cossos quan interaccionen en estructures no rotatòries. En la memòria es presenten diferents modelacions en grau creixent de complexitat, que conclouen en l'aplicació a un eix flexible i rotatori d'un vehícul ferroviari.

El primer cas que es presenta en la memòria correspon a l'estudi de la dinàmica d'una biga de Rayleigh biarticulada rotatòria. La resposta, tant lliure com forçada, té solució analítica, i ha pogut ser caracterisada a través d'un únic paràmetre adimensional. S'ha identificat la trayectòria dels punts de la biga en la seua resposta lliure com una superposició de corbes de tipo hipotrocoide.

En el núcleu central de la Tesis, es presenta una metodologia per a sòlits de revolució basada en tècniques de síntesis modal mixta lagrangiana-euleriana. Es demostra que, per a sòlits de revolució, és possible definir una transformació de les coordenades modals clàssiques de tipo lagrangianes a eulerianes, lo que conduïx a una formulació computacionalment eficient. El mètode només pot ser aplicat analíticament a bigues, per la qual cosa i per a geometries de revolució generals, s'ha desenrollat un procediment numèric basat en elements finits.

La validació del mètode proposat es realisa per mig de l'obtenció de les equacions del moviment per a un cilindre biarticulat rotatori. Este cas és realisat a través de la comparació de resultats relatius a tres plantejaments diferents: el corresponent a síntesis modal obtinguda analíticament, l'anàlec numèric basat en elements finits, i com un model de biga de Rayleigh rotatòria biarticulada. S'obtenen també les equacions del cilindre rotatori lliure, per mig del plantejament numèric, en la finalitat de mostrar una atra dinàmica més complexa.

En la part final de la memòria s'obté l'equació del moviment d'un eix rotatori d'un vehícul ferroviari, aïllat, i s'estudia la seua resposta dinàmica, comparant-la en la de l'eix no rotatori. Finalment, l'eix s'integra en un model d'interacció dinàmica del vehícul ferroviari en la via, obtenint la força de contacte entre la roda i el carril en dos casos: quan el vehícul circula en un pla de bloqueig en les rodes, i quan passa per una via corrugada. Els resultats se comparen en els obtinguts utilisant models d'eixos rígits i d'eixos flexibles no rotatoris.

Paraules clau: dinàmica, vibracions, dinàmica ferroviària, síntesis modal, biga de Rayleigh, sòlit de revolució, rotació, elements finits, models analítics, models numèrics, coordenades lagrangianes, coordenades eulerianes, coordenades mixtes.

¹El autor no reconece como su lengua materna la reglada según la *Acadèmia Valenciana de la Llengua*. Por ello, ha deseado incluir este resumen en Lengua Valenciana siguiendo las normas de la *Real Acadèmia de Cultura Valenciana*.

Agradecimientos

Quiero empezar expresando mi gratitud a Luis, en su doble papel en este trabajo: como director de la Tesis, por proponerme un tema que ha resultado tan productivo e interesante; y como amigo desde hace tantos años, por su apoyo, sus ánimos y su capacidad de liarme para dar siempre un paso más.

Mi agradecimiento a los miembros del CITV, donde he desarrollado mi actividad laboral la mayor parte de este tiempo, por las facilidades dadas para compatibilizar mi trabajo en el Centro con la realización de la Tesis. Especialmente a los dos directores con los que he coincidido, Javier Fuenmayor y Francisco Valero. Al primero debo agradecer también algunas acertadas orientaciones en la formulación por elementos finitos, así como otras indicaciones.

A Andrés le agradezco la exhaustiva revisión que realizó de toda la formulación relativa a vigas.

Sin la inestimable ayuda de Jose Enrique, aún estaría naufragando más que navegando entre las rutinas de FEAP. *Un pequeño paso para este hombre, pero un gran paso para mi Tesis.*

A Alex debo la facilidad con la que se han obtenido los resultados de las simulaciones. Parafraseando a Newton (y salvando la enorme distancia) *si he visto un poco más lejos es porque me he subido a hombros de gigantes.*

Ha sido un lujo contar con una mente tan clara como la de Paco en la revisión de alguna de las publicaciones asociadas a esta Tesis. A mi amistad y mi admiración hacia él debo añadir ahora mi agradecimiento.

Paloma tuvo la amabilidad de revisar mi siempre mejorable inglés en las publicaciones. *Moltes gràcies.*

El soporte técnico de Fede ha sido imprescindible para sobrevivir a las herramientas informáticas. Y su amistad, un regalo. Muchas gracias.

A Juanvi le debo una paella por abrirme una puerta que me permitirá dedicarme profesionalmente a la investigación, ahora como doctor.

A nivel personal, mi eterno agradecimiento a mis padres, que despejaron el camino que me ha traído hasta aquí. De su mano aprendí a caminar por la vida. Ahora que tengo hijos soy más consciente que nunca de cuánto me han querido. Tengo la suerte de que mi madre aún me acompaña. En cuanto a mi padre, sé lo orgulloso que estaría. *L'orgull és meu, ha segut un privilegi caminar de la vostra mà.*

En la vida hay una etapa para cada cosa, y saltarse el orden *natural* tiene un precio. Ésta no es la etapa más adecuada de la mía para realizar un trabajo de esta envergadura, pero, como alguien me dijo, *en la vida haces lo que la vida te deja.* El precio no lo he pagado yo solo. Ha afectado a todos los que me rodean. Especialmente

a mi familia de Turís, a los que agradezco el apoyo logístico con los niños.

El mérito en la realización de esta Tesis no es mío. Realmente, no es un gran mérito estar dispuesto a desatender las tareas domésticas ingratas para lidiar con una ecuación interesante que se resiste. Nunca hubiera podido llevarla a cabo sin el enorme esfuerzo realizado por María José, mi mujer. Y con dos niños pequeños, doy fe de que hay mucho trabajo en casa. *Moltes gràcies pel teu esforç i el teu carinyo. Te vullc molt.*

Quiero concluir mencionando a dos personas muy importantes para mí: mis dos hijos, Carles y Marina. Sin sus siestas, este trabajo no hubiera podido realizarse. Una cosa ha quedado clara: *no volveré a tener hijos antes de ser doctor, ni realizaré otro doctorado teniendo dos hijos tan pequeños.* Sorprendentemente, a pesar de la Tesis, aún me quieren.

Nomenclatura

Las convenciones utilizadas en el desarrollo de esta Tesis son las siguientes. Los símbolos matemáticos se expresan en letra itálica para diferenciarlos claramente del resto del texto. Como excepción se encuentran las funciones matemáticas, los tensores, los vectores y las matrices. Éstas tres últimas se expresan, además, en letra negrita. Las magnitudes tensoriales se distinguen mediante dos barras horizontales, y las vectoriales mediante una flecha, ambas encima del nombre de la variable. Sus componentes en un sistema de coordenadas dado son tratadas y expresadas como matrices. En el caso de los vectores, como matrices columna. De esta forma, se denota, por ejemplo:

x	Escalar (real o complejo)
$\sin(x)$	Función matemática
$\vec{\mathbf{u}}$	Vector
\mathbf{u}	Matriz (columna) con las componentes del vector $\vec{\mathbf{u}}$
$\overline{\mathbf{I}}$	Tensor
\mathbf{I}	Matriz con las componentes del tensor $\overline{\mathbf{I}}$

En cada uno de los capítulos se explica el significado de las variables utilizadas. También se emplean algunos símbolos especiales cuyo significado se recoge a continuación.

i	Unidad imaginaria
$\Re(z)$	Parte real del complejo z
$\Im(z)$	Parte imaginaria del complejo z
\mathbb{R}	Conjunto de los número reales
\mathbb{C}	Conjunto de los número complejos

A ma mare i a la memòria de mon pare

Als meus fills, Carles i Marina

I, molt especialment, a María José

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Resum	V
Agradecimientos	IX
Nomenclatura	XI
Índice general	XV
1. Introducción	1
1.1. Motivación y antecedentes	3
1.2. Objetivos	6
1.3. Organización de esta Tesis	8
2. Modelo analítico de una viga de Rayleigh rotatoria	11
2.1. Introducción	13
2.2. Modelos analíticos de vigas	13
2.3. Ecuaciones generales del movimiento	14
2.4. Ecuaciones del movimiento de flexión de una viga cilíndrica	25
2.5. Particularización para una viga biarticulada	28
2.6. Vibraciones libres	33
2.6.1. Condiciones iniciales en coordenadas generalizadas	37
2.6.2. Órbitas modales	38

2.7. Vibraciones forzadas	46
2.7.1. Inertancias modales	47
2.8. Estabilidad del sistema	49
2.9. Conclusiones	52
3. Método general para cuerpos elásticos en rotación	55
3.1. Introducción	57
3.2. Modelo cinemático	58
3.3. Ecuación del movimiento	60
3.4. Limitación del método	63
3.5. Conclusiones	63
4. Cuerpos elásticos de revolución en rotación sobre su propio eje	65
4.1. Introducción	67
4.2. Cuerpos de revolución: la transformación modal	70
4.3. Interpretación física de la transformación modal	82
4.4. Síntesis modal mixta lagrangiana–euleriana	85
4.5. Ecuación del movimiento en coordenadas modales mixtas	87
4.6. Ecuación del movimiento en coordenadas modales lagrangianas	89
4.7. Conclusiones	90
5. Modelos analíticos de un cilindro rotatorio	93
5.1. Introducción	95
5.2. Modelos tridimensionales lineales	95
5.3. Funciones de forma tridimensionales	99
5.4. Obtención analítica de los términos de las ecuaciones	102
5.5. Ecuaciones del movimiento	106
5.6. Equivalencia entre los modelos lagrangiano y mixto	108
5.7. Limitación de los modelos lineales	109
5.8. Conclusiones	115
6. Método computacional	117
6.1. Introducción	119

6.2. Interpolación en el MEF	119
6.3. Formulación mediante el MEF	120
6.4. Modelo de un cilindro biarticulado	122
6.4.1. Modelado analítico	123
6.4.2. Modelado mediante el MEF	126
6.4.3. Comparación entre modelos	128
6.5. Modelo de un cilindro libre	134
6.6. Conclusiones	141
7. Respuesta dinámica de un cilindro rotatorio	143
7.1. Introducción	145
7.2. Formulación de las receptancias	145
7.3. Cilindro biarticulado	147
7.4. Cilindro libre	152
7.5. Conclusiones	157
8. Aplicación a un eje de vehículo ferroviario	167
8.1. Introducción	169
8.2. Modelo numérico	169
8.3. Respuesta a condiciones iniciales modales	171
8.4. Receptancias	175
8.5. Conclusiones	176
9. Aplicación a modelos de interacción vehículo ferroviario-vía	183
9.1. Introducción	185
9.2. Modelo de interacción de la UPV	186
9.2.1. Modelado de la vía	186
9.2.2. Obtención de las ecuaciones del movimiento de la vía	188
9.2.3. Modelo del vehículo	189
9.2.4. Fuerzas en el contacto rueda-carril	190
9.2.5. Placas de asiento	190
9.2.6. Solución del problema de interacción	191

9.3. Implementación del eje flexible rotatorio	191
9.4. Cálculos	192
9.4.1. Plano de bloqueo	192
9.4.2. Corrugación	193
9.5. Conclusiones	195
10. Conclusiones y desarrollos futuros	199
10.1. Conclusiones	201
10.2. Desarrollos futuros	203
A. Fundamentos de cinemática espacial	205
A.1. Introducción	207
A.2. Matriz de transformación entre sistemas de referencia	207
A.3. Ortonormalidad de la matriz de transformación	209
A.4. Rotación de vectores	210
A.5. Rotaciones simples	210
A.6. Rotaciones sucesivas	211
A.7. Velocidad angular y aceleración angular	213
A.7.1. En ejes fijos	213
A.7.2. En ejes móviles	214
A.8. Derivación temporal de vectores	215
A.9. Cinemática del sólido rígido	216
A.9.1. Cinemática absoluta	216
A.9.2. Cinemática relativa	218
A.10. Conclusiones	219
Bibliografía	221

Capítulo 1

Introducción

Objeto del capítulo:

Este capítulo presenta los antecedentes del problema, enmarcando la Tesis en el contexto que justifica su desarrollo. Se definen y acotan los objetivos a conseguir y se describe la estructura de la memoria.

1.1. Motivación y antecedentes

Esta Tesis se enmarca en la línea de investigación de dinámica ferroviaria desarrollada en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia. Dentro de esta línea se estudia la dinámica acoplada entre un vehículo ferroviario y la vía, que afecta a problemas de corrugación de los carriles, ovalización y poligonalización de las ruedas, planos de bloqueo en ruedas (desgastes producidos durante el bloqueo de un eje durante una frenada) y otros tipos de desgastes anormales que afectan a la emisión acústica, a la conservación de la vía y a la fiabilidad de los órganos de rodadura de los vehículos. Estos fenómenos se asocian a un rango de altas frecuencias y están caracterizados por la dinámica estructural de los elementos que conforman el sistema.

La importancia de este tema ha favorecido que diversos investigadores hayan propuesto metodologías para la simulación dinámica de la interacción del vehículo con la vía (ver revisiones en referencias [47] y [63]). Desde un punto de vista general, los modelos del sistema completo pueden ser agrupados en dos familias. Por un lado, se encuentran aquellos modelados que aplican técnicas a partir de las cuales los componentes de la vía no son discretizados en el espacio, sino descritos por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que tienen solución analítica al realizar algún tipo de simplificación (véase [48, 49, 51, 84]). Este grupo tiene asociado costes computacionales muy bajos y un ajuste a la realidad limitado, siendo la mayor parte de ellos lineales. El modelado proporciona frecuentemente resultados a través de una formulación analítica y habitualmente se limita a considerar la vía como una viga de Winkler. En algunos de estos trabajos [27, 57, 62] se destaca las limitaciones de estos modelos al ser incapaces de introducir la vía apoyada sobre soportes discretos. Son frecuentes los modelos basados en el cálculo de la *Función de Respuesta en Frecuencia* (FRF) de la vía, si bien este procedimiento no pueden considerar las no linealidades localizadas en el contacto, y en las propiedades mecánicas del balasto y de las placas de asiento.

Por otro lado existen aquellos modelos basados en el *Método de Elementos Finitos* (MEF) que se resuelven en el dominio del tiempo a través de la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver referencias [2, 17, 28, 41, 65]). Este tipo de modelos pueden considerar el sistema con gran realismo (por ejemplo, no-linealidades), pero el tiempo de cálculo puede ser elevado. Tal como se señala en [59], la principal desventaja del uso de estos modelos es el coste computacional al considerar un número muy elevado de coordenadas. El MEF también ha sido empleado para obtener las FRF, tal como se propone en las referencias [57–59, 78].

Un método desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia [10, 66] tuvo como objetivo aprovechar las ventajas de ambos procedimientos. Este modelo ha sido aplicado al cálculo de impactos producidos por planos de ruedas [9] y al de rotura de carriles [60]. El procedimiento propone analizar de forma separada subestructuras del sistema completo: el vehículo, los carriles y las traviesas. Cada una de estas subestructuras tiene propieda-

des que pueden considerarse lineales, mientras que las no linealidades se encuentran en los elementos de conexión (placas de asiento, contacto rueda–carril y balasto). Los elementos de conexión se modelan como fuerzas que dependen de los desplazamientos y velocidades relativos de los puntos que unen. Estas fuerzas se incorporan a cada modelo de cada subestructura, correspondiendo el de carriles y traviesas a sistemas flexibles y el del vehículo a un modelo de parámetros concentrados. Por consiguiente, este modelo, así como la mayor parte de los modelos que se presentan en la bibliografía, consideran el eje montado como un sólido rígido.

El eje se modela rígido por varias razones. En primer lugar, por la complejidad inherente al modelado del eje flexible rotatorio. Por otro lado, los modelos previos en dinámica ferroviaria consideran un rango en frecuencias mucho más bajo (hasta 20 Hz) y han sido desarrollados a través de modelos de masas y rigideces concentradas. Por último, la idea aceptada de que el comportamiento flexible es despreciable, basada en la rigidez mucho más elevada del eje y en que la velocidad angular del eje no es elevada.

Uno de los trabajos que ha contribuido a través de un eje flexible corresponde a la Tesis de Andersson [2] y a los artículos que de ella se han publicado [3, 42]. En su modelo desprecia los efectos asociados a la rotación. Entre sus conclusiones se destaca la poca influencia del modelo elástico frente al rígido. Otro modelo del eje flexible no rotatorio ha sido desarrollado por otra universidad sueca en [18].

Entre los primeros trabajos en los que se estudia la interacción rueda–carril, considerando aquélla como un cuerpo flexible en rotación, se encuentra el presentado por Thompson en [77]. Desprecia los términos inerciales asociados a la rotación y sólo tiene en cuenta el movimiento relativo de la fuerza de interacción rueda–carril.

Los estudios realizados por Szolc [74–76], aunque modelan el eje como un cuerpo flexible rotatorio, lo hacen mediante una idealización del mismo como una viga de sección variable (la barra central), continua, deformable a flexión y torsión y rotatoria, unida a un conjunto de anillos rígidos que simulan las ruedas y discos de freno. La unión entre estos elementos y la viga se realiza mediante membranas elásticas sin masa. De esta forma obtiene una formulación analítica del eje.

Aplicando técnicas de dinámica de sistemas multicuerpo y de síntesis modal de componentes, Meinders [53] modela un eje flexible rotatorio con desequilibrio estático y dinámico. Tras realizar un estudio del eje aislado, concluye que los términos giroscópicos no son en absoluto despreciables en vehículos de alta velocidad. En un trabajo posterior, Meinders y Mainke [54] emplean este modelo del eje para estudiar fenómenos de desgaste. Para poder aplicar las fuerzas en el contacto rueda–carril sobre el eje de forma computacionalmente eficiente asumen un comportamiento rígido de la banda de rodadura, de forma que pueden trasladar la acción de la fuerza al centro de la sección del eje, que es un punto no rotatorio.

En [21], Claus y Schiehlen emplean técnicas de sistemas multicuerpo para modelar un eje flexible rotatorio, simplificándolo como un conjunto de cuerpos rígidos unidos mediante elementos flexibles sin masa.

Posiblemente el modelo más avanzado corresponde a presentado por Popp *et al.* en [64], el cual incorpora, además de la flexibilidad del eje, los efectos inerciales y giroscópicos asociados a la rotación, sin necesidad de incorporar elementos rígidos para la aplicación de las fuerzas de contacto. En esta referencia se hacen explícitas las hipótesis adoptadas y el tipo de la formulación desarrollada, pero no se explica el desarrollo ni el detalle de la formulación. No es posible, por tanto, reproducir el modelo. La técnica se aplica a cálculos que corresponden a baja frecuencia, estableciéndose las condiciones para las que la dinámica estructural del eje puede contribuir en los resultados. La influencia en problemas correspondientes a un rango en frecuencias elevado no ha sido investigada. Los resultados se obtienen utilizando un modelo de elementos finitos de barras y placas del eje. El mismo método vuelve a ser empleado en [8] y en [43] utilizando modelos sólidos de elementos finitos del eje. En ningún caso se muestra el proceso para obtener la ecuación del movimiento del eje. Tampoco se comparan los resultados de los modelos flexibles rotatorio y no rotatorio.

En [37] E. Gómez también estima los efectos giroscópicos asociados a la rotación como no despreciables en la deformación del eje. Tales esfuerzos se calculan a partir de un desplazamiento impuesto del eje. No existe aquí un verdadero modelo en el que desplazamientos y fuerzas están mutuamente acoplados.

La presente Tesis está motivada por la necesidad de salvar las dificultades que surgen al incorporar una estructura flexible y rotatoria, el eje, en los modelos de dinámica ferroviaria. Los métodos generales para modelar sólidos flexibles sometidos a movimientos de sólido rígido no aprovechan las posibilidades de simplificación que ofrecen las estructuras con geometría de revolución. Y por otro lado, tampoco se encuentran estudios centrados en sólidos de revolución. Sí es muy amplia, no obstante, la bibliografía existente sobre vigas rotatorias, aunque gran parte de ella está dedicada a vigas que giran respecto de un eje transversal, modelando de forma simplificada álabes de turbomáquinas, palas de hélices o el despliegue de brazos de satélites. Por citar algunos significativos, véase [26, 50, 55, 73, 81, 83].

En cuanto a vigas que giran sobre su eje longitudinal, Dimentberg [23] fue de los primeros en derivar la ecuación característica de un eje rotatorio simplemente apoyado mediante un modelo clásico (Euler–Bernoulli). Kane [44] analizó el movimiento de giro de un eje elástico sujeto a un disco rígido. Eshleman *et al.* [29] condujeron un estudio analítico de la velocidad crítica de un rotor con cojinetes largos y cortos. La relación entre la frecuencia natural de una viga clásica rotatoria y una no rotatoria fue estudiada por Bauer [12].

Es conocido que el modelo Euler–Bernoulli de viga es adecuado para simular las frecuencias naturales de los primeros modos de vigas relativamente largas y esbeltas. En el caso de vigas rotatorias, el efecto de la inercia al giro de la sección no es en absoluto despreciable, por lo que se requieren modelos de Rayleigh o de Rayleigh–Timoshenko. La dinámica de una viga rotatoria ante una carga axial móvil fue analizada por Katz *et al.* [46] mediante un modelo de este último tipo. Choi *et al.* [20] desarrollaron una metodología para obtener de forma consistente la ecuación del movimiento que describe las vibraciones de flexión y torsión de una viga de Rayleigh–Timoshenko

rotatoria con distinto momento de inercia en cada plano, y sometida a carga axial. Recientemente, Sheu y Yang [72] han demostrado que una viga de Rayleigh rotatoria, excitada por un desequilibrio, tiene sólo un número finito de frecuencias críticas.

También se han dirigido esfuerzos para modelar vigas rotatorias mediante el Método de los Elementos Finitos. El modelo desarrollado por Nelson y McVaugh [56] ha sido implementado recientemente en el programa ANSYS [4] (a partir de la versión 10.0).

Como modelo más avanzado, se referirá al presentado por Brown y Shabana en [16], aunque sus posibilidades no han sido suficientemente desarrolladas. En ese estudio se aplica el método de Shabana [68] de modelado de sistemas elásticos multicuerpo a una viga rotatoria y se demuestra que no presenta las inestabilidades que se predicen si se modela como un sistema de un grado de libertad en rotación. No obstante, se aplica a una viga de Euler–Bernoulli, perdiendo los términos giroscópicos asociados a la inercia al giro.

1.2. Objetivos

El fin último de la Tesis es encontrar una formulación eficiente para modelar el eje ferroviario como un sólido flexible rotatorio, que permita integrarlo en el sistema desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la UPV y descrito en [10, 66].

Además de la dinámica ferroviaria, existen numerosas aplicaciones prácticas en las que es necesario obtener el modelo dinámico de un cuerpo flexible con geometría de revolución que se encuentra sometido a una rotación sobre su eje principal y que, además, interacciona con otros cuerpos no rotatorios. Por ejemplo, otros vehículos, ejes y árboles de rotores, generadores..., o ciertos procesos de fabricación como el torneado. Por ello, la metodología desarrollada en esta Tesis tiene un amplio campo de aplicación.

En todos estos casos, es la superficie deformada del cuerpo rotatorio la que determina la interacción con las otras estructuras no rotatorias del sistema, no siendo de interés qué partículas materiales concretas son las que intervienen. Por ejemplo, los modelos dinámicos de vehículos ferroviarios consideran el punto de contacto rueda–carril y la posición de las cajas de grasa de los ejes. Estos puntos están situados en una superficie teórica no rotatoria que envuelve al sólido.

Puesto que el interés se centra en una superficie no rotatoria, es fácil encontrar trabajos en los que se desprecia el movimiento de giro. Sin embargo, como se verá en esta Tesis, la rotación produce un acoplamiento dinámico entre dos planos ortogonales que contengan al eje del sólido. Este acoplamiento es debido a efectos inerciales y giroscópicos, y puede no ser despreciable en algunos casos, incluso cuando la velocidad de rotación es baja.

Es muy amplia la experiencia en la industria en la obtención de propiedades

dinámicas de sistemas no rotatorios, en el desarrollo de modelos de subestructuras y en la simulación de la respuesta del conjunto integrado. Es deseable aprovechar este conocimiento en el estudio de sistemas rotatorios.

Por ello, en este trabajo se pretende conseguir los siguientes objetivos:

- Desarrollar y analizar modelos simplificados basados en vigas que puedan establecer las bases del comportamiento dinámico de sistemas rotatorios más complejos.
- Desarrollar una formulación para obtener el modelo dinámico de sólidos elásticos lineales de revolución en rotación sobre su eje de simetría con velocidad angular constante.¹
- Aplicar el modelo desarrollado a un caso sencillo, un cilindro, cuyos parámetros son calculables a través de modelos simples (el cilindro modelado como una viga) y mediante otros más generales (el cilindro modelado mediante elementos finitos).
- Desarrollar un modelo del eje aislado de un vehículo ferroviario como un sólido flexible rotatorio.
- Caracterizar a través del análisis de las ecuaciones del movimiento y de las funciones de respuesta en frecuencia correspondiente el comportamiento dinámico del eje rotatorio.
- Implementar el modelo del eje rotatorio en el programa de cálculo de la interacción dinámica de un vehículo ferroviario con la vía desarrollado en [10, 66].
- Comparar las respuestas dinámicas asociadas a la circulación de un vehículo sobre una vía corrugada por un lado, y a un impacto producido por un plano por otro, cuando son calculadas mediante un modelo del eje rígido, un modelo del eje elástico que no gira y un modelo del eje elástico rotatorio.

Además, la metodología obtenida deberá cumplir las condiciones siguientes:

- El modelo deberá ser fácilmente integrable en un método de subestructuración, sin agravar excesivamente la eficiencia computacional del mismo, por lo que se propondrá un modelo modal.
- También por motivos de eficiencia computacional, se plantearán los desarrollos dentro del ámbito de las vibraciones lineales.

¹La ecuación de Euler $\vec{M} = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{I}} \vec{\Omega})$, donde \vec{M} es el momento resultante aplicado sobre un sistema que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$, siendo $\bar{\mathbf{I}}$ su tensor de inercia, establece que si la velocidad angular debe mantenerse constante, cualquier modificación en el tensor de inercia obliga a la presencia de un par externo neto. En el contexto de esta Tesis, en la que se van a tratar sistemas deformables que, por tanto, modificarán su tensor de inercia, se asume que tales variaciones son suficientemente pequeñas como para aceptar que la velocidad angular se mantiene sustancialmente constante, sin necesidad de un par externo (hipótesis de pequeños desplazamientos).

- Deberá partir de las propiedades dinámicas (modos y frecuencias propias) del sistema no rotatorio, obtenibles por métodos disponibles actualmente en la industria.

Debe tenerse muy presente que los resultados y conclusiones a los que se llegue a partir de los modelos matemáticos sólo son válidos en la medida en que los modelos analíticos asociados sean representativos de la realidad que se modela. En particular, a lo largo de toda la Tesis, sólo se considerarán sistemas ideales, con geometría rigurosamente de revolución, sin ningún tipo de imperfección que conduzca a excentricidades en la posición del centro de masas y sin amortiguamiento interno ni externo. Por tanto, los resultados pueden discrepar de los que se encuentran en la literatura sobre rotores [19, 22, 38] donde, habitualmente, sí se consideran todos esos efectos. Especialmente cuando se refieren ensayos sobre sistemas reales, en los que difícilmente no estarán presentes.

La exclusión de estos efectos se justifica porque el objetivo es obtener una metodología para formular la ecuación del movimiento. Incluirlos sólo complicaría la formulación matemática, oscureciéndola. Sin embargo, una vez desarrollado el método, puede ser ampliado en trabajos futuros para considerar éstos u otros fenómenos.

1.3. Organización de esta Tesis

En primer lugar, en el capítulo 2 se presenta un estudio analítico de la respuesta dinámica de un sistema relativamente sencillo, una viga de Rayleigh rotatoria, lo que ayudará a entender el tipo de comportamiento que es posible esperar de una estructura en rotación.

En la bibliografía existente es posible encontrar la formulación de modelos dinámicos para cuerpos generales sometidos a cualesquiera movimientos de sólido rígido, partiendo de las propiedades dinámicas del sistema no rotatorio. En el capítulo 3 se sigue una de ellas, basada en síntesis modal, para obtener la ecuación del movimiento en el caso particular en que el movimiento de cuerpo rígido se limita a una rotación con velocidad angular constante y se discuten sus inconvenientes.

El capítulo 4 es el núcleo central de esta Tesis. En él se plantean ciertas propiedades de los cuerpos de revolución y se explotan para transformar la ecuación del capítulo anterior, superando los inconvenientes. Para ello se introduce el concepto de *transformación modal*.

En el capítulo 5 se obtiene analíticamente la ecuación del movimiento de un cilindro (sólido tridimensional) con comportamiento de viga de Rayleigh mediante las formulaciones obtenidas en los dos capítulos anteriores. Se comparan entre ellas, mostrando su equivalencia, y con la del capítulo 2.

Para poder aplicar el método desarrollado en el capítulo 4 a cuerpos de revolución cualesquiera, es necesario obtener los términos de la ecuación mediante técnicas

numéricas. En el capítulo 6 se formulan dichos términos mediante el Método de los Elementos Finitos. Se obtienen las ecuaciones del movimiento de un cilindro en dos condiciones, biarticulado y libre, y se comparan con las obtenidas analíticamente.

En el capítulo 7 se emplean las ecuaciones del movimiento obtenidas en capítulos anteriores, analíticamente y mediante el MEF, para estudiar la respuesta dinámica de un cilindro rotatorio. Se obtienen funciones de respuesta en frecuencia de receptancia y se comparan ambas formulaciones.

La formulación desarrollada en esta Tesis se aplica en el capítulo 8 para hallar la ecuación del movimiento de un eje de vehículo ferroviario libre. Los términos de esta ecuación se obtienen mediante el MEF. Se encuentra la respuesta dinámica del eje y se muestran receptancias y órbitas de puntos de interés.

En el capítulo 9 se integra el eje en un modelo para el estudio de la interacción entre el vehículo ferroviario y la vía y se estudia la fuerza en el contacto rueda-carril en dos casos: la presencia de un plano en la rueda, y la existencia de corrugación en el carril.

Las conclusiones que se extraen del trabajo realizado se recogen en el capítulo 10 y se resumen las aportaciones asociadas a la Tesis. Así mismo, se indican posibles desarrollos futuros.

Finalmente, en el apéndice A se recogen algunos conceptos de cinemática espacial que han sido empleados en capítulos anteriores.

La memoria termina con la lista de referencias bibliográficas.

Capítulo 2

Modelo analítico de una viga de Rayleigh rotatoria

Objeto del capítulo:

El objeto de este capítulo es clarificar el tipo de respuesta dinámica que puede esperarse de un sistema rotatorio, dado que ésta no es en absoluto intuitiva. Para ello, se estudia un sistema suficientemente sencillo –una viga de Rayleigh– como para permitir un tratamiento analítico.

2.1. Introducción

Antes de abordar una metodología que permita el estudio de la dinámica de sólidos complejos sometidos a movimientos de revolución, es conveniente plantear una primera aproximación a través de un modelo sencillo, del que se pueda encontrar su solución de forma simbólica. Esto facilita entender el comportamiento del sistema estudiado.

El objetivo de este capítulo es establecer unas bases teóricas que puedan determinar la influencia de la rotación en la dinámica vibratoria de un eje elástico. La investigación se desarrolla a través de un planteamiento general de Teoría de Vigas. Partiendo de las hipótesis de viga de Rayleigh, se obtienen las ecuaciones del movimiento para una viga rotatoria, mostrando la naturaleza de su respuesta. Las expresiones resultantes se escriben en una forma adimensional, lo que permite caracterizar la respuesta general del sistema.

No se pretende aquí, evidentemente, realizar un estudio exhaustivo sobre vigas, sino sólo entender cómo afecta la rotación a la respuesta vibratoria. Se estudia el caso de viga biarticulada que, por su relativa sencillez matemática, permite un tratamiento analítico. Se obtiene tanto la respuesta en vibraciones libres como forzadas.

2.2. Modelos analíticos de vigas

Una viga es aquel elemento estructural en el que una de sus dimensiones es mucho mayor que las otras. Esto permite hacer algunas simplificaciones sobre su comportamiento, lo que da lugar a modelos matemáticos relativamente sencillos. Se supone que la masa está distribuida a lo largo de la fibra neutra y se asume que las secciones rectas de la viga se mantienen planas e indeformadas aunque la viga, en conjunto, se deforme.

Según qué efectos se consideren en la flexión, se tiene la siguiente clasificación.

- **Viga de Euler–Bernoulli.** Es el modelo más sencillo. En él, las secciones que son normales a la fibra neutra en la no deformada continúan siéndolo en la flexión. Esto es asumir que el giro de la sección es debido exclusivamente al momento flector, despreciando el efecto de la fuerza cortante. En el movimiento de flexión, sólo tiene en cuenta la inercia de las secciones a la traslación lateral.
- **Viga de Rayleigh.** Junto con las hipótesis anteriores, considera también que las secciones no sólo se trasladan lateralmente durante la flexión, sino que giran respecto de un eje normal a la fibra neutra y tiene en cuenta la inercia frente a este giro.
- **Viga de Timoshenko.** No tiene en cuenta el efecto de inercia al giro de la sección, pero considera que el ángulo girado por la sección no es debido sólo al momento flector, sino también al cortante, por lo que las secciones dejan de ser normales a la fibra neutra durante la flexión.

- **Viga de Rayleigh–Timoshenko.** Es el modelo más completo. Tiene en cuenta los dos efectos anteriores, la inercia al giro y la influencia del cortante en el ángulo girado.

Los modelos de Euler–Bernoulli y de Timoshenko no tienen en cuenta la inercia al giro de la sección. Como veremos posteriormente (apartado 2.3), es esta inercia la responsable de los efectos que tratamos de estudiar, por lo que estos modelos no son en absoluto adecuados para estudiar el caso de una viga en rotación sobre sí misma.

De los otros dos modelos, aunque el de Rayleigh–Timoshenko es, evidentemente, más general, también lleva asociado un desarrollo matemático mucho más complejo que, sin embargo, no aporta nada al fenómeno en estudio.

El modelo más sencillo que permite estudiar el efecto de la rotación de la viga en torno a su eje longitudinal es el de Rayleigh y, por ello, es el que adoptaremos aquí.

2.3. Ecuaciones generales del movimiento

Sea una viga de Rayleigh de sección circular¹ que pueda girar en torno a su propio eje ángulos no considerables como *pequeños desplazamientos*, siendo Ω la velocidad angular de la sección sobre su normal. En el caso más general, esta velocidad podrá ser variable en el tiempo y distinta en cada sección, dando lugar a deformaciones de torsión.

En el modelo analítico de Rayleigh, la sección recta de la viga permanece indeformada; se traslada y gira, pero no se alabea ni cambia la forma de su contorno. Esto permite tratar a cada segmento de espesor diferencial de la viga como un sólido rígido. Así mismo, limita la aplicación de los resultados obtenidos a sólidos más complejos. Además, al no considerar la deformación por cortante, la sección permanece en todo momento perpendicular a la fibra neutra, por lo que los ángulos girados por la sección se relacionan con el desplazamiento lateral de su centroide.

Se han considerado tres sistemas de referencia, situados todos ellos en el centro de una de las secciones extremas de la viga en el instante inicial. La figura 2.1 muestra estos tres sistemas. Para ilustrar la relación entre ellos y la sección a la que están asociados, se han representado con su origen en el centro de la sección en la deformada, aunque, como se ha dicho, su posición corresponde a un extremo de la viga no deformada. La siguiente enumeración presenta una breve descripción intuitiva de los tres sistemas. Más adelante, en este mismo apartado, se da una definición más rigurosa al describir la transformación entre ellos.

- **Sistema fijo.** Es un sistema inercial, situado en un extremo de la viga no deformada y con su primer eje en la dirección longitudinal de la viga, es decir, coincidente con la fibra neutra no deformada en el instante inicial. Dado un vector $\vec{\mathbf{u}}$, representaremos sus coordenadas en el sistema fijo como \mathbf{u} .

¹Más propiamente, de sección tal que sus momentos principales centrales de inercia sean iguales.

- **Sistema intermedio.** Para cada sección de la viga, consideremos un sistema que se mueva solidariamente con el plano de la sección, sin seguir la rotación de ésta en torno a su normal, y orientado de tal forma que sus ejes sean paralelos a los fijos cuando la viga no está deformada, en el instante inicial. Definimos el sistema intermedio (para esa sección) de forma que sus ejes son en todo momento paralelos a los del primero, pero con su origen coincidente con el del sistema fijo. A las componentes de un vector \vec{u} en este sistema las representaremos como \mathbf{u}' . El sistema intermedio será diferente para cada sección que se considere.
- **Sistema del sólido.** Por último, consideremos, también para cada sección, un sistema que se mueva solidariamente con ella, y orientado de tal forma que sus ejes sean paralelos a los fijos cuando la viga no está deformada, en el instante inicial. A partir de este sistema, definimos el sistema del sólido (para esa sección) como uno cuyos ejes son en todo momento paralelos a los del primero, pero con su origen coincidente con el del sistema fijo. Representaremos las componentes de un vector \vec{u} en este sistema como \mathbf{u}'' . Como antes, el sistema del sólido será diferente para cada sección que se considere.

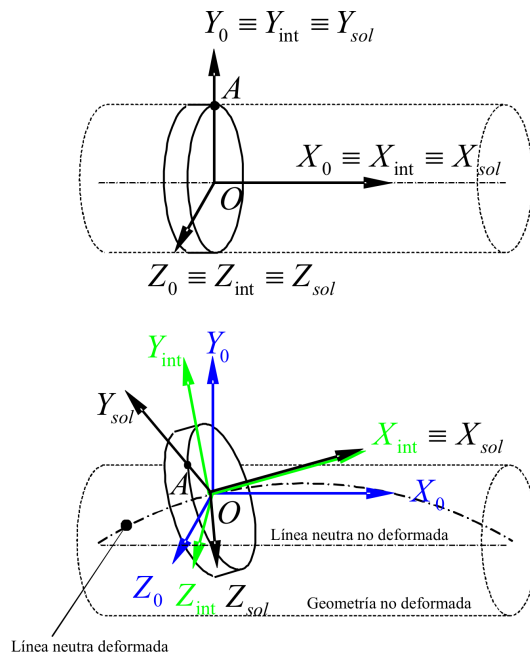


Figura 2.1. *Sistemas de coordenadas: fijo (0), intermedio (int) y del sólido (sol). Cualquier punto material A se encuentra siempre en las mismas coordenadas en ejes del sólido.*

La metodología seguida para obtener las ecuaciones del movimiento consiste en plantear las ecuaciones de Newton-Euler para uno de estos segmentos de espesor diferencial y, posteriormente, integrarlas a lo largo de la longitud. Al tratar el segmento

como sólido rígido, es suficiente dar la posición del centro de la sección de referencia para situarlo, y la orientación del sistema del sólido para orientarlo.

Una problemática intrínseca de la dinámica del sólido rígido, concretamente, de la aplicación de las ecuaciones de Euler, es que, en general, la matriz de inercia es variable en ejes fijos al modificarse la orientación del sólido con el tiempo. Por ello, suele trabajarse en ejes del sólido, en los que permanece constante.

En el caso de un segmento diferencial de una viga, los ejes del sólido sufren pequeños desplazamientos en las tres direcciones del espacio, y pequeñas rotaciones en torno a direcciones contenidas en la sección, lo que permite adoptar la hipótesis de pequeños desplazamientos, a partir de la cual pueden linealizarse algunas expresiones. Sin embargo, también tienen un movimiento de rotación en torno a la normal de la sección para la que está definido (la rotación de la viga) que de ningún modo puede considerarse pequeño.

Dado que la sección de la viga en estudio es circular, los segmentos diferenciales presentan simetría de revolución; y la rotación a la que se somete a la viga lleva la dirección de ese eje de simetría. Tal y como se han definido los ejes intermedios, esto hace que al escribir la ecuación en ellos, los elementos de la matriz de inercia del segmento sean constantes en el tiempo, y además, el sistema de referencia sólo tenga pequeños desplazamientos y giros.

Si $\vec{\mathbf{F}}_G$ y $\vec{\mathbf{M}}_G$ son la resultante y el momento resultante en su centro de masas de las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido de masa m y tensor de inercia másico central $\bar{\mathbf{I}}_{GM}$, las leyes de Newton-Euler se escriben

$$\vec{\mathbf{F}}_G = m \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} \quad (2.1)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_G = \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{I}}_{GM} \vec{\boldsymbol{\Omega}}_s \right) \quad (2.2)$$

siendo $\vec{\mathbf{r}}$ el vector de posición del centro de masas del sólido respecto del origen de coordenadas (recuérdese que el origen de coordenadas es común para todos los sistemas empleados) y $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_s$ la velocidad angular instantánea del sólido, que puede ser expresada a través de la matriz de transformación del sistema de coordenadas del sólido en el fijo y de su derivada, como se muestra en el apéndice A (ecuación (A.36) y siguientes). Las derivadas temporales que aparecen en (2.1) y (2.2) son derivadas absolutas. La masa es una constante, independiente del tiempo, mientras que el tensor de inercia variará si cambia la orientación del sólido. El resto de las magnitudes depende del tiempo.

Para aplicar estas ecuaciones a un segmento diferencial de una viga hay que tener en cuenta que también serán magnitudes diferenciales la resultante de las fuerzas, el momento resultante, el tensor de inercia y la masa. Como antes, esta última es la única independiente del tiempo. Pero en este caso, todas ellas serán función de a qué segmento diferencial estén referidas. Por ello, las derivadas temporales serán derivadas parciales² respecto del tiempo (no obstante, seguirán siendo derivadas absolutas, en

²Dada una función $z(x, t)$, normalmente se denota por \dot{z} (Newton) o $\frac{dz}{dt}$ (Leibnitz) a la derivada

el sentido definido en el apéndice A, apartado A.8). Así, las ecuaciones (2.1) y (2.2), aplicadas a un segmento diferencial de la viga, quedan

$$d\vec{\mathbf{F}}_G = dm \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{r}}}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

$$d\vec{\mathbf{M}}_G = \frac{\partial}{\partial t} \left(d\bar{\mathbf{I}}_{GM} \vec{\boldsymbol{\Omega}}_s \right) \quad (2.4)$$

La ecuación (2.3) no presenta mayores complicaciones escrita en ejes fijos. En cambio, escribirla en ejes intermedios supone arrastrar toda la formulación de la cinemática relativa, que conduce a ecuaciones no lineales. Por otro lado, como se ha comentado, en la ecuación (2.4) conviene describir el tensor de inercia mediante su matriz asociada en el sistema intermedio, en el que será constante. Por todo esto, la ecuación (2.3) la describiremos en ejes fijos, mientras que en la (2.4) emplearemos los ejes intermedios.

Cada segmento diferencial de la viga podrá ser identificado mediante alguna variable asociada a la posición de su centro de masas en la longitud de la viga. En concreto, lo identificaremos mediante su primera coordenada (x) en el sistema fijo en la no deformada.³ El espesor del segmento diferencial será dx .

Si ρ es la densidad volumétrica de masa, constante en todo el volumen diferencial, y A el área transversal de la sección, la masa del segmento será $dm = \rho A dx$. La ecuación (2.3) aplicada a un segmento diferencial queda, en ejes fijos, simplemente como

$$\frac{\partial \mathbf{F}_G}{\partial x} dx = \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} dx \quad (2.5)$$

que es equivalente a

$$\frac{\partial \mathbf{F}_G}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

Escribir (2.4) en los ejes intermedios requiere una manipulación previa. El tensor central de inercia másico del sólido será $d\bar{\mathbf{I}}_{GM} = \rho \bar{\mathbf{I}}_G dx$, siendo $\bar{\mathbf{I}}_G$ el tensor central de inercia geométrico de la sección transversal. Con esto, (2.4) se escribe

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{M}}_G}{\partial x} dx = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\mathbf{I}}_G \vec{\boldsymbol{\Omega}}_s \right) dx \quad (2.7)$$

lo que es equivalente a

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{M}}_G}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\mathbf{I}}_G \vec{\boldsymbol{\Omega}}_s \right) \quad (2.8)$$

total respecto del tiempo. Nótese que si x no depende del tiempo (es decir, $\frac{dx}{dt} = 0$) se tiene $\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t}$. Emplear el símbolo ∂ es sólo una cuestión de formalismo matemático. En lo sucesivo, se denotará la derivada parcial respecto del tiempo de una función $z(x, t)$ como $\frac{\partial z}{\partial t}$ o \dot{z} indistintamente, empleando preferiblemente \dot{z} cuando, por cuestiones de espacio o legibilidad, sea recomendable. Cuando aparezcan derivadas temporales de funciones cuyas variables puedan depender del tiempo, se mencionará explícitamente para evitar ambigüedades.

³Más adelante, estas ecuaciones serán integradas en la longitud de la viga. Identificar el segmento diferencial de esta manera permitirá realizar la integración en la geometría no deformada. Esto no impide que los vectores y tensores puedan ser expresados en otro sistema de coordenadas.

La derivada temporal absoluta que aparece en la ecuación anterior puede ser sustituida por la derivada relativa en el sistema intermedio (véase lo expresado en el apéndice A sobre la derivación de vectores en sistemas móviles, apartado A.8). Sea $\vec{\Omega}_{\text{arr}}$ la velocidad angular del sistema intermedio. (2.8) es equivalente a

$$\frac{\partial \vec{M}_G}{\partial x} = \rho \left(\left. \frac{\partial (\bar{\mathbf{I}}_G \vec{\Omega}_s)}{\partial t} \right|_{\text{rel}} + \vec{\Omega}_{\text{arr}} \times (\bar{\mathbf{I}}_G \vec{\Omega}_s) \right) \quad (2.9)$$

Ahora ya es fácil escribir (2.9) en el sistema intermedio.

$$\frac{\partial \mathbf{M}'_G}{\partial x} = \rho \left(\mathbf{I}'_G \left. \frac{\partial \Omega'_s}{\partial t} \right|_{\text{rel}} + \Omega'_{\text{arr}} \times (\mathbf{I}'_G \Omega'_s) \right) \quad (2.10)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\bar{\mathbf{I}}_G$ es constante en el sistema intermedio, por lo que

$$\left. \frac{\partial (\mathbf{I}'_G \Omega'_s)}{\partial t} \right|_{\text{rel}} = \mathbf{I}'_G \left. \frac{\partial \Omega'_s}{\partial t} \right|_{\text{rel}} \quad (2.11)$$

Para conocer la velocidad angular del sólido, $\vec{\Omega}_s$, basta con conocer la matriz de transformación \mathbf{A} del sistema del sólido en el fijo y su derivada. Esta matriz también puede interpretarse como una aplicación que rota los vectores sobre los que actúa (véase el apéndice A, apartado A.4). Así, consideremos a \mathbf{A} como la matriz asociada a la aplicación que transforma el sistema fijo, rotándolo hasta la orientación del sistema del sólido. Esta rotación se puede reproducir mediante la sucesión de tres rotaciones independientes, cada una de ellas en torno a un eje distinto y, en general, no perpendiculares entre sí. Estas tres rotaciones son conocidas como *ángulos de Euler*.⁴ De entre las infinitas posibilidades, por conveniencia seleccionamos las tres siguientes.

- Una primera rotación, de un ángulo ψ en torno a la dirección del segundo eje del sistema fijo, tal que lleve al eje Z_0 hasta la intersección entre el plano X_0Z_0 y uno paralelo al plano de la sección y que pase por el origen (línea de nodos), que transformará éste en otro sistema, cuyo tercer eje llamaremos Z_1 (véase la figura 2.2⁵). La matriz correspondiente a esta transformación es

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

⁴Algunos autores consideran que los ángulos de Euler corresponden exclusivamente a las rotaciones en las direcciones Z , X y Z , en ese orden. Otros, en cambio, admiten como tales cualquier secuencia de rotaciones con la misma filosofía. Éste último es el criterio seguido en esta Tesis. En algunos trabajos se los cita entonces como *ángulos de Cardan*.

⁵Para ilustrar la relación entre la sección y los ejes, éstos se han representado situados sobre la misma, en esta figura y en las siguientes, aunque su origen corresponde a un extremo de la viga no deformada.

- Una segunda rotación, de un ángulo φ en torno al anterior eje Z_1 , tal que lleve al eje Y_1 hasta la intersección entre el plano X_1Y_1 y un plano paralelo a la sección y que pase por el origen, que transformará este sistema en el que llamamos intermedio (figura 2.3). Su matriz de transformación será

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

- Y una tercera rotación, de un ángulo θ en torno al primer eje del sistema intermedio que transformará a éste en el sistema del sólido (figura 2.4). La correspondiente matriz de transformación será

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

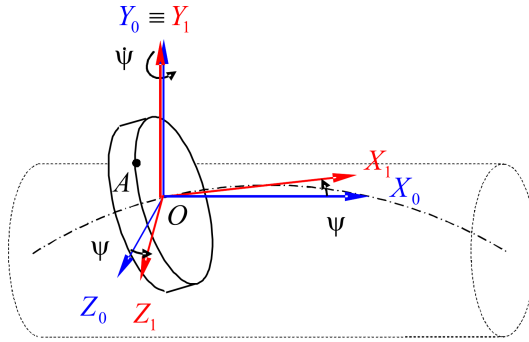


Figura 2.2. La rotación de los ejes inerciales en torno a Y_0 de un ángulo ψ , proporciona un sistema cuyo nuevo eje Z_1 está contenido en un plano paralelo al de la sección deformada.

Como se muestra en el apéndice A (apartado A.6), la matriz de transformación del sistema fijo en el del sólido será el producto de éstas tres, como sigue

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \quad (2.15)$$

Y la matriz antisimétrica que define la velocidad angular del sistema del sólido (y por lo tanto, del sólido) respecto al sistema fijo, escrita en ejes del sólido, que vendrá dada por (A.46), será

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_s'' &= \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta & \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta & 0 & -\dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\theta} \\ -\dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta & \dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

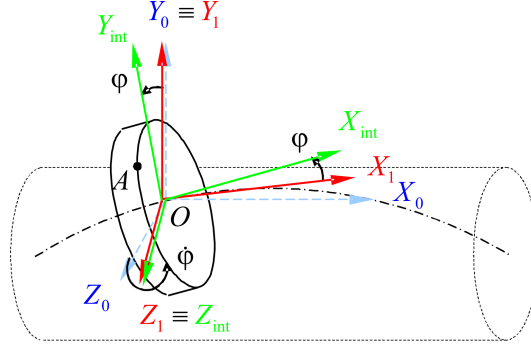


Figura 2.3. La rotación de los nuevos ejes en torno a Z_1 de un ángulo φ , proporciona los ejes intermedios, cuyo plano $Y_{int}Z_{int}$ es paralelo al de la sección deformada.

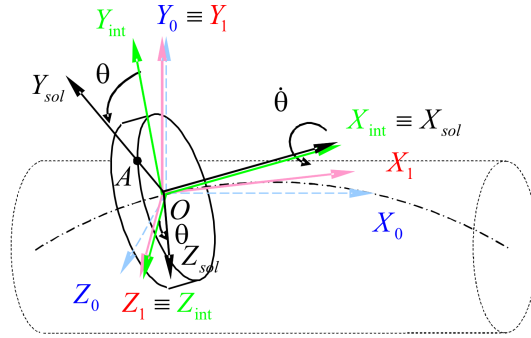


Figura 2.4. La rotación de los ejes intermedios en torno a X_{int} de un ángulo θ , proporciona los ejes del sólido, solidarios con la sección.

El correspondiente vector de velocidad angular, escrito en ejes del sólido, será pues

$$\mathbf{\Omega}_s'' = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

En la ecuación (2.10) aparece la derivada relativa, en ejes intermedios, de la velocidad angular. Por tanto, es conveniente escribir el vector anterior en esos ejes. Nótese que (2.17) proporciona las componentes de la velocidad angular en unos ejes obtenidos al girar los fijos unos ángulos (ψ, φ, θ) cualesquiera. Los ejes intermedios corresponden a los fijos girados unos ángulos $(\psi, \varphi, 0)$, por lo que, particularizando la expresión anterior para $\theta = 0$, se obtienen las componentes de la velocidad angular en el sistema intermedio

$$\mathbf{\Omega}'_s = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Evidentemente, se llega a la misma expresión haciendo

$$\mathbf{\Omega}'_s = \mathbf{A}_3 \mathbf{\Omega}''_s \quad (2.19)$$

ya que \mathbf{A}_3 es la matriz de transformación del sistema del sólido en el intermedio.

La primera componente del vector anterior en ejes intermedios es la velocidad angular de la sección en torno a su normal, a la que hemos llamado Ω . Así pues, (2.18) puede escribirse como

$$\mathbf{\Omega}'_s = \begin{pmatrix} \Omega \\ \dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

con

$$\Omega = \dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \quad (2.21)$$

Las componentes en ejes intermedios de la derivada temporal relativa a estos ejes del vector velocidad angular es simplemente la terna formada por las derivadas de las componentes en (2.20)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{\Omega}'_s}{\partial t} \right|_{\text{rel}} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Omega \\ \dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \ddot{\psi} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

en la que se ha llamado $\alpha = \dot{\Omega}$ a la aceleración angular de la sección en torno a su normal.

La velocidad de rotación del sistema intermedio $\vec{\Omega}'_{\text{arr}}$ también puede expresarse en función de los tres ángulos de Euler y sus derivadas. Este vector será la diferencia entre la velocidad angular del sólido, y la velocidad de rotación $\dot{\theta}$ de éste en torno al eje X del sistema intermedio. Esto es, escrito en ejes intermedios

$$\mathbf{\Omega}'_{\text{arr}} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.20), (2.22) y (2.23) en (2.10), y operando

$$\frac{\partial \mathbf{M}'_G}{\partial x} = \rho I \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \ddot{\psi} \cos \varphi - 2\dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi + 2\Omega \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} + \dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2\Omega \dot{\psi} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Las únicas hipótesis aplicadas hasta este momento son la indeformabilidad de la sección y la geometría de revolución. Las ecuaciones (2.6) y (2.24) todavía son válidas para todos los modelos de viga presentados en el punto 2.2, con deformaciones generales. Por ello, (2.24) es altamente no lineal. Si nos centramos en el comportamiento ante pequeños desplazamientos, es posible linealizarla. El único movimiento que no

puede considerarse *pequeño* es la rotación sobre el eje longitudinal. El ángulo girado en este movimiento no aparece explícitamente en (2.24), sólo aparecen la velocidad angular, Ω , y la aceleración angular, α , asociadas al giro. Así, los términos donde no aparecen estas dos variables, y en los que aparecen productos de las derivadas de los demás giros, son despreciables frente al resto. Los demás términos, que no son despreciables, pueden simplificarse tomando $\cos \varphi \approx 1$, dado que el ángulo φ girado sí es un desplazamiento pequeño. Con todas estas aproximaciones, la ecuación anterior queda

$$\frac{\partial \mathbf{M}'_G}{\partial x} = \rho I \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \ddot{\psi} + 2\Omega \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} - 2\Omega \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

donde, linealizando (2.21), también se puede aproximar

$$\Omega = \dot{\theta} \quad \alpha = \ddot{\theta} \quad (2.26)$$

Hasta este punto, sólo se han empleado las ecuaciones de la dinámica (Newton-Euler). Además de éstas, el estado de la viga en cada instante debe satisfacer también las leyes de la elasticidad lineal. Estas leyes relacionan las componentes de fuerzas y momentos en ejes intermedios con las deformaciones. Por ejemplo, cuando se habla de la fuerza axial, se alude a la componente según la tangente a la fibra neutra. Sin embargo, dada la hipótesis de pequeños desplazamientos que se aplica en elasticidad lineal, a estos efectos los ejes intermedios se confunden con los fijos, dado que si se escriben las componentes en el sistema fijo en función de las mismas en el sistema intermedio y de los ángulos girados, y se linealizan las expresiones, se llega a las mismas componentes para ambos sistemas, por lo que también podemos aproximar $\mathbf{M}'_G \approx \mathbf{M}_G$, escribiendo finalmente

$$\frac{\partial \mathbf{M}_G}{\partial x} = \rho I \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \ddot{\psi} + 2\Omega \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} - 2\Omega \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Del mismo modo, será posible aproximar $\mathbf{F}'_G \approx \mathbf{F}_G$. De esta forma, las relaciones entre la resultante y el momento resultante y los desplazamientos y giros se obtienen como sigue. Sean E y G los módulos de elasticidad y de cortadura, respectivamente, del material, y llamemos $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ f_3)^T$ a la densidad de fuerza por unidad de longitud aplicada sobre la viga, en ejes fijos, y m_t al momento torsor (y, por tanto, en la primera dirección del sistema fijo) aplicado sobre el elemento diferencial.⁶ La resultante, $d\mathbf{F}_G$, y el momento resultante, $d\mathbf{M}_G$, sobre la sección, menos las fuerzas, \mathbf{f} , y momentos, m_t , directamente aplicados en ella, son las fuerzas y momentos transmitidos a través de ésta, por lo que se debe cumplir que [82]

$$\frac{\partial M_{G1}}{\partial x} = -2GI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m_t \quad (2.28)$$

⁶Por lo comentado, también se puede aproximar $\mathbf{f} \approx \mathbf{f}'$ y $m_t \approx m'_t$.

$$\frac{\partial^2 M_{G2}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 r_3}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial F_{G3}}{\partial x} + f_3 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 M_{G3}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial F_{G2}}{\partial x} - f_2 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial F_{G1}}{\partial x} = -E A \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + f_1 \quad (2.31)$$

Sustituyendo (2.6), (2.27) y sus derivadas respecto de x en (2.28), (2.29), (2.30) y (2.31) y teniendo en cuenta (2.26) se llega a

$$2 \rho I \ddot{\theta} = -2 G I \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m_t \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho I \left(\ddot{\psi} + 2 \Omega \dot{\varphi} \right) \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 r_3}{\partial x^2} \right) - \rho A \ddot{r}_3 + f_3 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho I \left(\ddot{\varphi} - 2 \Omega \dot{\psi} \right) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right) + \rho A \ddot{r}_2 - f_2 \quad (2.34)$$

$$\rho A \ddot{r}_1 = -E A \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + f_1 \quad (2.35)$$

En estas cuatro ecuaciones hay todavía seis incógnitas, los tres giros (ψ, φ, θ) y las tres traslaciones dadas por $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^T$. Las dos relaciones que faltan las suministra la hipótesis hecha en el modelo de Rayleigh de que las secciones que son normales a la fibra neutra en la no deformada siguen siéndolo en la deformada. Por tanto, la normal de la sección es la tangente a la fibra neutra. De esta forma, aproximando la tangente por el ángulo (dada la hipótesis de pequeños desplazamientos), debe cumplirse que

$$\psi = -\frac{\partial r_3}{\partial x} \quad \varphi = \frac{\partial r_2}{\partial x} \quad (2.36)$$

Finalmente, las relaciones (2.36) pueden introducirse en (2.32), (2.33), (2.34) y (2.35), que, reordenadas, se escriben como

$$\rho A \ddot{r}_1 + E A \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} = f_1 \quad (2.37)$$

$$2 \rho I \ddot{\theta} + 2 G I \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = m_t \quad (2.38)$$

$$\rho A \ddot{r}_2 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho I \left(\frac{\partial \ddot{r}_2}{\partial x} + 2 \Omega \frac{\partial \dot{r}_3}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2} \right) = f_2 \quad (2.39)$$

$$\rho A \ddot{r}_3 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho I \left(\frac{\partial \ddot{r}_3}{\partial x} - 2 \Omega \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 r_3}{\partial x^2} \right) = f_3 \quad (2.40)$$

Estas expresiones, (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40), constituyen las ecuaciones del movimiento de una viga de Rayleigh con capacidad de girar sobre sí misma. Son

un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que, con unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas, puede ser integrado para obtener los desplazamientos del centro de cada sección, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^T$, y la posición angular de la misma en torno a su normal, θ , en cada instante.

Vibraciones axiales

En la ecuación (2.37) únicamente aparecen las derivadas de la variable r_1 (desplazamiento del centro de la sección en dirección axial), que no se encuentran en las otras tres ecuaciones. Por ello está totalmente desacoplada de ellas. Así, las vibraciones axiales son completamente independientes del resto de la dinámica de la viga. Además, es la misma expresión que se encuentra en la teoría clásica para vigas sin capacidad de rotación sobre sí mismas.

Vibraciones de torsión

Análogamente, en la ecuación (2.38), que corresponde a las vibraciones de torsión, únicamente aparecen las derivadas de la variable θ . Esto hace que, conocido el momento torsor aplicado en cada sección, m_t , las condiciones de contorno y las iniciales, esté definida totalmente la posición angular θ de cada sección en la rotación sobre sí misma en cada instante, y por lo tanto, su velocidad angular, $\Omega = \dot{\theta}$, y su aceleración angular, $\alpha = \dot{\Omega} = \ddot{\theta}$. En este sentido, las vibraciones de torsión no se ven influidas por el resto de la dinámica. En cambio, sí afectan a las vibraciones de flexión, dado que Ω aparece en las dos últimas ecuaciones, (2.39) y (2.40).

Además, la velocidad angular no aparece explícitamente en la ecuación (2.38), por lo que ésta se satisface también si se superpone una velocidad angular igual en todas las secciones. Es decir, una rotación de sólido rígido no altera las vibraciones de torsión.

Vibraciones de flexión

Las ecuaciones que gobiernan la flexión, (2.39) en el plano 1-2 y (2.40) en el plano 1-3, presentan un acoplamiento, materializado por el segundo término del primer miembro. Esto lleva a que, si $\Omega \neq 0$, se induzcan vibraciones de flexión en ambos planos aunque únicamente haya fuerzas excitadoras en uno de ellos. Si se remonta el desarrollo matemático buscando el origen de estos términos, se encuentra fácilmente que provienen de la segunda y tercera componente de la ecuación (2.27) que, claramente, corresponden a la inercia de la sección a realizar los giros asociados a los ángulos ψ y φ , respectivamente, como se adelantó en el apartado 2.2. Por ello, los modelos de viga de Euler–Bernoulli y de Timoshenko no presentan este acoplamiento.

Es más, es interesante notar que si en las ecuaciones (2.39) y (2.40) se desprecia la inercia a la rotación de la sección ($\rho I = 0$), pero sin despreciar la rigidez a flexión

($EI \neq 0$) ni la inercia a la traslación ($\rho A \neq 0$), las cuatro ecuaciones (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40) resultan idénticas a las ecuaciones del movimiento de la viga de Euler no rotatoria. Esta conclusión concuerda con los resultados de Katz *et al.* [46].

2.4. Ecuaciones del movimiento de flexión de una viga cilíndrica

Consideremos ahora una viga de revolución de sección constante y material homogéneo,⁷ y por lo tanto cilíndrica, que gira sobre su eje a velocidad Ω , igual en todas las secciones, es decir, $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$ en todo instante. Por tanto, será también $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} = 0$. Esto supone, en virtud de la ecuación (2.38), que no se dan vibraciones de torsión y que el par torsor es el mismo en todas las secciones.⁸

Puesto que las vibraciones axiales están desacopladas de las de flexión y de las de torsión y no dependen de la velocidad de rotación, no aportan nada respecto del comportamiento, bien conocido, de la viga no rotatoria. Por ello, no vamos a considerarlas tampoco en este estudio, centrándonos en las vibraciones de flexión. Así pues, el sistema viene caracterizado por las ecuaciones (2.39) y (2.40), que para el caso supuesto quedan:

$$\rho A \ddot{r}_2 - \rho I \frac{\partial^2 \ddot{r}_2}{\partial x^2} - 2 \rho I \Omega \frac{\partial^2 \dot{r}_3}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 r_2}{\partial x^4} = f_2 \quad (2.41)$$

$$\rho A \ddot{r}_3 - \rho I \frac{\partial^2 \ddot{r}_3}{\partial x^2} + 2 \rho I \Omega \frac{\partial^2 \dot{r}_2}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 r_3}{\partial x^4} = f_3 \quad (2.42)$$

Estas ecuaciones coinciden formalmente con las obtenidas por Brown y Shabana en [16] y por Sheu y Yang en [72]. Los primeros la deducen empleando la formulación descrita en [15] y los segundos a través del principio de Hamilton, a diferencia del método aquí seguido.

Las expresiones anteriores pueden escribirse de forma más compacta empleando una notación matricial. Definamos las siguientes matrices:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Ahora, (2.41) y (2.42) se expresan como

$$\rho A \ddot{\mathbf{U}} - \rho I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ddot{\mathbf{U}} + 2 \rho I \Omega \mathbf{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \dot{\mathbf{U}} + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathbf{U} = \mathcal{F} \quad (2.44)$$

Los desplazamientos r_j ($j = 2, 3$) son función de la coordenada x del centro de la sección en la no deformada y del tiempo t , $r_j(x, t)$, por lo que (2.44) es una ecuación

⁷Lo que es tanto como decir que A , I , E y ρ no dependen de x .

⁸La ecuación (2.38) queda $2 \rho I \dot{\theta} = -m_t$. Como el primer miembro no depende de x , el segundo, m_t , tampoco.

diferencial en derivadas parciales en la que la función incógnita, $\mathbf{U}(x, t)$ aparece derivada simultáneamente respecto de sus dos variables. Para facilitar su integración, realizaremos la transformación que a continuación se detalla.

Cada uno de los desplazamientos r_j podemos describirlo mediante una serie infinita cuyos términos sean productos de unas *funciones de forma* que sólo dependan de la coordenada espacial, $s_k(x)$ ($k = 1, \dots, \infty$), multiplicadas por unas funciones temporales, $q_k^j(t)$, en la forma siguiente⁹

$$r_j(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x) q_k^j(t) \quad (2.45)$$

donde las $q_k^j(t)$ son un conjunto de *coordenadas generalizadas*. Al índice k lo llamaremos *índice del modo*.

Es interesante resaltar que pueden emplearse las mismas funciones $s_k(x)$ para describir tanto a r_2 como a r_3 dada la simetría de revolución de la viga.

La serie infinita puede truncarse en N términos para aproximar r_j como

$$r_j(x, t) = \sum_{k=1}^N s_k(x) q_k^j(t) \quad (2.46)$$

Y definiendo las siguiente matrices

$$\mathbf{S}(x) = \begin{pmatrix} s_1(x) & 0 & s_2(x) & 0 & \cdots & s_N(x) & 0 \\ 0 & s_1(x) & 0 & s_2(x) & \cdots & 0 & s_N(x) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{q}(t) = (q_1^2(t) \quad q_1^3(t) \quad q_2^2(t) \quad q_2^3(t) \quad \cdots \quad q_N^2(t) \quad q_N^3(t))^T \quad (2.48)$$

puede ponerse

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{S}(x) \mathbf{q}(t) \quad (2.49)$$

Podemos proceder de la misma manera con el término independiente, \mathcal{F} , que también es función de x y t , $\mathcal{F}(x, t)$, describiéndolo a través de N_f funciones $F_k^j(x)$ y $\chi_k^j(t)$ ($k = 1, \dots, N_f$) de forma que

$$f_j(x, t) = \sum_{k=1}^{N_f} F_k^j(x) \chi_k^j(t) \quad (2.50)$$

En este caso puede ser necesario emplear diferentes funciones $F_k^j(x)$ para describir f_2 y f_3 , dado que las cargas aplicadas no tienen por qué guardar ningún tipo de simetría. Definiendo las matrices siguientes

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1^2(x) & 0 & F_2^2(x) & 0 & \cdots & F_{N_f}^2(x) & 0 \\ 0 & F_1^3(x) & 0 & F_2^3(x) & \cdots & 0 & F_{N_f}^3(x) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

⁹La descomposición en serie de Taylor para funciones de varias variables [7] garantiza la existencia de tales funciones bajo algunas hipótesis de regularidad no muy restrictivas. Esta descomposición no es la única posible ni, generalmente, la más adecuada. Sólo se cita aquí por dar generalidad a la formulación.

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \left(\chi_1^2(t) \quad \chi_1^3(t) \quad \chi_2^2(t) \quad \chi_2^3(t) \quad \cdots \quad \chi_{N_f}^2(t) \quad \chi_{N_f}^3(t) \right)^T \quad (2.52)$$

podemos escribir

$$\mathcal{F}(x, t) = \mathbf{F}(x) \boldsymbol{\chi}(t) \quad (2.53)$$

Sustituyendo (2.49) y (2.53) en (2.44)

$$\rho \left(A \mathbf{S} - I \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} \right) \ddot{\mathbf{q}} + 2 \rho I \Omega \mathbf{G} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} + E I \frac{d^4}{dx^4} \mathbf{S} \mathbf{q} = \mathbf{F} \boldsymbol{\chi} \quad (2.54)$$

Nótese que, ahora, tanto las derivadas temporales como las espaciales son derivadas totales, no parciales. No obstante, se emplea el mismo símbolo ($\dot{}$) para la derivación temporal por las razones que anteriormente se han indicado.

Las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t)$ son función del tiempo exclusivamente. La separación de variables realizada mediante la introducción de éstas y de las funciones de forma permite integrar (2.54) en la longitud L de la viga, independientemente del tiempo. Así, premultiplicándola por \mathbf{S}^T e integrando

$$\begin{aligned} \rho \left(A \int_L \mathbf{S}^T \mathbf{S} dx - I \int_L \mathbf{S}^T \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} dx \right) \ddot{\mathbf{q}} + 2 \rho I \Omega \left(\int_L \mathbf{S}^T \mathbf{G} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} dx \right) \dot{\mathbf{q}} + \\ + E I \left(\int_L \mathbf{S}^T \frac{d^4}{dx^4} \mathbf{S} dx \right) \mathbf{q} = \left(\int_L \mathbf{S}^T \mathbf{F} dx \right) \boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Para simplificar la notación, definamos las siguientes matrices

$$\tilde{\mathbf{M}} = \rho A \int_L \mathbf{S}^T \mathbf{S} dx - \rho I \int_L \mathbf{S}^T \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} dx \quad (2.56)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \rho I \int_L \mathbf{S}^T \mathbf{G} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} dx \quad (2.57)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = E I \int_L \mathbf{S}^T \frac{d^4}{dx^4} \mathbf{S} dx \quad (2.58)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \int_L \mathbf{S}^T \mathbf{F} dx \quad (2.59)$$

Sustituyendo (2.56), (2.57), (2.58) y (2.59) en (2.55), ésta queda

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + 2 \Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{\chi} \quad (2.60)$$

La expresión (2.60) es una ecuación diferencial ordinaria que, con unas condiciones iniciales adecuadas, puede ser integrada para obtener $\mathbf{q}(t)$ y, a través de (2.49), $\mathbf{U}(x, t)$ y por tanto, $r_2(x, t)$ y $r_3(x, t)$.

Es importante destacar que $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ y $\tilde{\mathbf{F}}$ no dependen del tiempo, por lo que pueden ser evaluadas *a priori*, una sola vez al principio de una simulación, antes de realizar la integración en el tiempo.

La matriz $\widetilde{\mathbf{M}}$ es la matriz de masa. Su primer término, $\rho A \int_L \mathbf{S}^T \mathbf{S} dx$, corresponde a la inercia generalizada de la viga a la traslación de sus secciones durante la flexión, mientras que el segundo, $-\rho I \int_L \mathbf{S}^T \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{S} dx$, es debido a la inercia al giro de las mismas. El término $2\Omega \widetilde{\mathbf{G}}$ recoge los términos giroscópicos, responsables del acoplamiento del movimiento en ambos planos. Es la única diferencia respecto a la ecuación del movimiento de la viga de Rayleigh no rotatoria, que se reproduce haciendo $\Omega = 0$ en la ecuación (2.60). $\widetilde{\mathbf{K}}$ es la matriz de rigidez y representa las fuerzas elásticas.

Si se hace $I = 0$ en (2.56) y (2.57), la ecuación (2.60) se transforma en la ecuación del movimiento de una viga de Euler–Bernoulli. Se observa que en este caso desaparece el término giroscópico, resultando una ecuación independiente de la velocidad angular, Ω , idéntica a la de la viga no rotatoria. Una vez más, se encuentra que los modelos sin inercia al giro no son adecuados para estudiar la flexión de vigas en rotación.

Debe tenerse en cuenta que, habitualmente, en los estudios sobre máquinas rotatorias, suele incluirse una excentricidad en el centro de masas [22, 38]. Esta excentricidad no se ha considerado en el modelo analítico aquí desarrollado, lo que conduce a algunas conclusiones diferentes. En particular, si se incluye, la respuesta de la viga de Euler–Bernoulli rotatoria difiere de la de la no rotatoria.

2.5. Particularización para una viga biarticulada

El problema a resolver viene dado por la ecuación (2.44), estando $\mathbf{U}(x, t)$ sujeta a las condiciones iniciales siguientes

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \quad \dot{\mathbf{U}}(x, 0) = \dot{\mathbf{U}}_0(x) \quad (2.61)$$

y a las condiciones de contorno correspondientes a articulaciones en ambos extremos. Éstas se traducen en desplazamientos y momentos nulos en $x = 0$ y $x = L$. Puesto que el momento es proporcional a $\partial^2 \mathbf{U} / \partial x^2$, las condiciones de contorno estarán dadas por

$$\mathbf{U}(0, t) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}(0, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{U}(L, t) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}(L, t) = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

Buscamos ahora unas funciones $\mathbf{S}(x)$ que permitan la descomposición dada en (2.49). Veremos que los modos propios de la viga no rotatoria nos facilitan tal descomposición. De entre todas las descomposiciones posibles, ésta converge rápidamente y presenta importantes ventajas. Supongamos que la solución de (2.44) es de la forma

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} (\mathbf{C}_k e^{\gamma_k x} + \mathbf{D}_k e^{-\gamma_k x}) \quad \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{C} \quad \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k \in \mathbb{C}^2 \quad (2.63)$$

Esto no supone pérdida de generalidad. Dada la unicidad de la solución ante unas condiciones de contorno e iniciales dadas, si encontramos una función con la forma de (2.63) que satisfaga éstas y la ecuación diferencial, será la solución buscada.

Apliquemos a (2.63) las condiciones de contorno dadas por (2.62).

$$\mathbf{U}(0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} (\mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k) = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}(0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} \gamma_k^2 (\mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k) = \mathbf{0} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{U}(L, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} (\mathbf{C}_k e^{\gamma_k L} + \mathbf{D}_k e^{-\gamma_k L}) = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}(L, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} \gamma_k^2 (\mathbf{C}_k e^{\gamma_k L} + \mathbf{D}_k e^{-\gamma_k L}) = \mathbf{0} \quad (2.67)$$

Comparando término a término las series en (2.64) y (2.65), se llega a la conclusión de que

$$\mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k = \gamma_k^2 (\mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k) \quad (2.68)$$

Para que esta igualdad sea cierta debe cumplirse una de estas dos premisas: o bien $\gamma_k^2 = 1$, o $\mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k = 0$. Supongamos $\gamma_k^2 = 1$. En este caso, comparando término a término (2.64) y (2.66) se llega a que no es posible encontrar unas constantes \mathbf{C}_k y \mathbf{D}_k que las satisfagan simultáneamente. Así pues, debe ser $\gamma_k^2 \neq 1$, por lo que se sigue que

$$\mathbf{D}_k = -\mathbf{C}_k \quad (2.69)$$

Sustituyendo (2.69) en (2.66) y (2.67) se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} \mathbf{C}_k (e^{\gamma_k L} - e^{-\gamma_k L}) = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\beta_k t} \gamma_k^2 \mathbf{C}_k (e^{\gamma_k L} - e^{-\gamma_k L}) = \mathbf{0} \quad (2.71)$$

Procediendo como antes y recordando que $\gamma_k^2 \neq 1$ se llega a que

$$e^{\gamma_k L} - e^{-\gamma_k L} = 0 \quad (2.72)$$

cuyas únicas soluciones posibles son

$$\gamma_k = i \frac{k \pi}{L} \quad k = 1, \dots, \infty \quad (2.73)$$

siendo i la unidad imaginaria.

Sustituyendo (2.73) en (2.63), ésta queda

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k e^{\beta_k t} (e^{i k \pi \frac{x}{L}} - e^{-i k \pi \frac{x}{L}}) \quad (2.74)$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\sin(x) \equiv \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

puede ponerse

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2i \mathbf{C}_k e^{\beta_k t} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \quad (2.75)$$

Y llamando $\Psi_k = 2i \mathbf{C}_k$ ($\Psi_k \in \mathbb{C}^2$), queda

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k e^{\beta_k t} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \quad (2.76)$$

Truncando la serie infinita y limitándola a los N primeros términos, puede escribirse en la forma (2.49) si definimos

$$s_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \quad (2.77)$$

$$q_k^2(t) = (\Psi_k)_1 e^{\beta_k t} \quad q_k^3(t) = (\Psi_k)_2 e^{\beta_k t} \quad (2.78)$$

donde $(\Psi_k)_j$ ($j = 1, 2$; $k = 1, \dots, N$) es la componente j -ésima de Ψ_k .

En este punto, las funciones $\mathbf{q}(t)$ aún no están determinadas por no estarlo las constantes \mathbf{C}_k y β_k . Es más, no está probado todavía que, para los γ_k encontrados, existan unas tales constantes que hagan que (2.63) sea solución de (2.44). No obstante, será probado más adelante, hallándolas. Así pues, aceptado este hecho, la matriz $\mathbf{S}(x)$ sí está completamente definida, y es

$$\mathbf{S}(x) = \begin{pmatrix} \sin\left(1\pi \frac{x}{L}\right) & 0 & \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) & 0 & \cdots & \sin\left(N\pi \frac{x}{L}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(1\pi \frac{x}{L}\right) & 0 & \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) & \cdots & 0 & \sin\left(N\pi \frac{x}{L}\right) \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Es interesante observar que ha sido posible encontrarla sin emplear más información de la ecuación diferencial que el hecho de que su solución es de la forma (2.63), e imponiendo las condiciones de contorno. De esto se concluye que es la misma para todos los modelos de vigas que admitan una solución como (2.63), como el caso de la viga no rotatoria, ante las mismas condiciones de contorno.

Cada columna de la matriz $\mathbf{S}(x)$ coincide con un modo propio de la viga no rotatoria, y cada fila a los desplazamientos de ése modo en cada plano de flexión. Se aprecia que las deformadas son curvas planas (solo tienen desplazamiento en una de las dos direcciones). La simetría de revolución de la viga conduce a que aparezcan las mismas deformadas en los dos planos. La figura 2.5 muestra las deformadas en uno de ellos para $k = 1, \dots, 4$.

Una vez determinada esta matriz, es posible evaluar las matrices $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\widetilde{\mathbf{G}}$ y $\widetilde{\mathbf{K}}$,

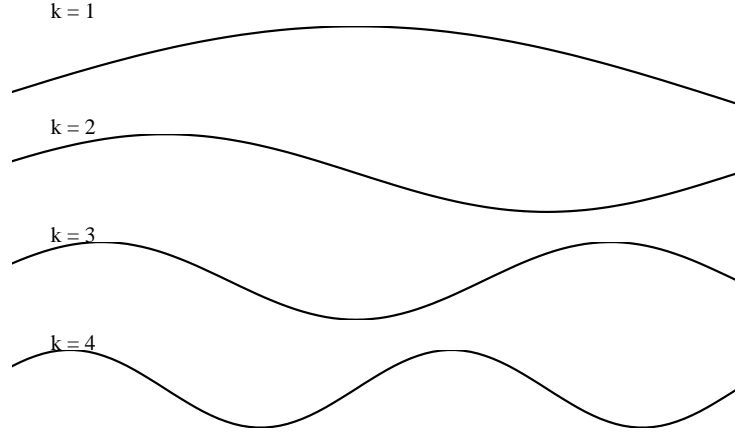


Figura 2.5. Primeras cuatro deformadas de la viga de Rayleigh biarticulada.

definidas por (2.56), (2.57) y (2.58) respectivamente, resultando

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{2} \rho A L \begin{pmatrix} 1 + (1\pi)^2 \frac{I}{AL^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (1\pi)^2 \frac{I}{AL^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + (N\pi)^2 \frac{I}{AL^2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + (N\pi)^2 \frac{I}{AL^2} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

$$\widetilde{\mathbf{G}} = \frac{-1}{2} \rho \frac{I}{L} \begin{pmatrix} 0 & -(1\pi)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (1\pi)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2\pi)^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2\pi)^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(N\pi)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (N\pi)^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \frac{EI}{2L^3} \begin{pmatrix} (1\pi)^4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1\pi)^4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (N\pi)^4 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (N\pi)^4 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Con esto queda completamente definida la ecuación del movimiento (2.60).

Las matrices $\widetilde{\mathbf{M}}$ y $\widetilde{\mathbf{K}}$ son diagonales, mientras que $\widetilde{\mathbf{G}}$ es una matriz antisimétrica.

Una vez más se aprecia que, en las vibraciones de flexión, el acoplamiento de las respuestas en ambos planos es debido a esta última matriz, que representa los términos giroscópicos. Pero no sólo es antisimétrica, sino que en cada columna hay un único elemento no nulo, situado en la fila correspondiente al modo con el mismo índice k (la misma deformada) en el otro plano de flexión. Esto significa que el acoplamiento se produce exclusivamente entre modos propios con el mismo índice k (con la misma deformada) en diferentes planos. En capítulos posteriores veremos que esto es un caso particular, debido a la simplicidad del modelo, de un acoplamiento más general que ocurre incluso entre modos con diferente índice (distinta deformada).

Definamos la siguiente constante

$$m_k = (\widetilde{\mathbf{M}})_{2k,2k} = \frac{1}{2} \rho A L \left(1 + (k \pi)^2 \frac{I}{A L^2} \right) \quad (2.83)$$

Podemos normalizar los modos propios a la matriz de masa dividiendo cada función $s_k(x)$ (expresión (2.77)) por $\sqrt{m_k}$. Es inmediato comprobar que, en ese caso, se obtiene

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{2N \times 2N} \quad (2.84)$$

Si definimos también las constantes siguientes

$$g_k = \frac{\rho I (k \pi)^2}{2 m_k L} \quad (2.85)$$

$$k_k = \frac{E I (k \pi)^4}{2 L^3} \quad (2.86)$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k_k}{m_k}} \quad (2.87)$$

las matrices $\widetilde{\mathbf{G}}$ y $\widetilde{\mathbf{K}}$ correspondientes a los modos normalizados resultan

$$\widetilde{\mathbf{G}} = -g_k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_N^2 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

A las constantes g_k las denominaremos *constantes giroscópicas*. Obsérvese también que, tal y como se han definido, las constantes ω_k corresponden a las pulsaciones propias de la viga no rotatoria ($\Omega = 0$).

Puesto que sólo están acopladas las respuestas del par de modos con el mismo índice k , la ecuación (2.60), que es un sistema de $2N$ ecuaciones, es equivalente a N sistemas independientes de dos ecuaciones cada uno. Definamos

$$\mathbf{q}^k = \begin{pmatrix} (\mathbf{q})_{2k-1} \\ (\mathbf{q})_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_k^2 \\ q_k^3 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{Q}^k = \begin{pmatrix} (\tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{\chi})_{2k-1} \\ (\tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{\chi})_{2k} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

La ecuación (2.60) se reescribe como

$$\ddot{\mathbf{q}}^k - 2\Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + \omega_k^2 \mathbf{q}^k = \mathbf{Q}^k \quad k = 1, \dots, N \quad (2.92)$$

En este punto, es importante resaltar que, a una velocidad angular dada, la respuesta de cada par de modos con el mismo índice ante un conjunto de cargas concretas viene gobernada, exclusivamente, por dos parámetros: la frecuencia propia de la viga no rotatoria correspondiente a esos modos, ω_k , y la constante giroscópica g_k . Veamos que esta última constante es aún más sencilla de lo que aparenta en su definición (2.85). Si tenemos en cuenta que el radio de giro, γ , de una sección se define como

$$\gamma = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.93)$$

y que la esbeltez de la viga, λ , viene dada por

$$\lambda = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \sqrt{\frac{AL^2}{I}} \quad (2.94)$$

la constante g_k puede ponerse como

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{\rho I (k\pi)^2}{2m_k L} = \frac{\rho I (k\pi)^2}{2 \frac{1}{2} \rho A L \left(1 + (k\pi)^2 \frac{I}{AL^2}\right) L} \\ &= \frac{(k\pi)^2}{\frac{AL^2}{I} + (k\pi)^2} = \frac{(k\pi)^2}{\lambda^2 + (k\pi)^2} \end{aligned} \quad (2.95)$$

es decir, g_k sólo depende de la esbeltez de la viga y del índice del modo.

2.6. Vibraciones libres

Consideremos el caso de vibraciones libres, es decir, aquél en el que no existen fuerzas externas aplicadas, sino que sólo se imponen unas condiciones iniciales de

posición y velocidad de cada punto de la viga (de su fibra neutra, que es quien la representa en este modelo) y se deja evolucionar el sistema libremente en el tiempo. La ecuación del movimiento correspondiente será la (2.92) con $\mathbf{Q}^k = \mathbf{0}$, es decir,

$$\ddot{\mathbf{q}}^k - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + \omega_k^2 \mathbf{q}^k = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, N \quad (2.96)$$

A partir de (2.90) y (2.78), \mathbf{q}^k es de la forma

$$\mathbf{q}^k(t) = \Psi_k e^{\beta_k t} \quad \Psi_k \in \mathbb{C}^2 \quad \beta_k \in \mathbb{C} \quad (2.97)$$

donde Ψ_k y β_k aún no han sido determinados.

Puesto que \mathbf{q}^k debe cumplir la ecuación diferencial, sustituyendo (2.97) en (2.96) se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} (\Psi_k e^{\beta_k t}) - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \frac{d}{dt} (\Psi_k e^{\beta_k t}) + \omega_k^2 \Psi_k e^{\beta_k t} = \mathbf{0} \quad (2.98)$$

y, como Ψ_k no depende del tiempo,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} (e^{\beta_k t}) \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \frac{d}{dt} (e^{\beta_k t}) + \omega_k^2 e^{\beta_k t} \mathbf{I}_{2 \times 2} \right) \Psi_k = \mathbf{0} \quad (2.99)$$

donde $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ es la matriz identidad 2×2 . De la anterior se sigue

$$(\beta_k^2 e^{\beta_k t} \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \beta_k e^{\beta_k t} + \omega_k^2 e^{\beta_k t} \mathbf{I}_{2 \times 2}) \Psi_k = \mathbf{0} \quad (2.100)$$

$$e^{\beta_k t} (\beta_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2 \Omega g_k \beta_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}) \Psi_k = \mathbf{0} \quad (2.101)$$

Dado que la función exponencial no se anula para ningún valor de su argumento, debe ser

$$(\beta_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2 \Omega g_k \beta_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}) \Psi_k = \mathbf{0} \quad (2.102)$$

La única solución distinta de la trivial ($\Psi_k = \mathbf{0}$) de (2.102) requiere que el determinante de la expresión entre paréntesis sea nulo. Esto es

$$\det (\beta_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2 \Omega g_k \beta_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}) = 0 \quad (2.103)$$

$$\begin{vmatrix} \beta_k^2 + \omega_k^2 & 2 \Omega g_k \beta_k \\ -2 \Omega g_k \beta_k & \beta_k^2 + \omega_k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.104)$$

$$(\beta_k^2 + \omega_k^2)^2 + 4 \Omega^2 g_k^2 \beta_k^2 = 0 \quad (2.105)$$

que es la ecuación característica de (2.96), cuyas cuatro soluciones, que serán conjugadas dos a dos, son los valores de β_k que hacen posible que \mathbf{q}^k sea solución de (2.96), y son

$$\beta_{k,1} = i \omega_{k,1} \quad (2.106)$$

$$\beta_{k,2} = i \omega_{k,2} \quad (2.107)$$

$$\beta_{k,3} = \beta_{k,1}^* = -i \omega_{k,1} \quad (2.108)$$

$$\beta_{k,4} = \beta_{k,2}^* = -i \omega_{k,2} \quad (2.109)$$

donde (*) representa el complejo conjugado, y siendo

$$\omega_{k,1} = -g_k \Omega + \sqrt{g_k^2 \Omega^2 + \omega_k^2} \quad \omega_{k,2} = g_k \Omega + \sqrt{g_k^2 \Omega^2 + \omega_k^2} \quad (2.110)$$

Las constantes $\omega_{k,1}$ y $\omega_{k,2}$ ($k = 1, \dots, N$) representan las pulsaciones propias de la viga sometida a rotación, y son función de la velocidad angular de la misma, Ω . De nuevo se observa que para $\Omega = 0$ se tiene $\omega_{k,1} = \omega_{k,2} = \omega_k$, la pulsación propia de la viga no rotatoria.

Sustituyendo sucesivamente las expresiones (2.106), (2.107), (2.108) y (2.109) en (2.102) se obtienen las siguientes soluciones para Ψ_k , respectivamente

$$\Psi_{k,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{para } \beta_{k,1} \quad (2.111)$$

$$\Psi_{k,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{para } \beta_{k,2} \quad (2.112)$$

$$\Psi_{k,3} = \Psi_{k,1}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{para } \beta_{k,3} \quad (2.113)$$

$$\Psi_{k,4} = \Psi_{k,2}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{para } \beta_{k,4} \quad (2.114)$$

Puesto que, dadas dos soluciones de una ecuación lineal (y (2.96) lo es), cualquier combinación lineal de ellas también lo es, la solución más general de (2.96) es de la forma

$$\mathbf{q}^k(t) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^4 Z_{k,\ell} \Psi_{k,\ell} e^{\beta_{k,\ell} t} \quad Z_{k,\ell} \in \mathbb{C} \quad (2.115)$$

siendo $Z_{k,\ell}$ ($\ell = 1, \dots, 4$) cuatro constantes arbitrarias. El factor 1/2 aparece por conveniencia sin restar generalidad. Como los elementos en $\mathbf{q}^k(t)$ deben ser reales, se tiene que cumplir que

$$Z_{k,3} = Z_{k,1}^* \quad Z_{k,4} = Z_{k,2}^* \quad (2.116)$$

quedando

$$\mathbf{q}^k(t) = \frac{1}{2} \left(Z_{k,1} \Psi_{k,1} e^{\beta_{k,1} t} + Z_{k,2} \Psi_{k,2} e^{\beta_{k,2} t} + Z_{k,1}^* \Psi_{k,1}^* e^{\beta_{k,1}^* t} + Z_{k,2}^* \Psi_{k,2}^* e^{\beta_{k,2}^* t} \right) \quad (2.117)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones para $\beta_{k,\ell}$, $\omega_{k,1}$ y $\Psi_{k,\ell}$, dadas por las ecuaciones de (2.106) hasta (2.109), en (2.117), ésta última queda

$$\mathbf{q}^k(t) = \begin{pmatrix} |Z_{k,1}| \cos(\omega_{k,1} t + \arg(Z_{k,1})) + |Z_{k,2}| \cos(\omega_{k,2} t + \arg(Z_{k,2})) \\ -|Z_{k,1}| \sin(\omega_{k,1} t + \arg(Z_{k,1})) + |Z_{k,2}| \sin(\omega_{k,2} t + \arg(Z_{k,2})) \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

La respuesta \mathbf{q}^k del sistema estará totalmente definida una vez determinemos el valor de las constantes $Z_{k,1}$ y $Z_{k,2}$, que dependerán de las condiciones iniciales.

Para ello, previamente, será necesario escribir estas condiciones, dadas por (2.61), en términos de los valores iniciales de las coordenadas generalizadas, como se muestra más adelante, en el apartado 2.6.1. Supongamos, de momento, que ya están determinadas éstas últimas, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(0)$. Las constantes $Z_{k,1}$ y $Z_{k,2}$ se obtienen haciendo $t = 0$ en (2.117) y en su derivada respecto del tiempo

$$\mathbf{q}^{k,0} = \mathbf{q}^k(0) = \frac{1}{2} (Z_{k,1} \Psi_{k,1} + Z_{k,2} \Psi_{k,2} + Z_{k,1}^* \Psi_{k,1}^* + Z_{k,2}^* \Psi_{k,2}^*) \quad (2.119)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{k,0} = \dot{\mathbf{q}}^k(0) = \frac{1}{2} (\beta_{k,1} Z_{k,1} \Psi_{k,1} + \beta_{k,2} Z_{k,2} \Psi_{k,2} + \beta_{k,1}^* Z_{k,1}^* \Psi_{k,1}^* + \beta_{k,2}^* Z_{k,2}^* \Psi_{k,2}^*) \quad (2.120)$$

O bien, operando

$$\mathbf{q}^{k,0} = \Re(Z_{k,1} \Psi_{k,1}) + \Re(Z_{k,2} \Psi_{k,2}) \quad (2.121)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{k,0} = \Im(\beta_{k,1} Z_{k,1} \Psi_{k,1}) + \Im(\beta_{k,2} Z_{k,2} \Psi_{k,2}) \quad (2.122)$$

en las que $\Re(z)$ y $\Im(z)$ representan la parte real y la imaginaria del complejo z , respectivamente. Estas dos ecuaciones pueden ser escritas más convenientemente en forma matricial si definimos las matrices siguientes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{k,1} & \Psi_{k,2} \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{k,1} & 0 \\ 0 & \omega_{k,2} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

de forma que se tiene

$$\Psi \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{k,1} \Psi_{k,1} & \omega_{k,2} \Psi_{k,2} \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

De esta forma, (2.121) y (2.122) pueden ponerse como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}^{k,0} \\ \dot{\mathbf{q}}^{k,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(\Psi) & -\Im(\Psi) \\ -\Im(\Psi \Omega) & -\Re(\Psi \Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(Z_{k,1}) \\ \Re(Z_{k,2}) \\ \Im(Z_{k,1}) \\ \Im(Z_{k,2}) \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

O bien, desarrollándola

$$\begin{pmatrix} q_{k,0}^2 \\ q_{k,0}^3 \\ \dot{q}_{k,0}^2 \\ \dot{q}_{k,0}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\omega_{k,1} & -\omega_{k,2} \\ -\omega_{k,1} & \omega_{k,2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(Z_{k,1}) \\ \Re(Z_{k,2}) \\ \Im(Z_{k,1}) \\ \Im(Z_{k,2}) \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

Y, por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \Re(Z_{k,1}) \\ \Re(Z_{k,2}) \\ \Im(Z_{k,1}) \\ \Im(Z_{k,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{k,2}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} \\ \frac{\omega_{k,1}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} \\ 0 & \frac{-\omega_{k,2}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} & \frac{-1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{k,1}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} & \frac{-1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{k,0}^2 \\ q_{k,0}^3 \\ \dot{q}_{k,0}^2 \\ \dot{q}_{k,0}^3 \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

Es decir,

$$Z_{k,1} = \frac{\omega_{k,2}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} q_{k,0}^2 - \frac{1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} \dot{q}_{k,0}^3 - i \left(\frac{\omega_{k,2}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} q_{k,0}^3 + \frac{1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} \dot{q}_{k,0}^2 \right) \quad (2.128)$$

$$Z_{k,2} = \frac{\omega_{k,1}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} q_{k,0}^2 + \frac{1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} \dot{q}_{k,0}^3 + i \left(\frac{\omega_{k,1}}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} q_{k,0}^3 - \frac{1}{\omega_{k,1} + \omega_{k,2}} \dot{q}_{k,0}^2 \right) \quad (2.129)$$

Con lo que ya está definida totalmente la respuesta $\mathbf{q}^k(t)$ ($k = 1, \dots, N$), simplemente sustituyendo en (2.118) las expresiones dadas para $\omega_{k,1}$, $\omega_{k,2}$, Z_1 y Z_2 por (2.110), (2.128) y (2.129), respectivamente. Una vez conocida la respuesta temporal en términos de las coordenadas generalizadas, sustituyendo éstas en (2.49) se obtiene $\mathbf{U}(x, t)$, y, por lo tanto, $r_2(x, t)$ y $r_3(x, t)$.

2.6.1. Condiciones iniciales en coordenadas generalizadas

A partir de una deformada inicial dada, $r_j(x, 0)$, y la velocidad de cada punto, $\dot{r}_j(x, 0)$, pueden obtenerse las condiciones iniciales en términos de coordenadas generalizadas, $q_{k,0}^j$ y $\dot{q}_{k,0}^j$ ($j = 2, 3; k = 1, \dots, N$). La expresión (2.49), que ahora reproducimos para $t = 0$,

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{S}(x) \mathbf{q}(0) \quad (2.130)$$

relaciona las $2N$ incógnitas $\mathbf{q}(0)$ con las dos funciones $\mathbf{U}(x, 0)$. Premultiplicando la anterior por $\mathbf{S}(x)^T$ en integrando en la longitud de la viga se tiene

$$\int_L \mathbf{S}(x)^T \mathbf{U}(x, 0) dx = \left(\int_L \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dx \right) \mathbf{q}(0) \quad (2.131)$$

La integral del segundo miembro es una matriz cuadrada $2N \times 2N$. Si las funciones en $\mathbf{S}(x)$ son modos propios, esa matriz es no-singular, por lo que puede ser invertida para proporcionar $\mathbf{q}(0)$.

$$\mathbf{q}(0) = \left(\int_L \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dx \right)^{-1} \int_L \mathbf{S}(x)^T \mathbf{U}(x, 0) dx \quad (2.132)$$

Además, es diagonal, por lo que el coste computacional de (2.132) no es elevado.

Derivando (2.49) respecto del tiempo se obtiene la relación entre la velocidad en cada punto y las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, que en $t = 0$ queda

$$\dot{\mathbf{U}}(x, 0) = \mathbf{S}(x) \dot{\mathbf{q}}(0) \quad (2.133)$$

Procediendo de forma análoga se llega a

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \left(\int_L \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dx \right)^{-1} \int_L \mathbf{S}(x)^T \dot{\mathbf{U}}(x, 0) dx \quad (2.134)$$

siendo la matriz a invertir la misma que en el caso de $\mathbf{q}(0)$.

En algunos modelos de viga (por ejemplo, Euler–Bernoulli), la matriz de masa modal viene dada por

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \int_L \rho A \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dx \quad (2.135)$$

por lo que si se emplean los modos normalizados a la matriz de masa y se multiplica ambos miembros de (2.130) por la densidad y por el área, la matriz a invertir resulta ser la identidad. No es el caso de la viga de Rayleigh, cuya matriz de masa viene dada por (2.56). No obstante, si interesara, podría usarse una normalización que convirtiera $\int_L \mathbf{S}(x)^T \mathbf{S}(x) dx$ en la identidad.

2.6.2. Órbitas modales

Dado que el objeto de este capítulo es llegar a entender cómo afecta la rotación a la respuesta, encontrar la solución analítica de ésta es, en cierto modo, insuficiente. Es difícil imaginar, a partir de las expresiones anteriores, qué aspecto tendrá la órbita que describe cada punto de la viga, incluso en las más sencillas condiciones.

La órbita que describa un punto, será la superposición de las órbitas debidas a cada pareja de modos con el mismo índice, ponderadas por el valor de las funciones de forma en el punto. Así, para cumplir nuestro objetivo, basta centrarse en la órbita que describiría el punto si sólo respondiera una de tales parejas modales. Y dado que las funciones $s_k(x)$ en ese punto serán un simple factor de escala, podemos prescindir de ellas (o tomarlas como unitarias, si se prefiere). Es decir, podemos asumir que $r_2(x, t) = q_k^2(t)$ y $r_3(x, t) = q_k^3(t)$ y representar $q_k^3(t)$ frente a $q_k^2(t)$ como una imagen de la órbita a diferente escala. Esto es lo que hemos llamado *órbita modal*.

Órbitas modales de rotación hacia adelante y hacia atrás

En la bibliografía sobre rotores [22, 30, 38] se describen con frecuencia modos de rotación hacia adelante y hacia atrás (en la nomenclatura anglosajona, *forward and backward whirl* respectivamente). Éstos pueden ser reconocidos fácilmente en la respuesta libre del sistema dada por 2.118, y que puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^k(t) = & |Z_{k,2}| \begin{pmatrix} \cos(\omega_{k,2} t + \arg(Z_{k,2})) \\ \sin(\omega_{k,2} t + \arg(Z_{k,2})) \end{pmatrix} + \\ & + |Z_{k,1}| \begin{pmatrix} \cos(\omega_{k,1} t + \arg(Z_{k,1})) \\ -\sin(\omega_{k,1} t + \arg(Z_{k,1})) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.136)$$

Ahora resulta evidente que si las condiciones iniciales son tales que sólo una de las $Z_{k,\ell}$ ($\ell = 1, 2$) es no nula, el movimiento resultante es una circunferencia de radio $|Z_{k,\ell}|$, descrito con velocidad angular $\omega_{k,\ell}$. En el caso de $\ell = 2$ (primer término, pulsación propia mayor), la circunferencia se describe en el mismo sentido de la rotación de la viga (*forward whirl*), y en el caso de $\ell = 1$ (segundo término, pulsación propia menor), en el sentido contrario (*backward whirl*), como se deduce del signo negativo que acompaña al seno.

No obstante, la respuesta general será la superposición de ambos, y la forma de la órbita depende fuertemente de las condiciones iniciales, como se verá a continuación.

Órbitas modales generales adimensionales

Como se ha visto, la respuesta de cada par de modos (y, por tanto, la órbita modal) depende de la esbeltez de la viga, de la frecuencia propia no rotatoria y de la velocidad de rotación. Y, por supuesto, de las correspondientes condiciones iniciales modales. Para abarcar todas las posibilidades, habría que seleccionar un conjunto de valores representativos para cada parámetro, y para cada posible combinación de ellos, representar la órbita modal.

Un enfoque más adecuado consiste en adimensionalizar la respuesta, reduciendo así el número de parámetros de los que depende. Para ello, dada una velocidad de rotación de la viga, para la pareja de modos de índice k definimos la *constante característica del sistema*, G_k , como

$$G_k \stackrel{\text{def}}{=} g_k \frac{\Omega}{\omega_k} = \frac{(k\pi)^2}{\lambda^2 + (k\pi)^2} \frac{\Omega}{\omega_k} \quad (2.137)$$

Transformemos la condición inicial de velocidad $\dot{\mathbf{q}}^{k,0}$, dividiéndola por la frecuencia propia no rotatoria, ω_k , definiendo así la *condición inicial de velocidad adimensional*

$$\boldsymbol{\nu}_{k,0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{q}}^{k,0}}{\omega_k} \quad (2.138)$$

Obsérvese que $\boldsymbol{\nu}_{k,0}$ representa los desplazamientos (modales) máximos que alcanzaría el sistema, en el caso no rotatorio, a partir de la condición de velocidad dada.

Y finalmente, definamos el parámetro adimensional que representará al tiempo, τ_k , como

$$\tau_k \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{k,2} t \quad (2.139)$$

Con estas transformaciones, las constantes Z_1 y Z_2 y la respuesta \mathbf{q}^k , dadas por (2.128), (2.129) y (2.118) respectivamente, se escriben como

$$\begin{aligned} Z_{k,1} = & \frac{1}{2\sqrt{G_k^2 + 1}} \left[\left(G_k + \sqrt{G_k^2 + 1} \right) q_{k,0}^2 - \nu_{k,0}^3 - \right. \\ & \left. - i \left(\left(G_k + \sqrt{G_k^2 + 1} \right) q_{k,0}^3 + \nu_{k,0}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$Z_{k,2} = \frac{1}{2\sqrt{G_k^2+1}} \left[\left(-G_k + \sqrt{G_k^2+1} \right) q_{k,0}^2 + \nu_{k,0}^3 + i \left(\left(-G_k + \sqrt{G_k^2+1} \right) q_{k,0}^3 - \nu_{k,0}^2 \right) \right] \quad (2.141)$$

$$\mathbf{q}^k(t) = \begin{pmatrix} |Z_{k,1}| \cos \left(\frac{-G_k + \sqrt{G_k^2+1}}{G_k + \sqrt{G_k^2+1}} \tau_k + \arg(Z_{k,1}) \right) + |Z_{k,2}| \cos(\tau_k + \arg(Z_{k,2})) \\ -|Z_{k,1}| \sin \left(\frac{-G_k + \sqrt{G_k^2+1}}{G_k + \sqrt{G_k^2+1}} \tau_k + \arg(Z_{k,1}) \right) + |Z_{k,2}| \sin(\tau_k + \arg(Z_{k,2})) \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

Así, dadas unas condiciones iniciales modales de posición, $\mathbf{q}^{k,0}$ y de velocidad adimensional, $\nu_{k,0}$, la respuesta, $\mathbf{q}^k(t)$, depende exclusivamente de la constante característica del sistema, G_k . A su vez, esta constante, definida por (2.137), es función de la esbeltez de la viga y de la relación entre la velocidad de giro y la frecuencia propia no rotatoria. Cualesquiera dos sistemas, por dispares que sean, para los que la constante característica sea la misma, tendrán la misma respuesta antes las mismas condiciones iniciales modales de posición y de velocidad adimensional. De este modo, sólo es necesario estudiar la dependencia de la órbita modal con la constante característica.

La expresión (2.142) puede ser escrita de forma más conveniente si definimos las siguientes variables, que dependen de las condiciones iniciales y la constante característica.

$$a_k = |Z_{k,2}| \left(1 + \frac{G_k + \sqrt{G_k^2+1}}{-G_k + \sqrt{G_k^2+1}} \right) \quad (2.143)$$

$$b_k = |Z_{k,2}| \left(\frac{G_k + \sqrt{G_k^2+1}}{-G_k + \sqrt{G_k^2+1}} \right) \quad (2.144)$$

$$c_k = |Z_{k,1}| \quad (2.145)$$

$$\phi_{k,0} = -\arg(Z_{k,1}) \quad (2.146)$$

$$\tau_{k,0} = -\arg(Z_{k,2}) \quad (2.147)$$

Con estas variables, (2.142) puede escribirse como

$$\mathbf{q}^k(\tau_k) = \begin{pmatrix} (a_k - b_k) \cos(\tau_k - \tau_{k,0}) + c_k \cos \left(\frac{a_k - b_k}{b_k} \tau_k - \phi_{k,0} \right) \\ (a_k - b_k) \sin(\tau_k - \tau_{k,0}) - c_k \sin \left(\frac{a_k - b_k}{b_k} \tau_k - \phi_{k,0} \right) \end{pmatrix} \quad (2.148)$$

que puede reconocerse como la ecuación paramétrica de una hipotrocoide. Esta curva matemática es la trayectoria que describe un punto P solidario con un círculo móvil de radio b_k , situado a una distancia c_k de su centro, que rueda sin deslizar por el interior de una circunferencia fija de radio a_k (con $a_k > b_k$), siendo $\phi_{k,0}$ el ángulo que forma el radio del círculo móvil que pasa por el punto P con el eje horizontal cuando el parámetro $\tau_k = \tau_{k,0}$ (véase la figura 2.6).

En la expresión 2.148 aún pueden identificarse los modos de rotación hacia adelante y hacia atrás (*forward and backward whirl*). El primero sucede cuando $|Z_{k,1}| = 0$ (y, por tanto, $c_k = 0$), y el segundo en el límite cuando $|Z_{k,2}|$ tiende a cero. Nótese que en este último caso, ambos a_k y b_k tienden a cero, pero la razón $\frac{a_k - b_k}{b_k}$, que es igual a $\frac{-G_k + \sqrt{G_k^2 + 1}}{G_k + \sqrt{G_k^2 + 1}}$, se mantiene constante por ser función exclusivamente de G_k .

Se concluye, pues, que las órbitas modales generales son hipotrocoides. Esta curva presenta una geometría cíclica, es decir, puede encontrarse una longitud de la curva, a la que llamaremos *longitud básica*, que repetida y girada en torno al origen reconstruye la órbita. Definamos como *período básico adimensional*, T_k , al tiempo adimensionalizado que tarda en ser descrita dos veces la longitud básica, que vendrá dado por la expresión

$$T_k = 2 \left(2 \pi \frac{b_k}{a_k} \right) = 2 \pi \frac{G_k}{\sqrt{G_k^2 + 1}} \quad (2.149)$$

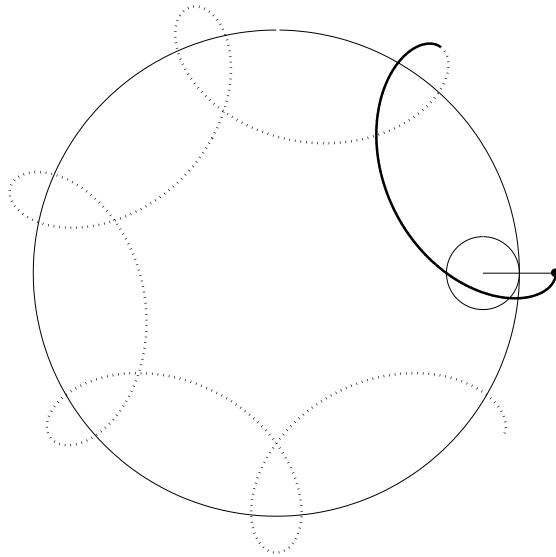


Figura 2.6. *Generación de la hipotrocoide. En trazo continuo se resalta la longitud básica, recorrida en la mitad del período básico adimensional. El tiempo total representado corresponde a tres veces el período básico adimensional.*

Fijadas unas condiciones iniciales modales en una viga dada, la órbita de los modos de índice k será la hipotrocoide correspondiente a esas condiciones iniciales

y a la constante del sistema G_k . Si sólo una condición inicial es no nula, su valor concreto sólo afectará a la amplitud de la órbita, que será proporcional al mismo, pero no a la forma. Además, dada la simetría del problema, la órbita correspondiente a las condiciones iniciales de un plano es la misma que la que corresponde a las mismas condiciones en el otro plano, pero girada 90 grados en torno al origen. De esta manera, para entender el efecto de la rotación sobre la dinámica de la viga, basta estudiar la evolución del sistema ante una condición inicial de posición modal unitaria en un modo y nula en todos los demás, por un lado, y por otro, la respuesta ante una condición de velocidad modal unitaria en un modo y nula en todos los demás.

Para una viga dada, su constante característica G_k sólo depende de la velocidad angular, y es proporcional a ella, por lo que puede interpretarse como una representación adimensional de ésta. La adimensionalización realizada hace que la respuesta de todos los modos ante las mismas condiciones iniciales (adimensionalizada la condición de velocidad) sea idéntica para un mismo valor de la constante característica.

En cada una de las figuras 2.7, 2.8 y 2.9 se muestran órbitas modales ante diferentes condiciones iniciales, para seis valores de G_k (0, 0.05, 0.75, 1.5, 3 y 30). En todas ellas, la gráfica (a) muestra la respuesta para un valor de la constante característica $G_k = 0$, que corresponde a velocidad de rotación nula. Es por tanto, la respuesta de la misma viga en ausencia de rotación. Dada la definición de G_k (por (2.137)), también es el límite al que tiende la órbita cuando la esbeltez o la frecuencia propia de la viga no rotatoria tienden a infinito. En las gráficas se ha representado la órbita descrita durante un tiempo equivalente a cinco veces el período básico adimensional.

La figura 2.7 (página 43) corresponde a la condición de posición modal inicial $q_{k,0}^2 = 1$ y todas las demás nulas. En la gráfica (b) puede apreciarse que, para velocidades de rotación bajas, todo ocurre como si el plano de vibración girara con determinada velocidad angular en torno al origen. Conforme se eleva la velocidad angular (o se reduce la esbeltez o la frecuencia propia), la órbita va tomando una forma estrellada, cada vez más abierta. La longitud recorrida se va reduciendo, tendiendo a un punto en el límite (para velocidad infinita), situado en la condición inicial. Se aprecia, así mismo, que para velocidades de rotación no nulas, la órbita nunca pasa por el origen. Una consecuencia de esto es que, a diferencia del caso de viga no rotatoria, no existe una condición inicial de velocidad equivalente a la condición de posición. Es más, como veremos a continuación, las órbitas correspondientes en ese otro caso son completamente diferentes.

Las condiciones iniciales de la figura 2.8 (página 44), corresponden a la condición de velocidad modal adimensional $\nu_{k,0} = \dot{q}_{k,0}^3 / \omega_k = 3$ y todas las demás nulas. En la gráfica (a) puede verse, gráficamente, la interpretación que se ha dado de $\nu_{k,0}$ como el máximo desplazamiento que alcanza el sistema (en este caso igual a 3). Como en el caso anterior, en la gráfica (b) se aprecia que, para velocidades angulares bajas, la respuesta es similar a una rotación del plano de vibración. Al aumentar la velocidad, la órbita forma unos lóbulos que se van plegando sobre sí mismos, formando una espiral con los anillos cada vez más pequeños. También en este caso, la respuesta en el límite tiende a un punto, esta vez situado en el origen (que es la posición inicial),

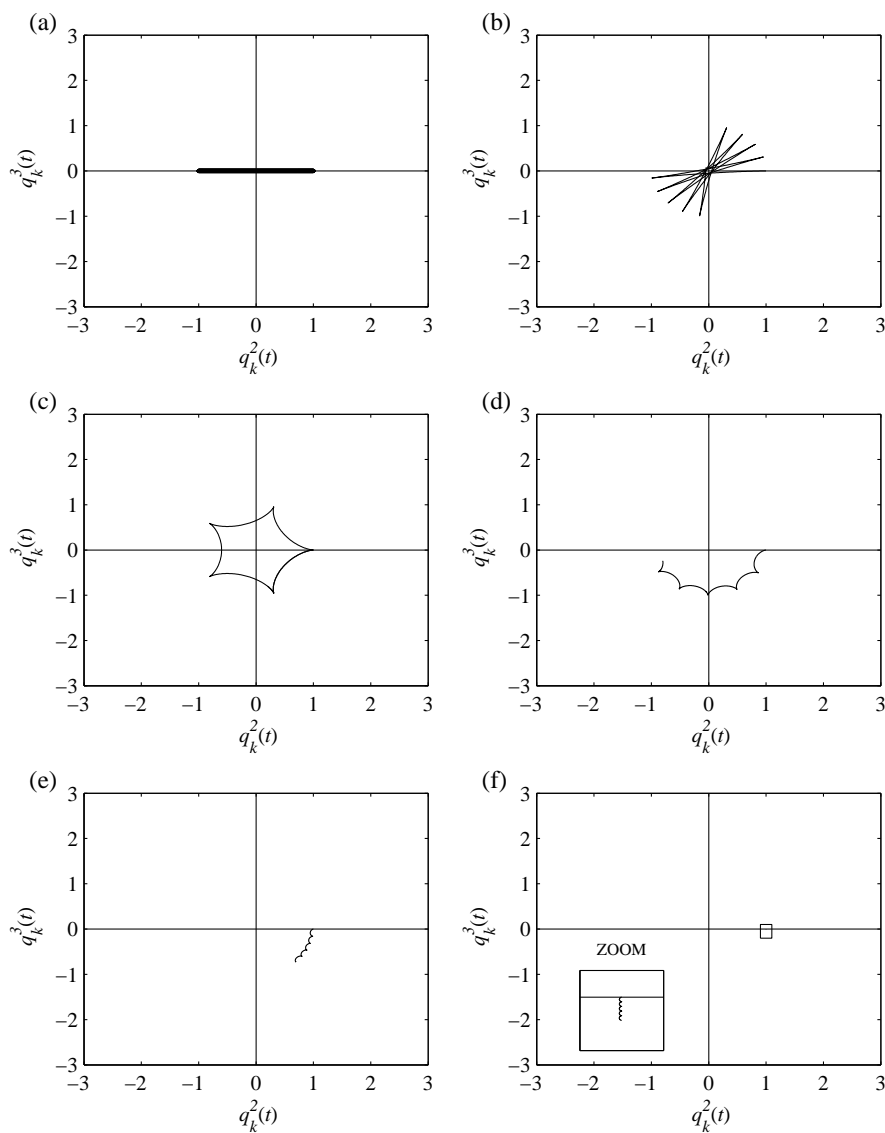


Figura 2.7. Órbitas modales durante cinco períodos básicos adimensionales ante condiciones iniciales de posición $q_{k,0}^2 = 1$, $q_{k,0}^3 = 0$, para diferentes valores de G_k : (a) $G_k = 0$, (b) $G_k = 0.05$, (c) $G_k = 0.75$, (d) $G_k = 1.5$, (e) $G_k = 3$, (f) $G_k = 30$.

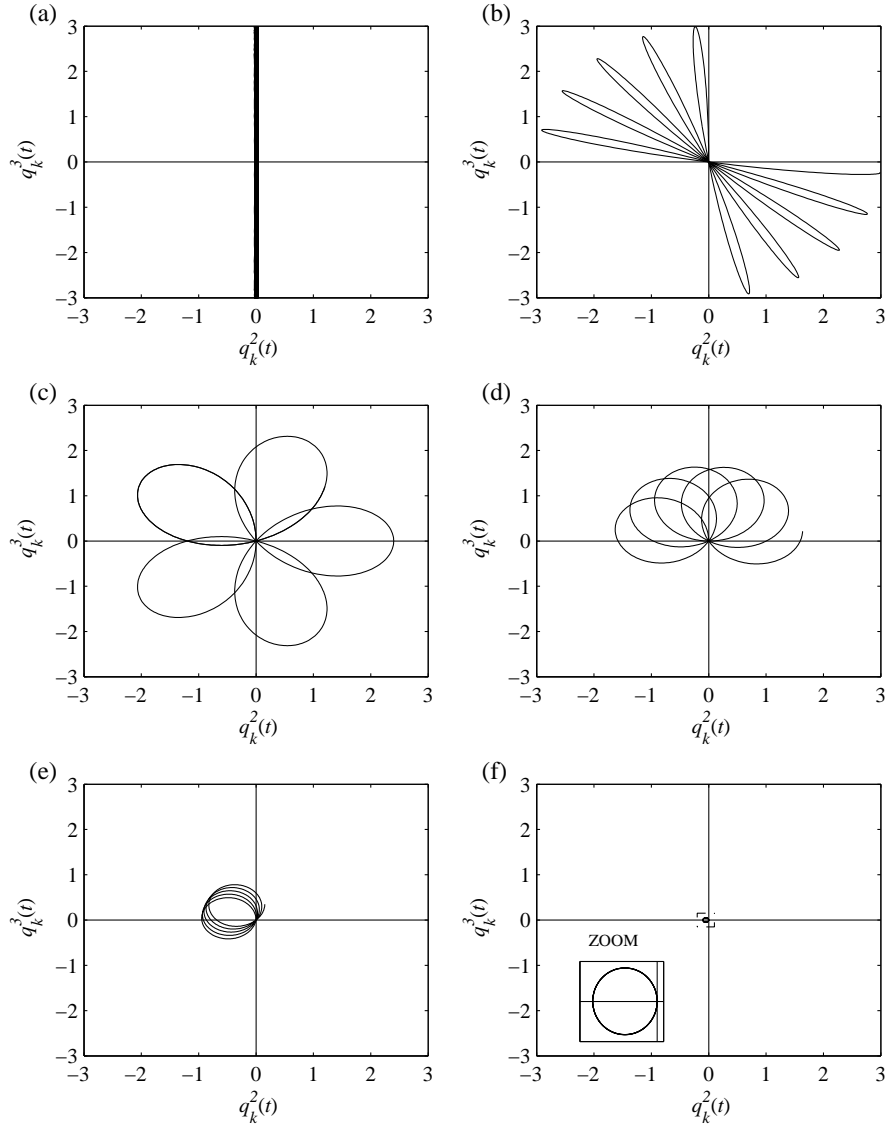


Figura 2.8. Órbitas modales durante cinco períodos básicos adimensionales ante condiciones iniciales de velocidad $\dot{q}_{k,0}^2/\omega_k = 0$, $\dot{q}_{k,0}^3/\omega_k = 3$, para diferentes valores de G_k : (a) $G_k = 0$, (b) $G_k = 0.05$, (c) $G_k = 0.75$, (d) $G_k = 1.5$, (e) $G_k = 3$, (f) $G_k = 30$.

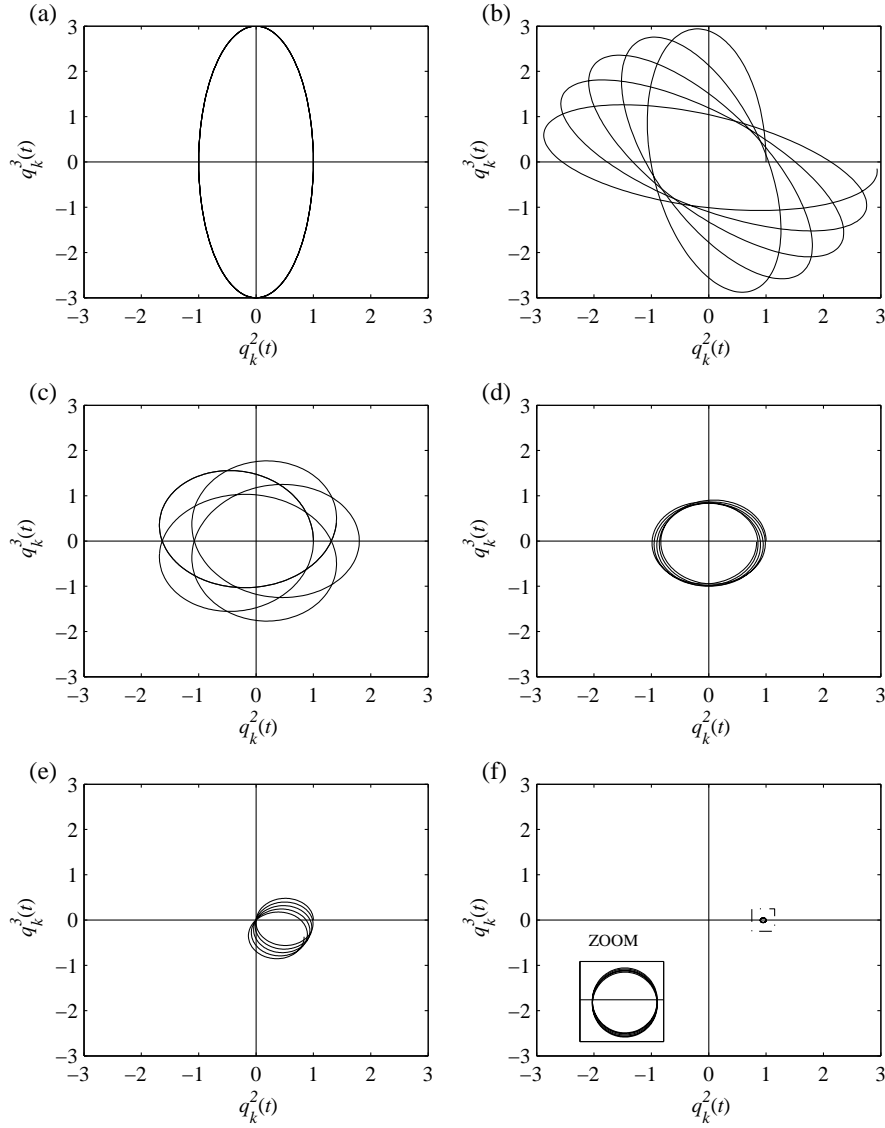


Figura 2.9. Órbitas modales durante cinco períodos básicos adimensionales ante condiciones iniciales de posición y velocidad $q_{k,0}^2 = 1$, $q_{k,0}^3 = 0$, $\dot{q}_{k,0}^2/\omega_k = 0$, $\dot{q}_{k,0}^3/\omega_k = 3$, para diferentes valores de G_k : (a) $G_k = 0$, (b) $G_k = 0.05$, (c) $G_k = 0.75$, (d) $G_k = 1.5$, (e) $G_k = 3$, (f) $G_k = 30$.

por el que pasan todas las órbitas.

Finalmente, en la figura 2.9 (página 45) se muestra la órbita ante la combinación de las condiciones iniciales anteriores. También en este caso, para velocidades angulares bajas —gráfica (b)— la respuesta es equivalente a una rotación del plano de vibración. Un aumento de la velocidad lleva a que la órbita se cierre sobre sí misma, formando una espiral curva, sucesivamente más curvada y con espiras de menor radio, colapsando, en el límite, en un punto en la posición inicial.

2.7. Vibraciones forzadas

Consideremos ahora el caso en el que existan unas fuerzas externas aplicadas $f_j(x, t)$ ($j = 2, 3$), que dan lugar a unas fuerzas generalizadas modales $\mathbf{Q}^k(t)$ (2.91) como se ha visto. Supongamos que todas éstas últimas son armónicas y de la misma frecuencia. Por el teorema de Fourier, esto no supone pérdida de generalidad porque, de no ser así, siempre podríamos aplicar un desarrollo en serie de Fourier, o su transformada (según el caso) a cada una, lo que llevaría, por la linealidad de la ecuación (2.92), a una superposición de casos armónicos.¹⁰

Así, podemos escribir las fuerzas generalizadas en la forma

$$\mathbf{Q}^k(t) = \Re(\mathbf{Q}_H^k e^{i\omega_e t}) \quad \mathbf{Q}_H^k \in \mathbb{C}^2 \quad (2.150)$$

siendo ω_e la pulsación de la excitación, y \mathbf{Q}_H^k un vector que recoge las diferentes amplitudes y fases de cada fuerza generalizada de los modos de índice k . Con esto, la ecuación (2.92) queda

$$\ddot{\mathbf{q}}^k - 2\Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + \omega_k^2 \mathbf{q}^k = \Re(\mathbf{Q}_H^k e^{i\omega_e t}) \quad k = 1, \dots, N \quad (2.151)$$

La solución general de (2.151) será la solución general de la ecuación homogénea (2.96) (dada por (2.118)) más una solución particular de la ecuación completa. Como solución particular puede tomarse la de régimen permanente, en la que todos los modos responden armónicamente y con la frecuencia de la excitación. Ésta tendrá la forma

$$\mathbf{q}^k(t) = \Re(\mathbf{q}_H^k e^{i\omega_e t}) \quad \mathbf{q}_H^k \in \mathbb{C}^2 \quad (2.152)$$

donde, como antes, \mathbf{q}_H^k recoge las diferentes amplitudes y fases de la respuesta de cada modo de índice k . Derivando (2.152) sucesivamente respecto del tiempo y sustituyendo en (2.151) se llega a

$$\Re[(-\omega_e^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2i\omega_e \Omega g_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}) \mathbf{q}_H^k e^{i\omega_e t}] = \Re(\mathbf{Q}_H^k e^{i\omega_e t}) \quad (2.153)$$

¹⁰Evidentemente, no toda función matemática permite el tratamiento de Fourier. No obstante, puesto que las funciones sobre las que necesitamos aplicarlo representan fuerzas físicas existentes y, por tanto, acotadas, las condiciones matemáticas que es necesario exigirles no son restrictivas. En el caso de las funciones no periódicas, el uso de ventanas temporales extendidas al tiempo de la simulación permite cumplir la condición de Dirichlet.

La ecuación anterior es lineal, por lo que se cumple con todo vector \mathbf{q}_H^k que satisfaga la siguiente

$$(-\omega_e^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2i\omega_e \Omega g_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}) \mathbf{q}_H^k e^{i\omega_e t} = \mathbf{Q}_H^k e^{i\omega_e t} \quad (2.154)$$

Y, puesto que la exponencial nunca se anula, es equivalente a

$$(-\omega_e^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2i\omega_e \Omega g_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}) \mathbf{q}_H^k = \mathbf{Q}_H^k \quad (2.155)$$

lo que permite obtener \mathbf{q}_H^k como

$$\mathbf{q}_H^k = (-\omega_e^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} - 2i\omega_e \Omega g_k \mathbf{G} + \omega_k^2 \mathbf{I}_{2 \times 2})^{-1} \mathbf{Q}_H^k \quad (2.156)$$

Ahora, desarrollando la matriz entre paréntesis

$$\mathbf{q}_H^k = \begin{pmatrix} \omega_k^2 - \omega_e^2 & 2i\omega_e \Omega g_k \\ -2i\omega_e \Omega g_k & \omega_k^2 - \omega_e^2 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{Q}_H^k \quad (2.157)$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{q}_H^k = \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega_e^2)^2 - (2\omega_e \Omega g_k)^2} \begin{pmatrix} \omega_k^2 - \omega_e^2 & -2i\omega_e \Omega g_k \\ 2i\omega_e \Omega g_k & \omega_k^2 - \omega_e^2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_H^k \quad (2.158)$$

Con esto, la respuesta en régimen permanente es

$$\mathbf{q}_k(t) = \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega_e^2)^2 - (2\omega_e \Omega g_k)^2} \Re \left[\begin{pmatrix} \omega_k^2 - \omega_e^2 & -2i\omega_e \Omega g_k \\ 2i\omega_e \Omega g_k & \omega_k^2 - \omega_e^2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_H^k e^{i\omega_e t} \right] \quad (2.159)$$

En (2.159) es posible observar que, como era previsible, la respuesta de cada modo de índice k depende no sólo de su fuerza generalizada, sino también de la del otro modo del mismo índice, debido a la presencia de los términos $\pm 2i\omega_e \Omega g_k$.

2.7.1. Inertancias modales

Al trabajar en régimen armónico permanente todas las magnitudes evolucionan senoidalmente, con la misma frecuencia, aunque diferente amplitud y fase. Por ello, es conveniente la representación de estas magnitudes como funciones complejas, englobando en una sola variable la amplitud y la fase.

Recordemos que se define la inertancia entre dos puntos como la magnitud compleja que relaciona la aceleración de la respuesta en uno de ellos y la fuerza excitadora en el otro, teniendo en cuenta sus fases. Cuando el punto y dirección de la excitación coincide con la de respuesta, la inertancia se llama *de punto*. En caso contrario, *cruzada*. Análogamente, siguiendo lo que se ha razonando en el apartado 2.6.2 sobre las órbitas, podemos definir una *inertancia modal* como la relación entre la derivada segunda de la coordenada generalizada correspondiente a un modo (aceleración modal)

y la fuerza generalizada en otro, ambas representadas como complejos. Así, hablaremos de *inertancia modal directa*¹¹ cuando ambos modos sean el mismo, y *inertancia modal cruzada* cuando no.

Como en el caso de la respuesta libre, es conveniente reducir el número de parámetros de los que depende la respuesta forzada (y, por tanto, la inertancia) adimensionalizándolos, de forma que puedan extraerse conclusiones generales.

Teniendo en cuenta la definición de G_k , dada por (2.137), se tiene que $\Omega g_k = \omega_k G_k$, luego, sustituyendo en (2.159)

$$\mathbf{q}_k(t) = \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega_e^2)^2 - (2\omega_e\omega_k G_k)^2} \Re \left[\begin{pmatrix} \omega_k^2 - \omega_e^2 & -2i\omega_e\omega_k G_k \\ 2i\omega_e\omega_k G_k & \omega_k^2 - \omega_e^2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_H^k e^{i\omega_e t} \right] \quad (2.160)$$

Y si llamamos ζ a la relación entre la pulsación de la excitación, ω_e , y la pulsación propia de la viga no rotatoria, ω_k , es decir

$$\zeta = \frac{\omega_e}{\omega_k} \quad (2.161)$$

la respuesta queda

$$\mathbf{q}_k(t) = \frac{1}{(\omega_k - \zeta^2 \omega_k)^2 - (2\zeta\omega_k G_k)^2} \Re \left[\begin{pmatrix} 1 - \zeta^2 & -2i\zeta G_k \\ 2i\zeta G_k & 1 - \zeta^2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_H^k e^{i\zeta\omega_k t} \right] \quad (2.162)$$

La aceleración modal será la derivada segunda de esta expresión respecto del tiempo

$$\ddot{\mathbf{q}}_k(t) = \frac{-\zeta^2}{(1 - \zeta^2)^2 - (2\zeta G_k)^2} \Re \left[\begin{pmatrix} 1 - \zeta^2 & -2i\zeta G_k \\ 2i\zeta G_k & 1 - \zeta^2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_H^k e^{i\zeta\omega_k t} \right] \quad (2.163)$$

Si denotamos por $\ddot{\mathbf{q}}_H^k$ al vector que contiene la representación compleja de cada componente de $\ddot{\mathbf{q}}_k(t)$, se tiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_H^k = \frac{-\zeta^2}{(1 - \zeta^2)^2 - (2\zeta G_k)^2} \begin{pmatrix} 1 - \zeta^2 & -2i\zeta G_k \\ 2i\zeta G_k & 1 - \zeta^2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}_H^k \quad \ddot{\mathbf{q}}_H^k \in \mathbb{C}^2 \quad (2.164)$$

El vector $\ddot{\mathbf{q}}_H^k$ toma los valores de las inertancias de ambos modos respecto a la excitación en el primero de ellos haciendo $\mathbf{Q}_H^k = (1 \ 0)^T$ en la expresión anterior. De la misma manera, se obtienen las inertancias respecto a la excitación del segundo modo si se hace $\mathbf{Q}_H^k = (0 \ 1)^T$. Por ello, sustituyendo \mathbf{Q}_H^k por la matriz identidad 2×2 , el resultado es una matriz con todas las inertancias, estando las directas en la diagonal, y las cruzadas fuera de ella. Esta matriz es la siguiente:

$$\frac{-\zeta^2}{(1 - \zeta^2)^2 - (2\zeta G_k)^2} \begin{pmatrix} 1 - \zeta^2 & -2i\zeta G_k \\ 2i\zeta G_k & 1 - \zeta^2 \end{pmatrix} \quad (2.165)$$

¹¹No la llamamos *de punto* porque en este caso no hace referencia a la respuesta en un punto físico.

Así, la inercia directa tiene por módulo

$$A_{k,D} = \left| \frac{\zeta^2(1 - \zeta^2)}{(1 - \zeta^2)^2 - (2\zeta G_k)^2} \right| \quad (2.166)$$

estando la respuesta en fase o en contra fase con la excitación. El módulo de la inercia cruzada es

$$A_{k,C} = \left| \frac{2\zeta^3 G_k}{(1 - \zeta^2)^2 - (2\zeta G_k)^2} \right| \quad (2.167)$$

y la respuesta está adelantada o retrasada $\pi/2$ con respecto a la excitación.

La figura 2.10 muestran las gráficas de la amplitud de las inercias directas y cruzadas para $\zeta \in [0, 7]$ y para valores de G_k de 0.05, 0.75, 1.5 y 3. La inercia directa se muestra también para el caso $G_k = 0$ (viga no rotatoria). En este caso, la inercia cruzada es nula.

En la citada figura, puede verse en las gráficas de inercia directa que, para la viga no rotatoria ($G_k = 0$), aparece la esperada resonancia en $\zeta = 1$, es decir, cuando se excita a su frecuencia propia ω_k .

Para $G_k > 0$, este pico se desdobra en dos, en los valores de $\zeta = \sqrt{G_k^2 + 1} - 1$ y $\zeta = \sqrt{G_k^2 + 1} + 1$, tanto más separados, por tanto, cuanto mayor es G_k (es decir, para una viga dada, cuanto mayor es su velocidad angular). Estos valores de ζ corresponden a las frecuencias propias de la viga giratoria, que también se desdoblan. Es un efecto típico de los términos giroscópicos, tal como se muestra en [30] y en [64]. En este caso, existe también respuesta cruzada, presentando picos a las mismas frecuencias que la directa. En $\zeta = 1$, la inercia directa presenta una antirresonancia, cosa que no sucede con la cruzada. Como consecuencia de esto, la respuesta cruzada es mayor que la directa si $\sqrt{G_k^2 + 1} - 1 < \zeta < \sqrt{G_k^2 + 1} + 1$, es decir, si la frecuencia de excitación se encuentra entre las dos frecuencias propias asociadas a los modos de índice k .

2.8. Estabilidad del sistema

Desde un punto de vista general, se dice que un sistema lineal es *estable* si ante toda entrada acotada, la salida está también acotada.

Según el *teorema de Routh-Hurwitz*, un sistema lineal continuo es estable si *todos* sus autovalores tienen la parte real *estrictamente menor que cero* [14, 67].

Si la parte real de algún autovalor es estrictamente positiva, entonces el sistema es inestable.

Un sistema con algún autovalor con parte real nula (imaginario puro) y ninguno con parte real positiva, recibe el nombre de *sistema marginalmente estable*. Tal sistema sólo responde de forma no acotada ante determinadas entradas.

También se puede identificar la estabilidad de un sistema a partir de la respuesta forzada o de la respuesta libre. En el primer caso, un sistema es estable si alcanza

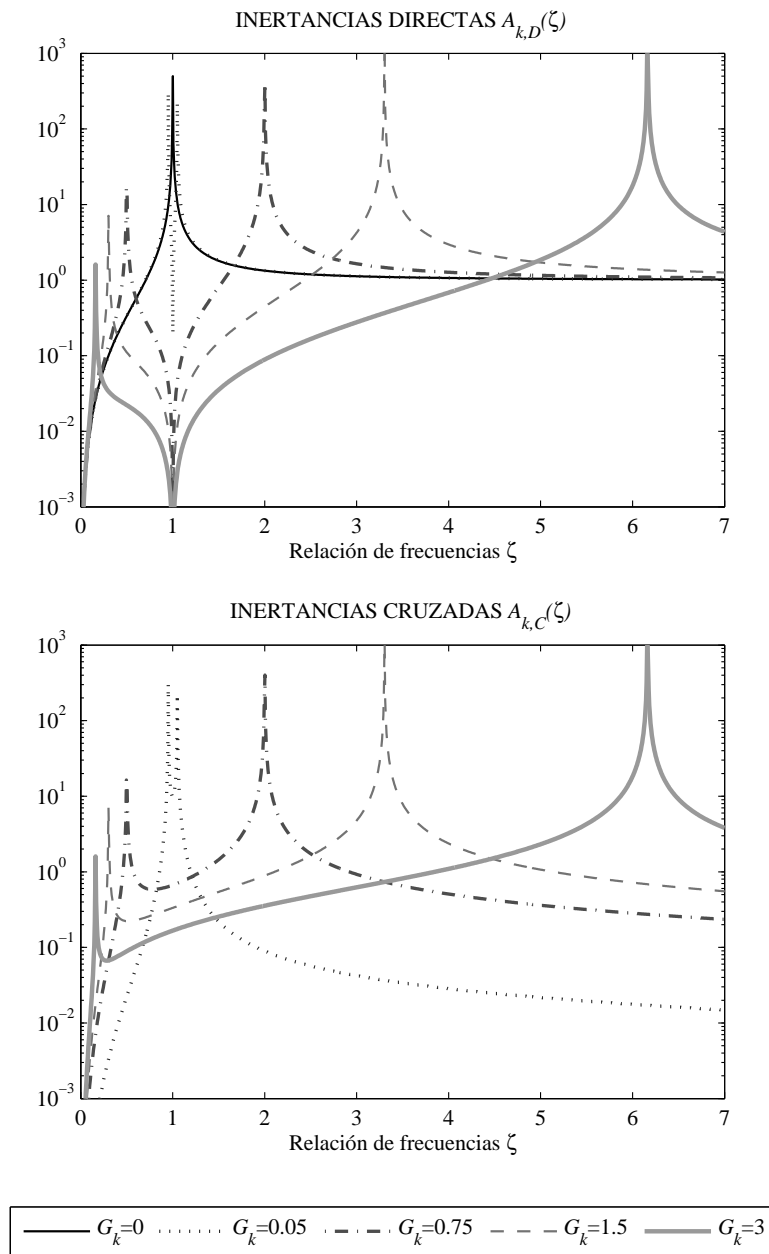


Figura 2.10. *Inertancias modales.*

el régimen permanente ante cualquier entrada acotada periódica. En el segundo, un sistema es estable si tiende al punto de equilibrio ante cualquier condición inicial.

El sistema aquí estudiado es marginalmente estable, dado que todos sus autovalores son imaginarios puros. Es decir, tiene comportamiento estable ante determinadas entradas, e inestable ante otras.

Este sistema viene representado por la ecuación (2.92) que a continuación reproducimos

$$\ddot{\mathbf{q}}^k - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + \omega_k^2 \mathbf{q}^k = \mathbf{Q}^k \quad k = 1, \dots, N \quad (2.168)$$

Evidentemente, la entrada del sistema es la fuerza externa aplicada, dada por \mathbf{Q}^k , y la salida es el movimiento producido, representado por \mathbf{q}^k . Pero de ninguna manera puede considerarse la velocidad de rotación, Ω , como una variable de entrada en sí misma, sino como un parámetro más que caracteriza el sistema, tal como lo es la pulsación propia de la viga no rotatoria ω_k . Lo que si cabe preguntarse es para qué valores de la velocidad de rotación el sistema se vuelve inestable.

Por lo dicho anteriormente, la respuesta libre manifiesta un comportamiento inestable, dado que no tiende al punto de equilibrio sino que se mantiene en una órbita entorno a éste (que es $\mathbf{q}^k = \mathbf{0}$, evidentemente). Por otro lado, la respuesta forzada es estable (acotada) para cualquier entrada excepto para excitaciones armónicas de determinadas pulsaciones (las coincidentes con las pulsaciones propias).

Ahora bien, las expresiones que definen la solución de la ecuación del movimiento libre, (2.110), (2.118), (2.128) y (2.129), no presentan singularidades para ningún valor de Ω . Es decir, que este modelo no predice velocidad crítica alguna. Esto es consistente con los autovalores obtenidos de la ecuación del movimiento (expresiones de la 2.106 a la 2.109), todos ellos imaginarios puros, coincidiendo con los resultados de otros autores [16, 45, 46, 72].

No obstante, puede parecer en contradicción con resultados habituales de dinámica de rotores [19, 22, 38], donde se hallan velocidades críticas. Debe tenerse en cuenta, como se indicó en el capítulo 1, que el modelo desarrollado asume que los centros de masa de todas las secciones se encuentran perfectamente alineados en una recta (la fibra neutra), sin ningún tipo de excentricidad. Para incluir ésta debería modelarse la geometría real de la línea neutra. En ese caso no se cumplirían las hipótesis de partida de este trabajo, en particular la de geometría de revolución, y no serían aplicables las conclusiones aquí obtenidas.

Si se asume que la excentricidad es suficientemente pequeña como para no afectar a los modos y frecuencias de la viga no rotatoria, todavía es posible aprovechar el desarrollo aquí mostrado y modelar la excentricidad a través de la fuerza centrífuga que produce, como una excitación que, ahora sí, es función de la velocidad de rotación. En este caso, son aplicables los resultados obtenidos en el apartado 2.7, teniendo en cuenta una excitación síncrona con la velocidad de rotación, en los dos planos de vibración y con un desfase entre ellos de $\frac{\pi}{2}$. De esta forma, aparecen las esperadas velocidades críticas, en forma de resonancias, cuando la velocidad de rotación (y, por

tanto, la pulsación de la excitación) coincide con alguna de las pulsaciones propias de la viga rotatoria.

Procediendo de esta forma, Sheu y Yang [72] demostraron que una viga de Rayleigh rotatoria (sistema continuo con infinitas frecuencias propias) tiene sólo un número finito de velocidades críticas, como consecuencia de que las pulsaciones propias de la viga rotatoria son función de la velocidad de rotación.

En [38] puede encontrarse un razonamiento que justifica también la aparición de inestabilidades cuando la velocidad de rotación es igual a la mitad de la primera pulsación propia de la viga no rotatoria, aún con el eje equilibrado. Esta inestabilidad, que sólo ha sido puesta de manifiesto en ejes en posición horizontal, sería debida a la deflexión provocada por la gravedad juntamente con una desigualdad entre los momentos de inercia transversales en alguna de las secciones. Ninguno de estos efectos, ni la gravedad ni desigualdades en los momentos de inercia, han sido considerados en este desarrollo, por lo que el modelo no puede ser capaz de predecir tal inestabilidad.

2.9. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo dinámico de un sistema rotatorio sencillo, una viga. El modelo parte de las hipótesis de viga de Rayleigh para sección de revolución constante, biarticulada y sometida a rotación según su eje principal.

Se ha demostrado que la rotación no influye en las vibraciones axiales y torsionales, y se han estudiado las vibraciones de flexión cuando la velocidad de rotación es constante.

Debido al modelado unidimensional de la viga, la geometría de la sección se reduce a un punto, por lo que no puede definirse una rotación de la misma en el sentido geométrico.¹² Por ello, es posible expresar la deformada de la viga rotatoria en cada instante mediante la superposición de los modos propios de la viga no rotatoria. Éstos corresponden a deformadas fijas en el espacio que tienen una descripción constante en ejes fijos. De esta forma, la deformada de la viga rotatoria se describe fácilmente en ejes fijos.

Se ha obtenido la expresión analítica del movimiento de flexión, tanto para vibraciones libres como para vibraciones forzadas bajo excitación armónica. Las expresiones resultantes han sido escritas en una forma adimensional más general que permite caracterizar la respuesta del sistema a partir de un número reducido de parámetros.

En este sentido, se ha identificado como único parámetro asociado a la viga que determina la respuesta un valor que depende de la esbeltez de la viga y de la razón entre la velocidad de rotación y su frecuencia propia. Este parámetro determina la trayectoria del centro de la viga para la respuesta libre no amortiguada, que corresponde

¹²Una rotación, en el plano por simplicidad, viene definida por el ángulo que forma un determinado segmento consigo mismo antes y después de la rotación. Para definir un segmento es necesario disponer de, al menos, dos puntos. Es por ello que decimos que un punto no puede rotar.

a una hipotrocoide. Esta curva se define matemáticamente mediante cinco parámetros que dependen unívocamente de las condiciones iniciales (desplazamiento y velocidad en cada plano de vibración) y de la constante característica.

Se ha encontrado que este modelo no predice velocidades críticas. Se ha justificado que este hecho es debido a que no se considera excentricidad alguna en la posición del centro de masas de cada sección, ni la acción gravitatoria, ni la existencia de ninguna sección con diferentes momentos de inercia transversales.

Con respecto a la respuesta forzada se ha demostrado que la respuesta se produce en ambos planos de vibración, aunque sólo se excite uno de ellos, lo cual inducirá reacciones también en ambos planos.

Estos resultados han sido publicados en *Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration* [31].

Capítulo 3

Método general para cuerpos elásticos en rotación

Objeto del capítulo:

Siguiendo una metodología consolidada, en este capítulo se obtiene una formulación modal de la ecuación del movimiento de un cuerpo elástico en rotación, partiendo de los modos y frecuencias propias del sistema no rotatorio. Se muestran sus limitaciones para resolver el problema objeto de esta Tesis.

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta un método que permite modelar la dinámica de un sólido elástico tridimensional general con movimiento de rotación respecto de un eje de orientación constante, con velocidad angular también constante. Está fundamentado en la técnica de sistemas dinámicos multicuerpo para sólidos flexibles mostrada por Shabana en [68], particularizada para velocidad angular constante y traslación nula. Además, no se aplica sobre un sistema multicuerpo propiamente, sino sobre un único sólido.

El método se basa en descomponer el movimiento del cuerpo en uno de sólido rígido más unas deformaciones superpuestas a éste. El planteamiento consiste en describir la deformada del sólido en unos ejes solidarios con él mediante una combinación de funciones de forma, para después transformarla a un sistema fijo teniendo en cuenta el movimiento de sólido rígido seguido. Dada la doble interpretación que permite la matriz de transformación entre sistemas de coordenadas (apéndice A, apartado A.4), también puede decirse que se buscan unas coordenadas generalizadas que, en cada instante, definan una deformada del sólido antes de rotarlo tal que, al girarla, describa la configuración actual. En la figura 3.1 se muestra cómo se puede llegar a una configuración determinada mediante una deformación seguida de una rotación de cuerpo rígido.

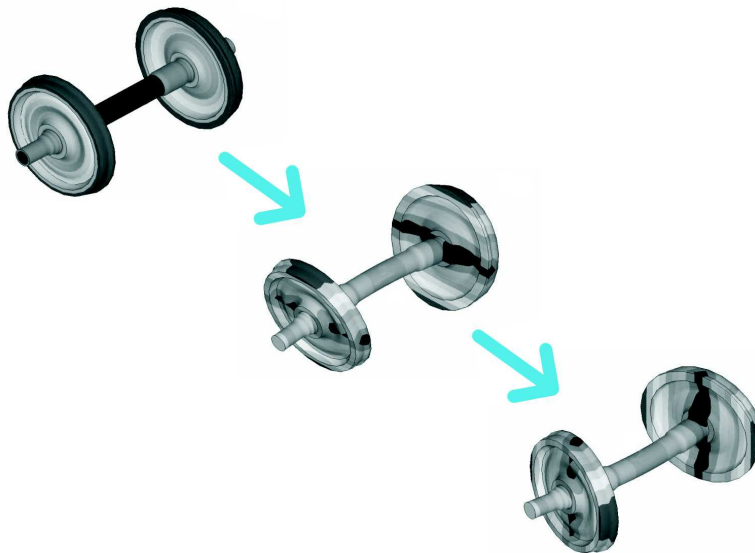


Figura 3.1. Rotación de sólido rígido tras la deformación.

Como funciones de forma se toman los modos propios del sistema no rotatorio, supuesto lineal, consecuentemente con los objetivos de esta Tesis. Así mismo, se suponen

conocidas las pulsaciones propias correspondientes. Ambas, deformadas y pulsaciones, pueden ser obtenidas mediante métodos numéricos como, por ejemplo, el Método de los Elementos Finitos.

En el problema planteado en la introducción de esta Tesis (capítulo 1), las fuerzas de interacción con el entorno no son rotatorias por no serlo las estructuras adyacentes. Además, resultan aplicadas sobre puntos materiales distintos en cada instante, de forma que las coordenadas en ejes del sólido de los puntos de aplicación son variables en el tiempo.

Veremos que, a consecuencia de ello, aunque este método permite obtener la ecuación del movimiento, requiere realizar una integración en el volumen del cuerpo para evaluar la fuerza generalizada a cada paso de integración, lo que no resulta computacionalmente eficiente.

3.2. Modelo cinemático

Sea un cuerpo elástico sometido a una rotación de sólido rígido con velocidad angular constante, tanto en módulo, Ω , como en dirección. Consideremos dos sistemas de referencia, uno con el mismo movimiento de sólido rígido que el cuerpo y otro fijo, ambos coincidentes en el instante inicial y con su primer eje en la dirección de la revolución.

El ángulo girado en el instante t por el cuerpo será $\theta(t) = \Omega t$, y la matriz de transformación del sistema móvil en el fijo, $\mathbf{A}(\theta(t))$, estará dada, en ese instante, por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

La derivada temporal de esta matriz se podrá expresar como

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \Omega \mathbf{A}_\theta \quad (3.2)$$

siendo

$$\mathbf{A}_\theta = \frac{d\mathbf{A}}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Como se muestra en el apéndice A (apartado A.7), la matriz antisimétrica de velocidad angular estará dada, en ejes fijos, por

$$\bar{\Omega} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = \Omega \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T = \Omega \mathbf{J} \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Es inmediato comprobar que, en este caso particular en que la rotación se da en torno a un eje común de ambos sistemas, se cumple

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}_\theta \quad (3.6)$$

por lo que la matriz de velocidad angular en ejes móviles es también $\Omega \mathbf{J}$.

$$\bar{\Omega}' = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} = \Omega \mathbf{A}^T \mathbf{A}_\theta = \Omega \mathbf{J} \quad (3.7)$$

Dado que tanto Ω como \mathbf{J} son constantes, se tiene $\dot{\bar{\Omega}} = \mathbf{0}$. Sin embargo, la derivada segunda de \mathbf{A} respecto del tiempo será

$$\ddot{\mathbf{A}} = \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{A}}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{A}}{d\theta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \Omega^2 \mathbf{A}_{\theta\theta} + \dot{\Omega} \mathbf{A}_\theta = \Omega^2 \mathbf{A}_{\theta\theta} \quad (3.8)$$

siendo

$$\mathbf{A}_{\theta\theta} = \frac{d^2 \mathbf{A}}{d\theta^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Definamos, por conveniencia, la siguiente matriz

$$\mathbf{E} = -\mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

También, en este caso, se cumple

$$\mathbf{E} = -\mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \quad (3.11)$$

Nótese que

$$\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \quad (3.12)$$

Por otro lado, siguiendo la metodología propuesta por Shabana en [68], la partícula que en la no deformada se encuentra en las coordenadas \mathbf{u}' del sistema móvil, en el instante t habrá sufrido una deformación definida en el mismo sistema por un vector \mathbf{u}'_f , de forma que la posición final, en estos ejes, estará dada por (véase la figura 3.2)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{u}' + \mathbf{u}'_f \quad (3.13)$$

y sus coordenadas en el sistema fijo serán

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{r}' = \mathbf{A} (\mathbf{u}' + \mathbf{u}'_f) \quad (3.14)$$

La deformación \mathbf{u}'_f podemos describirla mediante el uso de unas funciones de forma, como se ha visto en el capítulo 2, de manera que se escribe

$$\mathbf{u}'_f(\mathbf{u}', t) = \mathbf{S}(\mathbf{u}') \mathbf{p}(t) \quad (3.15)$$

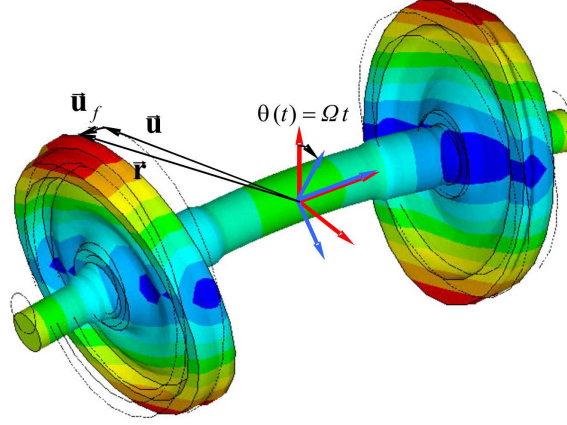


Figura 3.2. Descripción cinemática. Se muestran en rojo los ejes fijos, y en azul los del sólido.

quedando entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} (\mathbf{u}' + \mathbf{S} \mathbf{p}) \quad (3.16)$$

En lo que sigue, supondremos que las funciones de forma en \mathbf{S} son las correspondientes a los modos propios normalizados respecto a la matriz de masa, por lo que denotaremos a esta matriz de funciones de forma como Φ . Así, la expresión anterior se escribe

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} (\mathbf{u}' + \Phi \mathbf{p}) \quad (3.17)$$

Derivando (3.17) de forma sucesiva respecto del tiempo se obtienen la velocidad y la aceleración, respectivamente, de la partícula \mathbf{u}' .

$$\dot{\mathbf{r}} = \Omega \mathbf{A}_{\theta} (\mathbf{u}' + \Phi \mathbf{p}) + \mathbf{A} \Phi \dot{\mathbf{p}} \quad (3.18)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \Omega^2 \mathbf{A}_{\theta\theta} (\mathbf{u}' + \Phi \mathbf{p}) + 2 \Omega \mathbf{A}_{\theta} \Phi \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A} \Phi \ddot{\mathbf{p}} \quad (3.19)$$

3.3. Ecuación del movimiento

La energía cinética del sistema estará dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_{VS} \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dv \quad (3.20)$$

estando la integral extendida a todo el volumen ocupado por el sólido (VS) y siendo ρ la densidad del material, mientras que la energía elástica vendrá dada por

$$V = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{p}) \quad (3.21)$$

siendo $\tilde{\mathbf{K}}$ la matriz de rigidez generalizada asociada a las coordenadas \mathbf{p} . Puesto que estas coordenadas son las correspondientes a los modos propios, la rigidez asociada es la modal. Y dado que se asume que los modos están normalizados a la matriz de masa, $\tilde{\mathbf{K}}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los cuadrados de las pulsaciones propias.

Si $\mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t)$ son las fuerzas externas aplicadas de volumen, $\mathbf{f}^s(\mathbf{u}', t)$ las de superficie y $\mathbf{f}^p(\mathbf{u}', t)$ las puntuales, llamemos $\mathbf{Q}_p(t)$ a las fuerzas generalizadas que producen, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p(t) = & \int_{VS} \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}')^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t) dv + \\ & + \int_{Surf} \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}')^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}^s(\mathbf{u}', t) ds + \sum_p \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}'_p)^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}^p(\mathbf{u}'_p, t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

O, sustituyendo en ésta (3.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p(t) = & \int_{VS} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t) dv + \\ & + \int_{Surf} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^s(\mathbf{u}', t) ds + \sum_p \Phi(\mathbf{u}'_p)^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^p(\mathbf{u}'_p, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La expresión de las ecuaciones de Lagrange formuladas para coordenadas independientes es

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}} \right)^T = \mathbf{Q}_p \quad (3.24)$$

donde todas las derivadas temporales son totales y absolutas. Aplicado a (3.20) queda¹

$$\int_{VS} \rho \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \dot{\mathbf{r}} \right) - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{r}} \right] dv + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}} \right)^T = \mathbf{Q}_p \quad (3.25)$$

lo que puede ser transformado convenientemente como

$$\int_{VS} \rho \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \ddot{\mathbf{r}} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \mathbf{p}} \right) \dot{\mathbf{r}} \right] dv + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}} \right)^T = \mathbf{Q}_p \quad (3.26)$$

De (3.18) y (3.19)

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \ddot{\mathbf{r}} = \Phi^T \mathbf{A}^T (\Omega^2 \mathbf{A}_{\theta\theta} (\mathbf{u}' + \Phi \mathbf{p}) + 2 \Omega \mathbf{A}_{\theta} \Phi \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A} \Phi \ddot{\mathbf{p}}) \quad (3.27)$$

¹En las expresiones siguientes debe entenderse $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right)^T$ y $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}} \right)^T$.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \Omega \Phi^T \mathbf{A}_\theta^T \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Y de (3.21)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}} \right)^T = \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{p} \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.27), (3.28) y (3.29) en (3.26)

$$\begin{aligned} & \int_{\text{VS}} \rho \left(\Omega^2 \Phi^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{u}' + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \Phi \mathbf{p} + \right. \\ & \left. + 2 \Omega \Phi^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_\theta \Phi \dot{\mathbf{p}} + \Phi^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \Phi \ddot{\mathbf{p}} \right) dv + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{p} = \mathbf{Q}_p \end{aligned} \quad (3.30)$$

Teniendo en cuenta (3.6), (3.11) y la normalización de los modos a la matriz de masa, (3.30) queda

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} + 2 \Omega \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{J} \Phi dv \dot{\mathbf{p}} + \left(\tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2 \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \Phi dv \right) \mathbf{p} = \\ = \mathbf{Q}_p + \Omega^2 \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u}' dv \end{aligned} \quad (3.31)$$

Definamos

$$\tilde{\mathbf{J}} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{J} \Phi dv \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \Phi dv \quad (3.33)$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u}' dv \quad (3.34)$$

Por su definición, $\tilde{\mathbf{J}}$ es una matriz antisimétrica, mientras que $\tilde{\mathbf{E}}$ es simétrica (por serlo \mathbf{J} y \mathbf{E} respectivamente), es decir

$$\tilde{\mathbf{J}} = -\tilde{\mathbf{J}}^T \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^T \quad (3.35)$$

Con esto, la ecuación (3.31) se puede escribir como

$$\ddot{\mathbf{p}} + 2 \Omega \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{p}} + \left(\tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2 \tilde{\mathbf{E}} \right) \mathbf{p} = \mathbf{Q}_p + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes que, con unas condiciones iniciales adecuadas, puede ser resuelta para obtener $\mathbf{p}(t)$. Sustituyendo éstas en (3.17) se obtiene la trayectoria de cada punto material del sólido.

Debe notarse que las coordenadas generalizadas \mathbf{p} están asociadas a formas modales definidas en ejes del sólido (móviles) y, por lo tanto, rotatorias, a diferencia de las coordenadas \mathbf{q} empleadas en el capítulo 2, que estaban referidas a unas formas modales fijas en el espacio.

3.4. Limitación del método

El término \mathbf{Q}_p (dado por (3.23)) depende del tiempo, y las integrales que lo definen deben evaluarse en cada instante. A pesar de que la integración es en el volumen, y no en el tiempo, una separación de variables no resuelve el problema. Aunque describamos los campos de fuerzas mediante unas funciones en la forma

$$\mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t) = \mathbf{F}^v(\mathbf{u}') \chi^v(t) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}^s(\mathbf{u}', t) = \mathbf{F}^s(\mathbf{u}') \chi^s(t) \quad (3.38)$$

$$\mathbf{f}^p(\mathbf{u}'_p, t) = \mathbf{F}^p(\mathbf{u}'_p) \chi^p(t) \quad (3.39)$$

las fuerzas generalizadas respecto de las coordenadas generalizadas \mathbf{p} se calcularán como

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p(t) = & \left(\int_{VS} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{F}^v(\mathbf{u}') dv \right) \chi^v(t) + \\ & + \left(\int_{Surf} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{F}^s(\mathbf{u}') ds \right) \chi^s(t) + \\ & + \left(\sum_p \Phi(\mathbf{u}'_p)^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{F}^p(\mathbf{u}'_p) \right) \chi^p(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

La presencia de la matriz $\mathbf{A}(t)$ en los integrandos y en los términos del sumatorio obliga a realizar las integrales y la suma en cada instante de tiempo, lo que requiere un mayor esfuerzo computacional, haciendo inviable la aplicación de este método para resolver el tipo de problema descrito en la introducción de esta Tesis (capítulo 1). Para sólidos generales, la matriz $\Phi(\mathbf{u}')$ sólo será conocida numéricamente. Si se ha obtenido aplicando el Método de los Elementos Finitos, aún podría plantearse una integración simbólica, aunque no sin dificultad, empleando la interpolación de elementos finitos. Una alternativa es el método mostrado en el siguiente capítulo.

3.5. Conclusiones

Se ha obtenido la ecuación del movimiento de un sólido general girando sobre un eje fijo con velocidad angular constante. El método parte de las propiedades modales del sistema no rotatorio (deformadas modales y frecuencias propias), cumpliendo parte de los objetivos de esta Tesis. Sin embargo, aunque las matrices involucradas en esta ecuación son constantes y sólo es necesario calcularlas una vez, el término de fuerza generalizada debe ser evaluado en cada instante de tiempo por medio de una costosa integración en el volumen del cuerpo, lo que limita la aplicabilidad del método.

Las coordenadas generalizadas están asociadas a formas modales definidas en unos ejes móviles, que siguen la rotación de sólido rígido. Esto hace que, en general, no sea intuitiva la interpretación de los resultados modales.

En el próximo capítulo se propone una transformación de esta ecuación, aplicable a cuerpos de revolución en rotación sobre su dirección longitudinal, que elimina estas limitaciones.

Capítulo 4

Cuerpos elásticos de revolución en rotación sobre su propio eje

Objeto del capítulo:

Este capítulo forma el núcleo central de esta Tesis. En él se explotan ciertas propiedades de los cuerpos de revolución para transformar las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior. De esta forma, se obtiene una formulación equivalente a la primera que supera sus limitaciones.

4.1. Introducción

El método presentado en el capítulo anterior permite obtener la ecuación del movimiento de un cuerpo elástico general, proporcionando la historia temporal de cualquier partícula del mismo. Como se ha visto, aunque los coeficientes matriciales de la ecuación son constantes, el término de fuerzas generalizadas debe obtenerse mediante una integración en el volumen del cuerpo en cada instante.

Sin embargo, si se cumple que el cuerpo presenta geometría de revolución, la rotación se produce en torno a este eje de simetría y las fuerzas externas están aplicadas en puntos espaciales que no siguen la rotación del sólido, entonces es posible aprovechar ciertas propiedades del sistema para encontrar una ecuación del movimiento que proporcione la historia temporal, no de cada partícula material, sino de un sólido teórico que ocupa el mismo espacio que el cuerpo en todo instante, pero sin seguir la rotación de éste.

El concepto fundamental en el que se basa el método es el hecho de que si una geometría de revolución se gira sobre su propio eje de simetría, la configuración resultante es indistinguible de la primera. La figura 4.1 ilustra cómo tras una rotación de cuerpo rígido de la estructura no deformada es posible emplear la misma descripción modal de la deformada (compárese con la figura 3.1, en la página 57).

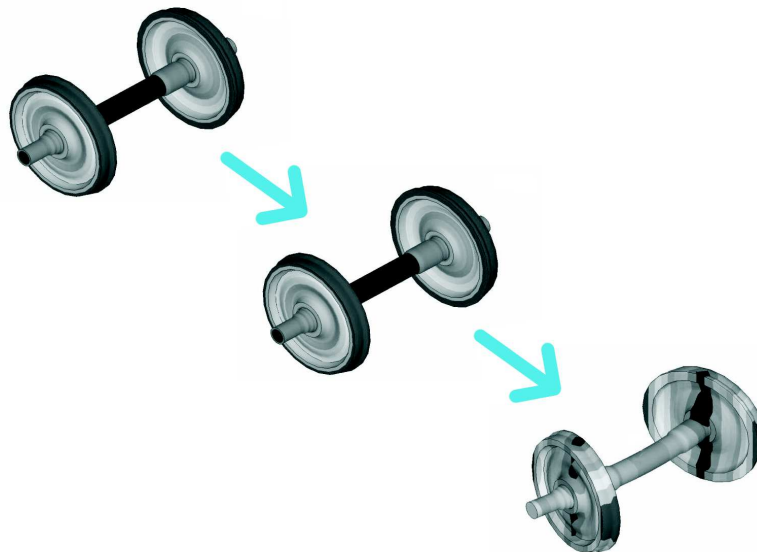


Figura 4.1. *Deformación tras la rotación de sólido rígido.*

Cuando se calculan los modos propios de vibración de un sólido elástico general (no necesariamente de revolución) y se normalizan con algún criterio, cada uno de ellos

queda asociado a una deformada particular del sólido. Es decir, estará definido por un campo vectorial que a cada punto del sólido le asocia un desplazamiento. Ambas variables, el punto donde se evalúa el modo y el desplazamiento que le corresponde, son magnitudes vectoriales. Como tales, tendrán, en general, una representación diferente en cada sistema de coordenadas en que los escribamos.

Si cambiamos la orientación del sólido, sus modos propios, entendidos como configuraciones deformadas de la materia, estarán girados, por lo que los vectores de desplazamiento que definen las deformadas también lo estarán, además de estar aplicados en puntos espaciales con coordenadas diferentes (la nueva posición del punto material). Sin embargo, si estas deformadas las describimos en un sistema de coordenadas que haya girado de la misma manera, esta descripción, evidentemente, no variará.

En cambio, si escribimos las deformadas en el sistema no rotado, será diferente la representación de las mismas. Esto lleva a que, si quieren aplicarse técnicas de síntesis modal, sea necesario recalculer los modos para cada orientación del sólido (reescribirlos), o bien, trabajar en un sistema que se mueva con el mismo. Ésta última opción es la empleada en el método descrito en el capítulo 3.

Los cuerpos de revolución presentan modos propios elásticos de dos tipos, unos asociados a autovalores (frecuencias propias) de multiplicidad uno y cuya deformada mantiene geometría de revolución (los modos de torsión, algunos de respiración¹, los de paraguas²,... véase la figura 4.2); y otros que, aunque no tienen esta simetría, corresponden a autovalores de multiplicidad mayor que uno, por lo que describen un espacio multidimensional de deformadas. Dentro de este espacio, es posible encontrar infinitas bases compuestas por deformadas ortogonales, y cualquier combinación lineal de ellas es también un modo propio. Y también es posible encontrar una base tal que la configuración que define cada modo de la base o mantiene simetría de revolución o existe otro que, junto con el primero, define un subespacio de dos dimensiones que sí tiene tal simetría (véase la figura 4.3). De esta forma, los espacios asociados a autovalores de multiplicidad mayor de dos pueden descomponerse en subespacios de dimensiones uno y/o dos. En lo que sigue, supondremos que los modos están representados por una base con esas características.

En el caso de los modos de sólido rígido, corresponden todos a un autovalor nulo de multiplicidad seis, por lo que forman un espacio de seis dimensiones y cualquier

¹Los modos de respiración suceden en sólidos de revolución como consecuencia de la deformación de la sección, mientras se mantiene ésta en su plano y sin rotar en torno al eje de revolución. Es decir, todos los desplazamientos son radiales. Su nombre proviene del movimiento que describe el sólido cuando responde este modo: se hincha y deshincha como si respirara. En algunos de estos modos, todos los puntos situados en la misma coordenada radial de una sección determinada tienen el mismo desplazamiento (aunque diferente entre secciones), lo que conduce a mantener la simetría de revolución. Véase la figura 4.2 (a)

²Los modos de paraguas son la extensión a sólidos de revolución de los modos axiales de las vigas. La diferencia fundamental con éstos es que la sección recta no se mantiene plana. Sin embargo, carecen de desplazamiento circunferencial y mantienen la geometría de revolución (a diferencia de los modos de flexión). Reciben su nombre de la forma que adquiere un disco montado en un eje cuando responde con este modo: semejante a un paraguas. Véase la figura 4.2 (b)

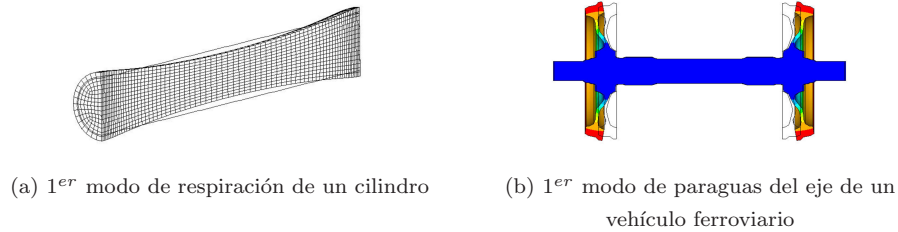


Figura 4.2. Modos típicos cuya deformada presenta geometría de revolución. Las estructuras se muestran seccionadas longitudinalmente

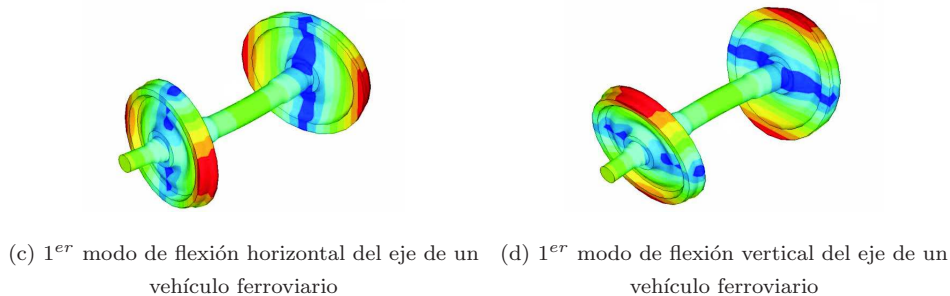


Figura 4.3. Modos típicos de multiplicidad dos. Presentan la misma forma, pero girada en torno al eje de revolución.

combinación lineal de ellos es también un modo de sólido rígido. Dentro de este espacio es posible encontrar una base (por ejemplo, las tres traslaciones a lo largo de los ejes principales de inercia y las tres rotaciones en torno a ellos) con las características descritas en el párrafo anterior.

De esta forma, si rotamos un sólido de revolución sobre su eje, las deformadas de los modos con geometría de revolución tienen idéntica descripción tanto si también rotamos el sistema de coordenadas como si no. No ocurre lo mismo con las que no tienen este tipo de geometría, en el sentido de que, fijadas dos deformadas como base del espacio bidimensional, estas dos deformadas concretas estarán también rotadas. Sin embargo, el espacio de deformadas que describen no ha cambiado, por lo que las deformadas no rotadas todavía son una base del mismo. El método que se va a desarrollar en este capítulo explota esta propiedad, empleando la misma representación de los modos en un sistema fijo para, mediante superposición modal, ajustar la deformada en cada instante. Esto supone, realmente, emplear modos (entendidos como deformadas de la materia) distintos en cada momento.

Previamente, es necesario definir matemáticamente el concepto de *geometría de revolución* y formular, también en forma matemática, la propiedad citada en el párrafo anterior.

4.2. Cuerpos de revolución: la transformación modal

En todo lo anterior se ha tratado de evitar, sin comprometer el rigor, que un excesivo formalismo matemático enmascarase el significado físico de las ecuaciones. Sin embargo, dada la trascendencia de este apartado para el desarrollo del método de obtención de la ecuación del movimiento, se ha cuidado más el aspecto formal. En el apartado siguiente se da una interpretación física de los conceptos desarrollados. En éste, en cambio, se presenta un conjunto de definiciones y de propiedades escritas en forma de teoremas. Por un lado, esto facilita la demostración de lo que se afirma. Por otro, permite al lector una primera lectura obviando las demostraciones que le facilitará la comprensión de los desarrollos del apartado 4.5. Una revisión posterior de las pruebas le permitirá comprobar la veracidad de las afirmaciones.

Definición 4.1 (Geometría de revolución) *Sea \mathbf{A} una matriz de giro respecto de algún eje E , y sean \mathbf{u} las coordenadas de un punto del espacio ocupado por un cuerpo elástico en una determinada configuración. Decimos que esa configuración presenta geometría de revolución respecto del eje E si cumple las tres condiciones siguientes:*

i) El punto de coordenadas \mathbf{v} , definidas mediante

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (4.1)$$

también pertenece al cuerpo en esa configuración

ii) Toda propiedad del cuerpo definida como campo escalar, $f(\mathbf{u})$, satisface

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{A} \mathbf{u}) \quad (4.2)$$

en esa configuración

iii) Toda propiedad del cuerpo definida como campo vectorial, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$, satisface

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}^T \mathbf{f}(\mathbf{A} \mathbf{u}) \quad (4.3)$$

en esa configuración

Una consecuencia inmediata de lo anterior es que el punto de coordenadas $\mathbf{A}^T \mathbf{u}$ es así mismo un punto del cuerpo en esa configuración, y también se cumple que $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$ y $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$.

Definición 4.2 (Cuerpo de revolución) *Decimos que un cuerpo elástico es de revolución cuando su configuración no deformada tiene geometría de revolución.*

Definición 4.3 (Matriz de transformación modal) *Sea $\Phi(\mathbf{u})$ un campo matricial que contiene la representación en algún sistema de referencia de N modos propios*

normalizados a la matriz de masa de un sólido de revolución, de tal forma que incluye bases ortogonales completas de los subespacios asociados a cada autovalor. Dada una rotación sobre el eje de revolución del sólido, representada por una matriz \mathbf{A} , llamamos matriz de transformación modal a una matriz \mathbf{B} $N \times N$ tal que satisfaga

$$\mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} \quad (4.4)$$

para todo \mathbf{u} del sólido.

Por la definición de sólido de revolución, las coordenadas $\mathbf{A}^T \mathbf{u}$ pertenecen a un punto del sólido, por lo que está definida $\Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$ y la expresión (4.4) tiene sentido.

Veamos algunas propiedades de la matriz de transformación modal, \mathbf{B} .

Teorema 4.1 (Existencia y unicidad de \mathbf{B}) *Si la expresión $\rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$ es integrable en el volumen del cuerpo, entonces la matriz de transformación modal existe y es única. Además puede calcularse como*

$$\mathbf{B} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv \quad (4.5)$$

Demostración. Multiplicando ambos miembros de (4.4) por $\rho \Phi(\mathbf{u})^T$ e integrando en el volumen del cuerpo

$$\int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} \, dv \quad (4.6)$$

Puesto que \mathbf{B} no depende de \mathbf{u} , puede salir fuera de la integral del segundo miembro. Y recordando que los modos están normalizados a la matriz de masa, de forma que ésta es la identidad, queda

$$\int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv = \mathbf{B} \quad (4.7)$$

lo que demuestra la existencia y la forma de obtenerla. Para probar la unicidad basta suponer que existe otra matriz distinta que satisface (4.4). Procediendo de igual modo se llega a la misma expresión (4.5) para calcularla. ■

Teorema 4.2 *Si \mathbf{B} es la matriz de transformación modal asociada a la rotación \mathbf{A} , entonces, la matriz asociada a la rotación opuesta, \mathbf{A}^T , es \mathbf{B}^T .*

Demostración. Si aplicamos una rotación \mathbf{A}^T , llamemos \mathbf{B}' a la matriz asociada y veamos que no es sino \mathbf{B}^T . Según la expresión (4.5), \mathbf{B}' se calcula como

$$\mathbf{B}' = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv \quad (4.8)$$

Haciendo el cambio de variable $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u}$ se tiene³

$$\mathbf{B}' = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v})^T \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{v}) |\mathbf{A}| \, dv \quad (4.9)$$

³Con el objeto de no complicar innecesariamente las demostraciones, se ha supuesto la densidad constante. De no ser así, dado que el cuerpo tiene geometría de revolución, la densidad satisfará la definición 4.1 ii), es decir, $\rho(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v})$ por lo que las demostraciones son generales.

Y recordando que \mathbf{A} es ortonormal, por lo que $|\mathbf{A}| = 1$ ⁴

$$\mathbf{B}' = \left(\int_{VS} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) dv \right)^T = \mathbf{B}^T \quad (4.10)$$

lo que completa la prueba. ■

Teorema 4.3 *La matriz de transformación modal es ortonormal.*

Demostración. Premultiplicando cada miembro de (4.4) por su traspuesto y por la densidad, ρ , e integrando en el volumen

$$\int_{VS} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) dv = \int_{VS} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} dv \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta la ortonormalidad de \mathbf{A} , que \mathbf{B} no depende de \mathbf{u} y por la ortogonalidad y normalización de los modos resulta

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}_{N \times N} \quad (4.12)$$

siendo $\mathbf{I}_{N \times N}$ la identidad $N \times N$. Puesto que \mathbf{B} es cuadrada, la anterior implica $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$, y por tanto

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{I}_{N \times N} \quad (4.13)$$

lo que completa la prueba. ■

Teorema 4.4 *Los N modos contenidos en la matriz $\Phi(\mathbf{u})$ corresponden todos a autovalores de multiplicidad uno si y sólo si la matriz de transformación modal es $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{N \times N}$ para toda matriz de rotación \mathbf{A} .*

Demostración. Si cada modo en $\Phi(\mathbf{u})$ corresponde a un autovalor de multiplicidad uno, entonces definirá una deformada con geometría de revolución. Por lo tanto, por la propiedad dada en la definición 4.1 *iii*), los desplazamientos descritos por la columna j -ésima $\Phi(\mathbf{u})^j$ en $\Phi(\mathbf{u})$ cumplirán

$$\Phi(\mathbf{u})^j = \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^j \quad j = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

y, por lo tanto

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \quad (4.15)$$

Comparando la anterior con la definición de la matriz de transformación modal (dada por (4.4)) se sigue que ésta es la identidad. Recíprocamente, si $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{N \times N}$, entonces (4.4) queda en la forma (4.15), por lo que todos los modos en $\Phi(\mathbf{u})$ son de revolución. ■

Teorema 4.5 *Si no todos los N modos contenidos en la matriz $\Phi(\mathbf{u})$ corresponden a autovalores de multiplicidad uno, entonces la matriz de transformación modal es $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{N \times N}$ si y sólo si $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$.*

⁴En todo lo que sigue realizaremos este cambio de variable numerosas veces, obviando en lo sucesivo $|\mathbf{A}|$ en las expresiones por ser siempre la unidad.

Demostración. Si $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$, por la definición de \mathbf{B} , dada por (4.4), se sigue inmediatamente que $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{N \times N}$. Probemos ahora el recíproco por reducción al absurdo. Si es $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{N \times N}$, entonces (4.4) queda

$$\mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) \quad (4.16)$$

Si \mathbf{A} no fuera la identidad, entonces, por el teorema 4.4, todos los modos en Φ definirían geometrías de revolución, contradiciendo la hipótesis, de forma que es $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$, lo que completa la prueba. ■

Teorema 4.6 *Si $\Phi(\mathbf{u})$ contiene sólo una base ortogonal y normalizada a la matriz de masa del subespacio asociado a un autovalor, entonces $\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}$ es también una base ortogonal del mismo subespacio, normalizada de la misma manera.*

Demostración. Cada columna en la expresión $\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}$ representa una combinación lineal de las columnas (la base del subespacio de modos propios) de $\Phi(\mathbf{u})$, por lo que es un modo propio del mismo espacio. Serán ortogonales entre sí y normalizados a la matriz de masa si se cumple que

$$\int_{VS} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} dv = \mathbf{I}_{m \times m} \quad (4.17)$$

siendo m la multiplicidad del autovalor. Pero, dado que \mathbf{B} no depende de \mathbf{u} , es ortonormal (teorema 4.3), y $\Phi(\mathbf{u})$ sí es una base normalizada a la matriz de masa, se concluye la demostración. ■

Teorema 4.7 (Transformación modal) *Si $\Phi(\mathbf{u})$ contiene N modos propios ortogonales y normalizados a la matriz de masa de un sólido de revolución, de tal forma que incluye bases completas de los subespacios asociados a cada autovalor, entonces el conjunto de funciones definidas mediante las columnas del producto $\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}$ son también N modos propios del sólido, ortogonales, normalizados de la misma manera e incluyen bases completas de los mismos subespacios.*

Demostración. Sea n el número de autovalores distintos considerados. Separemos la matriz $\Phi(\mathbf{u})$ en n bloques (mediante una partición) de tal manera que cada uno contenga todos los modos asociados a un autovalor. Φ será entonces una matriz fila formada por bloques de una o dos columnas. Separemos también la matriz \mathbf{B} de forma consistente para poder realizar por bloques el producto $\Phi \mathbf{B} \Phi^T$, y hagamos por bloques el producto indicado en (4.4). Es decir, denotando con superíndices los bloques

$$\mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^j = \sum_{k=1}^n \Phi(\mathbf{u})^k \mathbf{B}^{kj} \quad j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

Por otro lado, por la propia definición de \mathbf{B} y por ser única (teorema 4.1), debe ser

$$\mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^j = \Phi(\mathbf{u})^j \mathbf{B}^{jj} \quad (4.19)$$

por lo que, igualando los segundos miembros de las expresiones anteriores, se sigue

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Phi(\mathbf{u})^k \mathbf{B}^{kj} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

Ahora bien, como todas las columnas en Φ son modos propios ortogonales, son independientes, por lo que de la anterior se sigue

$$\mathbf{B}^{kj} = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad k \neq j \quad (4.21)$$

Por otro lado, el bloque j -ésimo de $\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}$ se podrá calcular como

$$(\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B})^j = \sum_{k=1}^n \Phi(\mathbf{u})^k \mathbf{B}^{kj} \quad (4.22)$$

y por (4.21)

$$(\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B})^j = \Phi(\mathbf{u})^j \mathbf{B}^{jj} \quad (4.23)$$

Por el teorema 4.6 el bloque $(\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B})^j$ ($j = 1, \dots, n$) es una base del subespacio asociado al j -ésimo autovalor formada por modos propios normalizados a la matriz de masa. Sólo falta demostrar que las columnas de bloques distintos son ortogonales entre sí, lo que es trivial dado que son modos propios correspondientes a autovalores distintos. ■

Teorema 4.8 Sean Φ_a y Φ_b una base ortogonal y normalizada a la matriz de masa del espacio bidimensional de modos propios asociados a un autovalor de multiplicidad dos, cualquier otro modo propio Φ_c de este espacio, normalizado de la misma manera, se puede poner en la forma

$$\Phi_c = \Phi_a \cos \alpha + \Phi_b \sin \alpha \quad (4.24)$$

para algún valor de α . También el recíproco es cierto: cualquier combinación de la forma (4.24) es un modo propio normalizado a la matriz de masa.

Demostración. Si Φ_c es un elemento del espacio asociado a un autovalor de multiplicidad dos se podrá escribir como combinación lineal de los dos modos de la base, en la forma $\Phi_c = a \Phi_a + b \Phi_b$. Y por estar Φ_c normalizado a la matriz de masa, se deberá cumplir que

$$\int_{\text{VS}} \rho \Phi_c^T \Phi_c \, dv = \int_{\text{VS}} \rho (a \Phi_a + b \Phi_b)^T (a \Phi_a + b \Phi_b) \, dv = 1 \quad (4.25)$$

es decir,

$$\int_{\text{VS}} \rho (a^2 \Phi_a^T \Phi_a + a b \Phi_a^T \Phi_b + a b \Phi_b^T \Phi_a + b^2 \Phi_b^T \Phi_b) \, dv = 1 \quad (4.26)$$

y, puesto que Φ_a y Φ_b también están normalizados de esta manera y son ortogonales, deberá ser

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (4.27)$$

Definiendo

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \\ \arctan \frac{b}{a} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.28)$$

resultan

$$a = \cos \alpha \quad b = \sin \alpha \quad (4.29)$$

de donde se sigue (4.24). La prueba del recíproco es trivial. ■

Teorema 4.9 *Si $\Phi(\mathbf{u})$ contiene sólo una base de un espacio asociado a un autovalor de multiplicidad dos, entonces la matriz de transformación modal es de la forma*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Demostración. Por los teoremas 4.6 y 4.8, la matriz \mathbf{B} debe ser de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha' \\ \sin \alpha & \sin \alpha' \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

para algunos α y α' . Por otro lado, por el teorema 4.3, se debe cumplir que

$$\mathbf{I}_{2 \times 2} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \\ \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

por lo que debe ser

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' = \cos(\alpha - \alpha') = 0 \quad (4.33)$$

y por lo tanto $\alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$, por lo que \mathbf{B} es alguna de las dos siguientes

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{para } \alpha' = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (4.34)$$

o bien

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{para } \alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (4.35)$$

Ahora bien, por el teorema 4.5, \mathbf{B} debe ser la identidad cuando lo sea \mathbf{A} , por lo que no puede ser (4.34), lo que completa la prueba. ■

Teorema 4.10 *Si α_1 es el parámetro de la matriz de transformación modal asociada a la rotación θ_1 y α_2 es el correspondiente a la rotación θ_2 , entonces el parámetro de la matriz de transformación modal asociada a la rotación $\theta_1 + \theta_2$ es $\alpha_1 + \alpha_2$*

Demostración. La rotación dada por $\theta_1 + \theta_2$ puede considerarse como dos rotaciones sucesivas, de valores θ_1 y θ_2 respectivamente, en torno al mismo eje. Por tanto, (véase el enunciado para rotaciones sucesivas en el apéndice A, apartado A.6) las matrices de rotación \mathbf{A} asociadas cumplirán

$$\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{A}(\theta_1) \mathbf{A}(\theta_2) \quad (4.36)$$

por lo que se tiene

$$\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2) (\Phi(\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2)^T \mathbf{u})) = \mathbf{A}(\theta_1) \mathbf{A}(\theta_2) (\Phi(\mathbf{A}(\theta_2)^T \mathbf{A}(\theta_1)^T \mathbf{u})) \quad (4.37)$$

Como a $\mathbf{A}(\theta_2)$ le corresponde $\mathbf{B}(\alpha_2)$, será

$$\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2) (\Phi(\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2)^T \mathbf{u})) = \mathbf{A}(\theta_1) (\Phi(\mathbf{A}(\theta_1)^T \mathbf{u})) \mathbf{B}(\alpha_2) \quad (4.38)$$

Y, análogamente, como a $\mathbf{A}(\theta_1)$ le corresponde $\mathbf{B}(\alpha_1)$, queda

$$\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2) (\Phi(\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2)^T \mathbf{u})) = (\Phi(\mathbf{u})) \mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) \quad (4.39)$$

Sólo queda demostrar que $\mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) = \mathbf{B}(\alpha_1 + \alpha_2)$, lo cual es inmediato:

$$\mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

por tanto,

$$\mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Es decir

$$\mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

por lo que es

$$\mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) = \mathbf{B}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.43)$$

lo que completa la prueba. ■

Teorema 4.11 *Si $\Phi(\mathbf{u})$ contiene sólo una base de un espacio asociado a un autovalor de multiplicidad dos, entonces la matriz de transformación modal asociada a la rotación de un ángulo θ dada por la matriz $\mathbf{A}(\theta)$ es*

$$\mathbf{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

dependiendo del orden en que aparecen en Φ los elementos de la base.

Demostración. Por el teorema 4.9, \mathbf{B} es de la forma dada por (4.30). Basta, pues, demostrar que α es de la forma $\alpha = \pm\theta + 2\pi k$, con k entero, ya que $\mathbf{B}(\pm\theta + 2\pi k) = \mathbf{B}(\pm\theta) \mathbf{B}(2\pi k) = \mathbf{B}(\pm\theta)$. Para ello, consideremos la identidad (4.4), que puede escribirse en la forma

$$\mathbf{A}(\theta) \Phi(\mathbf{A}(\theta)^T \mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}(\alpha) \quad \forall \mathbf{u} \quad (4.45)$$

como la definición implícita de una función f que a cada θ le asigna un $\alpha = f(\theta)$.

Por el anterior teorema 4.10, se tiene que

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) + f(\theta_2) \quad (4.46)$$

La derivada de α respecto de θ es

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{d}{d\theta} f(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta} = \\ &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta) + f(\Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \quad \forall \theta \quad (4.47)\end{aligned}$$

Es decir, la derivada de α respecto de θ no depende de θ (luego es constante), por lo que la función f es de la forma $\alpha = f(\theta) = a\theta + b$ con a y b constantes. Dado que, por el teorema 4.5, cuando \mathbf{A} es la identidad (por ejemplo, para $\theta = 0$), \mathbf{B} también lo es (es decir, $\alpha = 2\pi k$), se tiene $f(0) = 2\pi k$, luego debe ser $b = 2\pi k$, por tanto, $\alpha = a\theta + 2\pi k$. Sólo queda, entonces, demostrar que $|a| = 1$. Lo haremos por reducción al absurdo.

Si fuera $|a| > 1$, existiría un θ con $|\theta| \in]0, 2\pi[$ tal que $\alpha = 2\pi(k+1)$ (concretamente, $\theta = 2\pi/a$), lo que llevaría a que a una matriz $\mathbf{A}(2\pi/a) \neq \mathbf{I}_{3 \times 3}$ le correspondiera una $\mathbf{B}(2\pi(k+1)) = \mathbf{I}_{N \times N}$, contradiciendo el teorema 4.5. Análogamente, si fuera $|a| < 1$ existiría un α con $|\alpha| \in]0, 2\pi[$ tal que $\theta = 2\pi$ (concretamente, $\alpha = 2\pi(a+k)$), lo que llevaría a que a una matriz $\mathbf{A}(2\pi) = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ le correspondiera una $\mathbf{B}(2\pi(a+k)) \neq \mathbf{I}_{N \times N}$, lo que también contradice el teorema 4.5. De forma que sólo puede ser $|a| = 1$, quedando $\alpha = \theta + 2\pi k$ ó $\alpha = -\theta + 2\pi k$.

Dada la expresión (4.4) de definición de \mathbf{B} , intercambiar el orden de los modos en Φ lleva a permutar el orden de las filas y de las columnas en \mathbf{B} , lo que, finalmente, completa la prueba. ■

Corolario 4.12 *La matriz de transformación modal es función exclusivamente del ángulo θ correspondiente a la matriz de transformación $\mathbf{A}(\theta)$.*

La prueba es trivial, por los teoremas 4.4, 4.7 y 4.11. ■

En el apartado 4.5 veremos que la matriz \mathbf{B} permite transformar convenientemente la ecuación del movimiento (3.36). Para ello, es necesario obtener previamente algunas propiedades más de la matriz de transformación modal, que serán empleadas en dicho apartado.

La matriz modal Φ es una base del espacio N -dimensional de las deformadas del cuerpo, idéntico a \mathbb{R}^N . Dado que, por el teorema 4.7, $\Phi\mathbf{B}$ es otra base del mismo espacio, puede interpretarse \mathbf{B} como una matriz de cambio de base. En el capítulo anterior se han introducido las matrices $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{J}}$ y $\tilde{\mathbf{E}}$ y el vector $\tilde{\mathbf{L}}$. Veamos que cumplen el siguiente

Teorema 4.13 *Las matrices $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{J}}$ y $\tilde{\mathbf{E}}$ y el vector $\tilde{\mathbf{L}}$ son invariables ante el cambio de base definido por la matriz de transformación modal, es decir*

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}} \quad \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{J}} \quad \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{E}} \quad \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}} \quad (4.48)$$

Demostración. La matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ es una matriz diagonal formada por los autovalores asociados a los modos propios. Estos autovalores son los mismos, independientemente

de la base que se tome de cada subespacio asociado a los de multiplicidad dos. Por el teorema 4.7, la combinación lineal $\Phi \mathbf{B}$ define otro conjunto de modos propios asociados a los mismos autovalores, por lo que la matriz de rigidez modal $\tilde{\mathbf{K}}$ es la misma. Además de este razonamiento físico, se puede demostrar matemáticamente como sigue. Subdividamos la matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ en n^2 bloques semejantes a los de la matriz \mathbf{B} definidos en el teorema 4.7, siendo n el número de autovalores diferentes considerados. Sólo los bloques en la diagonal $\tilde{\mathbf{K}}^{kk}$ son no nulos, por ser $\tilde{\mathbf{K}}$ diagonal por definición. Lo mismo ocurre con la matriz $\tilde{\mathbf{B}}$, según se ha visto en la demostración del teorema 4.7, por lo que será

$$\left(\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B}\right)^{kj} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \mathbf{B}^{k\ell} \tilde{\mathbf{K}}^{\ell m} \mathbf{B}^{mj} = \begin{cases} \mathbf{B}^{kk} \tilde{\mathbf{K}}^{kk} \mathbf{B}^{kk} & \text{si } k = j \\ \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (4.49)$$

Si el k -ésimo autovalor es de multiplicidad uno, entonces los correspondientes bloques $\tilde{\mathbf{K}}^{kk}$ y \mathbf{B}^{kk} son de dimensión 1×1 , siendo $\tilde{\mathbf{K}}^{kk} = \omega_k^2$ por definición y $\mathbf{B}^{kk} = 1$ por el teorema 4.4, por lo que se cumple $\left(\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B}\right)^{kk} = \tilde{\mathbf{K}}^{kk}$ de manera trivial. Por otro lado, si la multiplicidad del k -ésimo autovalor es dos, entonces $\tilde{\mathbf{K}}^{kk}$ y \mathbf{B}^{kk} son de dimensión 2×2 , siendo

$$\tilde{\mathbf{K}}^{kk} = \begin{pmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & \omega_k^2 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

por definición, y

$$\mathbf{B}^{kk} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \mp \sin \theta \\ \pm \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

por el teorema 4.11 (donde se entiende que los signos que acompañan a los senos son, o ambos los superiores, o ambos los inferiores). De esta forma

$$\left(\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B}\right)^{kk} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \pm \sin \theta \\ \mp \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & \omega_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \mp \sin \theta \\ \pm \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Es decir

$$\left(\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B}\right)^{kk} = \begin{pmatrix} \omega_k^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) & 0 \\ 0 & \omega_k^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & \omega_k^2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{K}}^{kk} \quad (4.53)$$

para $k = 1, \dots, n$, lo que completa la prueba de que $\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}}$.

Probaremos seguidamente que $\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{J}}$. Por la definición de la matriz $\tilde{\mathbf{J}}$, dada por (3.32), se tiene

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) \, dv \mathbf{B} \quad (4.54)$$

Y teniendo en cuenta la definición de \mathbf{J} , dada por (3.5),

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \int_{\text{VS}} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} \, dv \quad (4.55)$$

Por la definición de \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_\theta \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv \quad (4.56)$$

y por (3.6)

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv \quad (4.57)$$

de forma que, haciendo el cambio de variable $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$ (con $|\mathbf{A}| = 1$), se tiene

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{v}) \, dv = \tilde{\mathbf{J}} \quad (4.58)$$

Veamos ahora que $\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{E}}$. Recordando las definiciones de \mathbf{E} y $\tilde{\mathbf{E}}$, dadas por (3.10) y (3.33), respectivamente, y procediendo de forma análoga a la anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{B} &= \int_{\text{VS}} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B} \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{E} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{E} \Phi(\mathbf{v}) \, dv = \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Finalmente, probaremos que $\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}$. A partir de la definición de $\tilde{\mathbf{L}}$ (3.34) y procediendo como antes

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{L}} &= \int_{\text{VS}} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{u} \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{A}^T \mathbf{u} \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{A}^T \mathbf{u} \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{A}^T \mathbf{u} \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{E} \mathbf{v} \, dv = \tilde{\mathbf{L}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

lo que completa la prueba. ■

Demos, por conveniencia, la siguiente

Definición 4.4 (Matriz giroscópica modal) Llamaremos matriz giroscópica modal, y la denotaremos por $\tilde{\mathbf{G}}$, a la definida mediante

$$\tilde{\mathbf{G}} = \int_{\text{VS}} \rho \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})^T}{\partial u_i} (\mathbf{J} \mathbf{u})_i \right) \Phi(\mathbf{u}) \, dv \quad (4.61)$$

donde u_i y $(\mathbf{J} \mathbf{u})_i$ denotan la componente i -ésima de los vectores \mathbf{u} y $\mathbf{J} \mathbf{u}$, respectivamente.

Teorema 4.14 Si \mathbf{B}_θ es la derivada de \mathbf{B} respecto de θ , la matriz definida mediante el producto $\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T$ es independiente de θ y puede calcularse mediante

$$\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T = \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}} \quad (4.62)$$

Demostración. En primer lugar, calculemos la derivada de $\Phi(\mathbf{v})$ respecto de θ , cuando $\mathbf{v} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\mathbf{v})}{d\theta} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} \frac{dv_i}{d\theta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} \right)_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} \left(\frac{d}{d\theta} (\mathbf{A} \mathbf{u}) \right)_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{A}_\theta \mathbf{u})_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T \mathbf{v})_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J} \mathbf{v})_i \end{aligned} \quad (4.63)$$

siendo v_i la componente i -ésima del vector \mathbf{v} y denotando mediante $(\)_i$ la componente i -ésima del vector resultado de la expresión entre paréntesis.

Por otro lado, por el teorema 4.2, se tiene

$$\Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \quad (4.64)$$

Trasponiendo y derivando respecto de θ

$$\mathbf{B}_\theta \Phi(\mathbf{u})^T = \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{A}_\theta + \frac{d\Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T}{d\theta} \mathbf{A} \quad (4.65)$$

y postmultiplicando (4.65) por (4.64) y por la densidad e integrando en el volumen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T &= \int_{\text{VS}} \rho \mathbf{B}_\theta \Phi(\mathbf{u})^T \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}^T \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv + \int_{\text{VS}} \rho \frac{d\Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T}{d\theta} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv + \int_{\text{VS}} \rho \frac{d\Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T}{d\theta} \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{v}) \, dv + \int_{\text{VS}} \rho \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi^T(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J} \mathbf{v})_i \right) \Phi(\mathbf{v}) \, dv = \\ &= \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Dado que $\tilde{\mathbf{J}}$ y $\tilde{\mathbf{G}}$ no dependen de θ , se completa la prueba. ■

Teorema 4.15 Si $\mathbf{B}_{\theta\theta}$ es la derivada segunda de \mathbf{B} respecto de θ , la matriz definida mediante el producto $\mathbf{B}_{\theta\theta} \mathbf{B}^T$ es independiente de θ y puede calcularse mediante

$$\mathbf{B}_{\theta\theta} \mathbf{B}^T = -(\tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}})(\tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}})^T \quad (4.67)$$

Demostración. Por el anterior teorema 4.14, $\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T$ es constante, por lo que

$$\frac{d}{d\theta} (\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T) = \mathbf{0} \quad (4.68)$$

de forma que

$$\mathbf{B}_{\theta\theta} \mathbf{B}^T = -\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}_\theta^T = -\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T \quad (4.69)$$

y por el teorema anterior

$$\mathbf{B}_{\theta\theta} \mathbf{B}^T = -(\tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}})(\tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}})^T \quad (4.70)$$

Como $\tilde{\mathbf{J}}$ y $\tilde{\mathbf{G}}$ no dependen de θ , se completa la prueba. ■

Teorema 4.16 La matriz definida mediante el producto $\mathbf{B} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B}_\theta^T$ es independiente de θ y puede calcularse mediante

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B}_\theta^T = \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}})^T \quad (4.71)$$

Demostración. Procediendo como en los casos anteriores, la expresión $\mathbf{B} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B}_\theta^T$ puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B}_\theta^T &= \mathbf{B} \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) \, dv \mathbf{B}_\theta^T = \\ &= \mathbf{B} \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{u}) \, dv \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{A} \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{A} \mathbf{u}) \, dv \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = \\ &= \int_{\text{VS}} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{v}) \, dv \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = \\ &= \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{G}})^T \end{aligned} \quad (4.72)$$

Puesto $\tilde{\mathbf{J}}$ y $\tilde{\mathbf{G}}$ no dependen de θ , se completa la prueba. ■

Teorema 4.17 La matriz giroscópica modal es antisimétrica. Es decir

$$\tilde{\mathbf{G}} = -\tilde{\mathbf{G}}^T \quad (4.73)$$

Demostración. Por el teorema 4.14, se tiene $\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{J}} - \mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T$. Dado que $\tilde{\mathbf{J}}$ es antisimétrica, como se mostró en el capítulo 3, basta demostrar que $\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T$ también lo es. Puesto que \mathbf{B} es ortogonal, es decir $\mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{I}_{N \times N}$,

$$\frac{d}{d\theta} (\mathbf{B} \mathbf{B}^T) = \mathbf{0} \quad (4.74)$$

luego

$$\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T = -\mathbf{B} \mathbf{B}_\theta^T = -(\mathbf{B}_\theta \mathbf{B}^T)^T \quad (4.75)$$

lo que completa la prueba. ■

Si la matriz \mathbf{A} es variable en el tiempo, representando un movimiento continuo de rotación, entonces \mathbf{B} también será, en general, función del tiempo. Para que exista una tal matriz, es un requisito que la rotación definida por \mathbf{A} se produzca en torno al eje de revolución del cuerpo, por lo que la rotación debe tener constantemente esa dirección. Ello implica que la velocidad angular puede cambiar de amplitud, pero no de dirección.

4.3. Interpretación física de la transformación modal

Para ilustrar lo que físicamente representa la transformación modal, consideremos en primer lugar un caso sencillo, una viga biarticulada en rotación sobre su eje longitudinal. En la figura 4.4, la imagen (a) muestra una base de modos propios de la viga no rotatoria correspondiente a la primera frecuencia de flexión. También se sugiere una representación esquemática de esta base. Llamemos a estos modos *base de referencia*. La imagen (b) muestra, en el instante inicial ($t = 0$), en el que los ejes del cuerpo (en gris) y los fijos (en negro) son coincidentes, la representación esquemática de la base de referencia. En un instante posterior ($t = t_1$) el cuerpo habrá girado cierto ángulo (imagen (c)). E igualmente lo habrán hecho los modos propios y los ejes del sólido. Comparando las imágenes (b) y (c) se aprecia que los modos que conforman la base de referencia, aunque tienen la misma representación en ejes del sólido en ambos instantes, se describen de forma diferente en el sistema fijo en el instante $t = t_1$ a como lo hacían en el $t = 0$.

Dado que la estructura es de revolución, igualmente podemos seleccionar otra base distinta en el instante $t = 0$, por ejemplo, la mostrada en la imagen (d), a la que llamaremos *base actual*. En ese caso, en el instante t_1 (imagen (e)) la representación en el sistema fijo de la base actual coincide con la que tenía la base de referencia en el instante $t = 0$ (imagen (b)).

De esta forma, es posible trabajar con una misma representación de los modos en ejes fijos (la de la base de referencia), si en cada instante se emplea una base modal adecuada, la base actual, distinta en cada momento. Por ser ambas bases representaciones del mismo espacio modal, es posible escribir la actual como una

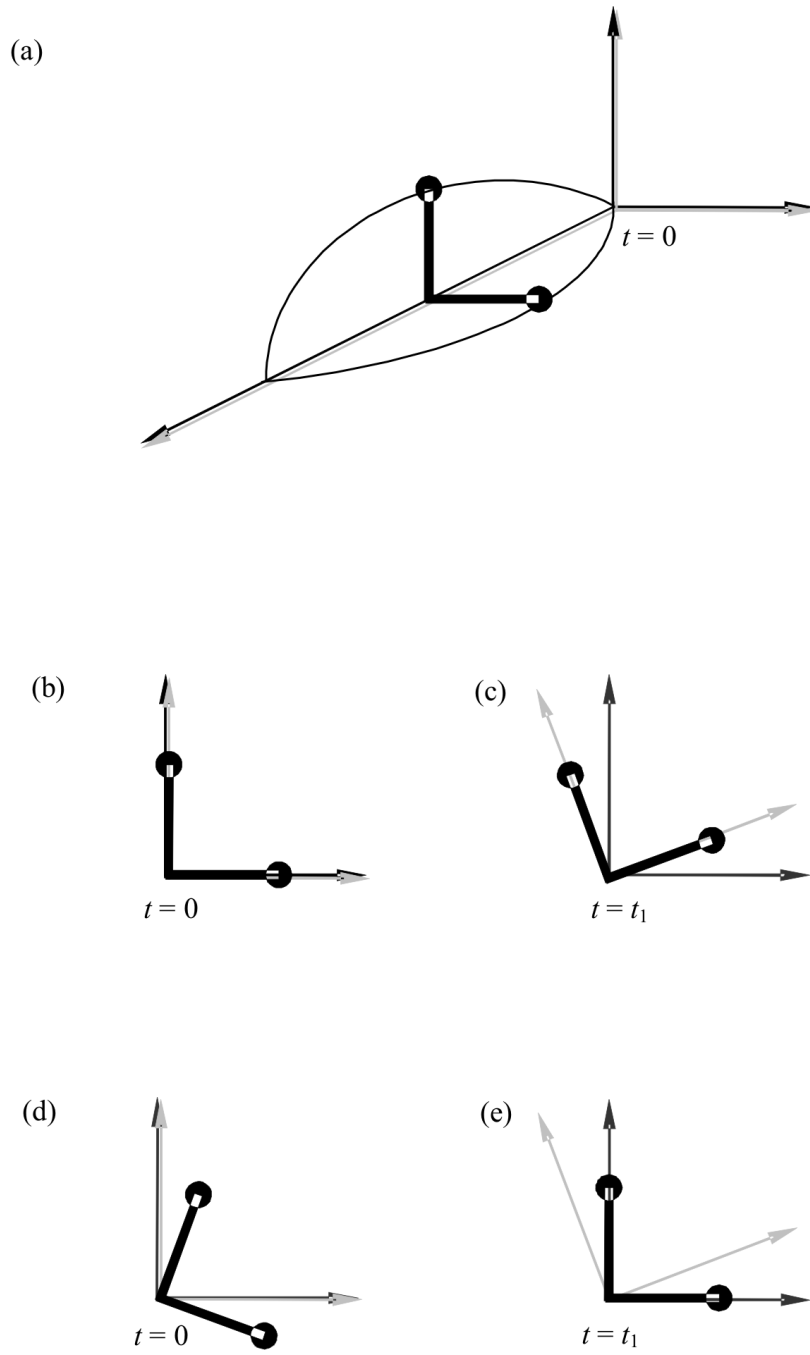


Figura 4.4. Interpretación de la transformación modal.

combinación lineal de la de referencia. Veremos a continuación que es la matriz de transformación modal la que define, en cada instante, la combinación adecuada. Así, la base actual puede obtenerse en cada instante postmultiplicando la base de referencia por la traspuesta de la matriz de transformación modal. Es decir, esta matriz permite elegir en cada instante bases de modos distintas, tales que su representación en el sistema fijo es siempre la misma.

En el ejemplo mostrado, al ser la viga un cuerpo unidimensional, los puntos de la no deformada no cambian de posición durante la rotación. El caso general con sólidos tridimensionales es un poco más complejo, dado que las partículas materiales cambian de posición en cada instante aunque no haya deformación. Sin embargo, el problema se simplifica si centramos la atención en los puntos espaciales que pertenecen al volumen de la no deformada, ya que éstos no se ven afectados por la rotación, en lugar de estudiar el movimiento de las partículas.

Sea un sólido general (de revolución o no) y definamos un sistema de ejes solidario con la no deformada del mismo, inicialmente coincidente con un sistema fijo. Una vez calculados y normalizados N modos propios del sólido (la base de referencia), entendidos como deformadas de la materia, éstos vendrán dados, en el sistema del cuerpo, por un campo matricial, al que llamaremos $\Phi(\mathbf{u}')$, siendo \mathbf{u}' las coordenadas en el mismo sistema de un punto del sólido.

Apliquemos un movimiento de rotación, definido por $\mathbf{A}(t)$, al sólido, y con él, al sistema del cuerpo y a las deformadas materiales. Evidentemente, la representación de estas deformadas en el sistema del cuerpo seguirá siendo $\Phi(\mathbf{u}')$, que es constante en el tiempo. Sin embargo, su representación en el sistema fijo será $\mathbf{A}(t) \Phi(\mathbf{u}')$ que, en general, sí depende del tiempo. Si nos interesamos por la deformación en el punto que ocupa las coordenadas \mathbf{u} en la no deformada en el sistema fijo y la intentamos describir mediante una superposición modal, trabajando en ese sistema, dado que $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}$ nos encontraremos empleando unos modos con la forma

$$\Psi(\mathbf{u}, t) = \mathbf{A}(t) \Phi(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}) \quad (4.76)$$

es decir, con expresión diferente en cada instante.

Ahora bien, si el sólido es de revolución, por el teorema 4.1 existe la matriz de transformación modal, $\mathbf{B}(t)$, que satisface

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(t) \Phi(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}) \mathbf{B}(t)^T \quad (4.77)$$

por lo que resulta

$$\Psi(\mathbf{u}, t) \mathbf{B}(t)^T = \Phi(\mathbf{u}) \quad (4.78)$$

de modo que $\Psi(\mathbf{u}, t) \mathbf{B}(t)^T$, que es la representación en el sistema fijo de unas combinaciones de los modos materiales (dadas por las columnas de \mathbf{B}^T), toma los mismos valores que $\Phi(\mathbf{u})$. Es decir, la representación en el sistema fijo de la base definida como $\Psi(\mathbf{u}, t) \mathbf{B}(t)^T$ (que es la que hemos llamado base actual) es la misma en todo instante de tiempo y coincidente con la representación en el sistema del cuerpo de los modos materiales Φ (base de referencia) si se toma el argumento de éstos como coordenadas del sistema fijo (puntos espaciales).

Por tanto, la traspuesta de la matriz de transformación modal, $\mathbf{B}(t)^T$, define, en cada instante de tiempo, qué combinación lineal de los modos materiales calculados inicialmente tiene la misma representación en el sistema fijo que éstos en el de cuerpo. Por los teoremas 4.2 y 4.7, esta combinación también es un conjunto de modos propios normalizados a la matriz de masa que, aunque serán modos materiales diferentes en cada instante, tiene una representación constante en ejes fijos.

4.4. Síntesis modal mixta lagrangiana–euleriana

La técnica conocida como *Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) Method*, ampliamente empleada en el estudio de la interacción fluido–estructura [24], fue desarrollada para mejorar las prestaciones de los enfoques lagrangiano y euleriano. En el método lagrangiano, las coordenadas empleadas sitúan a cada partícula material, mientras que en el euleriano se refieren a posiciones fijas del espacio, por las que pasan diferentes partículas a lo largo del tiempo. En el método ALE, las coordenadas no sitúan partículas, pero tampoco se refieren a posiciones fijas, sino que se modifican para ajustarse mejor a la geometría del problema, cambiante con el tiempo. La aplicación práctica de las técnicas ALE se desarrolla en un contexto de diferencias finitas [35, 36, 39, 61] o de elementos finitos [13, 25, 40] y es necesario suministrar un algoritmo (arbitrario, de ahí el nombre) de deformación de la malla. De la elección del algoritmo depende la calidad de los resultados obtenidos.

A continuación se presenta una técnica análoga en la que el algoritmo no es arbitrario. Cuando se aplica mediante el Método de los Elementos Finitos, la malla se deforma mediante una combinación de los modos propios de la estructura no rotatoria para ajustarse a la geometría deformada, aunque las partículas materiales que ocupan cada elemento cambien con el tiempo debido a la rotación. De esta forma, la malla sólo sufre pequeños desplazamientos, mientras la materia *fluye* a través de ella con los grandes desplazamientos rotacionales.

Consideremos una configuración de referencia del sistema, dada por la que toma la no deformada en el instante inicial, en el que son coincidentes ambos sistemas de referencia, el fijo y el del cuerpo. Una partícula material tendrá, en esa configuración, las mismas coordenadas en ambos sistemas. Dado que el sistema del cuerpo sigue el mismo movimiento de sólido rígido que éste, las coordenadas de la partícula en la no deformada en este sistema, \mathbf{u}' , serán constantes, por lo que podemos tomarlas como identificadoras de la partícula, definiendo así sus coordenadas materiales o lagrangianas.

En el capítulo 3 se ha mostrado que el vector de posición en ejes fijos $\mathbf{r}(\mathbf{u}', t)$ en el instante t de un punto material representado por sus coordenadas lagrangianas \mathbf{u}' puede escribirse de la forma

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}', t) = \mathbf{A}(t) (\mathbf{u}' + \mathbf{\Phi}(\mathbf{u}') \mathbf{p}(t)) \quad (4.79)$$

para algún conjunto de coordenadas generalizadas \mathbf{p} .

La coordenada euleriana de la partícula que ocupa la posición \mathbf{u} en el sistema fijo en el instante t , es, por definición, la propia posición de la misma en ese instante, es decir, $\mathbf{r}(\mathbf{u}', t)$. No obstante, dado que estamos tratando el movimiento global como la superposición de dos, una rotación de sólido rígido, más unas deformaciones elásticas, podemos considerar éstas últimas como una propiedad definida mediante un campo vectorial en la no deformada, y definir como *coordenada mixta lagrangiana-euleriana* la posición en cada instante de la partícula en la no deformada (que sí habrá rotado), que será $\mathbf{u} = \mathbf{A}(t)(\mathbf{u}')$.

Por tanto, la partícula material que en el instante t se encuentra en las coordenadas espaciales (mixtas) en el sistema fijo \mathbf{u} , que será una partícula distinta en cada instante, tiene unas coordenadas materiales (lagrangianas) dadas por $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}$, de forma que su vector de posición en el instante t , en ejes fijos, será $\mathbf{r}(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}, t)$, lo que permite definir una función $\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}, t)$, es decir

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{A}(t) (\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}) \mathbf{p}(t)) \quad (4.80)$$

y, por tanto,

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u} + \mathbf{A}(t) \Phi(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}) \mathbf{p}(t) \quad (4.81)$$

Teniendo en cuenta la definición 4.3 de la matriz de transformación modal, la anterior queda

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}(t) \mathbf{p}(t) \quad (4.82)$$

En la expresión (4.79), los modos materiales Φ están descritos en un sistema de coordenadas que sigue la rotación del sólido. Por lo discutido en el apartado anterior, la matriz de transformación modal permite emplear esta misma descripción de los modos, $\Phi(\mathbf{u})$, interpretada en el sistema fijo y evaluada en las coordenadas espaciales (mixtas) \mathbf{u} , si se emplea unos modos materiales distintos en cada instante, obtenidos mediante la combinación de los modos iniciales dada por $\Phi(\mathbf{u}') \mathbf{B}(t)^T$ y se evalúa Φ en $\mathbf{u}' = \mathbf{A}(t)^T \mathbf{u}$. Dado que la descripción de éstos últimos es constante en el sistema fijo, pueden considerarse $\Phi(\mathbf{u})$ como unos *modos espaciales*, distinguiendo éstos de los *modos materiales*.

Por otro lado, las coordenadas generalizadas $\mathbf{p}(t)$ definen también una combinación lineal de los modos materiales. Podemos agrupar los coeficientes de ambas, definiendo una combinación de los modos espaciales dada por

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{p}(t) \quad (4.83)$$

de forma que se tiene

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t) \quad (4.84)$$

Resumiendo, las coordenadas generalizadas $\mathbf{p}(t)$, a las que llamaremos *coordenadas modales lagrangianas*, representan, en cada instante, una combinación lineal de un conjunto de modos propios materiales expresados en el sistema del cuerpo, en el que son constantes ($\Phi(\mathbf{u}')$). Sin embargo, la expresión de estos modos en el sistema fijo

es una función del tiempo (concretamente $\mathbf{A}(t) \Phi(\mathbf{u}')$). Por contra, las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}(t)$, a las que llamaremos *coordenadas modales mixtas lagrangianas-eulerianas*, o simplemente *coordenadas modales mixtas*, definen, en cada instante, una combinación de los modos espaciales, siendo éstos constantes en el sistema fijo.

4.5. Ecuación del movimiento en coordenadas modales mixtas

Puede obtenerse la ecuación del movimiento en coordenadas modales mixtas a partir de la deducida en el capítulo 3 en coordenadas modales lagrangianas (ecuación (3.36)). La relación entre ambos sistemas de coordenadas viene dada por la expresión (4.83). Premultiplicando por \mathbf{B}^T y derivando resulta

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^T \mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{q} + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{q}} \quad \ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{B}}^T \mathbf{q} + 2\dot{\mathbf{B}}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.85)$$

Sustituyendo las anteriores en (3.36) y premultiplicando por \mathbf{B}

$$\begin{aligned} & \mathbf{B} \left(\ddot{\mathbf{B}}^T \mathbf{q} + 2\dot{\mathbf{B}}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{q}} \right) + \\ & + 2\Omega \mathbf{B} \tilde{\mathbf{J}} \left(\dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{q} + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{q}} \right) + \\ & + \mathbf{B} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2 \tilde{\mathbf{E}} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{q} = \\ & = \mathbf{B} \mathbf{Q}_p + \Omega^2 \mathbf{B} \tilde{\mathbf{L}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Reordenando términos, y teniendo en cuenta los teoremas 4.3, 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16, queda

$$\ddot{\mathbf{q}} - 2\Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}} + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \left(\tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{J}}^T - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T - \tilde{\mathbf{E}} \right) \right) \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{Q}_p + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (4.87)$$

que definiendo

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{J}}^T - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T - \tilde{\mathbf{E}} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{Q}_q = \mathbf{B} \mathbf{Q}_p \quad (4.89)$$

se puede poner

$$\ddot{\mathbf{q}} - 2\Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}} + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \right) \mathbf{q} = \mathbf{Q}_q + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (4.90)$$

Las fuerzas generalizadas en las coordenadas lagrangianas \mathbf{p} , \mathbf{Q}_p , están dadas por la expresión (3.23) que a continuación repetimos

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p(t) &= \int_{VS} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t) dv + \\ &+ \int_{Surf} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^s(\mathbf{u}', t) ds + \\ &+ \sum_p \Phi(\mathbf{u}'_p)^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^p(\mathbf{u}'_p, t) \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde los campos de fuerzas $\mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t)$, $\mathbf{f}^s(\mathbf{u}', t)$ y $\mathbf{f}^p(\mathbf{u}'_p, t)$ están descritos en el sistema de coordenadas fijo y definidos respecto a las coordenadas materiales (lagrangianas). Redefinamos éstos respecto a las coordenadas espaciales (mixtas), dando lugar a los campos $\mathbf{g}^v(\mathbf{u}, t)$, $\mathbf{g}^s(\mathbf{u}, t)$ y $\mathbf{g}^p(\mathbf{u}_p, t)$, respectivamente, y, como se explicó en el capítulo 2, describámoslos mediante unas funciones en la forma

$$\mathbf{g}^v(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}^v(\mathbf{u}) \boldsymbol{\chi}^v(t) \quad (4.92)$$

$$\mathbf{g}^s(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}^s(\mathbf{u}) \boldsymbol{\chi}^s(t) \quad (4.93)$$

$$\mathbf{g}^p(\mathbf{u}_p, t) = \mathbf{F}^p(\mathbf{u}_p) \boldsymbol{\chi}^p(t) \quad (4.94)$$

Con esto, las fuerzas generalizadas respecto de las coordenadas mixtas \mathbf{q} se calculan como

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q(t) &= \mathbf{B} \int_{VS} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{F}^v(\mathbf{u}) dv \boldsymbol{\chi}^v(t) + \\ &+ \mathbf{B} \int_{Surf} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{F}^s(\mathbf{u}) ds \boldsymbol{\chi}^s(t) + \\ &+ \mathbf{B} \sum_p \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}'_p)^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{F}^p(\mathbf{u}_p) \boldsymbol{\chi}^p(t) \end{aligned} \quad (4.95)$$

que, por la definición de la matriz de transformación modal y recordando que $\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}'$, queda

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q(t) &= \int_{VS} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})^T \mathbf{F}^v(\mathbf{u}) dv \boldsymbol{\chi}^v(t) + \\ &+ \int_{Surf} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})^T \mathbf{F}^s(\mathbf{u}) ds \boldsymbol{\chi}^s(t) + \\ &+ \sum_p \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_p)^T \mathbf{F}^p(\mathbf{u}_p) \boldsymbol{\chi}^p(t) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Definiendo

$$\tilde{\mathbf{F}}^v = \int_{VS} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})^T \mathbf{F}^v(\mathbf{u}) dv \quad (4.97)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^s = \int_{Surf} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u})^T \mathbf{F}^s(\mathbf{u}) ds \quad (4.98)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^p = \sum_p \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_p)^T \mathbf{F}^p(\mathbf{u}_p) \quad (4.99)$$

se puede poner

$$\mathbf{Q}_q(t) = \tilde{\mathbf{F}}^v \boldsymbol{\chi}^v + \tilde{\mathbf{F}}^s \boldsymbol{\chi}^s + \tilde{\mathbf{F}}^p \boldsymbol{\chi}^p \quad (4.100)$$

con lo que, finalmente, la expresión (4.90) queda

$$\ddot{\mathbf{q}} - 2 \Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}^v \boldsymbol{\chi}^v + \tilde{\mathbf{F}}^s \boldsymbol{\chi}^s + \tilde{\mathbf{F}}^p \boldsymbol{\chi}^p + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (4.101)$$

con, recordando (4.84),

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t) \tag{4.102}$$

La ecuación (4.101) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes. Conocida la historia temporal de las fuerzas aplicadas, χ^v , χ^s y χ^p , y las condiciones iniciales $\mathbf{q}(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}(0)$ puede integrarse para obtener $\mathbf{q}(t)$ y, mediante (4.102), obtener la posición $\mathbf{s}(\mathbf{u}, t)$ de la partícula que ocuparía las coordenadas \mathbf{u} del sistema fijo en el instante t si no hubiera deformación.

A diferencia de la ecuación presentada en el capítulo 3 (3.36), en la (4.101) todas las integraciones en el volumen del sólido se realizan una única vez porque los integrandos no dependen del tiempo, de forma que pueden hacerse *a priori*, antes de comenzar una simulación.

La ecuación (4.101) puede interpretarse, mediante el principio de d'Alembert, como el equilibrio de la fuerza generalizada aplicada, la fuerza generalizada elástica y la fuerza generalizada de inercia. La primera, representada por \mathbf{Q}_q , la segunda por $\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}$ y la tercera por todos los demás términos. El significado físico de todos ellos se muestra en la tabla 4.1.

\mathbf{Q}_q	Fuerzas externas aplicadas
$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}$	Fuerzas elásticas
$\ddot{\mathbf{q}}$	Componente de la aceleración debida a la deformación
$-2 \Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}}$	Términos giroscópicos
$\Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{q} - \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}}$	Aceleración centrípeta debida a la rotación. En parte debida a la no deformada ($\tilde{\mathbf{L}}$) y en parte a la debida a la deformación ($\tilde{\mathbf{C}}$)

Tabla 4.1. Significado físico de los términos de la ecuación del movimiento en coordenadas modales mixtas.

4.6. Ecuación del movimiento en coordenadas modales lagrangianas

La ecuación del movimiento encontrada en el capítulo 3 presenta el inconveniente de que la obtención de las fuerzas generalizadas requiere realizar una integración en el volumen del cuerpo en cada instante. Sin embargo, si el sólido es de revolución, la matriz de transformación modal permite también calcular éstas fuerzas respecto de las coordenadas lagrangianas mediante una integración independiente del tiempo.

Teniendo en cuenta (4.89), será también

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_q \tag{4.103}$$

es decir, por (4.100), se tendrá

$$\mathbf{Q}_p(t) = \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}}^v \chi^v + \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}}^s \chi^s + \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}}^p \chi^p \quad (4.104)$$

de forma que la ecuación (3.36) se escribe, para sólidos de revolución, como

$$\ddot{\mathbf{p}} + 2\Omega \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2 \tilde{\mathbf{E}}) \mathbf{p} = \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}}^v \chi^v + \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}}^s \chi^s + \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{F}}^p \chi^p + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (4.105)$$

Si el interés está en la trayectoria de una partícula, entonces, mediante (4.79),

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}', t) = \mathbf{A}(t) (\mathbf{u}' + \Phi(\mathbf{u}') \mathbf{p}(t)) \quad (4.106)$$

Si los puntos de interés son de interacción con estructuras no rotatorias, recordando (4.82), se tiene

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}(t) \mathbf{p}(t) \quad (4.107)$$

El uso de las ecuaciones (4.105) y (4.107) requiere el cálculo de la matriz de transformación modal $\mathbf{B}(t)$. A parte del método de cálculo dado en el teorema 4.1, que requiere una costosa integración en cada instante, es posible obtener su expresión simbólica por inspección de las multiplicidades de las frecuencias propias y del orden en que aparecen los modos en Φ , gracias a los teoremas 4.4 y 4.11. Sin embargo, en este caso es mucho más sencillo trabajar en coordenadas modales mixtas.

En la ecuación (4.105) se asume que las fuerzas externas están descritas respecto de coordenadas espaciales (mixtas).

Igual que antes, la ecuación (4.105) también puede interpretarse como el equilibrio en la fuerza generalizada aplicada, \mathbf{Q}_p , la fuerza generalizada elástica, $\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{p}$, y la fuerza generalizada de inercia, representada por todos los demás términos. El significado físico de todos ellos se muestra en la tabla 4.2.

\mathbf{Q}_p	Fuerzas externas aplicadas
$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{p}$	Fuerzas elásticas
$\ddot{\mathbf{p}}$	Aceleración relativa
$2\Omega \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{p}}$	Aceleración de Coriolis y términos giroscópicos
$-\Omega^2 \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{p} - \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}}$	Aceleración de arrastre debida a la no deformada ($\tilde{\mathbf{L}}$) más la debida a la deformación ($\tilde{\mathbf{E}}$)

Tabla 4.2. *Significado físico de los términos de la ecuación del movimiento en coordenadas modales lagrangianas.*

4.7. Conclusiones

Para sólidos de revolución en rotación sobre su propio eje, se ha demostrado la existencia de una transformación de los modos propios del sistema no rotatorio que

permite aplicar técnicas de síntesis modal empleando formas modales fijas en el espacio. Se ha introducido el concepto de síntesis modal mixta lagrangiana–euleriana y se ha obtenido la ecuación del movimiento del sistema para velocidad angular constante en términos de coordenadas modales mixtas.

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial ordinaria de coeficientes constantes en la que todos los coeficientes pueden ser obtenidos mediante una única integración en el volumen del sólido, antes de realizar una simulación.

Las coordenadas generalizadas mixtas están asociadas a formas modales definidas en unos ejes fijos, lo que facilita su interpretación física. Toda la formulación se lleva a cabo en este sistema de coordenadas, por lo que no es necesario definir un sistema móvil.

Se ha demostrado, así mismo, que, para sólidos de revolución, la matriz de transformación modal permite evaluar las fuerzas generalizadas en el modelo lagrangiano presentado en el capítulo 3, realizando una sola vez la integración en el volumen. Esto requiere la determinación de la matriz de transformación modal, lo que puede hacerse de forma simbólica por simple inspección, sin necesidad de integraciones en el volumen.

Las ecuaciones obtenidas en coordenadas modales mixtas son un sistemas matemáticamente equivalente al obtenido mediante las coordenadas modales lagrangianas. Representan el mismo modelo analítico y proporcionan los mismos resultados si se resuelven simbólicamente. Si la resolución es numérica, que será el caso general, las únicas discrepancias que pueden aparecer son debidas al error computacional, dado que se realizan operaciones diferentes.

Al estar planteado en términos modales, es inmediato integrar el modelo obtenido en un sistema de subestructuración por síntesis modal de los componentes. Debido a la antisimetría del término giroscópico, el sistema de ecuaciones obtenido no está desacoplado. Sin embargo, puede esperarse que no sea necesario un número elevado de modos para caracterizar correctamente la respuesta de la estructura rotatoria, por lo que su inclusión en el sistema no agrava la eficiencia computacional.

La información necesaria de la estructura rotatoria se reduce a su velocidad angular y a las frecuencias y modos propios de la no rotatoria, supuesto un comportamiento lineal de la misma. Estas frecuencias y modos pueden obtenerse mediante técnicas habituales en la industria.

La metodología desarrollada en este capítulo, para la obtención de la ecuación del movimiento en coordenadas modales mixtas lagrangianas–eulerianas, constituye la principal aportación de esta Tesis y ha sido publicada en *Journal of Sound and Vibration* [32].

Capítulo 5

Modelos analíticos de un cilindro rotatorio

Objeto del capítulo:

Las metodologías desarrolladas en los capítulos anteriores se aplican en éste para obtener analíticamente los términos de las ecuaciones del movimiento de un cuerpo de geometría sencilla, un cilindro. Las ecuaciones resultantes se comparan entre sí y con las obtenidas en el capítulo 2 para la viga de Rayleigh.

5.1. Introducción

En el capítulo 2 se obtuvo la ecuación del movimiento para una viga de Rayleigh sometida a rotación sobre sí misma por medio de un método sólo aplicable a vigas. Aquel método asume que la sección recta de la viga permanece indeformada, lo que permite darle un tratamiento de sólido rígido. El modelo matemático empleado es unidimensional; se supone toda la masa de la sección concentrada en el centro, y se le asigna dos propiedades inerciales, una asociada a la traslación y otra al giro. Dado que la geometría se reduce a una línea en el eje de revolución, coinciden las coordenadas de los puntos de la misma en el sistema fijo y en el del cuerpo. Es más, no tiene sentido hablar de *giro* de la sección en el sentido geométrico; la sección se reduce a un punto y, como tal, no puede girar. El giro no se modela de forma geométrica, sino por sus efectos físicos. Por ello, en este caso los modos materiales obtenidos en el desarrollo coinciden con los espaciales: están fijos en el espacio.

Los métodos desarrollados en los capítulos 3 y 4 pueden ser aplicados a un cilindro (sólido tridimensional) que se comporte como una viga de Rayleigh. Estos métodos parten de los modos propios del sistema no rotatorio. En este capítulo se obtendrá las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales lagrangianas y mixtas, respectivamente, de tal sólido y se compararán entre ellas y con la obtenida en el capítulo 2 para un modelo unidimensional. Para ello, se van a reformular las funciones modales obtenidas en el capítulo 2 para vigas unidimensionales de forma que representen un sólido tridimensional. Como se mostró en ese capítulo, estas funciones modales son independientes de la rotación, por lo que son también las de la viga (unidimensional) no rotatoria. Será necesario ampliarlas, relacionando los desplazamientos de cada punto de una sección con los del centro de la misma (la fibra neutra).

Las funciones que obtengamos serán aplicables tanto en el modelo lagrangiano como en el mixto, aunque su interpretación será diferente. En la formulación modal lagrangiana, los modos están representados en el sistema de coordenadas del cuerpo, y definidos para las coordenadas en este sistema de los puntos, mientras que en la formulación modal mixta esas mismas funciones deben interpretarse como las componentes de desplazamientos modales en los ejes fijos, definidas para las coordenadas en este sistema de los puntos. No obstante, en ambos métodos la integración en el volumen del cuerpo es independiente del tiempo. Puede considerarse que se hace en el instante inicial, en que son coincidentes ambos sistemas, por lo que emplearemos la notación para coordenadas en el sistema fijo.

5.2. Modelos tridimensionales lineales

La linealidad de las ecuaciones desarrolladas es uno de los requisitos recogidos en los objetivos de esta Tesis. Antes de proceder a la obtención de los modelos es importante destacar algunas consecuencias de considerar comportamiento lineal en un cuerpo tridimensional.

Un sistema es lineal cuando la respuesta ante una combinación lineal de excitaciones es la misma combinación lineal de las respuestas ante cada excitación por separado. Esto, en un contexto de elasticidad lineal, implica que si un punto de un cuerpo, en dos estados posibles, tiene unos desplazamientos \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 respectivamente, entonces, el desplazamiento definido como $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ debe ser también un desplazamiento posible del punto, y corresponder a la suma de las cargas de los estados anteriores. Por fijar ideas, supongamos que se trata de los desplazamientos producidos en dos deformadas de torsión de un cilindro que se comportara como una viga. Si el cilindro se modela unidimensionalmente (como una viga en el sentido matemático), entonces los estados de torsión se representan mediante el ángulo girado por cada sección. La trayectoria seguida por un punto que no pertenezca a la fibra neutra (y que no existe en el modelo matemático) es un arco de circunferencia cuya longitud será proporcional a este ángulo, de forma que la suma de dos deformadas de torsión se representa mediante la adición de los *desplazamientos generalizados* (los ángulos girados), resultando una descripción lineal de la deformada.

Sin embargo, si se modela como un sólido tridimensional con capacidad de comportamiento general (aunque luego lo haga como una viga a consecuencia de sus ecuaciones de comportamiento), debe describirse el desplazamiento de cada punto independientemente. Las trayectorias recorridas en la torsión son arcos de circunferencias, pero los desplazamientos correspondientes son las cuerdas de los mismos (posición final menos posición inicial). Evidentemente, la suma de dos deformadas de torsión supone la adición de los arcos, no de las cuerdas, por lo que los desplazamientos de torsión en un cuerpo tridimensional no son lineales. Lo mismo sucede en la flexión con las rotaciones de la sección debida a ésta. Y, en general, en la deformada de cualquier cuerpo en cualquier estado, las trayectorias podrían ser también curvas, resultando deformadas no lineales. Incluidos, por supuesto, los modos propios.

Para pequeños desplazamientos, es una buena aproximación tomar la tangente por el arco descrito, lo que linealiza las deformadas. Si éstas son el objeto último del problema (es decir, su solución), esta linealización no tiene mayores consecuencias. En cambio, si su obtención es sólo un paso intermedio en la resolución del problema, como el cálculo de los modos propios cuando se emplea la superposición modal, todos los cálculos realizados empleando las deformadas linealizadas son, necesariamente, aproximados. En las figuras 5.1 y 5.2 puede verse cómo una deformada de torsión lineal de un cilindro (obtenida mediante el Método de los Elementos Finitos) produce un incremento de los diámetros del mismo.

Del mismo modo, la figura 5.3 muestra una deformada lineal de flexión, en la que la rotación de las secciones también se produce mediante desplazamientos tangenciales. En la figura 5.4 se muestra la misma deformada exagerando la escala de forma que se aprecie el incremento de diámetro producido.

En particular, la obtención de las fuerzas generalizadas en una resolución modal implica el producto escalar entre la fuerza (o densidad de fuerza) aplicada en cada punto y el desplazamiento del mismo en cada modo. Si las direcciones en las que actúan las fuerzas son independientes de la deformación, y ésta es pequeña, el error

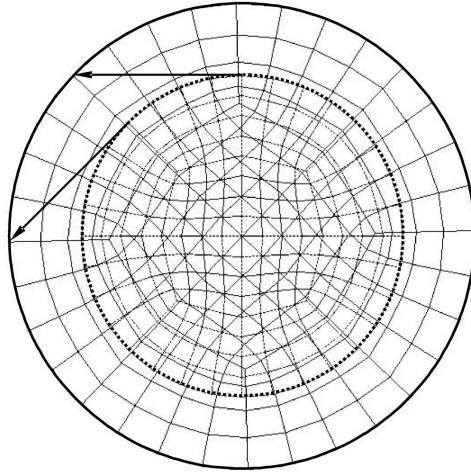


Figura 5.1. *Los desplazamientos lineales de torsión se producen según la tangente, lo que aumenta el diámetro de la sección.*

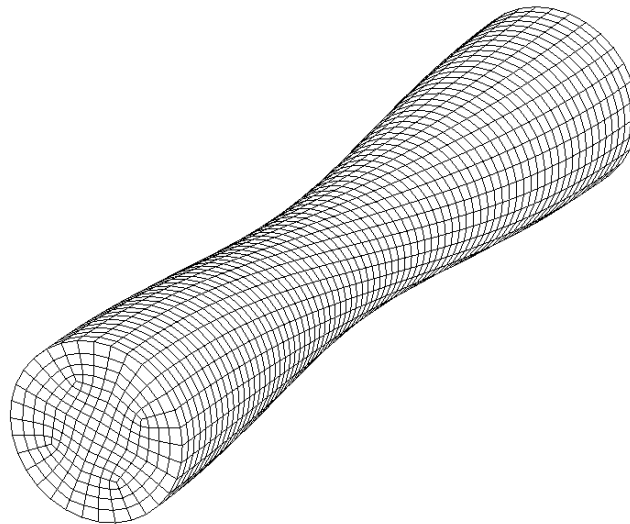


Figura 5.2. *Incremento de diámetro producido por la torsión lineal.*

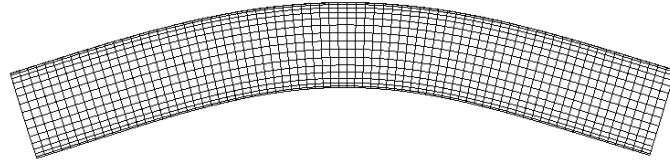


Figura 5.3. *Los desplazamientos lineales de flexión se producen de forma tangencial.*

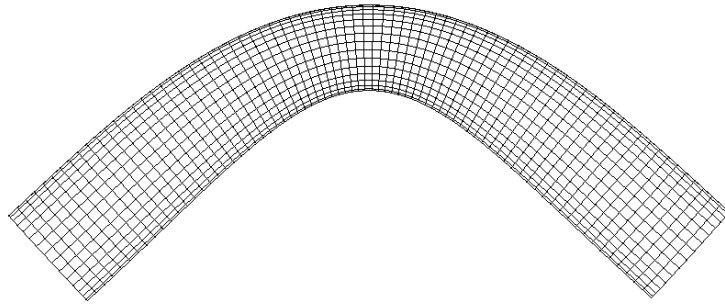


Figura 5.4. *Incremento de diámetro producido por la flexión lineal.*

inducido no suele ser significativo. Pero si la orientación de las cargas se modifica con la deformada, como ocurre con las fuerzas de inercia, entonces el error puede llegar, incluso, a invalidar el modelo. No obstante, la alternativa es renunciar a emplear un modelo lineal, lo que es computacionalmente menos eficiente. En la medida en que la desviación en los resultados no sea importante será preferible emplear éstos.

5.3. Funciones de forma tridimensionales

En el capítulo 2 se encontró que los modos propios de flexión, $\mathbf{S}(x)$, para una viga biarticulada de longitud L (expresión (2.79)) son

$$\mathbf{S}(x) = \begin{pmatrix} \sin(1\pi \frac{x}{L}) & 0 & \sin(2\pi \frac{x}{L}) & 0 & \cdots & \sin(N\pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & \sin(1\pi \frac{x}{L}) & 0 & \sin(2\pi \frac{x}{L}) & \cdots & 0 & \sin(N\pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

donde se mantiene la notación $\mathbf{S}(x)$ en lugar de $\Phi(x)$ para resaltar que los modos no están normalizados a la matriz de masa. Esta matriz de funciones proporciona los desplazamientos modales en las direcciones del segundo y tercer eje del sistema fijo, en función de la primera coordenada en ese sistema de los puntos de la fibra neutra, ya que, dada la hipótesis de pequeños desplazamientos realizada en la obtención de \mathbf{S} , los puntos de la fibra neutra están contenidos siempre en el mismo plano normal a la no deformada. Es decir, sólo sufren desplazamientos transversales. Redefinamos $\mathbf{S}(x)$, ampliándola para que contenga los desplazamientos en las tres direcciones,

$$\mathbf{S}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin(1\pi \frac{x}{L}) & 0 & \sin(2\pi \frac{x}{L}) & 0 & \cdots & \sin(N\pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & \sin(1\pi \frac{x}{L}) & 0 & \sin(2\pi \frac{x}{L}) & \cdots & 0 & \sin(N\pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Un sólido tridimensional que se comporte como una viga de Rayleigh tendrá estos mismos desplazamientos en los puntos de la fibra neutra. No obstante, es necesario describir también los desplazamientos de cualquier punto de coordenadas $\mathbf{u} = (x \ y \ z)^T$.

Llamemos \mathbf{u}_0 a las coordenadas del punto de la fibra neutra en la sección en la que se encuentra \mathbf{u} (véase la figura 5.5), es decir $\mathbf{u}_0 = (x \ 0 \ 0)^T$. El punto espacial dado por \mathbf{u} en la no deformada se encontrará, tras la deformación, en la posición dada por

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{u}_f \quad (5.3)$$

mientras que el punto de la fibra neutra en la misma sección, \mathbf{u}_0 se encontrará en

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{0f} \quad (5.4)$$

de forma que el vector de posición del primero con respecto al segundo, $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}$, tendrá por componentes en el sistema fijo

$$\mathbf{r}_{\mathbf{u}} = \mathbf{s}(\mathbf{u}) - \mathbf{s}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{0f} \quad (5.5)$$

por lo que será

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{r}_{\mathbf{u}} - \mathbf{u} + \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{0f} \quad (5.6)$$

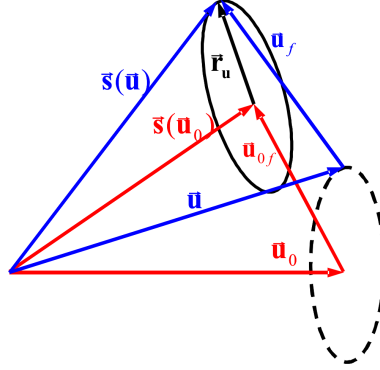


Figura 5.5. Vectores involucrados en la descripción cinemática de la sección. Se muestran en azul los correspondientes a un punto de una sección arbitraria, y en rojo los asociados al centro de la misma sección.

Por otro lado, el vector \vec{r}_u , por estar definido mediante dos puntos de la misma sección, sólo tendrá movimientos de sólido rígido, puesto que la sección es indeformable. En particular, sufrirá unas rotaciones dadas por las matrices de transformación (2.12) y (2.13), de modo que, en la deformada, las componentes de este vector serán

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} -y \cos \psi \sin \varphi + z \sin \psi \\ y \cos \varphi \\ y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Si los desplazamientos del centro de la sección, en una deformada concreta, son $\mathbf{u}_{0f} = (0 \ y_{0f} \ z_{0f})^T$, entonces, los desplazamientos del punto \mathbf{u} serán, según (5.6),

$$\mathbf{u}_f = \begin{pmatrix} -y \cos \psi \sin \varphi + z \sin \psi \\ y \cos \varphi - y + y_{0f} \\ y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi - z - z_{0f} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Aplicando la hipótesis de pequeños desplazamientos podemos aproximar el seno del ángulo girado por su tangente, el coseno por la unidad y despreciar el producto de senos. Y, puesto que la tangente del ángulo girado es la derivada respecto de la coordenada x del desplazamiento transversal correspondiente, puede aproximarse

$$\sin \varphi \approx \frac{\partial y_{0f}}{\partial x} \quad \sin \psi \approx -\frac{\partial z_{0f}}{\partial x} \quad (5.9)$$

de forma que

$$\mathbf{u}_f = \begin{pmatrix} -y \frac{\partial y_{0f}}{\partial x} - z \frac{\partial z_{0f}}{\partial x} \\ y_{0f} \\ z_{0f} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Por tanto, todos los puntos de una misma sección tendrán los mismos desplazamientos transversales en toda deformada. Sin embargo, al producirse una rotación de la sección

durante la flexión, los puntos fuera de la fibra neutra se desplazarán también a lo largo de la dirección longitudinal.

Esta simplificación es habitual siempre que se emplea la síntesis modal. De hecho, la linealidad es una de las hipótesis necesarias para poder aplicarla. Sin embargo, como se ha visto en el apartado 5.2, es fuente de imprecisiones que, en el caso de sistemas rotatorios, pueden ser importantes.

La expresión (5.10) puede ser reescrita como

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{0f} + \begin{pmatrix} 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{0f}}{\partial x} \quad (5.11)$$

Y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}_{0f}(x, t) = \mathbf{S}(x) \mathbf{q}(t)$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{S} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\mathbf{S}}{dx} \mathbf{q} \quad (5.12)$$

Podemos definir una matriz de funciones de forma tridimensional, $\mathbf{S}_{3D}(x, y, z)$, como la siguiente

$$\mathbf{S}_{3D}(x, y, z) = \mathbf{S}(x) + \begin{pmatrix} 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\mathbf{S}(x)}{dx} \quad (5.13)$$

de manera que se tendrá

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{u}, t) = \mathbf{S}_{3D}(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t) \quad (5.14)$$

La matriz modal tridimensional es, evidentemente,

$$\mathbf{S}_{3D}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -y \frac{1}{L} \cos(1 \pi \frac{x}{L}) & -z \frac{1}{L} \cos(1 \pi \frac{x}{L}) & -y \frac{2}{L} \cos(2 \pi \frac{x}{L}) & -z \frac{2}{L} \cos(2 \pi \frac{x}{L}) & \dots \\ \sin(1 \pi \frac{x}{L}) & 0 & \sin(2 \pi \frac{x}{L}) & 0 & \dots \\ 0 & \sin(1 \pi \frac{x}{L}) & 0 & \sin(2 \pi \frac{x}{L}) & \dots \\ \dots & -y \frac{N}{L} \cos(N \pi \frac{x}{L}) & -z \frac{N}{L} \cos(N \pi \frac{x}{L}) & & \\ \dots & \sin(N \pi \frac{x}{L}) & 0 & & \\ \dots & 0 & \sin(N \pi \frac{x}{L}) & & \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Los modos incluidos en \mathbf{S} son todos de flexión, por lo que ninguno de ellos presenta geometría de revolución. Cada pareja de modos con el mismo índice k ($k = 1, \dots, N$) representa una base del espacio modal bidimensional asociado a cada frecuencia. Podemos subdividir \mathbf{S} en N bloques 3×2 de la forma

$$\mathbf{S}_{3D}^k(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -y \frac{k}{L} \cos(k \pi \frac{x}{L}) & -z \frac{k}{L} \cos(k \pi \frac{x}{L}) \\ \sin(k \pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & \sin(k \pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, N \quad (5.16)$$

La matriz modal normalizada a la matriz de masa, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{u})$, se obtiene dividiendo cada columna $\mathbf{S}_{3D}^j(\mathbf{u})$ ($j = 1, \dots, 2N$) de $\mathbf{S}_{3D}(\mathbf{u})$ por la raíz cuadrada de la constante m_j definida como

$$m_j = \int_{VS} \rho \mathbf{S}_{3D}^j(\mathbf{u})^T \mathbf{S}_{3D}^j(\mathbf{u}) dv \quad (5.17)$$

es decir

$$\Phi^j(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \mathbf{S}_{3D}^j(\mathbf{u}) \quad (5.18)$$

Es inmediato comprobar que, puesto que el dominio de integración es de revolución, a las dos columnas del bloque k -ésimo $\mathbf{S}_{3D}^k(\mathbf{u})$ les corresponde el mismo valor de la constante de normalización m , dado por

$$\begin{aligned} m_k &= \int_{VS} \rho \left(y^2 \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) + \sin^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) dv = \\ &= \int_{VS} \rho \left(z^2 \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) + \sin^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) dv \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por tanto, m_k puede calcularse como

$$m_k = \int_0^L \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \rho \left(y^2 \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) + \sin^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) dz dy dx \quad (5.20)$$

Recordando la definición de g_k introducida en el capítulo 2, que puede calcularse mediante (2.95) y que a continuación reproducimos,

$$g_k = \frac{(k\pi)^2}{\lambda^2 + (k\pi)^2} \quad (5.21)$$

la integral anterior vale

$$m_k = \frac{2\rho L^3 g_k}{(g_k - 1)^2 \pi k^2} \quad (5.22)$$

por lo que el bloque k -ésimo de Φ es

$$\Phi^k(\mathbf{u}) = \frac{(g_k - 1)k\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\rho L^3 g_k}} \begin{pmatrix} -y \frac{k\pi}{L} \cos \left(k\pi \frac{x}{L} \right) & -z \frac{k\pi}{L} \cos \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \\ \sin \left(k\pi \frac{x}{L} \right) & 0 \\ 0 & \sin \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, N \quad (5.23)$$

5.4. Obtención analítica de los términos de las ecuaciones

Los métodos desarrollados en los capítulos 3 y 4 para obtener las ecuaciones del movimiento (dadas por (3.36) en coordenadas lagrangianas y por (4.101) en coordenadas modales mixtas) suponen que son conocidas las formas modales y las frecuencias propias del sistema no rotatorio. Las primeras han sido adaptadas en el apartado anterior a partir de las obtenidas en el capítulo 2. Así mismo, las segundas (más bien las pulsaciones propias al cuadrado) estarán dadas por (2.87).

En las ecuaciones (3.36) y (4.101), la matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son las pulsaciones propias al cuadrado, como la obtenida en el capítulo 2 (ecuación (2.89)) que a continuación reproducimos

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_N^2 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

La matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ está dada por (4.61) y se calcula como

$$\tilde{\mathbf{G}} = \int_{\text{VS}} \rho \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})^T}{\partial u_i} (\mathbf{J} \mathbf{u})_i \right) \Phi(\mathbf{u}) \, dv \quad (5.25)$$

donde queda claro que $u_1 = x$, $u_2 = y$ y $u_3 = z$, y siendo, para el bloque k -ésimo ($k = 1, \dots, N$)

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u})^k}{\partial y} = \frac{(g_k - 1) k \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \rho L^3 g_k} \begin{pmatrix} -\frac{k\pi}{L} \cos(k\pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u})^k}{\partial z} = \frac{(g_k - 1) k \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \rho L^3 g_k} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k\pi}{L} \cos(k\pi \frac{x}{L}) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{J} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

por lo que, realizando el producto en el integrando por bloques

$$\begin{aligned} & \rho \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi^k(\mathbf{u})^T}{\partial u_i} (\mathbf{J} \mathbf{u})_i \right) \Phi^j(\mathbf{u}) = \quad (5.29) \\ & = \frac{(g_k - 1)^2 k^2 \pi}{2 L^3 g_k} \begin{pmatrix} z \frac{k\pi}{L} \cos(k\pi \frac{x}{L}) & 0 & 0 \\ -y \frac{k\pi}{L} \cos(k\pi \frac{x}{L}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \frac{j\pi}{L} \cos(j\pi \frac{x}{L}) & -z \frac{j\pi}{L} \cos(j\pi \frac{x}{L}) \\ \sin(j\pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & \sin(j\pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} = \\ & = \frac{(g_k - 1)^2 k^2 \pi}{2 L^3 g_k} \begin{pmatrix} -y z k j \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos(k\pi \frac{x}{L}) \cos(j\pi \frac{x}{L}) & -z^2 k j \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos(k\pi \frac{x}{L}) \cos(j\pi \frac{x}{L}) \\ y^2 k j \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos(k\pi \frac{x}{L}) \cos(j\pi \frac{x}{L}) & y z k j \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos(k\pi \frac{x}{L}) \cos(j\pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuya integración en el volumen proporciona

$$\tilde{\mathbf{G}}^{kj} = \begin{cases} g_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -g_k \mathbf{G} & \text{si } k = j \\ \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (5.30)$$

con $k, j = 1, \dots, N$.

Por otro lado, la matriz $\tilde{\mathbf{J}}$ está dada por (3.32) y se calcula como

$$\tilde{\mathbf{J}} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{J} \Phi \, dv \quad (5.31)$$

Como antes, realizando el producto en el integrando por bloques

$$\rho \Phi^{kT} \mathbf{J} \Phi^j = \frac{(g_k - 1)^2 k^2 \pi}{2 L^3 g_k} \begin{pmatrix} 0 & -\sin(k \pi \frac{x}{L}) \sin(j \pi \frac{x}{L}) \\ \sin(k \pi \frac{x}{L}) \sin(j \pi \frac{x}{L}) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

cuya integración en el volumen proporciona

$$\tilde{\mathbf{J}}^{kj} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -(1 - g_k) \\ 1 - g_k & 0 \end{pmatrix} = (1 - g_k) \mathbf{G} & \text{si } k = j \\ \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (5.33)$$

La matriz $\tilde{\mathbf{E}}$ está dada por (3.33) y se calcula como

$$\tilde{\mathbf{E}} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \Phi \, dv \quad (5.34)$$

realizando el producto en el integrando por bloques

$$\rho \Phi^{kT} \mathbf{E} \Phi^j = \frac{(g_k - 1)^2 k^2 \pi}{2 L^3 g_k} \begin{pmatrix} \sin(k \pi \frac{x}{L}) \sin(j \pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & \sin(k \pi \frac{x}{L}) \sin(j \pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

cuya integración en el volumen proporciona

$$\tilde{\mathbf{E}}^{kj} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - g_k & 0 \\ 0 & 1 - g_k \end{pmatrix} = (1 - g_k) \mathbf{I}_{2 \times 2} & \text{si } k = j \\ \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (5.36)$$

El vector $\tilde{\mathbf{L}}$ está dado por (3.34) y se calcula como

$$\tilde{\mathbf{L}} = \int_{\text{VS}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} \, dv \quad (5.37)$$

realizando el producto en el integrando por bloques

$$\rho \Phi^{kT} \mathbf{E} \mathbf{u} = \frac{(g_k - 1) k \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \rho L^3 g_k} \begin{pmatrix} y \sin(k \pi \frac{x}{L}) \\ z \sin(k \pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

cuya integración en el volumen proporciona

$$\tilde{\mathbf{L}}^k = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, N \quad (5.39)$$

La matriz $\tilde{\mathbf{C}}$ está dada por (3.33) y se calcula como

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{J}}^T - \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{G}}^T - \tilde{\mathbf{E}} \quad (5.40)$$

por lo que

$$\tilde{\mathbf{C}}^{kj} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -g_k & 0 \\ 0 & -g_k \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix} = -g_k \mathbf{I}_{2 \times 2} & \text{si } k = j \\ \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (5.41)$$

La matriz de transformación modal, \mathbf{B} , juega un papel fundamental en el desarrollo de la metodología mixta lagrangiana–euleriana. Sin embargo, no aparece explícitamente en los modelos, por lo que, en general, no es necesario calcularla. No obstante, para mostrar la equivalencia entre los modelos obtenidos lagrangiano y mixto procederemos a obtenerla. Calculemos en primer lugar $\Phi^k(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$. Puesto que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

será

$$\Phi^k(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \begin{pmatrix} -(y \cos \theta - z \sin \theta) \frac{k\pi}{L} \cos(k\pi \frac{x}{L}) & -(y \sin \theta + z \cos \theta) \frac{k\pi}{L} \cos(k\pi \frac{x}{L}) \\ \sin(k\pi \frac{x}{L}) & 0 \\ 0 & \sin(k\pi \frac{x}{L}) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

de forma que

$$\begin{aligned} (\Phi^k(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi^j(\mathbf{A}^T \mathbf{u}))_{11} &= \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 y^2 \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{m_k} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 y z \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \sin \theta \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} (\Phi^k(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi^j(\mathbf{A}^T \mathbf{u}))_{12} &= -\frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 y^2 \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \sin \theta + \\ &- \frac{1}{m_k} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 y z \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \cos \theta \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} (\Phi^k(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi^j(\mathbf{A}^T \mathbf{u}))_{21} &= \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 z^2 \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{m_k} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \sin \theta + \\ &+ \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 y z \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j\pi \frac{x}{L}\right) \cos \theta \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned}
(\Phi^k(\mathbf{u})^T \mathbf{A} \Phi^j(\mathbf{A}^T \mathbf{u}))_{22} &= \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 z^2 \cos\left(k \pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j \pi \frac{x}{L}\right) \cos \theta + \\
&+ \frac{1}{m_k} \sin\left(k \pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(j \pi \frac{x}{L}\right) \cos \theta + \\
&- \frac{1}{m_k L^2} k j \pi^2 y z \cos\left(k \pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(j \pi \frac{x}{L}\right) \sin \theta
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Multiplicando las anteriores por la densidad, ρ , e integrando en el volumen se obtiene

$$\mathbf{B}^{kj}(\theta) = \int_{\mathbf{VS}} \rho \Phi^k(\mathbf{u})^T \mathbf{A}(\theta) \Phi^j(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) dV = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} & \text{si } k = j \\ \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \end{cases} \tag{5.48}$$

tal como era de esperar por el teorema 4.11.

5.5. Ecuaciones del movimiento

Para que las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante las diferentes formulaciones sean comparables entre sí, el sistema de fuerzas aplicado debe ser compatible con el modelo unidimensional. Debe ser un sistema equivalente a una distribución de fuerzas sobre la línea neutra, de forma que $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(x)$. Veamos la relación existente entre \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_p y \mathbf{Q}_q . Recordemos que, en modelo para vigas, el bloque k -ésimo de la fuerza generalizada es

$$\mathbf{Q}^k = \int_{\mathbf{VS}} \Phi^{kT} \mathbf{F} dV \chi = \tilde{\mathbf{F}}^k \chi \tag{5.49}$$

que coincide con la definición de \mathbf{Q}_q^k en el modelo mixto. Por otro lado, en el modelo lagrangiano, las fuerzas también deben estar descritas en el sistema fijo, aunque para coordenadas en el sistema del cuerpo, por lo que si $\mathbf{F}(x)$ está definida para coordenadas del sistema fijo, será $\mathbf{F}(x')$ la que deba utilizarse. Ahora bien, como $x' = x$ puede escribirse

$$\mathbf{Q}_p = \int_{\mathbf{VS}} \Phi^{kT} \mathbf{A}^T \mathbf{F} dV \chi = \mathbf{B}^k \tilde{\mathbf{F}}^k \chi \tag{5.50}$$

donde se ha renombrado \mathbf{B}^{kk} como \mathbf{B}^k .

Para realizar correctamente la comparación entre las ecuaciones del movimiento es necesario tener presente también las distintas descripciones cinemáticas asociadas. Por ello, en lo que sigue se muestran aquéllas acompañadas de éstas.

La ecuación del movimiento obtenida mediante el método de síntesis modal lagrangiana (4.105) resulta, sustituyendo los valores de las matrices obtenidos en el

apartado anterior,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}^k + 2 \Omega (1 - g_k) \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}}^k + (\omega_k^2 - \Omega^2 (1 - g_k)) \mathbf{p}^k &= \mathbf{B}^{kT} \tilde{\mathbf{F}}^k \boldsymbol{\chi} & k = 1, \dots, N \\ \mathbf{s}(\mathbf{u}, t) &= \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{B}(t) \mathbf{p}(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Por otro lado, la aplicación del método modal mixto proporciona la ecuación (4.101), que resulta

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}^k - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + (\omega_k^2 - \Omega^2 g_k) \mathbf{q}^k &= \tilde{\mathbf{F}}^k \boldsymbol{\chi} & k = 1, \dots, N \\ \mathbf{s}(\mathbf{u}, t) &= \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Estas ecuaciones deben ser comparadas con la ecuación (2.60), que a continuación reproducimos, obtenida para modelos unidimensionales y válida sólo para puntos de la fibra neutra

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}^k - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + \omega_k^2 \mathbf{q}^k &= \tilde{\mathbf{F}}^k \boldsymbol{\chi} & k = 1, \dots, N \\ \mathbf{s}(\mathbf{u}, t) &= \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t) & \text{para } \mathbf{u} = (x \ 0 \ 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Las ecuaciones del método lagrangiano (5.51) y del mixto (5.52) no son directamente comparables entre sí por estar escritas en coordenadas generalizadas distintas. En el capítulo 4 se demostró la equivalencia de ambos enfoques. No obstante, en el apartado 5.6 se comprobará para este caso particular .

Por otro lado, la ecuación obtenida mediante el método unidimensional (5.53) está escrita en las mismas coordenadas generalizadas que la del método mixto (5.52). Se observa una discrepancia evidente entre ambas ecuaciones. El término $-\Omega^2 g_k \mathbf{q}^k$ no aparece en el modelo para vigas y sí en el de sólidos. Este término corresponde a la *fuerza*¹ generalizada de la aceleración centrípeta debida a la rotación. La diferencia en las ecuaciones es consecuencia del distinto modelado que se hace del sistema.

En el modelo unidimensional, la rotación de la sección debida a la flexión se modela mediante los ángulos girados. Los desplazamientos debidos a este giro de los puntos de la sección que no pertenecen a la fibra neutra no se calculan (de hecho, no existen tales puntos en el modelo) y todos los términos de la ecuación relacionados con la rotación de la sección se obtienen a partir de los ángulos girados.

En cambio, en los modelos sólidos, la rotación de la sección se modela mediante los desplazamientos de los puntos de ésta. Al considerar un comportamiento lineal del cuerpo elástico, estos desplazamientos describen trayectorias rectas, no arcos.

La diferencia entre las ecuaciones se debe, pues, a que corresponden a modelos no comparables. Es consecuencia de la linealización de las funciones de forma, como adelantábamos en el apartado 5.2 y como demostraremos en el apartado 5.7. Por

¹Entendida como fuerza de inercia.

otro lado, esta linealización es inevitable si se pretende modelar el cuerpo con un comportamiento elástico lineal. El modelo unidimensional es un modelo lineal más preciso que los de sólidos, en el sentido de que aproxima mejor el comportamiento de una viga de Rayleigh que, sin la hipótesis de pequeños desplazamientos, es no lineal. Sin embargo, sólo casos muy sencillos permiten una resolución analítica como la desarrollada para obtenerlo. Los modelos tridimensionales, en cambio, son generales. El método es aplicable a cualquier sólido de revolución con cualesquiera condiciones de contorno.

5.6. Equivalencia entre los modelos lagrangiano y mixto

Comprobemos, a modo de ejemplo, que (5.51) y (5.52) son equivalentes. Derivando (5.48) respecto del tiempo

$$\dot{\mathbf{B}}^k = \Omega \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \ddot{\mathbf{B}}^k = \Omega^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = -\Omega^2 \mathbf{B} \quad (5.54)$$

de forma que

$$\mathbf{B}^k \dot{\mathbf{B}}^{kT} = \Omega \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\Omega \mathbf{G} \quad (5.55)$$

$$\mathbf{B}^k \ddot{\mathbf{B}}^{kT} = -\Omega^2 \mathbf{B}^k \mathbf{B}^{kT} = -\Omega^2 \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (5.56)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^k \mathbf{G} \mathbf{B}^{kT} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^k \mathbf{G} \dot{\mathbf{B}}^{kT} &= \Omega \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} = \Omega \\ &= \Omega \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= \Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Sustituyendo $\mathbf{p} = \mathbf{B}^T \mathbf{q}$ y sus derivadas en (5.51) premultiplicada por \mathbf{B} , se obtiene,

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}^k \left(\ddot{\mathbf{B}}^{kT} \mathbf{q}^k + 2 \dot{\mathbf{B}}^{kT} \dot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{B}^{kT} \ddot{\mathbf{q}}^k \right) + \\ & + 2 \Omega (1 - g_k) \mathbf{B}^k \mathbf{G} \left(\dot{\mathbf{B}}^{kT} \mathbf{q}^k + \mathbf{B}^{kT} \dot{\mathbf{q}}^k \right) + \\ & + (\omega_k^2 - \Omega^2 (1 - g_k)) \mathbf{B}^k \mathbf{B}^{kT} \mathbf{q}^k = \\ & = \mathbf{B}^k \mathbf{B}^{kT} \tilde{\mathbf{F}}^k \boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (5.59)$$

que teniendo en cuenta (5.55), (5.56), (5.57) y (5.58) queda

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 \mathbf{q}^k - 2 \Omega \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + \ddot{\mathbf{q}}^k + \\ & + 2 \Omega (1 - g_k) (\Omega \mathbf{q}^k + \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k) + \\ & + (\omega_k^2 - \Omega^2 (1 - g_k)) \mathbf{q}^k = \\ & = \tilde{\mathbf{F}}^k \boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Es decir

$$\ddot{\mathbf{q}}^k - 2 \Omega g_k \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}^k + (\omega_k^2 - \Omega^2 g_k) \mathbf{q}^k = \tilde{\mathbf{F}}^k \boldsymbol{\chi} \quad (5.61)$$

coincidiendo con la primera línea de (5.52).

5.7. Limitación de los modelos lineales

Los tres métodos presentados, el lagrangiano, el mixto y el de vigas, están planteados para sistemas lineales, por lo que es necesario linealizar las expresiones en algún momento del desarrollo. Sin embargo, hay una diferencia fundamental en la linealización producida en los modelos para sólidos y la realizada en el modelo para vigas. En éste último, se obtienen las ecuaciones del movimiento del sistema rotatorio y se linealizan *antes* de calcular los modos del sistema. En cambio, en los métodos para sólidos, se parte de los modos obtenidos en el sistema no rotatorio, ya linealizado, y *después* se obtiene la ecuación correspondiente al sistema rotatorio. Esto provoca diferencias en los términos de las ecuaciones obtenidas. Este hecho es intrínseco a la síntesis modal lineal y aparece en todos los postprocesos que se realicen empleando los modos de un sistema linealizado. Sin embargo, emplear la superposición modal lleva implícita la hipótesis de pequeños desplazamientos, necesaria para linealizar las expresiones, por lo que, para vibraciones de amplitud suficientemente pequeña, esta diferencia entre los modelos no es significativa.

La ecuación del movimiento del modelo unidimensional, (5.53), ha sido obtenida en el capítulo 2 linealizando la ecuación no lineal de la viga de Rayleigh rotatoria. Sus modos propios, por ser una ecuación lineal, son desplazamientos lineales: todos los puntos se trasladan según trayectorias rectas. De esta forma, el desplazamiento de cualquier punto en una deformada concreta, calculado mediante superposición modal, será una traslación rectilínea. Este desplazamiento se produce según la tangente a la

trayectoria que seguiría el punto en una solución no lineal, y es válido para pequeños desplazamientos.

En cambio, la ecuación (5.52) se calcula empleando los modos propios de (5.53), lineales, lo que conduce a la diferencia en la ecuación obtenida.

Como se ha visto, los modelos lagrangiano y mixto son equivalentes. La discrepancia se encuentra respecto al modelo unidimensional. La diferencia se produce al calcular los elementos de $\tilde{\mathbf{C}}$ en la ecuación (4.101). Se obtiene $-g_k \mathbf{I}_{2 \times 2}$ ($k = 1, \dots, N$), en lugar de anularse. Para interpretar este término físicamente, imaginemos que las fuerzas externas son tales que mantienen el sistema en una configuración en la que son nulos todos los elementos en $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ en todo instante. Eso significa que el sistema ocupa permanentemente la misma posición en el espacio, rotando cada sección en torno a la fibra neutra, que permanece inmóvil. El trabajo realizado por las fuerzas centrípetas al evolucionar el sistema (virtualmente) desde la configuración no deformada, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, hasta la actual, \mathbf{q} , se puede calcular como²

$$W_c = \Omega^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{L}} \right) \quad (5.62)$$

de forma que el elemento $\tilde{C}_{\ell m}$ se obtiene mediante

$$\tilde{C}_{\ell m} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 W_c}{\partial q_\ell \partial q_m} \quad (5.63)$$

Concretamente, los cuatro elementos del bloque k -ésimo, $\tilde{\mathbf{C}}^k = \tilde{\mathbf{C}}^{kk}$, se calculan como

$$\tilde{\mathbf{C}}^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 W_c}{\partial q_{2k-1}^2} & \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 W_c}{\partial q_{2k-1} \partial q_{2k}} \\ \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 W_c}{\partial q_{2k} \partial q_{2k-1}} & \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 W_c}{\partial q_{2k}^2} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

Volvamos, pues, a calcular $\tilde{\mathbf{C}}$ por este método. El vector $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}$, dado por (5.5), tendrá por componentes (recuérdese la figura 5.5 de la página 100)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{s}(\mathbf{u}) - \mathbf{s}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_{0f} = \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_f \\ y_{0f} \\ z_{0f} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y_{0f} \\ z_{0f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.65)$$

con

$$x_f = -y \frac{\partial y_{0f}}{\partial x} - z \frac{\partial z_{0f}}{\partial x} \quad (5.66)$$

Es importante destacar que se ha tomado la versión de \mathbf{u}_f linealizada, dada por (5.10), por lo que las componentes $\mathbf{r}_{\mathbf{u}}$ obtenidas son una linealización de las dadas por (5.5).

²Integrando el término $\Omega^2 (\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{L}})$ de la ecuación del movimiento (4.101).

El movimiento que describirá la partícula que en el instante t se encuentra en $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ será una rotación, con velocidad angular Ω , en torno a la fibra neutra que, por las hipótesis de viga de Rayleigh, será normal al vector $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}$, por lo que las componentes de la fuerza por unidad de volumen ($\frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial v}$) que actuará sobre ella (fuerza centrípeta) serán (véase la figura 5.6, en la página 113, donde se representa la fuerza centrífuga, opuesta a la centrípeta, por claridad de la imagen)

$$\frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial v} = -\rho \Omega^2 \mathbf{r}_{\mathbf{u}} \quad (5.67)$$

El desplazamiento diferencial virtual para pasar de la configuración no deformada a la deformada es

$$d\mathbf{u}_f = \begin{pmatrix} dx_f \\ dy_f \\ dz_f \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

Por lo que, para la fuerza centrípeta en el punto $\mathbf{s}(\mathbf{u})$, el trabajo diferencial por unidad de volumen, en ese cambio de configuración es

$$\begin{aligned} d\left(\frac{dW_c}{dv}\right) &= \frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial v} d\mathbf{u}_f = -\rho \Omega^2 \mathbf{r}_{\mathbf{u}}^T d\mathbf{u}_f = \\ &= -\rho \Omega^2 (x_f dx_f + y_f dy_f + z_f dz_f) \end{aligned} \quad (5.69)$$

Así, el trabajo por unidad de volumen desde la posición no deformada (en la que es nulo \mathbf{u}_f) hasta la configuración actual es

$$\frac{dW_c}{dv} = -\rho \Omega^2 \left(\frac{1}{2} x_f^2 + y_f y_f + z_f z_f \right) \quad (5.70)$$

Puesto que

$$y_f = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_k}} q_{2k-1} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \quad (5.71)$$

$$z_f = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_k}} q_{2k} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \quad (5.72)$$

será también, por (5.66),

$$x_f = \left(-y \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_k}} q_{2k-1} \frac{k\pi}{L} \cos\left(k\pi \frac{x}{L}\right) - z \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{m_k}} q_{2k} \frac{k\pi}{L} \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right) \right) \quad (5.73)$$

Por otro lado,

$$\tilde{C}_{\ell m} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 W_c}{\partial q_\ell \partial q_m} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial q_\ell \partial q_m} \int_{VS} \frac{dW_c}{dv} dv = \int_{VS} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial q_\ell \partial q_m} \frac{dW_c}{dv} dv \quad (5.74)$$

de manera que los cuatro elementos del integrando que dan lugar al bloque $\tilde{\mathbf{C}}^k$ son

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial q_{2k-1}^2} \frac{dW_c}{dv} = -\frac{\rho}{m_k} \left(y^2 \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) \quad (5.75)$$

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial q_{2k-1} \partial q_{2k}} \frac{dW_c}{dv} = -\frac{\rho}{m_k} \left(yz \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) \quad (5.76)$$

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial q_{2k} \partial q_{2k-1}} \frac{dW_c}{dv} = -\frac{\rho}{m_k} \left(yz \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) \quad (5.77)$$

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial q_{2k}^2} \frac{dW_c}{dv} = -\frac{\rho}{m_k} \left(z^2 \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(k\pi \frac{x}{L} \right) \right) \quad (5.78)$$

Integrando las expresiones anteriores en el volumen se llega, por supuesto, a

$$\tilde{\mathbf{C}}^k = -g_k \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (5.79)$$

que es la misma expresión (5.41) y es distinta de cero. Sin embargo, cada sección transversal del sólido se mueve como sólido rígido, por las hipótesis de viga de Rayleigh, por lo que las fuerzas sobre cada una son un sistema de resultante nula (por la simetría de revolución) que sufre un movimiento de sólido rígido (el de la sección). De esta forma, el trabajo de las fuerzas sobre cada sección (y por ende, su integración a lo largo de la longitud) debería ser nulo.

La causa de que no lo sea es la linealización producida en la expresión (5.8) para obtener (5.10). Podemos calcular el trabajo empleando la primera, comprobando que, efectivamente, es nulo y por ello también lo es $\tilde{\mathbf{C}}$. Sin embargo, en un caso más general, en el que la sección sea deformable y estas fuerzas desarrollen un trabajo no nulo, esta forma de proceder no permite determinar $\tilde{\mathbf{C}}$.

Partiendo de (5.8), el desplazamiento diferencial vendrá dado por

$$\begin{aligned} d\mathbf{u}_f &= \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial \varphi} d\varphi = \\ &= \begin{pmatrix} y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi \\ 0 \\ y \cos \psi \sin \varphi - z \sin \psi \end{pmatrix} d\psi + \begin{pmatrix} -y \cos \psi \cos \varphi \\ -y \sin \varphi \\ y \sin \psi \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi \end{aligned} \quad (5.80)$$

Y tomando (5.5), en lugar de (5.65), la fuerza centrípeta por unidad de volumen es

$$\frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial v} = -\rho \Omega^2 \mathbf{r}_u = -\rho \Omega^2 \begin{pmatrix} -y \cos \psi \sin \varphi + z \sin \psi \\ y \cos \varphi \\ y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

Con esto, el trabajo diferencial por unidad de volumen se calcula como

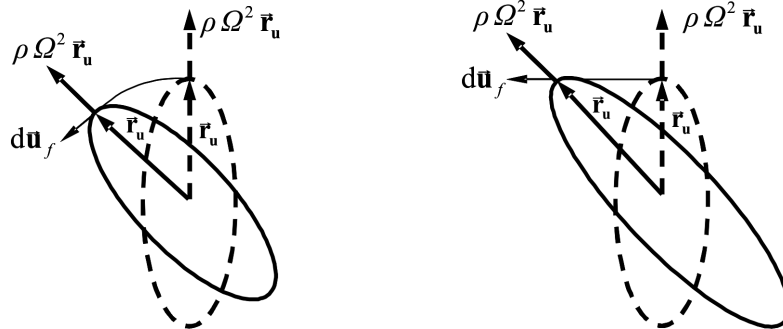
$$d \left(\frac{dW_c}{dv} \right) = -\rho \Omega^2 \left(\mathbf{r}_u \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial \psi} d\psi + \mathbf{r}_u \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial \varphi} d\varphi \right) \quad (5.82)$$

resultando

$$d\left(\frac{dW_c}{dv}\right) = 0 \quad (5.83)$$

como no podía ser de otra manera, al ser la fuerza siempre normal a la trayectoria. De la anterior y de (5.63) se sigue que $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$.

La simetría de la distribución de la fuerza centrípeta sobre las partículas de la sección hace que el trabajo desarrollado en cualquier traslación virtual sea nulo. Esto debería ser cierto también ante rotaciones. En cambio, no sucede así debido a la linealización de los desplazamientos realizada. En la figura 5.6 se muestra con trazo discontinuo una sección en la no deformada, y con trazo continuo, la misma sección con una rotación debida a la flexión (obviando la traslación asociada para no complicar innecesariamente la figura). Se ha representado la fuerza centrífuga, opuesta a la centrípeta, por claridad de la imagen. En el modelo no lineal, (a), la fuerza centrífuga, $\rho \Omega^2 \mathbf{r}_u$, que aparece sobre una partícula y el desplazamiento diferencial virtual debido a la rotación de la flexión, $d\mathbf{u}_f$, son siempre normales, por lo que no se produce trabajo. En cambio, en el modelo linealizado, (b), estos vectores sólo son normales en la no deformada. La integración del trabajo de las fuerzas centrífugas elementales en toda la superficie de la sección conlleva un trabajo neto no nulo.



(a) La tangente a la trayectoria curvilínea descrita por un punto al rotar la sección en la flexión es siempre normal a la fuerza centrífuga. (b) La linealización de la trayectoria hace que ésta y al fuerza centrífuga dejen de ser normales.

Figura 5.6. Consecuencias de la linealización de la rotación en el trabajo virtual de la fuerza centrífuga.

Considerando los desplazamientos no lineales, es posible determinar el trabajo con exactitud, sin embargo, precisamente por no ser lineales, no es posible describirlos mediante una superposición modal.

Para otro sistema, con secciones no rígidas, el anterior diferencial de trabajo podría no ser nulo. Sin embargo, no podríamos emplearlo para determinar una matriz con las propiedades de $\tilde{\mathbf{C}}$. De hecho, en ese caso no existe una matriz que relacione los desplazamientos con las fuerzas centrípetas por no haber una relación lineal entre

ellos. Esta es una limitación general de todos los modelos basados en la síntesis modal lineal, no ya de los métodos aquí mostrados.

Por lo tanto, los modelos tienen un límite de validez por encima del cual los resultados no son aceptables. Más allá de este límite, debe abandonarse la hipótesis de pequeños desplazamientos y recurrir a modelos no lineales. Mostraremos a continuación que el ámbito de aplicación de esta hipótesis es más reducido en sistemas rotatorios que en los no rotatorios.

En el modelo unidimensional, el coeficiente de \mathbf{q} es ω_k^2 , mientras que en el planteamiento en coordenadas modales mixtas es $(\omega_k^2 - \Omega^2 g_k)$. Tomando el primero como referencia, el error relativo entre ambos, en valor absoluto, es

$$|\varepsilon_k| = \left| \frac{(\omega_k^2 - \Omega^2 g_k) - \omega_k^2}{\omega_k^2} \right| = \frac{\Omega^2 g_k}{\omega_k^2} \quad (5.84)$$

Teniendo en cuenta que según la expresión (2.95) es

$$g_k = \frac{(k \pi)^2}{\lambda^2 + (k \pi)^2} \quad (5.85)$$

se tiene que g_k está acotado entre cero y uno por lo que

$$|\varepsilon_k| < \frac{\Omega^2}{\omega_k^2} \quad (5.86)$$

y, por tanto, a una misma velocidad angular, cuanto mayor es el índice del modo (mayor es ω_k) menor es el error, no siendo importante para modos de alta frecuencia, ni para cualquier modo a velocidades no comparables con la pulsación propia.

Para vigas esbeltas, es $g_k \ll 1$ por lo que

$$|\varepsilon_k| \ll \frac{\Omega^2}{\omega_k^2} \quad (5.87)$$

Se concluye, pues, que para vigas esbeltas, o velocidades angulares no comparables con la pulsación propia, los modelos tridimensionales proporcionan resultados similares a los del unidimensional, por lo que la validez de la hipótesis de pequeños desplazamientos es la misma. Sin embargo, el error es proporcional al cuadrado de la velocidad angular. Esto lleva a que, fijado un error admisible en los resultados, al modelar el sistema rotatorio se deba abandonar dicha hipótesis antes (con desplazamientos menores) que el caso del sistema no rotatorio.

La superposición modal lineal puede considerarse como el primer término (el lineal) de un desarrollo en serie polinómica de la deformación, dando lugar a la técnica conocida como modos no lineales (*nonlinear normal modes*) si se incluyen más términos [5, 6, 69–71]. Queda fuera del alcance de esta Tesis, aunque es un posible desarrollo futuro, emplear modos no lineales en la síntesis modal mixta lagrangiana–euleriana para superar esta limitación.

5.8. Conclusiones

Se han empleado las metodologías desarrolladas mediante síntesis modal mixta lagrangiana–euleriana y mediante síntesis modal lagrangiana para obtener el modelo matemático correspondiente al modelo analítico de un cilindro biarticulado con comportamiento de viga de Rayleigh.

Se ha mostrado la equivalencia entre los planteamientos lagrangiano y mixto. Las ecuaciones del movimiento obtenidas se han comparado con la desarrollada en el capítulo 2 encontrando una discrepancia debida a la linealidad de los modelos tridimensionales, lo que pone de manifiesto una limitación de los modelos lineales para caracterizar el comportamiento de sistemas rotatorios. Esta limitación es especialmente crítica en sistemas poco esbeltos cuando la velocidad de rotación es muy superior a la primera pulsación propia. Por ello, se propone una futura línea de investigación para implementar la síntesis modal de componentes empleando modos no lineales.

Capítulo 6

Método computacional

Objeto del capítulo:

En este capítulo se describe la formulación mediante el Método de los Elementos Finitos de los términos de las ecuaciones del movimiento, tanto de la desarrollada en esta Tesis para cuerpos de revolución (en coordenadas modales mixtas) como de la correspondiente a sólidos generales (en coordenadas modales lagrangianas). Se aplica a modelos de cilindros de distinta esbeltez y se comparan los términos de las ecuaciones con los obtenidos analíticamente en el capítulo anterior.

6.1. Introducción

Sólo algunos sistemas sencillos, como el presentado en el capítulo 5, permiten un tratamiento analítico. El análisis modal de estructuras generales se realiza habitualmente mediante algún método numérico, entre los cuales, el más utilizado en la industria es el Método de los Elementos Finitos (MEF).

En este capítulo se presentan las bases de la interpolación en el MEF y se obtiene la formulación de las matrices involucradas en la ecuación del movimiento en coordenadas modales, tanto lagrangianas como mixtas.

A modo de ejemplo, se calculan estas matrices para una barra cilíndrica biarticulada y se comparan con las formuladas analíticamente en el capítulo 5.

Hasta ahora, se ha trabajado con un modelo de viga biarticulada por ser el de solución analítica más sencilla, como se vio en el capítulo 2. Sin embargo, precisamente por su sencillez, no presenta algunos efectos interesantes. Con objeto de mostrarlos, se obtienen también, mediante elementos finitos, las matrices de la barra libre.

6.2. Interpolación en el MEF

El Método de los Elementos Finitos se basa en discretizar el dominio de definición del sistema en una serie de puntos, llamados nodos, siendo las incógnitas del problema a resolver el valor de la función incógnita en los nodos. El dominio se divide en un conjunto de subdominios (los elementos finitos) definidos, cada uno, por los nodos que conecta. Para cada elemento, se define localmente una función de forma, en general polinómica, que aproxima la función incógnita dentro del elemento a partir de los valores de la misma en los nodos (interpolación nodal).

Las ecuaciones de comportamiento aproximadas pueden calcularse mediante ensamblado de las ecuaciones de comportamiento de cada elemento finito. Esto es una gran ventaja del método, ya que permite realizar gran parte de los cálculos de forma sistematizada.

Si consideramos un elemento con n nodos, y escribimos los valores de la función incógnita en cada uno de ellos, Γ_j , concatenados uno tras otro, en un vector columna Γ_e (para el elemento e -ésimo), en general, la interpolación dentro de un elemento se podrá escribir como

$$\Gamma(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n N_{ej}(\mathbf{u}) \Gamma_j = \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \Gamma_e \quad (6.1)$$

siendo N_{ej} la j -ésima función de forma del elemento e -ésimo, y \mathbf{N}_e la matriz siguiente

$$\mathbf{N}_e = \begin{pmatrix} N_{e1} & 0 & 0 & \cdots & N_{en} & 0 & 0 \\ 0 & N_{e1} & 0 & \cdots & 0 & N_{en} & 0 \\ 0 & 0 & N_{e1} & \cdots & 0 & 0 & N_{en} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Los programas de elementos finitos habitualmente almacenan los desplazamientos modales en una matriz Φ_{EF} cuyas columnas contienen, concatenados, los valores que toma $\Phi(\mathbf{u})$ en cada nodo, es decir

$$\Phi_{EF} = \begin{pmatrix} \Phi^1(\mathbf{u}_1) & \Phi^2(\mathbf{u}_1) & \cdots & \Phi^j(\mathbf{u}_1) & \cdots & \Phi^N(\mathbf{u}_1) \\ \Phi^1(\mathbf{u}_2) & \Phi^2(\mathbf{u}_2) & \cdots & \Phi^j(\mathbf{u}_2) & \cdots & \Phi^N(\mathbf{u}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^1(\mathbf{u}_k) & \Phi^2(\mathbf{u}_k) & \cdots & \Phi^j(\mathbf{u}_k) & \cdots & \Phi^N(\mathbf{u}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^1(\mathbf{u}_{N_n}) & \Phi^2(\mathbf{u}_{N_n}) & \cdots & \Phi^j(\mathbf{u}_{N_n}) & \cdots & \Phi^N(\mathbf{u}_{N_n}) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

donde $\Phi^j(\mathbf{u}_k)$ ($j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, N_n$) es el valor que toma el j -ésimo modo en el k -ésimo nodo, de coordenadas \mathbf{u}_k , siendo N el número de modos en Φ y N_n el número total de nodos.

Análogamente, almacenan como columnas de una matriz Φ_e los valores que toma $\Phi(\mathbf{u})$ en cada nodo del elemento e -ésimo, concatenados.

Es importante resaltar que, mientras que $\Phi(\mathbf{u})$ es una matriz de funciones, Φ_{EF} y Φ_e son matrices numéricas (y, por tanto, constantes).

La matriz $\Phi(\mathbf{u})$ se podrá aproximar en cada elemento, según (6.1), como

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \Phi_e \quad (6.4)$$

6.3. Formulación mediante el MEF

La matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ está formada por los autovalores (pulsaciones propias al cuadrado) del sistema no rotatorio, y es calculada por los programas comerciales de elementos finitos de forma habitual. Nos centraremos aquí en cómo obtener la matrices que estos programas no suministran.

Obtendremos en primer lugar la formulación computacional de la matriz $\tilde{\mathbf{J}}$. Esta matriz está definida por (3.32), que reproducimos a continuación

$$\tilde{\mathbf{J}} = \int_{VS} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) dv \quad (6.5)$$

Si el volumen del sólido se ha dividido en subdominios, definidos por cada elemento, la integral podrá realizarse como la suma de la correspondiente a cada uno de ellos.

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \rho \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) dv \quad (6.6)$$

siendo N_e el número de elementos y V_e el volumen del e -ésimo.

Sustituyendo Φ por su valor interpolado,

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \rho \Phi_e^T \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \Phi_e \, dv \quad (6.7)$$

Como Φ_e es constante

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sum_{e=1}^{N_e} \Phi_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \, dv \Phi_e \quad (6.8)$$

Definamos ahora la matriz de elemento $\tilde{\mathbf{J}}_e$ como

$$\tilde{\mathbf{J}}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T \mathbf{J} \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \, dv \quad (6.9)$$

de forma que

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sum_{e=1}^{N_e} \Phi_e^T \tilde{\mathbf{J}}_e \Phi_e \quad (6.10)$$

Si la matriz $\tilde{\mathbf{J}}_e$ la suponemos expandida al tamaño global del problema, rellenando con ceros las posiciones correspondientes a grados de libertad que no conecta el elemento, podemos reescribir la anterior como

$$\tilde{\mathbf{J}} = \Phi_{EF}^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{J}}_e \right) \Phi_{EF} \quad (6.11)$$

donde el sumatorio puede entenderse como ensamblado de matrices de elemento por la adición de coeficientes que se solapan con respecto a la numeración de los grados de libertad globales.

Procediendo de manera análoga, podemos definir las siguientes matrices de elemento

$$\tilde{\mathbf{G}}_e = \int_{V_e} \rho \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T}{\partial u_i} (\mathbf{J} \mathbf{u})_i \right) \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \, dv \quad (6.12)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{N}_e(\mathbf{u}) \, dv \quad (6.13)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T \mathbf{F}(\mathbf{u}) \, dv \quad (6.14)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{u} \, dv \quad (6.15)$$

de forma que se tiene

$$\tilde{\mathbf{G}} = \Phi_{EF}^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{G}}_e \right) \Phi_{EF} \quad (6.16)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \Phi_{EF}^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{E}}_e \right) \Phi_{EF} \quad (6.17)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \Phi_{EF}^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{F}}_e \right) \quad (6.18)$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \Phi_{EF}^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{L}}_e \right) \quad (6.19)$$

Finalmente, se obtiene la matriz $\tilde{\mathbf{C}}$ directamente, a partir de su definición dada por la expresión (4.88)

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{J}}^T - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^T - \tilde{\mathbf{E}} \quad (6.20)$$

6.4. Modelo de un cilindro biarticulado

Consideremos dos sólidos cilíndricos en rotación sobre su eje longitudinal, de radios $R_1 = 0.1$ m y $R_2 = 0.05$ m respectivamente, con las características dadas en la tabla 6.1.

Longitud	$L = 1.5$ m
Módulo de Young	$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Densidad	$\rho = 7800$ kg m ⁻³

Tabla 6.1. *Características de los cilindros considerados.*

A continuación se presentan las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales mixtas del sólido rotatorio, para ambos radios, correspondientes a la condición de contorno articulado en ambos extremos. Las matrices se han calculado de forma analítica y por elementos finitos. En el cálculo analítico, se supone que el cilindro se comporta como una viga de Rayleigh, mientras que el modelo del MEF representa un sólido general con comportamiento elástico, lineal e isótropo. El objeto de estudiar dos radios diferentes es mostrar que existe una mayor concordancia entre las matrices obtenidas para el cilindro de radio menor ya que, en ese caso, el modelo del MEF tiene un comportamiento más cercano al de un viga de Rayleigh.

Los modelos de elementos finitos han sido desarrollados empleando el código comercial ANSYS [4], el cual también se ha empleado para obtener los modos propios del sistema no rotatorio y sus frecuencias propias. El cálculo de las matrices elementales correspondientes a la ecuación del movimiento y su ensamblado ha sido realizado con el programa de código abierto FEAP [80]. El proceso final (pre y postmultiplicación por la matriz de modos) se ha realizado mediante un programa propio.

En lo sucesivo, nos referiremos como *modos* a los autovectores (deformadas), no a los autovalores (frecuencias). Los subíndices de las variables harán referencia al índice de la frecuencia propia a la que están asociadas, no al índice de la deformada.

6.4.1. Modelado analítico

En el capítulo 5 se han obtenido los modos propios de un sólido tridimensional con comportamiento de viga de Rayleigh, dados por (5.23), y las matrices de la ecuación del movimiento $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}$, dadas por (5.24), (5.30) y (5.41) respectivamente. También se encontró que el vector $\tilde{\mathbf{L}}$ es nulo, según (5.39).

Recordemos que las pulsaciones propias se calculan, según (2.87), como

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k_k}{m_k}} \quad (6.21)$$

donde

$$m_k = \frac{1}{2} \rho A L \left(1 + (k \pi)^2 \frac{I}{A L^2} \right) \quad (6.22)$$

$$k_k = \frac{E I (k \pi)^4}{2 L^3} \quad (6.23)$$

y siendo, para una sección circular,

$$A = \pi R^2 \quad I = \frac{1}{4} \pi R^4 \quad (6.24)$$

Las correspondientes frecuencias propias se calculan como

$$f_k = \frac{\omega_k}{2 \pi} \quad (6.25)$$

Y las constantes g_k como

$$g_k = \frac{\rho I (k \pi)^2}{2 m_k L} = \frac{(k \pi)^2}{\lambda^2 + (k \pi)^2} \quad (6.26)$$

con, según (2.94),

$$\lambda = \sqrt{\frac{A L^2}{I}} = 2 \frac{L}{R} \quad (6.27)$$

Para el desarrollo de las ecuaciones, se han considerado los cuatro primeros modos de flexión en cada plano ($k = 1, \dots, 4$).

En la tabla 6.2 pueden verse los valores numéricos correspondientes al modelo analítico para radio $R_1 = 0.1$ m (esbeltez $\lambda = 30$), y en la tabla 6.3 para radio $R_2 = 0.05$ m ($\lambda = 60$).

En las matrices de la ecuación del movimiento, cada fila y cada columna está asociada a un modo. El acoplamiento entre varios de ellos viene reflejado mediante elementos no nulos en las intersecciones de sus filas y columnas. Para ambos radios,

$$f_1 = 180.136 \text{ Hz} \quad f_2 = 720.545 \text{ Hz} \quad f_3 = 1621.22 \text{ Hz} \quad f_4 = 2882.18 \text{ Hz}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= 1.28104 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_2 &= 2.04966 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_3 &= 1.03764 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_4 &= 3.27946 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$g_1 = 1.08473 \cdot 10^{-2} \quad g_2 = 4.20216 \cdot 10^{-2} \quad g_3 = 8.98302 \cdot 10^{-2} \quad g_4 = 1.49269 \cdot 10^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 \end{pmatrix}$$

Tabla 6.2. *Modelo analítico. Biarticulado. Radio $R_1 = 0.1 \text{ m}$.*

$$f_1 = 90.437 \text{ Hz} \quad f_2 = 361.747 \text{ Hz} \quad f_3 = 813.93 \text{ Hz} \quad f_4 = 1446.99 \text{ Hz}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= 3.22887 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_2 &= 5.16619 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_3 &= 2.61538 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_4 &= 8.26590 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$g_1 = 2.73406 \cdot 10^{-3} \quad g_2 = 1.08473 \cdot 10^{-2} \quad g_3 = 2.40799 \cdot 10^{-2} \quad g_4 = 4.20216 \cdot 10^{-2}$$

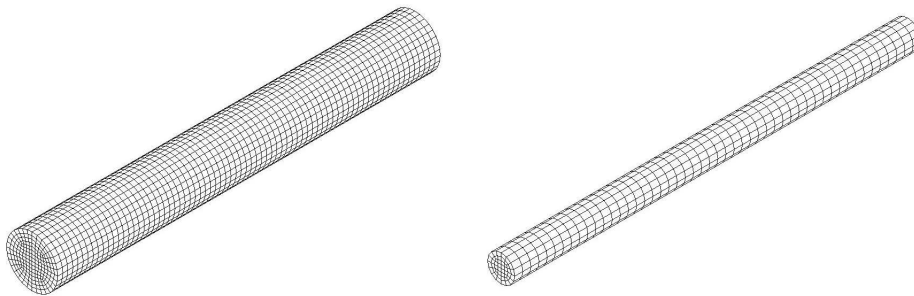
$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 \end{pmatrix}$$

Tabla 6.3. Modelo analítico. Biarticulado. Radio $R_2 = 0.05 \text{ m}$.

se aprecia que las matrices $\tilde{\mathbf{K}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}$, asociadas respectivamente a las fuerzas elásticas y centrípetas, son diagonales, por lo que no producen ningún tipo de acoplamiento. En cambio, la matriz giroscópica $\tilde{\mathbf{G}}$, que es antisimétrica, acopla sólo modos que son bases del mismo subespacio asociado a cada frecuencia. Más adelante comprobaremos que esto no es un resultado general, sino que es debido a la simplicidad del sistema estudiado. En casos más complejos aparecen otros tipos de acoplamientos.

6.4.2. Modelado mediante el MEF

Se han realizado sendos modelos de elementos finitos, mallados con elementos hexaédricos de ocho nodos, con un tamaño típico de 20 mm de lado. La figura 6.1 muestra las mallas para radio $R_1 = 0.1$ m (a) y $R_2 = 0.05$ m (b). En estos casos se ha considerado todo tipo de modos propios, no sólo los de flexión, y hasta incluir, al menos, cuatro de torsión y dos de respiración. Esto permitirá mostrar ciertos efectos asociados a los modos de multiplicidad uno.



(a) Radio $R_1 = 0.1$ m

(b) Radio $R_2 = 0.05$ m

Figura 6.1. *Mallas de elementos finitos de los cilindros.*

Puesto que la geometría del cuerpo es simétrica respecto de un plano transversal centrado en la longitud del mismo, todas las deformadas modales presentan una geometría simétrica o antisimétrica respecto del mismo plano.

Para el cilindro de radio $R_1 = 0.1$ m, puede verse en la tabla 6.4 sus frecuencias propias y multiplicidad, el tipo de modo a que corresponden y su simetría. Análogamente, la tabla 6.5 muestra la misma información para el cilindro de radio $R_2 = 0.05$ m.

El modelo para $R_1 = 0.1$ m incluye cinco frecuencias propias correspondientes a modos de flexión (índices 1, 2, 4, 7 y 9), cuatro de torsión (3, 6, 8 y 11) y dos de respiración (5 y 10). En el correspondiente a $R_2 = 0.05$ m, los modos de flexión

Índice	Frecuencia (Hz)	Multiplicidad	Tipo de modo	Simetría
1	176.880	2	1° de flexión	Simétrico
2	669.414	2	2° de flexión	Antisimétrico
3	1060.53	1	1° de torsión	Antisimétrico
4	1394.19	2	3° de flexión	Simétrico
5	1727.69	1	1° de respiración	Antisimétrico
6	2121.52	1	2° de torsión	Simétrico
7	2270.70	2	4° de flexión	Antisimétrico
8	3183.45	1	3° de torsión	Antisimétrico
9	3240.91	2	5° de flexión	Simétrico
10	3443.68	1	2° de respiración	Simétrico
11	4246.77	1	4° de torsión	Simétrico

Tabla 6.4. *Frecuencias propias. Modelo MEF. Biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

Índice	Frecuencia (Hz)	Multiplicidad	Tipo de modo	Simetría
1	89.0291	2	1° de flexión	Simétrico
2	351.396	2	2° de flexión	Antisimétrico
3	774.144	2	3° de flexión	Simétrico
4	1060.55	1	1° de torsión	Antisimétrico
5	1339.06	2	4° de flexión	Antisimétrico
6	1729.46	1	1° de respiración	Antisimétrico
7	2026.02	2	5° de flexión	Simétrico
8	2122.14	1	2° de torsión	Simétrico
9	2815.60	2	6° de flexión	Antisimétrico
10	3185.82	1	3° de torsión	Antisimétrico
11	3458.13	1	2° de respiración	Simétrico
12	3690.61	2	7° de flexión	Simétrico
13	4252.66	1	4° de torsión	Simétrico

Tabla 6.5. *Frecuencias propias. Modelo MEF. Biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

tienen frecuencias propias más bajas respecto a las de respiración y torsión, por lo que es necesario incluir mayor cantidad de modos. Los índices 1, 2, 3, 5, 7, 9 y 12 corresponden a los de flexión, el 4, 8, 10 y 13 a los de torsión y el 6 y el 11 a los de respiración.

Las matrices de la ecuación del movimiento obtenidas se muestran en las tablas 6.6 y 6.7 para $R_1 = 0.01$ m y en las tablas 6.8 y 6.9 para $R_2 = 0.05$ m.

Como puede apreciarse, las matrices $\tilde{\mathbf{K}}$ siguen siendo diagonales, por lo que no inducen ningún tipo de acoplamiento. Éste proviene únicamente de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}$.

Si centramos nuestra atención en los modos de flexión, nuevamente encontramos

que únicamente se produce acoplamiento en la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ y entre modos con el mismo índice (misma frecuencia), como predice la teoría de vigas (capítulo 2).

Sin embargo, aparece un acoplamiento entre los modos de torsión y de respiración, manifestado por los términos no nulos en las filas y columnas correspondientes a estos modos.

La teoría de vigas no contempla modos de respiración porque implican deformación de las secciones. Prescindamos, por un momento, de este tipo de modos (supongamos que disponemos de medios para evitar que respondan, o que somos capaces de modificar sus frecuencias propias –y sólo las suyas– de forma que no estén en el rango de interés). Esto equivale a eliminar de las matrices las filas y columnas correspondientes a este tipo de modo. Sin ellas, en la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ sólo aparece acoplamiento entre modos de flexión de la misma frecuencia, y la matriz $\tilde{\mathbf{C}}$ vuelve a ser diagonal, ajustándose de nuevo a la teoría de vigas. Los modos de torsión no se acoplan entre sí más que a través de los de respiración.

Esto pone de manifiesto que en sólidos con comportamiento más complejo que el de una viga pueden aparecer acoplamientos entre modos de distinta frecuencia y/o tipo.

Es interesante destacar que los modos impares de respiración sólo producen acoplamientos con los modos impares de torsión (antisimétricos), y, recíprocamente, los pares con los pares (simétricos).

Por otro lado, en la matriz $\tilde{\mathbf{C}}$ los modos de respiración no producen ningún tipo de acoplamiento. Sí aparece, en cambio, entre los modos de torsión, y de nuevo entre los simétricos y entre los antisimétricos por separado.

El vector $\tilde{\mathbf{L}}$ obtenido mediante el MEF es nulo para ambos radios, coincidiendo con el resultado obtenido por los modelos analíticos.

6.4.3. Comparación entre modelos

A la hora de comparar los resultados analíticos con los de elementos finitos debe tenerse muy presente que no corresponden a modelos equivalentes. Se acercarán tanto más cuanto más cercano sea el comportamiento del cilindro al de una viga de Rayleigh, por lo que es de esperar una mayor concordancia entre los modelos más esbeltos ($R_2 = 0.05$ m). En todo este apartado, cuando se habla de *error* debe interpretarse como discrepancia entre modelos, no como imprecisiones de cálculo.

Los modelos analíticos sólo incluyen modos de flexión, de forma que la comparación sólo puede hacerse sobre ellos. La tabla 6.10 (en la página 133) muestra las diferencias entre las cuatro primeras frecuencias propias de flexión calculadas para radio $R_1 = 0.1$ m y $R_2 = 0.05$ m, analíticamente y mediante el MEF. El error se ha definido tomando como referencia la solución analítica.

Como puede verse, el modelo de elementos finitos se ajusta mejor al analítico para el cilindro más esbelto ($R_2 = 0.05$ m), ya que el comportamiento de este sólido es

$$\tilde{\mathbf{K}} = \text{diag}(\tilde{K}_1 \tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{K}_2 \tilde{K}_3 \tilde{K}_4 \tilde{K}_4 \tilde{K}_5 \tilde{K}_6 \tilde{K}_7 \tilde{K}_7 \tilde{K}_8 \tilde{K}_8 \tilde{K}_9 \tilde{K}_9 \tilde{K}_{10} \tilde{K}_{10} \tilde{K}_{11})$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= 1.23514 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_2 &= 1.76909 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_3 &= 4.44022 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_4 &= 7.67364 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_5 &= 1.17839 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_6 &= 1.77687 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_7 &= 2.03553 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_8 &= 4.00088 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_9 &= 4.14662 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{10} &= 4.68172 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{11} &= 7.11995 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{G}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{G}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{G}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{5,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{6,10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{5,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{10,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{10,11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= 1.01418 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_2 &= 3.34913 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{3,5} &= 4.72596 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_4 &= 5.78728 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{5,8} &= 1.74114 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{G}_{6,10} &= 9.62022 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_7 &= 7.64661 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{5,8} &= 1.74114 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_9 &= 8.79189 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{10,11} &= 3.54164 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Tabla 6.6. *Modelo MEF. Biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} -\tilde{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{3,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_5 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{6,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{C}_{11} \end{pmatrix}$$

$\tilde{C}_1 = 1.01984 \cdot 10^{-2}$ $\tilde{C}_2 = 3.40008 \cdot 10^{-2}$ $\tilde{C}_3 = 9.82364 \cdot 10^{-1}$ $\tilde{C}_{3,8} = 1.79774 \cdot 10^{-2}$ $\tilde{C}_4 = 5.96499 \cdot 10^{-2}$
 $\tilde{C}_5 = 2.28426 \cdot 10^{-3}$ $\tilde{C}_6 = 9.82051 \cdot 10^{-1}$ $\tilde{C}_{6,11} = 1.85308 \cdot 10^{-2}$ $\tilde{C}_7 = 7.98716 \cdot 10^{-2}$ $\tilde{C}_8 = 9.81681 \cdot 10^{-1}$
 $\tilde{C}_9 = 9.34051 \cdot 10^{-2}$ $\tilde{C}_{10} = 9.47010 \cdot 10^{-3}$ $\tilde{C}_{11} = 9.80886 \cdot 10^{-1}$

Tabla 6.7. *Modelo MEF. Biarticulado. Radio R₁ = 0.1 m.*

$$\tilde{\mathbf{K}} = \text{diag}(\tilde{K}_1 \tilde{K}_2 \tilde{K}_3 \tilde{K}_4 \tilde{K}_5 \tilde{K}_6 \tilde{K}_7 \tilde{K}_8 \tilde{K}_9 \tilde{K}_{10} \tilde{K}_{11} \tilde{K}_{12} \tilde{K}_{13})$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= 3.12913 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_2 &= 4.87475 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_3 &= 2.36594 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_4 &= 4.44037 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_5 &= 7.07880 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_6 &= 1.18081 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_7 &= 1.62049 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_8 &= 1.77790 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_9 &= 3.12970 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{10} &= 4.00686 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_{11} &= 4.72109 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{12} &= 5.37721 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{13} &= 7.13972 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{G}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{G}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{G}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{6,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{8,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{6,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{8,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{11,13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{11,13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= 2.62673 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_2 &= 9.99684 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_3 &= 2.07960 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{4,6} &= 2.28727 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_5 &= 3.33952 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{6,10} &= 1.28581 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{G}_7 &= 4.63080 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{8,11} &= 4.59552 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_9 &= 5.84332 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{11,13} &= 2.57897 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_{12} &= 6.90909 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Tabla 6.8. Modelo MEF. Biarticulado. Radio $R_2 = 0.05 \text{ m}$.

Índice	$R_1 = 0.1 \text{ m}$			$R_2 = 0.05 \text{ m}$		
	Frecuencia (Hz)			Frecuencia (Hz)		
	Analítico	MEF	Error (%)	Analítico	MEF	Error (%)
1	180.136	176.880	-1.808	90.4368	89.0291	-1.557
2	720.545	669.414	-7.096	361.747	351.396	-2.861
3	1621.22	1394.19	-14.004	813.931	774.144	-4.888
4	2882.18	2270.70	-21.216	1446.99	1339.06	-7.459

Tabla 6.10. *Frecuencias propias. Modelo MEF vs. analítico. Biarticulado.*

más cercano al de la viga de Rayleigh. Por otro lado, la discrepancia se acentúa con el índice de modo para ambos radios. Esto es debido a dos motivos: por una parte, las deformadas con mayor número de ondas se ajustan peor mediante elementos finitos al disponer de menos elementos por onda; por otro lado, el propio comportamiento del sólido está más lejos del de viga.

Las tablas 6.2, 6.3, 6.6, 6.7, 6.8 y 6.9 recogen las matrices de las ecuaciones del movimiento de los distintos modelos. Los elementos de las matrices de rigidez modal, $\tilde{\mathbf{K}}$, son proporcionales a los cuadrados de las frecuencias propias (son las pulsaciones propias al cuadrado), por lo que la discrepancia entre ellas sigue la misma tendencia que la encontrada en las frecuencias, pero más acentuada al estar elevadas al cuadrado.

En los modelos analíticos, tanto la matriz giroscópica modal, $\tilde{\mathbf{G}}$, como la asociada a las fuerzas centrípetas, $\tilde{\mathbf{C}}$, están formadas por las constantes g_k . En cambio, en los modelos del MEF, los elementos correspondientes en $\tilde{\mathbf{G}}$ y en $\tilde{\mathbf{C}}$ son ligeramente diferentes entre sí. Podría pensarse que esto es debido a errores numéricos, sin embargo, más adelante mostraremos que, en general, los elementos de ambas matrices no son idénticos. Sólo ocurre en el caso de viga de Rayleigh biarticulada. Las diferencias encontradas en los modelos del MEF son debidas, una vez más, a que éstos no reproducen el comportamiento de una viga sino el de un sólido tridimensional. Las tablas 6.11 y 6.12 muestran las discrepancias entre los valores de las constantes g_k de modelos analíticos y los elementos de la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ de los modelos del MEF, para los radios R_1 y R_2 respectivamente. Se ha tomado como referencia para el error relativo el valor analítico. Por otro lado, en las tablas 6.13 y 6.14 se muestran las discrepancias entre los elementos de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ y los de las $\tilde{\mathbf{C}}$ en los modelos de elementos finitos, para los radios R_1 y R_2 respectivamente. En este caso, como referencia para el error relativo se ha tomado el valor en la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$.

Una vez más, se aprecia que el cilindro más esbelto ($R_2 = 0.05 \text{ m}$) tiene un comportamiento más cercano al de la viga de Rayleigh, aumentando, la discrepancia en ambos con el índice de modo.

Índice (k)	g_k		Error (%)
	Analítico	MEF	
1	$1.08473 \cdot 10^{-2}$	$1.01418 \cdot 10^{-2}$	-6.504
2	$4.20216 \cdot 10^{-2}$	$3.34913 \cdot 10^{-2}$	-20.300
3	$8.98302 \cdot 10^{-2}$	$5.78728 \cdot 10^{-2}$	-35.575
4	$1.49269 \cdot 10^{-1}$	$7.64661 \cdot 10^{-2}$	-48.773

Tabla 6.11. Constantes g_k . Modelo MEF vs. analítico. Biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.

Índice (k)	g_k		Error (%)
	Analítico	MEF	
1	$2.73406 \cdot 10^{-3}$	$2.62673 \cdot 10^{-3}$	-3.926
2	$1.08473 \cdot 10^{-2}$	$9.99684 \cdot 10^{-3}$	-7.840
3	$2.40799 \cdot 10^{-2}$	$2.07960 \cdot 10^{-2}$	-13.637
4	$4.20216 \cdot 10^{-2}$	$3.33952 \cdot 10^{-2}$	-20.528

Tabla 6.12. Constantes g_k . Modelo MEF vs. analítico. Biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m.

Índice (k)	\tilde{G}_k	\tilde{C}_k	Error (%)
1	$1.01418 \cdot 10^{-2}$	$1.01984 \cdot 10^{-2}$	0.558
2	$3.34913 \cdot 10^{-2}$	$3.40008 \cdot 10^{-2}$	1.521
3	$5.78728 \cdot 10^{-2}$	$5.96499 \cdot 10^{-2}$	3.071
4	$7.64661 \cdot 10^{-2}$	$7.98716 \cdot 10^{-2}$	4.454

Tabla 6.13. \tilde{C}_k vs. \tilde{G}_k . Modelo MEF. Biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.

Índice (k)	\tilde{G}_k	\tilde{C}_k	Error (%)
1	$2.62673 \cdot 10^{-3}$	$2.62588 \cdot 10^{-3}$	-0.032
2	$9.99684 \cdot 10^{-3}$	$1.00175 \cdot 10^{-2}$	0.206
3	$2.07960 \cdot 10^{-2}$	$2.09189 \cdot 10^{-2}$	0.591
4	$3.33952 \cdot 10^{-2}$	$3.38040 \cdot 10^{-2}$	1.224

Tabla 6.14. \tilde{C}_k vs. \tilde{G}_k . Modelo MEF. Biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m.

6.5. Modelo de un cilindro libre

El anterior caso de cilindro biarticulado, que fue escogido por su relativa simplicidad matemática para el estudio analítico, ha mostrado que es posible el acoplamiento entre modos de distinta frecuencia, aunque esto no ocurre en los modos de flexión.

Veremos a continuación que ello es debido precisamente a la simplicidad del problema. Un caso con una dinámica ligeramente más complicada, como es el del cilindro libre, muestra también acoplamientos entre modos de flexión de distinta frecuencia. No obstante, la matemática asociada es mucho más compleja y no existe una solución simbólica como en el caso del cilindro biarticulado. Los resultados han sido obtenidos por el Método de los Elementos Finitos.

La condición libre tiene un interés añadido que resultará claro en el capítulo 9: es la que requiere el método de síntesis modal empleado en el programa de simulación de dinámica ferroviaria de la UPV.

Para obtener las ecuaciones del movimiento se han utilizado los mismos modelos que en el anterior estudio del cilindro biarticulado, pero sin imponer, en este caso, ninguna condición de contorno. Las tablas 6.15 y 6.16 muestran los modos considerados en el modelo de radio $R_1 = 0.1$ m y $R_2 = 0.05$ m, respectivamente. Además de los modos de cuerpo rígido, se han incluido los correspondientes a las ocho primeras frecuencias no nulas. El modelo de radio $R_1 = 0.1$ m incluye cuatro modos de flexión (índices 5, 6, 9 y 11) en cada plano, tres de torsión (7, 10 y 12) y uno axial (8). Dado que la esbeltez apenas afecta a los modos de torsión ni a los axiales, y disminuye la frecuencia de los de flexión, el modelo de radio $R_2 = 0.05$ m incluye cinco de flexión (5, 6, 7, 9 y 12) y sólo dos de torsión (8 y 11) más el axial (10).

Índice	Frecuencia (Hz)	Multiplicidad	Tipo de modo	Simetría
1	0	1	Traslación de sólido rígido en el eje longitudinal	Antisimétrico
2	0	2	Traslación de sólido rígido en los ejes transversales	Simétrico
3	0	1	Giro de sólido rígido en torno al eje longitudinal	Simétrico
4	0	2	Giro de sólido rígido en torno a ejes transversales	Antisimétrico
5	391.861	2	1° de flexión	Simétrico
6	1008.09	2	2° de flexión	Antisimétrico
7	1060.53	1	1° de torsión	Antisimétrico
8	1727.69	1	1° axial	Simétrico
9	1819.16	2	3° de flexión	Simétrico
10	2121.52	1	2° de torsión	Simétrico
11	2749.78	2	4° de flexión	Antisimétrico
12	3183.45	1	3° de torsión	Antisimétrico

Tabla 6.15. *Frecuencias propias. Modelo MEF. Libre. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

Las matrices de la ecuación del movimiento se muestran en las tablas 6.17 y 6.18 para radio $R_1 = 0.1$ m y en las 6.19 y 6.20 para radio $R_2 = 0.05$ m.

Como puede verse, cada columna de la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ correspondiente a una frecuencia de multiplicidad dos, exceptuando las traslaciones de sólido rígido, presenta elementos no nulos en todas las filas correspondientes a modos asociados a frecuencias de

Índice	Frecuencia (Hz)	Multiplicidad	Tipo de modo	Simetría
1	0	1	Traslación de sólido rígido en el eje longitudinal	Antisimétrico
2	0	2	Traslación de sólido rígido en los ejes transversales	Simétrico
3	0	1	Giro de sólido rígido en torno al eje longitudinal	Simétrico
4	0	2	Giro de sólido rígido en torno a ejes transversales	Antisimétrico
5	200.613	2	1° de flexión	Simétrico
6	543.096	2	2° de flexión	Antisimétrico
7	1038.75	2	3° de flexión	Simétrico
8	1060.55	1	1° de torsión	Antisimétrico
9	1666.01	2	4° de flexión	Antisimétrico
10	1729.45	1	1° axial	Simétrico
11	2122.14	1	2° de torsión	Simétrico
12	2405.05	2	5° de flexión	Simétrico

Tabla 6.16. *Frecuencias propias. Modelo MEF. Libre. Radio $R_2 = 0.05 m$.*

multiplicidad dos con deformada en el plano contrario, lo que supone un acoplamiento entre todos estos modos. Se aprecia también que los modos de sólido rígido correspondientes a giros en torno a ejes transversales se acoplan con los modos de flexión antisimétricos. Por otro lado, la matriz $\tilde{\mathbf{C}}$ presenta también acoplamientos entre los mismos modos que $\tilde{\mathbf{G}}$.

En el cálculo de cada elemento \tilde{J}_{ij} , \tilde{G}_{ij} y \tilde{E}_{ij} interviene exclusivamente información relativa a los modos i -ésimo y j -ésimo, por lo que la precisión con la que se obtiene estos elementos no depende del número de modos considerado en Φ . En cambio, el valor obtenido para cada elemento \tilde{C}_{ij} sí depende de éste número de modos. Esto es debido a que en su cálculo interviene $\sum_{k=1}^{2N+6} \tilde{G}_{ik} \tilde{G}_{jk}$ y la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ presenta acoplamiento entre modos de distinta frecuencia, es decir, tiene más de un elemento no nulo en cada fila y columna. Además, como adelantábamos en el apartado correspondiente a la viga biarticulada (6.4.3), esto prueba que, en general, los elementos de $\tilde{\mathbf{G}}$ y de $\tilde{\mathbf{C}}$ no toman los mismos valores. Sólo ocurría de forma anecdótica en el anterior caso de cilindro biarticulado con comportamiento de viga de Rayleigh.

También se aprecia que el modo axial induce un acoplamiento entre el modo de cuerpo rígido de rotación en torno al eje longitudinal (simétrico) y los de torsión simétricos.

Es destacable que, por primera vez, encontramos un vector $\tilde{\mathbf{L}}$ no nulo. Los elementos correspondientes a modos de flexión son todos nulos, al igual que en el caso biarticulado. El elemento distinto de cero corresponde al modo axial. El vector $\tilde{\mathbf{L}}$ cuantifica la capacidad para excitar cada modo que tiene la distribución de fuerza centrípeta que, debida a la rotación, aparece sobre la no deformada (su *fuerza generalizada*). En los modos de flexión, torsión y respiración, dadas las simetrías de éstos,

$$\tilde{\mathbf{K}} = \text{diag} \left(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tilde{K}_5 \ \tilde{K}_6 \ \tilde{K}_7 \ \tilde{K}_8 \ \tilde{K}_9 \ \tilde{K}_{10} \ \tilde{K}_{11} \ \tilde{K}_{12} \ \tilde{K}_{12} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_5 &= 1.58883 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_6 &= 1.16443 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_7 &= 4.25969 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_8 &= 4.44037 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \\ \tilde{K}_9 &= 1.09576 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{10} &= 1.18080 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{11} &= 1.77790 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} & \tilde{K}_{12} &= 2.28353 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{4,6} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{4,9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{5,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{5,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_5 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{5,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{5,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{4,6} & 0 & 0 & -\tilde{G}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{5,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{5,7} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{6,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{4,9} & 0 & 0 & -\tilde{G}_{6,9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{10,11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{7,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{5,12} & 0 & 0 & -\tilde{G}_{7,12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{3,10} &= 2.17581 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{4,6} &= 3.23823 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_{4,9} &= 3.54457 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_5 &= 1.30015 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{5,7} &= 9.06929 \cdot 10^{-3} & \tilde{G}_{5,12} &= 9.07409 \cdot 10^{-3} \\ \tilde{G}_6 &= 2.71506 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{6,9} &= 1.41400 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_7 &= 4.30603 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{7,12} &= 1.82100 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_9 &= 5.94951 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{10,11} &= 1.02448 \cdot 10^{-2} & \tilde{G}_{12} &= 7.51536 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Tabla 6.19. Modelo MEF. Libre. Radio $R_2 = 0.05 \text{ m}$.

esta fuerza generalizada es nula. Pero en el caso del modo axial, debido al coeficiente de Poisson se produce una reducción de sección en toda la longitud del sólido, siempre en el mismo sentido, lo que resulta en una fuerza generalizada neta, no nula, de la fuerza centrípeta.

6.6. Conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado la formulación de elementos finitos que permite obtener los valores numéricos de los coeficientes matriciales de las ecuaciones de movimiento, tanto del método general (coordenadas modales lagrangianas) como del de sólidos de revolución (coordenadas mixtas lagrangianas-eulerianas).

Se han calculado las matrices correspondientes al planteamiento mixto para dos cilindros de la misma longitud y diferente radio (distinta esbeltez) en dos condiciones de contorno: biarticulado y libre.

En el caso biarticulado, las matrices se han obtenido analíticamente, suponiendo que el comportamiento del cilindro satisface las hipótesis de la viga de Rayleigh, y mediante el Método de los Elementos Finitos. La solución de elementos finitos incluye todo tipo de modos, mientras que la analítica sólo los de flexión. Se ha encontrado, como era de esperar, que para el modelo más esbelto, las matrices calculadas por ambos métodos son más similares (comparando los términos correspondientes a modos de flexión) que en el caso del menos esbelto. Esto es debido a que, cuanto mayor es la esbeltez, más se acerca el comportamiento del cilindro al de la viga de Rayleigh.

La forma de las matrices predice un acoplamiento entre los modos de flexión correspondientes al mismo autovalor debido a los términos giroscópicos, tal como se encontró en el capítulo 2 al estudiar la viga de Rayleigh.

Las matrices obtenidas mediante elementos finitos, que incluyen también modos de torsión y respiración, muestran que se produce un acoplamiento entre ellos debido a la presencia de los de respiración, tanto en los términos giroscópicos como en los centrípetos. Además, este acoplamiento se produce por separado entre los modos simétricos por un lado y los antisimétricos por otro.

Por otra parte, en el caso del cilindro libre, se produce una estructura de acoplamientos mucho más compleja, involucrando a todos los asociados a autovalores de multiplicidad dos (exceptuando las traslaciones transversales de sólido rígido). En este caso, el modo axial produce también un acoplamiento entre él y los de torsión.

Se ha encontrado que un acoplamiento entre modos de diferente frecuencia produce una dependencia de los términos de la matriz centrípeta, $\tilde{\mathbf{C}}$, con el número de modos incluidos en el modelo.

De estos resultados se infiere que un sistema con más variedad de modos que una viga es susceptible de sufrir acoplamientos mucho más complejos.

La posibilidad de acoplamiento entre modos de diferente frecuencia tiene una

consecuencia trascendente. Aparece una dificultad añadida para determinar el número de modos que es necesario incluir en el modelo para obtener la solución con suficiente precisión. No depende sólo de la fuerza generalizada de la excitación y de su contenido en frecuencia, sino que el sistema es capaz de transferir energía de los modos¹ excitados directamente por las fuerzas externas a otros. Esta dificultad se ve agravada por la dependencia de los términos de la matriz centrípeta con el número de modos. Queda fuera de los objetivos de esta Tesis y, por lo tanto de su alcance, estudiar este hecho, aunque se propone como desarrollo futuro.

¹Modos de la estructura no rotatoria.

Capítulo 7

Respuesta dinámica de un cilindro rotatorio

Objeto del capítulo:

En este capítulo se obtiene la respuesta dinámica de un cilindro por medio de la metodología desarrollada en esta Tesis. Se emplean las ecuaciones del movimiento obtenidas en los capítulos anteriores en coordenadas mixtas, analíticamente y mediante el Método de los Elementos Finitos, y se comparan los resultados. La respuesta dinámica se caracteriza mediante funciones de respuesta en frecuencia de receptancia. Se consideran dos valores de la esbeltez y dos tipos de condiciones de contorno.

7.1. Introducción

Recordemos que la receptancia es la función de respuesta en frecuencia (FRF) definida como la relación entre el desplazamiento producido en un punto y la fuerza aplicada en otro (o el mismo), en régimen armónico permanente, considerando ambas magnitudes como complejas. Cuando el grado de libertad (punto y dirección) de excitación y de respuesta son el mismo, la FRF la llamamos de punto. En caso contrario, cruzada. Estos mismo conceptos son aplicables cuando la excitación y la respuesta están referidos a puntos espaciales (no materiales) no rotatorios.

Es posible definir una *receptancia modal*, análogamente a la inercia modal definida en el capítulo 2, como la respuesta de cada modo cuando sólo uno de ellos tiene fuerza generalizada, siendo ésta unitaria. Llamaremos receptancia directa a la respuesta del modo con fuerza generalizada, y cruzada a la de los demás. Debe tenerse presente que los modos empleados son los del sistema no rotatorio.

En este capítulo se caracteriza la respuesta dinámica de dos cilindros, de radios $R_1 = 0.1$ m y $R_2 = 0.05$ m, mediante su funciones de respuesta en frecuencia de receptancia, referidas a puntos espaciales. Para ello, se emplean los modelos numéricos obtenidos en el capítulo anterior con condiciones de contorno biarticulado y libre.

Para la correcta interpretación de los resultados mostrados debe tenerse presente que los modelos no consideran desequilibrio estático ni dinámico alguno, ni amortiguamiento. Por contra, los textos que tratan la dinámica de rotores (por ejemplo, [19, 22, 38]) suelen considerar alguno o todos los factores anteriores, lo que conduce a comportamientos del sistema diferentes al aquí mostrado.

7.2. Formulación de las receptancias

Recordemos que la ecuación del movimiento en coordenadas mixtas lagrangianas-eulerianas se escribe, según (4.90), como

$$\ddot{\mathbf{q}} - 2\Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{q} = \mathbf{Q}_q + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (7.1)$$

En el caso de que la excitación corresponda a una única carga puntual unitaria, si \mathbf{u}_e son las coordenadas espaciales del punto de aplicación de la fuerza, y \mathbf{n}_e el versor en la dirección de la misma, la fuerza generalizada queda

$$\mathbf{Q}_q(t) = \Phi(\mathbf{u}_e)^T \mathbf{n}_e \quad (7.2)$$

La posición de un punto espacial \mathbf{u}_r en el instante t se obtiene como

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_r, t) = \mathbf{u}_r + \Phi(\mathbf{u}_r) \mathbf{q}(t) \quad (7.3)$$

Para definir correctamente la receptancia, es necesario transformar ligeramente la ecuación del movimiento, debido a la presencia en ésta del término $\Omega^2 \tilde{\mathbf{L}}$. Este

término no depende del tiempo, y su efecto, en régimen permanente, es el mismo que produciría una excitación modal constante, es decir, una deformación estacionaria (en el espacio).

Las deformadas de todos los modos para los que $\tilde{\mathbf{L}}$ no es nulo presentan simetría de revolución. Por ello, la presencia de este término constante es equivalente a modificar levemente los diámetros de la estructura, no afectando a la respuesta dinámica de forma significativa, sólo a la posición de referencia. El efecto es equivalente a no considerar el peso propio, o cualquier otra fuerza constante, en sistemas de un grado de libertad; sólo afecta a la posición de equilibrio. En ausencia de excitación externa ($\mathbf{Q}_q = 0$), la solución estacionaria ($\dot{\mathbf{q}} = 0$, $\ddot{\mathbf{q}} = 0$) es

$$\mathbf{q}_{es} = \Omega^2 \left(\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{L}} \quad (7.4)$$

Por tanto, dada una velocidad angular constante Ω , si definimos unas nuevas coordenadas modales mediante

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{es} \quad (7.5)$$

y teniendo en cuenta que, entonces, es

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}} \quad \ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}} \quad (7.6)$$

por ser \mathbf{q}_{es} constante, la ecuación del movimiento queda

$$\ddot{\mathbf{q}}_r - 2\Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}}_r + \left(\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \right) \mathbf{q}_r = \mathbf{Q}_q \quad (7.7)$$

De la misma forma, la posición del punto espacial \mathbf{u}_r en la configuración estacionaria vendrá dado por

$$\mathbf{s}_{es}(\mathbf{u}_r) = \mathbf{u}_r + \Phi(\mathbf{u}_r) \mathbf{q}_{es} = \mathbf{u}_r + \Omega^2 \Phi(\mathbf{u}_r) \left(\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{L}} \quad (7.8)$$

de modo que la posición en el instante t se podrá escribir como

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_r, t) = \mathbf{s}_{es}(\mathbf{u}_r) + \Phi(\mathbf{u}_r) \mathbf{q}_r(t) \quad (7.9)$$

y el desplazamiento con respecto a la configuración estacionaria vendrá dado por

$$\mathbf{s}_r(\mathbf{u}_r, t) - \mathbf{s}_{es}(\mathbf{u}_r) = \Phi(\mathbf{u}_r) \mathbf{q}_r(t) \quad (7.10)$$

En lo que sigue, se toma como configuración de referencia la del cuerpo en rotación en situación estacionaria, de forma que la ecuación del movimiento a resolver es (7.7), y los desplazamientos están dados por (7.10).

En régimen armónico permanente, la matriz (compleja) $N \times N$, siendo N el número de modos en Φ , de receptancias modales se calcula como

$$\mathbf{H}^m(\omega_e) = \left(-\omega_e^2 \mathbf{I}_{N \times N} - 2i\omega_e \Omega \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \right)^{-1} \quad (7.11)$$

siendo ω_e la pulsación de la excitación e i la unidad imaginaria. El término $H_{jk}^m(\omega_e)$ representa la respuesta del modo j -ésimo cuando sólo existe fuerza generalizada sobre el k -ésimo y es unitaria.¹

Las receptancias propiamente dichas se obtienen como sigue. Sean \mathbf{n}_e y \mathbf{n}_r los versores en la dirección de la excitación (una única fuerza puntual unitaria) y de la respuesta interesada, respectivamente. La respuesta en el punto \mathbf{u}_r cuando la fuerza se aplica en el punto \mathbf{u}_e estará dada por

$$H(\omega_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{n}_e, \mathbf{u}_r, \mathbf{n}_r) = \mathbf{n}_r^T \Phi(\mathbf{u}_r) \mathbf{H}^m(\omega_e) \Phi(\mathbf{u}_e)^T \mathbf{n}_e \quad (7.12)$$

La receptancia será de punto si se cumple que $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_r$. Será cruzada en cualquier otro caso.

Si restringimos las direcciones de excitación y de respuesta a las tres del sistema de referencia en el que están escritos los modos, entonces se puede definir la matriz 3×3 siguiente

$$\mathbf{H}(\omega_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_r) = \Phi(\mathbf{u}_r) \mathbf{H}^m(\omega_e) \Phi(\mathbf{u}_e)^T \quad (7.13)$$

en la que el término $H_{kj}(\omega_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_r)$ ($k, j = 1, \dots, 3$) es la receptancia en la dirección coordenada k -ésima del punto \mathbf{u}_r cuando se excita en la dirección j -ésima del punto \mathbf{u}_e .

Evidentemente, se tendrá también

$$H(\omega_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{n}_e, \mathbf{u}_r, \mathbf{n}_r) = \mathbf{n}_r^T \mathbf{H}(\omega_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_r) \mathbf{n}_e \quad (7.14)$$

7.3. Cilindro biarticulado

A continuación se presentan algunas receptancias de los cilindros biarticulados cuyas ecuaciones del movimiento fueron obtenidas en el anterior capítulo 6. Han sido calculadas tanto mediante el modelo analítico como por el de elementos finitos. La excitación corresponde a una fuerza puntual, aplicada sobre la fibra neutra en dirección normal a la misma, a una distancia $L/\sqrt{2}$ de un extremo, siendo L la longitud del cilindro. El punto de excitación se ha escogido al efecto de que no coincida con puntos nodales.²

La figura 7.1 muestra la receptancia de punto en dirección transversal. Las resonancias en las respuestas analítica y de elementos finitos no se producen a las mismas frecuencias dado que los modelos parten de distintas frecuencias propias para el sistema no rotatorio. Una vez más, esto es debido a que el modelo de elementos finitos no presenta comportamiento de viga de Rayleigh.

¹Obsérvese que una fuerza generalizada unitaria no corresponde necesariamente a una fuerza unitaria y viceversa.

²Recuérdese que un punto nodal, o nodo, asociado a una deformada modal es aquél cuyo desplazamiento es nulo en todo instante. Este concepto es aplicable tanto a modos materiales como espaciales. En el primer caso se entiende que se refiere a los desplazamientos de un punto material y son nulos expresados en coordenadas del cuerpo. En el segundo, el punto es espacial y los desplazamientos están referidos en el sistema fijo.

Puede apreciarse el desdoblamiento de las frecuencias de resonancia debido a la rotación. Por ser una FRF de punto, aparecen antirresonancias entre cada dos resonancias.

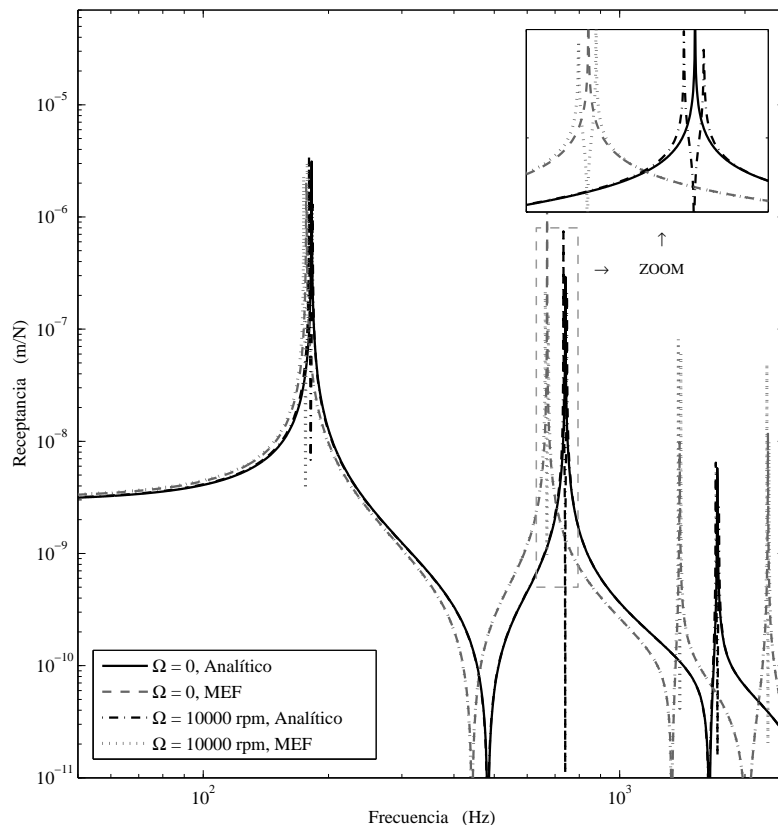


Figura 7.1. *Receptancia de punto. Cilindro biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

En la figura 7.2 se muestran las receptancias cruzadas, siendo la dirección de respuesta normal a la de excitación, en el mismo punto. Las curvas correspondientes al cilindro no rotatorio no se representan en la figura por ser nulas. Sin embargo, el sistema rotatorio presenta una respuesta distinta de cero. En la respuesta cruzada aparecen resonancias a las mismas frecuencias que en la de receptancia de punto. No obstante, no tiene antirresonancias, por lo que existen frecuencias de excitación a las que la respuesta en la dirección normal a la excitación es mayor que la correspondiente a la misma dirección. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en el capítulo 2 para la viga de Rayleigh.

En la figura 7.3 puede verse la receptancia de punto a cuatro velocidades angulares,

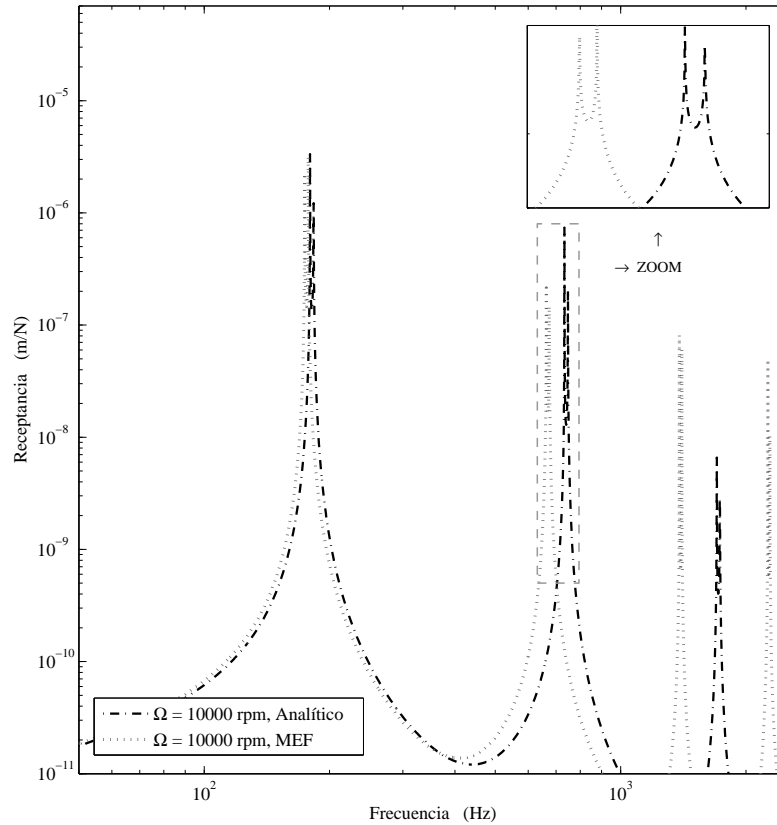


Figura 7.2. *Receptancia cruzada. Cilindro biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

para el modelo analítico y para el de elementos finitos.

Debido a que los modelos parten de distintas frecuencias propias no rotatorias (distinta matriz de rigidez $\tilde{\mathbf{K}}$), no puede apreciarse bien las diferencias debidas a los términos giroscópicos ($\tilde{\mathbf{G}}$) y centrípetos ($\tilde{\mathbf{C}}$). Por ello, en la figura 7.3 se han recalculado las receptancias considerando en ambos modelos la misma matriz de rigidez. En ella se aprecia que las diferencias debidas a los distintos valores de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}$ son mínimas.

En las dos figuras 7.3 y 7.4 se observa una disminución de las frecuencias de resonancia al aumentar la velocidad angular. Esto es debido a la presencia del término $\Omega^2 \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{q}$ en la ecuación del movimiento, que se traduce en una disminución de la rigidez generalizada (el término que multiplica a la coordenada generalizada, $\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}$).

Análogamente, las figuras de la 7.5 a la 7.8 muestran las receptancias homólogas

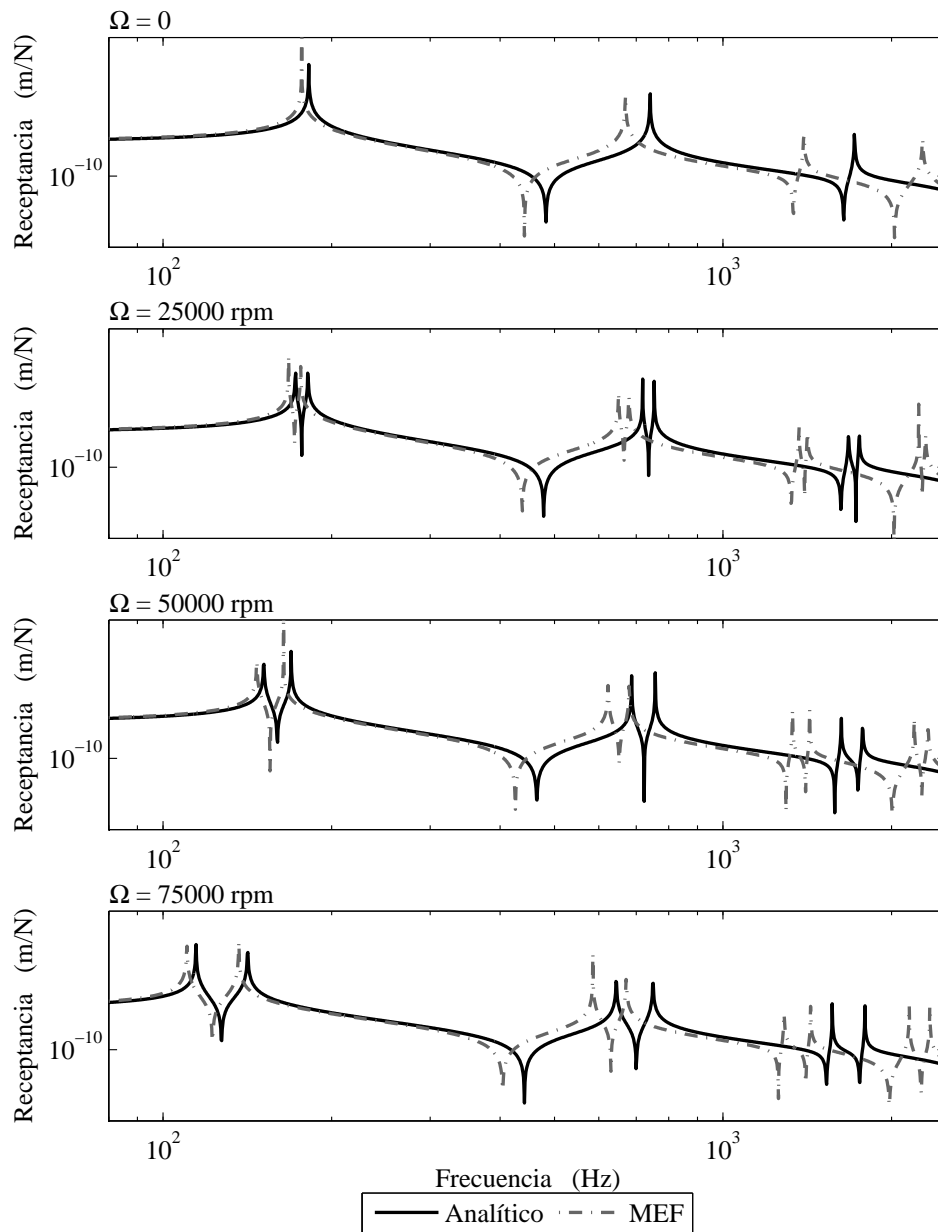


Figura 7.3. Receptancia de punto. Cilindro biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m.

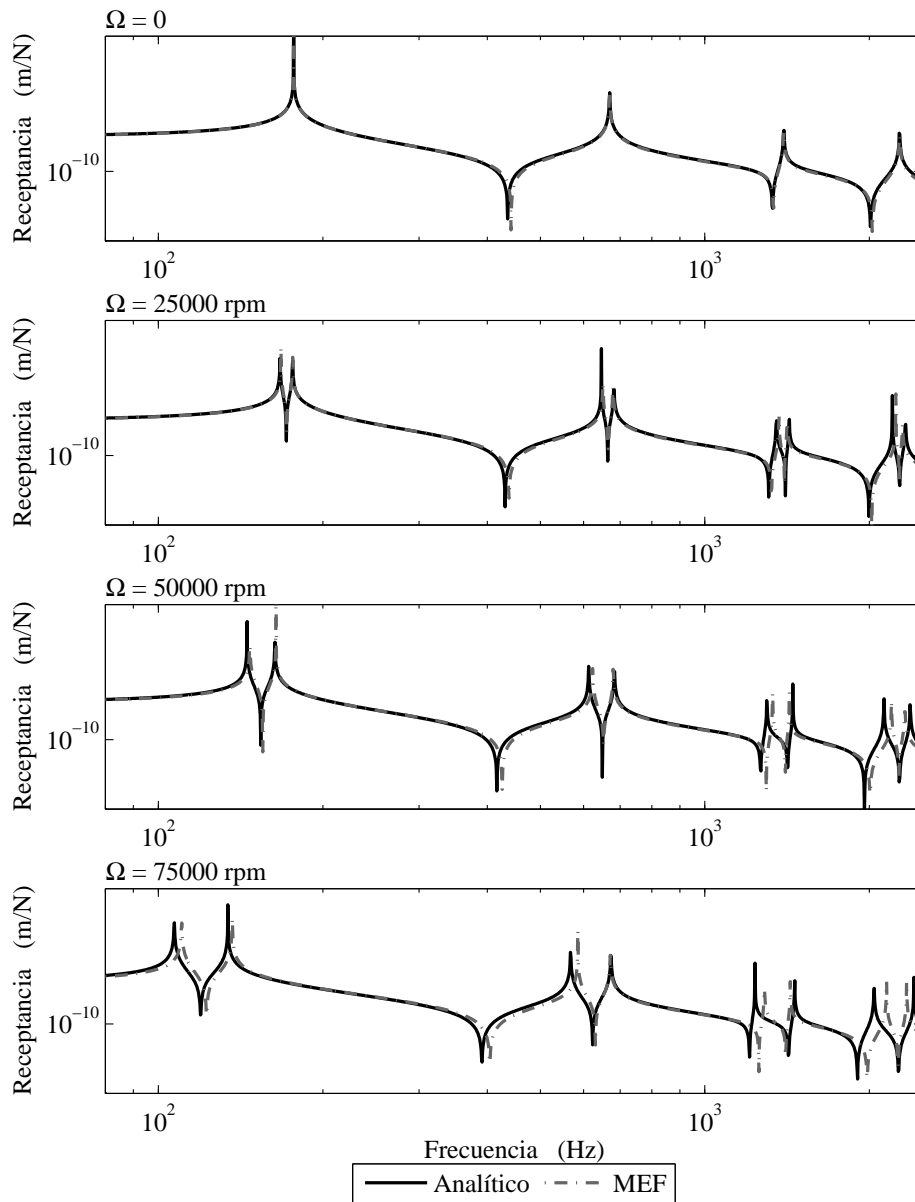


Figura 7.4. Receptancia de punto. Cilindro biarticulado. Radio $R_1 = 0.1$ m. Se ha considerado la misma matriz de rigidez en ambos modelos (mismas frecuencias propias no rotatorias) para apreciar la influencia de los otros términos.

correspondientes al cilindro de radio $R_2 = 0.05$ m. Presentan el mismo comportamiento, con la salvedad de que las frecuencias de resonancia analíticas y de elementos finitos son más próximas ahora, como era de esperar por ser más esbelto el cilindro.

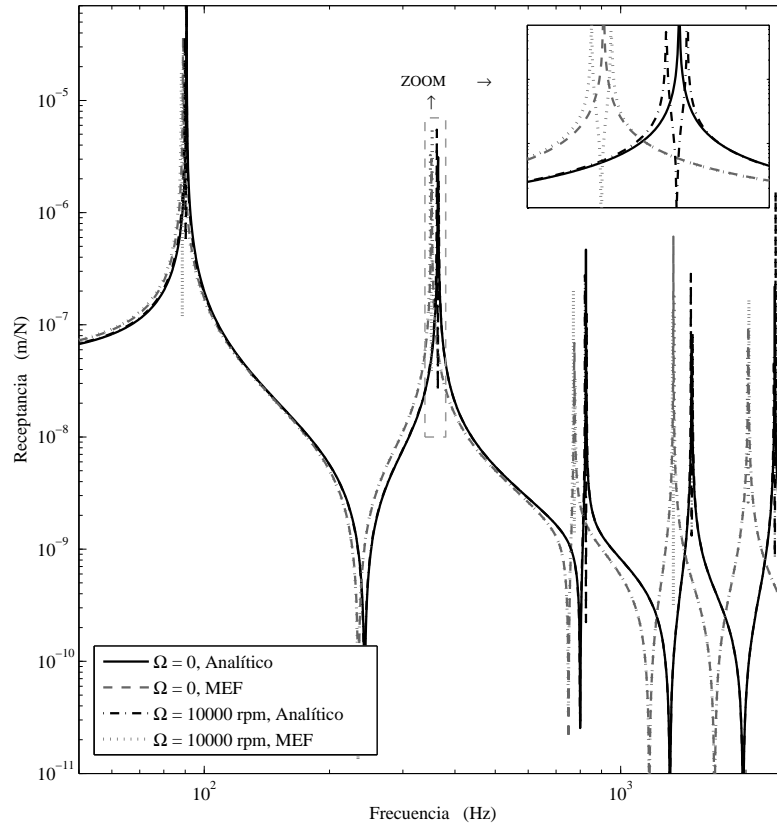


Figura 7.5. *Receptancia de punto. Cilindro biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

7.4. Cilindro libre

Las figuras de la 7.9 a la 7.14 muestran receptancias de los cilindros libres de radio $R_1 = 0.1$ m y $R_2 = 0.05$ m respectivamente, análogas a las del caso biarticulado. Han sido calculadas a partir de la ecuación del movimiento obtenida en el capítulo 6 mediante elementos finitos. El punto de aplicación de la carga y de evaluación de la respuesta y sus respectivas direcciones son los mismos que en el anterior caso del cilindro biarticulado.

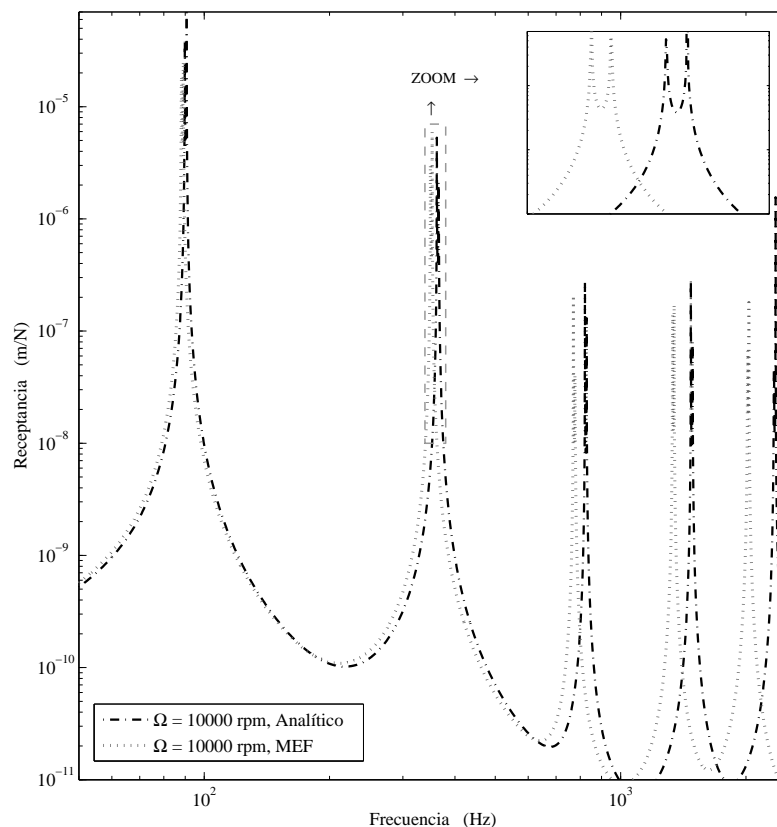


Figura 7.6. *Receptancia cruzada. Cilindro biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

Se observa el mismo comportamiento que en el caso del cilindro biarticulado: un desdoblamiento de las frecuencias de resonancia con la velocidad angular, junto con una tendencia a disminuir su valor.

La figura 7.15 muestra la receptancia modal directa, a distintas velocidades de rotación, del primer modo de flexión del cilindro de radio $R_1 = 0.1$ m.

Para $\Omega = 0$, la respuesta corresponde a la de un sistema de un grado de libertad. Con velocidades angulares no nulas, puede apreciarse, además del desdoblamiento de la resonancia correspondiente a este modo, una perturbación, tanto mayor cuanto más grande es la velocidad de rotación, a las frecuencias de resonancia del tercer modo de flexión.

En la figura 7.16 se muestra la receptancia modal cruzada de éste último correspondiente a fuerza generalizada en el primero. Como se aprecia, presenta picos

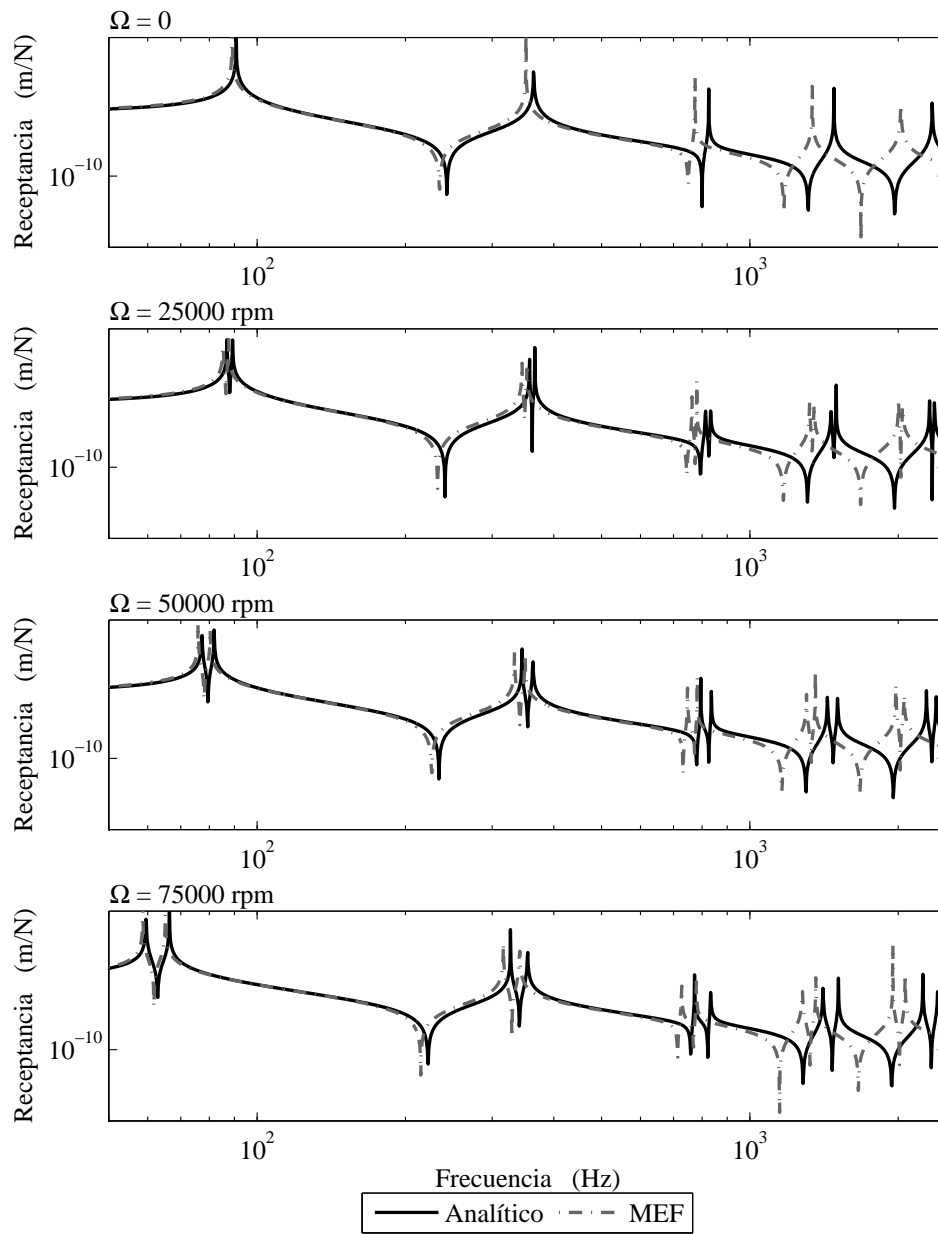


Figura 7.7. Receptancia de punto. Cilindro biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m.

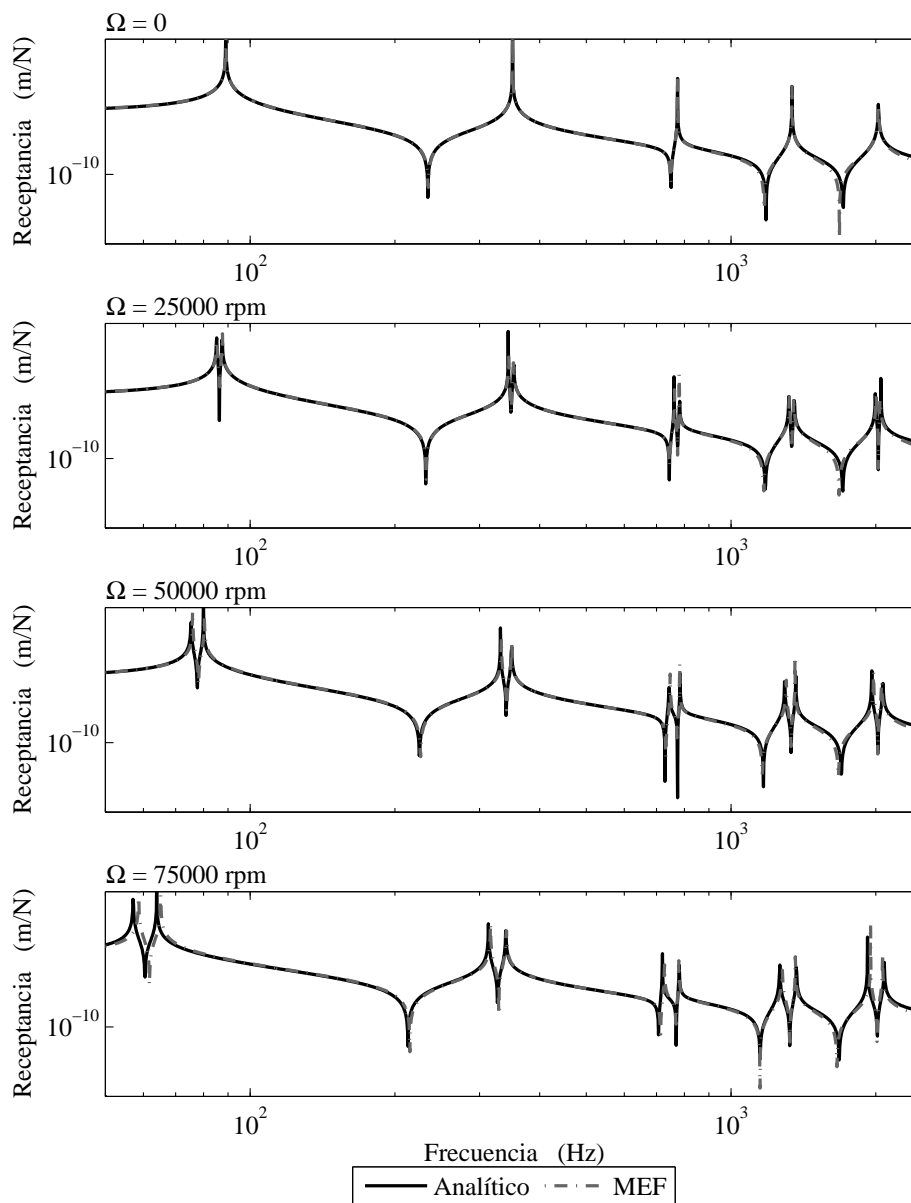


Figura 7.8. Receptancia de punto. Cilindro biarticulado. Radio $R_2 = 0.05$ m. Se ha considerado la misma matriz de rigidez en ambos modelos (mismas frecuencias propias no rotatorias) para apreciar la influencia de los otros términos.

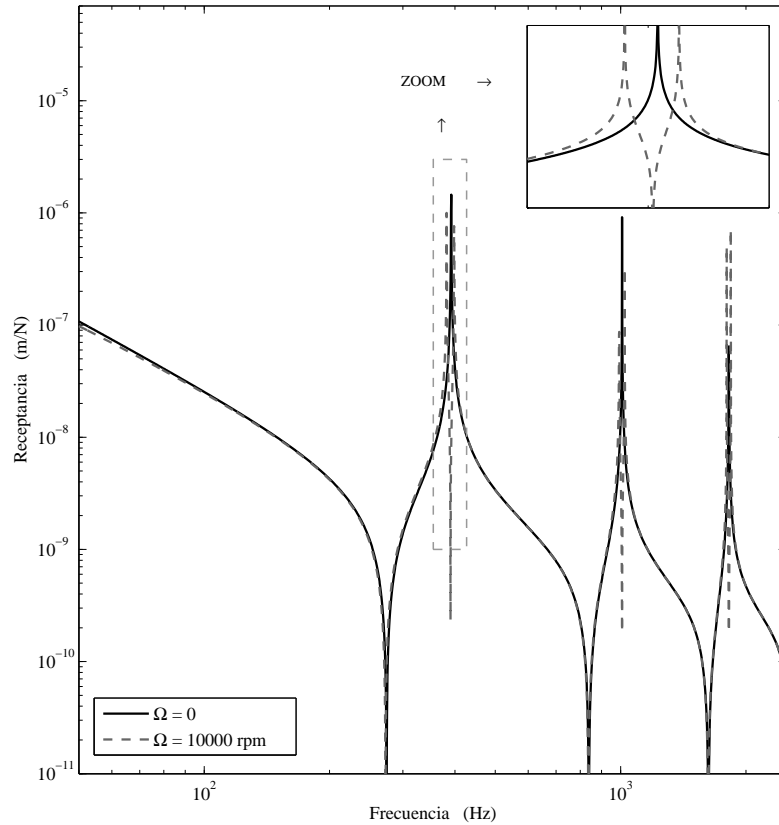


Figura 7.9. *Receptancia de punto. Cilindro libre. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

a las frecuencias de resonancia de ambos modos, primero y tercero de flexión, no apareciendo a las correspondientes al segundo. Estas gráficas ponen de manifiesto el acoplamiento predicho por la ecuación del movimiento entre modos de flexión con el mismo tipo de simetría (modo simétrico o modo antisimétrico).

Las figuras 7.17 y 7.18 muestran las receptancias modales directa y cruzada, respectivamente, del cilindro de radio $R_2 = 0.05$ m. Debido a su mayor esbeltez, en este caso el acoplamiento es más débil, dado que, en el límite para esbeltez infinita, la respuesta tiende a la de la viga no rotatoria. En este modelo se han incluido tres modos de flexión simétricos (primero, tercero y quinto). La receptancia cruzada pone de manifiesto que el acoplamiento se produce entre todos ellos.

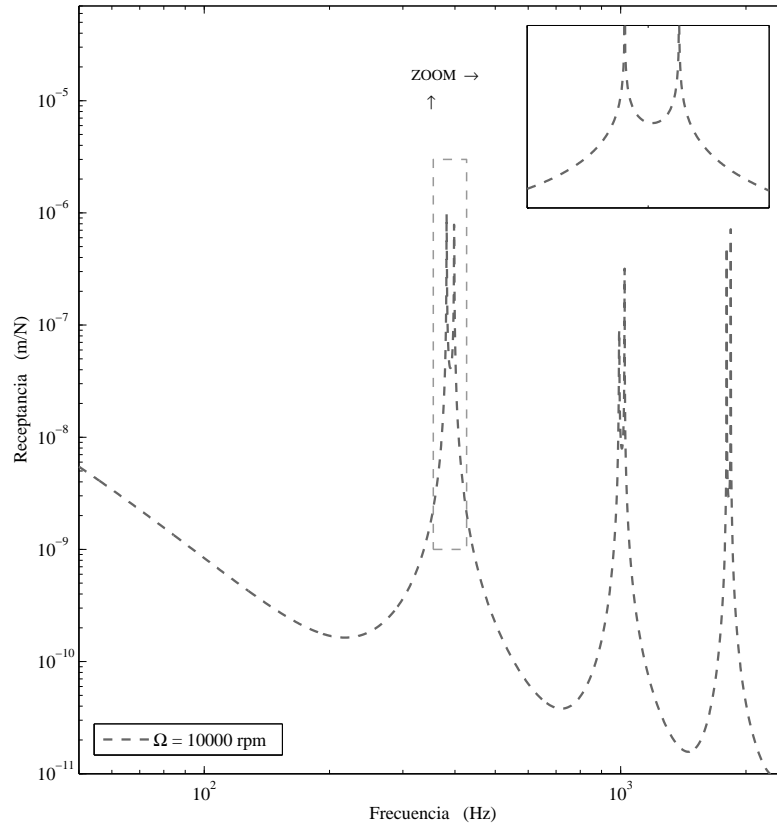


Figura 7.10. *Receptancia cruzada. Cilindro libre. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

7.5. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la dinámica de dos cilindros rotatorios de diferente diámetro, a través de sus receptancias y de sus receptancias modales, ante dos condiciones de contorno: biarticulada y libre.

En el caso biarticulado, se ha comparado la respuesta calculada mediante la ecuación del movimiento obtenida analíticamente con la correspondiente al Método de los Elementos Finitos. Se ha mostrado que las diferencias en la respuesta son debidas, fundamentalmente, a que se modelan comportamientos distintos: el modelo analítico representa un cilindro que se comporta en la flexión como una viga de Rayleigh mientras que el de elementos finitos tiene un comportamiento general, en el que las secciones no tienen porqué permanecer normales a la fibra neutra. Ello afecta especialmente a la matriz de rigidez ($\tilde{\mathbf{K}}$) obtenida, correspondiente a las frecuencias propias

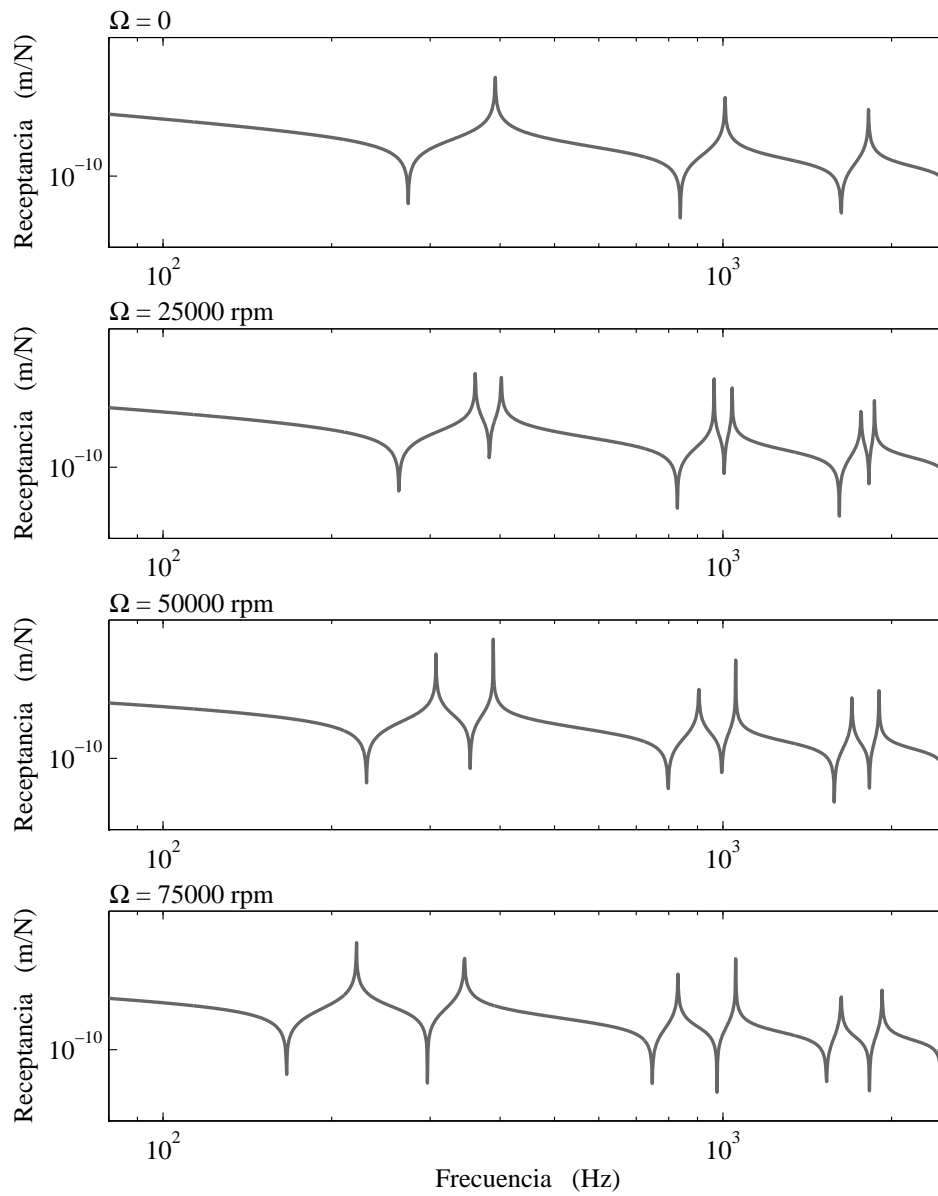


Figura 7.11. *Receptancia de punto. Cilindro libre. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

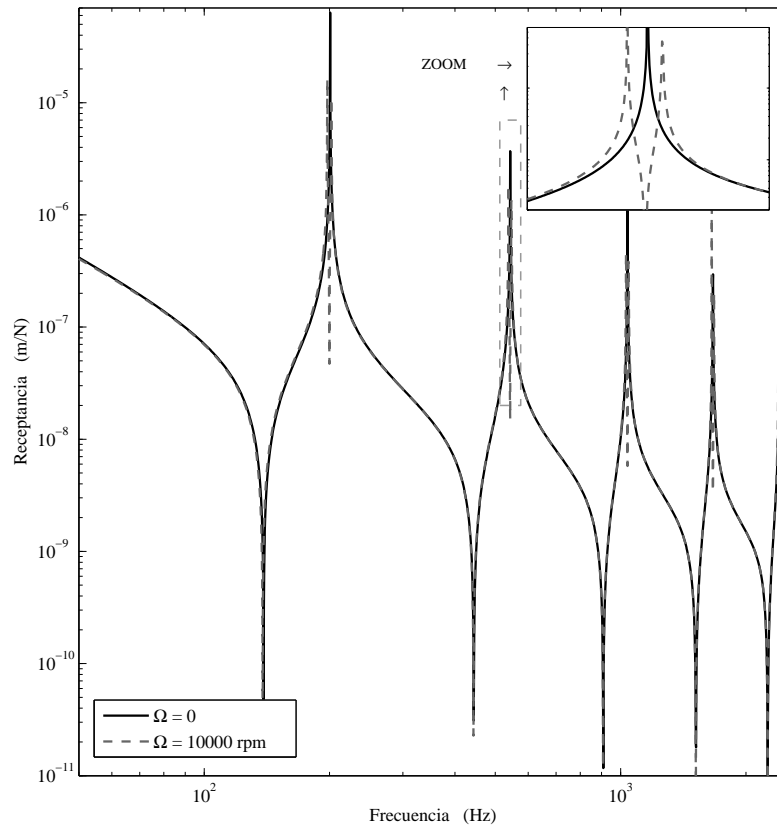


Figura 7.12. *Receptancia de punto. Cilindro libre. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

no rotatorias. Si se sustituyen en un modelo las del otro, las respuestas se aproximan significativamente. Nuevamente, las diferencias son menores al aumentar la esbeltez.

La naturaleza de la respuesta coincide con la obtenida en el capítulo 2 mediante un método independiente. Se observa un desdoblamiento de las frecuencias de resonancia, debido a los términos giroscópicos ($\tilde{\mathbf{G}}$). También se produce una tendencia a disminuir el valor de estas frecuencias, provocada por los términos centrípetos ($\tilde{\mathbf{C}}$).

Las receptancias cruzadas muestran resonancias en el plano contrario al de la excitación, respuesta que en el caso no rotatorio es nula. De la presencia de antirresonancias entre todas las resonancias en la receptancia de punto, y de la ausencia de las mismas en la cruzada, se concluye que existen frecuencias a las que es mayor la respuesta en el plano normal al de excitación que en éste.

Por otro lado, las respuestas de ambos cilindros libres muestran, además, un aco-

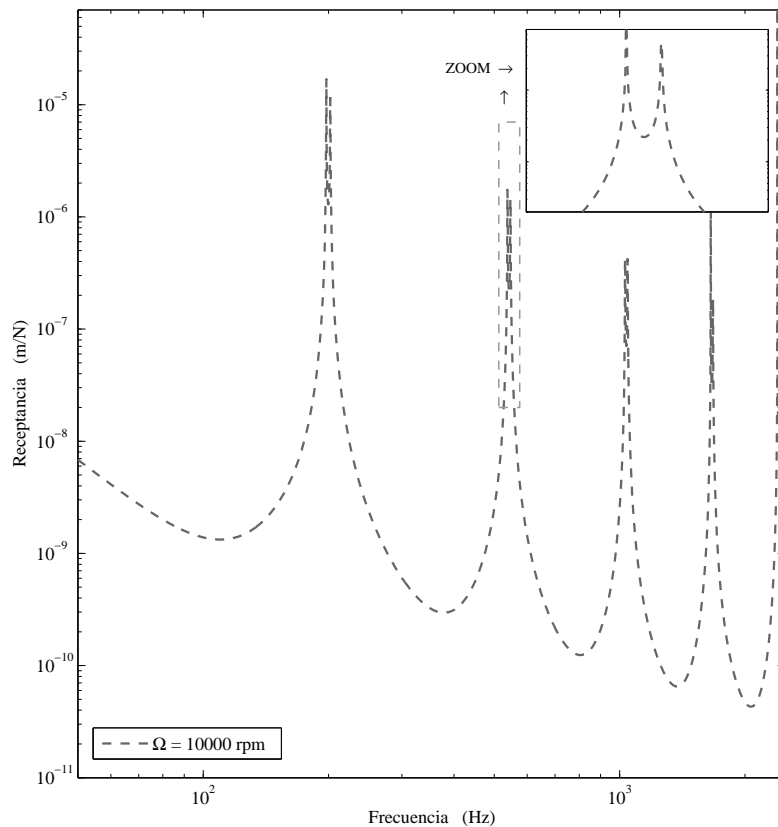


Figura 7.13. *Receptancia cruzada. Cilindro libre. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

plamiento entre todos los modos de flexión con la misma simetría, tal como predice la forma de las matrices de la ecuación del movimiento.

En textos sobre dinámica de rotores [19] pueden encontrarse funciones de respuesta en frecuencia que muestran picos a la frecuencia correspondiente a la velocidad de giro, al doble, al triple... y cuando alguna de estas frecuencias coincide con una natural de eje no rotatorio, muestran un fenómeno de resonancia.

Las receptancias aquí mostradas, en cambio, no presentan tales picos. No obstante, coinciden en su forma con las que aparecen en múltiples publicaciones [8, 30, 64] sobre sistemas en los que los términos giroscópicos no son despreciables: un desdoblamiento de cada pico de resonancia del sistema no rotatorio, y ningún pico a la velocidad de giro.

Éste último es debido a la inclusión en el modelo (o presencia en el sistema real) de

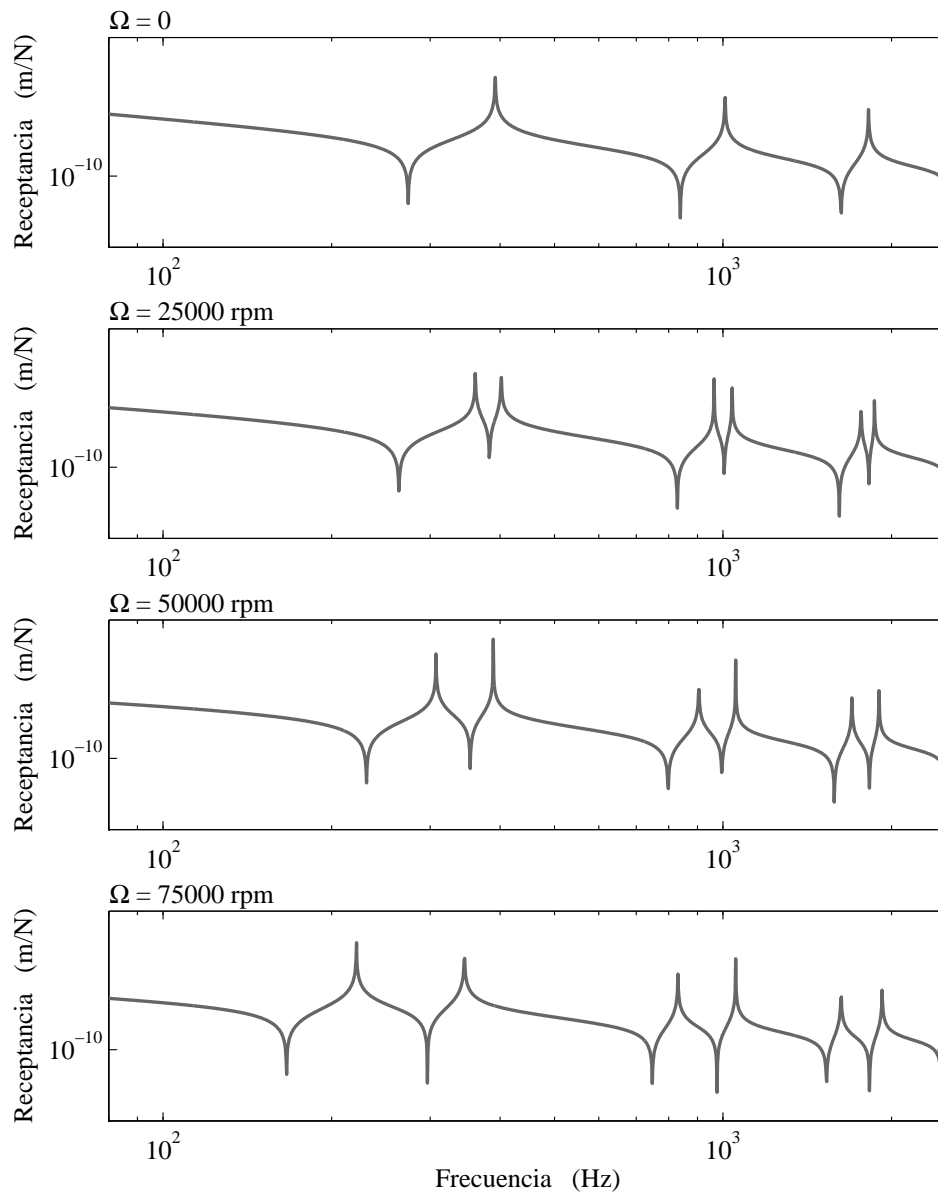


Figura 7.14. *Receptancia de punto. Cilindro libre. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

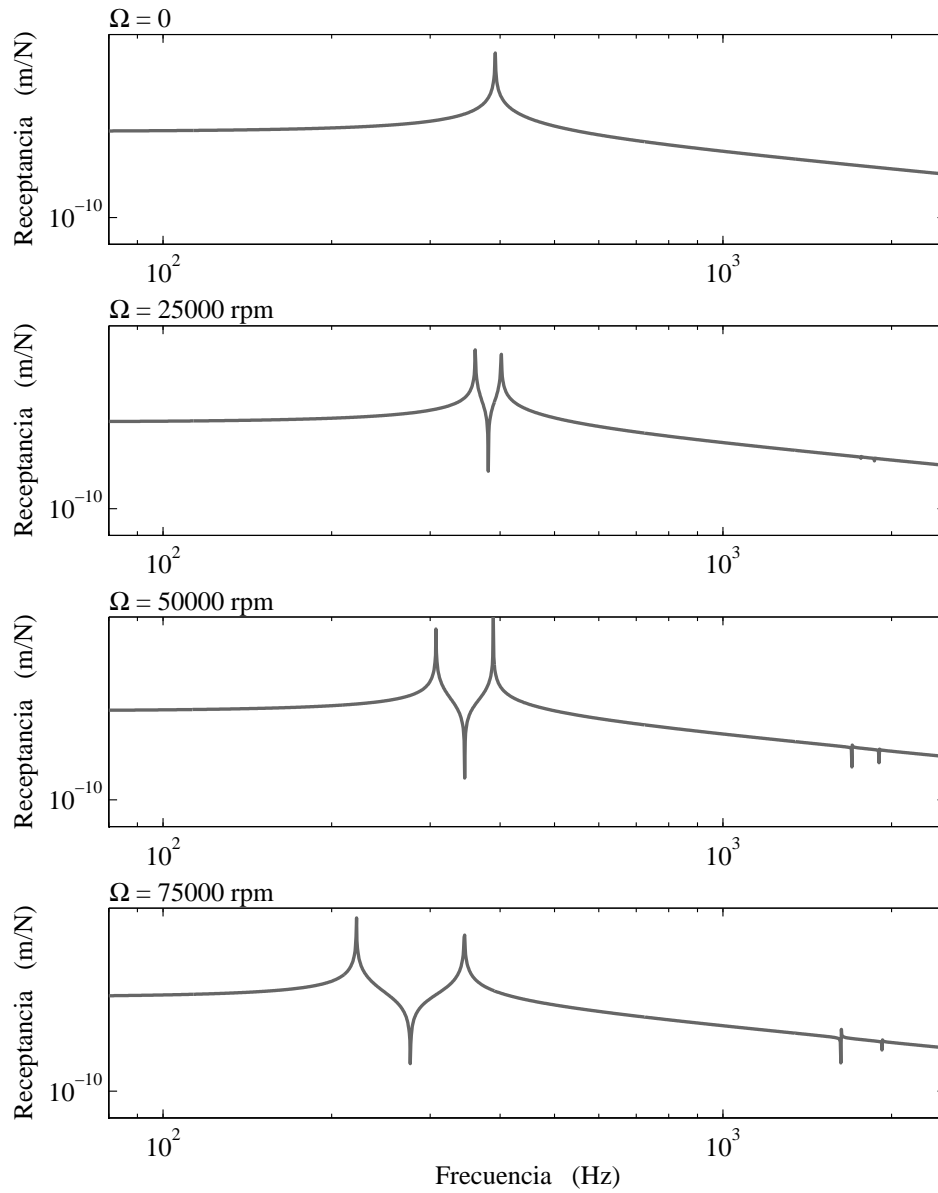


Figura 7.15. *Receptancia modal directa del primer modo de flexión. Cilindro libre. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

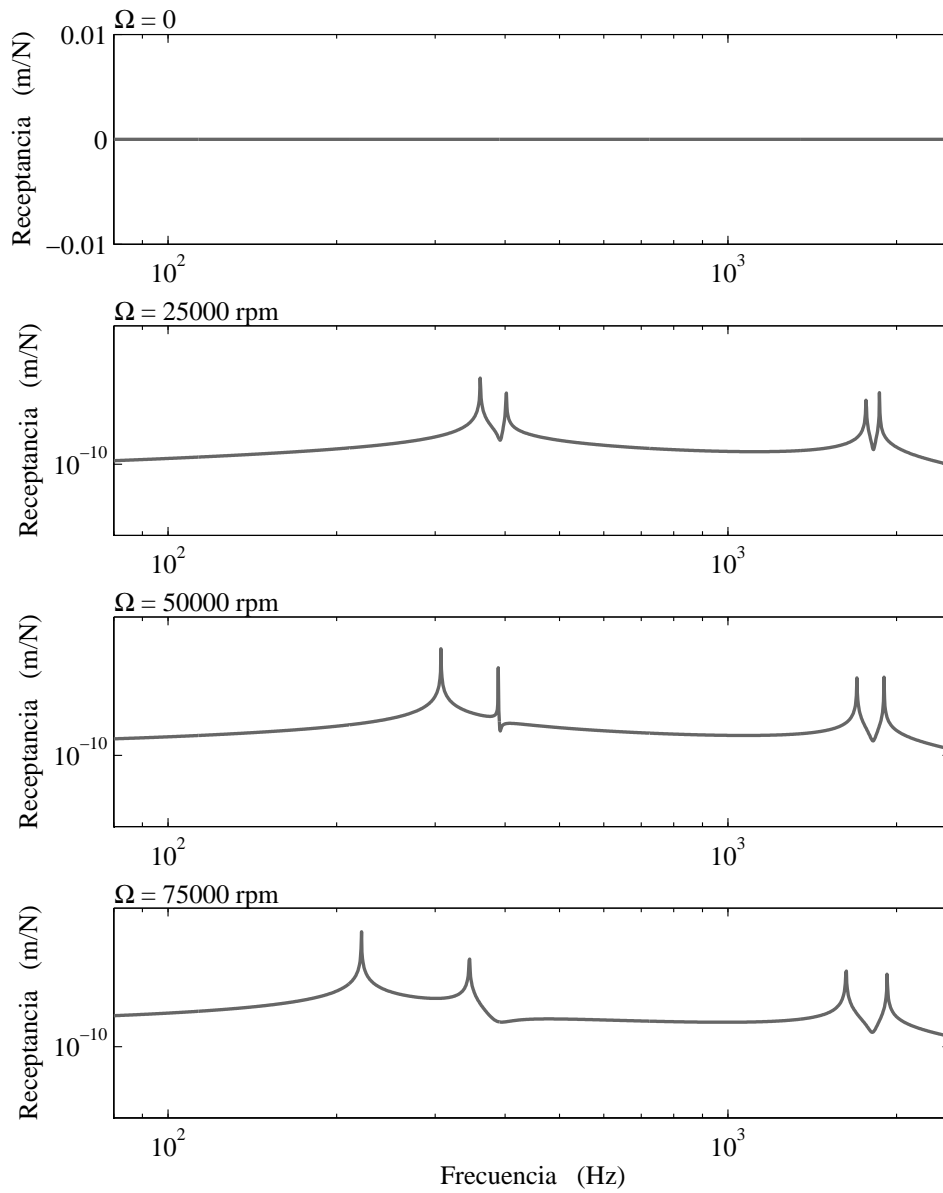


Figura 7.16. *Receptancia modal cruzada del tercer modo de flexión con respecto al primero. Cilindro libre. Radio $R_1 = 0.1$ m.*

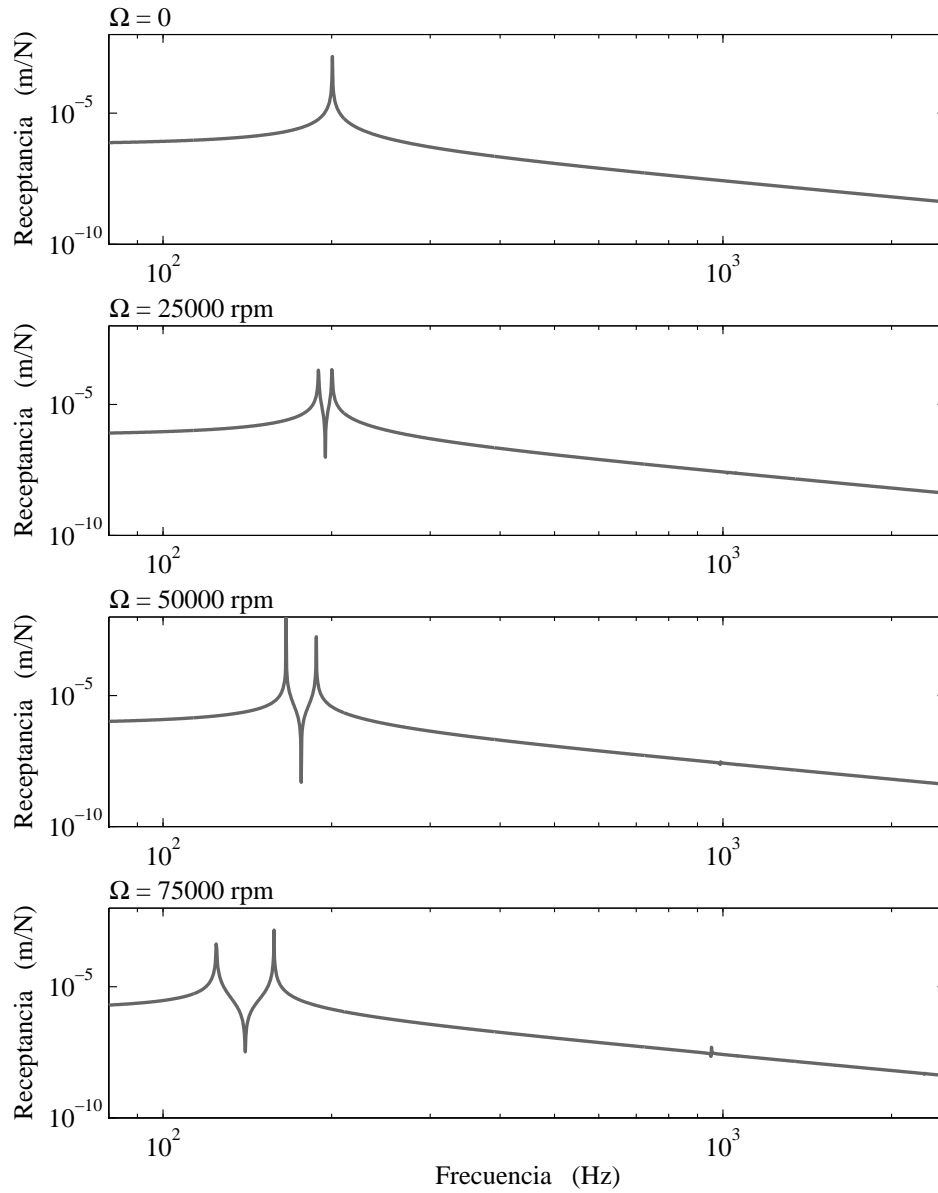


Figura 7.17. Receptancia modal directa del primer modo de flexión. Cilindro libre.
Radio $R_2 = 0.05$ m.

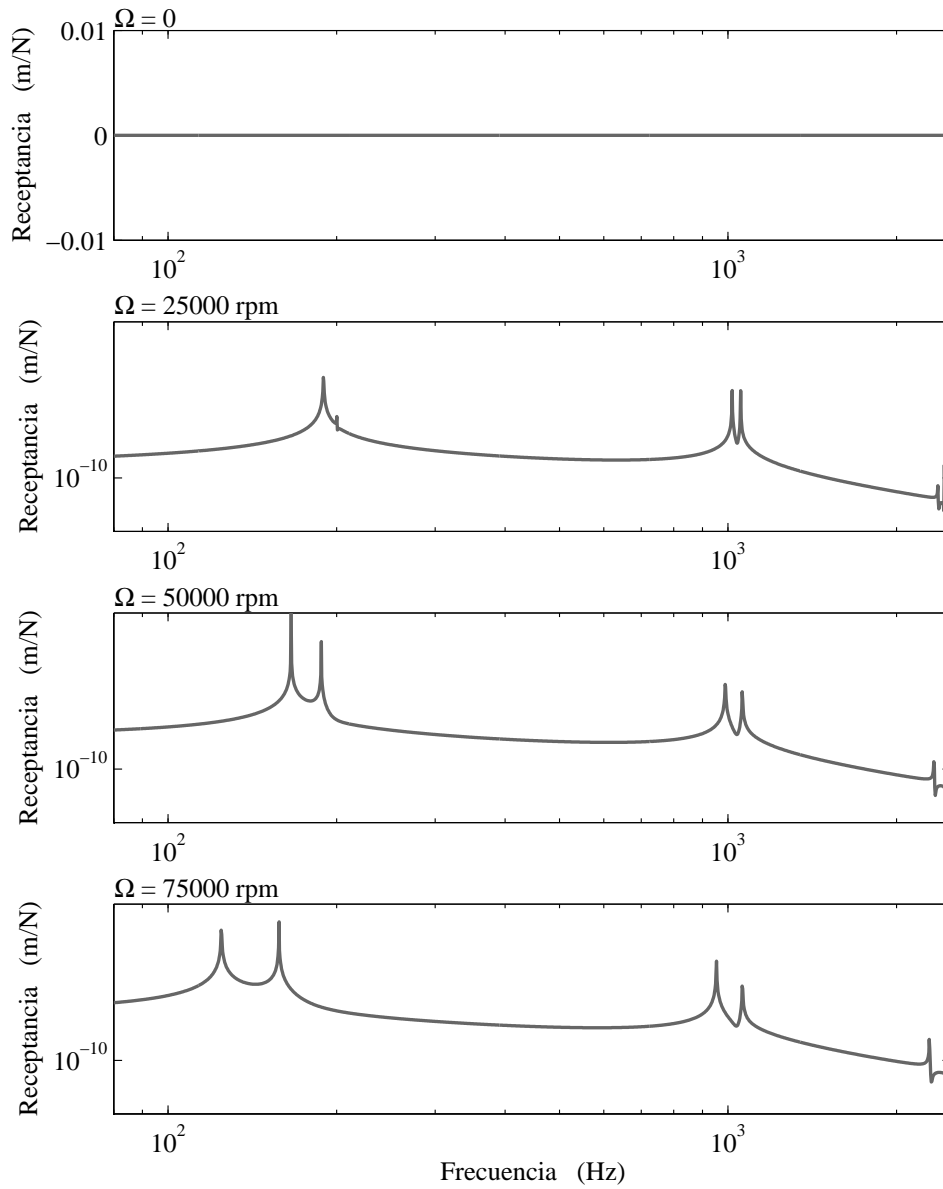


Figura 7.18. *Receptancia modal cruzada del tercer modo de flexión con respecto al primero. Cilindro libre. Radio $R_2 = 0.05$ m.*

una excentricidad en el centro de masas (desequilibrio estático), o a un desequilibrio dinámico.

Además, si la velocidad de rotación no es suficientemente elevada, el desdoblamiento de las frecuencias propias puede pasar desapercibido: los dos picos están muy cercanos, y, con poco amortiguamiento que haya, se funden en uno, a la frecuencia propia del eje no rotatorio. De esta forma, cuando la excitación coincide con ésta se manifiesta la esperada resonancia.

Pero estos casos corresponden a modelos no comparables con los aquí desarrollado, los cuales no tienen en cuenta la excentricidad ni el desequilibrado dinámico ni el amortiguamiento.

Capítulo 8

Aplicación a un eje de vehículo ferroviario

Objeto del capítulo:

La metodología desarrollada en la Tesis es aplicada en este capítulo a la obtención de la ecuación del movimiento de un eje de vehículo ferroviario aislado. De esta manera se alcanza el fin último de esta investigación. Los parámetros del modelo propuesto son calculados a través de una discretización de elementos finitos del eje. La dinámica del eje rotatorio en condición libre es caracterizada mediante funciones de respuesta en frecuencia de receptancia, órbitas modales y órbitas de puntos espaciales.

8.1. Introducción

En este capítulo se obtienen las matrices de la ecuación del movimiento en coordenadas mixtas lagrangianas–eulerianas de un eje de vehículo ferroviario en rotación sobre sí mismo mediante el Método de los Elementos Finitos, con condiciones de contorno de cuerpo libre. El interés de esta condición radica, como se indica en el capítulo 9, en que es la necesaria en el método de síntesis modal empleado en el programa de simulación de dinámica ferroviaria de la UPV.

Este análisis forma parte del objetivo fundamental de la Tesis. Los desarrollos previos han permitido validar la metodología y establecer la influencia de la rotación en la respuesta.

A partir de esta ecuación del movimiento, se obtiene la respuesta del eje ante diferentes excitaciones. Por un lado, se muestran las órbitas modales y las de algunos puntos singulares (las cajas de grasa y donde se produciría el contacto con el carril) ante condiciones iniciales modales. Por otro, la respuesta forzada se caracteriza mediante funciones de respuesta en frecuencia de receptancia.

Como se verá, el comportamiento de un sólido más general que una viga, como es el caso del eje, es sensiblemente más complejo.

Este modelo será implementado en el próximo capítulo en un sistema de simulación de la interacción entre un vehículo ferroviario y la vía.

8.2. Modelo numérico

El modelo de elementos finitos consta de 6809 nodos y 5232 elementos hexaédricos de ocho nodos. La figura 8.1 muestra una imagen de la malla. Se han tomado las propiedades del material, supuesto elástico lineal, dadas en la tabla 8.1.

Módulo de Young	$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Densidad	$\rho = 7850$ kg m ⁻³

Tabla 8.1. *Propiedades del material.*

Se han calculado 107 modos del eje, considerado no rotatorio, incluyendo los seis de sólido rígido. La tabla 8.2 presenta las frecuencias (columna f) y multiplicidades (columna m) de los modos. El índice se refiere al autovalor (frecuencia).

Tal como se explica en la introducción del capítulo 4, los modos de sólido rígido forman un espacio de dimensión seis asociados al autovalor nulo. En este modelo aparecen también algunos autovalores no nulos, asociados a modos elásticos, con multiplicidad mayor que 2. Corresponden a deformadas en las que una rueda puede presentar una deformada simétrica o antisimétrica respecto de la otra, con la misma deformación en

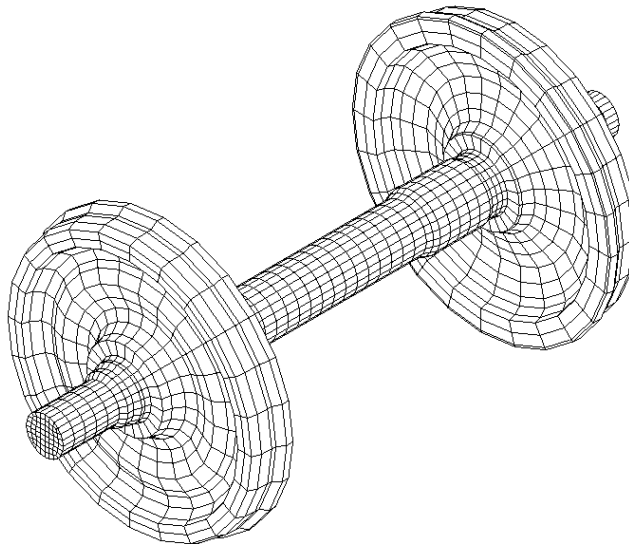


Figura 8.1. *Malla del modelo de elementos finitos del eje.*

la barra central. Puesto que esto puede ocurrir en dos planos, da lugar a un autovalor con multiplicidad cuatro. Tomando los simétricos y los antisimétricos por separado se obtienen dos espacios vectoriales de dimensión dos con simetría de revolución. Tales frecuencias aparecen repetidas en la tabla, de igual forma que la frecuencia nula de sólido rígido.

En la figura 8.2 pueden verse las deformadas de los primeros modos elásticos. Al pie de cada imagen se indica el tipo de modo, la frecuencia propia correspondiente y la variable generalizada q asociada. Algunas de las imágenes muestran el eje seccionado para permitir visualizar mejor la deformada.

La tabla 8.3 muestra los valores no nulos del vector $\tilde{\mathbf{L}}$. El índice hace referencia a la frecuencia propia.

Dado el tamaño de las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}$ (107×107) se van a mostrar de forma gráfica, en lugar de transcribir sus valores numéricos. Las figuras 8.3 y 8.4 muestran la distribución de los elementos no nulos en las matrices $\tilde{\mathbf{G}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}$ en sus primeras 50 filas y columnas. Mediante una escala de grises logarítmica se indica el valor absoluto de cada elemento.

Puede apreciarse que, para un cuerpo general de revolución como es el eje, la estructura de acoplamientos es mucho más compleja que en el caso de una viga.

Índice	f (Hz)	m	Índice	f (Hz)	m	Índice	f (Hz)	m
1	0	1	23	1546.3	2	45	2931.5	2
2	0	2	24	1546.9	2	46	2931.6	2
3	0	1	25	1584.5	2	47	2940.0	2
4	0	2	26	1778.3	2	48	2947.7	2
5	80.034	1	27	1778.3	2	49	2984.0	2
6	93.718	2	28	1841.2	2	50	2984.0	2
7	146.84	2	29	1957.9	2	51	3110.2	1
8	226.65	1	30	1986.2	2	52	3392.1	2
9	287.64	2	31	2153.0	2	53	3505.0	1
10	323.69	1	32	2153.0	2	54	3714.3	1
11	343.83	2	33	2190.6	2	55	3717.1	1
12	343.86	2	34	2223.3	1	56	3743.1	2
13	582.82	2	35	2298.4	2	57	3743.2	2
14	859.02	2	36	2299.9	2	58	3829.5	2
15	937.86	2	37	2409.6	1	59	3837.5	2
16	937.86	2	38	2481.4	1	60	3903.2	2
17	966.60	1	39	2524.0	1	61	3903.2	2
18	1106.8	2	40	2638.5	2	62	3948.4	1
19	1331.6	1	41	2670.3	1	63	3987.5	1
20	1370.4	2	42	2723.1	1	64	4094.9	2
21	1493.4	1	43	2833.8	2			
22	1527.3	1	44	2833.8	2			

Tabla 8.2. *Frecuencias propias.*

Índice (k)	\tilde{L}_k
8	$1.62530 \cdot 10^{-1}$
17	$7.61293 \cdot 10^{-1}$
22	$2.91469 \cdot 10^{+0}$
38	$1.07934 \cdot 10^{+1}$
54	$3.14424 \cdot 10^{-1}$
63	$3.11806 \cdot 10^{+0}$

Tabla 8.3. *Elementos no nulos del vector $\tilde{\mathbf{L}}$.*

8.3. Respuesta a condiciones iniciales modales

Se ha calculado la respuesta de vibraciones libres del eje a partir de las condiciones iniciales modales siguientes: posición $q_8 = 1$ y velocidad $\dot{q}_9 = 1000$, siendo nulas todas las demás. Las coordenadas generalizadas q_8 y q_9 corresponden al primer modo de flexión (índice 6) en los planos vertical y horizontal respectivamente.

En la figura 8.5, las gráficas de la izquierda muestran las órbitas modales, tal

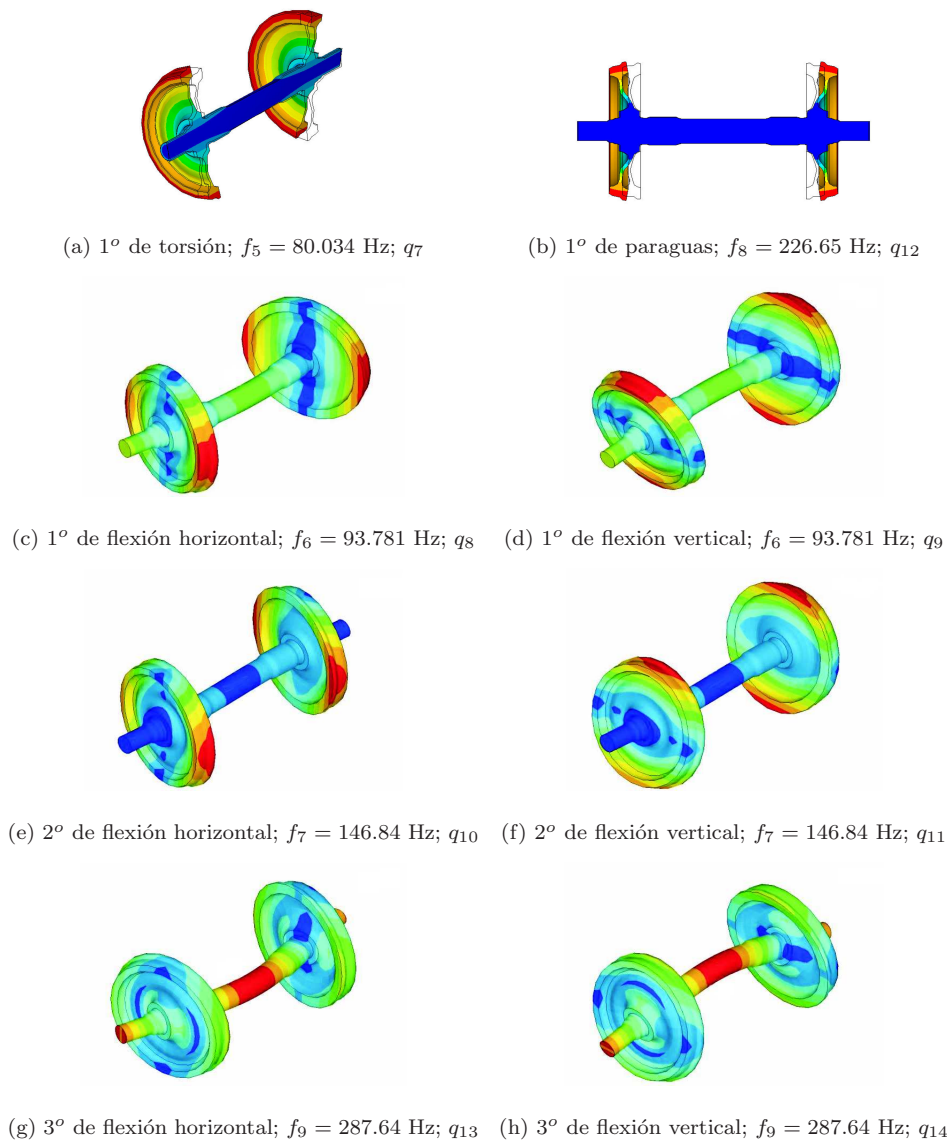
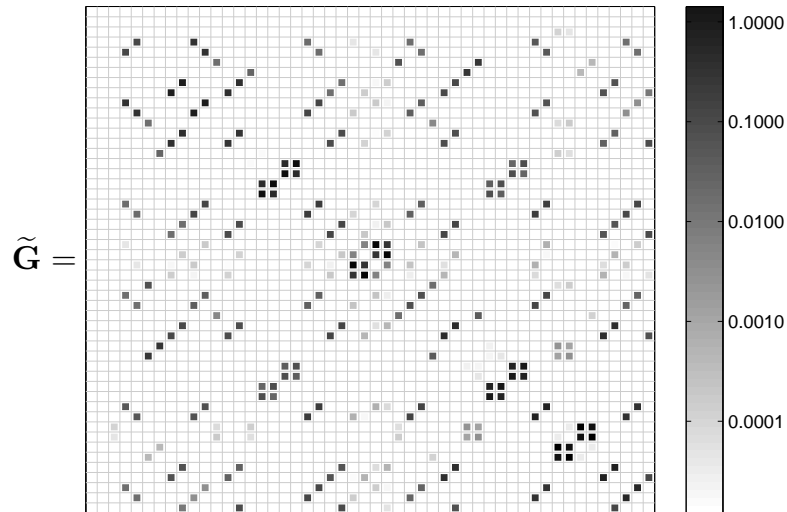
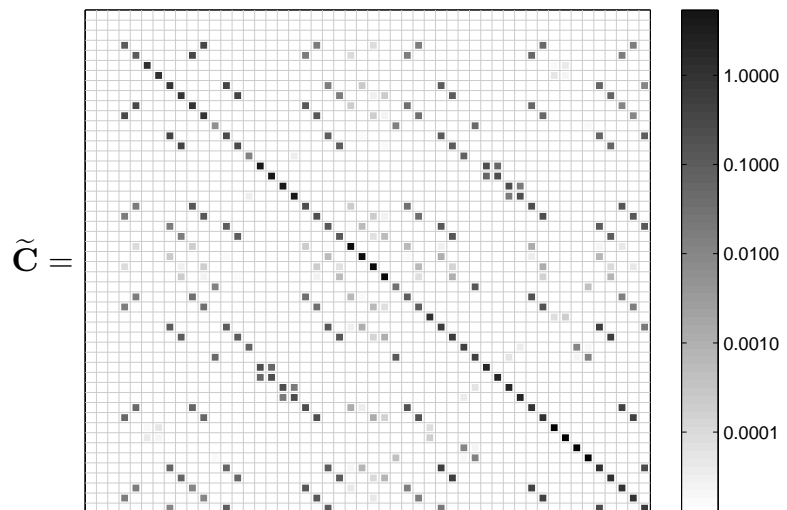


Figura 8.2. *Primeros modos elásticos del eje no rotatorio, frecuencia y coordenada generalizada asociada. Las imágenes (a) y (b) muestran una sección*

como se definieron en el capítulo 2, del primer modo de flexión ante estas condiciones iniciales para varias velocidades de giro. Las gráficas de la derecha muestran las órbitas modales del tercer modo de flexión (índice 9, coordenadas generalizadas q_{13} y q_{14} en los planos horizontal y vertical respectivamente), cuyas condiciones iniciales son nulas.

En las gráficas de la izquierda se observa que las órbitas modales descritas por el

Figura 8.3. Distribución de los elementos en $\tilde{\mathbf{G}}$.Figura 8.4. Distribución de los elementos en $\tilde{\mathbf{C}}$.

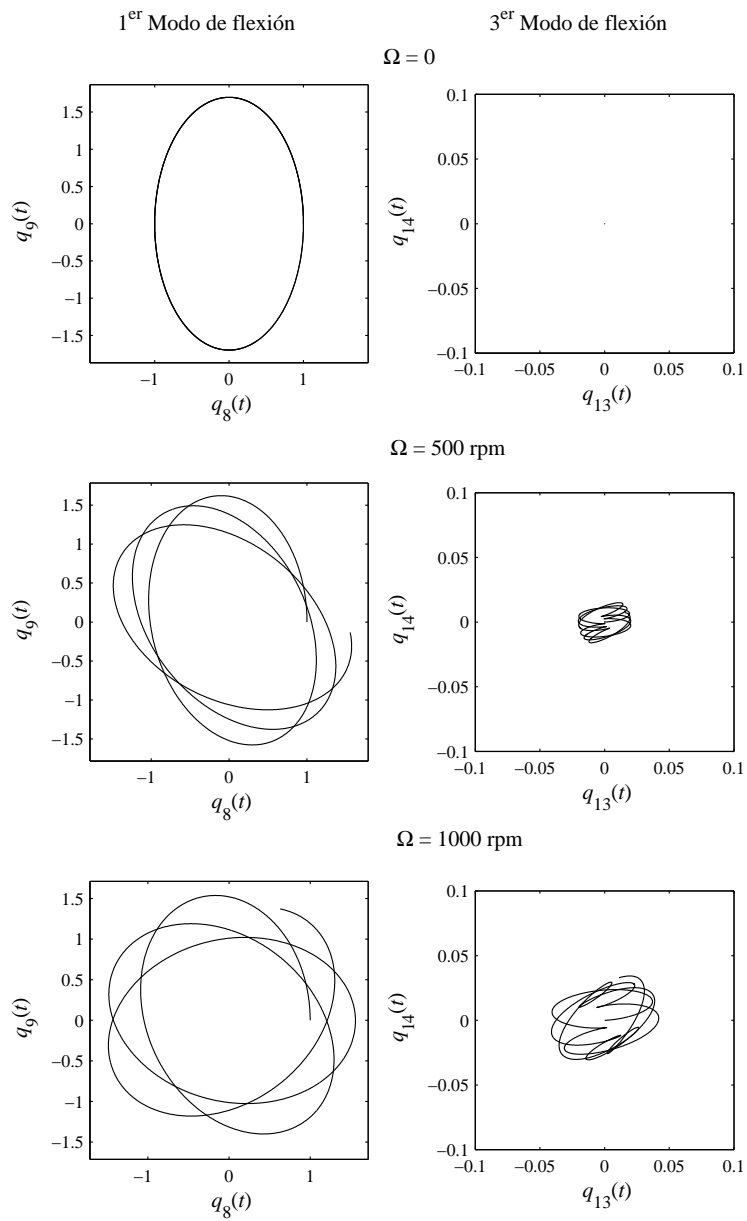


Figura 8.5. Órbitas modales ante las condiciones iniciales de posición $q_8 = 1$ y velocidad $\dot{q}_9 = 1000$, siendo nulas todas las demás.

primer modo de flexión son muy semejantes a las hipotrocoides obtenidas para la viga de Rayleigh. Además, las gráficas de la derecha ponen de manifiesto el acoplamiento entre modos con el mismo tipo de simetría para velocidades angulares no nulas: el tercer modo de flexión responde aún con condiciones iniciales nulas, excitado por las del primero, aunque su amplitud es de un orden de magnitud menor.

En la figura 8.6 se muestran las órbitas descritas por el punto donde se produciría el contacto entre la rueda izquierda y el carril (gráficas de la izquierda) y por el centro de la caja de grasa del mismo lado (a la derecha), para las mismas condiciones iniciales modales anteriores. Se muestra en negro la trayectoria en el espacio tridimensional y en gris las proyecciones de ésta sobre los planos coordenados, con el objeto de facilitar la interpretación espacial de la primera. La dirección x de los ejes corresponde a la longitudinal de la vía, la y a la transversal a la misma, y la z a la vertical. Las dos gráficas superiores corresponden a la respuesta del eje no rotatorio ($\Omega = 0$), y presentan la habitual elipse. Sin embargo, para velocidades de rotación no nula, las trayectorias descritas por estos puntos son semejantes a las hipotrocoides de la viga de Rayleigh calculadas en el capítulo 2.

Por otro lado, la figura 8.7 muestra las órbitas modales de los primeros y terceros modos de flexión cuando la única condición inicial no nula es la de velocidad del primer modo de flexión vertical, $\dot{q}_9 = 1000$. En la figura 8.8 pueden verse las órbitas de los puntos de contacto y de los centros de las cajas de grasa ante esas condiciones iniciales. Es interesante destacar que la respuesta del eje no rotatorio no tiene componentes del desplazamiento a lo largo del eje x , longitudinal de la vía. Sin embargo, para velocidades angulares no nulas, la respuesta en esa dirección es de magnitud comparable a la que se produce en dirección vertical.

8.4. Receptancias

Se ha calculado la receptancia del eje libre en el punto donde se produciría el contacto con el carril, cuando la excitación se produce en el mismo punto y en dirección vertical. En las figuras 8.9 y 8.10 se muestran dos de ellas, calculadas hasta 270 Hz. Evidentemente, alcanzar tal frecuencia cuando la excitación es sincrónica con la velocidad de rotación (como la que producirían excentricidades en el centro de masas de cada sección del eje) implicaría velocidades de traslación inalcanzables por el vehículo. Si embargo, debe tenerse en cuenta que, para otras fuentes de excitación como, por ejemplo, la corrugación del carril, el rango de frecuencias de excitación que se produce se extiende fácilmente por encima de los 300 Hz, sin necesidad de que el vehículo supere los 200 km/h.

La figura 8.9 muestra la receptancia de punto en la dirección vertical. Puede verse el desdoblamiento de las frecuencias de resonancia producido por los términos giroscópicos de la ecuación del movimiento en los modos de flexión. También se muestra la resonancia correspondiente al primer modo de paraguas, que no se ve afectado por la rotación.

En la figura 8.10 se ve la receptancia cruzada en el mismo punto y para la misma carga, correspondiente a la respuesta en la dirección longitudinal de la vía. Se aprecia que la respuesta no es nula cuando existe velocidad de rotación, presentando resonancias a las mismas frecuencias que la respuesta en la dirección vertical. La presencia de desplazamientos en la dirección de la vía, aún sin excitación en esa dirección, puede ayudar a explicar procesos de corrugación sin un eje motor.

8.5. Conclusiones

En este capítulo se han obtenido los términos de la ecuación del movimiento en coordenadas mixtas lagrangianas–eulerianas de un eje de vehículo ferroviario sometido a rotación. La estructura de las matrices obtenidas muestra un sistema con un mayor grado de acoplamiento.

La respuesta dinámica del eje ha sido caracterizada mediante tres tipos de representación: órbitas modales; órbitas de dos puntos significativos del sistema, el centro de una caja de grasa y el que sería de contacto con el carril; y receptancias de éste último punto en direcciones vertical y longitudinal de la vía, para carga vertical.

Las órbitas corresponden a la respuesta libre a partir de dos conjuntos de condiciones iniciales modales. En primer lugar, se han calculado con unas condiciones iniciales de posición en el primer modo de flexión vertical y de velocidad en el homólogo horizontal. Muestran que la rotación produce acoplamiento tanto entre éstos dos (correspondientes al mismo autovalor), como con modos asociados a autovalores diferentes, habiendo una gran diferencia respecto a la respuesta modal del eje no rotatorio.

Las trayectorias del punto de contacto y de la caja de grasa a partir de estas condiciones iniciales muestran, en ausencia de rotación, la esperada elipse. Sin embargo, con velocidades de rotación no nulas, la trayectoria es semejante a una hipotrocoide.

Al efecto de mostrar lo que este tipo de órbitas implica, se han obtenido también a partir de condiciones iniciales exclusivamente de velocidad en el primer modo de flexión vertical. La respuesta del eje no rotatorio es la conocida: sólo responde el modo al que corresponden las condiciones iniciales, y las trayectorias espaciales de los puntos se mantienen en un plano vertical, normal al eje de la vía. Esto lleva a que, habitualmente, en modelos de dinámica ferroviaria, se considere desacoplada la dinámica vertical de la longitudinal. No obstante, con velocidades angulares no nulas, responden también otros modos, tanto de la misma frecuencia como de otras, resultando unas trayectorias que, aunque conforman curvas planas, tienen componentes de desplazamiento en la dirección longitudinal de la vía. Es de esperar que esta capacidad de desplazamiento altere la fuerza de contacto entre la rueda y el carril en esta dirección. Igualmente, debe alterar la fuerza entre el eje y el resto del vehículo.

Por último, se han calculado receptancias en el punto de contacto ante carga vertical. Los resultados muestran un desdoblamiento de algunas frecuencias de resonancia (las correspondientes a modos cuya deformada no presenta geometría de revolución),

por lo que aparecen a frecuencias distintas que en el caso de no rotatorio, y en mayor número. Por otro lado, se encuentra que la receptancia cruzada, obtenida como el desplazamiento en la dirección longitudinal de la vía cuando la carga es vertical, no es nula cuando existe velocidad de rotación, presentando resonancias a las mismas frecuencias que el caso de desplazamiento vertical.

Todo esto lleva a concluir que el hecho de que el eje sea un sólido flexible rotatorio tiene una gran influencia en la dinámica acoplada entre el vehículo y la vía.

Diversos resultados de este estudio han sido publicados en *Proceedings of 20th Symposium of the International Association for Vehicle System Dynamics* [33] y en las *Actas del XVII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica* [34].

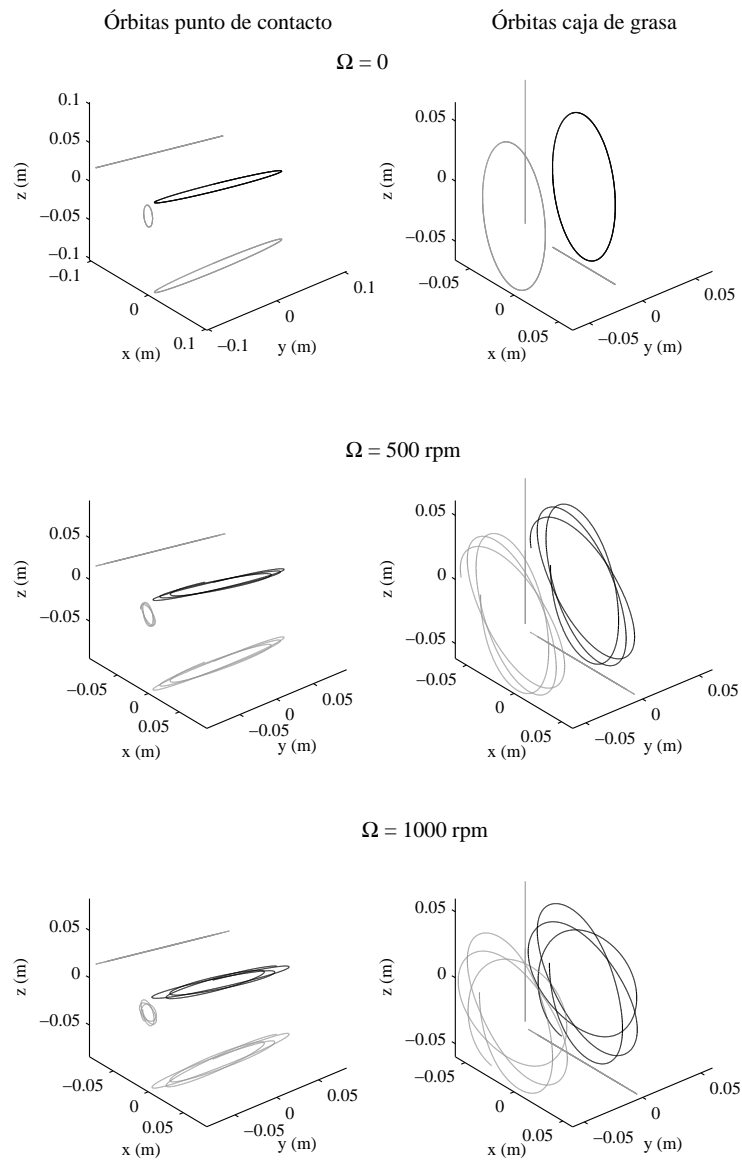


Figura 8.6. Órbitas del punto del punto de contacto y del centro de la caja de grasa ante las condiciones iniciales de posición $q_8 = 1$ y velocidad $\dot{q}_9 = 1000$, siendo nulas todas las demás.

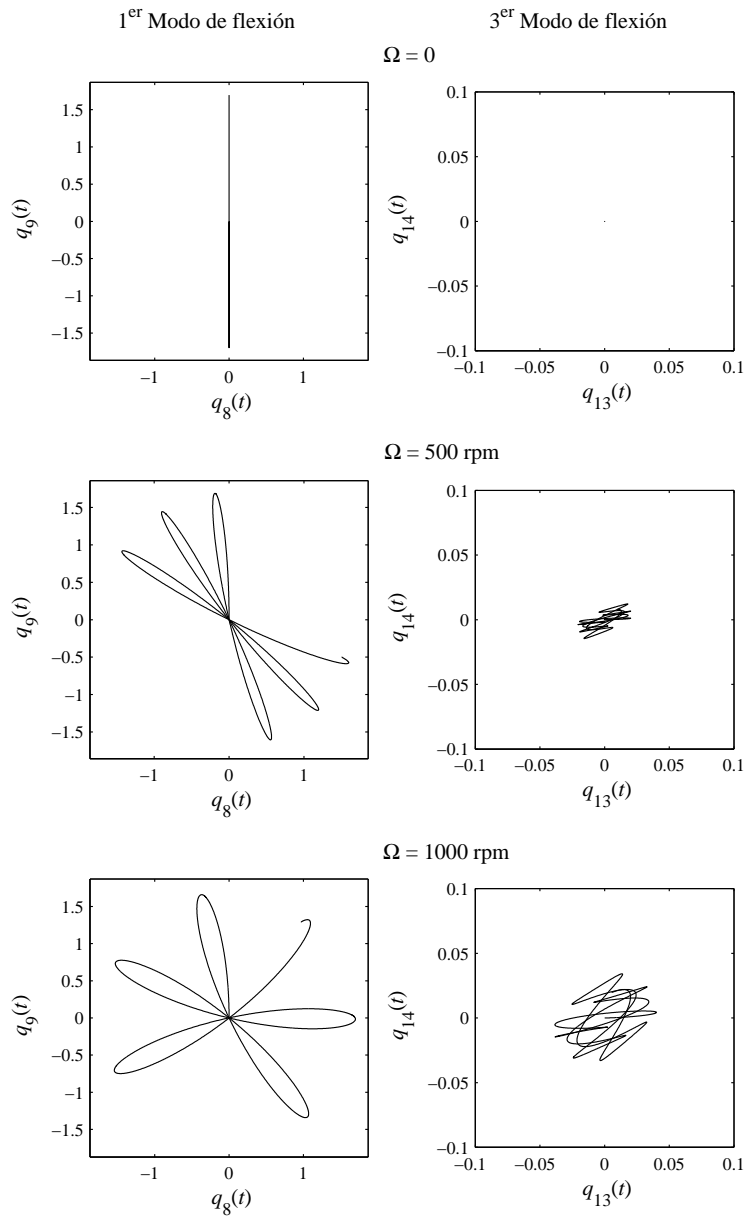


Figura 8.7. Órbitas modales ante la condición inicial de velocidad $\dot{q}_9 = 1000$, siendo nulas todas las demás.

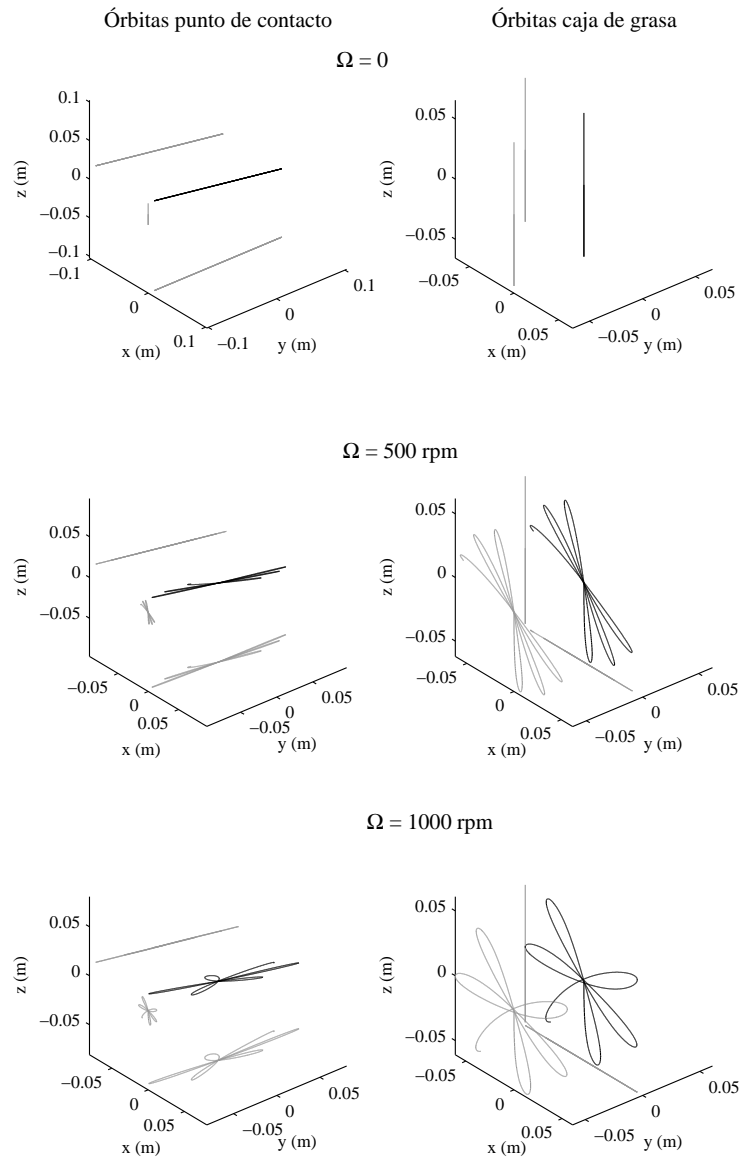


Figura 8.8. Órbitas del punto del punto de contacto y del centro de la caja de grasa ante la condición inicial de velocidad $\dot{q}_9 = 1000$, siendo nulas todas las demás.

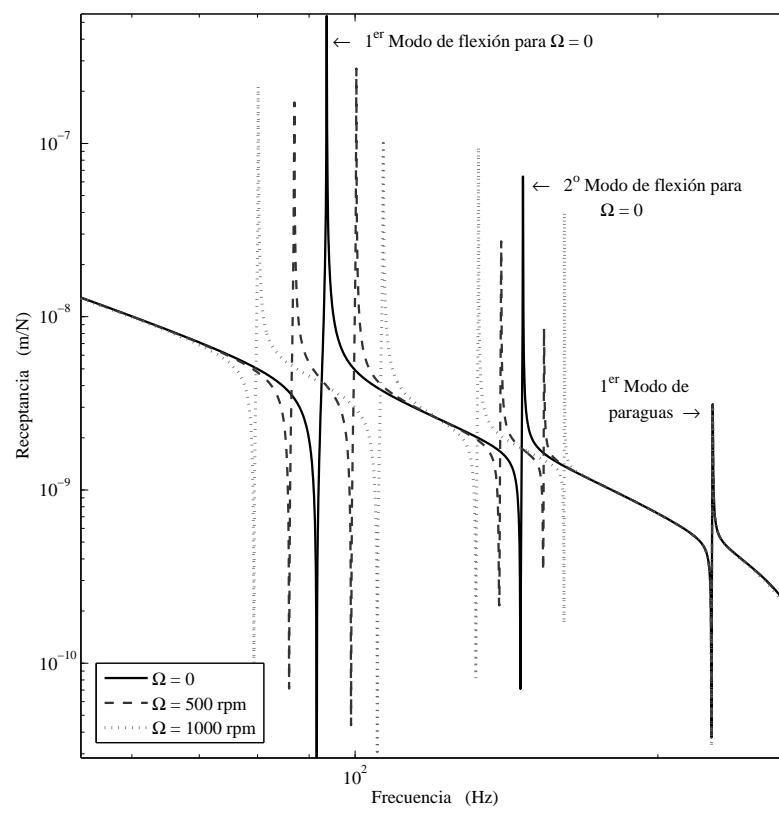


Figura 8.9. Receptancia de punto en dirección vertical en el punto de contacto.

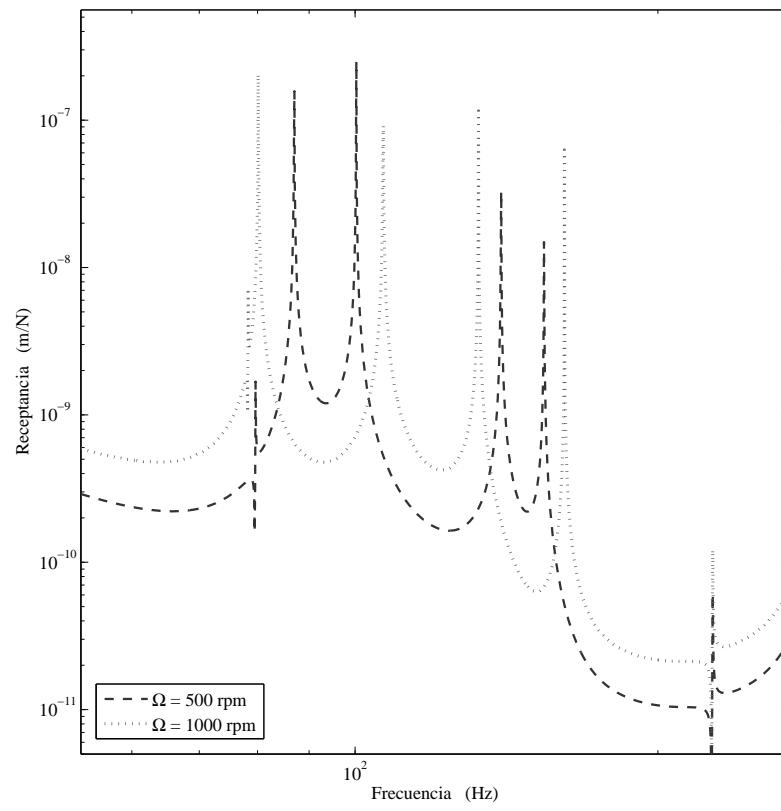


Figura 8.10. Receptancia cruzada en el punto de contacto: excitación vertical, respuesta longitudinal.

Capítulo 9

Aplicación a modelos de interacción vehículo ferroviario–vía

Objeto del capítulo:

Este capítulo complementa el objetivo último de la Tesis, introduciendo el modelo del eje rotatorio desarrollado en un programa de simulación de la dinámica acoplada entre un vehículo ferroviario y la vía. Se estudia la influencia de la rotación del eje en la fuerza de contacto rueda–carril. Los casos analizados corresponden a la dinámica originada por la circulación de vehículos afectados por planos de bloqueo, y al paso de vehículos sobre vías corrugadas.

9.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha obtenido un modelo dinámico del eje montado de un vehículo ferroviario. La utilidad práctica de este modelo puede asociarse con cualquiera de los múltiples casos de análisis que son objeto de estudio de la dinámica ferroviaria. A través de estos análisis pueden ser caracterizados problemas que afectan a la seguridad ante el descarrilamiento, a la confortabilidad vibratoria, al mantenimiento de la vía y de los vehículos y, en definitiva, a la explotación.

Es habitual agrupar los modelos dinámicos según el rango de frecuencias de validez. En un primer grupo encontramos aquellos modelos que alcanzan hasta aproximadamente 40 Hz, mediante los cuales se analizan los problemas de estabilidad transversal, esfuerzos de guiado y seguridad considerados en la UIC 518 [1, 79]. Quizá la característica más importante de estos modelos es que se desprecia el comportamiento dinámico de la vía, considerándose ésta como una barra fija o un medio flexible sin masa. En un rango que abarca desde 30 Hz hasta 2 kHz, encontramos lo que se conoce como *alta frecuencia* o interacción dinámica del vehículo con la vía. Sus características básicas fueron establecidas por Knothe y Grassie en [47]. Un aspecto básico de estos modelos es el modelado de la vía, dado que debe ser representada de forma que sea posible analizar su dinámica estructural. Este tipo de estudios ha permitido analizar fenómenos dinámicos que tienen su origen en las irregularidades de la banda de rodadura y/o del camino de rodadura en el carril, y que afectan al mantenimiento de los vehículos (poligonización de ruedas, planos de bloqueo en ruedas), al de la vía (corrugación del carril) y a la emisión acústica asociada con la rodadura. Se puede considerar la dinámica de alta frecuencia como ejemplo en el que potencialmente existirán diferencias entre resultados derivados de un modelado del eje rígido y uno elástico.

Sin que haya sido suficientemente justificado, usualmente los modelos de interacción dinámica vía-vehículo consideran modelos del eje rígido. Las aportaciones en las que se introduce un modelo flexible no rotatorio se reducen a la Tesis de Andersson [2]. No ha sido investigada la influencia de los efectos inerciales y giroscópicos asociados a la rotación sobre la dinámica del sistema vía-vehículo.

Con el fin de investigar tales efectos, en este capítulo se procederá a la implementación del modelo del eje propuesto en un programa de simulación de la interacción dinámica de un vehículo con la vía. Para ello, en primer lugar se describe brevemente este método (apartado 9.2). Posteriormente (apartado 9.3) se procede a implementar el eje como un cuerpo flexible rotatorio. Finalmente, en el apartado 9.4 se muestran los resultados de dos simulaciones: un eje afectado de un plano de bloqueo, y la circulación sobre una vía corrugada. En ambos casos, se comparan las fuerzas de contacto entre la rueda y el carril obtenidas con un eje rígido no rotatorio, un eje flexible no rotatorio y un eje flexible rotatorio.

9.2. Modelo de interacción de la UPV

El modelo desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la UPV [10, 66] permite determinar la dinámica acoplada entre un vehículo y la vía. Se modela la vía completa (dos carriles), admitiéndose la posibilidad de que exista un comportamiento asimétrico con respecto al eje de la vía. Este modelo sólo considera la dinámica vertical del sistema, por lo que no permitirá alcanzar conclusiones sobre la influencia de la rotación del eje sobre las fuerzas horizontales.

Puesto que el modelo global vía-vehículo está basado en la implementación de técnicas de subestructuración, facilita la implementación del modelo del eje desarrollado en el capítulo 4 según la ecuación (4.101) como un elemento más. En particular, el método empleado es la de síntesis modal de componentes de McNeal [52], por lo que la ecuación (4.101) debe representar al eje en condición libre.

La técnica consiste en un modelo híbrido que combina coordenadas físicas y modales, y en el que la respuesta es calculada en el dominio del tiempo mediante integración numérica. El modelo propone la subestructuración del sistema en tres tipos de elementos: carriles, traviesas y el vehículo, uno de cuyos componentes es el eje (o los ejes). Cada uno de estos elementos por separado tiene características que pueden ser consideradas lineales. Las no linealidades se sitúan fundamentalmente en los elementos que conectan las subestructuras entre sí: contacto rueda-carril, balasto y placas de asiento.

9.2.1. Modelado de la vía

El modelo desarrollado está basado en la subestructuración de la vía, considerando la descripción modal de cada carril y traviesa de forma aislada. El balasto y las placas de asiento se consideran como elementos de conexión, el primero entre las traviesas y la *estructura de la vía*, el segundo entre traviesas y carriles.

El comportamiento dinámico de las subestructuras (carriles y traviesas) de forma aislada es asimilado a vigas de características lineales. Las traviesas se modelan como vigas de Winkler, considerando el balasto como la base elástica. Inicialmente, por lo tanto, se considera el balasto con características lineales. No obstante es posible incluir las no linealidades tal como se propone en [2], incorporándolas como fuerzas externas función de los desplazamientos.

El sistema de coordenadas global xyz está definido con el eje x positivo en la dirección del movimiento del vehículo. El eje z es vertical y hacia arriba y el eje y transversal a la vía. Un esquema del modelado de la traviesa se muestra en la figura 9.1. Los desplazamientos verticales de la traviesa s -ésima vienen dados por la función $u_s(y, t)$, siendo y la coordenada de la sección estudiada. Las fuerzas F_{rs}^p ejercidas por los carriles a través de las placas de asiento están aplicadas en $y = d_r$ (el índice $r = 1, 2$ corresponde, respectivamente, al carril izquierdo y derecho).

Se define $\psi_n(y)$ como el modo no amortiguado n -ésimo normalizado con respecto

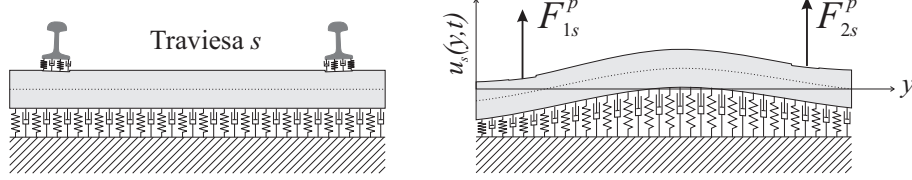


Figura 9.1. Modelado de la traviesa.

a masa unitaria y ω_n la frecuencia propia correspondientes a la viga de Winkler (reservamos los números de modos $n = -1$ y $n = 0$ para aquellos que no producen deformación elástica de la viga). Se ha considerado el amortiguamiento a través de la tasa de amortiguamiento modal ξ_n asociada a cada modo de la traviesa aislada sobre la base elástica.

Las transformaciones que relacionan los desplazamientos de la traviesa con las coordenadas modales de la viga aislada por un lado, y las fuerzas transmitidas a través de las placas de asiento con las fuerzas modales por otro, son las siguientes:

$$u_s(y, t) = \sum_{n=-1}^{N_{ms}} \psi^n(y) q_{sn}^S(t) \quad f_{sn}^S(t) = \sum_{r=1}^2 F_{rs}^p \psi_n(d_r) \quad (9.1)$$

donde $q_{sn}^S(t)$ y $f_{sn}^S(t)$ representan respectivamente la coordenada y fuerza modal asociada al modo n -ésimo de la traviesa s -ésima. Se ha realizado un truncamiento modal, considerándose un número finito N_{ms} de modos de vibración de la traviesa.

El movimiento vertical del carril está definido por la variable $v_r(x, t)$, siendo x la coordenada que sitúa la sección de la viga desde un extremo, tomando como sentido positivo el de avance del vehículo (ver Figura 9.2). La traviesa s -ésima se encuentra en la sección $x = b_s$ del carril. Se considera un vehículo con N_{ax} ejes (empleamos el subíndice a para identificar cada eje; a varía entre 1 y N_{ax}). La posición de cada uno de los ejes es $x = c_a + Vt$, donde V es la velocidad con la que se desplaza el vehículo, y c_a es la coordenada inicial correspondiente. Sobre cada carril r -ésimo actúa un conjunto de fuerzas F_{rs}^p ejercidas por cada traviesa s -ésima a través de las placas de asiento, y las fuerzas F_{ra}^c que transmiten las ruedas del eje a -ésimo a través del contacto rueda-carril.

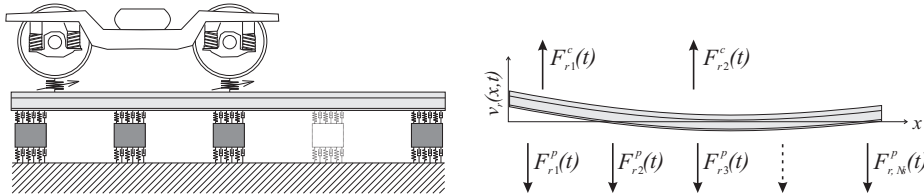


Figura 9.2. Modelado del carril.

El modelo dinámico correspondiente al carril está basado en una descripción modal del mismo. Denominamos λ_m y $\Upsilon_m(x)$ a la frecuencia natural no amortiguada y al modo de vibración de un carril aislado normalizado con respecto a la masa (subíndice m , variando entre -1 y el número de modos del carril N_{mr} ; reservamos los números de modos $m = -1$ y $m = 0$ para aquellos que no producen deformación elástica de la viga). Considerando el carril como una viga de Timoshenko, los correspondientes modos y frecuencias propias pueden obtenerse analíticamente. Consideraremos el amortiguamiento definido a través de la tasa de amortiguamiento modal ζ_m . En este caso, las relaciones modales son:

$$\left. \begin{aligned} \nu_r(x, t) &= \sum_{m=-1}^{N_{mr}} \Upsilon_m(x) q_{rm}^R(t) \\ f_{rm}^R(t) &= \sum_{a=1}^{N_{ax}} F_{ra}^c \Upsilon_m(c_a + Vt) - \sum_{s=1}^{N_s} F_{rs}^p \Upsilon_m(b_s) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

donde $q_{rm}^R(t)$ y $f_{rm}^R(t)$ representan respectivamente la coordenada y fuerza modal asociada al modo m -ésimo del carril r -ésimo.

9.2.2. Obtención de las ecuaciones del movimiento de la vía

Según el modelo de la vía realizado en el punto anterior, la FRF de receptancia correspondiente al modo n -ésimo de una traviesa aislada es:

$$H_n^S(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2 + 2\xi_n \omega_n \sigma + \omega_n^2} \quad (9.3)$$

donde σ representa la variable de Laplace. El modelo del modo n -ésimo de la traviesa s -ésima, dado por (9.3), puede ser expresado en el dominio del tiempo a través de la ecuación siguiente:

$$\ddot{q}_{sn}^S(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_{sn}^S(t) + \omega_n^2 q_{sn}^S(t) = f_{sn}^S(t) \quad (9.4)$$

siendo ξ_n el amortiguamiento modal, ω_n la frecuencia propia no amortiguada y $f_{sn}^S(t)$ la fuerza generalizada de las fuerzas aplicadas sobre la traviesa s -ésima. Las coordenadas anteriores son ampliadas a un conjunto mayor a partir del cual es posible definir un espacio de fase. Para el modo n -ésimo de la traviesa s -ésima, las coordenadas de fase están dadas por $q_{sn}^S(t)$ y $p_{sn}^S(t)$, con $p_{sn}^S(t) = \dot{q}_{sn}^S(t) + 2\xi_n \omega_n q_{sn}^S(t)$. Dichas coordenadas permiten reescribir la anterior ecuación del movimiento modal, (9.4), como las siguientes expresiones

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{sn}^S(t) &= -2\xi_n \omega_n q_{sn}^S(t) + p_{sn}^S(t) \\ \dot{p}_{sn}^S(t) &= -(\omega_n)^2 q_{sn}^S(t) + f_{sn}^S(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

variando s entre 1 y el número de traviesas N_s , y n entre -1 y el número de modos de la traviesa N_{ms} .

Actuando del mismo modo para cada carril, la FRF de receptancia es:

$$H_m^R(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2 + 2\zeta_m \lambda_m \sigma + \lambda_m^2} \quad (9.6)$$

y obtenemos las ecuaciones del movimiento siguientes

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{rm}^R(t) &= -2\zeta_m \omega_m q_{rm}^R(t) + p_{rm}^R(t) \\ \dot{p}_{rm}^R(t) &= -(\omega_m)^2 q_{rm}^R(t) + f_{rm}^R(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

donde $q_{rm}^R(t)$ y $p_{rm}^R(t)$ son las coordenadas asociadas al carril (variando r entre 1 y el número de carriles N_r , y m entre -1 y el número de modos del carril N_{mr}). Las ecuaciones (9.5) y (9.7) corresponden al modelo modal de traviesa y carril respectivamente, y a las ecuaciones (9.1) y (9.2) permiten relacionarlo con los desplazamientos y fuerzas en los puntos de interacción entre sí y el vehículo.

9.2.3. Modelo del vehículo

El vehículo es modelado como un sistema de masas y rigideces concentradas en el que los ejes y los bastidores son considerados sólidos rígidos unidos a través de las suspensiones de características lineales (ver figura 9.3). Se adopta un conjunto de coordenadas de punto de referencia (centro de masas), asumiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos. Sea $\mathbf{w}(t)$ el vector en el que son ordenadas las coordenadas asociadas al vehículo. Sobre cada eje estudiamos dos desplazamientos independientes, que corresponden al desplazamiento vertical $z_a(t)$ y al giro con respecto al eje de la vía $\theta_a(t)$ del eje a -ésimo (para $a = 1, \dots, N_{ax}$). El modelo original de la UPV no considera la rotación del eje sobre su eje longitudinal. Sobre cada eje, sendas fuerzas F_{ra}^c ($r = 1, 2$) son aplicadas a través del contacto desde los carriles.

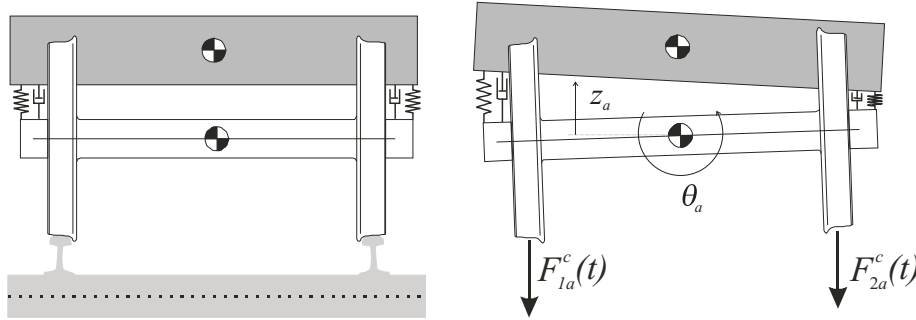


Figura 9.3. Modelado del vehículo.

De esta forma, las ecuaciones que determinan la dinámica para pequeños desplazamientos se corresponden con una formulación clásica en vibraciones dada a través de

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_c \quad (9.8)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{D} y \mathbf{K} son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez. \mathbf{F}_c contiene las fuerzas transmitidas a través del contacto rueda-carril y \mathbf{F}_{ext} el resto de las fuerzas externas actuantes sobre el vehículo (pesos).

9.2.4. Fuerzas en el contacto rueda-carril

La interacción entre el vehículo y el carril se modela a través de la fuerza de contacto F_{ra}^c . En general, esta fuerza se expresa como una función de la diferencia entre los desplazamientos de la rueda r -ésima y del carril r -ésimo en el punto de contacto, y depende de la geometría indeformada de la rueda y el carril y de las características elásticas del contacto rueda-carril.

Aplicando el modelo herciano de contacto, la fuerza normal, F_{ra}^c , transmitida con la interpenetración entre superficies indeformadas de los cuerpos en el contacto, δ_{ra} , se obtiene según la ecuación

$$F_{ra}^c = K_H \delta_{ra}^{1.5} \quad (9.9)$$

donde K_H es una constante que puede ser calculada semianalíticamente a través de las propiedades mecánicas de los materiales y de la geometría de los cuerpos indeformados.

El sistema de simulación desarrollado en la UPV puede considerar también otros modelos de contacto más sofisticados que se aplican a la interacción dinámica de un vehículo ferroviario con la vía [9].

La metodología seguida para definir el problema geométrico (el plano de bloqueo en la rueda o la corrugación en el carril) es una mejora del modelo desarrollado por Tunna en [78]. La interpenetración entre superficies indeformadas, δ_{ra} , se obtiene a partir del desplazamiento vertical del punto de contacto de la rueda, $z_r(t)$, y del carril, $z_c(x, t)$, así como de la función de irregularidad geométrica, $irr(x)$, según

$$\delta_{ra} = z_c(x, t) - z_r(t) + irr(x) \quad (9.10)$$

La función de irregularidad se determina a través de la geometría irregular de la rueda (debida a un plano de bloqueo, a la ovalización o poligonalización de la rueda) o del camino de rodadura en el carril (debido al desgaste ondulatorio, a hundimientos o *squads*,...) como un problema geométrico. Para ello, en ausencia de fuerzas de inercia, suponiendo que todos los elementos son indeformables y que sólo son posibles los movimientos de sólido rígido asociados al vehículo, a través de un análisis cinemático se identifica $irr(x)$ como z_r .

9.2.5. Placas de asiento

El comportamiento no lineal está asociado fundamentalmente a los elementos que conectan los subsistemas entre sí, como puede ser el caso del contacto rueda-carril ya tratado, y también las placas de asiento y el balasto. Las propiedades elásticas y amortiguadoras de las placas de asiento caracterizan el valor de la fuerza F_{rs}^p transmitida entre carriles y traviesas. La fuerza será, por tanto, una función del desplazamiento relativo entre los elementos que unen la placa, γ , así como de su derivada temporal, $\dot{\gamma}$, según una expresión del tipo

$$F_{rs}^p = k^p \gamma + c^p \dot{\gamma} + h^p(\gamma, \dot{\gamma}) \quad (9.11)$$

donde en $h^p(\gamma, \dot{\gamma})$ se consideran las no linealidades asociadas al comportamiento de las placas de asiento.

9.2.6. Solución del problema de interacción

La respuesta temporal del sistema se obtiene mediante integración del conjunto de ecuaciones diferenciales (9.5), (9.7) y (9.8) mediante un algoritmo numérico tipo Runge–Kutta o Adams. Estas ecuaciones se encuentran acopladas entre sí a través de los términos correspondientes a las fuerzas que aparecen en cada una de ellas. Dichos términos se obtienen en función de las fuerzas transmitidas a través del contacto rueda–carril y de las placas de asiento, que a su vez dependen de los desplazamientos y las velocidades tal como se ha visto en el punto anterior. Los desplazamientos en coordenadas físicas necesarios para el cálculo de las fuerzas transmitidas a través de las placas de asiento y del contacto, y el valor de los términos de fuerza que aparecen en las ecuaciones diferenciales (9.5) y (9.7) se obtienen a través de las transformaciones modales (9.1) y (9.2). La dimensión del problema depende del número de carriles y traviesas, del número de modos de vibración considerados en la descripción modal de estos elementos, y del número de coordenadas consideradas en el modelo del vehículo.

9.3. Implementación del eje flexible rotatorio

Las ecuaciones (9.8) incluyen los ejes como sólidos rígidos sometidos a pequeños desplazamientos. Para integrar los ejes como cuerpos flexibles rotatorios en el sistema deben eliminarse de (9.8) las ecuaciones correspondientes a los ejes y añadirse las ecuaciones en coordenadas generalizadas mixtas (4.101) y (4.102), que a continuación reproducimos

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) - 2\Omega \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{q}}(t) + (\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^p \boldsymbol{\chi}^p(t) + \Omega^2 \tilde{\mathbf{L}} \quad (9.12)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t) \quad (9.13)$$

donde en $\tilde{\mathbf{F}}^p$ se engloban las fuerzas generalizadas de fuerzas unitarias en la suspensión primaria y en el contacto rueda–carril (nótese que es un vector constante al emplear coordenadas generalizadas mixtas lagrangianas–eulerianas), y en $\boldsymbol{\chi}^p(t)$ el valor instantáneo de las mismas. La velocidad angular del eje, Ω , y la velocidad del vehículo, V , están relacionadas, evidentemente, por el radio de las ruedas, R , de forma que debe ser $V = \Omega R$.

La evaluación de (9.13) en las coordenadas espaciales correspondientes permite obtener los desplazamientos del punto de contacto rueda–carril y de los centros de las cajas de grasa, necesarios para determinar las fuerzas transmitidas en el contacto y a través de la suspensión primaria, respectivamente.

9.4. Cálculos

En este apartado se muestran resultados numéricos cuando se ha incorporado el eje flexible rotatorio al modelo subestructurado del sistema vehículo-vía. La experiencia previa de la UPV ha mostrado que la suspensión primaria filtra de manera importante la respuesta dinámica del vehículo a frecuencias altas, independizando ésta de la del resto del sistema. Por este motivo, en este estudio sólo se ha incluido un eje flexible rotatorio y la vía, caracterizando el resto del vehículo a través de su peso como una fuerza constante sobre las cajas de grasa del eje.

Las simulaciones consideran la dinámica vertical de la vía completa (dos carriles) y tiene en cuenta las vibraciones estructurales de las traviesas. Los parámetros del modelo se pueden encontrar en la tabla 9.1. Las características del eje corresponden a las del modelo del capítulo 8.

Vano entre traviesas	698	mm
Longitud de la traviesa	2360	mm
Módulo de Young de la traviesa	$32 \cdot 10^9$	N/m ²
Área de la traviesa	$15.73 \cdot 10^{-3}$	m ²
Momento de inercia de la traviesa	$118 \cdot 10^{-6}$	m ⁴
Masa de la traviesa	220	kg
Rigidez de la base elástica de la traviesa	$39.49 \cdot 10^6$	(N/m)/m
Módulo de Young del carril	$207 \cdot 10^9$	N/m ²
Área del carril	$7.17 \cdot 10^{-3}$	m ²
Inercia del carril	$23.5 \cdot 10^{-6}$	m ⁴
Masa por unidad de longitud del carril	56	kg/m
Módulo de cortadura del carril	81109	N/m ²
Coefficiente de cortadura de Timoshenko del carril	0.34	
Rigidez de la placa de asiento	$280 \cdot 10^6$	N/m
Amortiguamiento de la placa de asiento	$30 \cdot 10^3$	N-s/m
Amortiguamiento del balasto	$40 \cdot 10^3$	N-s/m
Peso del vehículo por eje	$1.962 \cdot 10^5$	N

Tabla 9.1. *Parámetros del modelo.*

9.4.1. Plano de bloqueo

En la figura 9.4 puede verse la respuesta de la fuerza del contacto entre la rueda y el carril de un eje afectado por un plano de bloqueo en ambas ruedas. Los cálculos fueron realizados a través de tres modelos distintos del eje: rígido no rotatorio, flexible no rotatorio y flexible rotatorio. Obsérvese que, dado que el sistema vía-eje es simétrico, si el eje se modela como un cuerpo rígido proporciona respuestas idénticas tanto si se considera rotatorio como si no. Los únicos movimientos que sufre el eje en este caso, a parte de la rotación sobre su eje de revolución, son traslaciones, por lo que no se

ven afectados por ésta.

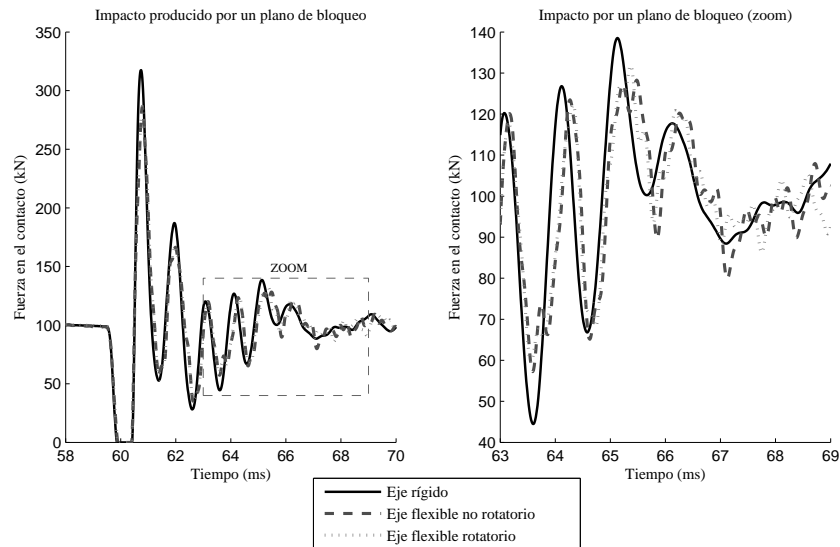


Figura 9.4. Fuerza de contacto rueda–carril debida al impacto de un plano desgastado. Longitud del plano 100 mm. Velocidad del vehículo 250 km/h.

Los valores de pico de la fuerza son muy similares para los modelos flexibles de los ejes; estas magnitudes son más pequeñas que las correspondientes al modelo rígido del eje, aunque las discrepancias son pequeñas. Sin embargo, las fuerzas del contacto tras el impacto son muy diferentes. Obviamente, los modelos flexibles proporcionan respuestas con mayor contenido en frecuencia.

9.4.2. Corrugación

Si consideramos un defecto armónico de corrugación en el carril podemos analizar la influencia de la longitud de onda del defecto geométrico. Cuando la velocidad del vehículo es constante, una longitud de onda dada de la corrugación equivale a una frecuencia concreta de excitación. Las respuestas correspondientes a los modelos rígido, flexible no rotatorio y flexible rotatorio son aproximadamente idénticas para casi todas las frecuencias.

Los resultados de un modelo de viga rotatoria (capítulo 2) y del eje aislado (capítulo 8) demuestran que un pico de resonancia en el receptancia del modelo no rotatorio está asociada a dos picos en la correspondiente al rotatorio: uno aparece a una frecuencia que aumenta con la velocidad angular; el otro disminuye con ésta asintóticamente hacia la frecuencia nula. Por otro lado, a la frecuencia de resonancia del modelo no rotatorio aparece una antirresonancia en el rotatorio. Estas conclusiones se pueden

extrapolar al modelo del conjunto vehículo-vía cuando el eje se modela como rotatorio.

Teóricamente, existe un conjunto infinito numerable de frecuencias de corrugación que excitan modos de vibración del eje no rotatorio. Estas frecuencias se asocian con antirresonancias en el eje rotatorio, y por lo tanto, los modelos con el eje rígido y con el flexible rotatorio proporcionan la misma respuesta. Un ejemplo de este comportamiento se demuestra en la figura 9.5.

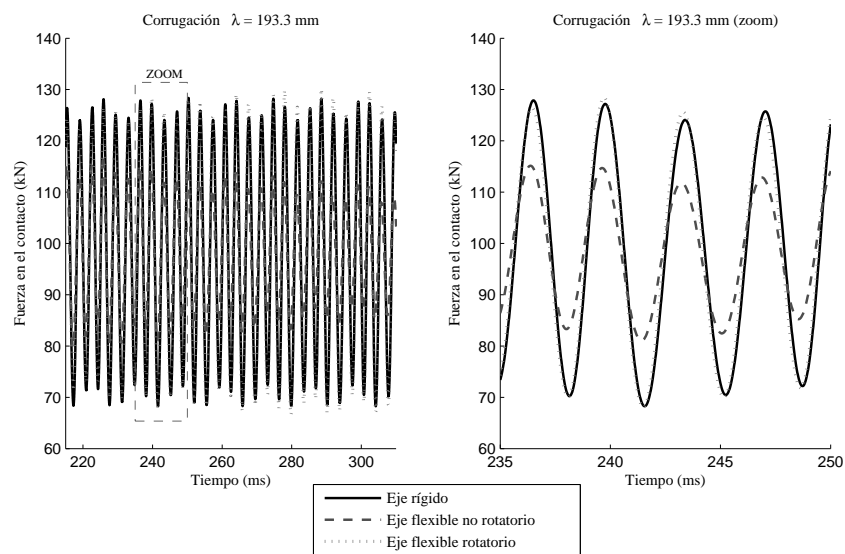


Figura 9.5. Fuerza de contacto rueda-carril cuando el vehículo circula sobre vía corrugada. Longitud de onda de la corrugación 193.3 mm (287.4 Hz). Profundidad 0.1 mm. Velocidad del vehículo 200 km/h.

Por cada resonancia del sistema no rotatorio, aparecen dos en el rotatorio a frecuencias diferentes. Este efecto se observa en figura 9.6 donde el resultado del modelo elástico rotatorio se diferencia claramente de las respuestas coincidentes de los modelos no rotatorio y rígido.

Las frecuencias a las que se producen las resonancias en el modelo completo no son conocidas *a priori*. No obstante, como se ha visto, la presencia de un eje rotatorio produce el desdoblamiento de todas aquéllas en las que participa. Con el objeto de identificar las frecuencias a las que es distinta la respuesta del sistema completo cuando incluye los diferentes modelos de eje considerados, se ha procedido como sigue. Se ha definido una irregularidad del carril como una variable aleatoria tal que la amplitud de su transformada de Fourier sea constante entre 30 Hz y 500 Hz, siendo nula fuera de este intervalo; y la fase presente una distribución aleatoria uniforme entre 0 y 2π . La amplitud se ha tomado de forma que el valor eficaz de la corrugación resultante sea

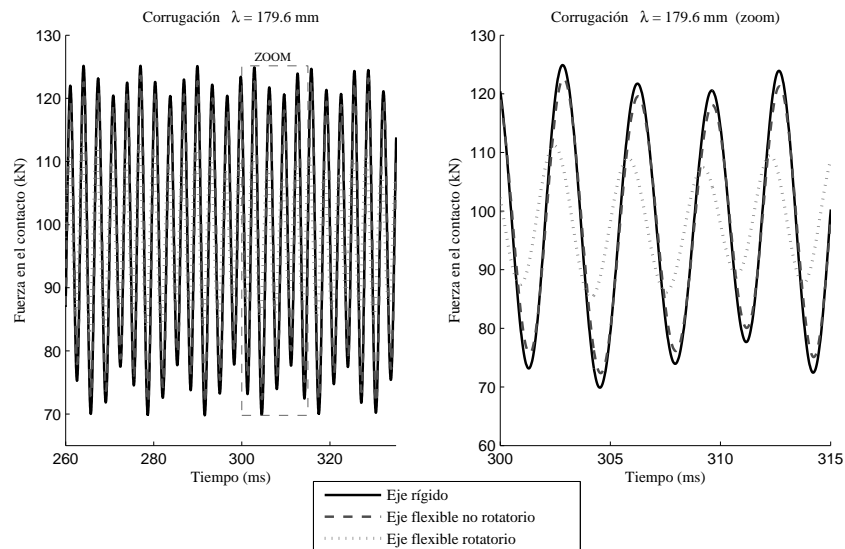


Figura 9.6. Fuerza de contacto rueda–carril cuando el vehículo circula sobre vía corrugada. Longitud de onda de la corrugación 179.6 mm (309.4 Hz). Profundidad 0.1 mm. Velocidad del vehículo 200 km/h.

0.1 mm (rms). Tras realizar la simulación se ha obtenido la transformada de Fourier de la fuerza en el contacto. Si a una determinada frecuencia dos modelos con distintos ejes responden igual, el cociente de las amplitudes entre sus respectivas transformadas de la fuerza valdrá la unidad. Así, a las frecuencias a las que este cociente es distinto de uno se producen respuestas diferentes. La figura 9.7 muestra estos cocientes entre los tres modelos, tomados dos a dos.

Como puede apreciarse, las diferencias aparecen en un número discreto de frecuencias, correspondientes a modos fuertemente influidos por el eje. El aspecto ruidoso del resultado está asociado a las no linealidades presentes en el modelo. Una vez más se observa el desdoblamiento de las resonancias producido por la rotación.

9.5. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un método para incluir un modelo del eje flexible rotatorio en los cálculos dinámicos acoplados del vehículo y la vía. El modelo del eje se basa en el enfoque modal mediante coordenadas mixtas lagrangianas–eulerianas desarrollado en esta Tesis; considera la masa y las características elástica reales del eje y los efectos de inercia y giroscópicos debidos a la rotación. Las características modales se estiman a través de un modelo de elementos finitos. Las ecuaciones del movimiento del eje en coordenadas mixtas permiten costes computacionales bajos: los

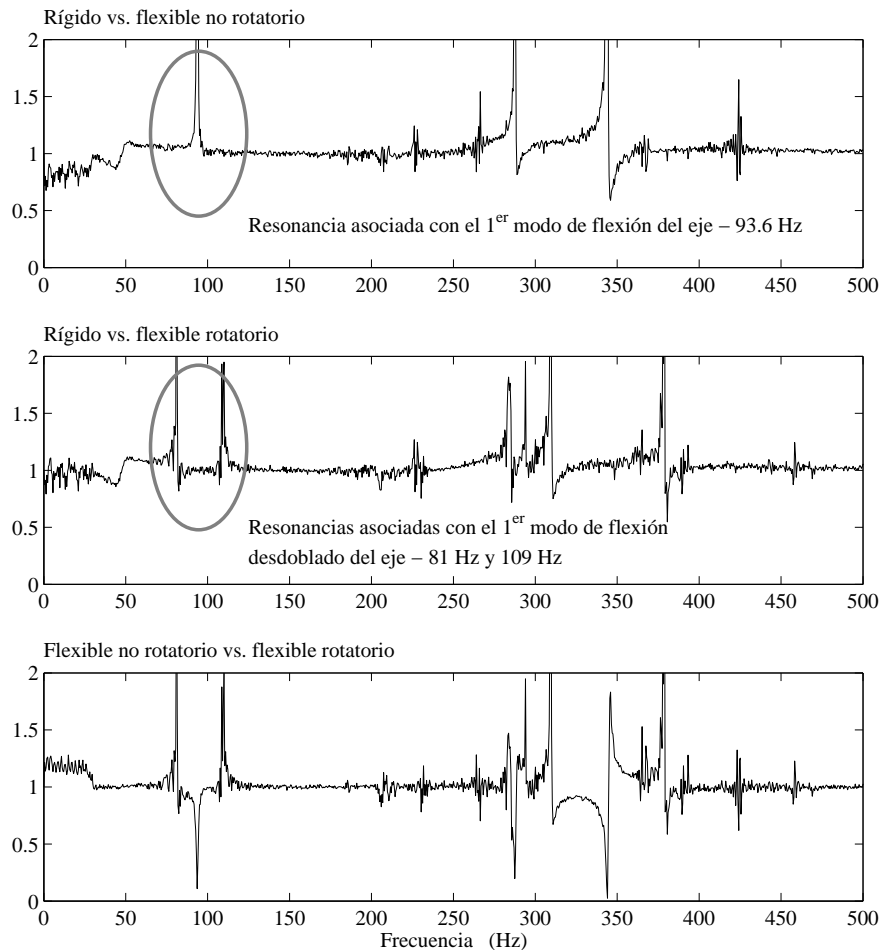


Figura 9.7. Comparativa entre las respuestas de los distintos modelos. Longitud de onda de la corrugación $1850 \div 111.1$ mm ($30 \div 500$ Hz). Profundidad 0.1 mm (rms). Velocidad del vehículo 200 km/h.

parámetros en la formulación no dependen del tiempo y, por lo tanto, se calculan sólo una vez al principio de la simulación.

Los cálculos realizados permiten comparar tres modelos que incluyen el eje como un cuerpo rígido, flexible no rotatorio y flexible rotatorio respectivamente. Los resultados de modelos más simples (de viga rotatoria y del eje aislado) permiten prever que las diferencias principales se encuentran en un número discreto de frecuencias.

Considerando esta conclusión, el impacto de un plano no produce diferencias importantes si el cálculo se hace a través de uno u otro modelo, porque el impacto distribuye la energía uniformemente en el espectro. La conclusión más importante de los cálculos del plano es que el modelo rígido del eje sobreestima la fuerza máxima del contacto rueda-carril. En el trabajo presentado en [9] se concluye que las fuerzas de contacto entre la rueda y el carril, modeladas por medio de la ley de Hertz ($F_c = K_H \delta^{1.5}$) sobreestiman el impacto del plano (los cálculos comparan los resultados del modelo herciano con los realizados empleando un modelo de contacto no-herciano, más realista). Estas conclusiones contribuirán a correlacionar resultados teóricos con medidas prácticas en los detectores automáticos del impacto instalados en vías.

Las diferencias más importantes aparecen al comparar resultados en cálculos de corrugación. Para tales problemas, los modelos rígidos y los elásticos no rotatorios pueden conducir a interpretar erróneamente el mecanismo de fijación de determinadas longitudes de onda.

Estos resultados han sido aceptados por la revista internacional *Vehicle System Dynamics* para su publicación [11].

Capítulo 10

Conclusiones y desarrollos futuros

Objeto del capítulo:

Se recogen en este capítulo las principales conclusiones expuestas en los anteriores. Se señalan las aportaciones realizadas y se enumeran posibles desarrollos futuros que continúen la línea de investigación aquí presentada.

10.1. Conclusiones

Los objetivos principales de la Tesis, referentes al desarrollo de una metodología eficiente para la inclusión de estructuras de revolución en rotación en modelos subestructurados mediante síntesis modal de sus componentes, se han alcanzado de forma satisfactoria, con las conclusiones y aportaciones que a continuación se describen. Estas conclusiones se extraen del trabajo realizado a lo largo de la Tesis.

Las metodologías publicadas que permiten desarrollar los modelos más completos para el estudio de la respuesta dinámica conjunta de un vehículo ferroviario y la vía no incluyen el eje como un sólido elástico rotatorio. Existen alguna referencia [64] en la que se dan resultados correspondientes a ejes elásticos rotatorios, pero no se publica la metodología.

- Se ha estudiado la respuesta dinámica de la viga de Rayleigh rotatoria biarticulada, aportando una forma adimensional analítica de la misma, caracterizada mediante un único parámetro. Este trabajo ha sido publicado en *Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration* [31]. Se muestra que las vibraciones axiales y de torsión, en el caso estudiado, no se ven afectadas por la rotación. En las de flexión, en cambio, se produce un acoplamiento en dos planos perpendiculares que contengan al eje de giro, por lo que, en general, la rotación debe ser tenida en cuenta. Este acoplamiento se produce, en este caso, entre las deformadas asociadas a una misma frecuencia propia. Se encuentra que las órbitas descritas por los puntos de la viga son curvas hipotrocoides definidas por las condiciones iniciales y el parámetro adimensional característico del sistema.
- Los métodos habituales para estudiar cuerpos elásticos con movimiento general, cuando se emplean para integrar en sistemas subestructurados mediante síntesis modal estructuras rotatorias junto con otras que no siguen el movimiento de rotación, no resultan eficientes. Esto es debido a que la obtención de las fuerzas generalizadas de la interacción entre el cuerpo rotatorio y su entorno obliga a realizar, en cada instante, una costosa integral en el volumen del sólido.
- Como aportación principal, se ha desarrollado una metodología, aplicable a sólidos de revolución en rotación sobre su eje longitudinal, que conduce a modelos eficientes, fácilmente integrables en sistemas subestructurados, y que satisface el objetivo de la Tesis: encontrar una formulación eficiente para modelar el eje ferroviario como un sólido flexible rotatorio, que permita integrarlo en un sistema de subestructuración. Se introduce el concepto de transformación modal, lo que permite emplear los modos del sistema no rotatorio, considerados fijos en el espacio, para describir la deformación mediante superposición modal. Con el objeto de permitir el uso de éste método con geometrías de revolución generales, se han formulado los términos de la ecuación del movimiento mediante el Método de los Elementos Finitos. La metodología desarrollada ha sido publicada en *Journal of Sound and Vibration* [32].

- El método desarrollado ha sido aplicado a un cilindro rotatorio biarticulado, tanto analíticamente (suponiendo un comportamiento de viga de Rayleigh) como mediante elementos finitos. Se ha encontrado que ambos modelos son tanto más parecidos cuanto mayor es la esbeltez, debido a que el cilindro modelado mediante elementos finitos tiene un comportamiento general que se aproxima al de la viga de Rayleigh cuando la esbeltez es grande. En las vibraciones de flexión, se encuentra el mismo tipo de acoplamiento que en el estudio inicial de la viga de Rayleigh. El modelo de elementos finitos incluye también modos de torsión y de respiración. Se ha encontrado que se produce un acoplamiento entre ellos, inducido por los últimos. Este tipo de modo no existe en un modelo de viga (con secciones indeformables), por lo que tal modelo no es capaz de predecir este acoplamiento.
- Se ha obtenido también la ecuación del movimiento del cilindro rotatorio con condiciones de contorno de cuerpo libre, encontrando que el acoplamiento entre modos de flexión se produce entre todos ellos, no sólo entre los de la misma frecuencia, llenando los coeficientes matriciales. Además, los elementos de alguno de los coeficientes matriciales de la ecuación obtenida han resultado ser dependientes del número de modos considerado en el modelo. Como consecuencia de ambas cosas, aparece una dificultad añadida en la determinación del número de modos que es necesario incluir.
- Así mismo, se ha puesto de manifiesto una limitación mayor en el uso de modelos lineales de estructuras rotatorias que en el caso de no rotatorias, en cualquier metodología que emplee los modos del sistema no rotatorio para obtener la ecuación del movimiento. Esta limitación puede ser crítica en sistemas poco esbeltos si la velocidad de rotación es muy superior a la primera pulsación propia. Es debida a que las trayectorias rectilíneas (lineales) que siguen los puntos en las deformadas modales no permiten calcular correctamente algunos términos de la ecuación.
- Se ha obtenido la ecuación de un eje de vehículo ferroviario en rotación y se ha aportado un estudio de su dinámica, comparándola con la correspondiente a velocidad angular nula y destacando la importancia de la rotación. Diversos resultados de este estudio han sido publicados en *Proceedings of 20th Symposium of the International Association for Vehicle System Dynamics* [33] y en las *Actas del XVII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica* [34].
- Se ha introducido el modelo anterior del eje en un sistema de simulación de la interacción entre el vehículo y la vía, y se ha estudiado la respuesta del conjunto en dos casos: un plano de bloqueo en la rueda y corrugación en el carril. Como aportación, se ha mostrado la importancia de considerar la rotación a determinadas frecuencias. Los resultados han sido aceptados por la revista internacional *Vehicle System Dynamics* para su publicación [11].

10.2. Desarrollos futuros

Las áreas de trabajo que se proponen como continuación de la línea de investigación son las siguientes:

- Acotación del ámbito de aplicabilidad de la hipótesis de linealidad mediante la implementación de técnicas de síntesis modal de componentes usando modos no lineales.
- Estudio de la convergencia de la respuesta del sistema cuando se incrementa el número de modos considerados.
- Ampliación del desarrollo de la ecuación del movimiento en coordenadas mixtas lagrangianas-eulerianas considerando una velocidad angular de amplitud variable en el tiempo, lo que permitirá estudiar situaciones transitorias como las de arranque-parada.
- Ampliación del desarrollo de la ecuación del movimiento en coordenadas mixtas lagrangianas-eulerianas considerando diferentes tipos de amortiguamiento.
- Ampliación del desarrollo de la ecuación del movimiento en coordenadas mixtas lagrangianas-eulerianas para considerar el efecto de la excentricidad del centro de masas de cada sección sobre el movimiento, a través de la fuerza centrífuga que provoca. Esto conduciría, entre otras cosas, a la predicción de velocidades críticas.
- Consideración de rotaciones generales. En determinadas aplicaciones (como, por ejemplo, el eje de un vehículo que traza una trayectoria curva, o un eje con movimientos de lazo y balanceo), la rotación no se produce en torno a la dirección axial de la estructura de revolución. Sin embargo, la rotación general se puede descomponer como la combinación de dos: una sobre la dirección longitudinal y otra sobre el plano normal a ella. En casos como el citado, las fuerzas de interacción con las estructuras adyacentes no siguen la componente de la rotación en la dirección longitudinal, por lo que todavía puede emplearse la formulación mixta para calcular la fuerza generalizada de forma eficiente, y tratar la otra componente de la rotación mediante la formulación lagrangiana.
- Ampliación del modelo de interacción vehículo-vía de la UPV para considerar la dinámica completa (vertical, longitudinal y transversal) del sistema. Estudio de la influencia de la rotación del eje en el acoplamiento entre éstas.
- Aplicación del método desarrollado al estudio de la emisión acústica de superficies de revolución en rotación.

Apéndice A

Fundamentos de cinemática espacial

Objeto del apéndice:

Este apéndice recoge un conjunto de conceptos básicos físico-matemáticos relacionados con la cinemática tridimensional, utilizados en capítulos anteriores.

A.1. Introducción

En este apéndice se recopilan una serie de conceptos fundamentales de la cinemática espacial.

Se introduce la matriz de transformación entre sistemas de coordenadas y se muestra cómo mediante ella y su derivada temporal pueden obtenerse la velocidad y aceleración angulares de un sistema respecto del otro. Se define la derivada temporal de un vector relativa a unos ejes móviles y se obtienen las fórmulas de las cinemáticas absoluta y relativa del sólido rígido.

A.2. Matriz de transformación entre sistemas de referencia

Consideremos un espacio vectorial euclídeo tridimensional, y en él, un sistema cartesiano de coordenadas fijo (o más propiamente, inercial) consistente en tres ejes mutuamente perpendiculares, al que llamaremos *sistema fijo*. Este sistema estará definido por su punto origen y un vector unitario en la dirección de cada eje, $\vec{\mathbf{i}}_1$, $\vec{\mathbf{i}}_2$ e $\vec{\mathbf{i}}_3$. Cualquier vector $\vec{\mathbf{u}}$ del espacio podrá ser descrito mediante sus proyecciones sobre los ejes (sus componentes), dadas por el producto escalar del vector por cada uno de los vectores unitarios.

$$\vec{\mathbf{u}} = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_1) \vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_2) \vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_3) \vec{\mathbf{i}}_3 = u_1 \vec{\mathbf{i}}_1 + u_2 \vec{\mathbf{i}}_2 + u_3 \vec{\mathbf{i}}_3 \quad (\text{A.1})$$

donde $u_j = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_j)$ ($j = 1, 2, 3$) son las componentes del vector $\vec{\mathbf{u}}$ en el sistema fijo. Estas tres componentes pueden ordenarse en una terna, a la que llamaremos \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T \quad (\text{A.2})$$

Dado que los vectores $\vec{\mathbf{i}}_1$, $\vec{\mathbf{i}}_2$ e $\vec{\mathbf{i}}_3$ son unitarios y mutuamente perpendiculares es evidente, a partir (A.1), que las componentes de éstos en el sistema fijo son

$$\mathbf{i}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T \quad \mathbf{i}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T \quad \mathbf{i}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T \quad (\text{A.3})$$

Consideremos también otro sistema de referencia con movimiento arbitrario de traslación y rotación. Este nuevo sistema, al que llamaremos *sistema móvil* vendrá definido por el punto del espacio en el que esté situado su origen y un vector unitario en la dirección de cada eje, $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ y $\vec{\mathbf{e}}_3$, en cada instante. Como antes, cualquier vector $\vec{\mathbf{u}}$ del espacio podrá ser descrito mediante sus proyecciones sobre los ejes móviles.

$$\vec{\mathbf{u}} = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) \vec{\mathbf{e}}_1 + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_2) \vec{\mathbf{e}}_2 + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_3) \vec{\mathbf{e}}_3 = u'_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + u'_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + u'_3 \vec{\mathbf{e}}_3 \quad (\text{A.4})$$

donde $u'_j = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_j)$ ($j = 1, 2, 3$) son las componentes del vector $\vec{\mathbf{u}}$ en el sistema móvil, que también pueden ordenarse en una terna, a la que llamaremos \mathbf{u}'

$$\mathbf{u}' = (u'_1 \ u'_2 \ u'_3)^T \quad (\text{A.5})$$

Como antes las componentes de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_3 en el sistema móvil son también

$$\mathbf{e}'_1 = (1 \ 0 \ 0)^T \quad \mathbf{e}'_2 = (0 \ 1 \ 0)^T \quad \mathbf{e}'_3 = (0 \ 0 \ 1)^T \quad (\text{A.6})$$

La posición del sistema móvil vendrá definida unívocamente por el vector de posición, $\vec{\mathbf{R}}$, de su origen con respecto al origen del sistema fijo, que en coordenadas del sistema fijo podrá escribirse como la terna ordenada

$$\mathbf{R} = (R_1 \ R_2 \ R_3)^T \quad (\text{A.7})$$

Por tanto, tres parámetros son suficientes para definir la posición del sistema móvil en el espacio.

La orientación puede describirse proyectando los vectores unitarios en las direcciones de los ejes móviles, sobre los del sistema de coordenadas fijo, análogamente a (A.1). Llamando α_{jk} al ángulo entre el vector $\vec{\mathbf{i}}_j$ del sistema fijo y el \vec{e}_k del sistema móvil, y A_{jk} al coseno de ese ángulo, se tiene

$$\vec{e}_k = \sum_{j=1}^3 (\vec{e}_k \cdot \vec{\mathbf{i}}_j) \vec{\mathbf{i}}_j = \sum_{j=1}^3 \cos \alpha_{jk} \vec{\mathbf{i}}_j = \sum_{j=1}^3 A_{jk} \vec{\mathbf{i}}_j \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.8})$$

Los elementos A_{jk} pueden ordenarse en forma de una matriz \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

De (A.8) se concluye que las columnas de esta matriz están formadas por las componentes de cada uno de los vectores unitarios del sistema móvil escritos en el sistema fijo. Es decir

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \quad (\text{A.10})$$

La matriz \mathbf{A} define completamente la orientación del sistema móvil en el espacio y permite escribir cualquier vector definido en este sistema, en el sistema fijo; es decir, conocidas las componentes de un vector en el sistema móvil, permite obtener las mismas en el sistema fijo. Puesto que

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 u'_k \vec{e}_k = \sum_{j=1}^3 u_j \vec{\mathbf{i}}_j \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo (A.8) en (A.11)

$$\sum_{k=1}^3 \left(u'_k \sum_{j=1}^3 A_{jk} \vec{\mathbf{i}}_j \right) = \sum_{j=1}^3 u_j \vec{\mathbf{i}}_j \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 A_{jk} u'_k \right) \vec{\mathbf{i}}_j = \sum_{j=1}^3 u_j \vec{\mathbf{i}}_j \quad (\text{A.13})$$

Y por lo tanto

$$u_j = \sum_{k=1}^3 A_{jk} u'_k \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.14})$$

que puede ser escrito como

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}' \quad (\text{A.15})$$

La matriz \mathbf{A} se conoce como la matriz de transformación del sistema móvil en el fijo.

A.3. Ortonormalidad de la matriz de transformación

Dado que las componentes de la matriz \mathbf{A} son los cosenos directores de tres vectores unitarios y mutuamente perpendiculares, deben cumplir las seis relaciones siguientes:

$$\sum_{k=1}^3 a_{jk} a_{k\ell} = \delta_{j\ell} \quad j = 1, 2, 3 \quad \ell = j, \dots, 3 \quad (\text{A.16})$$

donde $\delta_{j\ell}$ es la función Delta de Kronecker, definida como

$$\delta_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \ell \\ 0 & \text{si } j \neq \ell \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Los casos $j = \ell$ corresponden a la condición de módulo unitario de los vectores, mientras que los casos $j \neq \ell$ garantizan la ortogonalidad de éstos. Así, de los nueve elementos de la matriz \mathbf{A} , sólo tres son independientes; por lo tanto, tres parámetros son suficientes para definir la orientación del sistema móvil en el espacio.

De (A.16) se concluye que, si $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad de orden 3×3 ,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (\text{A.18})$$

que es la condición de *ortonormalidad*. (A.18) implica que

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.19})$$

De esta forma, conocidas las componentes de un vector $\vec{\mathbf{u}}$ en el sistema fijo, \mathbf{u} , pueden obtenerse sus componentes en el sistema móvil, \mathbf{u}' , como

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \quad (\text{A.20})$$

A.4. Rotación de vectores

En la definición dada de la matriz de transformación, los vectores se consideran fijos en el espacio, y se emplea la matriz para obtener sus componentes en un sistema de coordenadas, a partir de las componentes en otro. Sin embargo, \mathbf{A} puede considerarse también como la representación matricial de alguna aplicación lineal sobre los elementos de un espacio vectorial. Si aplicamos la matriz \mathbf{A} sobre los vectores unitarios del sistema fijo, teniendo en cuenta (A.3) y (A.10), se tiene

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{A} \mathbf{i}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.21})$$

por lo que la matriz \mathbf{A} puede ser considerada como la representación de la aplicación lineal que transforma los vectores unitarios que definen el sistema fijo, en los vectores unitarios que definen el sistema móvil, rotando los primeros.

Del mismo modo, la aplicación representada por \mathbf{A} hace corresponder a un vector origen $\bar{\mathbf{u}}$ el vector imagen $\bar{\mathbf{v}}$ cuyas componentes en el sistema fijo vienen dadas por

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (\text{A.22})$$

Nótese que \mathbf{v} es la representación de *otro* vector del espacio, $\bar{\mathbf{v}}$, en el *mismo* sistema de coordenadas (el fijo).

Por (A.20), las componentes de $\bar{\mathbf{v}}$ en el sistema móvil, \mathbf{v}' , son

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{A.23})$$

dada la ortonormalidad de \mathbf{A} . Es decir, si se aplica la misma transformación a un vector que al sistema de referencia en el que se expresa, sus componentes no varían.

En lo que sigue, se empleará indistintamente la interpretación de la matriz \mathbf{A} como una transformación de las coordenadas de un vector entre distintos sistemas, o como una rotación del vector en un sistema dado.

A.5. Rotaciones simples

Consideremos el caso de rotación del sistema móvil en torno a alguno de los ejes del sistema fijo. Supongamos inicialmente los dos sistemas coincidentes, es decir, con el mismo origen y direcciones paralelas. En esa situación, los vectores unitarios que definen cada eje de uno y otro sistema son idénticos. Por lo tanto, según (A.8), la matriz \mathbf{A} será la identidad.

Si, entonces, producimos una rotación del sistema móvil en torno al primer eje del fijo, girándolo un ángulo θ , los vectores unitarios que definen el primer eje de cada sistema seguirán siendo coincidentes (por producirse el giro a lo largo de su dirección), y los otros dos vectores formarán un ángulo θ con su homólogo en el otro sistema,

respectivamente. Así, la matriz de transformación correspondiente a este giro será

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{i}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{i}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{i}}_2 & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{i}}_2 & \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{i}}_3 & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{i}}_3 & \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\mathbf{i}}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Análogamente, si el giro se produce en torno al segundo eje fijo, un ángulo ψ , la matriz de transformación es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Finalmente, un giro en torno al tercer eje fijo de un ángulo φ vendrá dado por la matriz de transformación

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

A.6. Rotaciones sucesivas

Consideremos ahora n sistemas de coordenadas con distintas orientaciones, y sea $\mathbf{A}^{j(j-1)}$ la matriz de transformación del sistema j -ésimo en el $(j-1)$ -ésimo. Las componentes de un vector en el sistema $(j-1)$ -ésimo, \mathbf{u}^{j-1} , vendrán dadas a partir de las componentes en el sistema j -ésimo, \mathbf{u}^j , por

$$\mathbf{u}^{j-1} = \mathbf{A}^{j(j-1)} \mathbf{u}^j \quad (\text{A.28})$$

Es inmediato demostrar por inducción que la matriz de transformación del sistema n -ésimo en el primero es

$$\mathbf{A}^{n1} = \mathbf{A}^{21} \mathbf{A}^{32} \dots \mathbf{A}^{n(n-1)} = \prod_{j=2}^n \mathbf{A}^{j(j-1)} \quad (\text{A.29})$$

Veámoslo, es trivial para dos sistemas de coordenadas ($n=2$), dado que en ese caso hay una única transformación.

$$\mathbf{A}^{21} = \prod_{j=2}^2 \mathbf{A}^{j(j-1)} = \mathbf{A}^{21} \quad (\text{A.30})$$

o bien

$$\mathbf{u}^{n-1} = \mathbf{A}^{n(n-1)} \mathbf{u}^n \quad (\text{A.31})$$

Y si fuera cierto para $n - 1$ sistemas, se tendría

$$\mathbf{u}^1 = \left(\prod_{j=2}^{n-1} \mathbf{A}^{j(j-1)} \right) \mathbf{u}^{n-1} \quad (\text{A.32})$$

y así, sustituyendo en esta última la anterior

$$\mathbf{u}^1 = \left(\prod_{j=2}^{n-1} \mathbf{A}^{j(j-1)} \right) \mathbf{A}^{n(n-1)} \mathbf{u}^n = \left(\prod_{j=2}^n \mathbf{A}^{j(j-1)} \right) \mathbf{u}^n \quad (\text{A.33})$$

lo que demuestra (A.29).

Es interesante notar que, al no ser conmutativo el producto matricial, el orden en que se realicen las rotaciones sucesivas afecta al resultado, como muestra la figura A.1.

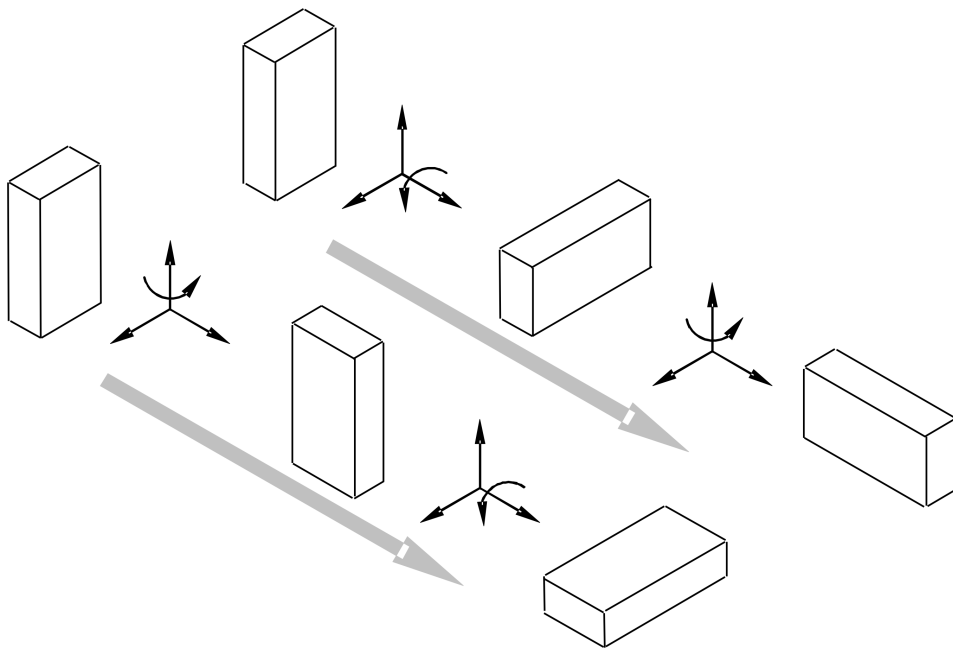


Figura A.1. *Las rotaciones no son conmutativas.*

A.7. Velocidad angular y aceleración angular

A.7.1. En ejes fijos

Derivando el segundo miembro de (A.18) respecto del tiempo y teniendo en cuenta que $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ es una matriz constante (y por tanto, con derivada nula), se llega a

$$\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^T \quad (\text{A.34})$$

que es equivalente a

$$\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = -\left(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T\right)^T \quad (\text{A.35})$$

Una matriz que es igual a la opuesta de su traspuesta es una matriz antisimétrica. Llamemos $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ a esta matriz

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \quad (\text{A.36})$$

La condición de antisimetría obliga a que la matriz $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ sea de la forma

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

donde se ha cambiado la nomenclatura de los elementos, llamando

$$\Omega_1 = \Omega_{32} \quad \Omega_2 = \Omega_{13} \quad \Omega_3 = \Omega_{21} \quad (\text{A.38})$$

Los elementos de esta matriz pueden ordenarse como componentes de un vector en el sistema fijo, llamado *vector de velocidad angular* del sistema móvil respecto del fijo, $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, de forma que

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3)^T \quad (\text{A.39})$$

Puede comprobarse la equivalencia siguiente, para cualquier terna ordenada \mathbf{u}

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{u} \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \quad (\text{A.40})$$

en la que \times denota el producto vectorial.

Derivando (A.36) nuevamente respecto del tiempo y llamando $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ a esta derivada se tiene

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\bar{\boldsymbol{\Omega}}} = \ddot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{A}}^T \quad (\text{A.41})$$

que es también una matriz antisimétrica, por serlo $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, es decir,

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

Análogamente, se le podrá asociar un vector $\vec{\alpha}$, llamado *aceleración angular* del sistema móvil respecto del fijo, cuyas componente en el sistema fijo son

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)^T \quad (\text{A.43})$$

de tal forma que, para cualquier terna ordenada \mathbf{u} se cumple

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u} \equiv \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \quad (\text{A.44})$$

A.7.2. En ejes móviles

Si en lugar de derivar el segundo miembro de (A.18) respecto del tiempo, se deriva el primero se llega a

$$\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} = - \left(\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \right)^T \quad (\text{A.45})$$

que es también una matriz antisimétrica. Llamemos $\bar{\boldsymbol{\Omega}}'$ a esta matriz

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}' = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \quad (\text{A.46})$$

Los elementos de esta matriz también pueden ordenarse como componentes de un vector en algún sistema de coordenadas. Veremos que corresponden a las componentes en el sistema móvil del vector de velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$,

$$\boldsymbol{\Omega}' = (\Omega'_1 \ \Omega'_2 \ \Omega'_3)^T \quad (\text{A.47})$$

Sea \mathbf{u} las componentes de un vector en el sistema fijo, y sea \mathbf{v} las componentes en el mismo sistema de un vector definido mediante

$$\mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{u} \quad (\text{A.48})$$

Las componentes de $\vec{\mathbf{v}}$ en el sistema móvil vendrán dadas por

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{u} \quad (\text{A.49})$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}'$, se escribe

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{A} \mathbf{u}' \quad (\text{A.50})$$

Luego la matriz antisimétrica asociada al vector de velocidad angular, en ejes móviles, debe ser

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}' = \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{A} \quad (\text{A.51})$$

y sustituyendo (A.36) en la anterior

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}' = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (\text{A.52})$$

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}' = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \quad (\text{A.53})$$

que coincide con (A.46)

A.8. Derivación temporal de vectores

Dado un vector $\vec{\mathbf{u}}$ del espacio, variable en el tiempo, su derivada temporal será otro vector $\dot{\vec{\mathbf{u}}} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}$, al que llamamos *derivada absoluta* o simplemente derivada. Este último podrá ser representado mediante sus componentes, tanto en el sistema fijo como en el móvil. Teniendo en cuenta que los vectores unitarios en el sistema fijo son constantes, a partir de (A.1) se tiene

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{i}}_k \right) \vec{\mathbf{i}}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt} (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}}_k) \vec{\mathbf{i}}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{du_k}{dt} \vec{\mathbf{i}}_k = \sum_{k=1}^3 \dot{u}_k \vec{\mathbf{i}}_k \quad (\text{A.54})$$

cuyas componentes en el sistema fijo, $\dot{\mathbf{u}}$, son

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (\dot{u}_1 \ \dot{u}_2 \ \dot{u}_3)^T \quad (\text{A.55})$$

Por analogía, puede definirse una *derivada local* o *derivada relativa* respecto del tiempo de $\vec{\mathbf{u}}$ en el sistema móvil como

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}}|_{\text{rel}} = \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\text{rel}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \vec{\mathbf{e}}_k \quad (\text{A.56})$$

cuyas coordenadas en ese sistema son

$$\dot{\mathbf{u}}'_{\text{rel}} = \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|'_{\text{rel}} = \left(\frac{du'_1}{dt} \ \frac{du'_2}{dt} \ \frac{du'_3}{dt} \right)^T \quad (\text{A.57})$$

entendiendo $\frac{du'_k}{dt}$ ($k = 1, 2, 3$) como la derivada respecto el tiempo de la componente k -ésima, u'_k , de $\vec{\mathbf{u}}$ en el sistema móvil, y no la correspondiente componente de $\dot{\vec{\mathbf{u}}}$ (derivada absoluta) en el sistema móvil. Ésta últimas vendrán dadas por

$$\dot{\mathbf{u}}' = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.58})$$

La derivada local representa la parte de la variación de $\vec{\mathbf{u}}$ con el tiempo que detectaría un observador que se moviera solidario con el sistema móvil, y no las componentes de $\dot{\vec{\mathbf{u}}}$ en este sistema. Derivando (A.4) respecto del tiempo, se tiene que

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^3 u_k \vec{\mathbf{e}}_k \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \vec{\mathbf{e}}_k + \sum_{k=1}^3 u'_k \dot{\vec{\mathbf{e}}}_k \quad (\text{A.59})$$

Representando estos vectores mediante sus componentes en el sistema fijo, la ecuación anterior se escribe

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^3 u'_k \dot{\mathbf{e}}_k \quad (\text{A.60})$$

Y teniendo en cuenta que $\mathbf{e}_k = \mathbf{A} \mathbf{e}'_k$, y que, por ser \mathbf{e}'_k una constante, se tiene $\dot{\mathbf{e}}_k = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{e}'_k$, entonces

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^3 u'_k \dot{\mathbf{A}} \mathbf{e}'_k \quad (\text{A.61})$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^3 u'_k \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{e}_k \quad (\text{A.62})$$

Por (A.36)

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^3 u'_k \bar{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{e}_k \quad (\text{A.63})$$

que se puede escribir

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^3 u'_k (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_k) \quad (\text{A.64})$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^3 \frac{du'_k}{dt} \mathbf{e}_k + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\sum_{k=1}^3 u'_k \mathbf{e}_k \right) \quad (\text{A.65})$$

y por tanto

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}} \Big|_{\text{rel}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{A.66})$$

Así, la derivada absoluta de un vector es la suma de la derivada relativa en un sistema móvil más el producto vectorial de la velocidad angular del sistema móvil por el propio vector que se deriva.

A.9. Cinemática del sólido rígido

Según el *teorema de Chasles*, el movimiento general instantáneo de un sólido rígido libre es la superposición de una traslación y una rotación. Para definir en cada instante la posición y orientación del sólido, es suficiente situar y orientar un sistema de coordenadas que se mueva solidario con el cuerpo. Así, como se ha visto, para describir este movimiento son necesarias seis coordenadas independientes, tres de ellas para definir la posición, y otras tres para definir la orientación.

A.9.1. Cinemática absoluta

Consideremos, pues, un sistema de referencia inercial (fijo) y otro solidario con el sólido (móvil), al que llamaremos *sistema del cuerpo* o *sistema del sólido*. La posición del sólido estará determinada por el vector de posición del origen del sistema de cuerpo respecto del fijo, y la orientación por la matriz de transformación \mathbf{A} del sistema del sólido en el fijo. La posición, velocidad y aceleración de cada partícula del cuerpo se pueden determinar como sigue.

Posición

Un punto cualquiera del sólido estará definido por su vector de posición, \vec{r} , respecto del origen del sistema fijo. Como se muestra en la figura A.2, este vector será igual a la suma del vector de posición del origen del sistema del cuerpo respecto del fijo, \vec{R} , más el vector de posición del punto respecto al origen del sistema del cuerpo, \vec{u} .

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{u} \quad (\text{A.67})$$

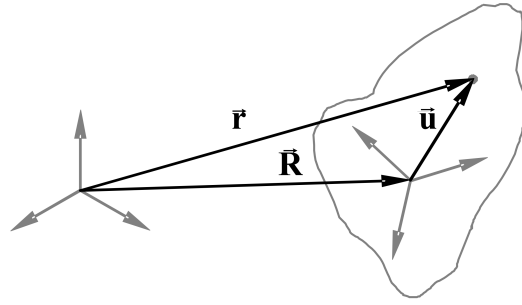


Figura A.2. Vectores de posición.

Velocidad

La velocidad absoluta del punto será la derivada temporal (absoluta) de la posición. Por la propia definición de sólido rígido y del sistema del cuerpo (solidario con el mismo), las coordenadas de \vec{u} en este sistema son constantes, por lo que $\dot{\vec{u}}|_{\text{rel}} = \mathbf{0}$ (en cualquier sistema de referencia). Por lo visto en el apartado anterior, si $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia del cuerpo (y, por tanto, la del cuerpo), la velocidad del punto se escribirá como

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}}|_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \vec{u} = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{u} \quad (\text{A.68})$$

Aceleración

Derivando (A.68) respecto del tiempo nuevamente

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{u}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{\Omega}} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{u}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{u}) \quad (\text{A.69})$$

donde $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\Omega}}$ es la *aceleración angular* del sistema de referencia del sólido, que por ser solidario con el cuerpo, será también la de éste. Es importante destacar que, aunque

$\vec{\alpha}$ se ha definido mediante una derivación absoluta, coincide también con la derivada relativa $\dot{\vec{\Omega}}|_{\text{rel}}$, ya que

$$\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{\Omega}}|_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} = \dot{\vec{\Omega}}|_{\text{rel}} \quad (\text{A.70})$$

luego

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}|_{\text{rel}} \quad (\text{A.71})$$

Evidentemente, los vectores que aparecen en las expresiones anteriores pueden ser descritos mediante sus componentes en cualquier sistema de coordenadas, indistintamente, y las expresiones son válidas siempre que todos ellos lo estén en el mismo.

A.9.2. Cinemática relativa

Consideremos ahora un tercer sistema de coordenadas, al que llamaremos *sistema intermedio*, con movimientos de traslación y rotación arbitrarios, independientes de los del cuerpo. Llamaremos *velocidad angular de arrastre*, $\vec{\Omega}_{\text{arr}}$, y *aceleración angular de arrastre*, $\vec{\alpha}_{\text{arr}}$, a la velocidad angular y a la aceleración angular del sistema intermedio, respectivamente, obtenidas a partir de su matriz de transformación en el sistema fijo.

Abusando de la notación, se han empleado los mismos símbolos para referir los vectores relativos al sistema móvil, indistintamente de si se trata del sistema del cuerpo o del intermedio, distinguiéndose cada caso por el contexto.

Procediendo como antes, la posición, velocidad y aceleración de cada partícula del cuerpo se pueden determinar como sigue.

Posición

El vector de posición de cualquier punto del sólido respecto del origen del sistema fijo, \vec{r} , se podrá escribir como la suma del vector de posición del origen del sistema intermedio respecto del fijo, \vec{R} , más el vector de posición del punto respecto al origen del sistema intermedio, \vec{u} .

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{u} \quad (\text{A.72})$$

Velocidad

La velocidad absoluta del punto será la derivada temporal (absoluta) de la posición. Dado que, en esta ocasión, el sistema móvil es el intermedio, que no es solidario con el cuerpo, las coordenadas de \vec{u} en este sistema no son constantes. Por lo visto en el apartado anterior, si $\vec{\Omega}_{\text{arr}}$ es la velocidad angular del sistema intermedio (totalmente independiente de la del cuerpo), la velocidad del punto se escribirá como

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{u}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \vec{u} + \dot{\vec{u}}|_{\text{rel}} \quad (\text{A.73})$$

donde la derivación relativa lo es respecto del sistema intermedio.

El término $\dot{\vec{u}}|_{\text{rel}}$ es la *velocidad relativa*, la que mediría un observador que se moviera con el sistema intermedio, mientras que los términos $\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \vec{u}$ representan la *velocidad de arrastre*, la que tendría un punto situado en la posición dada por (A.72) en el mismo instante, pero que se moviera solidario con el sistema intermedio (compárese con (A.68)).

Aceleración

Derivando (A.73) respecto del tiempo nuevamente

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{u}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha}_{\text{arr}} \times \vec{u} + \vec{\Omega}_{\text{arr}} \times (\vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \vec{u}) + \dot{\vec{u}}|_{\text{rel}} + 2\vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \dot{\vec{u}}|_{\text{rel}} \quad (\text{A.74})$$

donde $\vec{\alpha}_{\text{arr}} = \dot{\vec{\Omega}}_{\text{arr}}$ es la *aceleración angular* del sistema intermedio. También es este caso se tiene que

$$\vec{\alpha}_{\text{arr}} = \vec{\alpha}_{\text{arr}}|_{\text{rel}} \quad (\text{A.75})$$

ya que

$$\dot{\vec{\Omega}}_{\text{arr}} = \dot{\vec{\Omega}}_{\text{arr}}|_{\text{rel}} + \vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \vec{\Omega}_{\text{arr}} = \dot{\vec{\Omega}}_{\text{arr}}|_{\text{rel}} \quad (\text{A.76})$$

El término $\ddot{\vec{u}}|_{\text{rel}}$ representa la *aceleración relativa*, la que mediría un observador que se moviera con el sistema intermedio. Los términos $\ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha}_{\text{arr}} \times \vec{u} + \vec{\Omega}_{\text{arr}} \times (\vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \vec{u})$ (compárese con (A.69)) corresponden a la *aceleración de arrastre*, la que tendría un punto situado en la posición dada por (A.72) en el mismo instante, pero que se moviera solidario con el sistema intermedio. Finalmente, el término $2\vec{\Omega}_{\text{arr}} \times \dot{\vec{u}}|_{\text{rel}}$ es la *aceleración de Coriolis*.

Análogamente al caso de cinemática absoluta, los vectores que aparecen en las expresiones anteriores pueden ser descritos mediante sus componentes en cualquier sistema de coordenadas, indistintamente, y las expresiones son válidas siempre que todos ellos lo estén en el mismo.

A.10. Conclusiones

En este apéndice se ha presentado un resumen de la cinemática espacial.

Se ha deducido la matriz de transformación entre sistemas de coordenadas y se ha probado su ortonormalidad. Así mismo, se ha mostrado cómo obtener, a partir de ella y su derivada temporal, las componentes en ambos sistemas de los vectores de velocidad y aceleración angulares de un sistema respecto del otro. Asociar un sistema de coordenadas a un cuerpo de forma que se mueva solidariamente con él permite también expresar su velocidad y su aceleración angulares.

Se ha definido la derivada relativa a unos ejes móviles y se ha mostrado su relación con la derivada absoluta y la velocidad angular del sistema móvil.

Finalmente, se han deducido las fórmulas de las cinemáticas absoluta y relativa del sólido rígido.

Bibliografía

- [1] EN 14363:2005. *Aplicaciones ferroviarias. Ensayo para la aceptación de las características en movimiento de los vehículos ferroviarios. Ensayo de comportamiento en movimiento y ensayos estacionarios*, 2005.
- [2] C. Andersson. *Modelling and simulation of train-track interaction including wear*. PhD thesis, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2003.
- [3] C. Andersson and T. Abrahamsson. Simulation of interaction between a train in general motion and a track. *Vehicle System Dynamics*, 38:433–455, 2002.
- [4] *ANSYS 10.0 Online Help*. ANSYS, Inc., 2005. URL <http://www.ansys.com>.
- [5] P. Apiwattanalunggarn, S. W. Shaw, C. Pierre, and D. Jiang. Finite-element-based nonlinear modal reduction of a rotating beam with large-amplitude motion. *Journal of Vibration and Control*, 9(3-4):235–263, 2003.
- [6] P. Apiwattanalunggarn, S. W. Shaw, and C. Pierre. Component mode synthesis using nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 41:17–46, 2005.
- [7] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. Reverté, Barcelona, 1982.
- [8] J. Arnold, I. Kaiser, and G. Schupp. Simulation of a railway vehicle’s running behaviour: How elastic wheelsets influence the simulation results. *Vehicle System Dynamics*, 41(SUPPL.):242–251, 2004.
- [9] L. Baeza, A. Roda, J. Carballeira, and E. Giner. Railway train-track dynamics for wheelflats with improved contact models. *Nonlinear Dynamics*, 45(3-4):385–397, 2006.
- [10] L. Baeza, A. Roda, and J. C. O. Nielsen. Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach. *Journal of Sound and Vibration*, 293(1-2):112–124, 2006.
- [11] L. Baeza, J. Fayos, A. Roda, and R. Insa. High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets. *Vehicle System Dynamics*, In Press.
- [12] H. F. Bauer. Vibration of a spinning uniform beam, part I: orientation in axis of rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 72(2):177–189, 1980.

- [13] T. Belytschko, J. M. Kennedy, and Schoeberle D. F. Quasi-eulerian finite element formulation for fluid-structure interaction. In *Proceedings of Joint ASME/CSME Pressure Vessels and Piping Conference*, page 13. New York, 1978.
- [14] W. Bolton. *Ingeniería de Control*. Marcombo, Barcelona, 2001.
- [15] M. A. Brown. *Inertia forces in rotating shaft problems*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering. University of Illinois, Chicago, USA, 1996.
- [16] M. A. Brown and A. A. Shabana. Application of multibody methodology to rotating shaft problems. *Journal of Sound and Vibration*, 204:439–457, 1997.
- [17] Z. Cai. *Modelling of rail track dynamics and wheel-rail interaction*. PhD thesis, Department of Civil Engineering, Queen’s University, Kingston, Ontario, Canada, 1992.
- [18] N. Chaar and M. Berg. Vehicle-track dynamic simulations of a locomotive considering wheelset structural flexibility and comparison with measurements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 219(4):225–238, 2005.
- [19] D. Childs. *Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling and analysis*. John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 1993.
- [20] S. H. Choi, C. Pierre, and Ulsoy A. G. Consistent modeling of rotating Timoshenko shafts subject to axial load. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114(2):249–259, 1992.
- [21] H. Claus and W. Schiehlen. Dynamic stability and random vibrations of rigid and elastic wheelsets. *Nonlinear Dynamics*, 36:299–311, 2004.
- [22] A. D. Dimarogonas and S. A. Paipetis. *Analytical methods in rotor dynamics*. Applied Science Publishers, London, 1983.
- [23] F. M. Dimentberg. *Flexural vibrations of spinning shafts*. Butterworths Press, London, 1961.
- [24] J. Donea and A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 2003.
- [25] J. Donea, P. Fasoli-Stella, and S. Giuliani. Lagrangian and eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems. In *Trans. 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, page B1/2. San Francisco, 1977.
- [26] H. Du, M. K. Lim, and K. M. Liew. A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 175:505–523, 1994.
- [27] D. G. Duffy. The response of an infinite railroad track to a moving, vibrating mass. *Journal of Applied Mechanics*, 57:66–73, 1990.

- [28] R. V. Dukkipatti and R. Dong. Idealized steady state interaction between railway vehicle and track. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 213(1):15–29, 1999.
- [29] R. L. Eshleman and R. A. Eubanks. On the critical speeds of a continuous rotor. *Journal of Engineering for Industry*, pages 1180–1188, 1969.
- [30] D. J. Ewins. *Modal testing: theory, practice and application*. Research Studies Press Ltd., Baldock, 2000.
- [31] J. Fayos, A. Rovira, L. Baeza, and J. Carballeira. Rotating shaft analytical response in adimensional form. In *Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration*. Vienna, 2006.
- [32] J. Fayos, L. Baeza, F. D. Denia, and J. E. Tarancón. An eulerian coordinate-based method for analysing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis. *Journal of Sound and Vibration*, 306(3-5):618–635, 2007.
- [33] J. Fayos, L. Baeza, A. Rovira, and P. Vila. Model of the railway wheelset for high-frequency dynamic analysis. In *Proceedings of 20th Symposium of the International Association for Vehicle System Dynamics*. Berkeley, USA, 2007.
- [34] J. Fayos, P. Vila, A. Rovira, and L. Baeza. Modelo flexible y rotatorio del eje montado de un vehículo ferroviario. In *Actas del XVII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*. Gijón, 2008.
- [35] R. M. Franck and R. B. Lazarus. Mixed eulerian-lagrangian method. *Methods in Computational Physics*, 3:47–67, 1964.
- [36] M. S. Gadala and J. Wang. ALE formulation and its application in solid mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 167:33–55, 1998.
- [37] E. Gómez. *Desarrollo de técnicas avanzadas para la medición de esfuerzos rueda/carril en trenes de alta velocidad*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastián, 2007.
- [38] J. P. den Hartog. *Mechanical vibrations*. Dover Publication, Inc., New York, 1985.
- [39] C. W. Hirt, A. A. Amsden, and J. L. Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *J. Comput. Phys.*, 14:227–253, 1974.
- [40] T. J. R. Hughes, W. K. Liu, and Zimmermann T. K. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 29(3):329–349, 1981.
- [41] A. Igeland. *Dynamic train/track interaction: Simulation of railhead corrugation growth under a moving bogie using mathematical models combined with full-scale measurements*. PhD thesis, Division of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1997.

- [42] A. Johansson and C. Andersson. Out-of-round railway wheels - A study of wheel polygonalization through simulation of three-dimensional wheel-rail interaction and wear. *Vehicle System Dynamics*, 43:539–559, 2005.
- [43] I. Kaiser and K. Popp. Interaction of elastic wheelsets and elastic rails: modelling and simulation. In *Proceedings of 19th Symposium of the International Association for Vehicle System Dynamics*. Milano, 2005.
- [44] T. R. Kane. An addition to the theory of whirling. *Journal of Applied Mechanics*, pages 383–386, 1961.
- [45] R. Katz. The dynamic response of a rotating shaft subject to an axially moving and rotating load. *Journal of Sound and Vibration*, 246(5):757–775, 2001.
- [46] R. Katz, C. W. Lee, A. G. Ulsoy, and R. A. Scott. The dynamic response of a rotating shaft subject to a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 122:131–148, 1988.
- [47] K. L. Knothe and S. L. Grassie. Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, 22:209–262, 1993.
- [48] K. L. Knothe and Y. Wu. Receptance behaviour of railway track and subgrade. *Archive of Applied Mechanics*, 68:457–470, 1998.
- [49] H. Kruse, K. Popp, and T. Krzyzynski. On steady state dynamics of railway tracks modelled as continuous periodic structures. *Machine Dynamic Problems*, 20:149–166, 1998.
- [50] S. Y. Lee and S. M. Lin. Bending vibrations of rotating nonuniform Timoshenko beams with an elastically restrained root. *Journal of Applied Mechanics*, 61:949–955, 1994.
- [51] K. Ludwig. Deformation of a rail elastically supported and of infinite length by loads moving at a constant horizontal velocity. In *Proceedings of 5th International Congress Applied Mechanics*, pages 650–655. 1938.
- [52] R. H. McNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1(4):581–601, 1971.
- [53] T. Meinders. Modelling of a railway wheelset as a rotating elastic multibody system. *Machine Dynamic Problems*, 20:209–219, 1998.
- [54] T. Meinders and P. Meinke. Rotor dynamics and irregular wear of elastic wheelset. In K. Popp and W. Schiehlen, editors, *Lecture Notes in Applied Mechanics*, pages 133–152. Springer, Berlin, 2003.
- [55] V. T. Nagaraj. Approximate formula for the frequencies of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Aircraft*, 33:637–639, 1996.
- [56] H. D. Nelson and J. M. McVaugh. The dynamics of rotor bearing systems using finite elements. *Journal of Engineering for Industry*, 98(2):593–600, 1976.

- [57] S. G. Newton and R. A. Clark. An investigation into the dynamic effects on the track of wheelflats on railway vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 21(4): 287–297, 1979.
- [58] J. C. O. Nielsen and T. J. S. Abrahamsson. Coupling of physical and modal components for analysis of moving non-linear dynamic systems on general beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33: 1843–1859, 1992.
- [59] J. C. O. Nielsen and A. Igeland. Vertical dynamic interaction between train and track—influence of wheel and track imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 187(5):825–839, 1995.
- [60] J.C.O. Nielsen, J. W. Ringsberg, and L. Baeza. Influence of railway flat impact on crack growth in rails. In *Proceedings of 8th International Heavy Haul Conference*. Rio de Janeiro, 2005.
- [61] W. F. Noh. CEL: A time-dependent two-space dimensional coupled eulerian-lagrangian code. *Methods in Computational Physics*, 3:117–179, 1964.
- [62] S. P. Patil. Response of infinite railroad track to vibrating mass. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(4):688–703, 1988.
- [63] K. Popp, H. Kruse, and I. Kaiser. Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range. *Vehicle System Dynamics*, 31:423–464, 1999.
- [64] K. Popp, I. Kaiser, and H. Kruse. System dynamics of railway vehicles and track. *Archive of Applied Mechanics*, 72:949–961, 2003.
- [65] F. Périard. *Wheel-rail noise generation: Curve squealing by trams*. PhD thesis, Technical University Delft, Netherlands, 1998.
- [66] A. Roda. *Modelo dinámico de la interacción vía-vehículo basado en subestructuración*. Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2006.
- [67] A. Sala and J. Bondia. *Comportamiento dinámico de sistemas*. Editorial UPV, Valencia, 2000.
- [68] A. A. Shabana. *Dynamics of multibody systems*. Cambridge University Press, 1998.
- [69] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85–124, 1993.
- [70] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3):319–347, 1994.

- [71] S. W. Shaw, C. Pierre, and E. Pesheck. Modal analysis-based reduced-order models for nonlinear structures—An invariant manifold approach. *The Shock and Vibration Digest*, 31(1):3–16, 1999.
- [72] G. J. Sheu and S. M. Yang. Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47:157–169, 2005.
- [73] K. B. Subrahmanyam and K. R. V. Kaza. Vibration and buckling of rotating, pretwisted precone beams including coriolis effects. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 108:140–149, 1986.
- [74] T. Szolc. Medium frequency dynamic investigation of the railway wheelset-track system using a discrete-continuous model. *Archive of Applied Mechanics*, 68:30–45, 1998.
- [75] T. Szolc. Simulation of bending-torsional-lateral vibrations of the railway wheelset-track system in the medium frequency range. *Vehicle System Dynamics*, 30(6):473–508, 1998.
- [76] T. Szolc. Simulation of dynamic interaction between the railway bogie and the track in the medium frequency range. *Multibody System Dynamics*, 6:99–122, 2001.
- [77] D. J. Thompson. Wheel-rail noise generation, part V: inclusion of wheel rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):467–482, 1993.
- [78] J. M. Tunna. Wheel/rail forces due to wheel irregularities. In *Proceedings Ninth International Wheelset Congress*. Montreal, Canada, 1988.
- [79] UIC 518. *Testing and approval of railway vehicles from the point of view of their dynamic behaviour—Safety—Track fatigue—Ride quality*. Union Internationale des Chemins de Fer, 3rd edition, October 2005.
- [80] *FEAP 7.5*. University of California, Berkeley, 2004. URL <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap>.
- [81] J. T. S. Wang, O. Mahrenholtz, and J. Bohm. Extended Galerkin's method for rotating beam vibrations using legendre polynomials. *Solid Mechanics Archives*, 1:341–365, 1976.
- [82] W. Weaver, S. Timoshenko, and D.H. Young. *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 1974.
- [83] T. Yokoyama. Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beam. *International Journal of Mechanical Sciences*, 30:743–755, 1988.
- [84] I. Zobory and V. Zoller. Dynamic response of a periodically supported railway track in case of a moving complex phasor excitation. In M. P. Bendsoe M. Brons and M. P. Sorensen, editors, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 96*. Stuttgart, Teubner, 1997.