Jorge Juan y Antonio de Ulloa en el problema de la forma de la Tierra

por Manuel López Pellicer, académico de la Real Academia de Ciencias
IUMPA y Profesor emérito de la Universitat Politècnica de València
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España. Email: mlopezpe@mat.upv.es

y Gaspar Mora Martínez, catedrático E.U. de la Universitat d'Alacant
Calle San Vicente del Raspeig, s/n, 03690, Alicante, España. Email: gaspar.mora@ua.es

Dedicado al académico correspondiente profesor Antonio Martínez Naveira (1940-2021)

Palabras clave. (Cálculo diferencial e integral) / (Desarrollos en serie) / (Excentricidad) / (Rectificación del meridiano) / (Relaciones geométricas).

Resumen

Este artículo recoge la conferencia pronunciada en la Real Academia de Ciencias el 29 de enero de 2020, en la edición 22 del Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica, cuyas fuentes fueron el artículo [López19] y, sobre todo, en el libro [Juan48a] de Jorge Juan y Alejandro de Ulloa, *Observaciones astronómicas y físicas hechas de orden de S. Mag. en los Reinos del Perú, de las cuales se deduce la figura y magnitud de la Tierra y se aplica a la navegación*. Fue escrito después de su participación, desde 1735 a 1744, en la expedición a Ecuador organizada por el Secretario de Estado de la Armada Francesa y la Academia Francesa de Ciencias para la medición de la longitud del arco de meridiano de amplitud un grado, a fin de comprobar que la Tierra estaba achatada por los Polos y así poder determinar con precisión longitudes y latitudes de los puntos de la Tierra, problema fundamental para facilitar y hacer más segura la navegación. En [López19] se analiza cómo Jorge Juan aplicó cálculo diferencial, geometría y desarrollos en serie para obtener la longitud de un meridiano y la relación entre el diámetro del Ecuador y el eje polar, suponiendo que la forma de la Tierra es un elipsoide y siguiendo los entonces recientes postulados físicos y métodos matemáticos de Newton y Clairaut. El trabajo de Juan es una muestra brillante de cómo la matemática predice y describe con éxito fenómenos y entes de la naturaleza.

Abstract

This article is the talk delivered at the Royal Academy of Sciences on January 29, 2020, within the 22nd edition of the Program for the Promotion of Scientific and Technological Culture. It was based on the article [López19] and, above all, on the book [Juan48a] of Jorge Juan and Alejandro de Ulloa *Astronomical and physical observations made of the order of S. Mag. in the Kingdoms of Peru, from which the figure and magnitude of the Earth is deduced and is applied to navigation*. It was written after his participation, from 1735 to 1744, in the expedition to Ecuador organized by the Secretary of State of the French Navy and the French Academy of Sciences for the measurement of an arc length of the meridian of amplitude one degree, in order to verify that the Earth was flattened by the Poles and to be able to accurately determine longitudes and latitudes of points on Earth, a fundamental problem to facilitate and make navigation safer. In [López19] it is analyzed how Jorge Juan applied differential calculus, geometry and series developments to obtain the length of a meridian and the relationship between the diameter of the equator and the polar axis, assuming that the shape of the Earth is an ellipsoid and following

the then recent physical postulates and mathematical methods of Newton and Clairaut. Juan's work is a brilliant example of how mathematic successfully predicts and describes phenomena and entities in nature.

1. El problema de la forma de la Tierra.

A partir del siglo V a.C. los griegos aceptaban que la Tierra era redonda, consecuencia de observaciones experimentales sencillas que terminaron con creencias anteriores que la suponían plana.

Figura 1
Eratosthenes of Cyrene
(276-194 a.C.)

Eratosthenes de Cirene, figura 1, conocía por un papiro de su biblioteca que en Siena (hoy Asuán, Egipto) a mediodía del solsticio de verano los objetos verticales no proyectaban sombra alguna y que los rayos del Sol incidían verticalmente en el fondo de los pozos. En el siglo III a.C. midió en Alejandría que, en esa hora y fecha, los objetos verticales proyectaban la sombra correspondiente a una inclinación de 7’2 grados de los rayos del Sol respecto a la vertical. Eratosthenes suponía que la forma de la Tierra es esférica, y que por la gran distancia entre el Sol y la Tierra los rayos del Sol llegan paralelos a la Tierra. Además, creía que Siena y Asuán tenían la misma longitud, si bien realmente su diferencia de longitudes es 3 grados. Las dos hipótesis y su creencia le permitieron estimar que la longitud del meridiano era 360/7,2 (=50) veces la distancia entre Siena y Alejandría. Al ser 5000 estadios la distancia entre estas dos ciudades, siendo un estadio igual a 185 metros, se deduce que obtuvo que la longitud de un meridiano es 46250 km.

Eratosthenes estimó, además, los tamaños del Sol y la Luna y confirmó el modelo heliocéntrico de Aristarco (siglo III a.C), en contraposición al modelo geocéntrico. Eratosthenes no consiguió implantar el modelo de Aristarco, debido a la influencia de Aristóteles, partidario del modelo geocéntrico, que reelaborado por Ptolomeo (siglo II d.C.) fue aceptado durante trece siglos más, siendo sustituido por el modelo de Copérnico (1473-1543), que esencialmente es una vuelta al modelo heliocéntrico de Aristarco. Lo que permaneció invariante fue la concepción de la esfericidad de la Tierra hasta el siglo XVII.

Tras el descubrimiento de América surgió la necesidad de fijar con precisión la forma de la Tierra y las distancias entre puntos de su superficie para poder establecer rutas de navegación más precisas. En 1528 Jean Fernel (1497-1558) midió la longitud de un grado de meridiano entre París y Amiens (Francia). El resultado que obtuvo fue 57020 toesas, siendo una toesa aproximadamente igual a 1,946 metros, resultado sorprendentemente próximo al de la medición efectuada dos siglos después (ver [Juan48a, p. 346]).

La precisión en la medición aumentó con la introducción de la triangulación geodésica por Willebrord Snellius (1580-1626), utilizada por Richard Norwood (1590-1675) para medir un grado entre Londres y York, con la sistematización de los métodos para determinar la latitud debida a Giovanni Riccioli (1598-1671), que la utilizó para calcular la distancia entre Módena y Bolonia y, finalmente, con la utilización de los primeros dispositivos de precisión de la época, como lentes astronómicas con retícula. Así fue como Jean Picard (1620-1682) obtuvo con solo un error del 0,44% que el radio de la Tierra, supuestamente esférica, medía 6328,9 km, y estableció que un grado de meridiano entre París y Amiens medía 57060 toesas, valor también muy cercano al actual. Picard empezó el mapa triangulado de Francia y realizó numerosas observaciones astronómicas.

Figura 2
Isaac Newton (1643-1727)

Newton (1643-1727), figura 2, conjeturó en la primera edición de Principia [13] en 1687 que la Tierra no tenía la forma de una esfera perfecta, y que debe estar achatada por los polos, lo que supuso el inicio del "*problema de la forma de la Tierra*" [Greenberg95]. Los experimentos de Jean Richer (1630-1696) en Cayenne (Guayana Francesa, cerca del ecuador) entre 1671 y 1673 demostraban la desaceleración del péndulo respecto a París, lo que hizo sospechar a Newton que la ligera disminución de la fuerza gravitacional en las proximidades del ecuador se debía al aumento de la fuerza centrífuga a acercarse al ecuador, lo que provocaría que la Tierra se aplanase en los polos. Avalaba esta sospecha Las observaciones astronómicas de John Flamsteed (1646-1719) y Jean Dominique Cassini (1625-1712) sobre el achatamiento polar en Júpiter y el que Huygens (1629-1695) también hubiese predicho el achatamiento de la Tierra en los polos, si bien por razones diferentes. Una segunda expedición de Richer a Cayenne para volver a medir las oscilaciones del péndulo confirmó la teoría de Newton, frente a la teoría cartesiana de los vórtices que predecía que la Tierra estaba alargada por los polos.

Los trabajos de medición Jean Picard fueron continuados por Jean Dominique Cassini (1625-1712) y, especialmente, por su hijo Jacques Cassini (1677-1756) entre 1701 y 1735, cubriendo un arco de 8 ° 30 ′ entre París y Colliure, obteniendo 57097 toesas como valor medio del grado de meridiano y obteniendo la sorprendente conclusión de que en la zona medida "*la longitud de las longitudes de arcos de meridiano de amplitud un grado cercanos al ecuador era mayor que la de los más cercanos al polo norte*", lo que contradecía la teoría de Newton y daba la razón a la teoría cartesiana. La Academia de Ciencias de París publicó el informe de Jacques Cassini, basado en cincuenta años de expediciones geodésicas para medir grados de meridianos [Greenberg95]. Este informe modeliza el meridiano como "*una elipse cuyo diámetro mayor representa el eje de la Tierra y el menor el del ecuador*".

Afortunadamente, las conclusiones de Jacques Cassini no convencieron a todos los académicos franceses y dado que la diferencia de los diámetros correspondientes al eje polar y al Ecuador serían pequeñas, se acordó que se debían realizar dos expediciones para medir la longitud de dos arcos de meridiano de un grado de amplitud situados uno en Laponia, cerca del polo norte, y otro en el Virreinato de Perú, cerca del ecuador, en una zona del actual país Ecuador. La segunda expedición debería hacerse en colaboración con la corona española, soberana entonces de ese territorio.

Figura 3
Pierre Louis Moreau de
Maupertuis (1698-1759)

2. Las expediciones a Laponia y al Ecuador.

La expedición a Laponia tuvo por finalidad medir un grado de meridiano a 76 grados de latitud norte, entre las ciudades de Kittis y Tornea. Estuvo dirigida por Pierre Louis Moreau de Maupertuis

(1698-1759), figura 3, matemático de 30 años y Alexis Claude Clairaut (1713-1765), también matemático de 23 años, figura 4.

Figura 4
Alexis Claude Clairaut
(1713-1765)

Los trabajos se realizaron entre 1736 y 1737 por acuerdo entre Francia, Suecia y Rusia. Estuvo dirigida por Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), matemático de 30 años y Alexis Claude Clairaut (1713-1756), también matemático de 23 años. Fueron acompañados por Pierre Charles Le Monnier (1715-1799), astrónomo de 21 años y Charles Etienne Louis Camus (1699 – 1768), matemático de 37 años. A estos cuatro académicos de la Academia de Ciencias de París se les unieron tres miembros de la Universidad de Upsala, Reginald Outhier (1694-1774), abad de 42 años, Anders Celsius (1701-1744), profesor de astronomía de 35 años, y Anders Hellant (1717-1789), también astrónomo que, además, actuó de intérprete. Concluyeron que la longitud de un arco de meridiano de amplitud un grado en Laponia, entre las ciudades de Kittis y Tornea, medía 57437,9 toesas.

La expedición al virreinato español de Perú, a 2 grados de latitud sur en el actual país Ecuador, fue más larga y complicada, pues duró de 1734 a 1744. En 1734, Felipe V recibió la solicitud de su primo, el rey Luis XV de Francia, para que pudiese viajar a Quito una expedición de la Real Academia de Ciencias de Paris dirigida por Louis Godin (1704-1760), astrónomo de 32 años, figura 5, Charles Marie de la Condamine (1701-1774), químico y geógrafo de 35 años, figura 6, y Pièrre Bouguer (1698-1758), matemático de 38 años, figura 7, acompañados de Joseph de Jussieu (1704-1779), botánico, Jean de Sniergues, cirujano, Jean Joseph Verguin (1701 – 1777), ingeniero y geógrafo, Godin des Odonnais, agrimensor y sobrino de Louis Godin, Hugot, relojero, Couplet, geógrafo ayudante, el dibujante Morainville y el criollo Pedro Vicente Maldonado Sotomayor, que actuaría de intérprete, con la finalidad de medir la longitud de un arco de meridiano de un grado de amplitud.

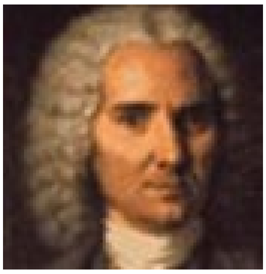


Figura 5
Louis Godin (1704-1760)

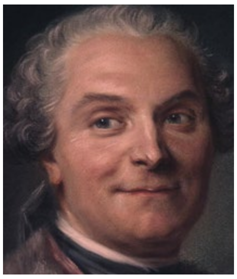


Figura 6
Charles Marie de la Condamine (1701-1774)

Figura 7
Pièrre Bouguer
(1698-1758)

Felipe V sentía admiración por los sabios franceses y quiso participar en la empresa. En una Real Orden de 20 de agosto de 1734 ordenó elegir a "*dos personas en quienes concurrieran no sólo las condiciones de buena educación, indispensables para conservar amistosa y recíproca correspondencia con los académicos franceses, sino la instrucción necesaria para poder ejecutar todas las observaciones y experiencias conducentes al objeto, de modo que el resultado fuese*

Figura 8
Jorge Juan y Santacilia
(1713-1773)

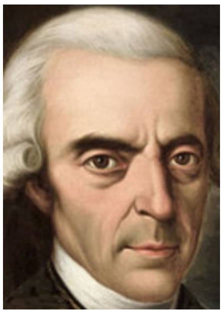


Figura 9
Antonio de Ulloa y de la Torre-Giralt(1716-1795)

fruto de sus propios trabajos, con entera independencia de lo que hicieran los extranjeros".

Se designó a dos jóvenes guardiamarinas, al alicantino Jorge Juan y Santacilia (1713-1773), figura 8, y al sevillano Antonio de Ulloa y de la Torre-Guiral (1716-1795), figura 9. Ambos habían finalizado sus estudios con veintitrés y veinte años. Se les ascendió a tenientes de navío, siendo Jorge Juan el encargado de realizar el trabajo matemático y a Antonio de Ulloa se le dio la responsabilidad de realizar todo el trabajo relacionado con las ciencias de la naturaleza, que le llevó a descubrir el platino, llamado "platina" por los indígenas. Fueron excelentes amigos toda la vida.

Partieron de Cádiz el 26 de mayo de 1735 en compañía del Marqués de Villagarcía, que acababa de ser nombrado virrey del Perú. Jorge Juan viajó en el navío El Conquistador y Antonio de Ulloa en la fragata Incendio. Llegaron el 7 de julio a Cartagena de Indias, donde esperaron hasta el desembarco de los académicos franceses el 15 de noviembre. Juntos emprendieron la ruta por Guayaquil para llegar a Quito.

La medición del grado de meridiano en Quito mediante triangulaciones, en llano y en cumbres de 5000 metros duró desde 1736 a 1744, teniendo que superar grandes dificultades. Las ciudades de Quito y Cuenca, situada tres grados al sur de Quito, limitaron los extremos de la medición; entre ambas, una doble cadena de montañas paralelas facilitó la elección de vértices a una y otra parte del gran valle que limitan. Se separaron en dos grupos: Un grupo dirigido por Godín y Jorge Juan y el otro grupo estuvo dirigido por La Condamine, Bouguer y Ulloa. Ambos grupos efectuaron las medidas por separado y en sentido contrario, con el fin de comprobar su exactitud. Después de varias comprobaciones, complementaron las mediciones realizadas con otras mediciones astronómicas.

Defectos graves del instrumental que tenían les obligó a repetir numerosas veces mediciones y a rehacer cálculos. Por ello, Godín, Jorge Juan y el relojero Hugot construyeron un instrumento de 6 metros de largo para facilitar las mediciones. Ulloa en [Juan48b] describió así algunas dificultades y sufrimientos que soportaron:

"*Nuestra común residencia era dentro de la choza, así porque el exceso del frío y la violencia de los vientos, no permitían otra cosa, cuando porque de continuo estábamos envueltos en una nube tan espesa que no dejaba libertad a la vista....cuando se elevaban las nubes, todo era respirar su mayor densidad, experimentar una continua lluvia de gruesos copos de nieve o granizo, sufrir la violencia de los vientos y con ésta, vivir en continuo sobresalto, o de que arrancaran nuestra habitación y dieran con ella y con nosotros en el tan inmediato precipicio, o de que la carga de hielo y nieve, que se amontonaba en corto rato sobre ella, la venciese y nos dejase sepultados....y se aterrorizaba el ánimo con el estrépito causado por los peñascos, que se desquiciaban, y hacían con su precipitación, y caída no sólo estremecer todo aquél picacho, sino también llevar consigo a cuantos tocaba en el discurso de la carrera...*".

Obtuvieron que la longitud de un arco de meridiano de un grado de amplitud en el Ecuador mide 56767,788 toesas, lo que unido a las longitudes de dos arcos de meridiano de un grado de amplitud situados a 45º de latitud uno y en Laponia el otro, miden 57050 toesas y 57437.9 toesas, permitió verificar la hipótesis de Newton de que la Tierra está achatada por los polos. La medición a 45º de latitud la realizó el abad astrónomo Nicolas-Louis de Lacaille (1713- 1762).

Todo el trabajo desarrollado por Jorge Juan y Antonio de Ulloa está recogido en estos dos libros, editados gracias al apoyo del Marqués de la Ensenada. Sus títulos son:

Jorge Juan y Antonio de Ulloa, *Observaciones astronómicas y físicas hechas de orden de S. Mag. en los Reinos del Perú*, Imprenta Real de la Gazeta 1748. Lleva por subtítulo, *de las cuales se deduce la figura y magnitud de la Tierra y se aplica a la navegación*, figura 10.

Jorge Juan y Antonio de Ulloa, *Relacion histórica del viage a la América meridional hecho de orden de S. Mag. para medir algunos grados de meridiano terrestre y venir por ellos en conocimento de la verdadera figura y magnitud de la tierra, con otras varias obsevaciones astronómicas y físicas*, Imprenta Real de la Gazeta 1748, figura 11.

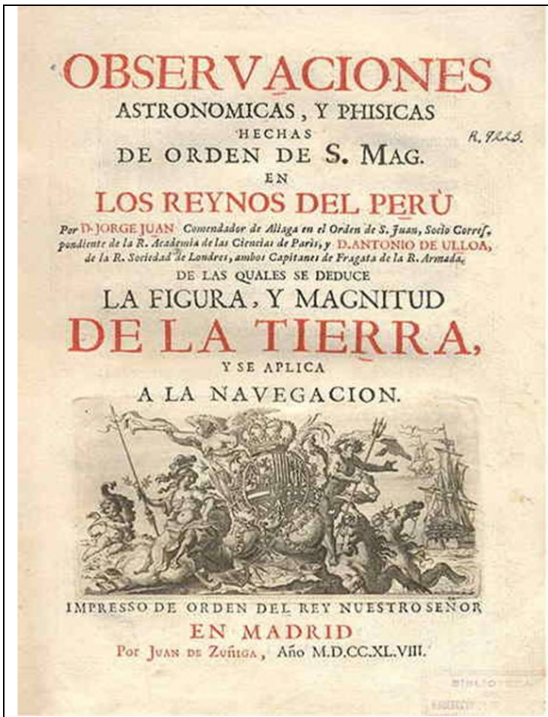

OBSERVACIONES
ASTRONOMICAS, Y PHISICAS
HECHAS
DE ORDEN DE S. MAG.
EN
LOS REYNOS DEL PERÙ
Por D. JORGE JUAN Comendador de Aliaga en el Orden de S. Juan, Socio Correspondiente de la R. Academia de las Ciencias de Paris, y D. ANTONIO DE ULLOA, de la R. Sociedad de Londres, ambos Capitanes de Fragata de la R. Armada.
DE LAS QUALES SE DEDUCE
LA FIGURA, Y MAGNITUD
DE LA TIERRA,
Y SE APLICA
A LA NAVEGACION.
IMPRESSO DE ORDEN DEL REY NUESTRO SEÑOR
EN MADRID
Por JUAN DE ZUÑIGA, Año M.D.CC.XL.VIII.

Figura 10
Portada del libro Observaciones Astronómicas y Físicas de Jorge Juan y Antonio de Ulloa. 1748


RELACION HISTORICA
DEL VIAGE
A LA AMERICA MERIDIONAL
HECHO
DE ORDEN DE S. MAG.
PARA MEDIR ALGUNOS GRADOS DE MERIDIANO
Terrestre, y venir por ellos en conocimiento de la verdadera Figura, y Magnitud de la Tierra, con otras varias Observaciones Astronomicas, y Phisicas:
Por DON JORGE JUAN, Comendador de Aliaga, en el Orden de San Juan, Socio correspondiente de la Real Academia de las Ciencias de Paris, y DON ANTONIO DE ULLOA, de la Real Sociedad de Londres: ambos Capitanes de Fragata de la Real Armada.
PRIMERA PARTE, TOMO PRIMERO.
IMPRESSA DE ORDEN DEL REY NUESTRO SEÑOR
EN MADRID
Por ANTONIO MARIN, Año de M.DCC.XLVIII.

Figura 11
Portada del libro Relación Histórica del viaje a América de Jorge Juan y Antonio de Ulloa. 1748

Los dos apartados siguientes de este artículo recogen sucintamente las aportaciones de Jorge Juan en la obtención de la razón de diámetros terrestres y de la longitud del meridiano contenidas en [Juan48a], uniendo a su aguda intuición geométrica la modelización de la forma de la Tierra mediante el elipsoide de revolución propuesto por Newton y la aplicación ingeniosa de los entonces recientes descubrimientos de cálculo integral, cálculo diferencial y series. Así fue como Jorge Juan y Antonio de Ulloa fijaron con precisión longitudes y latitudes y elaboraron cuarenta de las cien cartas de navegación de su época.

Ambos merecieron los elegíos de José Echegaray (1832-1916), premio Nobel de Literatura en 1904, quien en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, leído el 11 de marzo de 1866, dijo:

"*Cierto es, señores, que en las ciencias aplicadas, en las que como la mecánica, la astronomía, la geodesia, la navegación, son las matemáticas puras, auxiliar poderosísimo, y tanto que hasta se designan aquellas con el nombre de matemáticas aplicadas o mixtas, hay dos nombres ilustres* *y de reputación europea que yo debo recordar hoy, siquiera por dar un rayo de luz a cuadro tan sombrío: son éstos don Antonio Ulloa y el insigne don Jorge Juan*".

3. La razón del diámetro del ecuador y del diámetro que une los polos de la Tierra.

Durante la expedición de Jorge Juan y Antonio de Ulloa a América (1735-1744), Maupertuis publicó un artículo titulado La Figure de la Terre, [Maupertuis38], en el que resuelve el problema de determinar la razón entre los diámetros mayor y menor de la Tierra. En el prólogo de [Juan 48a] Jorge Juan escribió:

"*Para encontrar la razón por la que estos dos diámetros son diferentes, el Sr. de Maupertuis da una fórmula bajo el supuesto de que la curva, por cuya revolución se produce el esferoide, o forma de la Tierra, es una elipse. Por este mismo principio di otro en Quito, ignorando el primero, que no solo es distinto al del señor de Maupertuis porque usó series infinitas, cosa que yo no hice, sino por ser mi solución más sencilla. Esto me haría omitir la mía con toda su construcción, si no fuera más general, y fueran necesarias algunas ecuaciones que resulten de ella. El enunciado y la forma en que lo resolví se reducen a este problema: Dados dos grados, o minutos, de la periferia de una elipse, encontrar la razón de sus diámetros*".

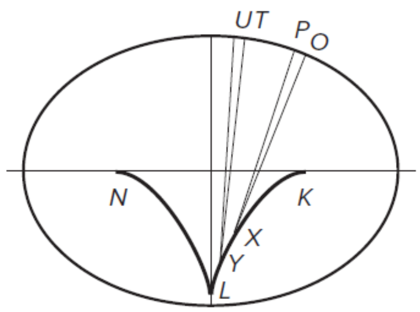


Figura 12

Para resolver este problema, Jorge Juan considera la elipse

$$(x-A)^2 + A^2y^2 = A^2$$

de la figura 12 con semiejes A y 1, $A > 1$, y centro en el punto $(A, 0)$. Por diferenciación y sustitución obtiene que los radios de curvatura en los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $U = (x_2, y_2)$ son

$$PX = \frac{\{1 + (A^2 - 1)y_1^2\}^{3/2}}{A}$$

Y

$$UY = \frac{\{1 + (A^2 - 1)y_2^2\}^{3/2}}{A}$$

Suponiendo que la amplitud de los ángulos OXP y TYU es un minuto, indica en [Juan48a, p. 307] que, muy aproximadamente, la igualdad de dichos ángulos implica la semejanza de los triángulos OXP y TYU, por lo que si las longitudes de los arcos *PQ* y *UT* son m y M de

$$\frac{PX}{UY} = \frac{m}{M}$$

y de las dos igualdades anteriores deduce que

$$\frac{\{1 + (A^2 - 1)y_1^2\}^{3/2}}{\{1 + (A^2 - 1)y_2^2\}^{3/2}} = \frac{m}{M},$$

por lo que

$$A = \left[1 + \frac{M^{2/3} - m^{2/3}}{y_2^2 m^{2/3} - y_1^2 M^{2/3}}\right]^{1/2}.$$

Esta fórmula le permite determinar la razón A del diámetro del ecuador respecto al diámetro en los polos conociendo las longitudes m y M de dos arcos de meridiano de amplitud 1 minuto en dos puntos de igual longitud y de latitudes φ_1 y φ_2, ya que, muy aproximadamente,

$$sen\varphi_i = y_i, \;\; i = 1, 2,$$

resultando $A = 266/265$.

En [Juan48a] plantea problemas que resuelve con las fórmulas precedentes, de los que deduce interesantes consecuencias y comprobaciones, que llama corolarios. En el Corolario 14 pregunta las latitudes de los puntos de un meridiano no situados en el ecuador y cuyos radios de curvatura coincidan con el radio de curvatura del ecuador. Sin ningún cálculo, dice que son los puntos de latitud 54º 44' 8'', resultado que, con los razonamientos de esa época, se puede obtener así:

Si $P = (x_1, y_1)$ es una solución al problema planteado y φ es la latitud de P entonces el radio de curvatura PX del punto P es A, por lo que de

$$A = PX = \frac{\{1 + (A^2 - 1)y_1^2\}^{3/2}}{A}$$

y de la muy aproximada igualdad

$$y_1 = sen\varphi$$

se deduce que $y_1^2 = 2/3$, resultando

$$\varphi = arcsen\left(\pm\sqrt{2/3}\right) = \pm 54°44'8''.$$

4 La longitud de un meridiano.

En el último capítulo del Libro VIII de [Juan48a] se trata la obtención de la longitud de una elipse que representa el meridiano. Jorge Juan desconocía que se encontraba frente a una integral elíptica, cuya teoría desarrollaría Abel a principios del siglo XIX, y, consciente de la dificultad del problema escribe:

"*Para encontrar la longitud de un meridiano, es necesario utilizar la rectificación de la elipse, lo cual se debe a varios autores que tratan la geometría sublime y los cálculos diferenciales e* *integrales, pero las fórmulas que se dan para ello solo pueden ser útiles cuando se utilizan para arcos pequeños de la curva, porque si uno quiere usarlos para encontrar el cuadrante completo de la elipse, los términos de la serie requeridos para producir esa rectificación disminuyen tan lentamente que la operación es casi impracticable. Con esto me pareció que a los geómetras les gustaría ver el método que he seguido para rectificar o encontrar la longitud de la elipse de la Tierra; porque evita las molestias que sufren los demás*".

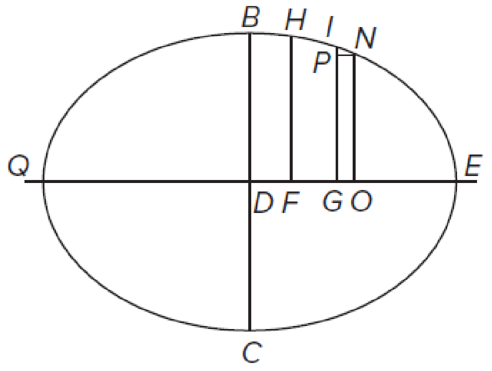


Figura 13

Jorge Juan considera la elipse de la figura 13

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

con centro en (0,0), cuyos ejes EQ y BC representan el diámetro del ecuador y el eje polar, siendo $DE = 1, DB = a$, G=(x,0), O es un punto infinitamente próximo a G, que utilizando el lenguaje y notación de la época escribimos O=(x+dx,0), y diferenciando se obtiene N=(x+dx,y+dy) con

$$dy = -\frac{ax}{\{1-x^2\}^{1/2}}dx$$

por lo que

$$IN = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\frac{1-n^2}{1-x^2}\right)^{1/2} dx,$$

donde $n^2 = 1 - a^2$. Utilizando la serie binomial, Jorge Juan transforma la expresión anterior en

$$IN = \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} - \frac{\frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^4x^4}{8} + \frac{n^6x^6}{16} + \cdots}{(1-x^2)^{1/2}} dx$$

En el caso particular a=1 Jorge Juan observa que la elipse se transforma en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con elemento de longitud $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}$, lo que le permite reescribir la expresión anterior en la forma

$$IN = dl - \frac{\frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^4x^4}{8} + \frac{n^6x^6}{16} + \cdots}{(1-x^2)^{1/2}} dx$$

A esta expresión le aplica el método de división de series infinitas, publicado en 1711 por Newton en [Newton72b] 1711, obteniendo

$$IN = dl - \left(\frac{n^2}{2}x^2 + \frac{2n^2+n^4}{8}x^4 + \frac{3n^2+n^4+n^6}{16}x^6 + \cdots\right)dx.$$

La integración término a término de la expresión anterior en el intervalo [0, x], práctica común en esa época mucho anterior al rigor que trajo Weierstrass en el siglo XIX, le lleva a obtener la longitud BI del arco de elipse entre los puntos $B=(0,a)$ e $I=(x,y)$, con $y = a\{1-x^2\}^{1/2}$, obteniendo

$$BI = L - \left(\frac{n^2}{6}x^3 + \frac{2n^2+n^4}{40}x^5 + \frac{3n^2+n^4+n^6}{112}x^7 + \cdots\right)$$

donde L es la longitud de un arco de circunferencia con centro $(0,0)$ y radio 1 entre los puntos $(0,1)$ y (x,y), donde $y = \{1-x^2\}^{1/2}$. Por tanto, la longitud BE de un cuarto de elipse limitada entre los puntos B=(1,0) y E=(1,0) vendría dada por

$$BE = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{n^2}{6} + \frac{2n^2+n^4}{40} + \frac{3n^2+n^4+n^6}{112} + \cdots\right)$$

que Jorge Juan se da cuenta que es una expresión no operativa, dado que converge muy lentamente.

A la elipse de la figura 13 la llamaremos en lo que sigue elipse 1. Jorge Juan observó que al desplazar la referida elipse 1 una unidad paralelamente al eje OX se obtiene otra elipse, no dibujada en la figura 13, que llamamos elipse 2, cuya ecuación es

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

y que ambas elipses se cortan en dos puntos de abscisa 1/2, de los que el de ordenada positiva es el punto $W = \left(\frac{1}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Por simetría obtuvo que la longitud WE del arco de la elipse 1 de extremos W y E es igual a la longitud OE del arco de la elipse 2 de extremos O y E, por lo que

$$BE = BW + WE = BW + OE,$$

donde BW es la longitud del arco de la elipse 1 entre los puntos B y W, que se obtiene sustituyendo en la expresión precedente BI la I por W y x por ½. Por tanto se tiene

$$BW = L' - \left(\frac{n^2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2n^2+n^4}{40}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{3n^2+n^4+n^6}{112}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right)$$

donde ahora L' es la longitud de un arco de circunferencia de radio 1 y de amplitud 30º, que es $\pi/6$.

Repitiendo un cálculo idéntico al anterior con la elipse 2 Jorge Juan obtiene

$$OE = aL' - \left(\frac{2n^2}{3\sqrt{2}a}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} - \frac{a^2n^2+2n^4}{10\sqrt{2}a^3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} + \frac{-3a^4n^2+12a^2n^4+20n^6}{112\sqrt{2}a^5}\left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} + \cdots\right)$$

Finalmente, teniendo presente que en 3 se expuso que $A = 266/265$ se tiene que $a = 265/266$ y $n^2 = 1 - a^2 = 531/70756$.

Sumando los valores obtenidos al sustituir estos valores en las expresiones de BW y OE, Jorge Juan obtuvo que la longitud BE del cuadrante de la elipse 1, que tiene semieje mayor de longitud 1, es

$$BE=1{,}5678464.$$

La longitud de un cuadrante de circunferencia de radio 1 es 1,5707963, por lo que Jorge Juan concluye que:

- El cociente entre las longitudes de la circunferencia ecuatorial y de un meridiano es $1{,}5707963/1{,}5678464$.
- Dado que la longitud de la circunferencia ecuatorial es 20602260 toesas se tiene que la longitud de un meridiano es 20563570 toesas.

de lo que concluye en [Juan48a, p. 343] que la longitud de la circunvalación de la Tierra por un meridiano tiene 38690 toesas menos que la circunvalación por el ecuador.

Esta modelización matemática de Jorge Juan demostró que la Tierra está achatada por lo polos.

5. Nota biográfica de Jorge Juan (1713 Novelda – 1773 Madrid).

Figura 14
Jorge Juan y Santacilia

Nació en Novelda. Su padre falleció en 1716. Estudió en el colegio de la Compañía de Jesús de Alicante. Fue tutelado primero por su tío don Antonio Juan, canónigo de la colegiata, y más tarde por su otro tío don Cipriano Juan, Caballero de la Orden de Malta, que le envió a Zaragoza para que cursara allí los estudios de Gramática. A los doce años, fue aceptado y enviado a la isla de Malta, donde ingresó en la Orden de Malta. Un año después fue nombrado paje del Gran Maestre don Antonio Manuel de Villena. A los 14 años obtuvo el título de Comendador de Aliaga, lo que asegura que ya había navegado y participado en expediciones de castigo contra piratas, lo que influyó su vocación de marino.

En 1729, regresó a España para solicitar su ingreso en la Real Academia de Guardiamarinas, escuela naval militar fundada por Patiño en 1717 en Cádiz. Tenía dieciséis años y tras seis meses de espera asistiendo como oyente, ingresó en 1730. En dicha Academia se impartían modernos estudios técnicos y científicos, con las entonces recientes teorías de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716). Se explicaba Geometría, Trigonometría, Observaciones astronómicas, Navegación, Cálculos de Estima, Hidrografía y Cartografía, Además se complementaba la formación humanística. Sus compañeros le dieron el sobrenombre de Euclides. Cádiz influyó en el espíritu de Jorge Juan, pues era una puerta abierta a la Europa ilustrada, a las corrientes enciclopedistas y al comercio con América, en una España que se resistía al avance de las nuevas ideas.

Al terminar sus estudios participó, como ya se ha indicado, en la expedición a Ecuador, 1735-1744, para medir la longitud de un arco de meridiano cercano al ecuador y de amplitud un grado.

Después de 9 años durísimos años, el 22 de octubre de 1744 comenzó el regresó de Jorge Juan y Alejandro de Ulloa en navíos distintos, las fragatas francesas Liz y Deliberance, para asegurar que al menos uno de los duplicados de las notas y cálculos llegara a su destino.

Jorge Juan llegó a Brest el 31 de octubre de 1745 a bordo de la fragata Liz. Desde allí se dirigió a París para cambiar impresiones sobre su obra y contrastar algunas particularidades que Godín y él mismo habían notado en sus observaciones astronómicas. Allí conoció a célebres astrónomos y matemáticos, como Clairaut (1713-1765) y La Caille (1713-1762), autores de las fórmulas que tantas veces había empleado, a Réaumur (1683-1757), inventor del termómetro, y a otros célebres académicos que, junto a La Condamine y Bourguer, ya reintegrados a sus actividades tras la vuelta de Ecuador, le eligieron académico de la Académie Royal des Sciences de París (1945).

Ya en Madrid, el Marqués de la Ensenada nombró a Jorge Juan y a Ulloa capitanes de fragata, interesándose por el informe *Memorias secretas* y facilitando la publicación 1748 de las *Observaciones Astronómicas y Físicas* y los cuatro volúmenes de la *Relación Histórica del viaje a la América Meridional*, que ambos habían elaborado. En *Memorias secretas* describen el estado político del Virreinato del Perú.

En marzo de 1749, el Marqués de la Ensenada envió a Jorge Juan a Londres para obtener información sobre la construcción naval inglesa y traer a España expertos constructores de barcos, velas y cordajes para sus planes de reforma de la Armada. Jorge Juan cumplió en exceso todo lo encomendado, pues trajo a España 50 técnicos navales, recogió información acerca de la fabricación de los finos paños ingleses, del lacre, de matrices de imprenta, de máquinas para limpiar puertos, de armamentos, de blanqueo de la cera, de la bomba de vapor para sacar agua, y de todo lo que consideró útil para los planes del Marqués de la Ensenada para reorganizar la economía y poner a España al nivel de los mejores países de Europa. También se interesó por la compra de instrumentos de cirugía para la Academia de Guardia Marinas de Cádiz.

Su periodo de espionaje industrial en Inglaterra no impidió que Jorge Juan fuese nombrado el 6 de abril de 1749 miembro de la Royal Society de Londres. Dieciocho meses después de su llegada a Inglaterra tuvo que escapar a la costa francesa disfrazado de marinero.

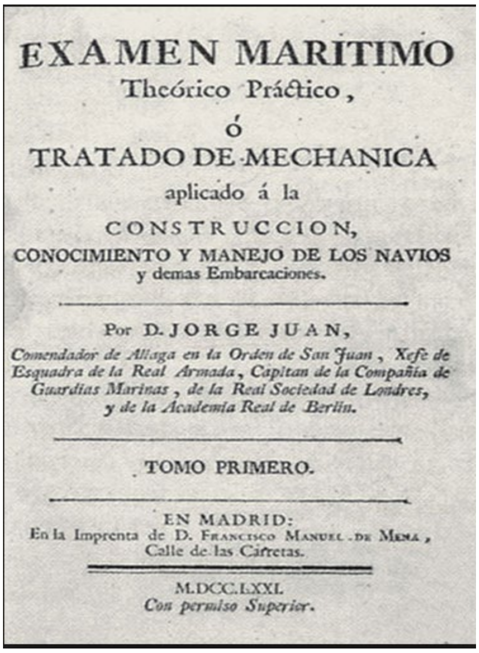
En 1749, Antonio de Ulloa y Jorge Juan publicaron su *Disertación Histórica y Geográfica sobre el Meridiano de Demarcación entre los dominios de España y Portugal*, resolviendo científicamente la localización del meridiano situado a 370 leguas al oeste de las islas de Cabo Verde, frontera fijada el Papa Alejandro VI como línea de separación entre los descubrimientos de España y Portugal.

En 1750, Jorge Juan fue nombrado académico de la Academia de Ciencias de Berlín, fue ascendido a capitán de navío y elaboró un plan de modernización del sector naval que mejoraba el sistema de construcción naval inglés, y que fue aprobado por el Rey Fernando VI en 1752. Desde entonces los astilleros de Cartagena, Ferrol, Cádiz y La Habana trabajaron a plena actividad con criterios racionales basados en el principio de división del trabajo.

En 1752, Fernando VI le nombró director de la Academia de Guardias Marinos de Cádiz, donde implantó las enseñanzas más avanzadas de la época, dando una excelente preparación matemática. Sentó las bases de la cartografía moderna, y junto con Antonio de Ulloa fundó el Observatorio Astronómico de Cádiz, dotándolo con los mejores aparatos de la época y manteniendo correspondencia de sus observaciones con las tres Academias a las que pertenecía, París, Londres y Berlín.

Durante unos meses fue ministro de la Junta General de Comercio y Moneda, con el encargo de resolver diversos problemas en la fabricación de monedas. Cesó con la caída y destierro a Granada del Marqués de la Ensenada en 1754, siguiendo como director de la Academia de Guardias Marinas de Cádiz, ciudad en la que fundó en 1755 la Asamblea Amistosa Literaria, que deseaba fuese el embrión de una futura Academia de Ciencias, que tardó casi un siglo en ser creada por Real Orden de 25 de febrero de 1847, durante el reinado de Isabel II.

La caída del Marqués de la Ensenada trajo la sustitución del modelo naval de Jorge Juan por el francés, siendo Julián de Arriaga el encargado de la destrucción de los planes de Jorge Juan, durante los 20 años que ocupó la Secretaría de Marina. Jorge Juan, poco antes de morir en 1773, con la autoridad e independencia de criterio que le caracterizaban, escribió una dura carta al rey Carlos III cuestionando su subordinación ciega al modelo francés y vaticinando grandes derrotas, como sucedió treinta y dos años después en Trafalgar, donde ligeros navíos ingleses, similares a los propuestos por Jorge Juan, la incompetencia del almirante Villaneuve y el mar, dieron al traste con la pesada y vetusta flota hispano francesa el 21 de octubre de 1805, lo que consolidó supremacía naval inglesa.



EXAMEN MARITIMO
Theórico Práctico,
ó
TRATADO DE MECHANICA
aplicado á la
CONSTRUCCION,
CONOCIMIENTO Y MANEJO DE LOS NAVIOS
y demas Embarcaciones.

Por D. JORGE JUAN,
Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan, Xefe de Esquadra de la Real Armada, Capitan de la Compañia de Guardias Marinas, de la Real Sociedad de Londres, y de la Academia Real de Berlin.

TOMO PRIMERO.

EN MADRID:
En la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, Calle de las Carretas.

M.DCC.LXXI.
Con permiso Superior.

Figura 15
Portada del Examen Marítimo
de Jorge Juan (1771)

Las disertaciones en la Asamblea Amistosa Literaria sobre astronomía, artillería, navegación y construcción sugirieron a Jorge Juan el escribir *El examen Marítimo*, figura 15, su gran obra en la que trabajó trece años desde 1758 y que se convirtió en piedra angular de la teoría y práctica de la construcción naval y de las maniobras navales. Se publicó en Madrid en 1771 en dos volúmenes. El primero sobre mecánica naval es muy matemático y el segundo versa sobre construcción naval y maniobras navales. Jorge Juan analizó la dinámica del buque, su estabilidad en relación con el empuje de las olas y los esfuerzos a que está sometida la arboladura, mejorando la fórmula de la resistencia del agua al avance de un buque dada por Newton, Mariotte y Bouguer. Determinar la fuerza que produce un fluido sobre un obstáculo que se mueve en él ha sido uno de los problemas básicos de la mecánica de fluidos. A Pierre Bouguer se le conoce como el padre de la arquitectura naval.

En 1767 el rey Carlos III le nombró Embajador Extraordinario en Marruecos. Tras seis meses de intensa actividad diplomática regresó con un Tratado que aseguraba muchas de las aspiraciones españolas.

Este período marroquí afectó a su salud. No obstante, a su regreso a Madrid se dedicó al estudio de asuntos solicitados por las Secretarías de Estado, pues siempre se requería su opinión en el estudio y en la ejecución de las cuestiones más arduas, por ser considerado infalible. Otra iniciativa de Jorge Juan, llena de visión de futuro, fue establecer un observatorio astronómico en Madrid dedicado al estudio de la geografía astronómica. Convenció a Carlos III, quien, quince años después de la muerte de Jorge Juan, encargó a Juan de Villanueva la construcción de un edificio sobre el llamado cerro de San Blas, en la parte baja del Retiro, destinada a observatorio astronómico.

Entre 1770 y 1773 ocupó su último puesto de servicio al ser nombrado Director del Real Seminario de Nobles, que estaba en franca decadencia con sólo trece alumnos. A su fallecimiento lo dejó con 82 alumnos.

6. Nota biográfica de Alejandro de Ulloa (1716 Sevilla – 1795 Isla de León).

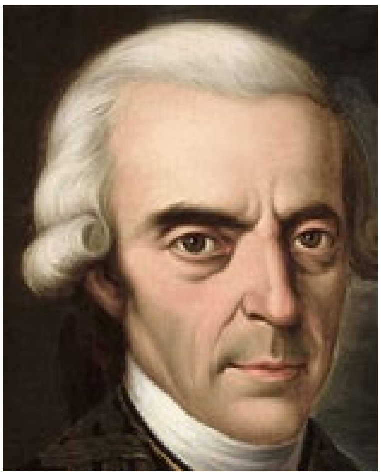


Figura 16
Antonio de Ulloa y de la Torre-Giralt

Hijo del economista Bernardo de Ulloa, su hermano Fernando fue ingeniero jefe de las obras del Canal de Castilla. Con trece años embarcó desde Cádiz rumbo a Cartagena de Indias, regresando en 1732 e ingresó en la Real Academia de Guardiamarinas de Cádiz.

A lo relatado de su participación con Jorge Juan en la expedición a Ecuador para medir la longitud de un arco de meridiano de amplitud un grado, debemos añadir que en el viaje de vuelta a Europa, su navío, la fragata Deliverance, se separó del resto de las naves debido al mal tiempo y a unas averías, siendo apresada por corsarios británicos. Ulloa arrojó al agua la documentación comprometida y entregó la documentación referente a la medida del grado y a observaciones físicas y astronómicas, advirtiéndoles del interés de todas las naciones de Europa en los resultados obtenidos. Le llevaron preso cerca de Portsmouth, donde los comisarios se interesaron por sus papeles y los entregaron al Almirantazgo inglés. Allí el Duque de Bedford le concedió la libertad pronunciando la célebre frase: *La guerra no debe ofender a las ciencias, ni a las artes, ni a sus profesores*.

En Londres fue presentado a Martin Folkes, presidente de la Royal Society, quien le propuso como miembro de dicha prestigiosa institución, siendo elegido el 11 de diciembre de 1746. Regresó a Madrid el 25 de julio de 1746; acababa de morir Felipe V y ahora reinaba Fernando VI, siendo ministro el marqués de la Ensenada, quien, como ya se ha dicho, propuso el nombramiento de Antonio de Ulloa y Jorge Juan como capitanes de navío, pues les veía las personas ideales para su plan de modernización de España.

Antonio de Ulloa recibió en 1749 el encargo del Marqués de la Ensenada de recorrer el continente europeo para conocer los últimos avances científicos. Inició un largo viaje por Francia, Suiza, Flandes, Holanda, Alemania, Rusia y los países del Báltico, con instrucciones reservadas relativas a la adquisición de informes técnicos y científicos. En París, asistió a las reuniones de la Academia de Ciencias, de la que era miembro correspondiente y estudió la organización y funcionamiento de dicha institución. En Suecia trató a diversos científicos y fue nombrado posteriormente miembro de la Academia de Ciencias Sueca. En Berlín conoció a Pierre Moreau de Maupertuis, entonces presidente de la Academia de Ciencias, de la que también fue nombrado miembro.

En el libro [Juan48b] describió la existencia en los lavaderos de oro del Chocó de un metal que no se puede fundir, al que los indígenas daban el nombre de *platina*, y no le atribuían ningún valor por no ser capaces de fundirlo. Este metal es el platino, y por esto se considera a Antonio de Ulloa su descubridor.

Fue el fundador, en 1752, del Estudio y Gabinete de Historia Natural, antecesor del Real Gabinete de Historia Natural, actual Museo Nacional de Ciencias Naturales y del primer laboratorio de metalurgia del país. Junto con Jorge Juan fue fundador del Observatorio Astronómico de Cádiz.

España se sumó al principio de la guerra de la Independencia de Estados Unidos (1775-1783) y Ulloa participó al mando de una flota. Fue una campaña desgraciada que costó a Ulloa un largo expediente y un consejo de guerra que le declaró inocente. En 1779 fue ascendido a teniente general de la Armada, y realizó dos cruceros, uno a Azores y otro al cabo Espartel. El resto de su vida transcurrió en Cádiz.

Agradecimiento. Los autores expresan su gratitud al revisor anónimo por sus comentarios y por las seis erratas que señaló en la versión inicial del artículo. También agradecen el trabajo del Presidente de la Comisión de Biblioteca y Publicaciones de la Real Academia de Ciencias y de los Editores de la Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie General.

REFERENCIAS

[Boyer68] C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, (John Wiley & Sons, New York, 1968).

[García02] D. García Castaño, *Biografía y Mathemática de Jorge Juan*, (Ediciones Locales, Novelda, 2002).

[García05] D. García Castaño, *La trascendencia científica de Jorge Juan Santacilia*, (Ediciones Locales, Novelda, 2005).

[Greenberg95] J.L. Greenberg, *The problem of the Earth's shape from Newton to Clairaut*, (Cambridge Univ. Press, New York, 1995).

[Juan48a] J. Juan y A. de Ulloa, *Observaciones astronómicas y físicas hechas de orden de S. Mag. en los Reinos del Perú, de las cuales se deduce la figura y magnitud de la Tierra y se aplica a la navegación*, (Imprenta Real de la Gazeta, Madrid, 1748).

[Juan48b] J. Juan y A. de Ulloa, *Relacion histórica del viage a la América meridional hecho de orden de S. Mag. para medir algunos grados de meridiano terrestre y venir por ellos en conocimento de la verdadera figura y magnitud de la tierra, con otras varias obsevaciones astronómicas y físicas*, (Imprenta Real de la Gazeta, Madrid, 1748).

[Lafuente10] A. Lafuente y A.J. Delgado, *La geometrización de la Tierra: observaciones y resultados de la expedición geodésica hispano-francesa al Virreinato del Perú* (1735-1744), (Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes, 2010. Edición original Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto "Arnau de Vilanova", Madrid, 1984).

[López19] M. López-Pellicer y G. Mora, *The contribution of Jorge Juan to Earth's problem* (en Valencia Intelligencer, Springer, New York, at International Congress on Industrial and Applied Mathematics, July 15-19, ICIAM 2019), páginas 6–15.

[Maupertuis38] P.L.M. de Maupertuis, *La Figure de la Terre* (L'Imprimerie Royale, Paris, 1738).

[Mora16] G. Mora, *La contribucion matemática de Jorge Juan* (en Jorge Juan 2016. (Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 2016), páginas 29-70.

[Newton72a] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (Londres 1687, primera edición), utilizada reedición por Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1972).

[Newton72b] I. Newton, *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, (Londres 1711, primera edición), utilizada reedición por Royal Society Library, London, UK, 2012).

[Saiz97] L.A. Saiz Montes, *Matemáticas de Jorge Juan en el cálculo de la forma y dimensiones de la Tierra*, (Ed. Maxtor, Valladolid, 1997).

[Senovilla05] J.M.M. Senovilla, *La Cosmología y los matemáticos*, La Gaceta de la RSME (España) 8 (3), 597-636 (2005).