



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Procesos iterativos para la resolución de sistemas no lineales con amplios conjuntos de estimaciones iniciales convergentes

Noviembre, 2023

Autor: Raudys Rafael Capdevila Brown

Directores: Alicia Cordero Barbero

Juan Ramón Torregrosa Sánchez

Alicia Cordero Barbero, Catedrática de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València y Juan Ramón Torregrosa Sánchez, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València,

HACEN CONSTAR:

Que Raudys Rafael Capdevila Brown, Licenciado en Educación en la especialidad de Física y Electrónica, ha realizado, bajo nuestra dirección, el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al título de Doctor en Matemáticas por la Universitat Politècnica de Valencia.

Asimismo, autorizamos la presentación de este trabajo ante la Universitat Politècnica de Valencia para que cumpla los trámites correspondientes.

Para que así conste a efectos legales, firmamos este documento en Valencia, FECHA.

Agradecimientos

"Hasta el camino más largo comienza con el primer paso"

Proverbio chino

A mi esposa Villy, a mis niños Carolina y Victor.

A los amigos, los de aquí y los de allá.

A Juan Ramón y Alicia, los mejores.

Valencia, Noviembre 2023.

Resumen

Se puede afirmar que la inmensa mayoría de los fenómenos de la naturaleza estudiados tienen un carácter no lineal. Muchos de estos problemas se pueden modelar utilizando ecuaciones diferenciales no lineales (EDNL) para cuya resolución no existe una amplia colección de herramientas como si podemos encontrar para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En otros contextos y en este particularmente, los métodos iterativos para la resolución de sistemas no lineales adquieren gran importancia ya que una ecuación diferencial no lineal se puede aproximar numéricamente resolviendo un sistema de ecuaciones no lineales equivalente tras un proceso de discretización.

En la presente Tesis Doctoral se proponen dos nuevas clases de métodos iterativos de sexto orden de convergencia basados en funciones peso y se realizan los respectivos análisis de convergencia. El primero de ellos se compara con otros métodos de sexto orden mostrando, aunque formalmente, un mejor rendimiento. En ambos casos se realiza un análisis dinámico donde se indaga la estabilidad de los métodos propuestos en dependencia de la aproximación inicial escogida, estos análisis se hacen empleando polinomios vectoriales de estudio muy simples (polinomios de prueba). Un mal rendimiento con estos últimos, nos aconseja rechazar las aproximaciones iniciales que les han dado lugar.

Los métodos propuestos han sido testeados en múltiples experimentos numéricos con problemas académicos y con otros aplicados tales como la resolución numérica de la ecuación de Volterra, la ecuación de Van der Pol y la ecuación de transmisión de calor en un medio no homogéneo, mostrando en todos ellos muy buenos resultados.

Finalmente se proponen las líneas de investigación futuras: dos de ellas, basadas en un paradigma determinista, es una continuación directa del trabajo realizado. La otra línea que contempla un paradigma no determinista, se fundamenta en procesos probabilísticos adoptando un método Montecarlo para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Una vez diseñado el método Montecarlo en cuestión, se pretende realizar una comparación de rendimiento entre ambos paradigmas.

Resum

Es pot afirmar que la immensa majoria dels fenòmens de la naturalesa estudiats tenen un caràcter no lineal. Molts d'aquests problemes es poden modelar utilitzant equacions diferencials no lineals (EDNL) per a que la seua resolució no existeix una àmplia col·lecció d'eines com si podem trobar per a la resolució de les equacions diferencials ordinàries. En altres contextos i en aquest particularment, els mètodes iteratius per a la resolució de sistemes no lineals adquireixen gran importància ja que una equació diferencial no lineal es pot aproximar numèricament resolent un sistema d'equacions no lineals equivalent després d'un procés de discretització.

En la present Tesi Doctoral es proposen dues noves classes de mètodes iteratius de sisé ordre de convergència basats en funcions pesse i es realitzen les respectives anàlisis de convergència. El primer d'ells es compara amb altres mètodes de sisé ordre mostrant, encara que formalment, un millor rendiment. En tots dos casos es realitza una anàlisi dinàmica on s'indaga l'estabilitat dels mètodes proposats en dependència de l'aproximació inicial triada, aquestes anàlisis es fan emprant polinomis d'estudi molt simples (polinomis de prova). Un mal rendiment amb aquests últims, ens aconsella rebutjar les aproximacions inicials que els han donat lloc.

Els mètodes proposats han sigut testats en múltiples experiments numèrics amb problemes acadèmics i amb altres aplicats com ara la resolució numèrica de l'equació de Volterra, l'equació de Van der Pol i l'equació de transmissió de calor en un mitjà no homogeni, mostrant en tots ells molt bons resultats.

Finalment es proposen les línies d'investigació futures: dos d'elles, basat en un paradigma determinista, és una continuació directa del treball realitzat. L'altra línia que contempla un paradigma no determinista, es fonamenta en processos probabilístics adoptant un mètode Montecarlo per a la resolució de sistemes d'equacions no lineals. Una vegada dissenyat el mètode Montecarlo en qüestió, es pretén realitzar una comparació de rendiment entre tots dos paradigmes.

Abstract

It can be argued that the vast majority of natural phenomena studied are nonlinear in nature. Many of these problems can be modeled using nonlinear differential equations (NLDEs) for the solution of which there is no large collection of tools as we can find for the solution of nonlinear differential equations. There is not a large collection of tools for solving NDEs as there is for solving ordinary differential equations differential equations. In other contexts and in this one in particular, iterative methods for solving nonlinear systems are of great importance. nonlinear systems acquire great importance since a nonlinear differential equation can be approximated numerically by solving a system of nonlinear equations. by solving an equivalent system of nonlinear equations after a discretization process.

In this Doctoral Thesis, two new classes of sixth order iterative methods of convergence based on weight functions are proposed and the respective convergence analyses are performed. The first one is compared with other sixth order methods showing a better performance. In both cases, a dynamic analysis where the stability of the proposed methods is investigated in dependence of the initial approximation chosen. These analyses are performed using very simple study polynomials (test polynomials). A bad The proposed methods have been tested for their stability in dependence on the initial approximation chosen.

The proposed methods have been tested in multiple numerical experiments with academic problems and with other applied problems such as the numerical solution of the Volterra equation, the Van der Pol equation and the heat transfer equation in an inhomogeneous medium, showing very good results in all of them.

Finally, future lines of research are proposed: two of them, based on a deterministic paradigm, are a direct continuation of the work carried out. The other line, which contemplates a non-deterministic paradigm, is based on probabilistic processes adopting a Monte Carlo method for the resolution of systems of nonlinear equations. Once the Monte Carlo method has been designed, a performance comparison between both paradigms will be made.

Índice general

Resumen	v
Índice general	xii
1 Introducción	1
2 Conceptos previos	5
2.1 Introducción	6
2.2 Sistemas de ecuaciones no lineales y procesos iterativos	6
2.2.1 Herramientas matemáticas	11
2.3 Conceptos previos de análisis dinámico real	14
3 Clase de esquemas iterativos de tres pasos basada en funciones peso	17
3.1 Introducción	18
3.2 Diseño y análisis de convergencia de la clase propuesta	19
3.3 Eficiencia computacional	23
3.4 Resultados numéricos	25
3.5 Conclusiones	28
4 Análisis dinámico real de la clase basada en funciones peso	31
4.1 Introducción	32
4.2 Análisis de estabilidad de la familia iterativa $PSH6_1$ actuando sobre la función polinómica vectorial de variables separadas $p(x)$	32
4.2.1 Encontrar el caos: nuevas y conocidas herramientas	37
4.2.2 Resultados numéricos	43

4.3	Análisis de estabilidad de la familia iterativa actuando sobre la función polinómica vectorial de variables no separadas $q(x)$	46
4.3.1	Comportamiento dinámico	50
4.3.2	Resultados numéricos	52
4.4	Conclusiones	57
5	Clase de métodos iterativos tipo Ermankov-Kalitkin	59
5.1	Introducción	60
5.2	Análisis de convergencia de la clase propuesta PM_{KE}	61
5.2.1	Subfamilias iterativas específicas de PM_{KE}	66
5.3	Resultados numéricos	66
5.4	Conclusiones	68
6	Análisis Dinámico de la Clase iterativa tipo Ermankov-Kalitkin	71
6.1	Introducción	72
6.2	Análisis dinámico de la familia $PM(\beta)_{KE_p}$	72
6.2.1	Estudio de comportamiento patológico	78
6.3	Resultados numéricos	82
6.4	Conclusiones	85
7	Conclusiones y líneas futuras	87
7.1	Conclusiones	87
7.2	Líneas futuras	88
8	Anexos	89
	Bibliografía	105

Capítulo 1

Introducción

En la memoria de esta Tesis Doctoral consideramos el problema general de encontrar una solución de $F(x) = 0$, donde $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función multivariable suficientemente diferenciable, cuando $n > 1$, definido en un conjunto convexo D . La solución de este tipo de problemas no lineales multidimensionales suele ser numérica, ya que no puede resolverse analíticamente en la mayoría de los casos. En este sentido, el papel de los procedimientos iterativos capaces de estimar sus soluciones es crítico y en ausencia de métodos analíticos para resolver este tipo de problemas, las soluciones de estos sistemas deben abordarse mediante esquemas iterativos de punto fijo,

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

siendo $x^{(0)}$ la estimación inicial.

El esquema de Newton es el procedimiento iterativo más empleado para resolver problemas no lineales (ver [78]), cuya expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

donde $F'(x^{(k)})$ denota la matriz Jacobiana de la función no lineal F evaluada en el iterado $x^{(k)}$.

Aunque no en el mismo número que para el caso escalar, en los últimos años muchos investigadores han centrado su atención de este tipo de problemas. Una primera aproximación consiste en modificar los métodos clásicos para acelerar la convergencia y también para reducir la cantidad de evaluaciones funcionales y operaciones por iteración. En [5, 30] se pueden encontrar buenas revisiones sobre esto.

En la literatura reciente en esta área de investigación, podemos encontrar otros métodos que alcanzan órdenes superiores (ver, por ejemplo [38, 39, 41, 74, 81]) y están diseñados utilizando diferentes técnicas como: La pseudocomposición [25], que está directamente relacionada con las fórmulas de cuadratura, descomposición de Adomian [11, 24, 31, 48] o esquemas multidimensionales tipo Steffensen [32, 33, 71, 73, 76].

Recientemente, también se ha desarrollado la técnica de la función de peso para diseñar métodos iterativos para resolver sistemas no lineales. Este procedimiento permite aumentar muchas veces el orden de convergencia de un método sin aumentar el número de evaluaciones funcionales. Entre otros, Sharma et al. en [74] diseñaron un esquema con cuarto orden de convergencia utilizando este procedimiento y, más recientemente, Artidiello et al. construyeron en [6, 9] varias clases de esquemas de alto orden mediante funciones de peso matricial y técnicas de funciones peso. También se encuentran algunos métodos libres de matriz Jacobiana con memoria [18, 33, 64].

Por otro lado, como la mayoría de los métodos iterativos para ecuaciones escalares no son directamente extensibles a sistemas, era necesario encontrar una nueva técnica que lo hiciera factible. En [1, 36], los autores presentaron un proceso general capaz de transformar cualquier método iterativo escalar al caso multidimensional.

Algunos resultados clásicos sobre la extensión de los métodos iterativos escalares de un punto a los sistemas pueden encontrarse en textos de Traub [78], Ortega y Rheinboldt [66], u Ostrowski [68]. También se puede encontrar una buena reseña más reciente en [26]. Los métodos multipunto llegaron con la necesidad de mejorar la eficacia de los esquemas sin utilizar derivadas de segundo orden. Gerlach en [54] y Weerakoon y Fernando en [83] utilizaron fórmulas de cuadratura para conseguir este objetivo y esta tarea fue generalizada por Frontini y Sormani en [52], Cordero y Torregrosa en [43, 44], Ozban en [69] y Wang et al. en [82]. Otros autores también han utilizado los procedimientos anteriores y otros para construir métodos multidimensionales, como en [85] o [13], pero la cantidad de esquemas de este tipo en la literatura sigue siendo baja en comparación con la de los métodos escalares.

Una vez diseñada una clase de métodos, es interesante realizar un estudio dinámico real multidimensional (ver [20, 21, 40, 42]) para obtener los valores más adecuados de los parámetros para establecer esquemas estables y también para detectar comportamientos patológicos. En el estudio se emplean ciertos polinomios de prueba simples, un mal rendimiento con estos últimos, nos aconseja desechar aquellos elementos de la familia iterativa que da lugar a este tipo de comportamiento cuando se aplica sobre sistemas polinómicos simples.

En lo que sigue, describimos la estructura de esta memoria.

En el Capítulo 2, introducimos conceptos y definiciones preliminares, así como herramientas matemáticas que se emplean a lo largo de este trabajo. Estos conceptos, definiciones y herramientas los podemos dividir en dos grupos, uno de ellos relacionados con aspectos de los métodos iterativos tales como convergencia y orden en entre otros, también introducimos herramientas matemáticas relacionadas con los desarrollos en Taylor de funciones multivariables; de sus derivadas y del operador de diferencias divididas. También podemos incluir en este grupo un conjunto de importantes teoremas sobre existencia y unicidad de las soluciones de los sistemas no lineales con el empleo del esquema de Newton; así como otros resultados relacionados con el Teorema de aplicación de contracción. En el segundo grupo se encuentran conceptos tales como puntos fijos, puntos críticos, órbitas periódicas, cuenca de atracción y otros, relacionados con el análisis dinámico real o análisis de estabilidad de los métodos iterativos.

En el Capítulo 3, introducimos la primera clase de métodos iterativos diseñados en esta Tesis, de sexto orden y que posee Jacobiana congelada. Esta clase tiene un primer paso de Newton y los dos siguientes (predictor y corrector) están basados en funciones peso. Se realiza el análisis de convergencia cuyos resultados quedan plasmados en el Teorema 13, también se estudia la eficiencia computacional del método y se compara con la de otros esquemas iterativos también de sexto orden, mostrando un rendimiento superior para cierta función peso polinómica y determinado valor del parámetro libre. Se realizan numerosos experimentos numéricos donde se resuelven sistemas de corte académico de diferentes dimensiones.

En el Capítulo 4, se realiza un extenso análisis dinámico o de estabilidad de una familia paramétrica derivada de la clase anterior utilizando polinomios vectoriales de prueba. El estudio se divide en dos partes, en la primera se utiliza un sistema polinómico desacoplado y en la segunda uno acoplado. En la detección de conjuntos de valores del parámetro libre que implican comportamientos patológicos de la familia estudiada (aquellos que no permiten la convergencia a las raíces de los polinomios) se han empleado un conjunto de herramientas matemáticas y computacionales en el análisis dinámico real tales como, las funciones de estabilidad, los diagramas de bifurcación, las rectas de parámetros, los planos dinámicos o de convergencia y los planos de superficies isonormales. Esta última herramienta, es un resultado original surgido y empleado por primera vez en la investigación desarrollada en esta Tesis. Los resultados relacionados con la estabilidad de la familia estudiada se usan para realizar los experimentos numéricos donde se observan la estabilidad y convergencia de la familia de esquemas iterativos en sistemas de tipo académico.

En el Capítulo 5, se introduce la segunda clase de procesos iterativos dependiente de un parámetro estudiada en esta Tesis, de quinto o sexto orden dependiendo del valor del parámetro libre escogido, con Jacobiana congelada y cuyo primer paso es el de Newton. El segundo paso con un factor de amortiguación tipo iterativo de Ermankov-Kalitkin y un tercer paso que contiene una función peso matricial. Se realiza el análisis de convergencia y se proponen dos funciones matriciales de tipo polinómica y racional respectivamente, que cumplen con las condiciones del teorema de convergencia. Se realizan numerosos experimentos numéricos donde se resuelven sistemas de corte académico y un ejemplo de aplicación en la resolución de la ecuación diferencial de Volterra.

En el Capítulo 6, se realiza el análisis de estabilidad de una familia derivada de la clase anterior. Para el estudio se utiliza el polinomio vectorial de prueba desacoplado ya utilizado anteriormente. En la detección de los comportamientos patológicos se utilizan herramientas ya conocidas como las funciones de estabilidad, los diagramas de bifurcación, las rectas de parámetros y los planos dinámicos o de convergencia. Se realizan experimentos numéricos donde se utiliza

el método iterativo para la resolución de la ecuación diferencial de Volterra y para resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales de la conducción de calor en un medio no homogéneo. En este último test se utilizan mallados de diferentes extensiones lo que implica la resolución de sistemas de ecuaciones de múltiples tamaños.

En el Capítulo 7, se brindan las conclusiones de la Tesis y se muestran posibles líneas futuras de investigación; por último, se anexan varios programas utilizados en los cálculos y pruebas numéricas y se cierra con la literatura utilizada en la elaboración de este trabajo.

Capítulo 2

Conceptos previos

2.1 Introducción

Introducimos ahora algunos conceptos y herramientas que se utilizarán a lo largo de la memoria y que expondremos básicamente en dos grandes grupos.

En el primero de ellos, postulamos el problema a estudiar, damos una definición general de un proceso iterativo, definimos la derivada de Fréchet y mostramos el esquema iterativo de Newton. Definimos importantes conceptos de los métodos iterativos tales como convergencia y orden. También se exponen importantes resultados relacionados con las condiciones de convergencia, existencia y unicidad del punto fijo para el método de Newton. Mostramos herramientas matemáticas tales como, los desarrollos de Taylor de funciones multidimensionales, de sus derivadas y del operador de diferencias divididas evaluados en los diferentes iterados o pasos del proceso iterativo. Herramientas y conceptos todos que se emplearán en el análisis de convergencia de los métodos propuestos.

En el segundo grupo expondremos un conjunto de conceptos y herramientas empleados en el estudio del comportamiento dinámico de los miembros de cualquier familia de métodos iterativos, concretamente de los propuestos en esta memoria. Conceptos como el operador racional, puntos fijos, críticos, órbitas periódicas, cuenca de atracción y otros, serán incluidos en este grupo.

2.2 Sistemas de ecuaciones no lineales y procesos iterativos

El problema general a estudiar es estimar una solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(x) = 0$, $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Siendo $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, el problema a estudiar se reduce a la solución del sistema de ecuaciones

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.1)$$

siendo $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, las funciones coordenadas de $F(x)$.

Teniendo en cuenta que operamos en \mathbb{R}^n definimos la derivada de Fréchet necesaria para introducir la mayoría de esquemas iterativos de punto fijo

Definición 2.2.1 (Derivada de Fréchet). *La función $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Fréchet diferenciable en un punto x en el interior de D , si existe un operador $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1/||h||) ||F(x+h) - Fx - A(x)h|| = 0, \quad (2.2)$$

siendo $||\cdot||$ una norma en \mathbb{R}^n . El operador lineal A es denotado por F' y es denominado como la derivada Fréchet de F en x .

Siendo $f_i(x_1, \dots, x_n)$ las funciones coordenadas de $F(x)$ con primeras derivadas parciales de primer orden continuas y $A = (a_{ij})$, escogiendo $h = te_j$ como el j -ésimo vector de coordenadas $e^j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ y teniendo en cuenta (2.2), podemos escribir

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1/t) |f_i(x + te^j) - f_i(x) - ta_{ij}| = 0,$$

que implica la existencia de las derivadas parciales de cada componente f_i en x tal que

$$\partial f_i(x) / \partial x_j = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta este resultado, escribimos la representación matricial de $F'(x)$ llamada matriz Jacobiana como

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \cdots & \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix}.$$

Para la solución de un sistema no lineal, solo existen métodos directos para sistemas de pequeño tamaño y formas especiales [60]. De aquí que se utilicen métodos iterativos para resolver el sistema de ecuaciones no lineales (2.1).

Un método iterativo es un procedimiento que genera una sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}$ dados unos vectores iniciales $x^{(0)}, \dots, x^{(-p+1)}$, con $p \geq 1$. En general se puede definir un proceso iterativo como:

Definición 2.2.2. Una familia de operadores G_k ,

$$G_k : D_k \subset (\mathbb{R}^n)^{k+p} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k+p \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, \dots,$$

define un proceso iterativo $\wp = (G_k, D^*, p)$ con p puntos iniciales y con dominio $D^* \subset D_0$, si D^* es no vacío y si para cualquier punto $(x^{(0)}, \dots, x^{(-p+1)}) \in D^*$, la sucesión $\{x^{(k)}\}$ generada por

$$x^{(k+1)} = G_k(x^{(k)}, \dots, x^{(-p+1)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

existe, esto es, si $(x^{(0)}, \dots, x^{(-p+1)}) \in D_k$ para todo $k \geq 0$. El punto x^* tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ se llama límite del proceso iterativo.

La definición 2.2.2 que puede encontrarse en [66], es extremadamente general y es poco frecuente en la práctica encontrar procesos iterativos descritos exactamente por esta última. Según la definición, un proceso iterativo está definido si existe cierto conjunto no vacío D^* tal que para el conjunto de puntos iniciales $(x^{(0)}, \dots, x^{(-p+1)}) \in D^*$ la sucesión completa de vectores $\{x^{(k)}\}$ puede ser generada. Para que esto último ocurra, es necesario que los operadores G_k estén definidos en todo $(\mathbb{R}^n)^{k+p}$ para todo $k \geq 0$, lo que no siempre es el caso. En relación con esto último, por ejemplo, consideremos el esquema de Newton y asumamos que para cierto $x^{(0)} \in D$ de la función F , la Jacobiana $F'(x^{(0)})$ existe y es no singular. Este hecho garantiza la existencia de $x^{(1)}$, pero $x^{(1)}$ no necesariamente tiene que pertenecer a D , y aunque lo estuviere, la Jacobiana $F'(x^{(1)})$ no tendría porque existir. Lo que detendría el proceso iterativo después del primer paso (véase [66], página 237).

Los procesos iterativos multipasos son más comunes en la práctica y son los utilizados en esta memoria. La siguiente definición puede encontrarse asimismo en [66].

Definición 2.2.3. Un proceso iterativo $\wp = (G_k, D^*, p)$ es un método multipasos ($m - \text{pasos}$) si $p = m$ y si las aplicaciones G_k son de la forma

$$G_k : D_k \subset (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad k = 0, 1, \dots,$$

y es secuencial si los iterados son generados por

$$x^{(k+1)} = G_k(x^{(k)}, \dots, x^{(k-m+1)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Un proceso iterativo multipaso es estacionario con la función de iteración G si $G_k \equiv G$, $D_k \equiv D$, $k = 0, 1, \dots$

En nuestra memoria los metodos iterativos estudiados son secuenciales, de tres pasos y estacionarios. El operador iterativo tiene la misma estructura en cada iteración y es de la forma

$$\wp = \begin{cases} y^{(k)} & = N(x^{(k)}) \\ z^{(k)} & = \Omega(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} & = G(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots,$$

que de forma compacta podemos expresar como

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

donde $N, \Omega, G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y la secuencia de vectores generada $\{x^{(k)}\}$ se obtiene a partir de un vector o estimación inicial denotado como $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$. Además, el primer paso es el mismo para los métodos propuestos,

siendo

$$N(x^{(k)}) = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

el conocido método de Newton. La solución de (2.3), $x = G(x)$, se denomina punto fijo del operador G .

Definición 2.2.4. La sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ en \mathbb{R}^n se dice que converge a $\xi \in \mathbb{R}^n$ respecto a una norma $\|\cdot\|$ si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un entero $N(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x^{(k)} - \xi\| < \epsilon, \quad \text{para todo } k \geq N(\epsilon).$$

Definición 2.2.5. Un punto fijo x^* de $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina punto atractor, si existe un entorno abierto S de x^* tal que para cualquier $x^{(0)} \in S$, las iteraciones de (2.3) están bien definidas y convergen a x^* .

Teorema 1 (Teorema de Ostrowski [66]). Supongamos que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en un punto fijo x^* y el radio espectral de $G'(x^*)$ satisface la condición $\rho(G'(x^*)) < 1$. Entonces x^* es un punto atractor de G .

Otro resultado importante relacionado con la convergencia local es el siguiente teorema que establecen las condiciones que aseguran la convergencia cuadrática del método de Newton

Teorema 2 (Convergencia local del Método de Newton [66]). Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Fréchet diferenciable en cada punto de un entorno abierto de la solución x^* de $F(x) = 0$, F' es continua en x^* y $F'(x^*)$ es no singular. Entonces x^* es un punto de atracción del método de Newton y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|} = 0.$$

Además, si

$$\|F'(x) - F'(x^*)\| \leq \alpha \|x - x^*\| \quad \text{con } \alpha \in (0, 1),$$

para todo x en un entorno abierto de x^* , entonces existe una constante $c < +\infty$ tal que

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq c \|x^{(k)} - x^*\|^2$$

para todo $k > k_0$ donde k_0 depende de $x^{(0)}$.

En relación con la rapidez de convergencia de un método iterativo,

Definición 2.2.6. Sea $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ una sucesión en \mathbb{R}^n que converge a ξ , entonces se dice que converge con orden p , $p \geq 1$, si existe un $M > 0$ ($0 < M < 1$ si $p = 1$) y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \leq M \|x^{(k)} - \xi\|^p, \quad \forall k \geq k_0,$$

o

$$\|e^{(k+1)}\| \leq M \|e^{(k)}\|^p, \quad \forall k \geq k_0,$$

donde $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$.

Teniendo en cuenta la última definición, podemos constatar que el método de Newton tiene segundo orden de convergencia de acuerdo al Teorema 2.

Con fines experimentales, Weerakoon y Fernando introducen en [83] el orden de convergencia computacional (COC) definido como

$$p \approx COC = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - \xi\|/\|x^{(k)} - \xi\|)}{\ln(\|x^{(k)} - \xi\|/\|x^{(k-1)} - \xi\|)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

siendo $x^{(k-1)}, x^{(k)}, x^{(k+1)}$ tres iteraciones consecutivas cercanas a ξ . Debido al hecho que ξ usualmente no se conoce, Cordero y Torregrosa introdujeron en [43] el orden de convergencia aproximado computacional $ACOC$, que puede ser

estimado en la práctica y calculado por la expresión

$$p \approx ACOC = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|/\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|/\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (2.6)$$

que nos brinda una estimación de la velocidad de convergencia del esquema iterativo.

En lo adelante, expondremos conceptos y resultados significativos sobre las condiciones de convergencia que debe cumplir un esquema iterativo, así como condiciones de existencia y unicidad de los puntos fijos. Teniendo en cuenta que los métodos propuestos en esta memoria tienen al método de Newton como primer paso, comenzaremos con un importante resultado que servirá de fundamento a otros planteamientos.

Teorema 3 ([49]). *Sea el sistema no lineal definido por las ecuaciones $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ y sea la función vectorial $F(x) = (f_1, \dots, f_n)^T$ definida y continua así como sus derivadas parciales de primer y segundo orden en un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$.*

Supongamos que $x^{(0)} \in \Omega$ y sea \bar{B} el entorno cerrado o bola:

$$\bar{B}(x^{(0)}, r) = U(x^{(0)}) = \{\|x - x^{(0)}\| \leq r\}$$

tales que se cumplen las condiciones siguientes:

- (1) existe la inversa de la matriz Jacobiana $F'(x)$ en $x^{(0)}$, $\Gamma_0 = [F'(x^{(0)})]^{-1}$, siendo $\|\Gamma_0\| \leq A_0$,
- (2) $\|\Gamma_0 F(x^{(0)})\| \leq B_0 \leq r/2$,
- (3) $\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq C$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$ y $x \in U(x^{(0)})$,
- (4) las constantes A_0, B_0, C satisfacen la desigualdad

$$\mu_0 = 2nA_0B_0C \leq 1. \quad (2.7)$$

Entonces, la sucesión generada por el método de Newton, cuya expresión iterativa es (2.4) partiendo de la aproximación inicial $x^{(0)}$, converge a la solución x^* del sistema (2.1) y el límite del proceso iterativo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*,$$

es solución del sistema tal que

$$\|x^* - x^{(0)}\| \leq 2B_0 \leq r.$$

A continuación mostramos un resultado relacionado con la unicidad de la solución del sistema no lineal (2.1).

Teorema 4 ([49]). *Dadas las condiciones (1) – (4) del Teorema 3, existe en el entorno de $x^{(0)}$*

$$\|x - x^{(0)}\| \leq 2B_0$$

una única solución del sistema no lineal (2.1).

El resultado siguiente versa sobre la estabilidad de la convergencia del método de Newton bajo la variación de las condiciones iniciales.

Teorema 5 ([49]). *Si las condiciones (1) – (4) del Teorema 3 se satisfacen y*

$$\frac{2}{\mu_0} \leq r \quad \text{donde} \quad \mu_0 = 2nA_0B_0C < 1,$$

entonces el método de Newton converge a una única solución ξ del sistema (2.1) en el dominio principal $\|x - x^{(0)}\| \leq 2B_0$ para cualquier elección de la aproximación inicial $x^{(0)}$ en el recinto

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \frac{1 - \mu_0}{2\mu_0}.$$

En lo que resta de esta subsección expondremos el Teorema de Contracción, un importante resultado del Análisis Matemático Multivariable y que sirve de fundamento a otros. Este teorema muestra las condiciones que garantizan la convergencia de un esquema iterativo, pero antes de enunciarlo, damos la definición de un mapa contractivo.

Definición 2.2.7. $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es contractivo o de contracción en un conjunto $D_0 \subset D$ si existe un $\alpha < 1$ tal que $\|G(x) - G(y)\| \leq \alpha\|x - y\|$ para todo $x, y \in D_0$.

Teorema 6 (Teorema de la aplicación contractiva [66]). Supongamos que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una contracción en un conjunto cerrado $D_0 \subset D$ y que $G(D_0) \subset D_0$. Entonces, para cualquier $x^{(0)} \in D_0$ el esquema (2.3) converge a un único punto fijo x^* de G en D_0 con la cota del error

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Los siguientes resultados hacen uso del teorema de contracción restringiendo el conjunto de puntos donde las condiciones del teorema tienen lugar.

Definición 2.2.8. El mapa $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación contractiva iterada en el conjunto $D_0 \subset D$, si existe un $\alpha < 1$ tal que

$$\|G(G(x)) - G(x)\| \leq \alpha\|G(x) - x\|,$$

siempre que x y $G(x)$ estén en D_0 .

Teorema 7 ([66]). Supongamos que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación contractiva iterada en un conjunto cerrado $D_0 \subset D$ y que para alguna aproximación $x^{(0)} \in D_0$ la secuencia (2.3) permanece en D_0 . Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \in D_0$, y la estimación

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

tiene lugar. Además, si G es continuo en x^* , entonces $x^* = G(x^*)$.

El siguiente resultado deriva del teorema anterior.

Teorema 8 ([66]). Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Fréchet diferenciable en D tal que cumple la desigualdad

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \gamma, \quad \forall x, y \in D.$$

Supongamos que $A : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisface

$$\|[A(x)]^{-1}\| \leq \beta, \quad \|F'(x) - A(x)\| \leq \delta, \quad \forall x \in D,$$

donde $\alpha = \beta(\gamma + \delta) < 1$, y que existe un $x^{(0)} \in D$ para el cual $S = \bar{B}(x^{(0)}, r) \subset D$ con $r \geq \beta\|F(x^{(0)})\|/(1 - \alpha)$. Entonces las iteraciones

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [A(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \quad k = 0, 1, \dots,$$

permanecen en S y convergen a la única solución ξ de $F(x) = 0$ en S . Además, se verifica la condición (2.8).

Concluimos esta subsección con un importante resultado que muestra el orden de convergencia cuadrático del método de Newton como en el Teorema 2.

Teorema 9 (Teorema de Newton-Mysovskii [66]). *Supongamos que $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Fréchet diferenciable en el conjunto convexo $D_0 \subset D$ y la matriz jacobiana $F'(x)$ es no singular $\forall x \in D_0$ y satisface*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \|[F'(x)]^{-1}\| \leq \beta, \quad \forall x, y \in D_0.$$

Si $x^{(0)} \in D_0$ es tal que $\|[F'(x^{(0)})]^{-1}F(x^{(0)})\| \leq \eta$ y $\alpha = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta < 1$, así como $\bar{B}(x^{(0)}, r_0) \subset D_0$ siendo

$$r_0 = \eta \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2^j - 1},$$

entonces las iteraciones del método de Newton (2.4) permanecen en $\bar{B}(x^{(0)}, r_0) \subset D_0$ y convergen a la solución de $F(x) = 0$. Además,

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \epsilon_k \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde

$$\epsilon_k = (\alpha/\eta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha^{2^k})^{2^j - 1} \leq \alpha \left[\eta (1 - \alpha^{2^k}) \right]^{-1}.$$

2.2.1 Herramientas matemáticas

En esta sección expondremos las herramientas matemáticas así como la notación utilizada directamente en la técnica del análisis de convergencia de los métodos propuestos. En la exposición de resultados relacionados con el método de Newton, se puede apreciar que es necesaria sólo la primera derivada de Fréchet de la función $F(x)$. Para esquemas iterativos de órdenes de convergencia superior a dos, es necesaria una mayor diferenciabilidad de esta función. Esto se puede apreciar en el análisis de convergencia de los métodos estudiados en esta memoria.

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente Fréchet diferenciable en D . La q -ésima derivada con $q \geq 1$ de F en $u \in \mathbb{R}^n$, es la función q -lineal $F^{(q)}(u) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{q\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$. Se cumple que

- i) $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,
- ii) $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q)$, para toda permutación σ de $\{1, 2, \dots, q\}$.

Teniendo en cuenta i) y ii) introducimos la siguiente notación

- a) $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1 \cdots v_q$,
- b) $F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)} = F^{(q)}(u)F^{(p)}v^{q+p-1}$.

Aplicando la expansión the Taylor en torno de la solución ξ de $F(x) = 0$ y asumiendo que la matriz Jacobiana $F'(\xi)$ es no singular, tenemos el desarrollo (ver [39])

$$F(\xi + h) = F'(\xi) \left[h + \sum_{q=2}^{p-1} C_q h^q \right] + O(h^p), \quad (2.9)$$

donde $C_q = (1/q!)[F'(\xi)]^{-1}F^{(q)}(\xi)$, $q \geq 2$. Observemos que $C_q h^q \in \mathbb{R}^n$, $F^{(q)}(\xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $[F'(\xi)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, podemos desarrollar F' en torno a ξ como

$$F'(\xi + h) = F'(\xi) \left[I + \sum_{q=2}^{p-1} q C_q h^{q-1} \right] + O(h^{p-1}), \quad (2.10)$$

siendo I la matriz identidad y $qC_q h^{q-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Teniendo en cuenta (2.9) y (2.10), hallamos el desarrollo de Taylor de $F(x^{(k)})$ y los sucesivos desarrollos de las derivadas

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F'(\xi) \left[e^{(k)} + C_2 e^{(k)2} + C_3 e^{(k)3} + C_4 e^{(k)4} + C_5 e^{(k)5} \right] + O(e^{(k)6}), \\ F'(x^{(k)}) &= F'(\xi) \left[I + 2C_2 e^{(k)} + 3C_3 e^{(k)2} + 4C_4 e^{(k)3} + 5C_5 e^{(k)4} \right] + O(e^{(k)5}), \\ F''(x^{(k)}) &= F'(\xi) \left[2C_2 + 6C_3 e^{(k)} + 12C_4 e^{(k)2} + 20C_5 e^{(k)3} \right] + O(e^{(k)4}), \\ F'''(x^{(k)}) &= F'(\xi) \left[6C_3 + 24C_4 e^{(k)} + 60C_5 e^{(k)2} \right] + O(e^{(k)3}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por otro lado, el desarrollo de Taylor de la inversa de la Jacobiana puede expresarse como:

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = \left[I + X_2 e^{(k)} + X_3 e^{(k)2} + X_4 e^{(k)3} + X_5 e^{(k)4} + X_6 e^{(k)5} \right] [F'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)6}), \quad (2.12)$$

donde los factores X_i son elementos a determinar, teniendo en cuenta la igualdad

$$I = [F'(x^{(k)})]^{-1} [F'(x^{(k)})]$$

y desarrollando el miembro derecho

$$\begin{aligned} I &= I + (2C_2 - X_2) e^{(k)} + (X_3 - 2X_2 C_2 + 3C_3) e^{(k)2} \\ &\quad + (-X_4 + 2X_3 C_2 - 3X_2 C_3 + 4C_4) e^{(k)3} + (X_5 - 2X_4 C_2 + 3X_3 C_3 - 4X_2 C_4 + 5C_5) e^{(k)4} \\ &\quad + (-X_6 + 2X_5 C_2 - 3X_4 C_3 + 4X_3 C_4 - 5X_2 C_5 + 6C_6) e^{(k)5} + O(e^{(k)6}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

forzando la nulidad de los coeficientes de los errores hasta orden 5 en (2.12) y (2.13) obtenemos

$$\begin{aligned} X_2 &= 2C_2, \\ X_3 &= -3C_3 + 4C_2^2, \\ X_4 &= -4C_4 + 6C_2 C_3 + 6C_3 C_2 - 8C_2^3, \\ X_5 &= -5C_5 + 8C_2 C_4 - 12C_2^2 C_3 + 9C_3^2 + 8C_4 C_2 - 12C_2 C_3 C_2 + 16C_2^4 - 12C_3 C_2^2, \\ X_6 &= -32C_2^5 + 24C_2^3 C_3 - 18C_2 C_3^2 - 16C_2^2 C_4 + 12C_3 C_4 + 10C_2 C_5 - 6C_6 \\ &\quad + 24C_2^2 C_3 C_2 + 18C_3^2 C_2 - 16C_2 C_4 C_2 + 10C_5 C_2 + 24C_2 C_3 C_2^2 - 16C_4 C_2^2 \\ &\quad + 24C_3 C_2^3 + 12C_4 C_3 - 18C_3 C_2 C_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por otra parte, consideremos la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, si existe f' y es Riemann integrable en (a, b) entonces $\int_b^a f'(t) dt = f(b) - f(a)$. Para la aplicación $G : [a, b] \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos la integral de G en término de sus componentes como

$$\int_b^a G(t) dt = \begin{pmatrix} \int_b^a g_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_b^a g_n(t) dt \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

y se dice que G es Riemann integrable en $[a, b]$ si cada una de sus componentes es Riemann integrable.

Si $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Fréchet diferenciable en cada punto del intervalo $[x, y] \subset D$ cada función componente $f_i(x + t(y - x))$ es continua para $t \in [0, 1]$. Si las derivadas $f'_i(x + t(y - x))(y - x)$ son Riemann integrables en $t \in [0, 1]$ entonces se cumple

$$f_i(y) - f_i(x) = \int_0^1 f'_i(x + t(y - x))(y - x) dt, \quad i = 0, \dots, n$$

y usando (2.15) escribimos

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'(x + t(y-x))(y-x)dt. \quad (2.16)$$

Teorema 10 ([66]). *Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces para cualquier par $x, y \in D$ se cumple (2.16).*

Una herramienta matemática a utilizar es el operador de diferencias divididas de primer orden $[\cdot, \cdot; F] : \Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de una función $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido como (véase [66])

$$[y, x; F](y-x) = F(y) - F(x) \text{ para todo } x, y \in \Omega.$$

Utilizando la fórmula de Hermite-Genocchi [66]

$$[x+h, x; F] = \int_0^1 F'(x+th)dt, \forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

y desarrollando $F'(x+th)$ en series de Taylor alrededor de x e integrando obtenemos

$$[x+h, x; F] = F'(x) + \frac{1}{2}F''(x)h + \frac{1}{6}F'''(x)h^2 + O(h^3), \forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Usando los desarrollos de $F(x)$ y sus derivadas en (2.11), obtenemos la expresión a utilizar para el operador de diferencias divididas

$$\begin{aligned} [y^{(k)}, x^{(k)}; F] &= F'(\xi) \left[I + C_2 e^{(k)} + (C_2^2 + C_3) e^{(k)2} + (-2C_2^3 + 2C_2C_3 + 2C_4 + C_3C_2) e^{(k)3} \right. \\ &\quad + (4C_2^4 - 4C_2^2C_3 + 2C_3^2 + 3C_2C_4 + 5C_5 - 3C_2C_3C_2 - 2C_4C_2 \\ &\quad \left. - C_3C_2^2) e^{(k)4} \right] + O(e^{(k)5}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Otro elemento crucial en el diseño de métodos de alto orden es la función peso. Cuando se trata de esquemas iterativos vectoriales, dicha función peso tiene variables matriciales y su definición es algo más complicada. Para desarrollar adecuadamente en serie de Taylor la función peso matricial, recordamos la notación definida por Artidello et al. en [8]: sea $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ el espacio de Banach de las matrices reales cuadradas de tamaño $n \times n$, la función $H : X \rightarrow X$ puede ser definida tal que su derivada de Fréchet satisface

- (a) $H'(u)(v) = H_1uv$, donde $H' : X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ y $H_1 \in \mathbb{R}$,
- (b) $H''(u, v)(w) = H_2uvw$, donde $H'' : X \times X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ y $H_2 \in \mathbb{R}$.
- (c) $H^{(n)}(u_1, \dots, u_n)(w) = H_n u_1 \cdots u_n$, donde $H^{(n)} : \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-veces}} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ y $H_n \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el desarrollo en Taylor de la función H en torno a cierta matriz θ de tamaño $n \times n$ se puede escribir como

$$H(t^{(k)}) = H(\theta) + H_1(t^{(k)} - \theta) + \frac{1}{2}H_2(t^{(k)} - \theta)^2 + O((t^{(k)} - \theta)^3), \quad (2.18)$$

donde θ en nuestra memoria toma los valores de la matriz nula o la matriz identidad.

2.3 Conceptos previos de análisis dinámico real

El conjunto de herramientas que definiremos más adelante, formado por los diagramas de Feigenbaum, las líneas de parámetros y las superficies isonormales, nos proporciona información precisa y fiable sobre el comportamiento de los miembros de un método iterativo. En lo que resta de esta sección haremos referencia a ciertas definiciones y conceptos que utilizaremos a lo largo de esta memoria de tesis.

La herramienta fundamental en el análisis dinámico real, como veremos en esta sección, es la función racional $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida habitualmente aplicando un método iterativo multidimensional sobre un sistema de ecuaciones polinómicas. Debido a la multidimensionalidad de G , el análisis dinámico empleando herramientas gráficas se hace muy difícil sino inviable; una vía para paliar esta situación es tomar el operador $\mathcal{R}(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ en su versión escalar y realizar el estudio de estabilidad utilizando las técnicas de la dinámica compleja, véase [12] y [51].

Para lidiar con el problema de la dimensionalidad, en [42], Cordero y Torregrosa realizan una extensión de técnicas de la dinámica compleja convirtiéndolas en herramientas válidas para el análisis de $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sin perder la dimensionalidad, especialmente en el caso de $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde se introducen los polinomios de prueba y herramientas de dinámica discreta para el análisis de estabilidad de métodos iterativos multidimensionales, (véase [20, 21, 40, 42]). En lo adelante utilizaremos dicha técnica.

Siendo G un operador racional vectorial, la órbita de la aproximación inicial $x^{(0)}$ se define como un conjunto de las imágenes sucesivas dadas por G , es decir $\{x^{(0)}, G(x^{(0)}), \dots, G^m(x^{(0)})\}$. El comportamiento dinámico de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ puede clasificarse examinando su comportamiento asintótico, por lo que el punto x^* tal que $G(x^*) = x^*$ es un punto fijo de G , que es un concepto ya conocido. Del mismo modo, un punto periódico x de periodo $k \geq 1$ es aquel que $G^k(x) = x$ y $G^{k-p}(x) \neq x$, para $p < k$.

Algunos resultados sobre la estabilidad de los puntos fijos se resumen en el siguiente teorema ([70], página 558).

Teorema 11. *Sea el operador racional $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^2 . Supongamos que x^* es un punto de periodo k . Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz Jacobiana $G'(x^*)$,*

- a) *Si $|\lambda_j| < 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces x^* es atractor.*
- b) *Si, al menos, un valor propio λ_{j_0} satisface que $|\lambda_{j_0}| > 1$, entonces x^* es inestable, es decir, repulsor o silla*
- c) *Si $|\lambda_j| > 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces x^* es repulsor.*

Aquellos puntos fijos cuyos valores propios satisfacen $|\lambda_j| \neq 1$ se llaman hiperbólicos, y son puntos hiperbólicos silla si algunos de sus valores propios cumplen $|\lambda_j| > 1$ y el resto $|\lambda_i| < 1, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si un punto fijo no es un cero del sistema no lineal (2.1), entonces se llama un punto fijo extraño y su estabilidad se clasifica según el Teorema 11. Además, si x^* es un punto fijo o periódico atractor de la función racional G , podemos definir su cuenca de atracción $\mathcal{A}(x^*)$ como el conjunto de preimágenes de cualquier orden tales que

$$\mathcal{A}(x^*) = \{x^{(0)} \in \mathbb{R}^n : G^m(x^{(0)}) \rightarrow x^*, m \rightarrow \infty\}.$$

Por otro lado, $x_c \in \mathbb{R}^n$ se llama punto crítico de G si $\det(G(x_c)) = 0$ o en una definición más restrictiva, si todos los valores propios de $G'(x_c)$ son iguales a cero.

Un resultado clásico muy importante que involucra a los puntos periódicos, fijos y críticos es el teorema de Fatou y Julia, que podemos encontrar en [50]:

Teorema 12 (Fatou-Julia). *Sea G una función racional. La cuenca de atracción inmediata de un punto atractor (fijo o periódico de G) contiene al menos un punto crítico.*

Este teorema afirma que en toda cuenca de atracción de un punto fijo o periódico, existe al menos un punto crítico. De hecho, se produce en la cuenca de atracción inmediata, es decir, en la misma componente conexa que el punto periódico o fijo. Si un punto crítico es diferente de las raíces de $F(x) = 0$ se llama punto crítico libre.

Los diagramas de bifurcación o diagramas de Feigenbaum usados en esta memoria, son herramientas para analizar la estabilidad de los métodos de una familia paramétrica utilizando las componentes de la función vectorial racional $G = (g_1(x_1, \alpha), g_2(x_2, \alpha))$ actuando sobre un polinomio de prueba y con $\alpha \in \mathbb{R}$. Se han construido dos tipos de diagramas, uno para estudiar la estabilidad de los puntos fijos y otro para el estudio de los críticos usando estimaciones iniciales de uno u otro tipo respectivamente. En el primero de ellos se ha tomado una pequeña perturbación δx_i con $i \in \{1, 2\}$ y se han construido los gráficos de las aplicaciones $g_i(x^* + \delta x_i, \alpha)$, en el segundo caso se han planteado los gráficos $g_i(x_c, \alpha)$. Ambos en sus respectivos dominios del parámetro α y en el plano \mathbb{R}^2 . Los diagramas de bifurcación son especialmente útiles en la detección de órbitas periódicas y conjuntos atractores.

En el estudio de la estabilidad de un método o familia iterativa resultan de interés los comportamientos patológicos, aquellos donde no existe una convergencia a las raíces de la ecuación $F(x) = 0$. Estos comportamientos patológicos pueden manifestarse en ciertas estructuras, que a diferencia de los puntos fijos o periódicos, no tienen una geometría definida por lo que se denominan atractores extraños o conjuntos atractores. En este sentido daremos la definición de un conjunto atractor, pero primeramente definamos la distancia entre un punto y un conjunto dado.

Dado un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ y un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la distancia de x a D como

$$d(x, D) = \inf\{\|x - D\| : x \in D\}$$

Conocido lo anterior,

Definición 2.3.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $G : U \rightarrow U$. El conjunto cerrado y acotado $A \subset U$ es un atractor si $G(A) = A$ y existe un $r > 0$ tal que $d(x^{(0)}, A) \leq r$ implica que $d(x^{(k)}, A) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

En el análisis de estabilidad de las familias paramétricas estudiadas en esta memoria, mostraremos ejemplos de atractores extraños encontrados.

Los conceptos y herramientas definidos anteriormente nos permiten realizar el análisis de estabilidad de métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Esto se traduce en la determinación y utilización de valores del parámetro libre que nos proporcionan un mejor rendimiento de la familia de esquemas iterativos; así como, de la exclusión de aquellos otros valores que conducen a comportamientos patológicos tales como puntos fijos atractores y críticos libres. También pueden ser detectadas otras estructuras atractoras tales como órbitas periódicas y conjuntos atractores extraños. Todos estos elementos en su conjunto, nos proporcionan una comprensión general de la fiabilidad y robustez de los esquemas iterativos para su implementación en la práctica o estudio experimental.

Capítulo 3

Clase de esquemas iterativos de tres pasos basada en funciones peso

Capítulo basado en:

[19] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. A new three-step class of iterative methods for solving nonlinear systems. *AIMS Mathematics* 2019; 7(12):1221, doi:10.3390/math7121221.

3.1 Introducción

Como hemos comentado en el Capítulo de Introducción, para resolver sistemas de ecuaciones no lineales utilizamos procedimientos de puntos fijos siendo el método de Newton el más conocido, aunque su orden de convergencia es dos. Otro esquema iterativo para resolver sistemas no lineales es el método del descenso de gradiente [14,84] de convergencia lineal y convergencia cuadrática bajo condiciones especiales. Estos esquemas son muy utilizados al resolver sistemas de muy grandes dimensiones gracias al poco coste computacional comparado con los esquemas tipo Newton.

Al diseñar un método iterativo, lo ideal es conseguir el mayor orden de convergencia posible con el mínimo costo computacional. Esto se relaciona con la definición de un procedimiento óptimo sin memoria, dado por Kung y Traub en [63]; este último es aquel en el que se cumple la condición $p = 2^{d-1}$, siendo p el orden de convergencia y d el número de evaluaciones funcionales por iteración. En esta dirección Cordero y Torregrosa [28,29] y Homeier [57,58]; así como otros investigadores [52,65] propusieron métodos de tercer orden que requieren cada uno de ellos la evaluación de dos matrices inversas por iteración. Por otro lado, Cordero y otros [41] propusieron un método de cuarto o quinto orden de convergencia bajo determinadas condiciones, que requiere la evaluación de dos funciones, dos Jacobianas y una matriz inversa por iteración. Otros ejemplos en esta línea los podemos encontrar en [80].

También en esta línea, algunos investigadores han explorado las reglas generales para acelerar la convergencia de los esquemas iterativos multipasos, usando el esquema de Newton como predictor (en el primer paso), véase [38,75,81].

En este capítulo se propone una nueva clase de métodos de sexto orden de convergencia con un primer paso de Newton y diseñada mediante funciones peso, técnica que permite elevar el orden de convergencia sin aumentar el número de evaluaciones funcionales. Se muestra el análisis de convergencia de esta nueva clase y se compara su eficiencia computacional con otros métodos del mismo orden encontrados en la literatura. A continuación, se revisan y describen varios métodos de sexto orden existentes que se utilizarán con el objetivo de comparar sus resultados con los de los esquemas propuestos, sobre ciertos problemas de prueba.

El primer esquema ($C6_1$) es introducido en [41] por A. Cordero et al. y modificado en [38] por los mismos autores. Su expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} [2I - F'(y^{(k)}) F'(x^{(k)})^{-1}] F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - F'(y^{(k)})^{-1} F(z^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Observemos que este esquema alcanza el sexto orden de convergencia, evaluando la función no lineal F en tres puntos diferentes y la matriz jacobiana asociada F' en dos puntos diferentes, por iteración.

El segundo método ($C6_2$), una composición entre los métodos de Newton-Jarratt modificada, fue presentado por A. Cordero et al. en [39], expresándose como

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3} F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{1}{2} \left[3 F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)}) \right]^{-1} \left[3 F'(z^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \right] F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - \left[-\frac{1}{2} F'(x^{(k)}) + \frac{3}{2} F'(z^{(k)}) \right]^{-1} F(y^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta estructura permite alcanzar el sexto orden de convergencia mediante dos evaluaciones de la función no lineal F y también dos de F' , por iteración.

Por otra parte, denotaremos por (XH6) al esquema introducido por X.Y. Xiao y H.W. Yin en [81] basado en el método presentado por J.R. Sharma et al. en [74], cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3} F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \frac{1}{2} \left[-I + \frac{9}{4} F'(y^{(k)})^{-1} F'(x^{(k)}) + \frac{3}{4} F'(x^{(k)})^{-1} F'(y^{(k)}) \right] F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \frac{1}{2} \left[3 F'(y^{(k)})^{-1} - F'(x^{(k)})^{-1} \right] F(z^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En este caso, se realizan dos evaluaciones funcionales de F y F' respectivamente, en los puntos $x^{(k)}$ y $y^{(k)}$ por iteración.

La cuarta clase de métodos iterativos es del tipo Jarrat y fue introducida por R. Behl et al. en [12] como

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3} F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= x^{(k)} - \left[-a_1 I + a_2 (F'(y^{(k)})^{-1} F'(x^{(k)}))^2 \right] F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left[b_2 F'(x^{(k)}) + b_3 F'(y^{(k)}) \right]^{-1} \left[F'(x^{(k)}) + b_1 F'(y^{(k)}) \right] F'(x^{(k)})^{-1} F(z^{(k)}), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

siendo $a_1 = 1 - a_2$, $a_2 = \frac{3}{8}$, $b_2 = b_1 - b_3 + 1$ y $b_3 = \frac{1}{2} (5b_1 + 3)$. Esta es una familia paramétrica de esquemas iterativos que alcanza el orden de convergencia seis con dos evaluaciones funcionales de F y F' por iteración y que denotaremos por (B6).

En la Sección 2 se presenta la clase de métodos iterativos propuesta y su análisis de convergencia. También se muestran dos subclases particulares de esta familia, ambas dependientes de un parámetro real. En la Sección 3, se calcula su eficiencia y se compara con la de algunas clases o esquemas existentes con el mismo orden de convergencia. Finalmente, en la Sección 4 se comprueba su rendimiento numérico en varios problemas multidimensionales y en la Sección 5 se exponen algunas conclusiones.

3.2 Diseño y análisis de convergencia de la clase propuesta

Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función real suficientemente Fréchet diferenciable, $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una función de peso matricial y el método iterativo de tres pasos

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - H(t^{(k)}) F'(x^{(k)})^{-1} F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - H(t^{(k)}) F'(x^{(k)})^{-1} F(z^{(k)}), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

siendo la variable $t^{(k)} = I - [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F]$.

Observemos que cuando k tiende a infinito, la variable $t^{(k)}$ tiende a la matriz nula. Por lo tanto, existen números reales H_1, H_2 tales que H , se puede expandir en torno a una matriz nula de tamaño $n \times n$ como

$$H(t^{(k)}) = H(0) + H_1(t^{(k)}) + \frac{1}{2} H_2(t^{(k)})^2 + O((t^{(k)})^3).$$

Utilizando estos conceptos, el siguiente resultado establece las condiciones que aseguran el sexto orden de convergencia de la clase (3.5) y presenta su ecuación de error.

Teorema 13. Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente Fréchet diferenciable en un entorno abierto D de $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\xi) = 0$, y sea $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una función matricial suficientemente Fréchet diferenciable.

Supongamos también que $F'(x)$ es no singular en ξ y $x^{(0)}$ es un valor inicial suficientemente cercano a ξ . Entonces, la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtenida de la clase (3.5) converge a ξ con orden 6 si $H_0 = I$, $H_1 = 2$ y $|H_2| < \infty$, donde $H_0 = H(0)$ y I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. La ecuación del error resultante es

$$e^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[(H_2^2 - 22H_2 + 120)C_2^5 + (-24 + 2H_2)C_2^2C_3C_2 + (-20 + 2H_2)C_3C_2^3 + 4C_3^2C_2 \right] e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),$$

donde $C_q = \frac{1}{q!} [F'(\xi)]^{-1} F^{(q)}(\xi)$, $q = 2, 3, \dots$ y $e^{(k)} = x^{(k)} - \xi$.

Demostración. Utilizando los desarrollos en serie de Taylor de $F(x)$ y $F'(x)$ alrededor de ξ obtenemos,

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F'(\xi)[e^{(k)} + C_2e^{(k)2} + C_3e^{(k)3} + C_4e^{(k)4} + C_5e^{(k)5} + C_5e^{(k)6}] + O(e^{(k)7}), \\ F'(x^{(k)}) &= F'(\xi)[I + 2C_2e^{(k)} + 3C_3e^{(k)2} + 4C_4e^{(k)3} + 5C_5e^{(k)4} + 6C_5e^{(k)5}] + O(e^{(k)6}). \end{aligned}$$

Además, el desarrollo de la inversa de la matriz Jacobiana puede expresarse como

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = [I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3} + X_5e^{(k)4} + X_6e^{(k)5}] [F'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)5}), \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} X_2 &= 2C_2, \\ X_3 &= -3C_3 + 4C_2^2, \\ X_4 &= -4C_4 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 8C_2^3, \\ X_5 &= -5C_5 + 8C_2C_4 - 12C_2^2C_3 + 9C_3^2 + 8C_4C_2 - 12C_2C_3C_2 + 16C_2^4 - 12C_3C_2^2, \\ X_6 &= -32C_2^5 + 24C_2^3C_3 - 18C_2C_3^2 - 16C_2^2C_4 + 12C_3C_4 + 10C_2C_5 - 6C_6 \\ &\quad + 24C_2^2C_3C_2 + 18C_3^2C_2 - 16C_2C_4C_2 + 10C_5C_2 + 24C_2C_3C_2^2 - 16C_4C_2^2 \\ &\quad + 24C_3C_2^3 + 12C_4C_3 - 18C_3C_2C_3. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}) &= e^{(k)} - C_2e^{(k)2} + 2(C_2^2 - C_3)e^{(k)3} + (4C_2C_3 + 3C_3C_2 - 4C_2^3 - 3C_4)e^{(k)4} \\ &\quad + (-4C_5 + 6C_2C_4 - 8C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 4C_4C_2 - 6C_2C_3C_2 + 8C_2^4 - 6C_3C_2^2)e^{(k)5} \\ &\quad + (-16C_2^5 + 16C_2^3C_3 - 12C_2C_3^2 - 12C_2^2C_4 + 9C_3C_4 + 8C_2C_5 - 5C_6 \\ &\quad + 12C_2^2C_3C_2 - 9C_3^2C_2 - 8C_2C_4C_2 + 5C_5C_2 + 12C_2C_3C_2^2 - 8C_4C_2^2 \\ &\quad + 12C_3C_2^3 + 8C_4C_3 - 12C_3C_2C_3)e^{(k)6} + O(e^{(k)7}). \end{aligned}$$

El error del primer paso del esquema iterativo, así como sus sucesivas potencias pueden expresarse como

$$\begin{aligned} y^{(k)} - \xi &= C_2e^{(k)2} - 2(C_2^2 - C_3)e^{(k)3} - (4C_2C_3 + 3C_3C_2 - 4C_2^3 - 3C_4)e^{(k)4} \\ &\quad - (-4C_5 + 6C_2C_4 - 8C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 4C_4C_2 - 6C_2C_3C_2 + 8C_2^4 - 6C_3C_2^2)e^{(k)5} \\ &\quad - (-16C_2^5 + 16C_2^3C_3 - 12C_2C_3^2 - 12C_2^2C_4 + 9C_3C_4 + 8C_2C_5 - 5C_6 + 12C_2^2C_3C_2 - 9C_3^2C_2 \\ &\quad - 8C_2C_4C_2 + 5C_5C_2 + 12C_2C_3C_2^2 - 8C_4C_2^2 + 12C_3C_2^3 + 8C_4C_3 - 12C_3C_2C_3)e^{(k)6} \\ &\quad + O(e^{(k)7}), \\ (y^{(k)} - \xi)^2 &= C_2^2e^{(k)4} + (-4C_2^3 + 2C_2C_3 + 2C_3C_2)e^{(k)5} + (12C_2^4 - 11C_2^2C_3 + 4C_3^2 + 3C_2C_4 \\ &\quad - 4C_2C_3C_2 + 3C_4C_2 - 7C_3C_2^2)e^{(k)6} + O(e^{(k)7}), \\ (y^{(k)} - \xi)^3 &= C_2^3e^{(k)6} + O(e^{(k)7}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 F(y^{(k)}) &= F'(\xi)[(y^{(k)} - \xi) + C_2(y^{(k)} - \xi)^2 + C_3(y^{(k)} - \xi)^3] + O((y^{(k)} - \xi)^3) \\
 &= F'(\xi)[C_2e^{(k)2} + 2(C_3 - C_2^2)e^{(k)3} + (3C_4 + 5C_2^3 - 3C_3C_2 - 4C_2C_3)e^{(k)4} \\
 &\quad + (4C_5 - 6C_2C_4 + 10C_2^2C_3 - 6C_3^2 - 4C_4C_2 + 8C_2C_3C_2 - 12C_2^4 + 6C_3C_2^2)e^{(k)5} \\
 &\quad + (28C_2^5 - 27C_2^3C_3 + 16C_2C_3^2 + 15C_2^2C_4 - 9C_3C_4 - 8C_2C_5 + 5C_6 - 16C_2^2C_3C_2 \\
 &\quad + 9C_3^2C_2 + 11C_2C_4C_2 - 5C_5C_2 - 18C_2C_3C_2^2 + 8C_4C_2^2 - 12C_3C_2^3 - 8C_4C_3 \\
 &\quad + 12C_3C_2C_3)e^{(k)6}] + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando la fórmula de Hermite-Genocchi (veáse [66]), descrita en la Sección 2 del Capítulo 2 para el operador de diferencias divididas de primer orden $[x + h, x; F] = \int_0^1 F'(x + th)dt = F'(x) + \frac{1}{2}F''(x)h + \frac{1}{6}F'''(x)h^2 + O(h^3)$, $\forall(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, obtenemos la expansión del operador $[y, x; F]$ en torno a ξ :

$$\begin{aligned}
 [y^{(k)}, x^{(k)}; F] &= F'(\xi) \left[1 + C_2e^{(k)} + (C_2^2 + C_3)e^{(k)2} + (-2C_2^3 + 2C_2C_3 + 2C_4 + C_3C_2)e^{(k)3} + (4C_2^4 \right. \\
 &\quad \left. - 4C_2^2C_3 + 2C_3^2 + 3C_2C_4 + 5C_5 - 3C_2C_3C_2 - 2C_4C_2 - C_3C_2^2)e^{(k)4} \right] + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Conociendo la definición de la variable de la función peso, desarrollamos $t^{(k)}$ como:

$$\begin{aligned}
 t^{(k)} &= I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[y^{(k)}, x^{(k)}; F] \\
 &= C_2e^{(k)} + (-3C_2^3 + 2C_3)e^{(k)2} + (8C_2^3 - 6C_2C_3 + 2C_4 - 4C_3C_2)e^{(k)3} \\
 &\quad + (-20C_2^4 + 16C_2^2C_3 - 8C_3^2 - 4C_2C_4 + 11C_2C_3C_2 - 2C_4C_2 + 10C_3C_2^2 - 3C_2C_4)e^{(k)4} + O(e^{(k)5}).
 \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la expansión de Taylor de H

$$H(t^{(k)}) = H_0 + H_1(t^{(k)}) + H_2(t^{(k)})^2 + O((t^{(k)})^3), \tag{3.10}$$

fijando $H_0 = I$, $H_1 = 2$ y apoyándonos en las expresiones (3.6), (3.8) y (3.10) obtenemos el producto $H(t^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)})$, que denotaremos como Φ

$$\begin{aligned}
 \Phi &= C_2e^{(k)2} + (-2C_2^2 + 2C_3)e^{(k)3} + \left(-C_2^3 + \frac{H_2}{2}C_2^3 - 4C_2C_3 + 3C_4 - 2C_3C_2 \right) e^{(k)4} \\
 &\quad + \left((28 - 5H_2)C_2^4 + (-2 + H_2)C_2^2C_3 + (-4 + H_2)C_2C_3C_2 - 4C_3^2 - 6C_2C_4 + 4C_5 \right. \\
 &\quad \left. - 4C_4C_2 + (-6 + H_2)C_3C_2^2 \right) e^{(k)5} + \left(-6C_3C_4 - 8C_2C_5 + 5C_6 + 52C_2^2C_3C_2 \right. \\
 &\quad \left. - 13C_3^2C_2 - 10C_5C_2 + 52C_2C_3C_2^2 + 4C_4C_2^2 + C_3C_2^3 - 8C_4C_3 \right. \\
 &\quad \left. + (105 - 10H_2)C_2^3C_3 + (-3 + H_2)C_2C_4C_2 - 9C_2^2C_3C_2H_2 + 2C_3^2C_2H_2 \right. \\
 &\quad \left. - 9C_2C_3C_2^2 + C_4C_2^2H_2 - 9C_3C_2^2H_2 + (20 + H_2)C_3C_2C_3 + (-3 + \frac{3H_2}{2})C_2^2C_4 \right. \\
 &\quad \left. + (-40 + 2H_2)C_2C_3^2 + (-154 + 31H_2)C_2^5 \right) e^{(k)6} + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned}$$

Entonces, el error en el segundo paso es

$$\begin{aligned}
 z^{(k)} - \xi &= (y^{(k)} - \xi) - \Phi \\
 &= \left(\left(5 - \frac{H_2}{2} \right) C_2^3 - C_3 C_2 \right) e^{(k)4} + \left((-36 + 5H_2)C_2^4 + (10 - H_2)(C_2^2 C_3 + C_2 C_3 C_2) \right. \\
 &\quad \left. - 2C_3^2 + (12 - H_2)C_3 C_2^2 \right) e^{(k)5} + \left((20 - 2H_2)C_3^2 C_2 - 3C_3 C_4 + 5C_5 C_2 + (170 - 31H_2) C_2^5 \right. \\
 &\quad \left. + (22 - 2H_2) C_3^2 C_2 + (24 - 2H_2)C_3 C_2 C_3 + \left(15 - \frac{3H_2}{2} \right) C_2^2 C_4 + (4 - H_2) C_4 C_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + (-65 + 9H_2) C_3 C_2^3 + (11 - H_2) C_2 C_4 C_2 - 64C_2 C_3 C_2^2 - 64C_2^2 C_3 C_2 \right. \\
 &\quad \left. + 9H_2 C_2 C_3 C_2^2 + 9H_2 C_2^2 C_3 C_2 + (-69 + 10H_2) C_2^3 C_3 \right) e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 F(z^{(k)}) &= F'(\xi)(z^{(k)} - \xi) + O((z^{(k)} - \xi)^2) \\
 &= F'(\xi) \left[\left(\left(5 - \frac{H_2}{2} \right) C_2^3 - C_3 C_2 \right) e^{(k)4} + \left((-36 + 5H_2)C_2^4 + (10 - H_2)(C_2^2 C_3 + C_2 C_3 C_2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2C_3^2 + (12 - H_2)C_3 C_2^2 \right) e^{(k)5} + \left((20 - 2H_2)C_3^2 C_2 - 3C_3 C_4 + 5C_5 C_2 + (170 - 31H_2) C_2^5 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (22 - 2H_2) C_3^2 C_2 + (24 - 2H_2)C_3 C_2 C_3 + \left(15 - \frac{3H_2}{2} \right) C_2^2 C_4 + (4 - H_2) C_4 C_2^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-65 + 9H_2) C_3 C_2^3 + (11 - H_2) C_2 C_4 C_2 - 64C_2 C_3 C_2^2 - 64C_2^2 C_3 C_2 + 9H_2 C_2 C_3 C_2^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 9H_2 C_2^2 C_3 C_2 + (-69 + 10H_2) C_2^3 C_3 \right) e^{(k)6} \right] + O(e^{(k)7}). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Finalmente, con (3.6), (3.10) y (3.11) obtenemos el producto $H(t^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)})$ denotado como Ψ

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \left(\left(5 - \frac{H_2}{2} \right) C_2^3 - C_3 C_2 \right) e^{(k)4} + \left((-36 + 5H_2)C_2^4 + (10 - H_2)(C_2^2 C_3 + C_2 C_3 C_2) \right. \\
 &\quad \left. - 2C_3^2 + (12 - H_2)C_3 C_2^2 \right) e^{(k)5} + \frac{1}{4} \left(-12C_3 C_4 + 20C_5 C_2 + (80 - 8H_2) C_2 C_3^2 \right. \\
 &\quad \left. + (84 - 8H_2) C_3^2 C_2 + (44 - 4H_2) C_2 C_4 C_2 + (96 - 8H_2) C_3 C_2 C_3 + (16 - 4H_2) C_4 C_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + (60 - 6H_2) C_2^2 C_4 + (-256 + 36H_2) C_2 C_3 C_2^2 + (-232 + 34H_2) C_2^2 C_3 C_2 \right. \\
 &\quad \left. + (-240 + 34H_2) C_3 C_2^3 + (-276 + 40H_2) C_2^3 C_3 + (-H_2^2 - 102H_2 + 560)C_2^5 \right) e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),
 \end{aligned}$$

siendo la ecuación del error resultante

$$e^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[(H_2^2 - 22H_2 + 120)C_2^5 + (-24 + 2H_2)C_2^2 C_3 C_2 + (-20 + 2H_2)C_3 C_2^3 + 4C_3^2 C_2 \right] e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),$$

lo que completa la demostración asumiendo que $|H_2| < \infty$. □

El Teorema 13 proporciona las condiciones de convergencia para la clase propuesta de métodos iterativos (3.5) de los métodos iterativos. Sin embargo, hay varias formas de definir la función de peso de la matriz H que satisfagan estas. Cada función de peso definida genera diferentes esquemas o clases iterativas.

Familia 1 La función peso definida por

$$\zeta(t) = I + 2t + \frac{1}{2}at^2, \tag{3.12}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ satisface las condiciones de convergencia del Teorema 13. Se obtiene entonces una nueva familia paramétrica de métodos de sexto orden como

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \left[I + 2t^{(k)} + \frac{1}{2}\alpha t^{(k)2} \right] [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left[I + 2t^{(k)} + \frac{1}{2}\alpha t^{(k)2} \right] [F'(x^{(k)})]^{-1} F(z^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

siendo $t^{(k)} = I - [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F]$. Esta familia es denotada por $PSH6_1$.

Familia 2 La función peso definida por

$$\eta(t) = I + 2(I + \alpha t)^{-1} t \quad (3.14)$$

también satisface las condiciones de convergencia del Teorema 13. Utilizando esta función peso, obtenemos una nueva clase de métodos de sexto orden que depende de un parámetro libre α

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \left[I + 2(I + \alpha t^{(k)})^{-1} t^{(k)} \right] [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left[I + 2(I + \alpha t^{(k)})^{-1} t^{(k)} \right] [F'(x^{(k)})]^{-1} F(z^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

siendo otra vez $t^{(k)} = I - [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F]$. En lo que sigue denotamos esta clase como $PSH6_2$.

Observemos también que ambas subclases utilizan tres evaluaciones funcionales de F , una evaluación de la matriz jacobiana F' y una evaluación de la diferencia dividida $[\cdot, \cdot; F]$, para alcanzar el sexto orden de convergencia.

3.3 Eficiencia computacional

Para analizar la eficiencia de un método iterativo, hay dos aspectos clave: el número de evaluaciones funcionales y el número de operaciones (productos-cocientes), ambos por iteración. Así, nuestro objetivo es comparar el rendimiento de las propuestas ($PSH6_1$ y $PSH6_2$) y los métodos conocidos ($C6_1$, $C6_2$, $XH6$ y $B6$, descritos en la Introducción). Para conseguir este objetivo, utilizamos la extensión multidimensional del índice de eficiencia $I = p^{1/d}$ definida por Ostrowski en [68] y el índice de eficiencia computacional $CI = p^{1/(d+op)}$ definido en [35], donde p es el orden de convergencia ya definido en la Sección 2 del Capítulo 2, d es el número de evaluaciones funcionales por iteración y op es el número de productos-cocientes por iteración.

Para calcular el índice de eficiencia I recordamos que el número de evaluaciones funcionales de una función F , una matriz Jacobiana F' y una diferencia dividida de primer orden $[\cdot, \cdot; F]$ en cada iteración es n , n^2 y $n(n-1)$ respectivamente, siendo n el tamaño del sistema a resolver. La comparación de los índices de eficiencia de los distintos métodos se muestra en la Tabla 3.1. Observemos que a pesar de que algunos de ellos utilizan más de una matriz Jacobiana por iteración o utilizan el operador de diferencias divididas, el índice de eficiencia I es el mismo en todos los casos debido a que, para el cálculo de este último, solo se computa el número de evaluaciones funcionales. Por lo tanto, es necesario calcular su correspondiente índice de eficiencia computacional CI . De este modo, el esfuerzo computacional por iteración se tiene en cuenta para decidir sobre la eficiencia de los diferentes esquemas iterativos.

En el caso del cálculo del índice de eficiencia computacional CI , se tiene en cuenta que el número de productos-cocientes necesarios para resolver un sistema lineal por eliminación gaussiana es $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ donde n es el tamaño del sistema. Si se requiere la solución mediante el uso de la descomposición LU de m sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes, entonces son necesarios $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n$ productos-cocientes; además, se realizan n^2 productos en caso de multiplicación matriz-vector y para el cálculo de un operador de diferencias divididas de primer orden se necesitan n^2 cocientes. La notación $LS(F'(x^{(k)}))$ y $LS(Otros)$ definen el número de sistemas lineales a resolver con la misma matriz de coeficientes $F'(x^{(k)})$ y con otras matrices de coeficientes, respectivamente. La comparación de los índices

Método	$n.F$	$.F'$	$n.[\cdot, \cdot; F]$	d	I
PSH6 ₁	3	1	1	$2n^2 + 2n$	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$
PSH6 ₂	3	1	1	$2n^2 + 2n$	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$
C6 ₁	3	2	0	$2n^2 + 3n$	$6 \frac{1}{2n^2+3n}$
C6 ₂	2	2	0	$2n^2 + 2n$	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$
XH6	2	2	0	$2n^2 + 2n$	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$
B6	2	2	0	$2n^2 + 2n$	$6 \frac{1}{2n^2+2n}$

Tabla 3.1: Índice de eficiencia de los métodos examinados

Método	d	LS($F'(x)$)	LS(Otros)	$M \times V$	CI
PSH6 ₁ { $\alpha \neq 0$ }	$2n^2 + 2n$	7	0	4	$6 \frac{1}{\frac{1}{3}n^3+13n^2+\frac{5}{3}n}$
PSH6 ₁ { $\alpha = 0$ }	$2n^2 + 2n$	5	0	2	$6 \frac{1}{\frac{1}{3}n^3+5n^2+\frac{2}{3}n}$
PSH6 ₂ { $\alpha \neq 0$ }	$2n^2 + 2n$	5	4	2	$6 \frac{1}{\frac{2}{3}n^3+11n^2-\frac{2}{3}n}$
PSH6 ₂ { $\alpha = 0$ }	$2n^2 + 2n$	5	0	2	$6 \frac{1}{\frac{1}{3}n^3+5n^2+\frac{2}{3}n}$
C6 ₁	$2n^2 + 3n$	3	1	1	$6 \frac{1}{\frac{2}{3}n^3+7n^2+\frac{7}{3}n}$
C6 ₂	$2n^2 + 2n$	1	3	2	$6 \frac{1}{\frac{2}{3}n^3+8n^2+\frac{4}{3}n}$
XH6	$2n^2 + 2n$	3	2	2	$6 \frac{1}{\frac{2}{3}n^3+9n^2+\frac{4}{3}n}$
B6	$2n^2 + 2n$	2	4	3	$6 \frac{1}{n^3+11n^2+n}$

Tabla 3.2: Índice de eficiencia computacional de los métodos examinados

de eficiencia computacional de los métodos examinados se muestra en la Tabla 3.2, ya que su coste computacional es distinto.

Estos índices dependen obviamente del tamaño del sistema no lineal a resolver pero se pueden establecer algunas conclusiones preliminares, ya que los coeficientes de tercer grado que describen la suma de operaciones y evaluaciones funcionales marcan una gran diferencia: algunos de ellos (incluyendo casos especiales de nuestros métodos propuestos) tienen $\frac{1}{3}$ como coeficiente director, mientras que otros tienen $\frac{2}{3}$ o incluso la unidad como coeficiente director, lo que hace que el coste computacional sea mucho mayor para sistemas de gran tamaño.

Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran el índice de eficiencia computacional para los métodos examinados y los sistemas de tamaño de 2 a 20 con funciones peso ζ y η respectivamente, en el caso de los esquemas propuestos. En las figuras 3.1(a) y 3.1(b), el parámetro α es no nulo, y en las Figuras 3.1(c) y 3.1(d) es igual a cero. Observemos que el comportamiento del CI para las funciones peso ζ y η es el mismo cuando $\alpha = 0$ y es mejor que los de los métodos conocidos de comparación. Este rendimiento se explica por el término dominante $\frac{1}{3}n^3$ en el cálculo del coste computacional; se debe a la existencia de un único tipo de sistemas lineales a resolver por iteración con matriz de coeficientes $F'(x^{(k)})$.

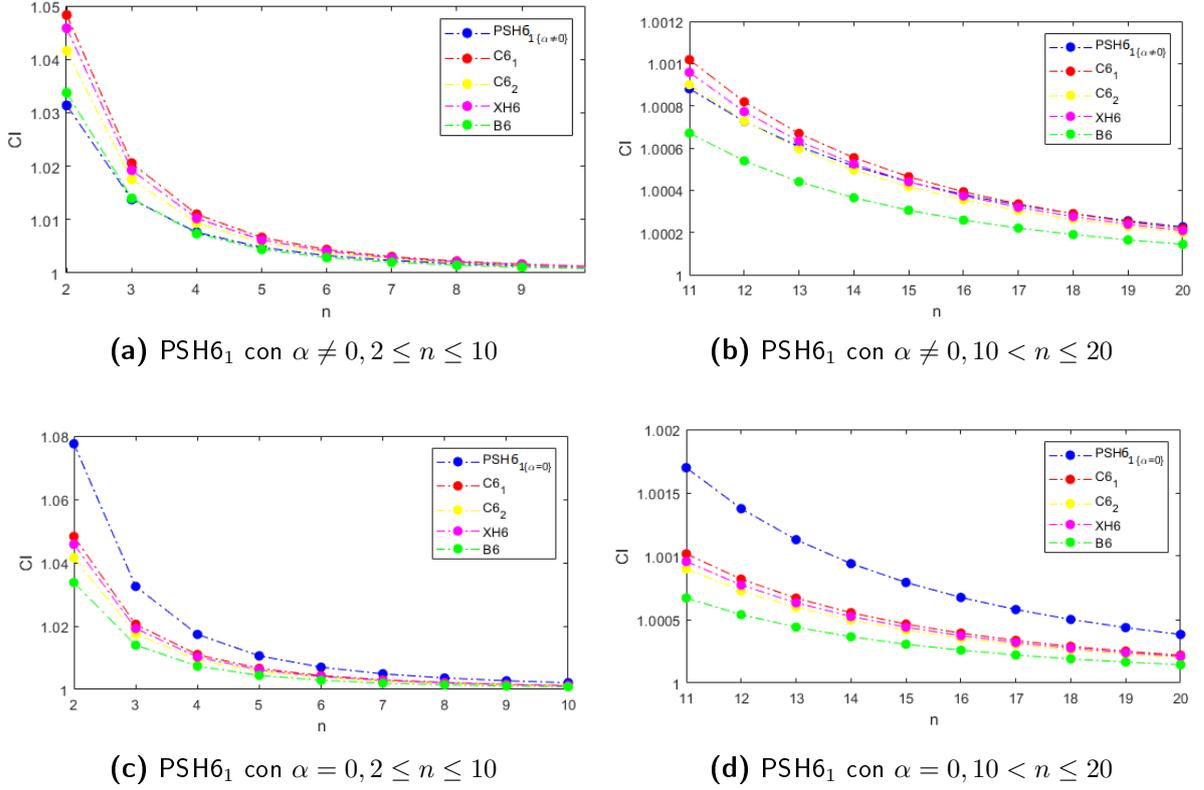


Figura 3.1: CI índices para PSH6₁ y métodos de comparación

Observemos también que, incluso cuando $\alpha \neq 0$, nuestros métodos son competitivos con los existentes, especialmente en sistemas con tamaño superior a 10, donde la diferencia entre los índices de todos los métodos no son significativas (ver Figuras 3.1(b) y 3.2(b)).

3.4 Resultados numéricos

En esta sección, comparamos el rendimiento numérico de los métodos propuestos PSH6₁ descritos en la expresión (3.13) con $\alpha = 0$, $\alpha = 5.5$ y $\alpha = 10$, PSH6₂ (ecuación (3.15)) para los mismos valores del parámetro α y los esquemas existentes C6₁, descrito en la ecuación (3.1), C6₂ expresado en (3.2), XH6 que aparece en la ecuación (3.3) y el esquema B6 expresado en (3.4).

Los experimentos se han realizado en un ordenador con CPU Intel(R) Core(TM) i7-5500U CPU @ 2.40 GHz 2.40 GHz y 16,0 GB de RAM. Se ha utilizado el sistema de álgebra computacional Matlab, con 2000 dígitos de mantisa en aritmética de precisión variable, para realizar los experimentos numéricos comparativos. Además, el criterio de parada utilizado es $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ o $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$, este criterio de parada así como la precisión utilizados serán empleados en la mayoría de los cálculos realizados en esta tesis y en caso de alguna variación será señalada en el caso particular. Los valores iniciales empleados y las soluciones buscadas se simbolizan como $x^{(0)}$ y ξ , respectivamente. Cuando la expresión iterativa del método implica la evaluación de un operador de diferencias divididas, se calcula utilizando la estimación de primer orden de la matriz jacobiana cuyos elementos son (véase [66])

$$[y, x; F]_{i,j} = (f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_m) - f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)) / (y_j - x_j), 1 \leq i, j \leq n.$$

donde f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son las funciones coordenadas de F .

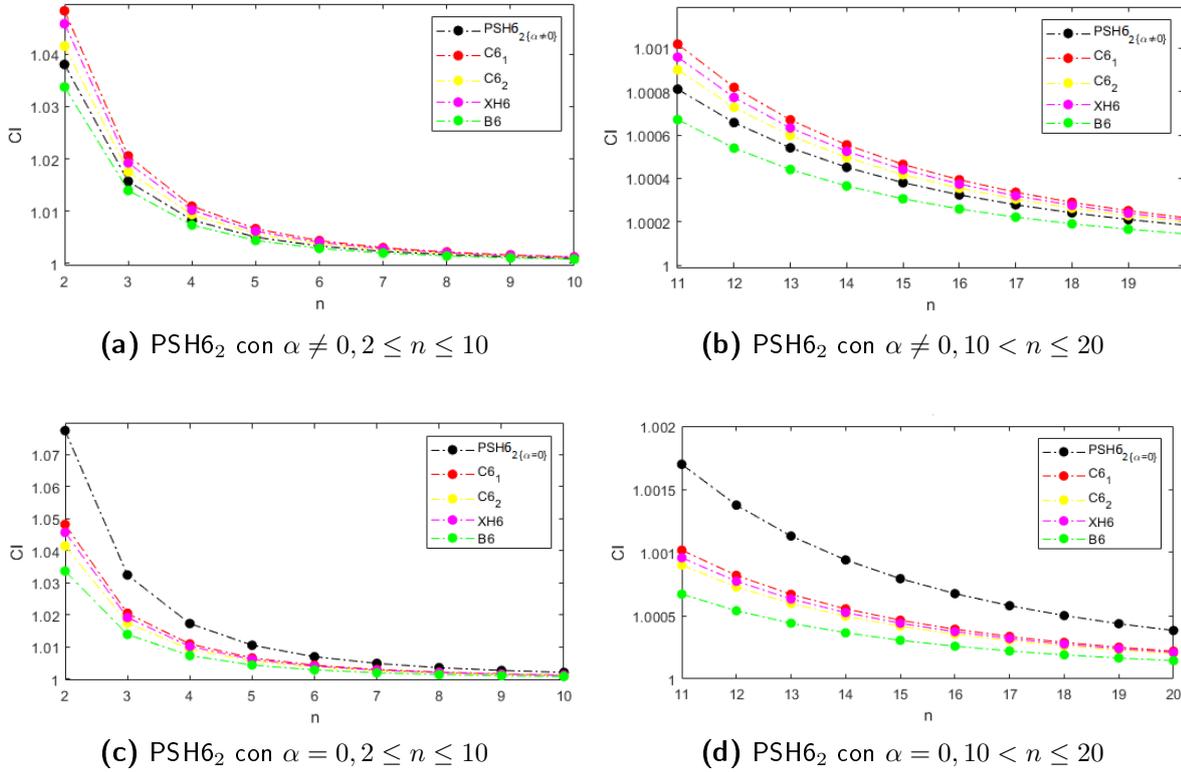


Figura 3.2: CI índices de PSH6₂ y métodos de comparación

Para cada función no lineal, se mostrará una tabla con los resultados de los experimentos numéricos. La información dada se organiza como sigue: k es el número de iteraciones necesarias para converger a la solución ('nc' aparece en la tabla si el método no converge), el valor de los residuos de parada es $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ o $\|F(x^{(k+1)})\|$ en el último paso ('-' aparece si no hay convergencia) y ρ es el orden de convergencia computacional aproximado (si el valor de ρ para las últimas iteraciones no es estable, entonces '-' aparece en la tabla). De este modo, se puede comprobar si la convergencia ha alcanzado la raíz (se logra $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$) o bien se trata de una convergencia muy lenta con una diferencia no significativa entre los dos últimos iterados ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ pero $\|F(x^{(k+1)})\| > 10^{-200}$), o se cumplen ambos criterios.

Los sistemas de prueba utilizados están definidos por las siguientes funciones no lineales:

Ejemplo 1. El primer sistema no lineal, cuya solución es $\xi = (0, 0)^T$, se describe como

$$F_1(x_1, x_2) = (\sin(x_1) + x_2 \sin(x_1), x_1 - x_2).$$

Nuestra prueba se realiza utilizando como estimación inicial $x^{(0)} = (0.8, 0.8)^T$ y los resultados aparecen en la Tabla 3.3.

En la Tabla 3.3, se puede observar que, excepto el método C6₂, todos los esquemas comparados convergen a la solución en cuatro iteraciones, con residuo $\|F(x^{(k+1)})\|$ nulo o casi nulo (para la precisión fija de la máquina en 2000 dígitos). Además, el orden de convergencia computacional es muy próximo en todos los casos al teórico.

Ejemplo 2. La siguiente función no lineal describe un sistema con solución $\xi \approx (2.4914, 0.2427, 1.6535)^T$,

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9, x_1 x_2 x_3 - 1, x_1 + x_2 - x_3^2).$$

Método	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	$ACOC$
PSH6 ₁ { $\alpha=0.0$ }	4	5.7517×10^{-60}	0.0	5.9906
PSH6 ₁ { $\alpha=5.5$ }	4	2.0238×10^{-64}	0.0	5.9962
PSH6 ₁ { $\alpha=10$ }	4	2.9651×10^{-78}	0.0	6.0264
PSH6 ₂ { $\alpha=0.0$ }	4	5.7517×10^{-60}	0.0	5.9906
PSH6 ₂ { $\alpha=5.5$ }	4	1.0081×10^{-46}	3.6422×10^{-275}	5.9701
PSH6 ₂ { $\alpha=10$ }	4	6.6149×10^{-43}	6.8963×10^{-252}	5.9523
C6 ₁	4	1.5912×10^{-73}	0.0	5.9973
C6 ₂	10	6.3065×10^{-72}	0.0	5.9975
XH6	4	8.6943×10^{-66}	0.0	5.9953
B6	4	5.0674×10^{-80}	0.0	6.0030

Tabla 3.3: Resultados numéricos de los métodos examinados para $F_1(x_1, x_2)$ y $x^{(0)} = (0.8, 0.8)^T$

Probamos todos los métodos nuevos y existentes con este sistema con la estimación inicial $x^{(0)} = (2.0, 0.5, 1.0)^T$ y los resultados se presentan en la Tabla 3.4.

Método	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	$ACOC$
PSH6 ₁ { $\alpha=0.0$ }	5	1.1553×10^{-91}	0.0	-
PSH6 ₁ { $\alpha=5.5$ }	5	1.3862×10^{-138}	0.0	-
PSH6 ₁ { $\alpha=10$ }	5	3.1738×10^{-101}	0.0	-
PSH6 ₂ { $\alpha=0.0$ }	5	1.1553×10^{-91}	0.0	-
PSH6 ₂ { $\alpha=5.5$ }	6	6.4700×10^{-85}	0.0	-
PSH6 ₂ { $\alpha=10$ }	6	2.7383×10^{-132}	0.0	-
C6 ₁	4	5.5171×10^{-38}	7.1730×10^{-225}	6.0424
C6 ₂	4	2.1522×10^{-93}	0.0	6.0006
XH6	4	6.1878×10^{-50}	5.5325×10^{-297}	5.9482
B6	4	5.1979×10^{-168}	0.0	6.0365

Tabla 3.4: Resultados numéricos de los métodos examinados para $F_2(x_1, x_2, x_3)$ y $x^{(0)} = (2.0, 0.5, 1.0)^T$

En este ejemplo, los métodos propuestos tardan al menos una iteración más en converger a la solución (ver Tabla 3.4). Sin embargo, la precisión de los resultados es igual o incluso mejor que la de los métodos conocidos, ya que $\|F(x^{(k+1)})\|$ es nula en todos los nuevos casos para la precisión fijada. El $ACOC$ calculado para los esquemas propuestos, muestra un comportamiento inestable y no puede mostrarse un valor fiable.

Ejemplo 3. Ahora, probamos los métodos con el sistema no lineal descrito por

$$F_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 + x_4(x_1 + x_2), x_1x_3 + x_4(x_1 + x_3), x_2x_3 + x_4(x_2 + x_3), x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 1),$$

utilizando como estimación inicial $x^{(0)} = (2.5, 2.5, 2.5, 2.5)^T$. La raíz buscada $\xi \approx (0.5774, 0.5774, 0.5774, -0.2887)^T$ y podemos encontrar los residuos, el número de iteraciones necesarias para converger y el orden de convergencia estimado en la Tabla 3.5.

Un rendimiento similar al del ejemplo anterior se puede observar en la Tabla 3.5 donde el criterio de parada efectivo es el que implica la evaluación de la función no lineal siendo el residuo nulo la mayoría de las veces y en todos los casos para los esquemas propuestos. Sin embargo, el número de iteraciones necesarias no mejora el proporcionado por la mayoría de los métodos conocidos. El $ACOC$ muestra un comportamiento similar en términos generales al teórico.

Método	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	$ACOC$
PSH6 ₁ { $\alpha=0.0$ }	5	1.7213×10^{-82}	0.0	5.8841
PSH6 ₁ { $\alpha=5.5$ }	5	6.2032×10^{-101}	0.0	6.0319
PSH6 ₁ { $\alpha=10$ }	5	5.9604×10^{-139}	0.0	7.0104
PSH6 ₂ { $\alpha=0.0$ }	5	1.7213×10^{-82}	0.0	5.8841
PSH6 ₂ { $\alpha=5.5$ }	5	2.4280×10^{-56}	0.0	5.4681
PSH6 ₂ { $\alpha=10$ }	5	2.2166×10^{-50}	0.0	5.2317
C6 ₁	4	2.8009×10^{-167}	0.0	6.1732
C6 ₂	4	6.0097×10^{-36}	9.3590×10^{-222}	6.7740
XH6	5	1.0184×10^{-173}	0.0	6.1665
B6	4	9.0970×10^{-198}	0.0	5.6982

Tabla 3.5: Resultados numéricos de los métodos examinados para $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $x^{(0)} = (2.5, 2.5, 2.5, 2.5)^T$

Ejemplo 4. Por último, probamos los métodos propuestos y existentes con un sistema no lineal de tamaño variable. Se describe como

$$x_i - \cos\left(2x_i - \sum_{j=1}^4 x_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

con $n = 20$ y partiendo de la estimación $x^{(0)} = (0.75, \dots, 0.75)^T$. En este caso, la solución es $\xi \approx (0.5149, \dots, 0.5149)^T$ y los resultados obtenidos se pueden encontrar en la Tabla 3.6.

Método	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	$ACOC$
PSH6 ₁ { $\alpha=0.0$ }	4	1.8871×10^{-184}	0.0	6.0
PSH6 ₁ { $\alpha=5.5$ }	4	1.1531×10^{-189}	0.0	6.0
PSH6 ₁ { $\alpha=10$ }	4	2.8662×10^{-195}	0.0	6.0
PSH6 ₂ { $\alpha=0.0$ }	4	1.8871×10^{-184}	0.0	6.0
PSH6 ₂ { $\alpha=5.5$ }	4	2.0650×10^{-171}	0.0	6.0
PSH6 ₂ { $\alpha=10$ }	4	4.6908×10^{-165}	0.0	6.0
C6 ₁	3	9.2604×10^{-39}	7.5226×10^{-233}	5.7540
C6 ₂	4	9.7326×10^{-195}	0.0	6.0
XH6	4	2.4997×10^{-191}	0.0	6.0
B6	6	5.7210×10^{-197}	0.0	6.0

Tabla 3.6: Resultados numéricos de los métodos propuestos para $F_5(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n = 20$, y $x^{(0)} = (0.75, \dots, 0.75)^T$

Cuando los sistemas son de gran tamaño como en este caso, donde $n = 20$, nuestros esquemas proporcionan excelentes resultados igualando o mejorando el rendimiento de los procedimientos existentes, véase la Tabla 3.6. El número de iteraciones necesarias para satisfacer uno de los criterios de parada y los residuos obtenidos muestran un rendimiento muy competitivo. Además, el orden de convergencia teórico se estima con total precisión.

3.5 Conclusiones

En este Capítulo hemos propuesto una clase eficiente de esquemas iterativos con dos subfamilias específicas que muestran muy buen rendimiento. Hemos comparado esta clase con otros métodos existentes del mismo orden con

buenos resultados. La elección de los parámetros para las diferentes subfamilias propuestas no persigue un objetivo específico, aunque la dependencia de la convergencia de la selección del parámetro α se estudiará en el siguiente capítulo. Siendo similares, los experimentos numéricos muestran un comportamiento ligeramente mejor de PS6H₁ con respecto a PS6H₂, en comparación con los otros métodos iterativos mostrados.

Capítulo 4

Análisis dinámico real de la clase basada en funciones peso

Capítulo basado en:

[20] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. *Isonormal surface: A new tool for the multi-dimensional dynamical analysis of iterative methods for solving nonlinear systems. Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2019; 7(12):1221, doi:10.1002/mma.7695.

[21] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2021) *Stability Analysis of Iterative Methods for Solving Nonlinear Algebraic Systems. Current Topics on Mathematics and Computer Science Vol.9,* 6-24. <https://doi.org/10.9734/bpi/ctmcs/v9/11959D>.

4.1 Introducción

En el capítulo anterior fue demostrado el orden de convergencia seis de la clase $PSH6$ (3.5) en el Teorema 13 y seleccionamos una función peso particular $H(t) = I + 2t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro libre. Esta función satisface la hipótesis del teorema y la familia resultante, llamada $PSH6_1$, dependiente de un parámetro era

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \left[I + 2t^{(k)} + \frac{1}{2}\alpha t^{(k)2} \right] [F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left[I + 2t^{(k)} + \frac{1}{2}\alpha t^{(k)2} \right] [F'(x^{(k)})]^{-1}F(z^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

También vimos que en la familia $PSH6_1$, el método obtenido con $\alpha = 0$ era el más eficiente computacionalmente, aunque en la práctica, otros valores del parámetro proporcionaban incluso mejores resultados en términos de precisión o estimación numérica del orden de convergencia con el mismo número de iteraciones. Este hecho nos lleva a profundizar en el análisis de la estabilidad de los esquemas pertenecientes a esa familia, con el objetivo de establecer cuáles son los valores de α que pueden proporcionar mejores resultados y métodos más estables.

En el proceso de estudio definiremos una nueva herramienta que ha demostrado ser muy útil para lograr este objetivo: la superficie isonormal. Con esta herramienta que introduciremos más adelante, encontramos las regiones del plano que tienen el mismo comportamiento cualitativo (conjunto de estimaciones iniciales que convergen a órbitas periódicas del mismo periodo, regiones de comportamiento caótico, órbitas densas, etc.) que se identifican con diferentes colores para cualquier valor de α seleccionado de los diagramas de bifurcación.

4.2 Análisis de estabilidad de la familia iterativa $PSH6_1$ actuando sobre la función polinómica vectorial de variables separadas $p(x)$

En esta sección analizamos el comportamiento de la función racional vectorial resultante de aplicar la familia iterativa $PSH6_1$ sobre la función polinómica $p(x) = (x_1^2 - 1, x_2^2 - 1)$ siendo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Para seleccionar los miembros más estables de esta clase de algoritmos iterativos, estudiaremos la existencia de puntos fijos distintos de las raíces que busquemos con carácter atractor u otros elementos atractores que puedan considerarse patológicos.

Aplicando la expresión iterativa de $PSH6_1$ (4.1), sobre el sistema polinómico $p(x) = 0$ obtenemos su operador racional multidimensional asociado $U(x, \alpha) = \{u_1(x, \alpha), u_2(x, \alpha)\}$, cuya coordenada j -ésima es

$$\begin{aligned} u_j(x, \alpha) &= \frac{1}{256x_j^7} \left(\alpha (-1 + x_j^2)^4 - 16 (x_j^2 - 5x_j^4 + 15x_j^6 + 5x_j^8) + 4x_j^2 (\alpha(-1 + x_j^2) + 16x_j^2(-1 + 3x_j^2)) \right. \\ &\quad \left. \left(-1 + \left(1/65536x_j^{14} \right) \left(\alpha(-1 + x_j^2)^4 - 16(x_j^2 - 5x_j^4 + 15x_j^6 + 5x_j^8) \right)^2 \right) \right), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir de la última expresión, es posible formular el siguiente resultado sobre la estabilidad de los puntos fijos relacionados con la familia iterativa (4.1):

Teorema 14. *La función racional $U(x, \alpha)$ asociada a la familia de métodos iterativos $PSH6_1$ tiene, como puntos fijos superatractivos, $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ que son las raíces del sistema polinómico $p(x)$. Además, denotemos por \mathcal{B} el conjunto de todos los puntos fijos extraños de $U(x, \alpha)$. Así, está compuesto por pares (l_i, l_j) para $i, j \leq 18$, cuyas entradas son las raíces reales del polinomio*

$$\begin{aligned}
 l(t, \alpha) = & -\alpha^3 + (\alpha^3 - 112\alpha^2 + 15104\alpha + 3190784)t^{18} + (9\alpha^3 + 32\alpha^2 + 80128\alpha - 2146304)t^{16} \\
 & + 4(9\alpha^3 + 520\alpha^2 + 43712\alpha + 437248)t^{14} + 4(21\alpha^3 + 1512\alpha^2 + 50240\alpha - 237568)t^{12} \\
 & + 2(63\alpha^3 + 4000\alpha^2 + 64640\alpha + 149504)t^{10} + 2(63\alpha^3 + 2864\alpha^2 + 22912\alpha - 24576)t^8 \\
 & + 4(21\alpha^3 + 568\alpha^2 + 2112\alpha + 1024)t^6 + 12\alpha(3\alpha^2 + 40\alpha - 64)t^4 + 3\alpha^2(3\alpha + 16)t^2,
 \end{aligned}$$

y también \mathcal{B} está compuesto por $(\pm 1, l_j)$ y $(l_i, \pm 1)$. Por lo tanto, el número de puntos fijos reales incluidos en \mathcal{B} depende de α :

- i) No hay ningún punto fijo extraño real para $\alpha \in (n^*, 0)$; sin embargo, si $\alpha \in (-\infty, n^*) \cup (0, m^*)$ la cantidad total de puntos fijos extraños es 12, siendo $n^* \approx -93.210875$ y $m^* \approx 327.44373142$ las únicas raíces reales del polinomio $n(t) = t^3 - 112t^2 + 3190784 + 15104t$ y $m(t) = 100000t^9 - 33232500t^8 + 162157876t^7 - 769658421t^6 + 2887352848t^5 - 7815029120t^4 + 14060488832t^3 - 17146950656t^2 + 12837074944t - 5333716992$, respectivamente. Cuatro de ellos son repulsores, mientras que los ocho elementos restantes son puntos de silla.
- ii) Si $\alpha \in (m^*, +\infty)$, \mathcal{B} está compuesto por sesenta puntos fijos extraños, cuyo carácter depende del valor de α . Por lo tanto, se pueden encontrar dos situaciones diferentes en cuanto a su estabilidad:
 - a) Cuando $\alpha \in (m^*, \alpha^*)$, siendo $\alpha^* \approx 369,971117$, entonces \mathcal{B} está compuesto por doce puntos fijos extraños atractores, dieciséis repulsores y treinta y dos tipo silla.
 - b) Finalmente, si $\alpha \in (\alpha^*, +\infty)$ entonces \mathcal{B} está compuesto por veinte puntos fijos extraños repulsores y cuarenta puntos tipo silla.

Demostración. Observemos que, debido a que el sistema polinómico tiene variables separadas, las coordenadas de $U(x, \alpha)$ tienen la misma expresión con excepción de los subíndices. Así, siendo un punto fijo la solución de la ecuación $u_j(x, \alpha) = x_j$, $j = 1, 2$, obtenemos una forma equivalente

$$\begin{aligned}
 (x_j^2 - 1) & (-\alpha^3 + (\alpha^3 - 112\alpha^2 + 15104\alpha + 3190784)x_j^{18} + (9\alpha^3 + 32\alpha^2 + 80128\alpha - 2146304)x_j^{16} \\
 & + 4(9\alpha^3 + 520\alpha^2 + 43712\alpha + 437248)x_j^{14} + 4(21\alpha^3 + 1512\alpha^2 + 50240\alpha - 237568)x_j^{12} \\
 & + 2(63\alpha^3 + 4000\alpha^2 + 64640\alpha + 149504)x_j^{10} + 2(63\alpha^3 + 2864\alpha^2 + 22912\alpha - 24576)x_j^8 \\
 & + 4(21\alpha^3 + 568\alpha^2 + 2112\alpha + 1024)x_j^6 + 12\alpha(3\alpha^2 + 40\alpha - 64)x_j^4 + 3\alpha^2(3\alpha + 16)x_j^2) = 0,
 \end{aligned}$$

$j = 1, 2.$
(4.3)

Entonces, afirmamos que los valores $x_j = \pm 1$ satisfacen esta expresión, y $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ son puntos fijos del operador racional $U(x, \alpha)$ y las raíces de $p(x)$, simultáneamente. Para analizar su estabilidad, calculamos la matriz Jacobiana $U'(x, \alpha)$ al operador racional multidimensional, con forma diagonal

$$U'(x, \alpha) = \begin{pmatrix} J_1(x_1, \alpha) & 0 \\ 0 & J_2(x_2, \alpha) \end{pmatrix},$$

siendo

$$J_j(x_j, \alpha) = -\frac{(x_j - 1)^5(x_j + 1)^5}{4194304 x_j^{20}} r(x_j), \quad j = 1, 2, \tag{4.4}$$

y

$$r(t) = (-1003520 + 15104\alpha - 112\alpha^2 + \alpha^3)t^{10} + (319488 + 170752\alpha - 640\alpha^2 + 15\alpha^3)t^8 + (-53248 - 62208\alpha - 8416\alpha^2 - 70\alpha^3)t^6 + (11520\alpha + 3840\alpha^2 + 110\alpha^3)t^4 + (-816\alpha^2 - 75\alpha^3)t^2 + 19\alpha^3. \quad (4.5)$$

Es evidente que $J_j(\pm 1, \alpha) = 0$ para cualquier α y $j = 1, 2$. Por lo tanto, las raíces de $p(x)$ son puntos fijos superatractivos ya que los valores propios de $U'((\pm 1, \pm 1), \alpha)$ son cero.

El resto de puntos fijos se pueden encontrar a través de $l(t, \alpha)$ mediante el cambio de variable $s = t^2$.

$$L(s) = (\alpha^3 - 112\alpha^2 + 15104\alpha + 3190784)s^9 + (9\alpha^3 + 32\alpha^2 + 80128\alpha - 2146304)s^8 + 4(9\alpha^3 + 520\alpha^2 + 43712\alpha + 437248)s^7 + 4(21\alpha^3 + 1512\alpha^2 + 50240\alpha - 237568)s^6 + 2(63\alpha^3 + 4000\alpha^2 + 64640\alpha + 149504)s^5 + 2(63\alpha^3 + 2864\alpha^2 + 22912\alpha - 24576)s^4 + 4(21\alpha^3 + 568\alpha^2 + 2112\alpha + 1024)s^3 + 12\alpha(3\alpha^2 + 40\alpha - 64)s^2 + 3\alpha^2(3\alpha + 16)s - \alpha^3.$$

Los puntos fijos extraños reales de $U(x, \alpha)$ deben tener componentes, que se definen como $\pm\sqrt{L_i}$, siendo L_i cualquier raíz real y positiva de $L(s)$. Entonces, el número de elementos de \mathcal{B} depende del número de raíces de $L(s)$ que deben ser simultáneamente reales y positivas, así como de sus combinaciones con ± 1 . Se puede comprobar que no hay ninguna raíz real positiva de $L(s)$ para $\alpha \in (n^*, 0)$. Entonces:

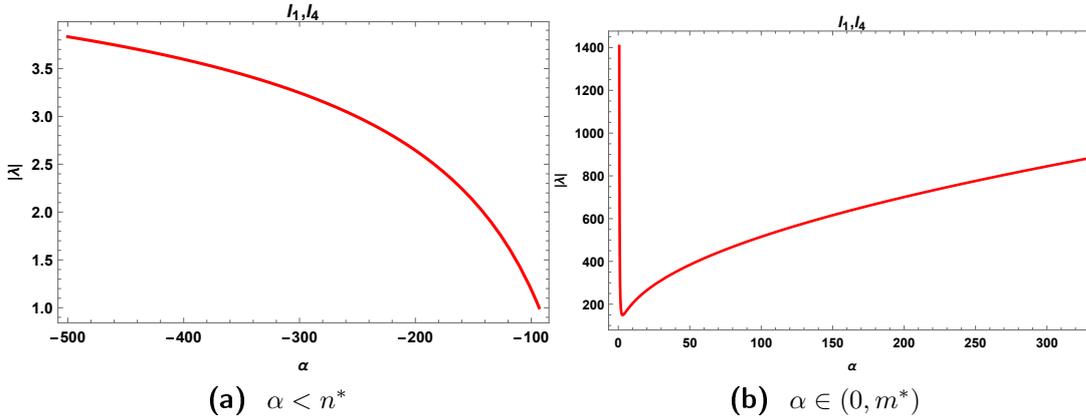


Figura 4.1: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_1, l_4), \alpha)|$ in D

- i) Sólo una raíz real positiva L_1 se encuentra si $\alpha \in (-\infty, n^*) \cup (0, m^*)$. En este caso, las raíces $\{+\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_1}\}$ se denotan por l_i , para $i \in \{1, 4\}$, y los miembros de \mathcal{B} son $\{(l_1, l_1), (l_1, l_4), (l_4, l_1), (l_4, l_4), (l_1, \pm 1), (\pm 1, l_1), (l_4, \pm 1), (\pm 1, l_4)\}$. La información sobre la estabilidad de estos puntos fijos de $U(x, \alpha)$ puede deducirse del análisis del valor absoluto de los valores propios de la matriz $U'((l_i, l_k), \alpha)$, $i, k \in \{1, 4\}$; estas funciones de α se llaman funciones de estabilidad de los respectivos puntos fijos. Debido a la naturaleza del sistema polinómico, los valores propios satisfacen la condición $\lambda((l_i, l_k), \alpha) = J_1((l_i, l_k), \alpha) = J_2((l_i, l_k), \alpha)$ para $i, k \in \{1, 4\}$; sin embargo, si alguna de las componentes del punto fijo es ± 1 , el valor propio correspondiente es siempre nulo.

Podemos ver en la Figura 4.1 los valores de $|\lambda|$ asociados a la matriz jacobiana y evaluados en los pares compuestos por l_1 y l_4 . Observemos que son mayores que uno, por lo que el comportamiento de los puntos fijos extraños (l_i, l_k) , $i, k \in \{1, 4\}$ en D es repulsor. Por otra parte, los puntos fijos $(l_i, \pm 1), (\pm 1, l_i)$, $i \in \{1, 4\}$ son puntos de silla de montar ya que uno de los valores propios es cero y el otro es mayor que uno.

- ii) Existen tres raíces reales positivas L_1, L_2 y L_3 para $\alpha \in (m^*, +\infty)$, siendo $n^* \approx -93.210875$ la única raíz real del polinomio $n(t) = t^3 - 112t^2 + 3190784 + 15104t$ y $m^* \approx 327.44373142$ la única raíz real de $m(t) =$

$100000t^9 - 33232500t^8 + 162157876t^7 - 769658421t^6 + 2887352848t^5 - 7815029120t^4 + 14060488832t^3 - 17146950656t^2 + 12837074944t - 5333716992$. Las raíces $\{+\sqrt{L_1}, +\sqrt{L_2}, +\sqrt{L_3}, -\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_2}, -\sqrt{L_3}\}$ se denotan por l_i para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Así, el conjunto de todos los puntos fijos extraños se obtiene combinando por pares l_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ con ellos mismos y con 1 y -1 .

En este caso, existen valores de α que permiten que algunos de los puntos fijos extraños sean atractores. Para calcularlos, resolvemos la ecuación $|\lambda_j((l_i, l_k), (\alpha))| = 1$, para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $j = 1, 2$. Encontramos que sólo los puntos fijos extraños (l_i, l_k) con $i, k \in \{3, 6\}$ satisfacen esta ecuación para $\alpha = m^*$ y $\alpha = \alpha^* \approx 369.97117$.

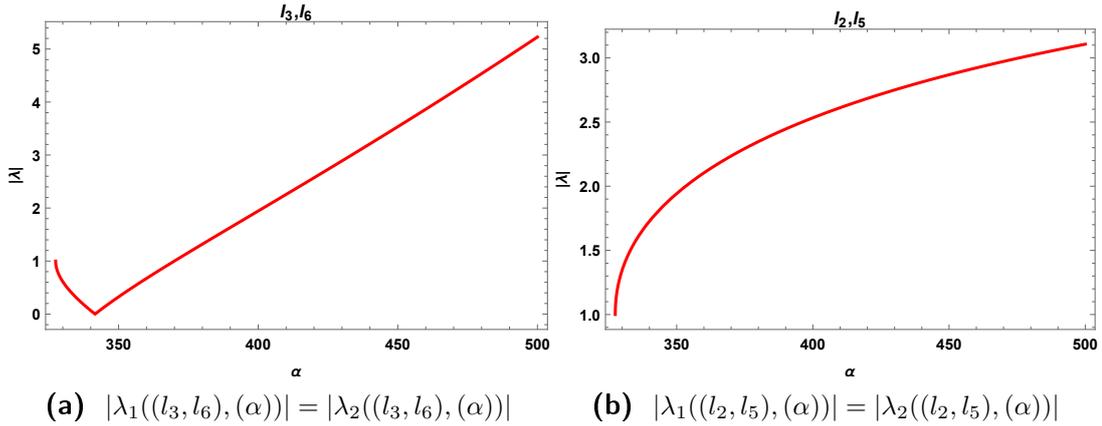


Figura 4.2: Diagramas de estabilidad de algunos puntos fijos extraños para $\alpha > m^*$

- a) Por lo tanto, los puntos fijos extraños no son hiperbólicos para estos valores de α y son atractores para $\alpha \in (m^*, \alpha^*)$, como se puede ver en la Figura 4.2(a). Además, la estabilidad de los puntos fijos extraños $(l_i, \pm 1)$ o $(\pm 1, l_k)$, para $i, k \in \{3, 6\}$ y $\alpha \in (m^*, \alpha^*)$, la obtenemos a partir de una matriz Jacobiana cuyos valores propios toman valores $|\lambda_1((l_i, \pm 1), (\alpha))| < 1$ y $|\lambda_2((l_i, \pm 1), (\alpha))| = 0$ (respectivamente $|\lambda_1(\pm 1, (l_k), (\alpha))| = 0$ y $|\lambda_2(\pm 1, (l_k), (\alpha))| < 1$) si $\alpha \in (m^*, \alpha^*)$, por lo que son atractores, o si $\alpha \in (\alpha^*, +\infty)$ entonces $|\lambda_1((l_i, \pm 1), (\alpha))| > 1$ y $|\lambda_2((l_i, \pm 1), (\alpha))| = 0$ (respectivamente $|\lambda_1(\pm 1, (l_k), (\alpha))| = 0$ y $|\lambda_2(\pm 1, (l_k), (\alpha))| > 1$) y estas componentes de \mathcal{B} son puntos tipo silla.
- b) Para $\alpha \in (\alpha^*, \infty)$ todos los treinta y seis pares (l_i, l_j) son puntos fijos repulsivos, ya que los valores absolutos de $|\lambda_j((l_i, l_k), (\alpha))| > 1$, para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $j = 1, 2$. La estabilidad de uno de estos puntos fijos puede deducirse de la Figura 4.2(b).

□

Ahora, la estabilidad de los puntos fijos extraños está determinada y conocemos el rango de valores de α que se puede utilizar para evitar el carácter atractor de puntos extraños. Sin embargo, hay otros elementos de atracción que deben evitarse para asegurar un rendimiento estable de los métodos iterativos. Como sabemos que en cada cuenca de atracción aparece al menos un punto crítico, analizamos en el siguiente enunciado la existencia de puntos críticos distintos de las raíces de $p(x) = 0$ (llamados puntos críticos libres), en función del valor del parámetro.

Teorema 15. Sea \mathcal{K} la colección de todos los puntos críticos reales libres del operador racional $U(x, \alpha)$ asociado a la familia iterativa 4.1. Entonces \mathcal{K} está compuesto por los pares (c_i, c_j) , $(c_i, \pm 1)$ y $(\pm 1, c_j)$ para $i, j \leq 10$ cuyas entradas distintas de ± 1 son las raíces reales del polinomio $r(t)$ descrito en (4.5). La cantidad de puntos críticos libres depende del valor del parámetro α , ya que las raíces deben ser reales. Por lo tanto, la composición del conjunto \mathcal{K} es la siguiente:

i) Si $\alpha \in (0, t^*)$ siendo $t^* \approx 1,578466$ la raíz real del polinomio

$$\begin{aligned} U(t) &= 10800000t^{11} - 616915125t^{10} + 147378915264t^9 - 3379785435264t^8 + 34227036501760t^7 \\ &= -179620639700992t^6 + 585624788819968t^5 - 1272823478222848t^4 + 1886960251568128t^3 \\ &= -1870420340899840t^2 + 1144029500669952t - 339697553375232, \end{aligned}$$

entonces \mathcal{K} tiene doce puntos críticos libres.

ii) Para $\alpha \in (t^*, 80)$, \mathcal{K} contiene sesenta puntos críticos libres.

iii) Si $\alpha \in (80, +\infty)$, entonces \mathcal{K} está compuesto por treinta y dos puntos críticos libres.

Demostración. Como se ha dicho en la demostración del Teorema 14, los valores propios de la matriz jacobiana $U'(x, \alpha)$ son $\lambda_j(x, \alpha) = J_j(x, \alpha)$, para $j \in \{1, 2\}$, es decir,

$$\lambda_j(x, \alpha) = -\frac{(x_j - 1)^5(x_j + 1)^5}{4194304 x_j^{20}} r(x_j), \quad j = 1, 2, \quad (4.6)$$

siendo

$$\begin{aligned} r(t) &= (-1003520 + 15104\alpha - 112\alpha^2 + \alpha^3)t^{10} + (319488 + 170752\alpha - 640\alpha^2 + 15\alpha^3)t^8 \\ &\quad + (-53248 - 62208\alpha - 8416\alpha^2 - 70\alpha^3)t^6 + (11520\alpha + 3840\alpha^2 + 110\alpha^3)t^4 + (-816\alpha^2 - 75\alpha^3)t^2 + 19\alpha^3. \end{aligned}$$

Por definición, los puntos críticos se encuentran resolviendo la ecuación $\lambda_j(x, \alpha) = 0$, para $j \in \{1, 2\}$. Es evidente que el cambio $t^2 = s$ reduce a la mitad el grado del polinomio $r(t)$. Por lo tanto, sus raíces reales positivas, denotadas por C_j , derivarán las componentes de los puntos críticos libres, obtenidos como $c_k = \pm\sqrt{C_j}$. De nuevo, la cantidad de C_j positivas depende del valor del parámetro α :

- i) Forzando a las raíces de $r(t)$ que sean reales, no se encuentra ningún resultado para valores negativos de α . Por otra parte, existen tres raíces reales para $\alpha \in (0, t^*)$, siendo $t^* \approx 1.578466$ la única raíz real del polinomio $U(t)$, pero sólo una de ellas, C_1 , es positiva. Entonces, \mathcal{K} está compuesto por $(c_1, c_1), (c_1, c_4), (c_4, c_1)$ y (c_4, c_4) , donde $c_{1,4} = \pm\sqrt{C_1}$ y también por $(c_j, \pm 1)$ y $(\pm 1, c_j)$, $j \in \{1, 4\}$.
- ii) Si $\alpha \in (t^*, 80)$, sólo existen tres raíces reales positivas del polinomio $r(t)$, C_1 , C_2 y C_3 . Así pues, \mathcal{K} está compuesto por elementos del tipo (c_i, c_j) , donde $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$, siendo $c_{1,4} = \pm\sqrt{C_1}$, $c_{2,5} = \pm\sqrt{C_2}$ y $c_{3,6} = \pm\sqrt{C_3}$. Además, los puntos mixtos $(\pm 1, c_j)$ y $(c_i, \pm 1)$ donde $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ también pertenecen a \mathcal{K} .
- iii) Finalmente, para $\alpha \in (80, +\infty)$, C_1 y C_2 son las dos únicas raíces reales positivas de $r(t)$. Entonces, $\mathcal{K} = \{(c_i, c_j), (c_i, \pm 1), (\pm 1, c_j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$, con 32 puntos críticos diferentes.

□

A partir de los Teoremas 14 y 15 afirmamos que para $\alpha \in [n^*, 0]$ (siendo $n^* \approx -93.210875$) no existen ni puntos críticos libres ni puntos fijos extraños. Por tanto, sólo se pueden encontrar comportamientos dinámicos estables para valores del parámetro en este intervalo, es decir, para métodos iterativos de la familia $PSH6_1$ con valores de $\alpha \in [n^*, 0]$.

En la Figura 4.3 se pueden observar algunos planos dinámicos para valores de α dentro de este intervalo. Estas imágenes se han obtenido siguiendo las rutinas descritas en [23]: se ha construido una malla con paso igual a 0.01, cada estimación inicial se itera 100 veces con una estimación del error inferior a 10^{-3} como criterio de parada. Los puntos de la malla que se utilizan como estimaciones iniciales se pintan en función de las raíces (representadas con círculos) a las que convergen. Su color es más brillante cuanto menor es el número de iteraciones necesarias. Si se completan todas las iteraciones y no se alcanza la convergencia a ninguna raíz, el punto se pinta en negro. Podemos

ver en la Figura 4.3 las cuencas de atracción de todas las raíces y cómo las zonas negras de no convergencia son más estrechas a medida que aumenta el valor de α .

Todos los planos dinámicos a lo largo de esta tesis se han construido con las mismas características.

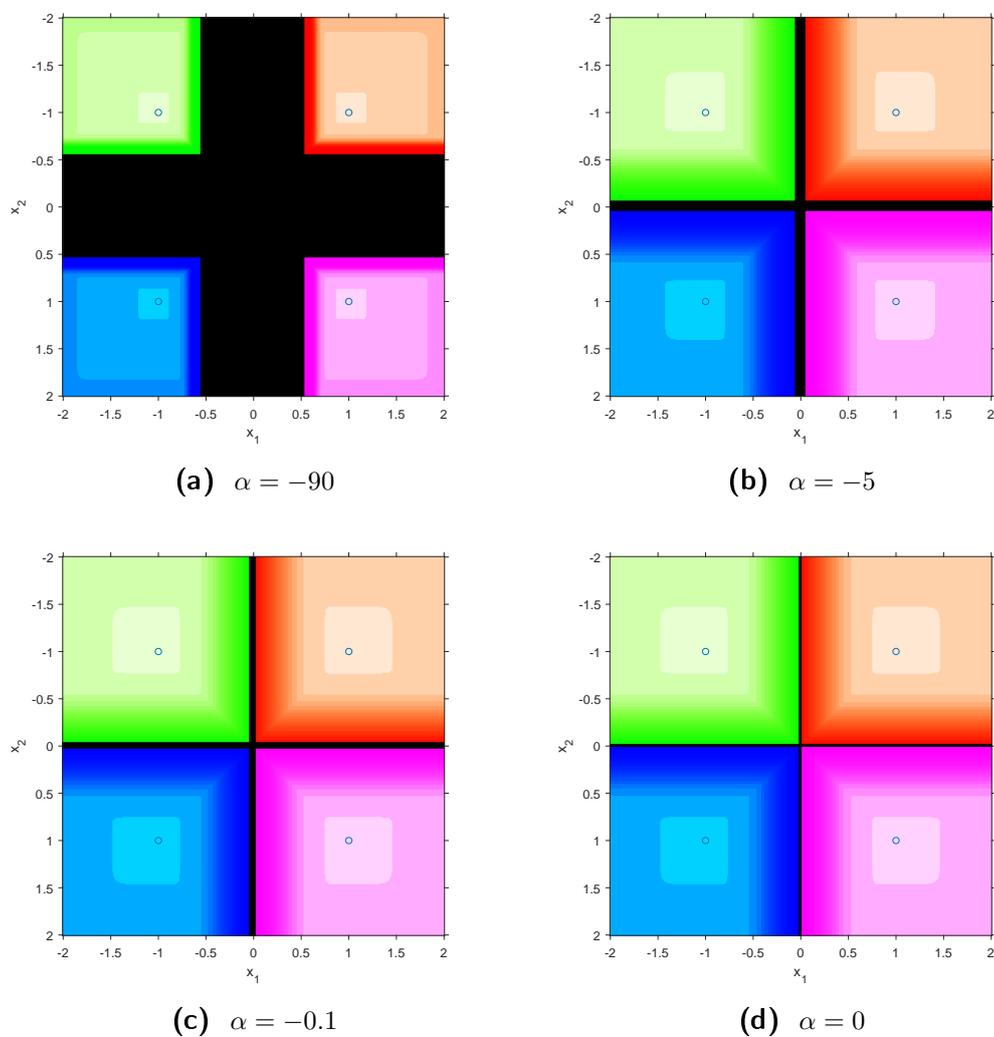


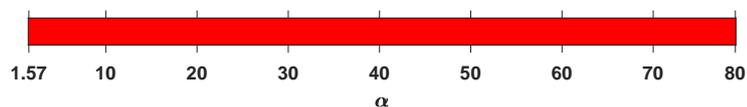
Figura 4.3: Planos dinámicos estables para $\alpha \in [n^*, 0]$

4.2.1 Encontrar el caos: nuevas y conocidas herramientas

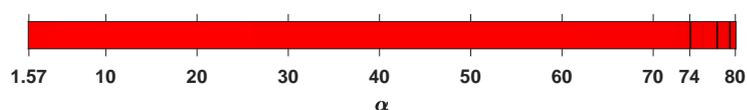
Una vez detectada la zona más estable, nuestro objetivo es encontrar las zonas de convergencia a elementos atractores diferentes de las raíces del sistema no lineal, o incluso el caos. Para conseguir este objetivo, tenemos en cuenta los resultados de los Teoremas 14 y 15 en los cuales se plasma que para $\alpha \in (t^*, 80)$ y $\alpha \in (80, +\infty)$, se han encontrado una gran cantidad de puntos fijos y críticos libres. El análisis del comportamiento de la función racional en esta zona arrojaría un rico comportamiento dinámico.

Debido a la existencia de puntos críticos en la cuenca inmediata de atracción de cualquier punto fijo o periódico atractor (ver [50]), el análisis del comportamiento asintótico de los puntos críticos libres nos da información relevante sobre el rendimiento del operador racional y la clase de métodos iterativos relacionados. Para estudiar las órbitas de los puntos

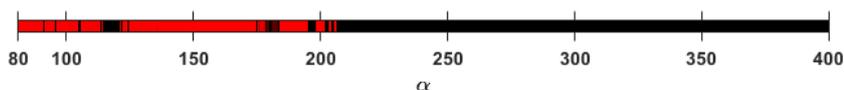
críticos utilizamos la línea de parámetros, introducida por primera vez en [62]. Para trazarla, definimos una malla de 500×500 puntos en un determinado dominio del parámetro α . Un punto de la malla se pinta de color rojo si el punto crítico, evaluado en este valor de α y utilizado como estimación inicial, converge a alguna de las raíces del sistema polinómico antes de un máximo de 200 iteraciones; en otro caso, se pinta de color negro. La línea donde se representan cada uno de estos puntos rojos o negros se ensancha mediante una multiplicación por el intervalo unitario $[0, 1]$. La tolerancia para la estimación del error es igual a 10^{-3} .



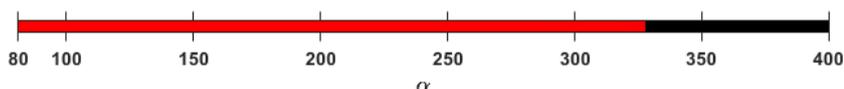
(a) (c_i, c_j) , $i, j \in \{1, 2, 4, 5\}$ para $\alpha \in (t^*, 80)$



(b) (c_i, c_j) , $i, j \in \{3, 6\}$ para $\alpha \in (t^*, 80)$



(c) (c_i, c_j) , $i, j \in \{1, 3\}$ para $\alpha \in (80, +\infty)$



(d) (c_i, c_j) , $i, j \in \{2, 4\}$ para $\alpha \in (80, +\infty)$

Figura 4.4: Líneas de parámetros de diferentes puntos críticos libres para $\alpha \in (t^*, 80)$ y $\alpha \in (80, +\infty)$

Las Figuras 4.4(a) y 4.4(b) muestran el comportamiento límite de los puntos críticos libres correspondientes a $\alpha \in (t^*, 80)$ (siendo $t^* \approx 1,578466$). En la Figura 4.4(a) se observa un comportamiento deseable, los puntos críticos libres (c_i, c_j) con $i, j \in \{1, 2, 4, 5\}$ convergen a cualquiera de las raíces del sistema polinómico; mientras tanto, en la Figura 4.4(b), se detecta un comportamiento inestable para (c_i, c_j) con $i, j \in \{3, 6\}$ en torno a los valores $\alpha \approx 74$, $\alpha \approx 77$ y $\alpha \approx 79$ en la línea de parámetros. Hacemos una primera aproximación al análisis del comportamiento inestable en estas tres zonas oscuras a través de los diagramas de Feigenbaum. Estos diagramas de bifurcación se obtienen utilizando cada uno de los puntos críticos libres del operador racional como punto de partida en una malla de 3000 subintervalos para $\alpha \in (t^*, 80)$ y observando su comportamiento en las últimas 100 de un total de 1000 iteraciones. El diagrama de bifurcación del punto crítico (c_3, c_6) se muestra en la Figura 4.5.

Debido a la naturaleza del sistema polinómico $p(x)$ que tiene variables separadas, las funciones coordenadas del operador racional tienen la misma forma y son simétricas. Aprovechando esta característica, hemos representado en color rojo la coordenada x_1 y en color azul la x_2 y para los detalles, hemos elegido la parte positiva en todos los casos, Figura (4.5).

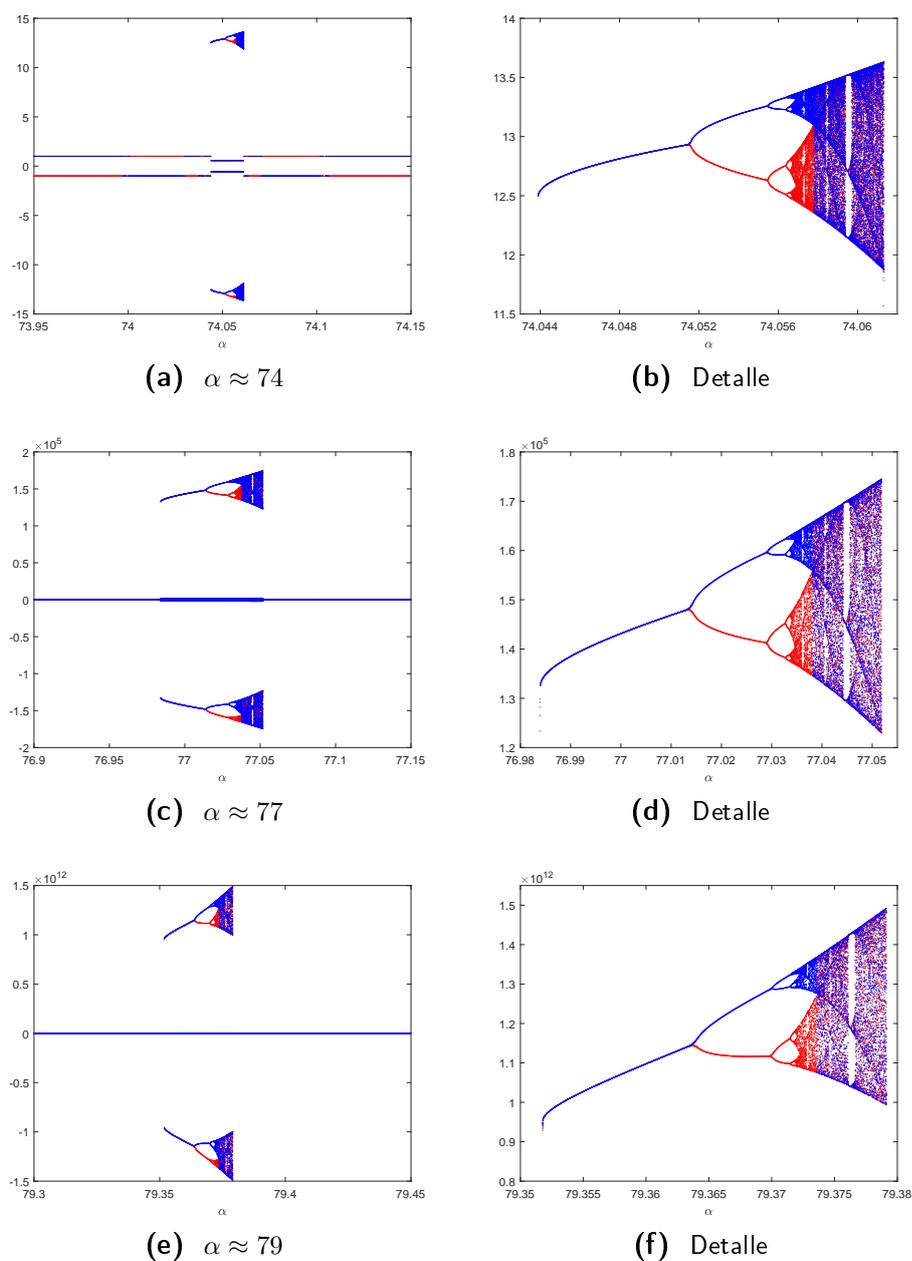


Figura 4.5: Diagramas de bifurcación del punto crítico (c_3, c_6) correspondientes a la línea de parámetros de la Figura 4.4(b)

En la Figura 4.5(a), observamos la convergencia a las raíces de $p(x)$ alejadas de $\alpha \approx 74.05$ donde radica el comportamiento inestable. En las Figuras 4.5(c) y 4.5(e) aparecen comportamientos análogos al descrito anteriormente para diferentes escalas. Por otro lado, en los detalles dados por las Figuras 4.5(b), 4.5(d) y 4.5(f), se observa el mismo patrón de bifurcaciones como: cascadas de desdoblamiento de periodos, órbitas periódicas y comportamiento caótico en torno a $\alpha \approx 74.05$, $\alpha \approx 77.01$ y $\alpha \approx 79.36$ respectivamente, ubíquense estos valores últimos en la Figura 4.4(b)

Por otro lado, en las Figuras 4.4(c) y 4.4(d), se muestran las líneas de parámetros correspondientes al rendimiento límite de los puntos críticos libres con componentes diferentes de ± 1 , para $\alpha \in (80, +\infty)$. Aunque se han representado para los pares (c_1, c_3) (Figura 4.4(c)) y (c_2, c_4) (Figura 4.4(d)), los pares restantes tienen el mismo comportamiento.

Observemos en la Figura 4.4(d) que para un intervalo amplio alrededor de $\alpha = 150$, sólo se encuentra un comportamiento estable y para $\alpha > m^*$, (siendo $m^* \approx 327.44373142$) no hay posibilidad de convergencia a las raíces de $p(x)$, ya que todos los puntos críticos libres muestran color negro en la línea de parámetros. Para profundizar en estos rendimientos inestables, proponemos una nueva herramienta, basada en la norma de la función no lineal en la órbita de cualquier estimación inicial, para un valor fijo de α .

La nueva herramienta: Superficies isonormales

En la Figura 4.6, aparecen los planos dinámicos relacionados con las zonas sombreadas que se encuentran en las líneas de parámetros (ver Figura 4.4(b)), donde los puntos críticos muestran el comportamiento inestable para $\alpha \in (t^*, 80)$.

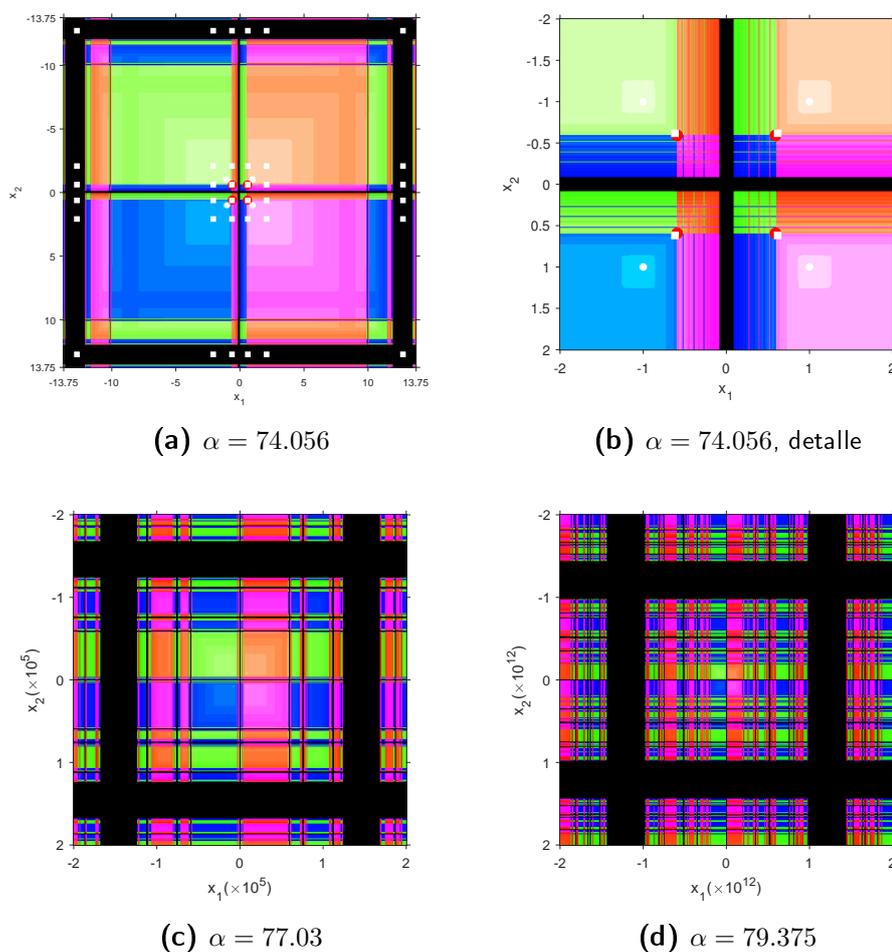


Figura 4.6: Planos dinámicos para algunos $\alpha \in (t^*, 80)$

En la Figura 4.6(a), los cuadrados blancos representan los puntos críticos libres. Algunos de ellos están situados en la zona negra donde se produce el comportamiento inestable y el resto se encuentran en la cuenca de atracción de las raíces de $p(x)$. En la Figura 4.6(b), se puede observar un número infinito de componentes conectados de las cuencas de atracción de las raíces y también la proximidad entre cuatro críticos y cuatro repulsores (círculos rojos) que se encuentran en el conjunto de Julia, con coordenadas $\{(-0.618, -0.618), (-0.618, 0.618), (0.618, -0.618), (0.618, 0.618)\}$ y $\{(-0.592, -0.592), (-0.592, 0.592), (0.592, -0.592), (-0.592, 0.592)\}$, respectivamente. Observamos la similitud entre los planos dinámicos para $\alpha = 77.03$ y $\alpha = 79.375$ que se muestran en las Figuras 4.6(b) y 4.6(c). Destaquemos la gran escala involucrada, esta es la razón por la que los valores límite de los puntos críticos y las raíces de $p(x)$ no son visibles.

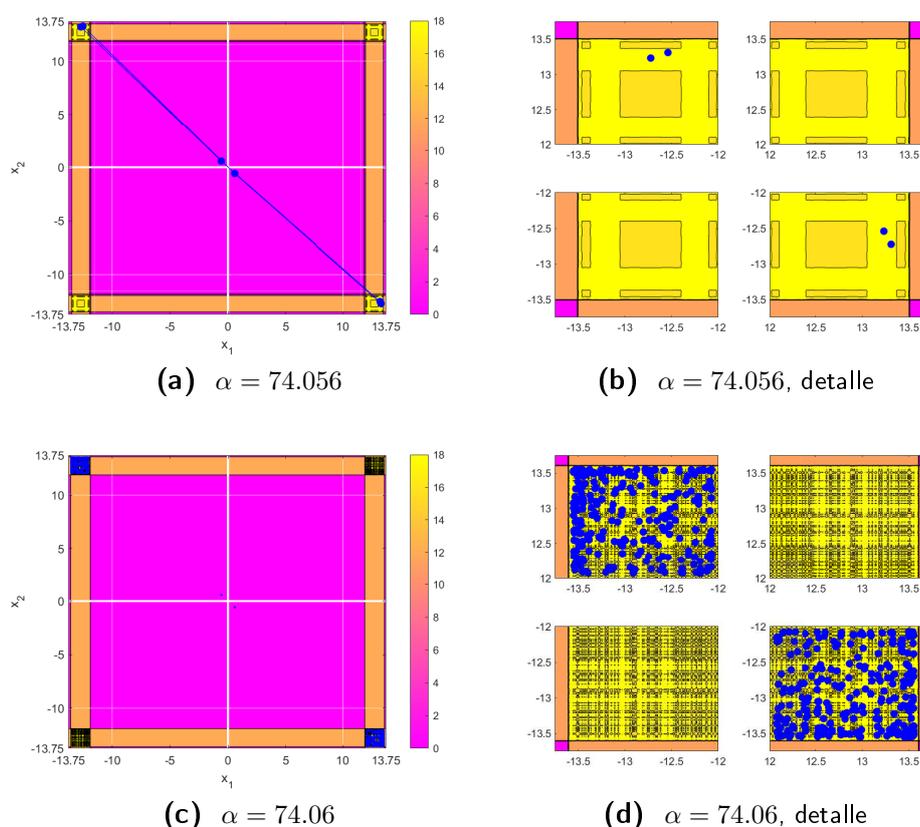


Figura 4.7: Superficies isonormales para varios valores de $\alpha \in (t^*, 80)$

Para obtener más información sobre el comportamiento dinámico en las zonas negras, en la herramienta diseñada que llamamos superficie isonormal, cada estimación inicial de un plano dinámico para un valor fijo de α se itera 1000 veces y se calcula la norma euclídea de la última iteración. Por lo tanto, cada punto se pinta de un color diferente en función de este valor calculado de la norma. Como resultado, surgen ciertos patrones, ver Figura 4.7. En esta Figura, el área magenta corresponde a la norma igual a $\sqrt{2}$, es decir, las cuencas de atracción de las raíces del sistema $p(x)$; los valores más altos de la norma dan lugar a las áreas naranja y amarilla, que corresponden a las cuencas de atracción de las órbitas periódicas o densas: el área amarilla corresponde a la cuenca de una órbita con período 16, que se ha trazado con puntos y líneas azules en la Figura 4.7(a) (para $\alpha = 74,056$) y cuyos elementos son $\{(-0.57638250, 0.57679642), (13.31007537, -12.72354055), (0.57692885, -0.57638250), (-12.53925256, 13.31007537), (-0.57643677, 0.57692885), (13.23224992, -12.53925256), (0.57679642, -0.57643677), (-12.72354055, 13.23224998), (-0.57638250, 0.57679642), (13.31007537, -12.72354055), (0.57692885, -0.57638250), (-12.53925256, 13.31007537), (-0.57643677, 0.57692885), (13.23224999, -12.53925256), (0.57679642, -0.57643677), (-12.72354055, 13.23224998), (-0.57638250, 0.57679642)\}$. Estos elementos, que se han obtenido numéricamente a partir de las últimas iteraciones de la trayectoria azul, corresponden a los elementos de la cascada de desdoblamiento de períodos obtenida en la Figura 4.5(b), para el valor específico de $\alpha = 74.056$. Se puede encontrar un comportamiento simétrico en las otras esquinas diagonales. En la Figura 4.7(b), se puede observar un detalle de estas zonas amarillas, donde también se encuentran pequeñas regiones de convergencia a las raíces (en color magenta) o zonas naranjas. Estas zonas naranjas corresponden a la cuenca de atracción de las órbitas periódicas verticales y horizontales del mismo período.

En las Figuras 4.7(c) y 4.7(d), se representa la superficie isonormal para $\alpha = 74.06$ y un detalle, respectivamente. Con esta ligera modificación del valor de α , la zona amarilla de comportamiento periódico se ha convertido en una zona más oscura que incluye un atractor extraño: una órbita densa. En la Figura 4.7(d), se ha representado la trayectoria del punto $(-0.57638250, 0.57679642)$ ya contenido en la última órbita periódica analizada y se observa que los iterados van llenando las zonas de esquina hasta alcanzar el número máximo de iteraciones. Para este valor de α , esta órbita densa no sólo llena las áreas diagonales mostradas en la Figura 4.7(d), sino también las pequeñas áreas alrededor de

los puntos $(-0.5, 0.5)$ y $(0.5, -0.5)$ que también forman parte de la cuenca de atracción de la órbita periódica para $\alpha = 74.056$.

Consideremos ahora el segundo intervalo $(80, +\infty)$, en el que se espera que la función racional $U(x, \alpha)$ tenga un comportamiento inestable. De acuerdo con el Teorema 14 de la estabilidad del punto fijo, en el dominio $\alpha \in (m^*, \alpha^*) = (327.44373, 369.97117)$ hay doce puntos fijos extraños atractores dados por $(2.00329, 2.00329)$, $(2.00329, -2.00329)$, $(-2.00329, 2.00329)$, $(-2.00329, -2.00329)$ y sus combinaciones con ± 1 . Hemos visto en los planos de los parámetros (Figuras 4.4(c) y 4.4(d)) que los puntos críticos libres convergen a elementos atractores diferentes de las raíces. En la Figura 4.8 se representan los planos dinámicos para los valores $\alpha = 350$, $\alpha = 370$. En el primero de ellos, se pueden observar las cuencas de atracción de los puntos fijos atractores en diferentes colores. En estas cuencas, los puntos fijos extraños atractores aparecen como círculos rojos. Cuando $\alpha = 370$, estos puntos ya no son atractores, sino repulsores.

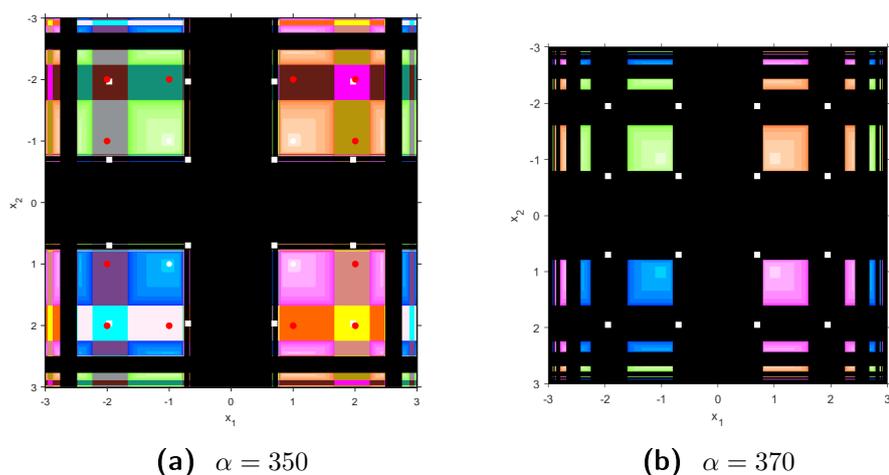


Figura 4.8: Planos dinámicos que muestran un rendimiento inestable

Por lo tanto, se encuentran en la Figura 4.8(b) en la zona negra del plano dinámico. Sin embargo, los puntos fijos extraños que son repulsores deben aparecer en el conjunto de Julia del plano dinámico, es decir, en la frontera entre diferentes cuencas de atracción que no aparecen por no corresponder a las raíces del sistema. Estos elementos de atracción deben ser encontrados para comprender plenamente el funcionamiento de los métodos. Estos dos casos son representativos del comportamiento inestable de los métodos correspondientes a valores de $\alpha > 80$.

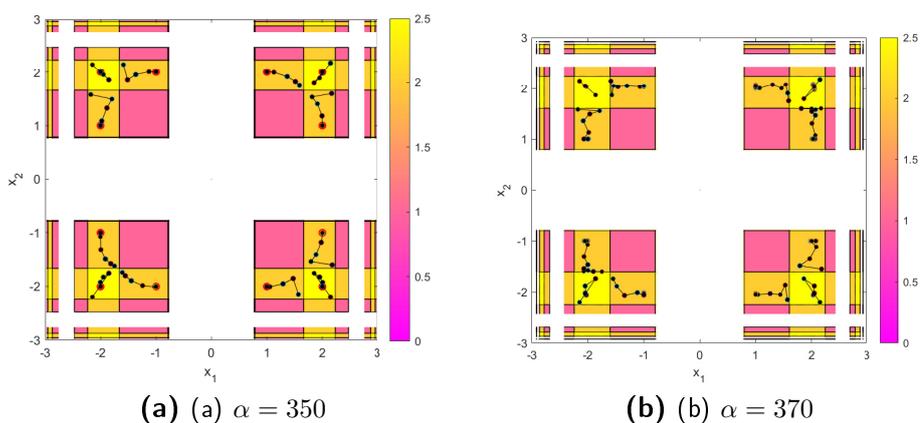


Figura 4.9: Superficies isonormales para valores de $\alpha \in (80, +\infty)$

Esta valiosa información se puede encontrar en las superficies isonormales que se muestran en la Figura 4.9. Observemos que doce de los puntos fijos extraños que eran atractores para $\alpha \in (m^*, \alpha^*)$, después del valor de bifurcación $\alpha = \alpha^*$

no sólo se han convertido en repulsores, sino que han creado una órbita periódica de período 2, cuyos elementos están muy cerca del punto fijo. Debido a la simetría del sistema, el valor de la norma coincide cuando se produce un cambio de signo en las componentes de los puntos límite. Así, estudiamos sólo una de las cuatro regiones situadas en las "esquinas" de la Figura 4.9(b), cuyos detalles se pueden ver en la Figura 4.10. En ella, sobre las diferentes regiones definidas por la norma de los puntos límite, se pueden observar tres órbitas periódicas diferentes de período 2, en color azul. Los puntos iniciales de estas órbitas trazadas son $(2.15, 2.18)$, $(2.17, 1.69)$ y $(1.59, 1.75)$ y están en la cuenca de atrac-

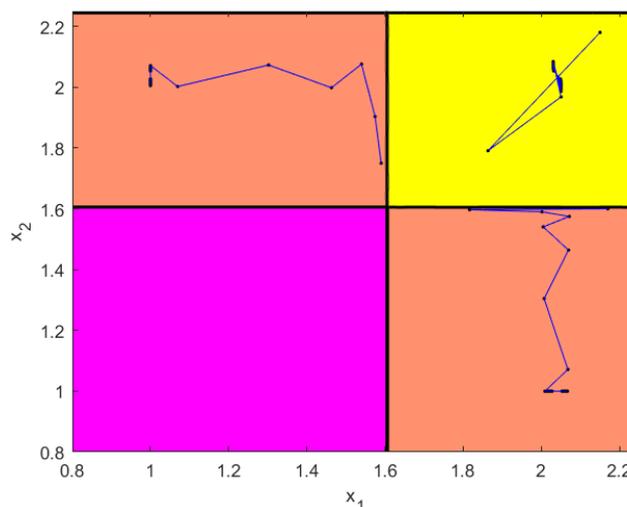


Figura 4.10: Superficie isonormal para $\alpha = 370$, un detalle

ción de las órbitas periódicas $\{(2.034939601034481, 2.045995971020433), (2.045995971020433, 2.034939601034481)\}$, $\{(1.0, 2.045995971020433), (1.0, 2.034939601034481)\}$ y $\{(2.045995971020433, 1.0), (2.034939601034481, 1.0)\}$. Observemos que no aparece ninguna componente del conjunto de Julia que contenga los puntos repulsores. La razón es el elevado número de iteraciones utilizado en la superficie isonormal, 1000. Como el conjunto de Julia es la variedad inestable, una órbita de un punto inicial arbitrario cercano a ella será "repelida" hacia el elemento atractor más cercano, en este caso cualquiera de las órbitas periódicas. Así, incluso los puntos fijos extraños repulsores aparecen en la superficie isonormal como conjeturas iniciales que convergen a las órbitas periódicas.

4.2.2 Resultados numéricos

En esta sección, se comprueba el comportamiento numérico de la familia estudiada en función de α $PSH6_1$, utilizando la información dinámica deducida en la sección anterior. La información relativa a su comportamiento en comparación con otros métodos se encuentra en [19], pero utilizando valores de α elegidos arbitrariamente.

Así, los valores de α asignados se han elegido teniendo en cuenta el análisis de las líneas de parámetros y los diagramas de bifurcaciones mostrados en las Figuras 4.4 y 4.5 y los resultados resumidos en los Teoremas 14 y 15. Los valores de α escogidos para el estudio se agrupan como sigue:

1. Para los valores $\alpha = 0$, $\alpha = -5$ y $\alpha = -90$ pertenecientes al dominio $[-93.210875, 0]$, se puede esperar un rendimiento muy estable según el análisis de estabilidad realizado.
2. No podemos esperar buenos resultados para los valores $\alpha = 74.056$, $\alpha = 77.030$ y $\alpha = 79.375$ (para los que el análisis del punto crítico revela un comportamiento inestable, véase la Figura 4.6).
3. También se espera un rendimiento inestable para $\alpha = 330$, $\alpha = 350$ y $\alpha = 369$ (véase la Figura 4.8(a)), pertenecientes al intervalo $(327.44373, 369.97117)$.

4. Finalmente, para $\alpha = 370$, $\alpha = 380$ y $\alpha = 390$ (véase la Figura 4.8(b)), elegidos dentro del intervalo $(369.97117, \infty)$, se supone que también se encuentra un comportamiento inestable.

Para los valores de α en los grupos 2 a 4, se puede encontrar un elevado número de puntos críticos libres y puntos fijos extraños de diferente carácter según el análisis de estabilidad realizado anteriormente.

Para realizar los experimentos numéricos hemos empleado el sistema de álgebra computacional Matlab con 2000 dígitos de mantisa, en aritmética de precisión variable. El ordenador utilizado tiene un procesador Intel(R) Core(TM) i7-1065G7 CPU @ 1.30GHz 1.50 GHz. El criterio de parada utilizado es $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ o $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$, los valores iniciales empleados y las soluciones buscadas se simbolizan como $x^{(0)}$ y ξ , respectivamente. Hemos probado los diferentes métodos iterativos para resolver dos sistemas no lineales. La información que aparece en las tablas correspondientes se organiza de la siguiente manera: 'Grupo' y α muestran el número asociado al intervalo que incluye el valor particular del parámetro utilizado; k es el número de iteraciones necesarias, cuyo valor máximo es 25 ('NaN' aparece en la tabla si aparecen resultados numéricos indefinidos, como 0/0); el valor de los residuos de parada $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ y $\|F(x^{(k+1)})\|$ en la última iteración y también el orden de convergencia computacional aproximado $ACOC$ dado por la expresión (2.6), (si el valor de $ACOC$ de las últimas iteraciones no es estable, entonces aparece '-' en la tabla). De este modo, una vez que el proceso se ha detenido sin alcanzar el número máximo de iteraciones, se puede comprobar si el proceso iterativo ha alcanzado la raíz ($\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$) o bien se trata de una convergencia muy lenta, con una diferencia no significativa entre los dos últimos iterados ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ pero $\|F(x^{(k+1)})\| > 10^{-200}$).

Ejemplo 1. El primer sistema no lineal, cuya solución es $\xi = (0, 0, 2, 0)^T$, se describe como

$$F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4, x_1 + x_1x_2 + x_2 - 2).$$

La estimación inicial es $x^{(0)} = (0.5, 3.0)^T$ y los resultados aparecen en la Tabla 4.1.

Grupo	α	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ρ
1	0.0	5	37.6881×10^{-201}	0.0	-
	-5	5	1.3537×10^{-177}	0.0	-
	-90	5	94.5218×10^{-66}	$969.9657 \times 10^{-270}$	-
2	74.056	5	9.8133×10^{-129}	0.0	-
	77.030	5	1.8459×10^{-123}	0.0	-
	79.375	5	15.0742×10^{-120}	0.0	-
3	330	25	204.3078×10^{30}	22.2677×10^{63}	-
	350	25	11.5360×10^{33}	74.2941×10^{66}	-
	369	25	20.0437×10^{30}	232.2309×10^{60}	-
4	370	25	8.9085×10^{42}	45.9500×10^{84}	-
	380	25	339.8792×10^{24}	67.9344×10^{51}	-
	390	25	8.0623×10^{33}	38.7626×10^{66}	-

Tabla 4.1: Resultados numéricos de diferentes elementos de la clase $PSH6_1$ para $F_1(x_1, x_2)$ y $x^{(0)} = (0.5, 3.0)^T$

En la Tabla 4.1, se muestran los resultados de $PSH6_1$ en $F_1(x_1, x_2)$. Se obtiene un buen rendimiento para los esquemas iterativos del grupo 1, todos ellos convergen a la solución en cinco iteraciones con un residuo muy pequeño $\|F(x^{(k+1)})\|$. Como era de esperar, después del número máximo de iteraciones no se observa convergencia para los métodos iterativos pertenecientes a los grupos 3 y 4, esto último lo corrobora la diferencia entre las dos últimas iteraciones ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$) y el residuo ($\|F(x^{(k+1)})\|$) en la 25ª iteración. En este caso, el rendimiento de los miembros del segundo grupo es inesperadamente bueno y el orden de convergencia aproximado computacional es inestable para todos los grupos.

Ejemplo 2. La segunda función no lineal describe un sistema con solución $\xi \approx (0.5, 0.0, -0.5236)^T$,

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5, x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06, e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{1}{3}(10\pi - 3)).$$

Probamos los métodos en este segundo sistema con la estimación inicial $x^{(0)} = (1.0, 1.0, 1.0)^T$. Los resultados se presentan en la Tabla 4.2.

Grupo	α	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ρ
1	0.0	6	$431.6652 \times 10^{-177}$	0.0	5.8341
	-5	6	$409.7626 \times 10^{-144}$	0.0	5.9192
	-90	18	1.7141×10^{-120}	0.0	-
2	74.056	25	1.2595	538.1906×10^{-3}	-
	77.030	3	NaN	NaN	NaN
	79.375	3	NaN	NaN	NaN
3	330	3	1.3897×10^3	Inf	-
	350	1	NaN	NaN	NaN
	369	1	NaN	NaN	NaN
4	370	1	NaN	NaN	NaN
	380	1	NaN	NaN	NaN
	390	3	7.4806×10^9	Inf	-

Tabla 4.2: Resultados numéricos de diferentes elementos de la clase PSH6₁ para $F_2(x_1, x_2, x_3)$ y $x^{(0)} = (1.0, 1.0, 1.0)^T$

Como esperábamos, se obtiene un buen rendimiento para los miembros de la familia dada por el grupo 1, todos ellos convergen a la solución en pocas iteraciones, siendo el residuo nulo en todos los casos. El orden de convergencia computacional aproximado es lo suficientemente estable como para acercarse al teórico en dos casos. En cuanto al segundo grupo, se han cumplido nuestras expectativas y no se obtiene convergencia a la solución después de 25 iteraciones. Se obtienen resultados similares para los grupos 3 y 4.

En este epígrafe hemos realizado un profundo análisis dinámico para seleccionar los elementos más estables de una familia paramétrica de esquemas eficientes de sexto orden. Para conseguir este objetivo, se ha diseñado una nueva herramienta, la superficie isonormal, que nos permite detectar las zonas de un plano dinámico con el mismo tipo de comportamiento inestable, y encontrar zonas de comportamiento caótico, para un valor fijo del parámetro.

4.3 Análisis de estabilidad de la familia iterativa actuando sobre la función polinómica vectorial de variables no separadas $q(x)$

A continuación vamos a realizar el estudio dinámico de la familia $PSH6_1$, aplicando conceptos previos y herramientas dinámicas discretas multidimensionales reales empleadas en la sección previa. Analizamos la familia iterativa actuando sobre la función $q(x) = (x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1, x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1)$ para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Aplicando la expresión iterativa de $PSH6_1$ (4.1), sobre el sistema polinómico $q(x) = 0$, obtenemos su operador racional multidimensional asociado $U = \{u_1(x_1, x_2, \alpha), u_2(x_1, x_2, \alpha)\}$, sus coordenadas son

$$u_1(x_1, x_2, \alpha) = -\frac{1}{4(x_1 + x_2)^7} \left(2\alpha(-1 + x_1^2)^3(-1 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2)^2 q_{11} + (x_1 + x_2)^6 (2(1 + x_1) + Q_{13}) \left(-1 + \left(-\alpha q_{12} + \frac{1}{(x_1 + x_2)^5} q_{11} \right)^2 \right) + (x_1 + x_2)^6 (2(1 - x_1) + q_{13}) (-1 + (-\alpha q_{12} + \frac{1}{(x_1 + x_2)^5} q_{11})^2) \right),$$

$$u_2(x_1, x_2, \alpha) = -\frac{1}{4(x_1 + x_2)^7} \left(2\alpha(-1 + x_1^2)^3(-1 + x_2^2) - 2(x_1 + x_2)^2 q_{11} + (1 - x_2)(x_1 + x_2)^6 (1 + \alpha q_{21} + q_{22}) \left(-1 + \left(-\alpha q_{12} + \frac{1}{(x_1 + x_2)^5} q_{11} \right)^2 \right) + (1 + x_2)(x_1 + x_2)^6 (1 + \alpha q_{21} + q_{22}) (-1 + (-\alpha q_{12} + \frac{1}{(x_1 + x_2)^5} q_{11})^2) \right),$$

donde los factores $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}$ y q_{22} son

$$q_{11} = 2 + x_1^5 x_2 - 3x_2^2 + 2x_2^4 + x_1^4 (4 + x_2^2) + x_1^3 (6x_2 + 4x_2^3) + x_1 x_2 (-2 + 6x_2^2 + x_2^4) + x_1^2 (-5 + 12x_2^2 + 3x_2^4),$$

$$q_{12} = \frac{(-1 + x_1^2)^3 (-1 + x_2^2)}{2(x_1 + x_2)^7},$$

$$q_{13} = \frac{(-1 + x_1^2)(1 - x_2)(\alpha(-1 + x_1^2) + 4(x_1 + x_2)^2)}{(x_1 + x_2)^4},$$

$$q_{21} = \frac{(-1 + x_1^2)^2}{2(x_1 + x_2)^4},$$

$$q_{22} = \frac{2(-1 + x_1^2)}{(x_1 + x_2)^2}.$$

Conociendo el operador racional multidimensional asociado U , es posible formular el siguiente resultado sobre la estabilidad de los puntos fijos relacionados con la familia iterativa (4.1) actuando sobre el polinomio vectorial $q(x)$.

Teorema 16. *La función racional $U(x, \alpha)$ asociada a la familia de métodos iterativos (4.1) tiene el punto fijo superatractivo $(1, 1)$, $(-1, -1)$ raíces del polinomio $q(x)$ y los puntos fijos extraños reales que dependen de los valores de α son:*

- i) Si $\alpha \in (-\infty, a) \cup (0, b)$ entonces existen dos puntos silla, siendo $a \approx -93.210875$ y $b \approx 327.44373142$ las únicas raíces reales del polinomio $A(t) = t^3 - 112t^2 + 3190784 + 15104t$ y $B(t) = 100000t^9 - 33232500t^8 +$

4.3 Análisis de estabilidad de la familia iterativa actuando sobre la función polinómica vectorial de variables no separadas $q(x)$

$162157876t^7 - 769658421t^6 + 2887352848t^5 - 7815029120t^4 + 14060488832t^3 - 17146950656t^2 + 12837074944t - 5333716992$, respectivamente. Para $\alpha \in (a, 0)$ no se puede encontrar ningún punto fijo.

ii) Si $\alpha \in (b, \infty)$, entonces hay seis puntos fijos extraños cuya estabilidad depende del valor de α :

1) Cuando $\alpha \in (b, \beta)$ entonces hay dos puntos fijos atractores y cuatro tipo silla.

2) Para $\alpha \in (\beta, \infty)$ entonces hay seis puntos fijos tipo silla.

Demostración. Siendo los puntos fijos la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \alpha) &= x_1, \\ u_2(x_1, x_2, \alpha) &= x_2, \end{aligned}$$

que se puede transformar en

$$\begin{aligned} -\frac{(x_1 - 1)(x_1 + 1)}{(x_1 + x_2)^{19}} Q_1(x_1, x_2, \alpha) &= 0, \\ -\frac{(x_2 - 1)(x_2 + 1)}{(x_1 + x_2)^{19}} Q_2(x_1, x_2, \alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde Q_1 y Q_2 son polinomios de variables mixtas que no se mostrarán debido a su complicada forma y extensión. El último sistema tiene las soluciones dadas por $\eta_1 = (1, 1)$, $\eta_2 = (-1, -1)$ y aquellos otros valores que satisfacen

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2, \alpha) &= 0, \\ Q_2(x_1, x_2, \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Las tuplas η_1 y η_2 son puntos fijos del operador racional y raíces de $q(x)$ simultáneamente por lo tanto son superatractores.

Como muestra el software Mathematica, los puntos fijos soluciones del sistema (4.8) son los pares (l_i, l_i) para $i \leq 6$ cuyas entradas son las raíces cuadradas de las raíces reales positivas $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ y $L_3(\alpha)$ del polinomio

$$\begin{aligned} L(s) &= \left(\alpha^3 - 112\alpha^2 + 15104\alpha + 3190784 \right) s^9 + \left(9\alpha^3 + 32\alpha^2 + 80128\alpha - 2146304 \right) s^8 \\ &+ 4 \left(9\alpha^3 + 520\alpha^2 + 43712\alpha + 437248 \right) s^7 + 4 \left(21\alpha^3 + 1512\alpha^2 + 50240\alpha - 237568 \right) s^6 \\ &+ 2 \left(63\alpha^3 + 4000\alpha^2 + 64640\alpha + 149504 \right) s^5 + 2 \left(63\alpha^3 + 2864\alpha^2 + 22912\alpha - 24576 \right) s^4 \\ &+ 4 \left(21\alpha^3 + 568\alpha^2 + 2112\alpha + 1024 \right) s^3 + 12\alpha \left(3\alpha^2 + 40\alpha - 64 \right) s^2 + 3\alpha^2(3\alpha + 16)s - \alpha^3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si denotamos las raíces cuadradas de las soluciones positivas de la ecuación $L(s) = 0$ como l_i , entonces las raíces $\{+\sqrt{L_1}, +\sqrt{L_2}, +\sqrt{L_3}, -\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_2}, -\sqrt{L_3}\}$ pueden ser denotadas por l_i para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para analizar la estabilidad de los puntos fijos (l_i, l_i) , una vez calculada la matriz jacobiana asociada $U'((l_i, l_i), \alpha)$ encontramos los valores absolutos de sus valores propios que se denominan funciones de estabilidad

$$|\lambda_{1,2}(l_i(\alpha), l_i(\alpha))| = \left(0, \frac{1}{4(l_i(\alpha) + l_i(\alpha))^{20}} |K(l_i(\alpha), l_i(\alpha))| \right) \quad (4.10)$$

donde $K(x_1, x_2)$ es la función

$$\begin{aligned}
 K = & -b^3 \left(-1 + x_1^2\right)^7 \left(-1 + x_2^2\right) \left(-19 + 2x_1^3x_2 + 17x_2^2 + x_1^2 \left(11 - 9x_2^2\right) + 2x_1x_2 \left(-5 + 4x_2^2\right)\right) + 2b^2 \left(-1 + x_1^2\right)^4 \\
 & (x_1 + x_2)^2 \left(-102 + 237x_2^2 - 200x_2^4 + 64x_2^6 - x_2^8 - 6x_1^7x_2 \left(-5 + 3x_2^2\right) + x_1^8 \left(-1 + 3x_2^2\right) + 2x_1^6 \left(52 - 57x_2^2 + 19x_2^4\right) \right. \\
 & + x_1^5 \left(-22x_2 + 90x_2^3 - 40x_2^5\right) + 2x_1^4 \left(-160 + 245x_2^2 - 88x_2^4 + 3x_2^6\right) + 2x_1^3x_2 \left(-52 - 30x_2^2 + 61x_2^4 + 7x_2^6\right) \\
 & + 2x_1x_2 \left(18 - 76x_2^2 + 29x_2^4 + 23x_2^6\right) + x_1^2 \left(309 - 756x_2^2 + 338x_2^4 + 70x_2^6 + 11x_2^8\right) \left. - 4b \left(-1 + x_1^2\right)^2 (x_1 + x_2)^4 \right. \\
 & \left(-180 + 2x_1^{11}x_2 + 492x_2^2 - 565x_2^4 + 312x_2^6 - 79x_2^8 + 14x_2^{10} + x_1^{10} \left(14 - 8x_2^2\right) + 10x_1^9x_2 \left(-5 + 4x_2^2\right) \right. \\
 & + x_1^8 \left(-329 + 330x_2^2 - 63x_2^4\right) + 4x_1^7x_2 \left(-63 + 30x_2^2 + 14x_2^4\right) + 2x_1^6 \left(545 - 63x_2^4\right) + 4x_1^5x_2 \left(-63 + 30x_2^2 \right. \\
 & + 14x_2^4) + 2x_1^4 \left(545 - 941x_2^2 + 405x_2^4 + 5x_2^6\right) + 2x_1^3x_2 \left(515 - 563x_2^2 + 99x_2^4 + 19x_2^6\right) + 2x_1^2x_2 \left(-452 + 950x_2^2 \right. \\
 & - 604x_2^4 + 62x_2^6 + 33x_2^8) + x_1^4 \left(-1393 + 3636x_2^2 - 2412x_2^4 + 208x_2^6 + 61x_2^8\right) + 2x_1x_2 \left(108 - 404x_2^2 + 351x_2^4 \right. \\
 & - 99x_2^6 + 24x_2^8 + 3x_2^{10}) + 2x_1^2 \left(402 - 1227x_2^2 + 1097x_2^4 - 391x_2^6 + 72x_2^8 + 14x_2^{10}\right) \left. \right) + 4(x_1 + x_2)^6 (-208 \\
 & + x_1^{14} + 648x_2^2 - 908x_2^4 + 670x_2^6 - 280x_2^8 + 80x_2^{10} - 12x_2^{12} + x_2^{14} + 4x_1^{11}x_2 \left(-13 + 9x_2^2\right) \\
 & + x_1^{12} \left(-52 + 37x_2^2\right) + 12x_1^9x_2 \left(101 - 127x_2^2 + 38x_2^4\right) + x_1^{10} \left(688 - 932x_2^2 + 313x_2^4\right) + 8x_1^7x_2 \left(-477 \right. \\
 & + 827x_2^2 - 488x_2^4 + 102x_2^6) + x_1^8 \left(-2384 + 5260x_2^2 - 3656x_2^4 + 753x_2^6\right) + 8x_1^5x_2 \left(567 - 1313x_2^2 + 1112x_2^4 \right. \\
 & - 400x_2^6 + 54x_2^8) + x_1^6 \left(3702 - 11168x_2^2 + 10684x_2^4 - 4088x_2^6 + 681x_2^8\right) + 4x_1^3x_2 \left(-576 + 1744x_2^2 - 1822x_2^4 \right. \\
 & + 874x_2^6 - 235x_2^8 + 27x_2^{10}) + x_1^4 \left(-2972 + 10554x_2^2 - 12216x_2^4 + 6716x_2^6 - 2080x_2^8 + 241x_2^{10}\right) + 4x_1x_2 \left(104 \right. \\
 & - 408x_2^2 + 482x_2^4 - 278x_2^6 + 105x_2^8 - 19x_2^{10} + 2x_2^{12}) + x_1^2 \left(1224 - 4424x_2^2 + 5794x_2^4 - 3952x_2^6 + 1580x_2^8 \right. \\
 & \left. - 332x_2^{10} + 37x_2^{12}\right) \left. \right), \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

y se puede comprobar que $\lambda_1 = 0$ para cualquier punto fijo.

Conociendo las funciones de estabilidad asociadas al jacobiano del operador multidimensional entonces,

- i) Si $\alpha \in (-\infty, a) \cup (0, b)$ se puede encontrar una raíz positiva L_1 de $L(s)$, por lo tanto dos puntos fijos en este dominio están dados por $(l_1, l_1) = (\sqrt{L_1}, \sqrt{L_1})$ y $(l_4, l_4) = (-\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_1})$, siendo $a \approx -93.210875$ y $b \approx 327.44373142$ las únicas raíces reales del polinomio $A(t) = t^3 - 112t^2 + 3190784 + 15104t$ y $B(t) = 100000t^9 - 33232500t^8 + 162157876t^7 - 769658421t^6 + 2887352848t^5 - 7815029120t^4 + 14060488832t^3 - 17146950656t^2 + 12837074944t - 5333716992$, respectivamente. La información sobre su estabilidad puede obtenerse a partir de los valores absolutos de las funciones de valores propios $|\lambda_{1,2}|$ asociada a la matriz jacobiana. Teniendo en cuenta la nulidad de λ_1 y que $|\lambda_2((l_1, l_1), \alpha)| > 1$, $|\lambda_2((l_4, l_4), \alpha)| > 1$ para todo el dominio (Figura 4.11), es evidente que (l_1, l_1) y (l_4, l_4) son puntos fijos silla.
- ii) Hay tres raíces positivas L_1, L_2 y L_3 del polinomio $L(s)$, por lo que se pueden encontrar seis puntos fijos $(l_1, l_1), (l_2, l_2), (l_3, l_3), (l_4, l_4), (l_5, l_5)$ y (l_6, l_6) en este dominio. Su carácter puede deducirse del análisis de los diagramas de estabilidad. Teniendo en cuenta la nulidad de λ_1 :
 - 1) Los valores $\alpha = b$ y $\alpha = \beta \approx 369.97117$ satisfacen la ecuación $|\lambda_2((l_i, l_i), \alpha)| = 1$ y por lo tanto para esos valores no hay puntos hiperbólicos con $i \in \{3, 6\}$. Cuando $\alpha \in (b, \beta)$ cumple la condición $|\lambda_2((l_i, l_i), \alpha)| < 1$ de aquí los puntos (l_i, l_i) para $i \in \{3, 6\}$ son atractores, véase la Figura 4.12(a). Por otro lado, $i \in \{1, 2, 4, 5\}$ los puntos (l_i, l_i) son sillas debido a $|\lambda_2((l_i, l_i), \alpha)| > 1$, Figures 4.12(b) y 4.12(c).

4.3 Análisis de estabilidad de la familia iterativa actuando sobre la función polinómica vectorial de variables no separadas $q(x)$

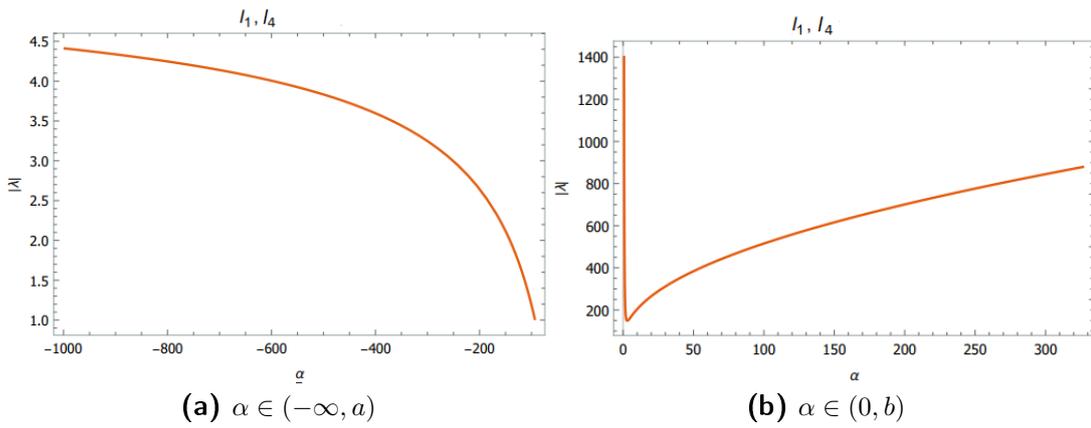


Figura 4.11: Funciones de estabilidad para $\alpha \in (-\infty, a) \cup (0, b)$

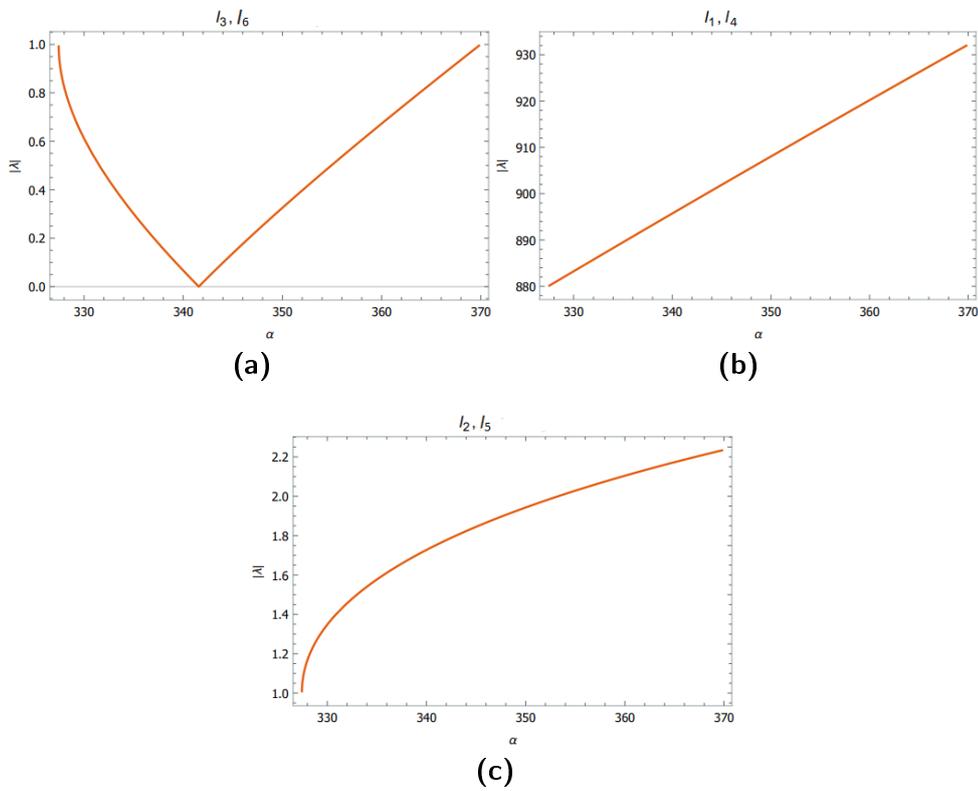


Figura 4.12: Funciones de estabilidad para $\alpha \in (b, \beta)$

- 2) Si $\alpha \in (\beta, \infty)$ todos los puntos (l_i, l_i) , para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, satisfacen la desigualdad $|\lambda_2((l_i, l_i), \alpha)| > 1$ por tanto son puntos fijos extraños tipo silla, véase la Figura 4.13.

□

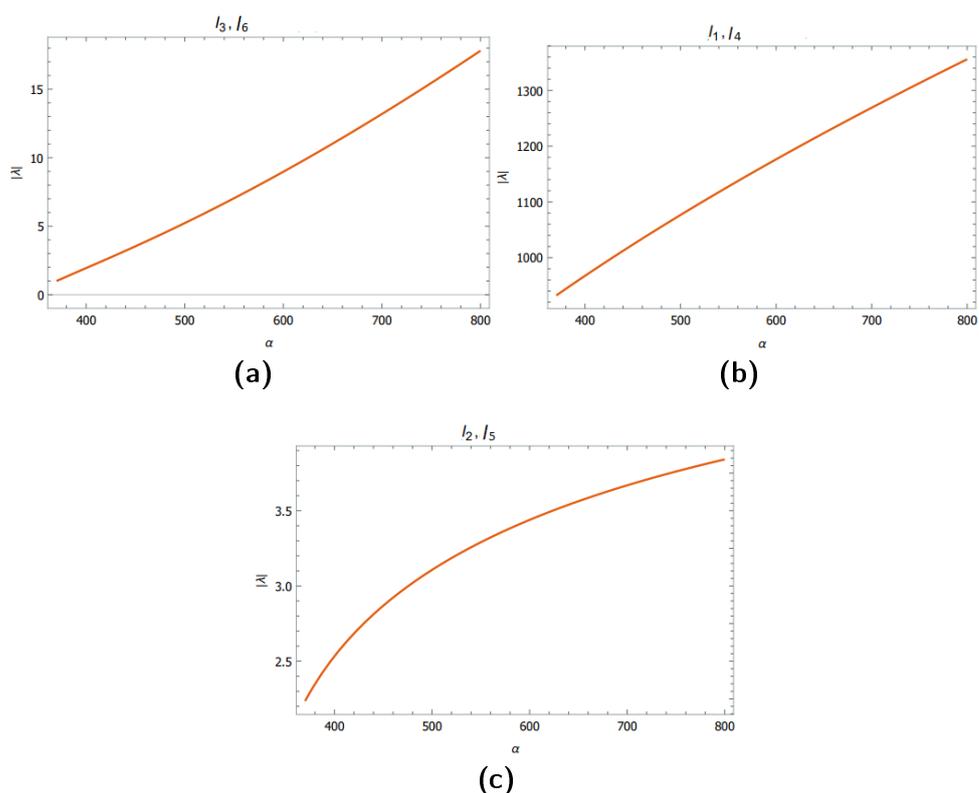


Figura 4.13: Funciones de estabilidad para $\alpha \in (\beta, \infty)$

4.3.1 Comportamiento dinámico

Para obtener cierta información cualitativa sobre el comportamiento del método construimos los planos dinámicos, herramientas que ya describimos en la sección anterior.

En el Teorema 16 afirmamos que para los valores en el intervalo $\alpha \in [a, 0]$ (siendo $a \approx -93.210875$) no existen puntos fijos extraños. En la Figura 4.14 se puede obtener alguna información sobre el comportamiento dinámico en este intervalo donde se representan los planos de convergencia para cuatro valores diferentes de α . Podemos ver las cuencas de atracción de cada raíz y las zonas negras de no convergencia. Obsérvese que a medida que el parámetro α aumenta, las zonas oscuras de no convergencia disminuyen.

Diagramas de bifurcación

Con la variación del parámetro α el comportamiento dinámico del mapa puede cambiar de forma gradual e insignificante o de forma drástica al cruzar ciertos valores especiales del parámetro. Para tener un conocimiento cualitativo del comportamiento dinámico del método, trazamos los diagramas de bifurcación (diagramas de Feigenbaum) de cada función de coordenadas del operador de punto fijo (4.12) y utilizando como punto de partida los puntos fijos extraños del mapa con una perturbación igual a $\delta x_{1,2} = 10^{-2}$,

$$U = (u_1(l_i(\alpha) \pm \delta x_1, l_i(\alpha) \pm \delta x_2, \alpha), u_2(l_i(\alpha) \pm \delta x_1, l_i(\alpha) \pm \delta x_2, \alpha)), \quad (4.12)$$

siendo $i = 1, 2, 3$ y observando los rangos del parámetro donde se producen cambios de estabilidad u otros comportamientos. Los diagramas de Feigenbaum de cada componente de los puntos fijos perturbados $(+l_i, +l_i)$ con $i = 1, 2, 3$ se muestran en colores rojo y azul respectivamente en las Figuras 4.15, 4.19 y 4.20.

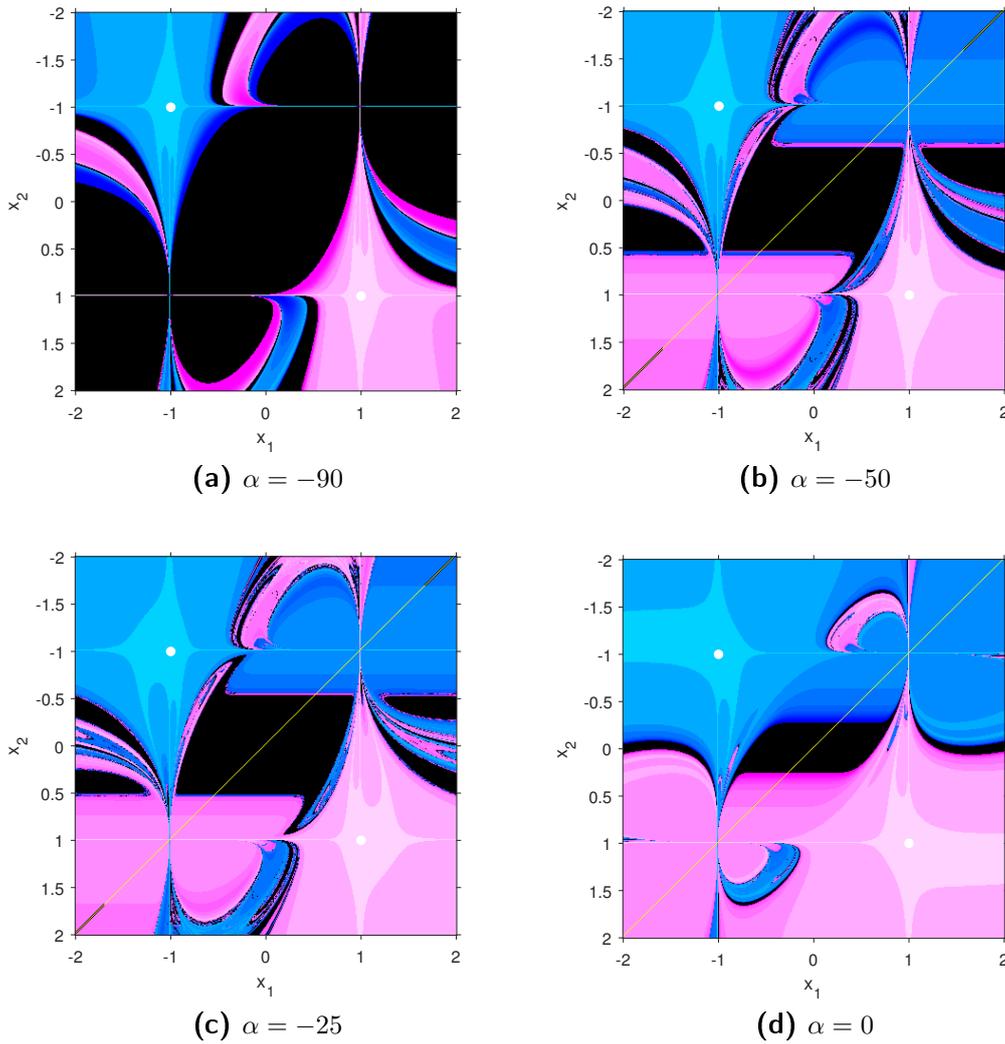


Figura 4.14: Planos dinámicos para $\alpha \in [a, 0]$

Se puede observar en la Figura 4.15 que no se produce ningún cambio en el dominio estudiado $\alpha \in (-\infty, a) \cup (0, b)$ (siendo $a \approx -93.210875$ y $b \approx 327.44373142$) para los dos puntos fijos únicos $(\pm l_1, \pm l_1)$, las perturbaciones elegidas convergen a las raíces $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ del sistema polinómico $q(x)$, ver la posición de (l_1, l_1) con color cian en la Figura 4.18(a) y su transición en la Figura 4.18(b).

En el dominio dado por $\alpha \in (b, \beta)$, podemos encontrar seis puntos fijos $(\pm l_1, \pm l_1)$, $(\pm l_2, \pm l_2)$ y $(\pm l_3, \pm l_3)$ representados por los círculos cian, amarillo y rojo respectivamente (ver Figura 4.17), donde los dos primeros son sillas y el tercero es un punto fijo atractor que yace en su cuenca de atracción de color verde. Se muestran los diagramas de Feigenbaum relacionados con este dominio para tres de los seis puntos fijos allí existentes. Podemos observar en las Figuras 4.19(a) y 4.19(b) cómo la perturbación de (l_1, l_1) converge a las raíces del polinomio estudiado hasta que se alcanza cierto valor alrededor de $\alpha \approx 349$ después del cual el comportamiento dinámico cambia, la estimación inicial es atrapada por el punto fijo atractor que se encuentra en este dominio. Podemos observar este último proceso en la Figura 4.18, el círculo cian representa la posición del punto fijo y el blanco su perturbación.

En las Figuras 4.19(c) y 4.19(d) sólo se observan convergencias a las raíces mientras que en las Figuras 4.19(e) y 4.19(f) se obtiene la convergencia al punto fijo atractor como podíamos esperar y que se puede observar en la Figura 4.17, el punto fijo atractor de color rojo yace en su cuenca de color verde.

Para $\alpha \in (\beta, \infty)$, los diagramas de bifurcación para cada perturbación de los puntos fijos se muestran en la Figura 4.20(d), en torno a los valores $\alpha \approx 380$ y $\alpha \approx 405$ se observa una cascada de desdoblamiento período dos y un comportamiento caótico para cada perturbación, por lo que no se alcanza la convergencia a ninguna raíz. Por otro lado, para valores mayores que $\alpha \approx 407$ se observa la convergencia a las raíces. Estos comportamientos se pueden corroborar en la Figura 4.22. Podemos observar en 4.22(a), 4.22(c) y 4.22(e) que la perturbación representada con el círculo blanco se encuentra en zonas oscuras de no convergencia, mientras que en las Figuras 4.22(b), 4.22(d) y 4.22(f) la perturbación se encuentra en las cuencas de atracción de $(-1, -1)$ (color azul) y $(1, 1)$ (color rosado)

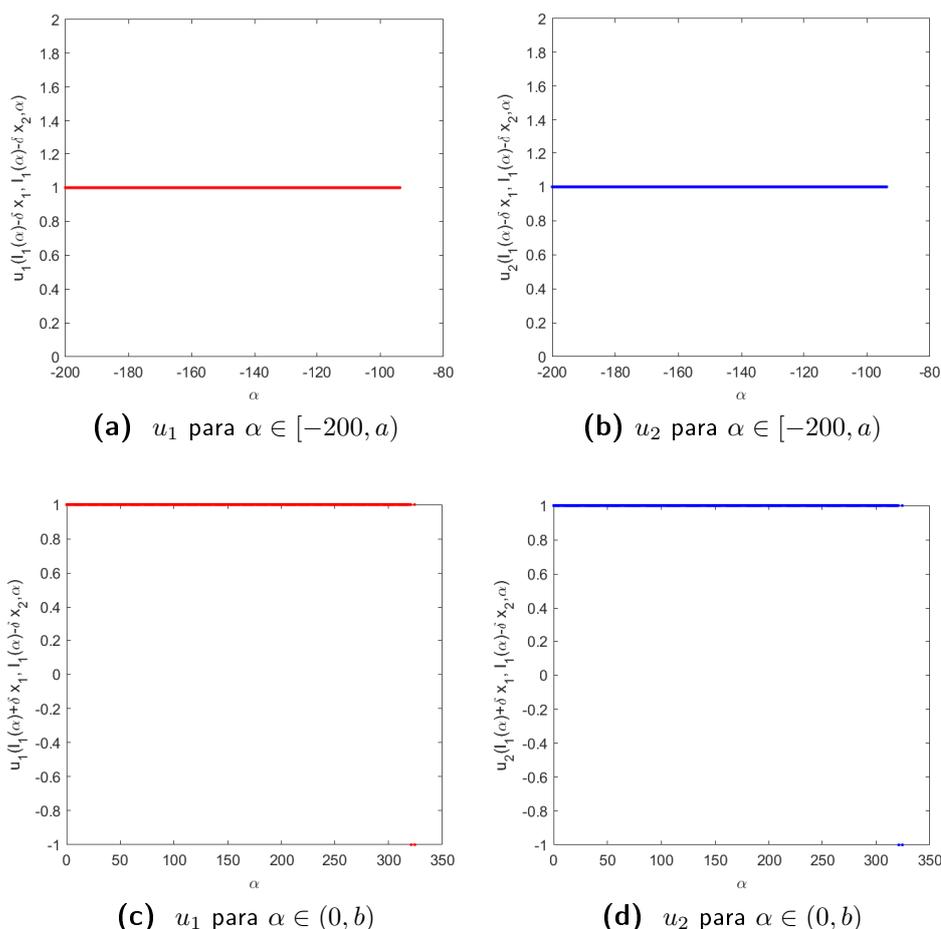


Figura 4.15: Diagramas de bifurcación relacionados con el punto fijo perturbado (l_1, l_1) en el dominio $\alpha \in (-\infty, a) \cup (0, b)$

4.3.2 Resultados numéricos

En esta sección se comprueba el rendimiento numérico en función del parámetro α de la familia estudiada $PSH6_1$ y descrito en la expresión (4.1) para dos sistemas de ecuaciones no lineales.

Los valores asignados al parámetro se han elegido teniendo en cuenta el análisis de los diagramas de bifurcación y los resultados resumidos en el Teorema 16. Para ambos sistemas no lineales los valores probados $\alpha = -90, -50, -25, 0$ perteneciente al dominio $\alpha \in [-93.210875, 0]$ se pueden esperar comportamientos adecuados según el análisis de estabilidad y la observación de la Figura 4.14. A diferencia de los valores previos de α , no deberíamos esperar el mismo

4.3 Análisis de estabilidad de la familia iterativa actuando sobre la función polinómica vectorial de variables no separadas $q(x)$

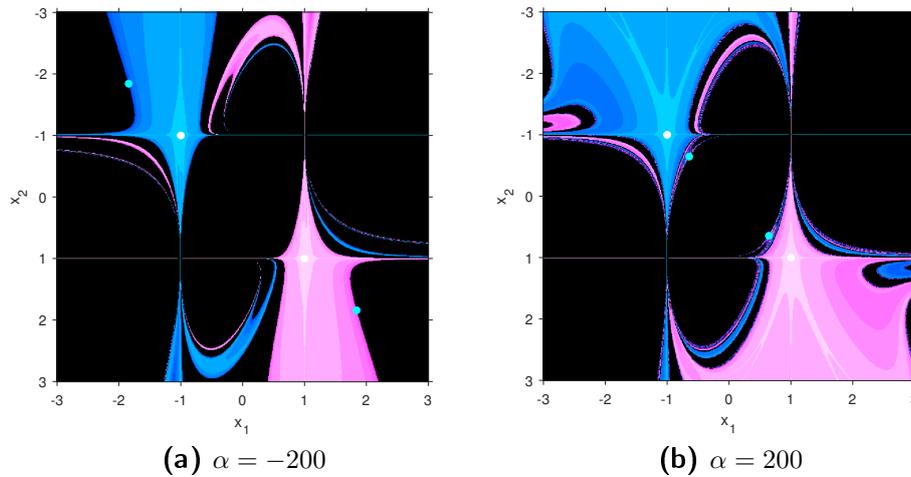


Figura 4.16: La posición y la transición del punto fijo (l_1, l_1) para dos valores diferentes en el dominio $\alpha \in (-\infty, a) \cup (0, b)$

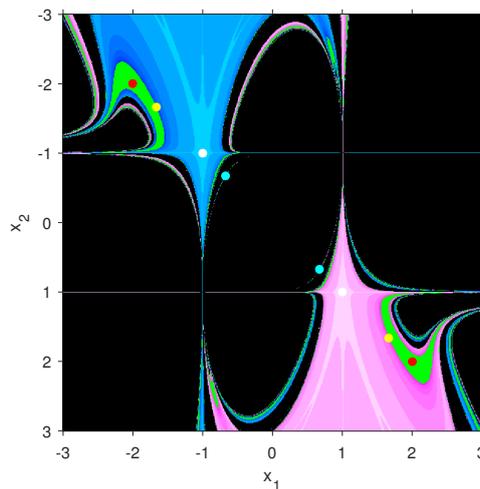
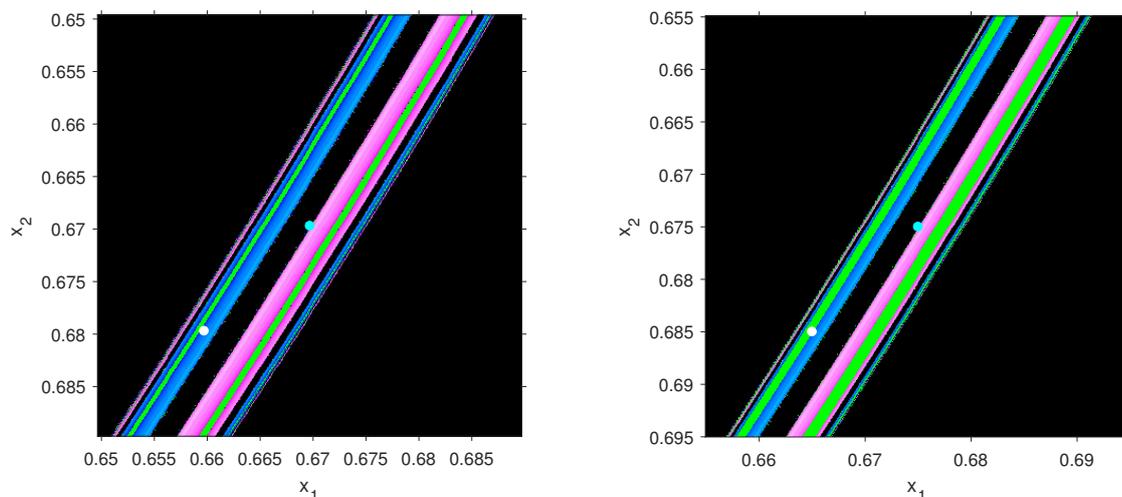


Figura 4.17: Plano dinámico para $\alpha = 350$

rendimiento para los valores $\alpha = -200, 200, 350$ (para los que la estimación inicial elegida se encuentra en zonas oscuras de no convergencia para $q(x)$) Figuras 4.16 y 4.17.

Para realizar los experimentos numéricos comparativos, hemos empleado el sistema de álgebra computacional Matlab con 2000 dígitos de mantisa en aritmética de precisión variable. Los experimentos se han realizado en un ordenador con CPU Intel(R) Core(TM) i7-5500U CPU @ 2.40 GHz 2.40 GHz y 16,0 GB de RAM. El criterio de parada utilizado es $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ o $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$, los valores iniciales empleados y las soluciones buscadas se simbolizan como $x^{(0)}$ y ξ , respectivamente.

Hemos probado dos funciones no lineales y se mostrará una tabla para cada una de ellas con los resultados de los experimentos numéricos. La información dada se organiza de la siguiente manera: k es el número de iteraciones (cuyo máximo es 25) necesarias para converger a la solución ('NaN' aparece en la tabla si se tratan valores no numéricos), el valor de los residuos de parada son $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ o $\|F(x^{(k+1)})\|$ en el último paso y el orden de convergencia computacional aproximado *ACOC* (véase la definición (2.6)). Si el valor de *ACOC* para las últimas iteraciones no es estable, entonces aparece '-' en la tabla. De este modo, se puede comprobar si la convergencia ha alcanzado la raíz



(a) La perturbación de (l_1, l_1) se encuentra en la cuenca de $(-1, -1)$ para $\alpha = 328$ (b) La perturbación es atrapada por $(l_3(\alpha), l_3(\alpha))$ para $\alpha = 365$

Figura 4.18: La posición y la transición del punto perturbado (l_1, l_1) para dos valores diferentes en el dominio $\alpha \in (b, \beta)$

($\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$ se alcanza) o se trata sólo de una convergencia muy lenta sin diferencia significativa entre los dos últimos iterados ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ pero $\|F(x^{(k+1)})\| > 10^{-200}$), o ambos criterios son satisfechos.

Ejemplo 1. El primer sistema no lineal, cuya solución es $\xi = (0.0, 2.0)^T$, es descrito como

$$F_1(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4, x_1 + x_1x_2 + x_2 - 2).$$

La estimación inicial es $x^{(0)} = (0.5, 3.0)^T$ y los resultados aparecen en la Tabla 4.3.

Grupo	Familia	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
1	PSH6 ₁ { $\alpha=0.0$ }	5	37.6881×10^{-201}	0.0	-
	PSH6 ₁ { $\alpha=-5$ }	5	1.3537×10^{-177}	0.0	-
	PSH6 ₁ { $\alpha=-90$ }	5	94.5218×10^{-66}	$969.9657 \times 10^{-270}$	-
2	PSH6 ₁ { $\alpha=-200$ }	8	2.5920×10^{-60}	17.1773×10^{-252}	5.5824
	PSH6 ₁ { $\alpha=200$ }	6	1.3778×10^{-102}	0.0	-
	PSH6 ₁ { $\alpha=350$ }	25	11.5360×10^{33}	74.2941×10^{66}	-

Tabla 4.3: Resultados numéricos dependientes de α para $F_1(x_1, x_2)$ y $x^{(0)} = (0.5, 3.0)^T$

En la Tabla 4.3, se muestran los resultados de la primera función no lineal ensayada, se obtiene un buen rendimiento para las familias dadas por el grupo 1, toda la familia converge a la solución en cinco iteraciones (para la precisión fija de la máquina a 2000 dígitos) o residuo casi nulo $\|F(x^{(k+1)})\|$. El orden de convergencia de aproximación computacional en este grupo es inestable como en los otros conjuntos familiares. Contrariamente a lo esperado respecto a los valores del segundo grupo, se observa un buen rendimiento para la mayoría de la familia del grupo 2, sólo para $\alpha = 350$ no se observa convergencia a las raíces después del número máximo de iteraciones, observe la diferencia entre los dos últimos iterados ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$) y el resto ($\|F(x^{(k+1)})\|$) en el paso 25.

4.3 Análisis de estabilidad de la familia iterativa actuando sobre la función polinómica vectorial de variables no separadas $q(x)$

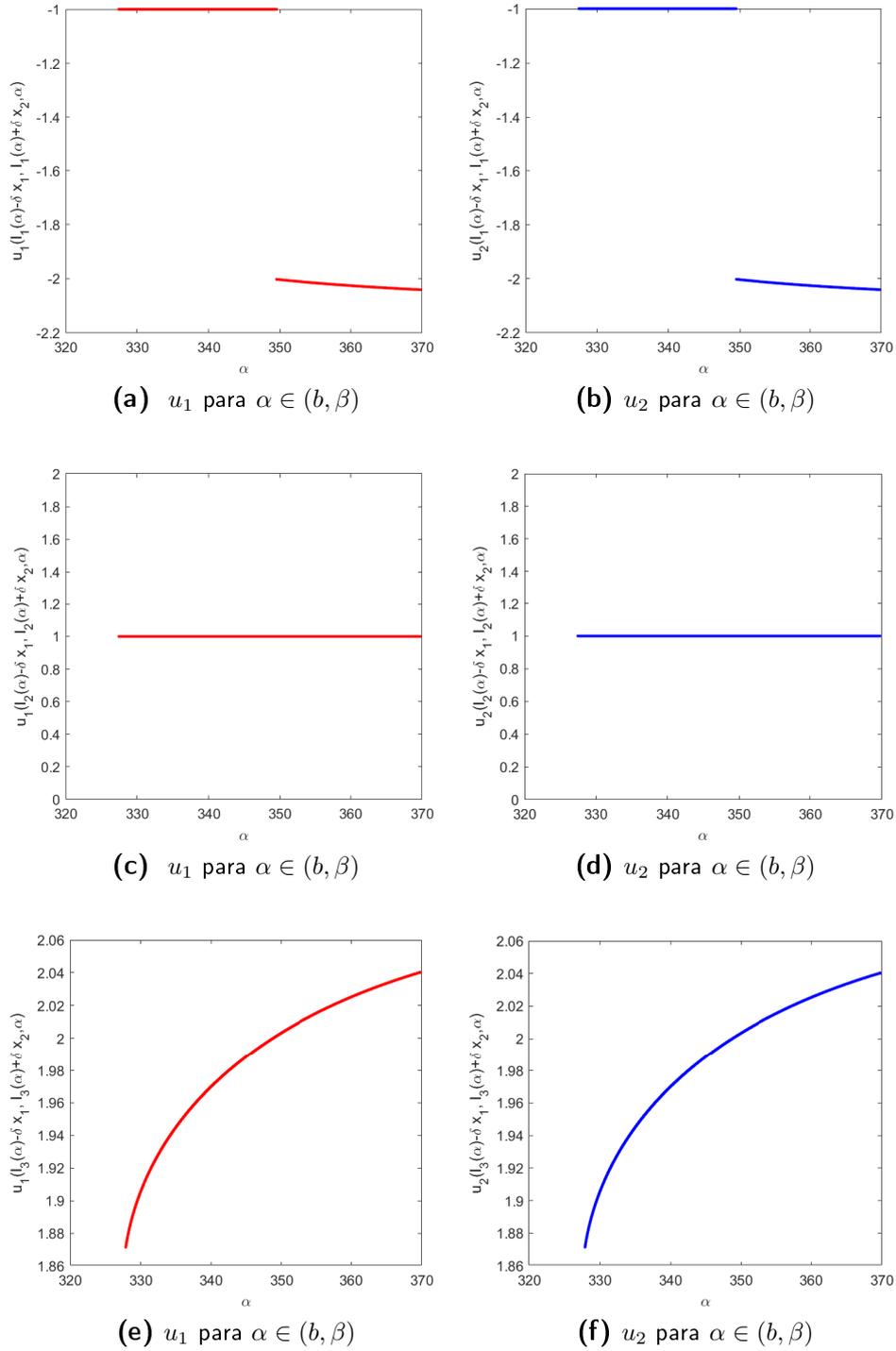


Figura 4.19: Diagramas de bifurcación relacionados con la perturbación de los puntos fijos (l_i, l_i) para $i \in \{1, 2, 3\}$ en el dominio $\alpha \in (b, \beta)$

Ejemplo 2. La segunda función no lineal describe un sistema con solución $\xi \approx (0.5, 0.0, -0.5236)^T$,

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5, x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06, e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{1}{3}(10\pi - 3)).$$

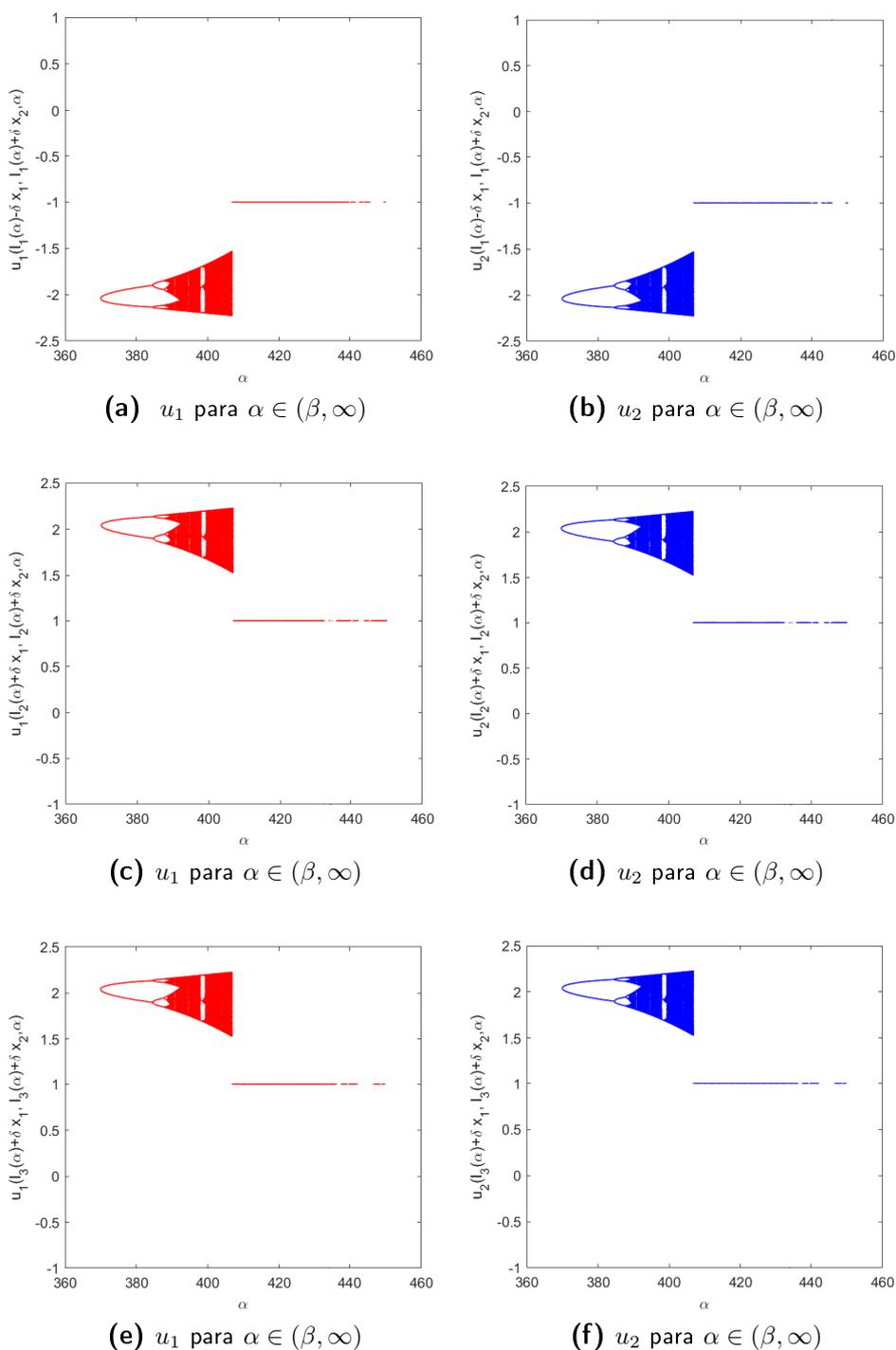
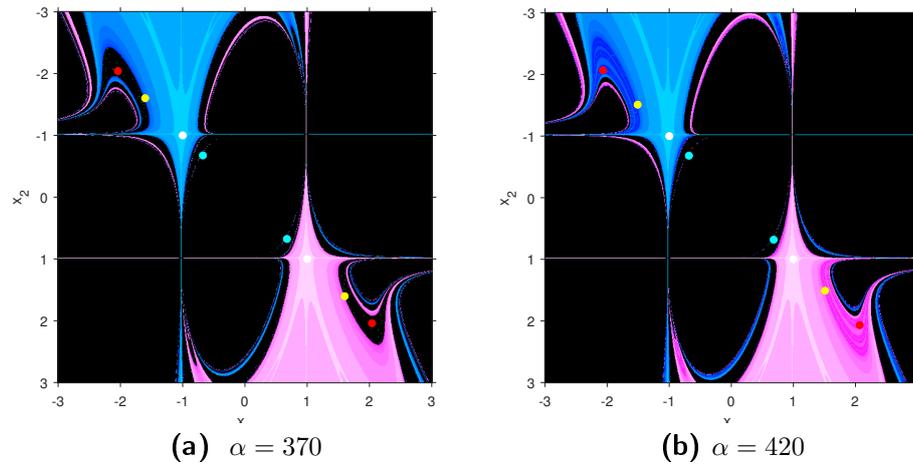


Figura 4.20: Diagramas de bifurcación relacionados con el punto fijo perturbado (l_i, l_i) para $i \in \{1, 2, 3\}$ en el dominio $\alpha \in (\beta, \infty)$

Probamos el segundo sistema con la estimación inicial $x^{(0)} = (1.0, 1.0, 1.0)^T$. Los resultados del estudio de la segunda función no lineal se muestran en la Tabla 4.4. Como esperábamos, se obtiene un buen rendimiento para las familias dadas por el grupo 1, todas convergen a la solución en seis iteraciones para las dos primeras y dieciocho para la tercera, el residuo es nulo en todos los casos. El orden de convergencia de aproximación computacional describe bastante bien el

Figura 4.21: Planos dinámicos para $\alpha = 370, 420$

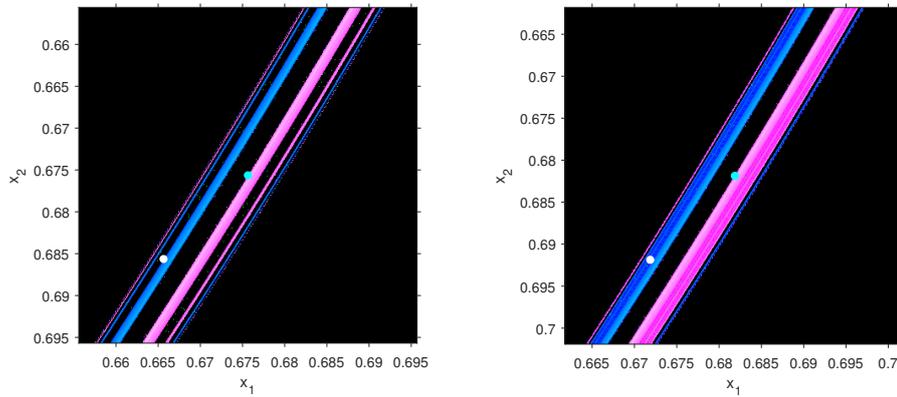
Grupo	Familia	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	$ACOC$
1	$PSH6_1\{\alpha=0.0\}$	6	$431.6652 \times 10^{-177}$	0.0	5.8341
	$PSH6_1\{\alpha=-5\}$	6	$409.7626 \times 10^{-144}$	0.0	5.9192
	$PSH6_1\{\alpha=-90\}$	18	1.7141×10^{-120}	0.0	-
2	$PSH6_1\{\alpha=-200\}$	3	NaN	NaN	NaN
	$PSH6_1\{\alpha=200\}$	7	NaN	NaN	NaN
	$PSH6_1\{\alpha=350\}$	1	NaN	NaN	NaN

Tabla 4.4: Resultados numéricos dependientes de α para $F_2(x_1, x_2, x_3)$ y $x^{(0)} = (1.0, 1.0, 1.0)^T$

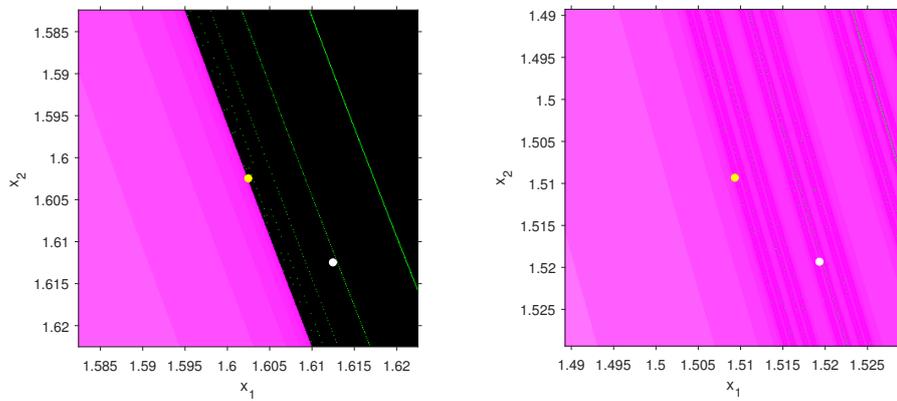
orden teórico en dos casos y es inestable en el otro. En cuanto al segundo grupo, se han cumplido nuestras expectativas y no se obtiene convergencia a la solución después de 25 iteraciones para la primera familia, y para el resto de casos de ese grupo el cálculo se aborta por valores no numéricos.

4.4 Conclusiones

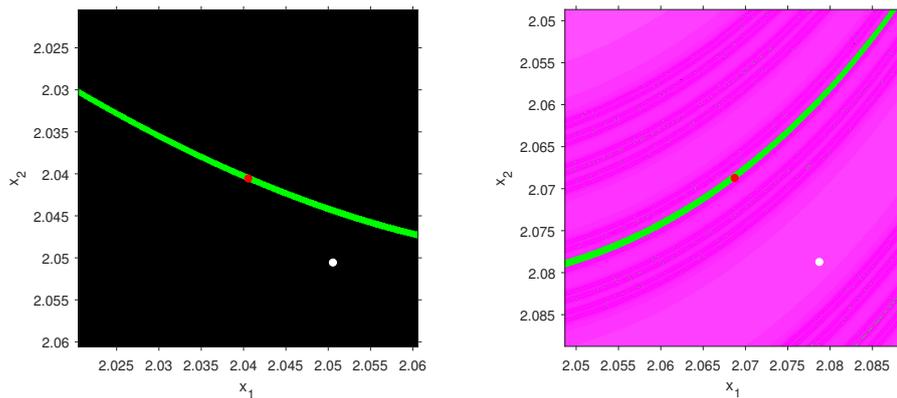
La familia iterativa estudiada, muestra un buen rendimiento numérico para el primer grupo de valores del parámetro α para los sistemas propuestos como se había conjeturado. Respecto al segundo grupo de valores se han cumplido parcialmente las expectativas, un mal rendimiento esperado para el segundo sistema y bueno para el primero. Esto nos lleva a concluir que, en sentido general, es preferible utilizar aquellos valores del parámetro que han mostrado un buen rendimiento con los polinomios de prueba.



(a) (l_1, l_1) y su perturbación para $\alpha = 370$ (b) (l_1, l_1) y su perturbación para $\alpha = 420$



(c) (l_2, l_2) y su perturbación para $\alpha = 370$ (d) (l_2, l_2) y su perturbación para $\alpha = 420$



(e) (l_3, l_3) y su perturbación para $\alpha = 370$ (f) (l_3, l_3) y su perturbación para $\alpha = 420$

Figura 4.22: Planos dinámicos en áreas pequeñas alrededor de cada punto fijo y sus perturbaciones en el dominio $\alpha \in (b, \infty)$

Capítulo 5

Clase de métodos iterativos tipo Ermankov-Kalitkin

[22] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2021) Convergence and Dynamical Study of a New six Order Convergence Iterative Method for Solving Non Linear Equation Systems. *AIMS Mathematics* 2023; 8(6):12751-12777. doi: 10.3934/math.2023642

5.1 Introducción

Para asegurar la convergencia del procedimiento de Newton es necesaria una aproximación inicial cercana a las soluciones, sin embargo en general, la modelización de los problemas técnicos y científicos no siempre cumplen esta condición. Para ampliar el conjunto de estimaciones iniciales convergentes se diseñó una modificación del esquema clásico de Newton para el caso escalar $f(x) = 0$ en [79, 86] como

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \frac{f(x)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.1)$$

donde γ_k se define como una secuencia de números reales en función de las iteraciones anteriores.

Observemos que, para valores fijos de γ_k a lo largo del proceso iterativo, el orden de convergencia es sólo lineal. Sin embargo, si se calcula en cada iteración a partir de la información disponible, se mantiene la convergencia cuadrática y los conjuntos de estimaciones iniciales convergentes son más amplios (véase [15]).

Una de las posibilidades para γ_k se debe a Ermankov y Kalitkin y está dada por la expresión (véase [79]),

$$\gamma_k = \frac{f(x_k)^2}{f(x_k)^2 + f(x_k - \frac{f(x)}{f'(x_k)})^2}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

siguiendo esta línea, en [15], Budzko, Cordero y Torregrosa diseñaron un esquema de dos pasos para ecuaciones y también propusieron su extensión para sistemas. En el caso escalar, el paso predictor es un método de Newton amortiguado, como en (5.1) con $\gamma_k = \alpha$ y el paso corrector es del tipo Ermankov - Kalitkin. La expresión del esquema iterativo para ecuaciones es:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - \gamma_{keq} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

siendo $\gamma_{keq} = \frac{f(x_k)^2}{bf(x_k)^2 + cf(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)})^2}$.

En el caso multidimensional, para los sistemas de ecuaciones $F(x) = 0$, el coeficiente γ_{keq} se transforma en

$$\Gamma_{sys}^{(k)}(\alpha, b, c) = \left[bI + c\alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha} I - [F'(x^{(k)})]^{-1} [x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1},$$

y el esquema iterativo adopta la forma

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - \alpha [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x_k) \\ x^{k+1} &= y^{(k)} - \Gamma_{sys}^{(k)}(\alpha, b, c) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

siendo I la matriz identidad, $[y^{(k)}, x^{(k)}; F]$ el operador de diferencias divididas y α, b, c parámetros libres.

En el contexto de lo anteriormente descrito, en este capítulo se propone y estudia una nueva clase (PM_{KE}) para la resolución de sistemas no lineales. Estos métodos tienen matriz Jacobiana congelada y sexto orden de convergencia. Con el fin de ampliar las regiones de puntos de partida que aseguren la convergencia, esta familia se ha diseñado con el procedimiento clásico de Newton en el primer paso, en el segundo paso un factor de amortiguación del tipo Ermankov-Kalitkin y el tercer paso se basa en un procedimiento con función peso. Para esta clase, el coeficiente amortiguado en el segundo paso para los sistemas tiene la forma $\Gamma_{sys}^{(k)}(1, 1, 1) = \Gamma^{(k)}$.

Como construimos toda una clase de procedimientos iterativos dependiendo de la función peso a seleccionar, aplicamos técnicas de sistemas dinámicos discretos para seleccionar aquellos miembros con mejores propiedades de estabilidad.

Entendemos estas mejoras en términos de la amplitud de los conjuntos de estimaciones iniciales capaces de converger a las raíces de problemas no lineales. En [42], los autores desarrollaron un procedimiento para realizar este tipo de análisis mediante dinámica real multidimensional. A partir de ese momento, diferentes autores han utilizado esta técnica (o la dinámica compleja si se vuelve al caso escalar) para estudiar el comportamiento cualitativo de los esquemas iterativos diseñados. Véase, por ejemplo, [3, 17, 27, 45–47, 55], entre otros.

5.2 Análisis de convergencia de la clase propuesta PM_{KE}

Consideremos el método iterativo de tres pasos PM_{KE}

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \Gamma^{(k)}F'(x^{(k)})^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - H(\tau^{(k)})F'(x^{(k)})^{-1}F(z^{(k)}), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

siendo $\Gamma^{(k)} = \left[I - \left(I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[y^{(k)}, x^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1}$ y $\tau^{(k)} = I + [F'(x^{(k)})]^{-1}[z^{(k)}, y^{(k)}; F]\Gamma^{(k)}$. En el siguiente resultado enunciamos las condiciones que deben satisfacerse para obtener la convergencia de quinto y sexto orden de la clase (5.2).

Teorema 17. *Consideremos una función suficientemente Fréchet diferenciable $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en una región abierta D de su cero $\xi \in \mathbb{R}$, y $H : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una función matricial suficientemente diferenciable. Supongamos también que $F'(\xi)$ es no singular y $x^{(0)}$ es una estimación inicial lo suficientemente cerca de ξ . Entonces, la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ obtenida de (5.2) converge a ξ con orden 5 si $H_0 = (2 + H_2)I$ y $|H_2| < \infty$, siendo I la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y $H_0 = H(I)$. En este caso, la ecuación del error es*

$$e^{(k+1)} = -8(-1 + H_2)C_2^4 e^{(k)5} + O(e^{(k)6}).$$

Además, si $H_2 = 1$, el orden de convergencia es seis y la ecuación del error es

$$e^{(k+1)} = (24C_2^5 - 4C_3C_2^3) e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),$$

siendo $C_q = \frac{1}{q!}[F'(\xi)]^{-1}F^{(q)}(\xi)$, $q = 2, 3, \dots$

Demostración. Mediante el desarrollo de Taylor de $F(x)$ alrededor de ξ , obtenemos la expansión de $F(x^{(k)})$, $F'(x^{(k)})$, $F''(x^{(k)})$ y $F'''(x^{(k)})$ alrededor de ξ como hemos dicho en el Capítulo 2, véase (2.11). Por otra parte,

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} = \left[I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3} + X_5e^{(k)4} + X_6e^{(k)5} \right] [F'(\xi)]^{-1} + O(e^{(k)5}) \quad (5.3)$$

donde $X_2 = 2C_2$, $X_3 = -3C_3 + 4C_2^2$, $X_4 = -4C_4 + 6C_2C_3 + 6C_3C_2 - 8C_2^3$, $X_5 = -5C_5 + 8C_2C_4 - 12C_2^2C_3 + 9C_3^2 + 8C_4C_2 - 12C_2C_3C_2 + 16C_2^4 - 12C_3C_2^2$, y

$$\begin{aligned} X_6 &= -32C_2^5 + 24C_2^3C_3 - 18C_2C_3^2 - 16C_2^2C_4 + 12C_3C_4 + 10C_2C_5 - 6C_6 \\ &= +24C_2^2C_3C_2 + 18C_3^2C_2 - 16C_2C_4C_2 + 10C_5C_2 + 24C_2C_3C_2^2 - 16C_4C_2^2 \\ &= +24C_3C_2^3 + 12C_4C_3 - 18C_3C_2C_3, \end{aligned}$$

como se puede observar en (2.14) del Capítulo 2. Entonces,

$$\begin{aligned}
 [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) &= e^{(k)} - C_2e^{(k)2} + 2(C_2^2 - C_3)e^{(k)3} + (4C_2C_3 + 3C_3C_2 - 4C_2^3 - 3C_4)e^{(k)4} \\
 &\quad + (-4C_5 + 6C_2C_4 - 8C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 4C_4C_2 - 6C_2C_3C_2 + 8C_2^4 - 6C_3C_2^2)e^{(k)5} \\
 &\quad + (-16C_2^5 + 16C_2^3C_3 - 12C_2C_3^2 - 12C_2^2C_4 + 9C_3C_4 + 8C_2C_5 - 5C_6 \\
 &\quad + 12C_2^2C_3C_2 - 9C_3^2C_2 - 8C_2C_4C_2 + 5C_5C_2 + 12C_2C_3C_2^2 - 8C_4C_2^2 + 12C_3C_2^3 + 8C_4C_3 \\
 &\quad - 12C_3C_2C_3)e^{(k)6} + O(e^{(k)7})
 \end{aligned}$$

y a partir de aquí

$$\begin{aligned}
 y^{(k)} - \xi &= C_2e^{(k)2} - 2(C_2^2 - C_3)e^{(k)3} - (4C_2C_3 + 3C_3C_2 - 4C_2^3 - 3C_4)e^{(k)4} - (-4C_5 + 6C_2C_4 - 8C_2^2C_3 \\
 &\quad + 6C_3^2 + 4C_4C_2 - 6C_2C_3C_2 + 8C_2^4 - 6C_3C_2^2)e^{(k)5} - (-16C_2^5 + 16C_2^3C_3 - 12C_2C_3^2 - 12C_2^2C_4 \\
 &\quad + 9C_3C_4 + 8C_2C_5 - 5C_6 + 12C_2^2C_3C_2 - 9C_3^2C_2 - 8C_2C_4C_2 + 5C_5C_2 + 12C_2C_3C_2^2 - 8C_4C_2^2 + 12C_3C_2^3 \\
 &\quad + 8C_4C_3 - 12C_3C_2C_3)e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 F(y^{(k)}) &= F'(\xi) \left[C_2e^{(k)2} + 2(C_3 - C_2^2)e^{(k)3} + (3C_4 + 5C_2^3 - 3C_3C_2 - 4C_2C_3)e^{(k)4} \right. \\
 &\quad + (4C_5 - 6C_2C_4 + 10C_2^2C_3 - 6C_3^2 - 4C_4C_2 + 8C_2C_3C_2 - 12C_2^4 + 6C_3C_2^2)e^{(k)5} \\
 &\quad + (28C_2^5 - 27C_2^3C_3 + 16C_2C_3^2 + 15C_2^2C_4 - 9C_3C_4 - 8C_2C_5 + 5C_6 - 16C_2^2C_3C_2 + 9C_3^2C_2 \\
 &\quad \left. + 11C_2C_4C_2 - 5C_5C_2 - 19C_2C_3C_2^2 + 8C_4C_2^2 - 11C_3C_2^3 - 8C_4C_3 + 12C_3C_2C_3)e^{(k)6} \right] + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ahora, podemos desarrollar el último producto del segundo paso como

$$\begin{aligned}
 [F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}) &= C_2e^{(k)2} + (2C_3 - 4C_2^2)e^{(k)3} + (13C_2^3 - 8C_2C_3 + 3C_4 - 6C_3C_2)e^{(k)4} + (-38C_2^4 \\
 &\quad + 26C_2^2C_3 - 12C_3^2 - 12C_2C_4 + 4C_5 + 20C_2C_3C_2 - 18C_3C_2^2 - 8C_4C_2)e^{(k)5} \\
 &\quad + (104C_2^5 - 79C_2^3C_3 + 40C_2C_3^2 + 39C_2^2C_4 - 18C_3C_4 - 16C_2C_5 + 5C_6 - 56C_2^2C_3C_2 \\
 &\quad + 27C_3^2C_2 + 27C_2C_4C_2 - 10C_5C_2 - 55C_2C_3C_2^2 + 24C_4C_2^2 - 50C_3C_2^3 - 16C_4C_3 \\
 &\quad + 36C_3C_2C_3)e^{(k)6} + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Usando (3.9) para el operador de diferencias divididas $[y, x; F]$ y (5.3) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
 [F'(x^{(k)})]^{-1}[y^{(k)}, x^{(k)}; F] = & I - C_2 e^{(k)} + (3C_2^2 - 2C_3) e^{(k)2} + (-8C_2^3 + 6C_2C_3 - 2C_4 + 4C_3C_2) e^{(k)3} \\
 & + (20C_2^4 - 16C_2^2C_3 + 8C_3^2 + 7C_2C_4 - 11C_2C_3C_2 + 2C_4C_2 - 10C_3C_2^2) e^{(k)4} \\
 & + (-48C_2^5 + 40C_2^3C_3 - 22C_2C_3^2 - 20C_2^2C_4 + 9C_3C_4 + 4C_2C_5 + 5C_6 \\
 & + 28C_2^2C_3C_2 - 13C_3^2C_2 - 8C_2C_4C_2 - 5C_5C_2 \\
 & + 26C_2C_3C_2^2 - 4C_4C_2^2 + 24C_3C_2^3 + 4C_4C_3 - 20C_3C_2C_3) e^{(k)5} \\
 & + (112C_2^6 - 96C_2^4C_3 + 56C_2^2C_3^2 - 26C_3^3 + 52C_2^3C_4 \\
 & - 27C_2C_3C_4 + 2C_4^2 - 16C_2^2C_5 + 4C_3C_5 - 5C_2C_6 + 14C_7 - 56C_2^3C_3C_2 \\
 & + 35C_2C_3^2C_2 + 24C_2^2C_4C_2 - 7C_3C_4C_2 + 5C_2C_5C_2 - 19C_6C_2 - 64C_2^2C_3C_2^2 + 29C_3^2C_2^2 \\
 & + 16C_2C_4C_2^2 + 15C_5C_2^2 + 8C_4C_2^3 - 60C_2C_3C_2^3 - 56C_3C_4^2 - 16C_2C_4C_3 - 10C_5C_3 \\
 & + 52C_2C_3C_2C_3 - 8C_4C_2C_3 + 48C_3C_2^2C_3 - 24C_3C_2C_4 - 12C_2^3C_3C_2 - 2C_4C_3C_2 \\
 & + 32C_3C_2C_3C_2) e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),
 \end{aligned}$$

que usaremos para el desarrollo de Taylor en torno a la solución del término $B = I + (I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F])^2$ en el segundo paso de (5.2):

$$\begin{aligned}
 B = I + C_2^2 e^{(k)2} + (-6C_2^3 + 2C_2C_3 + 2C_3C_2) e^{(k)3} + (25C_2^4 - 12C_2^2C_3 \\
 + 4C_3^2 + 2C_2C_4 + 2C_4C_2 - 10C_2C_3C_2) e^{(k)4} + O(e^{(k)5}).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Busquemos ahora la inversa de B que puede definirse como $B^{-1} = \Gamma^{(k)} = I + K_1 e^{(k)} + K_2 e^{(k)2} + K_3 e^{(k)3} + K_4 e^{(k)4} + O(e^{(k)5})$. Fijando la condición $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ podemos hallar los coeficientes:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 0, \\
 K_2 &= -C_2^2, \\
 K_3 &= 2(3C_2^3 - C_2C_3 - C_3C_2), \\
 K_4 &= C_2^3 - 25C_2^4 + 12C_2^2C_3 - 4C_3^2 - 2C_2C_4 + 10C_2C_3C_2 + 10C_3C_2^2 - 2C_4C_2,
 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(k)} = I - C_2^2 e^{(k)2} + 2(3C_2^3 - C_2C_3 - C_3C_2) e^{(k)3} + (C_2^3 - 25C_2^4 + 12C_2^2C_3 - 4C_3^2 - 2C_2C_4 + 10C_2C_3C_2 \\
 - 10C_3C_2^2 + 2C_4C_2) e^{(k)4} + O(e^{(k)5}).
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Con la ayuda de las expresiones (5.4), (5.6) y (5.8), obtenemos el error en el segundo paso:

$$\begin{aligned}
 z^{(k)} - \xi &= (y^{(k)} - \xi) - \left[I + \left(I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1} F'(x^{(k)})^{-1} F(y^{(k)}) \\
 &= 2C_2^2 e^{(k)3} + \left(-8C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2 \right) e^{(k)4} \\
 &+ \left(20C_2^4 - 14C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 6C_2C_4 - 12C_2C_3C_2 + 4C_4C_2 - 12C_3C_2^2 \right) e^{(k)5} \\
 &+ \left(C_2^4 + 42C_2^5 - 39C_2^3C_3 + 32C_2C_3^2 + 34C_2^2C_4 - 18C_3C_4 + 5C_6 - 16C_2C_5 - 32C_2^2C_3C_2 + 23C_3^2C_2 \right. \\
 &\left. + 25C_2C_4C_2 - 10C_5C_2 - 45C_2C_3C_2^2 + 24C_4C_2^2 - 50C_3C_2^3 - 16C_4C_3 + 36C_3C_2C_3 \right) e^{(k)6} + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Para obtener la ecuación del error, obtenemos primero la diferencia dividida de primer orden $[z^{(k)}, y^{(k)}; F]$, sabiendo que

$$h^{(k)} = z^{(k)} - y^{(k)} = -C_2 e^{(k)2} + \left(4C_2^2 - 2C_3 \right) e^{(k)3} + O(e^{(k)4}) \tag{5.10}$$

y

$$\begin{aligned}
 F(z^{(k)}) &= F'(\xi) \left[(z^{(k)} - \xi) + C_2(z^{(k)} - \xi)^2 \right] + O((z^{(k)} - \xi)^3) \\
 &= F'(\xi) \left[2C_2^2 e^{(k)3} + \left(-8C_2^3 + 4C_2C_3 + 3C_3C_2 \right) e^{(k)4} \right. \\
 &+ \left(20C_2^4 - 14C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 6C_2C_4 + 4C_4C_2 - 12C_2C_3C_2 - 12C_3C_2^2 \right) e^{(k)5} \\
 &+ \left(-22C_2^5 - C_2^4 + 23C_2^3C_3 - 20C_2C_3^2 + 9C_3C_4 - 22C_2^2C_4 + 20C_2^2C_3C_2 + 8C_2C_5 - 14C_3^2C_2 \right. \\
 &\left. - 17C_2C_4C_2 + 33C_2C_3C_2^2 + 5C_5C_2 + 38C_3C_2^3 - 16C_4C_2^2 + 8C_4C_3 - 24C_3C_2C_3 \right) e^{(k)6} \left. \right] + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Usando (5.10) y la fórmula de Hermite-Genocchi obtenemos

$$\begin{aligned}
 [z^{(k)}, y^{(k)}; F] &= F'(\xi) \left[I + C_2^2 e^{(k)2} + \left(3C_2C_4 - 4C_2^4 - 3C_2C_3C_2 + 4C_3C_2^2 \right) e^{(k)4} + \left(12C_2^5 - 8C_2^3C_3 - 6C_2C_3^2 \right. \right. \\
 &+ 2C_2C_3^2 + 4C_2C_5 + 8C_2C_3C_2^2 - 20C_3C_2^3 + 8C_3C_2C_3 \left. \right) e^{(k)5} + \left(-10C_2^6 - C_2^5 + 27C_2^4C_3 + 4C_3^3 \right. \\
 &- 12C_2^3C_4 + 5C_2C_6 - 9C_2C_3C_4 + 2C_2^3C_3C_2 + 25C_2C_3^2C_2 + 3C_3C_4C_2 - 9C_2^2C_4C_2 - 2C_3^2C_2^2 \\
 &- 11C_2^2C_3C_2^2 - 28C_2C_3C_2^3 - 2C_2C_4C_2^2 + 76C_3C_2^4 - 2C_4C_2^3 + 16C_2C_3C_2C_3 - 49C_3C_2^2C_3 \\
 &\left. \left. + 12C_3C_2C_4 - 26C_3C_2C_3C_2 \right) e^{(k)6} \right] + O(e^{(k)7}).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Con la ayuda de (5.3), (5.8) y (5.12) la variable $\tau^{(k)}$ se puede desarrollar como

$$\begin{aligned}
 \tau^{(k)} &= I + [F'(x^{(k)})]^{-1}[z^{(k)}, y^{(k)}; F] \left[I + \left(I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[y^{(k)}, x^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1} \\
 &= 2C_2 e^{(k)} + \left(-4C_2^2 + 3C_3 \right) e^{(k)^2} + \left(2C_2^3 - 6C_2C_3 + 4C_4 - 4C_3C_2 \right) e^{(k)^3} + \left(-C_2^3 + 26C_3^4 - 9C_2C_4 + 5C_5 \right. \\
 &\quad \left. + C_2C_3C_2 - 6C_4C_2 - 2C_3C_2^2 \right) e^{(k)^4} + \left(8C_2^4 - 152C_2^5 - 2C_2^2C_3 + 58C_2^3C_3 - 4C_2C_3^2 + 5C_2^2C_4 - 8C_3C_4 \right. \\
 &\quad \left. + 6C_6 - 14C_2C_5 + 37C_2^2C_3C_2 - 2C_2C_3C_2 + 3C_2C_4C_2 - 6C_3^2C_2 + 37C_2C_3C_2^2 - 10C_5C_2 + 8C_4C_2^2 \right) \\
 &\quad \left. + 52C_3C_2^3 - 8C_4C_3 - 10C_3C_2C_3 \right) e^{(k)^5} + \left(-40C_2^5 + 554C_2^6 + 16C_2^3C_3 - 295C_2^4C_3 - 4C_2C_3^2 + 82C_2^2C_3^2 \right. \\
 &\quad \left. - 21C_3^3 + 59C_3^2C_4 - 2C_2^2C_4 + 4C_2C_3C_4 - 12C_4^2 + 24C_2^2C_5 - 15C_3C_5 + 7C_7 - 22C_2C_6 + 14C_2^2C_3C_2 \right. \\
 &\quad \left. - 185C_2^3C_3C_2 + 42C_2C_3^2C_2 - 2C_2C_4C_2 + 37C_4C_2C_2^2 + 2C_3C_4C_2 + 21C_2C_5C_2 - 17C_6C_2 + 10C_2C_3C_2^2 \right. \\
 &\quad \left. - 195C_2^2C_3C_2^2 + 61C_3^2C_2^2 + 22C_2C_4C_2^2 + 3C_3C_2^3 + 25C_5C_2^2 + 20C_4C_2^3 - 222C_2C_3C_2^3 - 276C_3C_2^4 \right. \\
 &\quad \left. - 2C_2C_4C_3 - 15C_5C_3 + 86C_2C_3C_2C_3 + 8C_4C_2C_3 \right. \\
 &\quad \left. + 125C_3C_2^2C_3 - 7C_3C_2C_4 + 4C_4C_3C_2 + 81C_3C_2C_3C_2 \right) e^{(k)^6} + O(e^{(k)^7}). \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

Entonces, empleando (5.9), (5.11), (5.12), (5.13) y la expansión de Taylor de la función peso $H(\tau^{(k)}) = H_0 + H_1(\tau^{(k)} - I) + H_2(\tau^{(k)} - I)^2 + O((\tau^{(k)} - I)^3)$, siendo $H_0 = H(I)$ una matriz de tamaño $n \times n$ y H_1, H_2 coeficientes reales. La ecuación del error toma la forma

$$\begin{aligned}
 e^{(k+1)} &= \left(2C_2^2 - 2(H_0 + H_1I + H_2I)C_2^2 \right) e^{(k)^3} + \left(-8C_2^3 + 4C_3C_2 + 3C_3C_2 - 2(-2C_2H_1 - 4C_2H_2)C_2^2 \right. \\
 &\quad \left. - (H_0 + H_1I + H_2I) \left(-12C_2^3 + 4C_3C_2 + 3C_3C_2 \right) \right) e^{(k)^4} + \left(20C_2^4 - 16C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 6C_2C_4 - 12C_2C_3C_2 \right. \\
 &\quad \left. + 4C_4C_2 - 10C_3C_2^2 - 2 \left(H_1 \left(4C_2^2 - 3C_3 \right) + H_2 \left(12C_2^2 - 6C_3 \right) \right) C_2^2 - (-2H_1C_2 - 4H_2C_2) \left(-12C_2^3 + 4C_2C_3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3C_3C_2 \right) - (H_0 + H_1I + H_2I) \left(44C_2^4 - 24C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 6C_2C_4 - 18C_2C_3C_2 + 4C_4C_2 - 16C_3C_2^2 \right) \right) e^{(k)^5} \\
 &\quad + \left(-C_2^4 - 26C_2^5 + 43C_2^3C_3 - 24C_2^2C_3^2 - 24C_2^2C_4 + 9C_3C_4 + 8C_2C_5 + 26C_2^2C_3C_2 - 14C_3^2C_2 - 17C_2C_4C_2 \right. \\
 &\quad \left. + 5C_5C_2 + 25C_2C_3C_2^2 - 14C_4C_2^2 + 20C_3C_2^3 + 8C_4C_3 - 20C_3C_2C_3 - 2 \left(H_1 \left(-2C_2^3 + 6C_2C_3 - 4C_4 + 4C_3C_2 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + H_2 \left(-20C_2^3 + 18C_2C_3 - 8C_4 + 14C_3C_2 \right) \right) C_2^2 - \left(H_2 \left(12C_2^2 - 6C_3 \right) + H_1 \left(4C_2^2 - 3C_3 \right) \right) \left(-12C_2^3 + 4C_2C_3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3C_3C_2 \right) - (H_0 + H_1I + H_2I) \left(-C_2^4 - 110C_2^5 + 91C_2^3C_3 - 36C_2C_3^2 - 36C_2^2C_4 + 9C_3C_4 + 8C_2C_5 + 62C_2^2C_3C_2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 23C_3^2C_2 - 25C_2C_4C_2 + 5C_5C_2 + 57C_2C_3C_2^2 - 22C_4C_2^2 + 56C_3C_2^3 + 8C_4C_3 - 32C_3C_2C_3 \right) \right) e^{(k)^6} + O(e^{(k)^7}). \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Fijando $H_0 = (2 + H_2)I$ y $H_1 = -(1 + 2H_2)$, la ecuación del error toma la forma

$$e^{(k+1)} = -8(-1 + H_2)C_2^4 e^{(k)^5} + O(e^{(k)^6}).$$

Finalmente, haciendo $H_2 = 1$ obtenemos

$$e^{(k+1)} = (24C_2^5 - 4C_3C_2^3) e^{(k)^6} + O(e^{(k)^7}).$$

y la demostración está completa. \square

5.2.1 Subfamilias iterativas específicas de PM_{KE}

Una vez obtenidas las condiciones que debe cumplir la función peso, existen varias formas de definir la función peso matricial H , cada una de ellas genera una familia iterativa diferente.

Familia 1 La función peso definida por el polinomio

$$H(\tau) = \beta(\tau - 2I)^2 - \tau + 3I,$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ satisface la hipótesis del Teorema 17, genera una nueva clase paramétrica de quinto orden para $\beta \neq 1$ y un esquema simple de orden seis con $\beta = 1$

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \left[I + \left(I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1} F'(x^{(k)})^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - \left[\beta(\tau - 2I)^2 - \tau + 3I \right] F'(x^{(k)})^{-1}F(z^{(k)}), \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Esta familia se designa por $PM(\beta)_{KEp}$ dependiendo del parámetro β .

Familia 2 La función peso definida por

$$H(\tau) = (2 + \beta)\tau^{-1},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$, también satisface las hipótesis del Teorema 17 y genera una nueva clase de quinto y sexto orden con $\beta \neq 1$ y $\beta = 1$, respectivamente

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}), \\ z^{(k)} &= y^{(k)} - \left[I + \left(I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[x^{(k)}, y^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1} F'(x^{(k)})^{-1}F(y^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= z^{(k)} - (2 + \beta)\tau^{-1}F'(x^{(k)})^{-1}F(z^{(k)}), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

siendo $\tau^{(k)} = I + [F'(x^{(k)})]^{-1}[z^{(k)}, y^{(k)}; F] \left[I + \left(I - [F'(x^{(k)})]^{-1}[y^{(k)}, x^{(k)}; F] \right)^2 \right]^{-1}$ para las dos familias. En lo adelante, utilizaremos la familia 1 ($PM(\beta)_{KEp}$) para los estudios numéricos posteriores.

5.3 Resultados numéricos

A continuación mostramos el comportamiento de $PM(\beta)_{KEp}$ (descrito por (5.15)) en algunos ejemplos reales y lo comparamos con el método de Newton. Los valores de β utilizados ($\beta = 1, 2$) proporcionan convergencia de orden 6 y 5 respectivamente, de acuerdo con los resultados obtenidos del Teorema 17.

Para el desarrollo de las pruebas numéricas utilizamos el software Matlab con aritmética de precisión variable y 2000 dígitos de mantisa. Los experimentos se han realizado en un ordenador con CPU Intel(R) Core(TM) i7-1065G7 CPU @ 1.30GHz 1.50 GHz y 16.0 GB de RAM. El criterio de parada utilizado es $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$ o $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-200}$ a excepción del ejemplo último que es $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-6}$ o $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-6}$. Para cada sistema, se muestra una tabla de resultados, donde $x^{(0)}$ es la aproximación inicial, k es el número de iteraciones necesarias para converger ('nc' aparece en la tabla si el método no converge), el valor de los residuos $\|F(x^{(k+1)})\|$ o $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ en la última iteración ('-' si no hay convergencia) y el $ACOC$ definido en (2.6) del Capítulo 2.

Como hemos explicado anteriormente, es necesario determinar cuándo se alcanza la raíz ($\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-200}$) o sólo se trata de una convergencia muy lenta sin diferencia significativa entre los dos últimos iterados ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| <$

10^{-200} pero $\|F(x^{(k+1)})\| > 10^{-200}$, o se cumplen ambos criterios. Los sistemas de prueba no lineales utilizados son los siguientes:

Ejemplo 1. Este sistema tiene tamaño variable y tiene la solución $\xi \approx (0.5149, \dots, 0.5149)^T$. Se define por

$$x_i - \cos\left(2x_i - \sum_{j=1}^4 x_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tomando $n = 5$ y la estimación inicial es $x^{(0)} = (0.75, \dots, 0.75)^T$, los resultados se muestran en la Tabla 5.1.

$x^{(0)}$	Método(β)	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
(0.75, ..., 0.75)	PM(1) _{KEP}	3	53.9112×10^{-36}	334.579×10^{-210}	5.7320
	PM(2) _{KEP}	4	6.2324×10^{-141}	0.0	5
	N	11	$157.9286 \times 10^{-162}$	11.4870×10^{-321}	2

Tabla 5.1: Resultados numéricos de los métodos examinados para el Ejemplo 1.

En ella se puede observar que el método $PM(\beta)_{KEP}$ converge a la solución en menos iteraciones que el método de Newton como cabría esperar. En el caso de $PM(2)_{KEP}$, la convergencia se produce con residuo nulo $\|F(x^{(k+1)})\|$ (para la precisión fija de la máquina en 2000 dígitos) o casi nulo para $PM(1)_{KEP}$ y los valores de los parámetros implicados. Además, el ACOG está en buena concordancia con el teórico como podemos esperar debido al Teorema 17.

Ejemplo 2. El siguiente sistema de tamaño $n = 10$ se define como

$$\arctan(x_i) + 1 - 2 \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 - x_i^2 \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

cuya solución es $\xi \approx (0.1758, \dots, 0.1758)^T$ y la estimación inicial utilizada es $x^{(0)} = (1.0, \dots, 1.0)^T$. Los resultados obtenidos figuran en la Tabla 5.2. La familia $PM(\beta)_{KEP}$ converge con residuo nulo $\|F(x^{(k+1)})\|$ en menos iteraciones que el método de Newton, el ACOG está en total acuerdo con el teórico.

$x^{(0)}$	Método(β)	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
(1.0, ..., 1.0)	PM(1) _{KEP}	5	20.4411×10^{-144}	0.0	6
	PM(2) _{KEP}	5	250.020×10^{-111}	0.0	5
	N	12	$168.3834 \times 10^{-108}$	$163.4591 \times 10^{-213}$	2

Tabla 5.2: Resultados numéricos de los métodos examinados para el Ejemplo 2.

Ejemplo 3. En este caso probamos la familia $PM(\beta)_{KEP}$ con un sistema no lineal de tamaño variable descrito como

$$-x_i + \sum_{j=1}^n x_j - x_i e^{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 20,$$

con $n = 20$. La estimación inicial $x^{(0)} = (0, 25, \dots, 0, 25)^T$ y la solución es $\xi = (0, 0, \dots, 0, 0)^T$. Los resultados se dan en la Tabla 5.3 y son similares a los obtenidos en el Ejemplo 2: menos iteraciones que el método de Newton, residuo $\|F(x^{(k+1)})\|$ nulo (para la precisión fija de la máquina en 2000 dígitos) o casi nulo y el orden de convergencia de aproximación computacional en buena concordancia con el teórico.

$x^{(0)}$	Método(β)	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC
(0.25, ..., 0.25)	PM(1) _{KEP}	3	16.2213×10^{-51}	5.8210×10^{-306}	6.0643
	PM(2) _{KEP}	4	36.0237×10^{-192}	0.0	5.0781
	N	11	$174.2412 \times 10^{-201}$	0.0	2

Tabla 5.3: Resultados numéricos de los métodos examinados para el Ejemplo 3.

Por último, mostramos el comportamiento del método $PM(\beta)_{KEP}$ (descrito por (5.15)) para $\beta = 1$ en la resolución numérica de una ecuación diferencial no lineal aplicando el método de diferencias finitas o método de las mallas. Este último consiste en lo siguiente: el dominio de la variación continua de los argumentos se sustituye por un conjunto finito de puntos (nodos) llamado malla. En lugar de las funciones de argumento continuo, se consideran funciones de argumento discreto (funciones de malla) definidas en los nudos de la malla. Las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial, se aproximan mediante los coeficientes de diferencias respectivos. Todo esto permite que la ecuación diferencial se sustituya por un sistema de ecuaciones algebraicas. Las condiciones iniciales y de frontera, se sustituyen por condiciones iniciales y de contorno en diferencias para las funciones de malla.

Ejemplo 4. Ecuación de Volterra. Esta ecuación diferencial describe el comportamiento de dos poblaciones en conflicto como pueden ser poblaciones de depredadores y presas. En este caso, representadas por las variables x y y , respectivamente. Nuestra ecuación diferencial a resolver dadas ciertas condiciones de fronteras es la siguiente:

$$\begin{aligned} yy'' - y'^2 + (y^2 - y)y' - 2(y^2 - y^3) &= 0 \\ y(x_0) &= 1 \\ y(x_n) &= 0.071. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Para obtener el sistema de ecuaciones no lineales equivalentes estudiamos el recinto $[x_0, x_n] = [0, 0.2]$, siendo el sistema de nodos equidistantes $x_i = x_0 + ih$ para $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ y con cierto paso $h = \frac{x_n - x_0}{n}$. Designando en cada nodo x_i los valores aproximados de la función $y(x)$ y sus derivadas por y_i, y'_i y y''_i respectivamente, planteamos en cada nodo interior las aproximaciones de las derivadas regidas por las expresiones de diferencias finitas

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h}, \tag{5.18}$$

sustituyendo (5.18) en (5.17) y tomando el número de subdivisiones $n = 20$, obtenemos un sistema de ecuaciones no lineales de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas

$$y_i(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) - (y_{i+1} - y_i)^2 + h(y_i^2 - y_i)(y_{i+1} - y_i) - 2h^2(y_i^2 - y_i^3) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 18. \tag{5.19}$$

Los resultados se ofrecen en la Tabla 5.4. En ella podemos observar un comportamiento muy similar entre las subfamilias $PM(1)_{KEP}$ y $PM(2)_{KEP}$ teniendo en cuenta el número de iteraciones y los criterios de parada. No obstante, como cabría esperar, el rendimiento de ambas familias es superior al del método de Newton.

5.4 Conclusiones

En este capítulo se ha diseñado una clase de esquemas iterativos de tres pasos con convergencia de quinto y sexto orden. Esta clase posee un primer paso de Newton, el segundo se ha construido utilizando el enfoque Ermankov-Kalitkin, que mejora la amplitud del conjunto de estimaciones iniciales convergentes y un tercer paso basado en una función peso

cuyas propiedades se plasman en el teorema de convergencia correspondiente. Los experimentos numéricos muestran un buen rendimiento para los valores seleccionados del parámetro libre y superior al del método de Newton dado por el menor número de iteraciones empleado en converger a la solución.

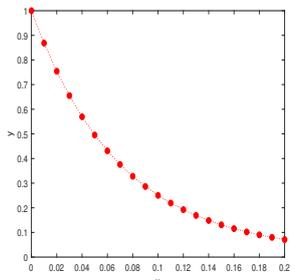
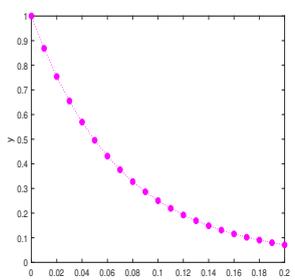
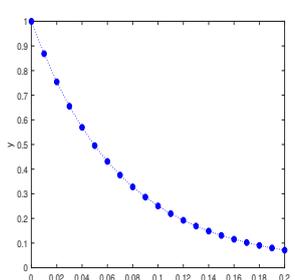
$x^{(0)}$	Método(β)	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC	Solución numérica
(1.0, ..., 1.0)	PM(1) _{KEP}	5	5.3747×10^{-4}	1.4356×10^{-14}	-	
(1.0, ..., 1.0)	PM(2) _{KEP}	5	7.9868×10^{-4}	7.0482×10^{-14}	-	
(1.0, ..., 1.0)	N	7	0.0036	3.3655×10^{-7}	2.0874	

Tabla 5.4: Resultados numéricos del método examinado para la ecuación de Volterra

Capítulo 6

Análisis Dinámico de la Clase iterativa tipo Ermankov-Kalitkin

[22] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2021) *Convergence and Dynamical Study of a New six Order Convergence Iterative Method for Solving Non Linear Equation Systems*. *AIMS Mathematics* 2023; 8(6):12751-12777. doi: 10.3934/math.2023642

6.1 Introducción

En este capítulo, estudiamos el rendimiento de la función racional vectorial obtenida aplicando la clase iterativa PM_{KE} y concretamente la familia $PM(\beta)_{KEp}$ actuando sobre el polinomio vectorial $p(x) = \{x_1^2 - 1, x_2^2 - 1\}$ para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Debido a la dependencia de esta familia respecto al parámetro libre, es importante estudiar la existencia de puntos fijos distintos de las raíces del sistema $p(x) = 0$, principalmente aquellos con carácter atractivo y otras estructuras atractivas que pueden ser interesantes desde el punto de vista dinámico. A lo largo de este análisis se derivarán aquellos valores del parámetro libre que conducen a una deseable convergencia a las raíces como de aquellos otros que no proporcionan un rendimiento estable del método iterativo y que podríamos considerar patológicos.

6.2 Análisis dinámico de la familia $PM(\beta)_{KEp}$

Así, aplicando el método $PM(\beta)_{KEp}$ (5.15) sobre $p(x)$, obtenemos el operador vectorial racional $G(x, \beta) = \{g_1(x, \beta), g_2(x, \beta)\}$, cuyas j -th coordenadas son

$$g_j(x, \beta) = \frac{1}{8x_j^3 (17x_j^4 - 2x_j^2 + 1)^6} \left(-\beta (x_j^2 - 1)^3 (169x_j^6 - 51x_j^4 + 11x_j^2 - 1) (409x_j^8 + 84x_j^6 + 14x_j^4)^2 + 4x_j^2 + 1 + 2 (17x_j^4 - 2x_j^2 + 1)^2 (-1 + 16x_j^2 - 135x_j^4 + 944x_j^6 - 4474x_j^8 + 21008x_j^{10} - 67422x_j^{12} + 204304x_j^{14} - 335157x_j^{16} + 374304x_j^{18} + 68757x_j^{20}) \right). \quad (6.1)$$

Teniendo en cuenta el último resultado, es posible formular el siguiente teorema sobre la estabilidad de los puntos fijos de $G(x, \beta)$.

Teorema 18. *Las duplas $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, son puntos fijos superatractivos de la función racional $G(x, \beta)$ que son ceros de $p(x)$. Además, denotando por \mathcal{B} el conjunto de puntos fijos extraños de $G(x, \beta)$, denotados por (l_i, l_j) , $(\pm 1, l_j)$ y $(l_i, \pm 1)$ para $i, j \leq 26$, cuyos elementos diferentes de ± 1 son ceros reales de*

$$l(t, \beta) = (153359006 + 28270489\beta)x_j^{26} + (-189944026 - 53459981\beta)x_j^{24} + (157699748 + 23572126\beta)x_j^{22} + (-80245084 + 748834\beta)x_j^{20} + (34849386 + 406419\beta)x_j^{18} + (-11271950 + 333817\beta)x_j^{16} + (3284120 + 129684\beta)x_j^{14} + (-758824 - 6964\beta)x_j^{12} + (159762 + 5039\beta)x_j^{10} + (-26838 + 565\beta)x_j^8 + (3972 - 18\beta)x_j^6 + (-444 - 14\beta)x_j^4 + (38 + 5\beta)x_j^2 - 2 - \beta$$

Por lo tanto, la cantidad de puntos fijos en \mathcal{B} dependientes de β :

- i) Si $\beta \in (-\infty, -61.956]$, \mathcal{B} está compuesto por treinta y seis puntos fijos repulsivos y veinticuatro puntos fijos extraños tipo sillas.
- ii) Si $\beta \in (-61.956, -5.4247)$, \mathcal{B} tiene la misma composición que el punto anterior.
- iii) Si $\beta \in (-5.4247, -4.8788)$, \mathcal{B} está compuesto por dieciséis puntos fijos repulsivos y dieciséis tipos silla.
- iv) Si $\beta \in [-4.8788, -2)$, la composición \mathcal{B} es la misma que la del punto anterior.
- v) Para $\beta \in [-2, -0.9328)$ existen sesenta puntos fijos extraños, cuyo carácter depende de β . Debido a su estabilidad, existen dos situaciones diferentes a tener en cuenta:
 - a) Si $\beta \in [-2, -0.9578)$, \mathcal{B} tiene la misma composición que el primer ítem.

b) Cuando $\beta \in (-0.9578, -0.9329)$, \mathcal{B} tiene doce puntos fijos atractores, dieciséis repulsores y treinta y dos extraños tipo silla.

vi) Si $\beta \in (-0.9329, +\infty)$, \mathcal{B} tiene cuatro puntos fijos repulsores y ocho puntos fijos extraños tipo silla.

Demostración. $G(x, \beta)$ es simétrica respecto a sus funciones componentes. Considerando que los puntos fijos son soluciones de la ecuación $g_j(x, \beta) = x_j$, $j = 1, 2$, obtenemos

$$(x_j^2 - 1)l(x_j, \beta) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (6.2)$$

donde

$$\begin{aligned} l(x_j, \beta) = & -\beta - 2 + (+38 + 38 + 5\beta)x_j^2 + (-444 - 14\beta)x_j^4 + (3972 - 18\beta)x_j^6 + (-26838 + 565\beta)x_j^8 \\ & + (159762 + 5039\beta)x_j^{10} + (-758824 - 6964\beta)x_j^{12} + (+3284120 + 129684\beta)x_j^{14} \\ & + (-11271950 + 333817\beta)x_j^{16} + (34849386 + 406419\beta)x_j^{18} + (-80245084 + 748834\beta)x_j^{20} \\ & + (157699748 + 23572126\beta)x_j^{22} + (-189944026 - 53459981\beta)x_j^{24} + (153359006 + 28270489\beta)x_j^{26}. \end{aligned}$$

Considerando (6.2), se observa que $x_j = \pm 1$ son soluciones de esta ecuación y por tanto $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ son puntos fijos del operador racional $G(x, \beta)$ y al mismo tiempo raíces del polinomio $p(x)$. Para estudiar la estabilidad del operador racional, se calcula la forma matricial diagonal del jacobiano asociado $G'(x, \beta)$.

$$G'(x, \beta) = \begin{pmatrix} J_1(x_1, \beta) & 0 \\ 0 & J_2(x_2, \beta) \end{pmatrix},$$

siendo

$$J_j(x_j, \beta) = -\frac{(x_j - 1)^2(x_j + 1)^2}{8x_1^4(17x_1^4 - 2x_j^2 + 1)} r(x_j), \quad j = 1, 2, \quad (6.3)$$

y

$$\begin{aligned} r(x_j) = & (480598313\beta - 675606282)x_j^{28} + (1615581902\beta + 3201012552)x_j^{26} \\ & + (1326760599\beta - 1571407002)x_j^{24} + (869157440 - 288459620\beta)x_j^{22} \\ & + (74267881\beta - 295949922)x_j^{20} + (17885090\beta + 109500040)x_j^{18} \\ & + (-5710273\beta - 34047410)x_j^{16} + (212808\beta + 10036672)x_j^{14} + \\ & + (148099\beta - 2525438)x_j^{12} + (522200 - 54734\beta)x_j^{10} + (-5971\beta - 90670)x_j^8 + (1884\beta + 11776)x_j^6 \\ & + (-533\beta - 1302)x_j^4 + (30\beta + 88)x_j^2 - 3\beta - 6. \end{aligned}$$

Es evidente que $J_j(\pm 1, \beta) = 0$, $j = 1, 2$, para cualquier β y por tanto los ceros de $p(x)$ son puntos fijos superatractivos dados por el hecho de que los valores propios de $G'((\pm 1, \pm 1), \beta)$ son nulos.

Los puntos fijos pueden calcularse mediante $l(t, \beta)$ haciendo la sustitución $s = t^2$, un polinomio de grado 13 es obtenido:

$$\begin{aligned} L(s, \beta) = & (153359006 + 28270489\beta)s^{13} + (-189944026 - 53459981\beta)s^{12} + (157699748 + 23572126\beta)s^{11} \\ & + (-80245084 + 748834\beta)s^{10} + (34849386 + 406419\beta)s^9 + (-11271950 + 333817\beta)s^8 \\ & + (3284120 + 129684\beta)s^7 + (-758824 - 6964\beta)s^6 + (159762 + 5039\beta)s^5 \\ & + (-26838 + 565\beta)s^4 + (3972 - 18\beta)s^3 + (-444 - 14\beta)s^2 + (38 + 5\beta)s - 2 - \beta. \end{aligned}$$

El operador $G(x, \beta)$ tiene puntos fijos reales que se simbolizan como L_i , siendo L_i cualquier raíz real y positiva de $L(s)$. Por tanto, la cantidad de componentes de \mathcal{B} está relacionada con el número de raíces reales y positivas de $L(s)$, así como sus combinaciones con ± 1 . Entonces,

- i) Se encuentran tres raíces reales y positivas L_1, L_2, L_3 si $\beta \in (-\infty, -61.956]$, las raíces $\{+\sqrt{L_1}, +\sqrt{L_2}, +\sqrt{L_3}, -\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_2}, -\sqrt{L_3}\}$ se denotan por l_i para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El conjunto de todos los puntos fijos extraños se obtiene combinando por pares $l_i, i = 1, 2, \dots, 6$ con ellos mismos y con 1 y -1 . En el primer caso tenemos que todos los pares combinados (l_i, l_k) son 36, en el segundo, el tipo de pares $(l_i, \pm 1), (\pm 1, l_i)$ son $12 + 12 = 24$. La información sobre la estabilidad de estos puntos fijos de $G(x, \beta)$ puede deducirse del análisis del valor absoluto de los valores propios de la matriz $G'((l_i, l_k), (\beta))$, $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; estas funciones de β se denominan funciones de estabilidad de los respectivos puntos fijos. Debido a la naturaleza del sistema polinómico, los valores propios son $\lambda((l_i, l_k), (\beta)) = J_1((l_i, l_k), (\beta)) = J_2((l_i, l_k), (\beta))$ for $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; sin embargo, si alguna de las componentes del punto fijo es ± 1 , el valor propio correspondiente es siempre nulo.

En la Figura 6.1 se muestran los valores de $|\lambda|$ asociados a la matriz jacobiana y evaluados en l_i para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, para todos ellos los correspondientes valores absolutos de λ son mayores que uno, por lo tanto el comportamiento de los puntos fijos extraños (l_i, l_k) es repulsor para el intervalo actual. En efecto, los puntos fijos $(l_i, \pm 1), (\pm 1, l_i)$, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ son puntos silla ya que uno de los valores propios es cero y el otro mayor que uno.

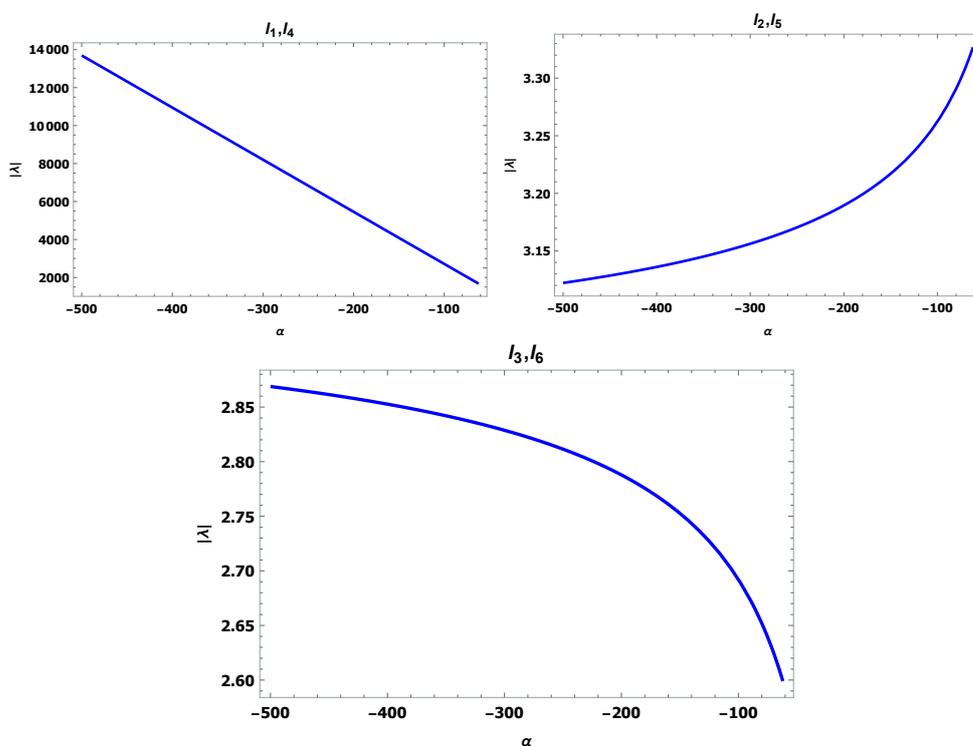


Figura 6.1: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_i, l_k), \beta)|$ para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\beta \in (-\infty, -61.956]$

- ii) La cantidad de puntos fijos para $\beta \in (-61.956, -5.4247)$ es la misma que en el caso anterior, debido a la existencia de tres raíces reales y positivas. La información sobre el comportamiento cualitativo de los puntos fijos puede extraerse de las funciones de estabilidad representadas en la figura 6.2. Para todas ellas, los correspondientes valores absolutos de λ son mayores que uno y por tanto los pares $(l_i, \pm 1), (\pm 1, l_i)$ son puntos silla para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- iii) Si $\beta \in (-5.4247, -4.8788)$ el polinomio $L(s)$ tiene dos raíces reales positivas L_1, L_2 y los elementos $\{+\sqrt{L_1}, +\sqrt{L_2}, -\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_2}\}$ son denotados por l_i for $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. El análisis de las funciones de estabilidad asociadas a los puntos fijos en la Figura 6.3, muestra que los pares (l_i, l_k) para $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ son repulsores, porque sus correspondientes $|\lambda|$ son mayores que uno, por lo tanto $(l_i, \pm 1)$ and $(\pm 1, l_i)$ son puntos fijos tipo silla.
- iv) Para $\beta \in [-4.8788, -2)$, la misma estructura y el mismo razonamiento toman lugar como en el caso anterior, véase la Figura 6.4.

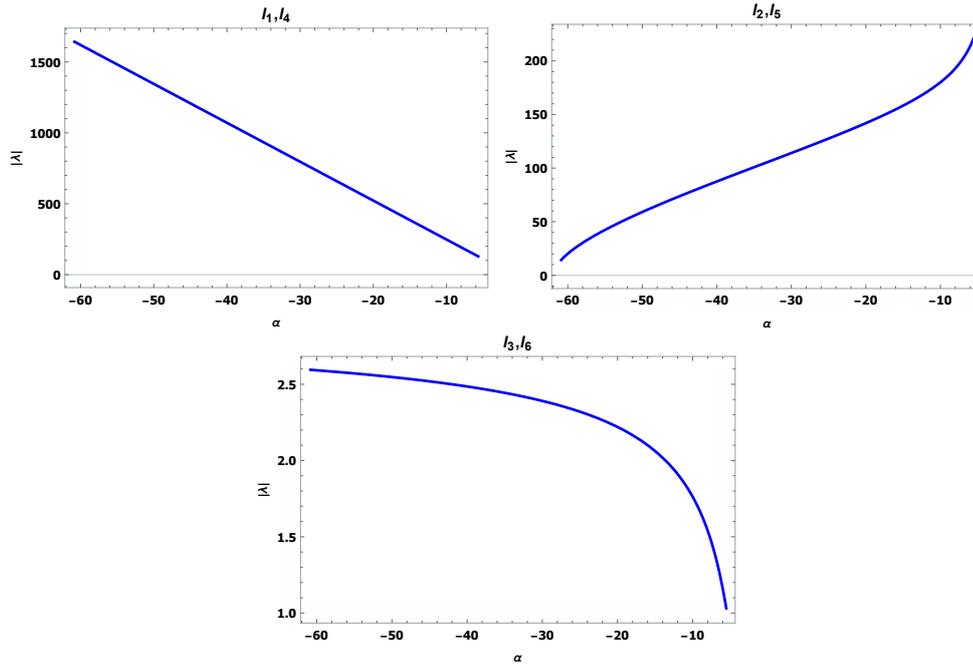


Figura 6.2: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_i, l_k), \beta)|$ para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\beta \in (-61.956, -5.4247)$

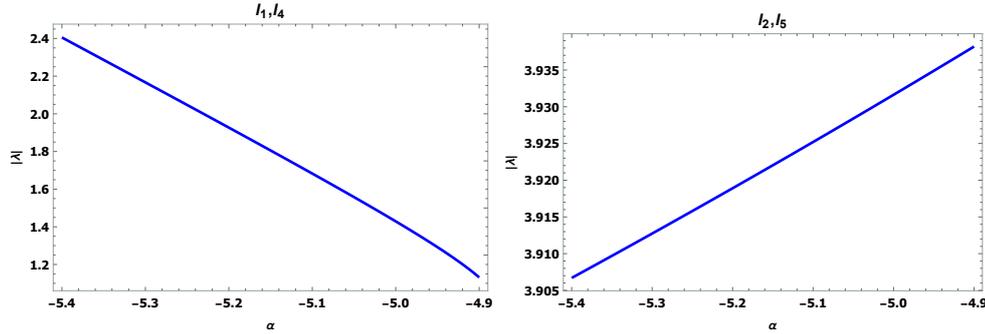


Figura 6.3: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_i, l_k), \beta)|$ para $i, k \in \{1, 2, 4, 5\}$ y $\beta \in (-5.4247, -4.8788)$

v) Como el primer punto, en este caso $L(s)$ tiene tres raíces reales positivas y los elementos l_i se denotan de la misma manera para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para algunos valores de β existen puntos fijos atractores, dichos valores pueden calcularse resolviendo la ecuación $|\lambda_j((l_i, l_k), (\beta))| = 1$, para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $j = 1, 2$. Como resultado hemos encontrado que los valores de $\beta_1 \approx -0.9578$ y $\beta_2 \approx -0.9328$ satisfacen la ecuación anterior, relacionada con los puntos fijos extraños (l_i, l_k) con $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Figuras 6.5(c) y 6.5(d).

- a) Para $\beta \in [-2, \beta_1)$ todos los treinta y seis pares (l_i, l_j) son puntos fijos repulsivos, ya que los valores absolutos de $|\lambda_j((l_i, l_k), (\beta))| > 1$ para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $j = 1, 2$. Por otra parte, pares como $(l_i, \pm 1)$, $(\pm 1, l_i)$ son puntos fijos silla y su cantidad es veinticuatro para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La estabilidad de cualquiera de estos puntos fijos se puede deducir de la Figura 6.5.
- b) No existen puntos fijos hiperbólicos para $\beta = \beta_1, \beta_2$. Cuando $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ la estabilidad de los puntos fijos $(l_i, \pm 1)$, $(\pm 1, l_k)$ y (l_i, l_k) para $i, k \in \{2, 5\}$, corresponden a una matriz jacobiana cuyos valores propios cumplen las condiciones $|\lambda_j((l_i, \pm 1), (\beta))| < 1$, $|\lambda_j((l_i, \pm 1), (\beta))| = 0$ y $|\lambda_j((l_i, l_k), (\beta))| < 1$, $|\lambda_j((l_i, l_k), (\beta))| = 0$ para $j = \{1, 2\}$, por lo que son atractivos y su cantidad es doce. Por otra parte,

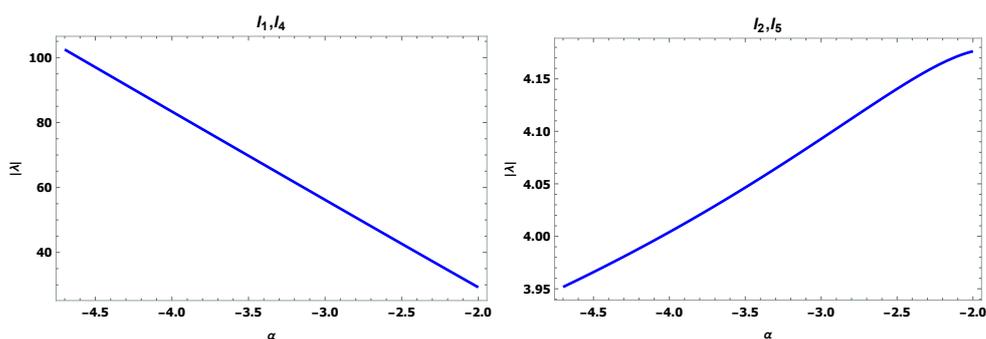


Figura 6.4: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_i, l_k), \beta)|$ for $i, k \in \{1, 2, 4, 5\}$ and $\beta \in [-4.8788, -2)$

todos los cuarenta y ocho pares (l_2, l_i) , (l_i, l_2) , (l_5, l_i) , (l_i, l_5) , $(\pm 1, l_i)$ y $(l_i, \pm 1)$ son puntos fijos silla debido a que $|\lambda_j((l_i, l_k), (\beta))| > 1$, para $i \in \{1, 3, 4, 6\}$, Figura 6.5.

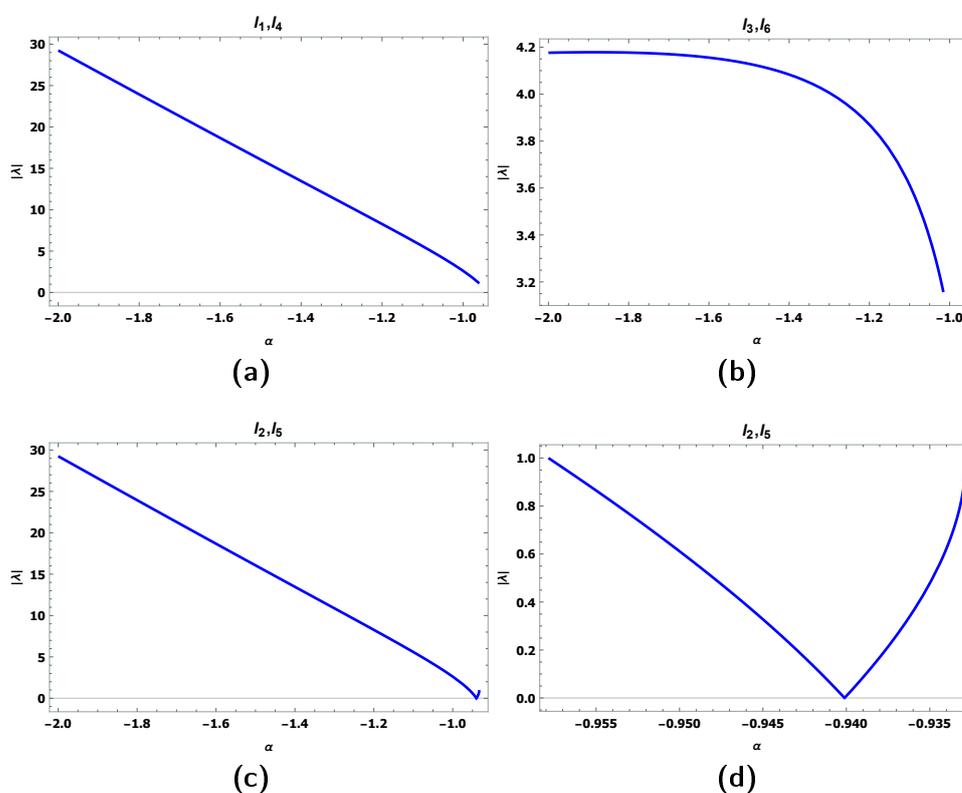


Figura 6.5: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_i, l_k), \beta)|$ para $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\beta \in [-2, -0.9328)$

vi) Finalmente, cuando $\beta \in (-0.9328, +\infty)$ el polinomio $L(s)$ tiene una raíz real positiva L_1 y los elementos $\{+\sqrt{L_1}, -\sqrt{L_1}\}$ son denotados por l_i para $i \in \{1, 4\}$. Los cuatro puntos fijos (l_i, l_k) para $i, k \in \{1, 4\}$ y $j = 1, 2$, son repulsivos ya que los valores absolutos cumplen $|\lambda_j((l_i, l_k), (\beta))| > 1$. Por otra parte, pares como $(l_1, \pm 1)$, $(\pm 1, l_1)$, $(l_4, \pm 1)$ (ocho en total) son puntos fijos silla debido a que $\lambda_j((\pm 1, \pm 1), \beta) = 0$ y $|\lambda_j((l_i, l_k), \beta)| > 1$ (véase la Figura 6.6).

□

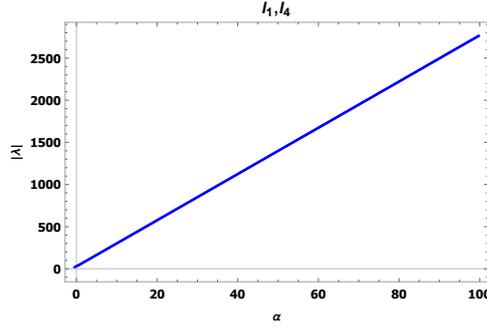


Figura 6.6: Funciones de estabilidad $|\lambda((l_i, l_k), \beta)|$ para $i, k \in \{1, 4\}$ y $\beta \in (-0.9328, +\infty)$

La estabilidad de los puntos fijos extraños ya es conocida y se ha demostrado que los puntos fijos atractivos sólo aparecen para $\beta \in (-0.9578, -0.9329)$. Sin embargo, además de estos últimos, existen otras estructuras atractivas cuyos valores del parámetro β también deben evitarse para conseguir un funcionamiento estable de los métodos iterativos. Estas estructuras deben buscarse en cuencas de atracción en las que también se encuentren los puntos críticos libres, aquellos distintos de las raíces de $p(x) = 0$. En relación con esto último, podemos hacer la siguiente afirmación sobre la localización de los puntos críticos.

Teorema 19. Sea \mathcal{K} el conjunto de los puntos críticos libres asociados al operador $G(x, \beta)$ relacionados con la familia iterativa (2) y sean los valores $\{\alpha_1 = -0.46806, \alpha_2 = 6.28814, \alpha_3 = 66.1728\}$ la colección de raíces reales de un polinomio de grado 23.

Entonces, \mathcal{K} es la colección de las duplas (q_i, q_j) , $(q_i, \pm 1)$ y $(\pm 1, q_j)$ para $i, j \leq 10$ cuyas entradas distintas de ± 1 son los ceros reales del polinomio

$$\begin{aligned} r(t) = & (480598313\beta - 675606282)t^{28} + (1615581902\beta + 3201012552)t^{26} + (1326760599\beta - 1571407002)t^{24} \\ & + (869157440 - 288459620\beta)t^{22} + (74267881\beta - 295949922)t^{20} + (17885090\beta + 109500040)t^{18} \\ & + (-5710273\beta - 34047410)t^{16} + (212808\beta + 10036672)t^{14} + (148099\beta - 2525438)t^{12} + \\ & + (522200 - 54734\beta)t^{10} + (-5971\beta - 90670)t^8 + (1884\beta + 11776)t^6 + (-533\beta - 1302)t^4 \\ & + (30\beta + 88)t^2 - 3\beta - 6. \end{aligned}$$

entonces, \mathcal{K} se compone de la siguiente manera:

- i) Si $\beta \in (-\infty, -2]$, \mathcal{K} contiene 12 puntos críticos libres.
- ii) Si $\beta \in (-2, -0.5]$, \mathcal{K} contiene 32 puntos críticos libres.
- iii) Si $\beta \in (-0.5, \alpha_1]$, \mathcal{K} contiene 100 puntos críticos libres.
- iv) Si $\beta \in (\alpha_1, 1.40576)$, \mathcal{K} contiene 32 puntos críticos libres.
- v) Si $\beta \in (1.40576, \alpha_2)$, $\beta \in [\alpha_2, \alpha_3)$ o $\beta \in (\alpha_3, +\infty)$, \mathcal{K} contiene 12 puntos críticos libres.

Demostración. Se sabe por el Teorema 18 que los valores propios de la matriz jacobiana $G'(x, \beta)$ son $\lambda_j(x, \beta) = J_j(x, \beta)$, para $j \in \{1, 2\}$, esto es,

$$\lambda_j(x, \beta) = -\frac{(x_j - 1)^2(x_j + 1)^2}{8x^{14}(17x^{14} - 2x_j^2 + 1)^7} r(x_j), \quad j = 1, 2, \quad (6.4)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 r(t) = & (480598313\beta - 675606282)t^{28} + (1615581902\beta + 3201012552)t^{26} + (1326760599\beta - 1571407002)t^{24} \\
 & + (869157440 - 288459620\beta)t^{22} + (74267881\beta - 295949922)t^{20} + (17885090\beta + 109500040)t^{18} \\
 & + (-5710273\beta - 34047410)t^{16} + (212808\beta + 10036672)t^{14} + (148099\beta - 2525438)t^{12} + \\
 & + (522200 - 54734\beta)t^{10} + (-5971\beta - 90670)t^8 + (1884\beta + 11776)t^6 + (-533\beta - 1302)t^4 \\
 & + (30\beta + 88)t^2 - 3\beta - 6.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Por otra parte, los puntos críticos son las soluciones de la ecuación $\lambda_j(x, \alpha) = 0$ para $j \in \{1, 2\}$ que se encuentran realizando el cambio de variable $t^2 = s$ en $r(t)$. Sus raíces (reales y positivas, simbolizadas como Q_j) serán las entradas de los puntos críticos libres, ya que $q_k = \pm\sqrt{Q_j}$. La cantidad de raíces positivas depende del valor del parámetro β , forzando a Q_j para que sea real:

- (i) Cuando $\beta \in (-\infty, -2]$, $r(s)$ tiene una raíz real positiva, denotada por Q_1 . Entonces, \mathcal{K} está compuesto por $(q_1, q_1), (q_1, q_5), (q_5, q_1)$ y (q_5, q_5) , donde $q_{1,5} = \pm\sqrt{Q_1}$ y también por ocho puntos críticos del tipo $(q_j, \pm 1)$ y $(\pm 1, q_j)$, $j \in \{1, 5\}$.
- (ii) Si $\beta \in (-2, -0.5]$, $r(s)$ sólo tiene dos raíces reales positivas Q_1 y Q_2 . Por tanto, $\mathcal{K} = \{(q_i, q_j), (q_i, \pm 1), (\pm 1, q_j) : i, j \in \{1, 2, 5, 6\}\}$, con 32 puntos críticos libres diferentes.
- (iii) Para $\beta \in (-0.5, \alpha_1]$, existen cuatro raíces reales positivas del polinomio $r(s)$: Q_1, Q_2, Q_3 and Q_4 . Así que, \mathcal{K} tiene elementos del tipo (q_i, q_j) , siendo $i, j \in \{1, 2, \dots, 8\}$, donde $q_{1,5} = \pm\sqrt{Q_1}$, $q_{2,6} = \pm\sqrt{Q_2}$, $q_{3,7} = \pm\sqrt{Q_3}$ and $q_{4,8} = \pm\sqrt{Q_4}$. Además, los puntos mixtos $(\pm 1, q_j)$ y $(q_i, \pm 1)$ donde $i, j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ también pertenecen a \mathcal{K} . La cantidad total de puntos críticos es 100.
- iv) Cuando $\beta \in (\alpha_1, 1.40576)$, $r(s)$ tiene dos raíces reales positivas la composición de \mathcal{K} es la misma que en (ii).
- v) Si $\beta \in (1.40576, \alpha_2)$, $\beta \in [\alpha_2, \alpha_3)$ o $\beta \in (\alpha_3, +\infty)$, $r(s)$ tiene una raíz real positiva (diferente en cada caso) y la composición de \mathcal{K} es la misma que en (i).

□

6.2.1 Estudio de comportamiento patológico

Los Teoremas 18 y 19 nos dan información sobre la estabilidad de la clase iterativa que actúa sobre un determinado polinomio de prueba. En general, los elementos de las colecciones de puntos fijos y críticos extraños deben evitarse como estimaciones iniciales.

Sin embargo, desde el punto de vista dinámico, el análisis del comportamiento a largo plazo de los puntos críticos libres puede darnos la clave sobre otras estructuras atractivas extrañas, órbitas periódicas o incluso comportamiento caótico.

Para dar un primer vistazo al estudio de los puntos críticos vamos a utilizar la herramienta denominada línea de parámetros, utilizada por primera vez en [62]. Esta herramienta consiste en una malla de 500×500 puntos en un intervalo específico del parámetro β . Cada punto crítico libre dependiente del parámetro utilizado como estimación inicial se colorea de rojo, si después de 200 iteraciones converge a alguna raíz del polinomio $p(x)$ y de negro en cualquier otro caso. Cada uno de estos puntos está engrosado por una multiplicación por $[0, 1]$. La tolerancia de error es de 10^{-3} . El color rojo es más claro cuando el número de iteraciones necesarias para converger es menor.

Se puede observar en las Figuras 6.7(a) y 6.7(b) el comportamiento límite de los puntos críticos libres para $\beta \in (-2, -0.5]$. En la Figura 6.7(a) todos los puntos críticos libres (q_i, q_j) con $i, j \in \{1, 5\}$ convergen a cualquiera de las raíces de $p(x)$; Además, en la Figura 6.7(b), se descubre un comportamiento inestable para los puntos críticos (q_i, q_j) con $i, j \in \{2, 6\}$, (q_1, q_m) para $m \in \{2, 6\}$ y (q_2, q_n) for $n \in \{1, 5\}$ en torno a los valores $\beta \approx -1.75$ and $\beta \approx -0.95$.

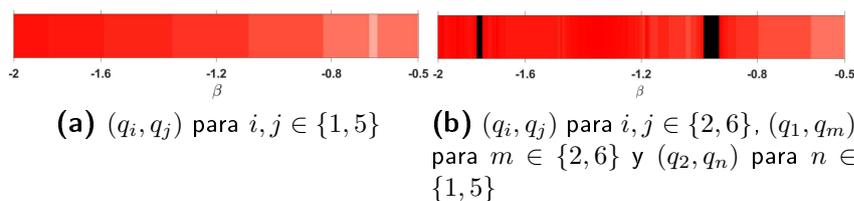


Figura 6.7: Líneas de parámetros relacionadas con los puntos críticos para $\beta \in (-2, 0.5]$

Continuamos el estudio del comportamiento inestable en las dos zonas oscuras utilizando diagramas de bifurcación. Se calculan utilizando como semilla cada punto crítico libre del operador racional, para $\beta \in (-2, 0.5]$, en una malla de 3000 subintervalos. En este intervalo son reales y observamos su rendimiento en los últimos 100 de 1000 iteraciones. En la figura 6.8, se muestran los diagramas de bifurcación detallados del punto crítico (q_2, q_6) . Están relacionados con las zonas oscuras de no convergencia en las líneas de parámetros.

Como el polinomio $p(x)$ tiene variables separadas, las funciones de coordenadas de los operadores racionales son simétricas. Teniendo esto en cuenta, en los diagramas de bifurcación las dimensiones x_1 y x_2 se representan en color azul y rojo respectivamente. Para los detalles se han elegido sólo coordenadas positivas.

Observando los detalles de los diagramas dados por las figuras 6.8(b) y 6.8(e) podemos encontrar patrones de bifurcación como cascadas de periodo doble, órbitas periódicas y comportamientos caóticos para $\beta \approx -1.76, -1.762$ y -1.765 en el primer caso, y para $\beta \approx -0.96, -0.97$ y -0.986 en el segundo caso respectivamente. A continuación encontraremos y mostraremos algunas de estas estructuras atractivas patológicas previamente observadas en los diagramas de bifurcación.

Para tener una visión completa del comportamiento dinámico del operador racional $G(x, \beta)$ hemos trazado un plano dinámico, estos tipos de gráficos se construyen iterando cada punto de una malla con un paso de 0.01 y se pintan según la raíz a la que convergen, con una tolerancia de error inferior a 10^{-3} o con un máximo de 50 iteraciones como criterio de parada. Cuanto más brillante es el color, menor es la cantidad de iteraciones necesarias para converger. En caso de no convergencia una vez completado el número de iteraciones, el punto se colorea de negro. Las raíces del polinomio se representan con círculos.

En relación con la primera zona oscura en la línea de parámetros (véase la Figura 6.7(b)), en la Figura 6.9(a) podemos ver que la cantidad de componentes conectadas en las cuencas de atracción de las raíces para $\beta = -1.7665$ es infinita. Los diamantes verdes y blancos representan los puntos fijos extraños de repulsión y silla, respectivamente. Todos ellos se encuentran en el conjunto de Julia. Por otro lado, los puntos críticos libres se representan con cuadrados amarillos, algunos de ellos yacen en la cuenca de atracción de las raíces de $p(x)$ y el resto se sitúan en la zona negra. Observando el diagrama de bifurcación de la Figura 6.8(b) y conociendo la posición del punto crítico (q_2, q_6) , podemos explorar las regiones alrededor de los puntos $(\mp 0.48, \pm 0.48)$ para encontrar elementos atractivos. En la Figura 6.9(a) podemos observar una estructura atractiva (ver pequeña región blanca alrededor de los puntos $(\mp 0.48, \pm 0.48)$). Cualquier estimación inicial en esas zonas tienden a llenar densamente estas mismas regiones simétricas. Los detalles de estas pequeñas regiones se pueden observar en la Figura 6.9(b).

Por otro lado, para el valor de $\beta = -1.7621$ (ver el diagrama de bifurcación, Figura 6.8(b)) encontramos órbitas periódicas alrededor del punto crítico (q_2, q_6) . Una de ellas, con período 8, se muestra en la Figura 6.9(c) cuyos elementos son

$$\{(-0.4968, 0.4968), (0.4756, -0.4756), (-0.4938, 0.4938), (0.4829, -0.4829), \\ (-0.4966, 0.4966), (0.4763, -0.4763), (-0.4945, 0.4945), (0.4814, -0.4814)\},$$

los detalles pueden verse en la Figura 6.9(d).

Finalmente, estudiando la segunda zona oscura de la línea de parámetros en la Figura 6.7(b), es importante observar en las Figuras 6.8(d) y 6.8(e) el mismo color de los patrones de bifurcación, esto significa que las coordenadas x_1 o x_2 mantienen el mismo signo en cualquier estructura atractiva, es decir, cada uno de esos elementos atractivos debe estar confinado en pequeñas zonas donde el signo de las coordenadas de sus puntos no cambie. En la Figura 6.10(a), para

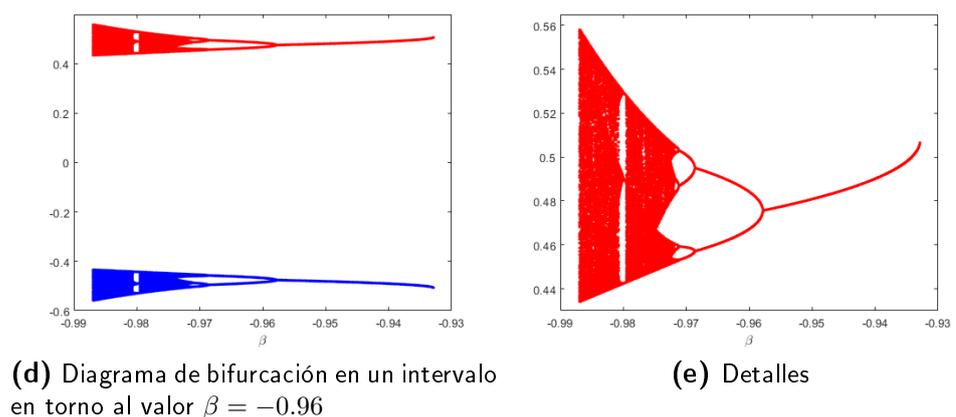
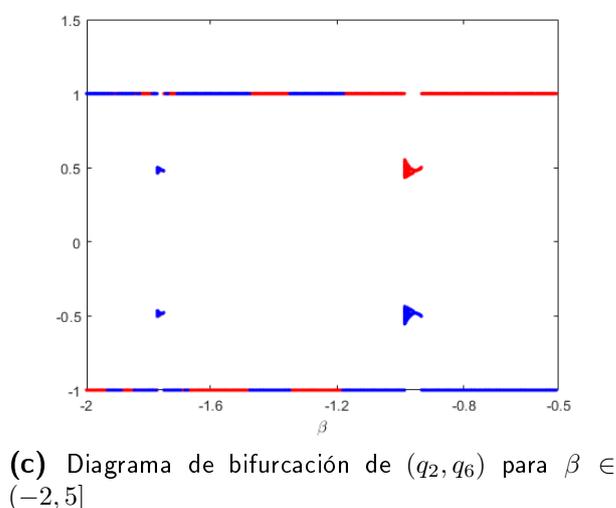
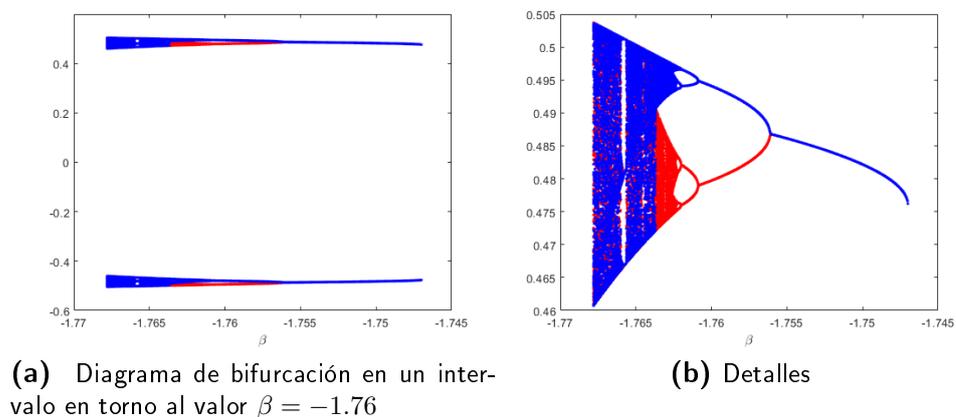


Figura 6.8: Diagramas de bifurcación del punto crítico (q_2, q_6) con $\beta \in (-2, 0.5]$ relacionados con las zonas oscuras de la Figura 6.7(b)

$\beta = -0.986$, se puede observar este comportamiento en una pequeña zona alrededor del punto crítico (q_2, q_6) y las coordenadas $(\pm 0.48, \mp 0.48)$ donde cada iteración de las estimaciones iniciales tiende densamente a rellenar esta zona. Los detalles se muestran en la Figura 6.10(b). Mientras tanto, observando el diagrama de bifurcación en 6.8(e) para

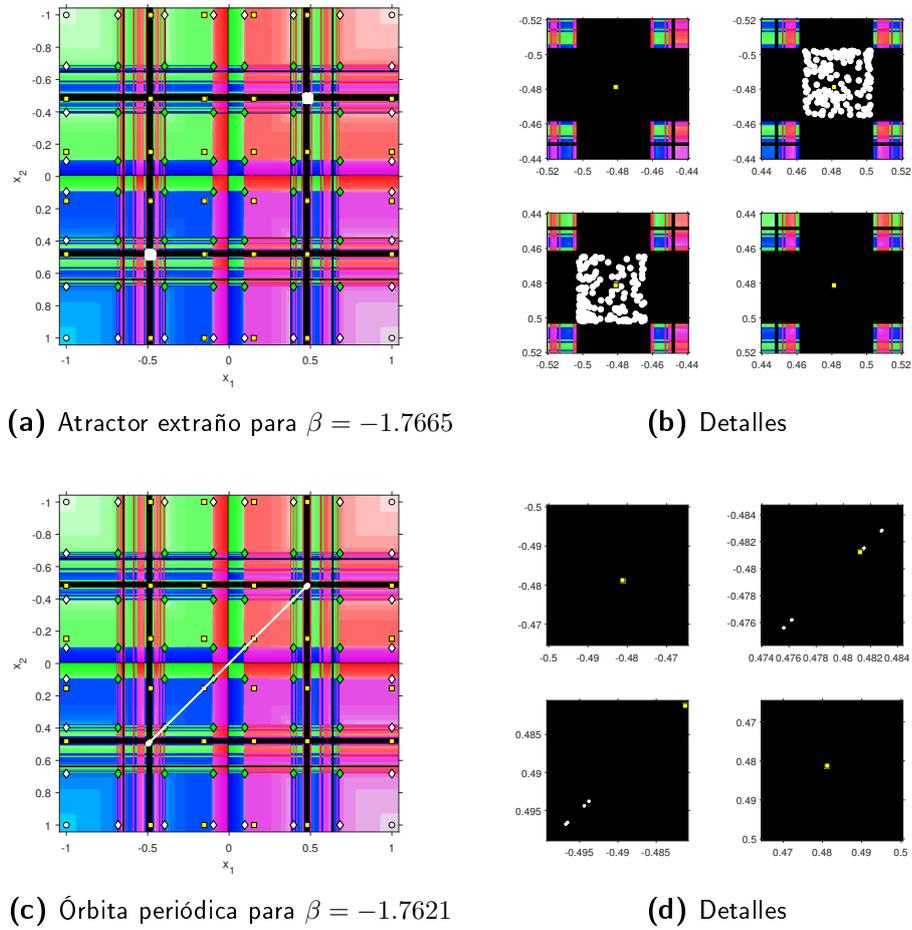


Figura 6.9: Planos dinámicos con comportamientos patológicos

$\beta = -0.97$ encontramos órbitas periódicas de período cuatro, un ejemplo se puede ver en la Figura 6.10(c) y 6.10(d) cuyas componentes son $(0.4589, -0.4589), (0.4891, -0.4891), (0.4543, -0.4543), (0.5010, -0.5010)$.

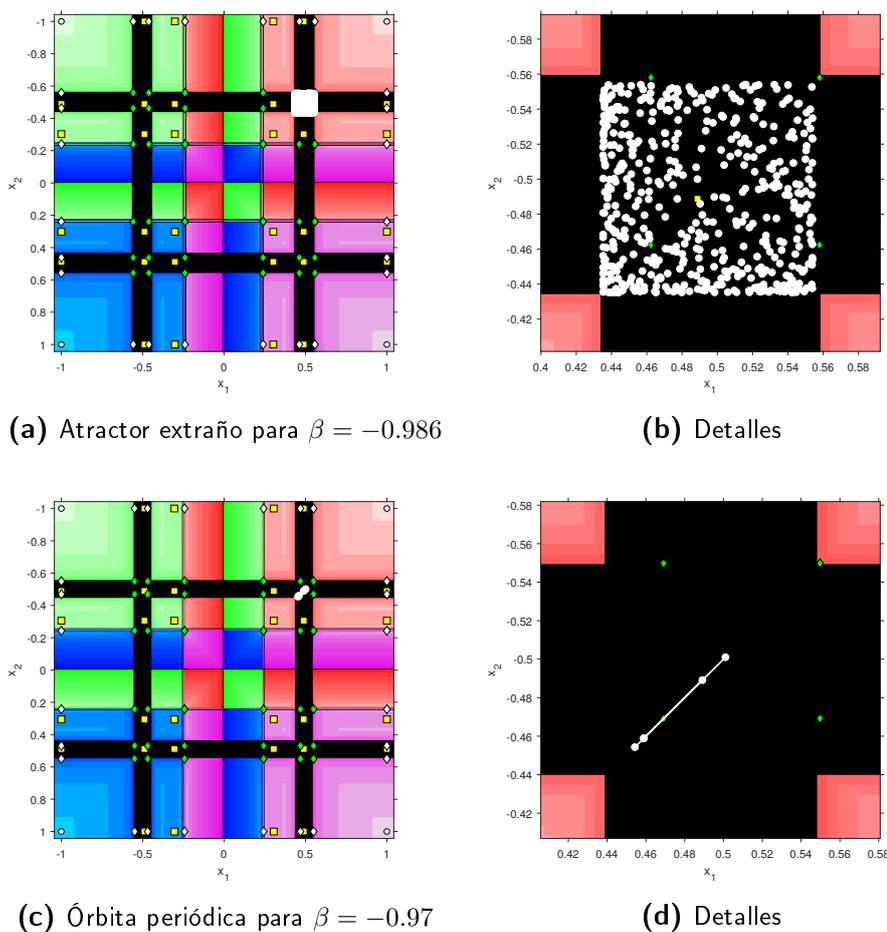


Figura 6.10: Planos dinámicos con valores inestables del parámetro

6.3 Resultados numéricos

En este epígrafe mostramos el rendimiento de $PM(\beta)_{KE_p}$ (descrito por (5.15)) en ejemplos académicos y otros de tipo aplicado, modelados todos por ecuaciones diferenciales no lineales y cuya resolución conlleva a enfrentarse a sistemas de ecuaciones no lineales.

El valor del parámetro β utilizado ($\beta = 1$) garantiza el máximo orden de convergencia (orden 6) de acuerdo con los resultados obtenidos del Teorema 17 del capítulo anterior. Para el desarrollo de la prueba numérica utilizamos el software Matlab con aritmética de precisión variable y 2000 dígitos de mantisa. Los experimentos se han realizado en un ordenador con CPU Intel(R) Core(TM) i7-1065G7 CPU @ 1.30GHz 1.50 GHz y 16,0 GB de RAM. El criterio de parada utilizado es $\|F(x^{(k+1)})\| < 10^{-6}$ o $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-6}$. Para cada ejemplo, se muestra una tabla de resultados correspondiente a su sistema no lineal asociado, donde $x^{(0)}$ es la aproximación inicial, k es el número de iteraciones necesarias para converger ('nc' aparece en la tabla si el método no converge), el valor de los residuos $\|F(x^{(k+1)})\|$ o $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ en la última iteración ('-' si no hay convergencia) y el $ACOC$ (2.6), en caso de que el número de iteraciones sea menor que 3 no procede a calcular este último y por tanto no se mostrará.

Los problemas a estudiar que conducen a sistemas de ecuaciones no lineales son los siguientes:

Ejemplo 1. Ecuación de Van der Pol. Originalmente esta ecuación diferencial fue introducida a principios del siglo XX para describir el comportamiento de la corriente eléctrica en un tríodo de tubo de vacío, también puede interpretarse como un sistema masa-resorte en un medio viscoso con densidad variable. Nuestro ecuación a resolver dadas ciertas condiciones de fronteras es

$$\begin{aligned} y'' - 0.5(1 - y^2)y' + y &= 0 \\ y(x_0) &= 2 \\ y(x_n) &= -0.33. \end{aligned} \tag{6.6}$$

El recinto a estudiar es $[x_0, x_n] = [0, 0.20]$, siguiendo la metodología descrita en el capítulo anterior, planteamos el sistema de nodos equidistantes $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 2, \dots, (n - 1)$ con paso $h = \frac{x_n - x_0}{n}$. Designando en cada nodo x_i los valores aproximados de la función $y(x)$ y sus derivadas por y_i, y'_i y y''_i respectivamente, planteamos en los nodos interiores las aproximaciones de las derivadas dadas por las expresiones en diferencias

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h} \tag{6.7}$$

sustituyendo 6.7 en 6.6 y tomando $n = 20$, obtenemos un sistema no lineal de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas

$$y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i - h(1 - y_i^2)(y_{i+1} - y_i) - h^2 y_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 18. \tag{6.8}$$

Los resultados se ofrecen en la Tabla 6.1

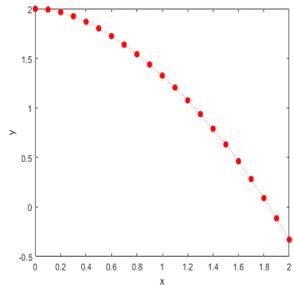
$x^{(0)}$	Método(β)	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	ACOC	Solución numérica
(1.0, ..., 1.0)	PM(1) _{KEP}	4	0.0264	0.4032×10^{-10}	-	

Tabla 6.1: Resultados numéricos del método examinado para la ecuación de Van der Pol.

Ejemplo 2. El siguiente problema es la resolución de una familia de ecuaciones diferenciales dependiente de un parámetro y sometida a las condiciones de frontera mostradas en la Tabla 6.2.

La familia de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\begin{aligned}
 y'' - 2y^3 - xy - \mu &= 0 \\
 y(x_0) &= y_0 \\
 y(x_n) &= y_n.
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

μ	y_0	y_n
0	1.0618	1.0672
1	1.0944	1.0996
2	1.1267	1.1319
3	1.1591	1.1643
4	1.1914	1.1967
5	1.2238	1.2292

Tabla 6.2: Parámetros y condiciones de frontera para la familia de ecuaciones diferenciales del ejemplo 2.

Siendo el recinto a estudiar $[x_0, x_n] = [-0.25, 0.25]$ y siguiendo la metodología descrita en el ejemplo anterior con $n = 50$, planteamos el sistema de ecuaciones a resolver de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas

$$y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i - 2h^2 y_i^3 - h^3 i y_i + h^2 \mu = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 48. \tag{6.10}$$

los resultados se muestran en la Tabla 6.3

$x^{(0)}$	Método(β)	μ	k	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $	$\ F(x^{(k+1)})\ $	Solución numérica
(1.0, ..., 1.0)	PM(1) _{KEP}	0	1	0.1919	0.0039×10^{-8}	
		1	1	0.2888	0.0208×10^{-8}	
		2	1	0.3847	0.0669×10^{-8}	
		3	1	0.4810	0.1673×10^{-8}	
		4	1	0.5770	0.3541×10^{-8}	
		5	1	0.6733	0.6722×10^{-8}	

Tabla 6.3: Resultados numéricos del método examinado para el sistema 3.

Ejemplo 3. En este ejemplo, con el uso de $PM(1)_{KEP}$, estudiaremos la ecuación de conducción del calor [77] para un medio no homogéneo: $\frac{\partial}{\partial x} (k(u) \frac{\partial u}{\partial x}) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}$, siendo $F(x, t)$ la densidad de las fuentes de calor y k, c y ρ son propiedades cuantitativas de los materiales como el coeficiente de conductividad térmica, la capacidad calorífica específica y la densidad del medio, respectivamente.

En aras de la simplicidad, tomamos c, ρ como constantes y el coeficiente de conductividad térmica como una función lineal de la temperatura $k(u) = k_0 + k_1 u$ con $k_0 = 1$. Las fuentes térmicas se han distribuido equiespaciadas a lo largo de la malla espacio-temporal y su signo se ha elegido aleatoriamente. Después de algunas transformaciones y de añadir

algunas condiciones de contorno e iniciales, planteamos el problema a estudiar

$$\begin{cases} \alpha u_x^2 + (1 + \alpha u)u_{xx} + f = u_t, & \alpha = \frac{k_1}{c\rho}, & f = \frac{F}{c\rho} \\ u(x_0, t) = 0, & u(x_f, t) = \sin^2(t), \\ u(x, 0) = \operatorname{sech}^2(7x). \end{cases}$$

Aplicando un esquema de diferencias finitas implícitas, transformamos la ecuación de conducción de calor en una familia de sistemas no lineales a resolver. La solución estimada para cada instante t_k se obtiene a partir de la aproximación calculada a t_{k-1} . La malla espacio-temporal se construye tomando el paso espacial $h = \frac{8}{nx}$ y el paso temporal $l = \frac{T_{max}}{nt}$, siendo nx , nt y T_{max} la cantidad de subintervalos para las variables x , t e instante final del estudio numérico respectivamente.

Haciendo $x_0 = -4$ and $x_f = 4$, obtenemos el dominio de malla como $[x_0, x_f] \times [0, T_{max}]$ con $(nx + 1) \times (nt + 1)$ nodos equiespaciados (x_i, t_k) . Denotando por $u_{i,k}$ la estimación de la solución en (x_i, t_k) y utilizando las estimaciones de las derivadas

$$u_t \approx \frac{u(x, t) - u(x, t - h)}{h}, \quad u_x \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{l} \quad \text{y} \quad u_{xx} \approx \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{l^2}$$

construimos el sistema no lineal con $\alpha = 1$

$$ku_{i+1,k} - \left(h^2 + k(2 + \alpha(u_{i+1,k} - u_{i-1,k})) \right) u_{i,k} - k\alpha u_{i,k}^2 + k(u_{i+1,k} + \alpha u_{i+1,k}^2) + f = -h^2 u_{i,k-1}.$$

Los resultados para diferentes discretizaciones y fuentes térmicas se muestran en la Tabla 6.4. La media del número de iteraciones empleadas para resolver los sistemas no lineales para cada instante se denomina como "iter" y $\|F(x^{(k+1)})\|$ es la norma de la solución del último sistema. Como el número de iteraciones empleadas para resolver cada sistema es muy bajo, no se puede calcular el ACOC.

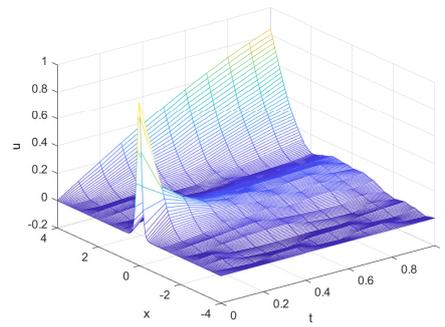
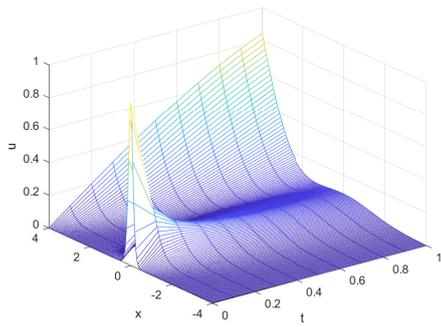
En la Figura 6.11 se muestra la solución aproximada de la ecuación del calor para diferentes fuentes térmicas, ver su influencia en las Figuras 6.11(b), 6.11(c) y 6.11(d), en comparación con la Figura 6.11(a).

T_{max}	nx	nt	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	f	T_{max}	nx	nt	iter	$\ F(x^{(k+1)})\ $	f
0.5	20	10	1.9091	4.6694×10^{-31}	0	0.5	20	10	1.9091	1.4974×10^{-26}	2
0.5	20	20	1.4762	6.9684×10^{-8}	0	0.5	20	20	1.9048	4.9125×10^{-28}	2
1.0	20	10	1.9091	3.1137×10^{-25}	0	1.0	20	10	1.9091	3.0552×10^{-20}	2
1.0	40	20	1.9524	7.2903×10^{-32}	0	1.0	40	20	1.9524	2.9880×10^{-26}	2
5.0	20	10	2.1818	3.3624×10^{-10}	0	5.0	20	10	2.1818	2.3446×10^{-11}	2
5.0	40	20	2.1905	1.3758×10^{-12}	0	5.0	40	20	2.1905	1.3758×10^{-12}	2
0.5	20	10	1.9091	1.5948×10^{-18}	5	0.5	20	10	1.9091	5.4491×10^{-13}	10
0.5	20	20	1.9048	3.4320×10^{-22}	5	0.5	20	20	1.9048	5.6519×10^{-17}	10
1.0	20	10	1.9091	9.9130×10^{-17}	5	1.0	20	10	1.9091	6.5624×10^{-13}	10
1.0	40	20	1.9524	2.8640×10^{-21}	5	1.0	40	20	1.9524	8.2734×10^{-18}	10
5.0	20	10	2.1818	1.1617×10^{-11}	5	5.0	20	10	nc	nc	10
5.0	40	20	2.2381	1.0439×10^{-19}	5	5.0	40	20	nc	nc	10

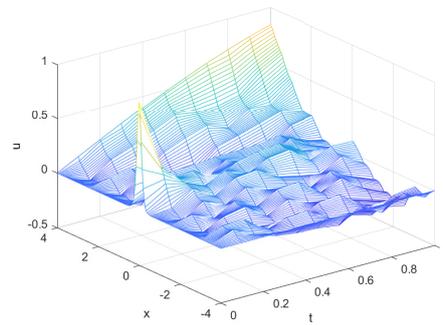
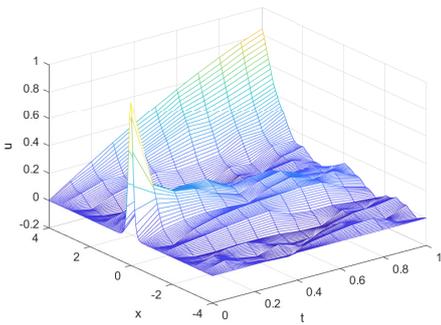
Tabla 6.4: Resultados numéricos de la ecuación de conducción del calor

6.4 Conclusiones

En el Capítulo 6 se realizó un detallado análisis de estabilidad de otra familia de métodos iterativos descrita en el capítulo anterior, utilizándose un polinomio de prueba y las herramientas de la dinámica real ya utilizadas. En este estudio



(a) $T_{max} = 1, nx = 20, nt = 10$ y $f = 0$ (b) $T_{max} = 1, nx = 20, nt = 10$ y $f = 2$



(c) $T_{max} = 1, nx = 20, nt = 10$ y $f = 5$ (d) $T_{max} = 1, nx = 20, nt = 10$ y $f = 10$

Figura 6.11: Soluciones aproximadas de la ecuación del calor para distintas fuentes térmicas

también se detectaron comportamientos patológicos como órbitas periódicas y atractores extraños, también se han encontrado valores estables que posteriormente se han utilizado en las pruebas numéricas. Se realizaron experimentos en los cuales se aplican las técnicas de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos reales tales como la ecuación de Van der Pol y la ecuación de transmisión de calor en un medio no homogéneo. Estos experimentos muestran un excelente rendimiento del esquema iterativo empleado.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras

7.1 Conclusiones

En esta memoria hemos diseñado dos clases de métodos iterativos de tres pasos y se ha realizado el análisis de estabilidad de familias derivadas de estas.

En el Capítulo 3 hemos propuesto una clase, con un primer paso de Newton y los restantes basados en funciones peso matriciales. Se realizó el examen de convergencia resultando en un teorema donde se demuestra el sexto orden y se proponen dos de familias de funciones peso dependientes de un parámetro y que cumplen con las condiciones del teorema anterior. El rendimiento de una de estas familias derivada se comparó con otros esquemas iterativos encontrados en la literatura resultando formalmente superior. Los experimentos numéricos realizados con sistemas de tipo académico mostraron muy buenos resultados.

En el Capítulo 4 se realizó un extensivo análisis de estabilidad de una familia de métodos iterativos descrita en el capítulo anterior, se utilizaron para estos sistemas de ecuaciones polinómicas no lineales numerosas herramientas de la dinámica discreta real multidimensional. Entre estas herramientas, las superficies isonormales introducidas en este trabajo, mostraron ser efectivas en la detección de comportamientos patológicos como órbitas periódicas y atractores extraños.

Los resultados del estudio se emplearon para realizar para realizar los experimentos numéricos. En la realización de estos últimos, se utilizaron valores estables e inestables del parámetro libre derivados de los resultados teóricos del análisis dinámico; se observó un rendimiento estable en la resolución de los sistemas no lineales testeados para aquellos valores del parámetro libre de los polinomios de prueba.

En el Capítulo 5 se propuso la segunda clase iterativa de esta memoria, esta clase tiene un primer paso de Newton, el segundo es un esquema de tipo Ermankov-Kalitkin y el tercero está basado en una función peso. Se realizó el examen de convergencia probándose su quinto o sexto orden dependiendo del parámetro escogido y se propusieron dos familias de funciones matriciales que cumplen con las condiciones del teorema de convergencia. Se realizaron experimentos con sistemas académicos comparándose con el método de Newton y se resolvió la ecuación de Volterra aplicando diferencias finitas con muy buenos resultados.

En el Capítulo 6 se realizó un detallado análisis de estabilidad de otra familia de métodos iterativos descrita en el capítulo anterior, utilizándose un polinomio de prueba y las herramientas de la dinámica real ya utilizadas. En este estudio también se detectaron comportamientos patológicos como órbitas periódicas y atractores extraños, también se han encontrado valores estables que posteriormente se han utilizado en las pruebas numéricas. Se realizaron experimentos en los cuales se aplican las técnicas de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos reales tales como la ecuación de Van der Pol y la ecuación de transmisión de calor en un medio no homogéneo. Estos experimentos muestran un excelente rendimiento del esquema iterativo empleado.

7.2 Líneas futuras

En esta Tesis hemos propuesto dos clases de métodos iterativos y se ha realizado el respectivo análisis de estabilidad con ayuda de un conjunto de herramientas del análisis dinámico real y utilizando funciones peso polinómicas en ambos casos.

De aquí que sería interesante desde el punto de vista de la dinámica real:

- Realizar un estudio de estabilidad de las clases propuestas utilizando funciones peso de tipo racional propuestas en este trabajo; o sea, aquellas que contienen una matriz inversa.

Poniendo en valor el conocimiento y la experiencia adquirida, continuamos con la línea principal de trabajo en esta memoria y proponemos:

- Diseñar métodos eficientes para resolver problemas no lineales, centrando los esfuerzos en la mejora de la eficiencia computacional.

Es necesario destacar que la utilización de una función de punto fijo en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales se basa en un enfoque determinista; esto es, se tiene un algoritmo que conduce a la cantidad buscada o en su defecto a una aproximación de esta última. En sentido general, la utilización de un mismo algoritmo en diferentes ordenadores conduciría al mismo resultado.

El enfoque no determinista más popular empleado en la solución de una amplia variedad de problemas es el método Monte Carlo. Este a grandes rasgos se puede describir como el conjunto de técnicas que permiten obtener las soluciones de problemas matemáticos o físicos mediante ensayos aleatorios repetidos. El conjunto de estimaciones g_1, g_2, \dots, g_n de la cantidad deseada g se obtienen como resultado de ciertos ensayos aleatorios repetidos muchas veces. Se requiere entonces que la cantidad aleatoria g_n converja en probabilidad a la cantidad requerida g cuando $n \rightarrow \infty$; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$ tenemos la relación límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(|g - g_n| < \epsilon) = 1,$$

donde \mathcal{P} denota la probabilidad correspondiente.

El método Monte Carlo pudiera ser de interés en la resolución de sistemas no lineales de gran tamaño (cientos de variables) donde los esquemas de punto fijo suelen ser lentos, por lo que nos proponemos

- Diseñar técnicas Monte Carlo para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales y comparar el rendimiento con esquemas de punto fijo.

Capítulo 8

Anexos

```
% Script para experimentos numericos en 2D con sistemas de ejemplo
% Se usa la funcion peso polinomica de la primera clase propuesta

clear
clc

x0=vpa([],);           % Estimacion inicial o semilla
format shortEng
digits(2000);
m_it=;                % Cantidad de iteraciones

tol=1e-200;          % Tolerancia
num =                 % Numero de la funcion de ejemplo a estudiar

global A;
global vec;
cont = 1;

vec = ["iter"," b"," x0"," y0"," x"," y"," dx1"," fx1"," dx2"," fx2"," dx3",
      "," fx3"," p "];
v = '   iter   b   x0   y0   x   y   dx1   fx1   dx2   fx2   dx3
      fx3   p   ';
n_col=length(vec);
beta = [];           % Vector con valores del parametro libre
A=ones(length(beta),n_col);

for j=1:length(beta)
    [t,iter,p,A] = NAS_R(A,j,beta,x0,num,tol,m_it,x0,cont);
    cont = cont+1;
end

disp(v)
disp(A)

function [t,iter,p,A] = NAS_R(A,k,b,x,n,tol,maxiter,xo,cont)

    ex = 1; efx = 1; iter = 0; p = []; x = x(:); F = []; Incx = [];
    Incfx = []; m = length(x);
```

```

vec=[]; vec(2)=b(k);
vec(3)=xo(1); vec(4)=xo(2);

while (iter<maxiter && (ex) > tol && (efx) > tol)

    [fx,dfx]=Sistemas_R(x,n);
    y = x - dfx \ fx;

    [fy,~]=Sistemas_R(y,n);

    for j = 1 : m
        v1 = x;
        v1(1:j) = y(1:j);
        v2 = x;
        v2(1:j-1) = y(1:j-1);
        [Fv1,~]=Sistemas_R(v1,n);
        [Fv2,~]=Sistemas_R(v2,n);
        dd(:,j)=(Fv1-Fv2)/((y(j))-(x(j)));
    end

    eta=eye(length(x))-(dfx\dd);
    G=eye(length(x))+2*eta+((1/2)*b(k))*(eta*eta);
    z = y - G*(dfx\fy);
    [fz,~] = Sistemas_R(z,n);

    t=z-G*(dfx\fz);
    iter = iter + 1;

    ex = norm(t-x);
    [ft,~]=Sistemas_R(t,n);
    efx = norm(ft);

    x = t;
    F=[F,ft];
    Incx = vpa([Incx,ex],4);
    Incfx = vpa([Incfx,efx],4);

end

p = vpa(log(Incx(3:end)./Incx(2:end-1))./log(Incx(2:end-1)./Incx(1:end-2)
),6);

vec(1)=iter; vec(5) = t(1); vec(6) = t(2); vec(7) = Incx(end-2); vec(8) =
    Incfx(end-2);
vec(9) = Incx(end-1); vec(10) = Incfx(end-1); vec(11) = Incx(end) ; vec
    (12) = Incfx(end);
vec(13) = max(p);

A(cont,:)= vec;

function [F,dF] = Sistemas_R(x,n)

x=x(:);

switch n

    case 1

```

```

    syms u v
    F1=sin(u)+v*sin(u);
    F2=u-v;
    F = [F1 F2];
    dy = jacobian(F,[u,v]);

    u=x(1);
    v=x(2);

    case 2
    syms u v
    F1=u^2 + u*v + v^2 -4;
    F2=u + u*v + v -2;

    F = [F1 F2];
    dy = jacobian(F,[u,v]);

    u=x(1);
    v=x(2);

end

F=subs(F);
F=F(:);
dF=subs(dy);

end

end

```

```

% Script para graficar los planos dinamicos o planos de convergencia
% Se usa la funcion peso polinomica de la primera clase propuesta

clear
clc

step = 0.01;           % Paso de la malla
dist1 = 1000; dist2 = 1000; dist3 = 1000; dist4 = 1000;

tol = 10^-3;          % Tolerancia al error
it = 0;

lim = 2;               % Dimension del plano
maxit = ;              % Maximo de iteraciones

u = -lim:step:lim;
v = -lim:step:lim;

[U,V] = meshgrid(u,v);

fp = ;                 % Valor del parametro libre

I = zeros( length(u),length(v),3 );

for i = 1:length(u)

    for j = 1:length(v)

        if U(i,j) == 0 || V(i,j)==0
            continue
        end

        dist = 1000; dist1 = 1000; dist2 = 1000; dist3 = 1000; dist4 = 1000;

        it = 0;

        x1 = U(i,j);
        x2 = V(i,j);

        while ( (dist > tol) && (it < maxit ) )

            % Operador de punto fijo

            x1 = (-1/256)*x1^(-7)*(fp*((-1)+x1^2)^4+(-16)*(x1^2+(-5)*x1^4+ ...
            15*x1^6+5*x1^8)+4*x1^2*(fp*((-1)+x1^2)^2+16*x1^2*((-1) ...
            +3*x1^2))*((-1)+(1/65536)*x1^(-14)*(fp*((-1)+x1^2)^4+(-16) ...
            *(x1^2+(-5)*x1^4+15*x1^6+5*x1^8))^2));

            x2 = (-1/256)*x2^(-7)*(fp*((-1)+x2^2)^4+(-16)*(x2^2+(-5)*x2^4+ ...
            15*x2^6+5*x2^8)+4*x2^2*(fp*((-1)+x2^2)^2+16*x2^2*((-1) ...
            +3*x2^2))*((-1)+(1/65536)*x2^(-14)*(fp*((-1)+x2^2)^4+(-16) ...
            *(x2^2+(-5)*x2^4+15*x2^6+5*x2^8))^2));

            %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

            x = [x1 x2];

```

```

    dist1 = norm(x-[-1 1]);
    if dist1 <= tol
        dist = dist1;
    end

    dist2 = norm(x-[1 1]);
    if dist2 <= tol
        dist = dist2;
    end

    dist3 = norm(x-[1 -1]);
    if dist3 <= tol
        dist = dist3;
    end

    dist4 = norm(x-[-1 -1]);
    if dist4 <= tol
        dist = dist4;
    end

    it = it + 1;

    end

    if dist1 <= tol
        I(i,j,3) = 1;
        I(i,j,1) = 0;
        I(i,j,2) = exp(-it*.20);

        continue
    end

    if dist2 <= tol % [1 1 ]
        I(i,j,1) = 1;
        I(i,j,2) = exp(-it*.20);
        I(i,j,3) = 1;

        continue
    end

    if dist3 <= tol
        I(i,j,1) = 1;
        I(i,j,2) = exp(-it*.10);
        I(i,j,3) = exp(-it*.20);

        continue
    end

    if dist4 <= tol
        I(i,j,1) = exp(-it*.10);
        I(i,j,2) = 1;
        I(i,j,3) = exp(-it*.20);

        continue
    end
end

```

```
end

imshow(I, 'Xdata', [-lim lim], 'Ydata', [-lim lim])
xlabel('x_1'); ylabel('x_2');
axis on
hold on

plot([1 1 -1 -1], [1 -1 1 -1], 'wo', 'MarkerFaceColor', [1 1 1], 'MarkerSize', 5)

end
```

```

% Script para graficar los planos de superficies isonormales
% Se usa la funcion peso polinomica de la primera clase propuesta

clear
clc

lim = ;           % Dimension del plano
step = 0.01;     % Paso de la malla

x = -lim:step:lim;
y = -lim:step:lim;

I = zeros(length(x),length(y),3);

long_x = length(x);
long_y = length(y);

maxit = ;        % Maximo de iteraciones
aa = ;          % Valor del parametro libre

[X,Y] = meshgrid(x,y);
matriz_de_iterac = zeros(2*long_x,long_y);

for i = 1:long_x
    for j = 1:long_y

        xx = X(i,j);
        yy = Y(i,j);

        if X(i,j) == 0 || Y(i,j) == 0
            continue
        end

        for k = 1:maxit

            % Operador de punto fijo
            matriz_de_iterac(i , j) = (-1/256)*xx^(-7)*(aa*((-1)+...
            xx^2)^4+(-16)*(xx^2+(-5)*xx^4+ 15*xx^6+5*xx^8)+4*...
            xx^2*(aa*((-1)+xx^2)^2+16*xx^2*((-1)+3*xx^2))*((-1)+...
            (1/65536)*xx^(-14)*(aa*((-1)+xx^2)^4+(-16) *(xx^2+...
            (-5)*xx^4+15*xx^6+5*xx^8))^2));

            % Operador de punto fijo
            matriz_de_iterac(long_x+i, j) = (-1/256)*yy^(-7)*...
            (aa*((-1)+yy^2)^4+(-16)*(yy^2+(-5)*yy^4+15*yy^6+...
            5*yy^8)+4*yy^2*(aa*((-1)+yy^2)^2+16*yy^2*((-1) +...
            3*yy^2))*((-1)+(1/65536)*yy^(-14)*(aa*((-1)+yy^2)^4+...
            (-16)*(yy^2+(-5)*yy^4+15*yy^6+5*yy^8))^2));

            xx = matriz_de_iterac(i , j);
            yy = matriz_de_iterac(long_x+i, j);

        end
    end
end

F = (matriz_de_iterac(1:long_x,1:long_y).^2 + matriz_de_iterac(long_x+1:end,1:
long_y).^2).^0.5;

```

```
contourf(X,Y,F)
colorbar

xlim([-lim lim])
ylim([-lim lim])
axis on
```

```

% Script para resolver numericamente la ecuacion de Volterra
% Se usa la funcion peso polinomica de la segunda clase propuesta

clear
clc

digits(2000);

tol = 1e-6;

num_max_iter = 50;

step_x = 0.01;
t_1 = 0;
t_f = 0.2;
t_values = t_1:step_x:t_f;
t_0 = t_1;
T = t_values;

color = [1 0 0];

ext_inicial = 1;
ext_final = 0.071;

x0 = ones(1,length(t_values)-2);

A = sym('u',[1,length(t_values)-2]);
[A,x,ex,efx,iter] = Second_Method(A, x0, tol, num_max_iter, length(t_values)-2,
...
step_x, ext_inicial, ext_final);

B(1,:) = [ext_inicial; A; ext_final];
p = plot(T,B);
p.LineStyle = ':';
p.Marker = 'o';
p.Color = color(1,:);
p.MarkerFaceColor = color(1,:);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SEGUNDO METODO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [a,x,ex,efx,iter] = Second_Method(a,g,tol,maxiter,nx,tau,ext_i,ext_f)

    ex = 1;
    efx = 1;
    ex = 1;
    iter = 0;
    x = g(:);
    stock_x = [];
    Incx = [];
    rho = 0;

    m = length(x);

    fff = sym('f',[nx,1]);

    fff(1,1) = ext_i*(a(1,2) - 2*a(1,1) + ext_i) - (a(1,1)-ext_i)^2 - ...
    tau*(-ext_i + ext_i^2)*(a(1,1)-ext_i) - 2*(tau^2)*(ext_i^2 - ext_i^3) ;

```

```

for i = 2:nx-1

    fff(i,1) = a(1,i-1)*(a(1,i+1) - 2*a(1,i) + a(1,i-1)) - (a(1,i) - ...
    a(1,i-1))^2 - tau*(-a(1,i-1) + a(1,i-1)^2)*(a(1,i) - a(1,i-1))...
    - 2*(tau^2)*(a(1,i-1)^2 - a(1,i-1)^3) ;

end

fff(nx,1) = a(1,nx-1)*(ext_f - 2*a(1,nx) + a(1,nx-1)) - (a(1,nx) - ...
    a(1,nx-1))^2 - tau*(-a(1,nx-1) + a(1,nx-1)^2)*(a(1,nx) - ...
    a(1,nx-1)) - 2*(tau^2)*(a(1,nx-1)^2 - a(1,nx-1)^3) ;

dy = jacobian(fff,a) ;

while (iter<maxiter && (ex) > tol && (efx) > tol)

    [fx,x] = Sistemas_Rafael(a,fff,x);

    dfx = subs(dy,a(:),x);

    y = double(x - dfx \ fx);

    [fy,y] = Sistemas_Rafael(a,fff,y);

    for j = 1 : m

        v1 = x;
        v1(1:j) = y(1:j);
        v2 = x;
        v2(1:j-1) = y(1:j-1);
        [Fv1,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v1);
        [Fv2,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v2);
        ddxxyF(:,j) = (Fv1-Fv2)/((y(j))-x(j));

    end

    FpxixyF = dfx\ddxyF;

    ImenosFpxixyF = eye(length(x)) - FpxixyF;
    ImenosFpxixyF_2 = ImenosFpxixyF*ImenosFpxixyF;
    FpxiFy = dfx\fy;
    ImasImenosFpxixyF_2 = eye(length(x)) + ImenosFpxixyF_2;

    z = double(y - ImasImenosFpxixyF_2\FpxiFy);

    for j = 1 : m

        v1 = y;
        v1(1:j) = z(1:j);
        v2 = y;
        v2(1:j-1) = z(1:j-1);
        [Fv1,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v1);
        [Fv2,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v2);
        ddyzF(:,j) = (Fv1-Fv2)/((z(j))-y(j)); % DIFERENCIA DIVIDIDA [y,z;
        F]
    end

```

```

end

FpxiyzF = dfx\ddyzF;

Fz_Fy = ImasImenosFpxixyF_2\FpxiyzF;

H = (Fz_Fy - eye(length(x)))^2 - Fz_Fy + 2*eye(length(x));

[fz,z] = Sistemas_Rafael(a,fff,z);

t = double(z - H*dfx\fz);

ex = norm(t-x);
[ft,t] = Sistemas_Rafael(a,fff,t);
efx = norm(ft);
Incx = vpa([Incx,ex],4);

x = t;
stock_x = vpa([stock_x,x],5);

iter = iter + 1

end

p = vpa(log(Incx(3:end)./Incx(2:end-1))./log(Incx(2:end-1)./...
Incx(1:end-2))),5)

rho = vpa(log(norm(stock_x(1:end,end) - stock_x(1:end,end-1))/...
norm(stock_x(1:end,end-1) - stock_x(1:end,end-2)))/...
log(norm(stock_x(1:end,end-1) - stock_x(1:end,end-2))/...
norm(stock_x(1:end,end-2) - stock_x(1:end,end-3))),5)

a = x;

end

function [ff,q] = Sistemas_Rafael(aa,ff,q)

ff = subs(ff,aa(:),q);

end

```

```

% Script para resolver la ecuacion de calor en un medio no homogeneo
% Se usa la funcion peso polinomica de la segunda clase propuesta

clear
clc

format compact
DATOS = '2doMethodCalorFuente10-Tmax_5-nx20-nt10'; %% NOMBRE DE LA FIGURA A
        GUARDAR

digits(150);
m_it = 50;
tol = 1e-6;

x0 = -4;
xf = 4;
Nx = 20;
Nt = 10;
num_max_iter = 0;

Tmax = 5;

step_x = 1/Nx;
step_t = Tmax/Nt;
x_values = x0:step_x:xf;
t_values = 0:step_t:Tmax;

A = sym('u',[length(x_values),length(t_values)]);

%%%%%%%%%%%%%% condiciones de frontera %%%%%%%%%%%%%%%
A(:,1) = sech(7*x_values).^2;
A(1,:) = 0;
A(length(x_values),:) = sin(t_values);
%%%%%%%%%%%%%% condiciones de frontera %%%%%%%%%%%%%%%

for j = 2:length(t_values)

    x0 = vpa(A(2:length(x_values)-1,j-1)) ;

    [A,~,efx,iter] = Second_Method(A,x0,tol,m_it,length(x_values),...
    length(t_values),j,Tmax);

    num_max_iter = num_max_iter + iter;

end

numero_medio_iterc = num_max_iter/length(t_values)

AA = double(A);
mesh((t_values),(x_values),AA)

%GUARADO DE FIGURA
hgsave(DATOS)
%GUARADO DE FIGURA

%%%%%%%%%%%%%% GUARDADO DE ARCHIVO DE DATOS %%%%%%%%%%%%%%%

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%
```

```
fid = fopen('2doMethodCalorFuente10-Tmax_5-nx20_nt10.txt','w');
```

```
[f,c] = size(AA);
```

```
for i = 1:f
```

```
    for j = 1:c
```

```
        fprintf(fid,'%f\t',AA(i,j));
```

```
    end
```

```
        fprintf(fid,'\n');
```

```
end
```

```
fclose(fid);
```

```
%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% GUARDADO DE ARCHIVO DE DATOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SEGUNDO METODO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function [a,t,efx,iter] = Second_Method(a,g,tol,maxiter,nx,nt,columna,tmax)
```

```
    efx = 1;
```

```
    iter = 0;
```

```
    x = g(:);
```

```
    m = length(x);
```

```
    fff = sym('u_%d_%d',[nx-2,1]) ;
```

```
    k = tmax/nt;
```

```
    h = 8/nx;
```

```
    alpha = 1;
```

```
    parfor i = 2:nx-1
```

```
        for w = columna:columna
```

```
            F = 10;
```

```
            fuente_de_calor = Fuentes(i,nx,F);
```

```
            ganmaCalorCuasi = (h^2+2*k+alpha*k*(a(i+1,w)-a(i-1,w)))/(k*h^2);
```

```
            fff(i-1,1) = a(i+1,w)/h^2 + a(i,w-1)/k - ganmaCalorCuasi*a(i,w) -...
```

```
            (alpha*a(i,w)^2)/h^2 + a(i-1,w)/h^2 + (alpha*a(i+1,w)^2)/h^2 + fuente_de_calor;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    dy = jacobian(fff,a(2:nx-1,columna));
```

```
    while (iter < maxiter && (efx) > tol)
```

```
        [fx,x] = Sistemas_Rafael(a,fff,x,nx,columna);
```

```
        dfx = subs(dy,a(2:nx-1,columna),x);
```

```
        y = x - dfx \ fx;
```

```

[fy,y] = Sistemas_Rafael(a,fff,y,nx,columna);

for j = 1 : m

    v1 = x;
    v1(1:j) = y(1:j);
    v2 = x;
    v2(1:j-1) = y(1:j-1);
    [Fv1,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v1,nx,columna);
    [Fv2,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v2,nx,columna);
    ddxxyF(:,j) = (Fv1-Fv2)/((y(j))-x(j));

end

FpxixyF = dfx\ddxyF;

ImenosFpxixyF = eye(length(x)) - FpxixyF;
ImenosFpxixyF_2 = ImenosFpxixyF*ImenosFpxixyF;
FpxiFy = dfx\fy;
ImasImenosFpxixyF_2 = eye(length(x)) + ImenosFpxixyF_2;

z = y - ImasImenosFpxixyF_2\FpxiFy;

for j = 1 : m

    v1 = y;
    v1(1:j) = z(1:j);
    v2 = y;
    v2(1:j-1) = z(1:j-1);
    [Fv1,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v1,nx,columna);
    [Fv2,~] = Sistemas_Rafael(a,fff,v2,nx,columna);
    ddyzF(:,j) = (Fv1-Fv2)/((z(j))-y(j));

end

FpxiyzF = dfx\ddyzF;

Fz_Fy = ImasImenosFpxixyF_2\FpxiyzF;

H = (Fz_Fy - eye(length(x)))^2 - Fz_Fy + 2*eye(length(x));

[fz,z] = Sistemas_Rafael(a,fff,z,nx,columna);

t = z - H*dfx\fz;

if isnan(t)
    disp('x = NaN')
    break
end

iter = iter + 1;

[ft,t] = Sistemas_Rafael(a,fff,t,nx,columna);
efx = norm(ft);

x = t;

```

```

        end

a(2:nx-1, columna) = x;

end

function [ff,q] = Sistemas_Rafael(aa,ff,x,nx,indx)

    x=x(:);
    q = x;
    ff = subs(ff,aa(2:nx-1,indx),q);

end

function b = Fuentes(c,d,e)
    a = mod(c,10);
    if a == 0
        b = e*(-1)^randi([2,d - 1],1,1);
    else
        b = 0;
    end
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SEGUNDO METODO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```


Bibliografía

- [1] Abad M.; Cordero A.; Torregrosa J.R. A family of seventh-order schemes for solving nonlinear systems, *Bulletin Mathématique (Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie)*, **2014**, 57(105(2)), 133–145.
- [2] Abraham, R.H.; Gardini, L.; Mira, Christian. *Chaos in Discrete Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York 2003.
- [3] Al-Obaidi, R.H.; Darvishi, M.T. A Comparative Study on Qualification Criteria of Nonlinear Solvers with Introducing Some New Ones. *Journal of Mathematics*, 2022, art. no. 4327913, DOI: 10.1155/2022/4327913
- [4] Alligood, K.T.; Sauer, T.D.; Yorke, J.A. *Chaos an Introduction to Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York 2003.
- [5] Amat, S.; Busquier, S. *Advances in Iterative Methods for Nonlinear Equations*, SEMA SIMAI Springer Series, 2016.
- [6] Artidiello, S.; Cordero, A.; Torregrosa, J. R.; Vassileva, M. P. Design and multidimensional extension of iterative methods for solving nonlinear problems, *Applied Mathematics and Computation*, **2017**, 293, 194–203.
- [7] Artidiello, S. Cordero, A. Torregrosa, J.R. Vassileva, M.P. Multidimensional generalization of iterative methods for solving nonlinear problems by means of weight-function procedure. *Appl. Math. Comput.* 2015, 268, 1064–1071.
- [8] Artidiello, S.; Cordero, A.; Torregrosa, J. R.; Vassileva, M. P. Multidimensional generalization of iterative methods for solving nonlinear problems, *Applied Mathematics and Computation*, **2015**, 268, 1064–1071.
- [9] Artidiello, S.; Cordero, A.; Torregrosa, J. R.; Vassileva, M. P. Multidimensional generalization of iterative methods for solving nonlinear problems by means of weight-function procedure, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 268, 1064–1071.
- [10] Artidiello, S. Cordero, A. Torregrosa, J.R. Vassileva, M.P. Multidimensional generalization of iterative methods for solving nonlinear problems by means of weight-function procedure. *Appl. Math. Comput.* 2015, 268, 1064–1071.
- [11] Babolian, E.; Biazar, J.; Vahidi, A.R. Solution of a system of nonlinear equations by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, **2004**, 150(3), 847–854.
- [12] Behl, R.; Sarría, Í.; González, R.; Magreñán, Á. A. Highly efficient family of iterative methods for solving nonlinear models, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2019**, 346, 110–132.
- [13] Behl, R.; Argyros, I.K.; Mallawi, F.O. Some high-order convergent iterative procedures for nonlinear systems with local convergence (2021) *Mathematics*, 9 (12), art. no. 1375. DOI: 10.3390/math9121375
- [14] Bottou. L. Large-scale machine learning with stochastic gradient descent, in: *Proceedings of COMPSTATâ2010*, Springer, 2010, pp. 177–186
- [15] Budzko, D.A; Cordero. A; Torregrosa, J.T. New Family of Iterative Methods Based on the Ermakov–Kalitkin Scheme for Solving Nonlinear Systems of Equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015, 55(12),1947–1959.

- [16] Burden, R.L.; Faires, D.J.; Burden, A.M. *Numerical Analysis*, Academic Press, New York 1972.
- [17] Campos, B.; Vindel, P. Dynamics of subfamilies of Ostrowski–Chun methods (2021) *Mathematics and Computers in Simulation*, 181, pp. 57-81. DOI: 10.1016/j.matcom.2020.09.018
- [18] Candela, V.; Peris, R. A class of third order iterative Kurchatov–Steffensen (derivative free) methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, **2019**, 350, 93–104.
- [19] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. A new three-step class of iterative methods for solving nonlinear systems. *AIMS Mathematics* 2019; 7(12):1221, doi:10.3390/math7121221.
- [20] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Isonormal surface: A new tool for the multidimensional dynamical analysis of iterative methods for solving nonlinear systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2019; 7(12):1221, doi:10.1002/mma.7695.
- [21] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2021) Stability Analysis of Iterative Methods for Solving Nonlinear Algebraic Systems. *Current Topics on Mathematics and Computer Science Vol.9*, 6-24. <https://doi.org/10.9734/bpi/ctmcs/v9/11959D>.
- [22] Capdevila, R.R.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2021) Convergence and Dynamical Study of a New six Order Convergence Iterative Method for Solving Non Linear Equation Systems. *AIMS Mathematics* 2023; 8(6):12751-12777. doi: 10.3934/math.2023642
- [23] Chicharro, F.I.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods. *The Scientific World Journal* 2013; 2013:ID 780153, 11 pages.
- [24] Cordero, A.; Martínez, E.; Torregrosa, J. R. Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2009**, 231(2), 541–551.
- [25] Cordero A.; Torregrosa J.R.; Vassileva M.P. Pseudo-composition: a technique to design predictor-corrector methods for systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2012;218:11496–11508.
- [26] Cordero, A.; Torregrosa, J.R.; Vassileva, M.P. Design, Analysis, and Applications of Iterative Methods for Solving Nonlinear Systems. In *Nonlinear Systems-Design, Analysis, Estimation and Control*. Rijeka, Croatia: IntechOpen, 2016.
- [27] Cordero, A.; Giménez-Palacios, I.; Torregrosa, J.R. Avoiding strange attractors in efficient parametric families of iterative methods for solving nonlinear problems (2019) *Applied Numerical Mathematics*, 137, pp. 1-18. DOI: 10.1016/j.apnum.2018.12.006
- [28] Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Variants of Newton's method for functions of several variables. *Applied Mathematics and Computation* 2006; 183:199–208.
- [29] Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Variants of Newton's method using 5th-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation* 2007; 190:686–698.
- [30] Cordero, A.; Torregrosa, J. R.; Vassileva, M. P. Design, Analysis, and Applications of Iterative Methods for Solving Nonlinear Systems, in *Nonlinear Systems - Design, Analysis, Estimation and Control*, InTech, doi: 10.5772/64106, 2016.
- [31] Cordero, A.; Torregrosa, J. R.; Vassileva, M. P. Pseudo-composition: a technique to design predictor-corrector methods for systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, **2012**, 218, 11496–11508.
- [32] Cordero, A.; Jordán, C.; Sanabria, E.; Torregrosa, J.R. A new Class of iterative Processes for Solving Nonlinear Systems by using One Divided Differences Operator, *Mathematics*, **2019**, 7, ID 776, doi: 10.3390/math7090776.
- [33] Cordero, A.; Maimó, J. G.; Torregrosa, J. R.; Vassileva, M. P. Iterative Methods with Memory for Solving Systems of Nonlinear Equations Using a Second Order Approximation, *Mathematics* **2019**, 7, ID 1069, doi:10.3390/math7111069.

-
- [34] Cordero A.; García-Maimó J.; Torregrosa, J.R.; Vassileva M.P. Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families, *Journal of Mathematical Chemistry*, **2015**, 53, 430–449.
- [35] Cordero, A.; Torregrosa, J. R. On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2010**, 234, 34–43.
- [36] Cordero A.; García-Maimó J.; Torregrosa, J.R.; Vassileva M.P. Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families, *Journal of Mathematical Chemistry*, **2015**, 53, 430–449.
- [37] Cordero, A.; Martínez, E.; Torregrosa, J. R. Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2009**, 231, 541–551.
- [38] Cordero, A.; Hueso, J. L.; Martínez, E.; Torregrosa, J. R. Increasing the convergence order of an iterative method for nonlinear systems, *Applied Mathematics Letters*, **2012**, 25, 2369–2374.
- [39] Cordero, A.; Hueso, J. L.; Martínez, E.; Torregrosa, J. R. A modified Newton-Jarrat composition, *Numerical Algorithms*, **2010**, 55, 87–99.
- [40] Cordero.;A, Martínez.; E, Torregrosa.; J.R. Multidimensional stability analysis of a family of biparametric iterative methods, *J Math Chem*. 2017; 55:1461-1480. doi: 10.1007/s10910-016-0724-6
- [41] Cordero.;A, Maimó.;J.G, Torregrosa.;J.R, Vassileva.; M.P. Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2009; 231:541–551.
- [42] A. Cordero, F.; Soleymani.; J.R. Torregrosa. Dynamical analysis of iterative methods for nonlinear systems or how to deal with the dimension? *Applied Mathematics and Computation* 2014: 244:398–412, doi: 10.1016/j.amc.2014.07.010
- [43] Cordero A.; Torregrosa J.R. Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 190:686–698.
- [44] Cordero A.; Torregrosa J.R. On interpolation variants of Newton's method for functions of several variables. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010;234:34–43.
- [45] Cordero, A.; Jordán, C.; Sanabria-Codesal, E.; Torregrosa, J.R. Design, convergence and stability of a fourth-order class of iterative methods for solving nonlinear vectorial problems (2021) *Fractal and Fractional*, 5 (3), art. no. 125, DOI: 10.3390/fractalfract5030125
- [46] A. Cordero, J.R. Torregrosa, M.P. Vassileva. Solving nonlinear problems by Ostrowski–Chun type parametric families, *Journal of Mathematical Chemistry*, Volume 53, Issue 4, Pages 1191 - 1192, April 2015. doi: 10.1007/s10910-014-0432-z
- [47] Cordero A.; Gutiérrez J.M.; Magreñán Á. A.; Torregrosa J.R. Stability analysis of a parametric family of iterative methods for solving nonlinear models (2016) *Applied Mathematics and Computation*, 285, pp. 26 - 40. DOI: 10.1016/j.amc.2016.03.021
- [48] Darvishi, M. T.; Barati, A. Super cubic iterative methods to solve systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, **2007**, 188, 1678–1685.
- [49] Demidovich, B.P. and Maron, I.A. *Computational Mathematics*, Mir Publishers, Moscow 1981.
- [50] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Advances in Mathematics and Engineering, CRC Press, 2003.
- [51] Ezquerro, J.A.; Hernandez, M.A. An optimization of Chebyshev's method. *Journal of Complexity*. 2009; 25: 343–361.
- [52] Frontini M.; Sormani E. Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2004; 149:771–782.

- [53] Gautschi, Walter. *Numerical Analysis*, Springer Science+Business Media, LLC 1997, 2012
- [54] Gerlach J. Accelerated convergence in Newton's method. *SIAM Review*. 1994; 36(2): 272–276.
- [55] Geum, Y.H.; Kim, Y.I.; Magreñán, Á. A. A biparametric extension of King's fourth-order methods and their dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 282, pp. 254–275
- [56] Hernández, M. A. Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **2000**, 104(3), 501–515.
- [57] Homeier, H. H.H. A modified Newton method with cubic convergence: the multivariable case, *J. Comput. Appl. Math*, 2004, 169, 161–169.
- [58] Homeier, H. H.H. On Newton type method with cubic convergence, *J. Comput. Appl. Math*, 2005, 176, 425–432.
- [59] Hueso, J. L.; Martínez, E.; Torregrosa, J. R. Third and fourth order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems, *Applied Mathematics and Computation*, **2009**, 211(1), 190–197.
- [60] Iaremchuk, F. P y Rudenko, P. A. *Álgebra y funciones elementales*, Pensamiento científico, Kiev 1987.
- [61] Isaacson, E. and Keller, H.B. *Analysis of Numerical Methods*, Dover Publications, New York 1996.
- [62] Kansal, M.; Cordero, A.; Bhalla, S. , Torregrosa, J.R. New fourth- and sixth-order classes of iterative methods for solving systems of nonlinear equations and their stability analysis. *Numer. Algor.* 87, 1017–1060 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11075-020-00997-4>.
- [63] Kung, H. T y Traub. J. F. Optimal order of one-point and multi-point iteration. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1974, 21, 643–651. doi: <https://doi.org/10.1145/321850.321860>.
- [64] Narang, M.; Bhatia, S.; Alshomrani, A. S.; Kanwar, V. General efficient class of Steffensen type methods with memory for solving systems of nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2019**, 352, 23–39.
- [65] Noor, M.A.; Waseem, M. Some iterative methods for solving a system of nonlinear equations, *Comput. Math. Appl.* 2009. 57, 101–106.
- [66] Ortega, J.M.; Rheinbolt, W.C. *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York 1970.
- [67] Ortega, J.M. *Numerical Analysis A Second Course*, Academic Press, New York 1972.
- [68] Ostrowski A.M. *Solutions of equations and systems of equations*. *Academic Press*; 1966.
- [69] Ozban A.Y. Some new variants of Newton's method. *Applied Mathematics Letters*. 2014; 17:677–682.
- [70] Robinson RC. An Introduction to Dynamical Systems, Continuous and Discrete. *American Mathematical Society*, Providence, RI, USA, 2012.
- [71] Soleymani, F.; Sharifi, M.; Shateyi, S.; Haghani, F. K. A class of Steffensen-type iterative methods for nonlinear systems, *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, 2014, Article ID 705375, 9 pages, doi:10.1155/2014/705375.
- [72] Singh, A. An efficient fifth-order Steffensen-type method for solving systems of nonlinear equations, *International Journal of Computing Science and Mathematics*, **2018**, 9(5), 501–514.
- [73] Sharma, J. R.; Arora, H. Efficient derivative-free numerical methods for solving systems of nonlinear equations, *Computational and Applied Mathematics*, **2016**, 35(1), 269–284.
- [74] Sharma, J. R.; Guha, R. K.; Sharma, R. An efficient fourth order weighted-Newton method for systems of nonlinear equations, *Numerical Algorithms*, **2013**, 62, 307–323.

-
- [75] Sharma, J. R. An efficient fifth order method for solving systems of nonlinear equations, *Comput. Math. Appl.*, 2014, 67, 591–601.
- [76] Singh, A. An efficient fifth-order Steffensen-type method for solving systems of nonlinear equations. *International Journal of Computing Science and Mathematics* 2018; 9(5):501–514.
- [77] Tijonov A, Samarsky A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. MIR, Moscow, 1970.
- [78] Traub, J.F. *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice Hall, New York, 1964.
- [79] V. V. Ermakov y N. N. Kalitkin. The optimal step and regularization for Newton's method, *Comput. Math. Math. Phys.* 1981, 21(2), 235–242.
- [80] Xiao, X y Yin, H. Achieving higher order of convergence for solving systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 311, 251–261.
- [81] Xiao, X. Y.; Yin, H. W. Increasing the order of convergence for iterative methods to solve nonlinear systems, *Calcolo*, 2016, 53, 285–300.
- [82] Wang X.; Zhang T.; Qian W.; Teng M. Seventh-order derivative-free iterative method for solving nonlinear systems. *Numerical Algorithms*. 2015; 70:545–558.
- [83] Weerakoon S.; Fernando T.G.Y. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters*. 2000; 13:87–93. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(00\)00100-2](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00100-2)
- [84] H. Wenrui. A gradient descent method for solving a system of nonlinear equations. *Applied Mathematics Letters* 112 (2021).
- [85] Zhanlav, T; Changbum Chun; Otgondorj, Kh; Ulziibayar, V. High-order iterations for systems of nonlinear equations, *International Journal of Computer Mathematics*. 2020, 97:8, 1704–1724, DOI: 10.1080/00207160.2019.1652739
- [86] T. Zhanlav and I. V. Puzynin. The convergence of iterations based on a continuous analogue of Newton's method, *Comput. Math. Math. Phys.* 1992, 32(6), 729–737.