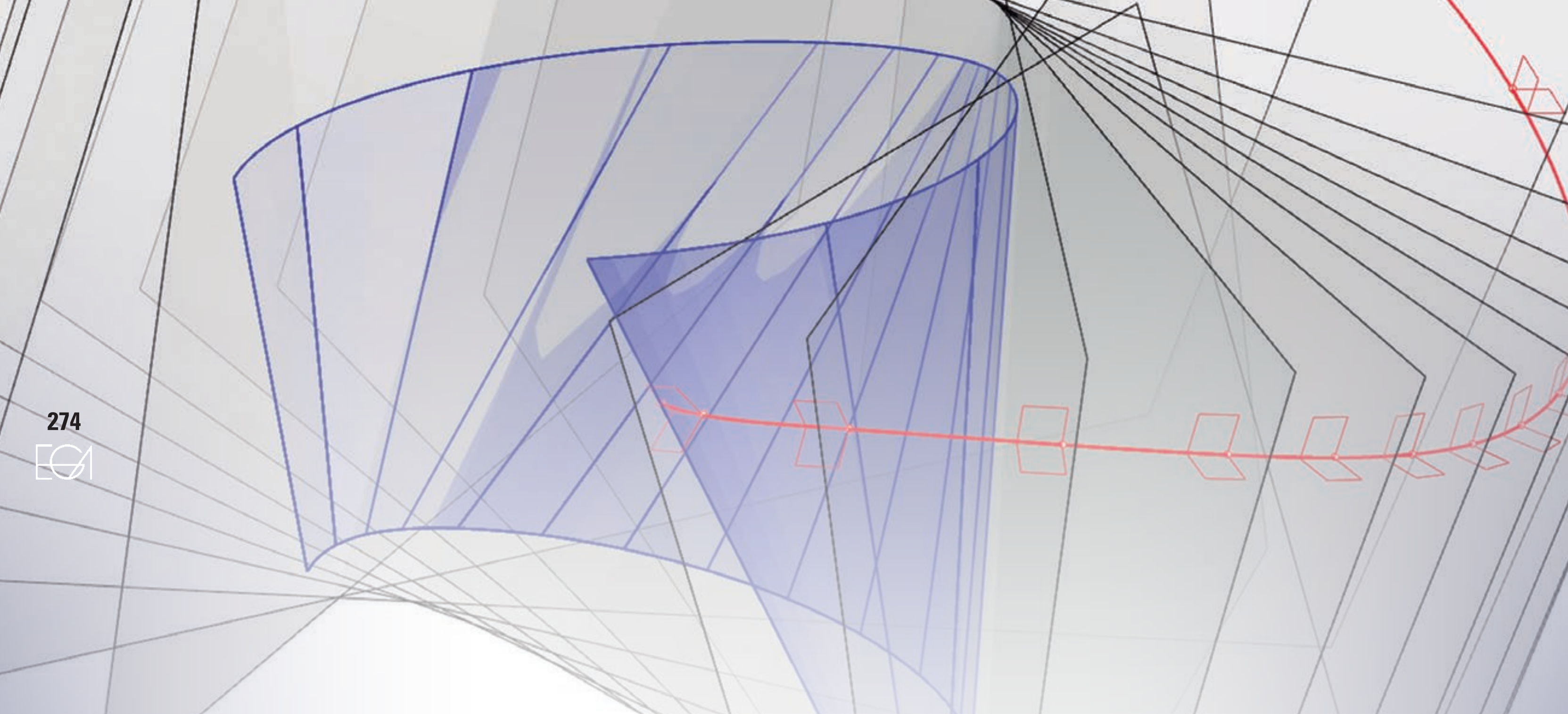


LA SUPERFICIE POLAR DE GASPARD MONGE. UNA APROXIMACIÓN DESDE EL PENSAMIENTO GRÁFICO AUMENTADO

GASPARD MONGE'S POLAR SURFACE. AN APPROACH FROM AUGMENTED GRAPHIC THINKING

Andrés Martín-Pastor; orcid 0000-0002-5588-2886 Universidad de Sevilla
Francisco González-Quintial; orcid 0000-0001-6600-6024 Universidad del País Vasco

doi: 10.4995/ega.2024.19729

La Superficie polar de una línea curva se define como la envolvente de los planos normales que recorren la curva y se enmarca en el conjunto de las tres superficies desarrollables que se generan por el movimiento de los planos del triedro de Frenet, junto con las superficies tangenciales y las rectificantes. La idea de una superficie formada por los ejes polares de una curva lo debemos a Gaspard Monge que describió sus propiedades en *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes …* (1785).
Estas superficies, aunque aparecen mencionadas en algunos manuales de Geometría Descriptiva, no han sido descritas desde el punto de vista del pensamiento gráfico. Este artículo hace una revisión del texto primigenio de Monge, sacando a relucir algunas aplicaciones poco conocidas de las mismas y de gran interés para el diseño arquitectónico.

PALABRAS CLAVE: SUPERFICIES POLARES, SUPERFICIES DESARROLLABLES, GASPARD MONGE, GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, CURVAS PARALELAS, TRIEDRO DE FRENET, GEOMETRÍA ARQUITECTÓNICA, PENSAMIENTO GRÁFICO AUMENTADO

The polar surface of a curve is defined as the envelope of the normal planes along the curve. It is part of the set of three developable surfaces generated by the movement of the Frenet frame, together with torsal and rectifying surfaces. The idea of a surface formed by the polar axes of a curve is the brainchild of Gaspard Monge who described its properties in Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes *(1785).*
Polar surfaces, despite having been mentioned in several manuals of Descriptive Geometry, have yet to be described from the point of view of graphic thinking. This article reviews Monge's original text, bringing to light their little-known applications which present great interest for architectural design.

KEYWORDS: POLAR SURFACES, DEVELOPABLE SURFACES, GASPARD MONGE, DESCRIPTIVE GEOMETRY, OFFSET CURVES, FRENET FRAME, ARCHITECTURAL GEOMETRY, AUGMENTED GRAPHIC THINKING

Gaspard Monge es bien conocido en nuestra área de Expresión Gráfica Arquitectónica como el creador de la Geometría Descriptiva –la disciplina académica creada a principios del XIX de igual título que su obra *Géométrie Descriptive* (1799)– que tanta importancia ha tenido en los estudios de arquitectura e ingeniería. Pero debemos recordar que los primeros estudios científicos de Monge estuvieron relacionados con las superficies desarrollables, un rompecabezas no resuelto en su época y que el gran geómetra francés tuvo el mérito de ordenar y sistematizar (Lawrence 2011).

En 1769, Monge publica su primera "*Nota matemática*" relacionada con las desarrollables: *Sur les développées des courbes à double courbure et leurs inflexions*. Se trata de un pequeño estudio que fue el preludio de dos textos posteriores de enorme interés y donde ya se recoge el germen de la superficie polar (Taton 1966).

En 1771, Monge presenta en la Academia Real de Ciencias de París la *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes a double courbure*. El texto se publicó en 1785 en las *Memorias de Matemáticas y Física*. En esta obra aparecen las primeras representaciones gráficas de la superficie polar, que fueron recogidas en seis figuras al final del trabajo (Fig. 1). En este estudio se abordan los conceptos de evoluta de una línea curva alabeada y su relación con las superficies desarrollables que es el centro de nuestra discusión sobre las superficies polares y sus aplicaciones.

En 1780, se publica su *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables*…. El texto aborda la correspondencia entre las superficies desarrollables con los fenómenos de la sombra y de la penumbra, un tema de enorme interés por su relación con los mecanismos gráficos para producir superficies desarrollables 1. Curiosamente, esta segunda memoria se publica antes que la primera y –quizás por ese motivo– el texto comienza mencionando el trabajo presentado en la Academia nueve años antes junto a sus principales aportaciones. En ella se describe como "el lugar geométrico de todas las evolutas de una misma curva y que tiene la propiedad [la superficie polar] de poder extenderse sobre un plano".

Unos años más tarde, Monge recogerá el conjunto de sus aportaciones sobre las superficies desarrollables en *Application de l'Analyse a la Géométrie*… (1807), donde vuelve a exponer las mismas seis figuras que su primera memoria, pero ahora reelaboradas en una sola lámina (Fig. 2).

Las investigaciones de Monge sobre las superficies desarrollables serán posteriormente recogidas por algunos de sus seguidores, que las ampliaron y completaron, como Lacroix (1790), Fourier (1801) y Lancret (1806) 2.

Las superficies polares en Geometría Descriptiva

Los principales estudios sobre la obra de Monge coinciden en situarlo como el creador de una nueva manera de entender la Geometría, donde la concepción sintética y gráfica toma el protagonismo sobre el álgebra. No hablamos aquí de las virtudes del sistema de doble proyección defendido

Gaspard Monge is well-known in the area of Architectural Graphic Expression as the creator of Descriptive Geometry. This academic discipline was created at the beginning of the 19th century under the same name as his work, *Géométrie Descriptive* (1799), which has enjoyed a position of prime importance in architecture and engineering studies. It should be borne in mind, however, that Monge's first scientific studies were related to developable surfaces: a puzzle that remained unsolved in his era and for which the French geometrician gained merit for its ordering and systematising (Lawrence 2011).

In 1769, Monge published his first "Mathematical Note" related to developables: *Sur les développées des courbes à double courbure et leurs inflexions*. This small study was the prelude to two later texts of enormous interest where the germ of the polar surface is already exposed (Taton 1966).

In 1771, Monge presented the *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes a double courbure* at the Royal Academy of Sciences in Paris. The text was published in 1785 in the *Memoirs of Mathematics and Physics*. The first graphic representations of the polar surface are collected in six figures at the end of this work (Fig. 1). This study addresses the concept of the involute of a 3D curve and its relationship with developable surfaces, which forms the centre of our discussion on polar surfaces and their applications.

In 1780, the *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables* was published. The text addresses the correspondence between developable surfaces with the phenomena of shadow and penumbra: a topic of enormous interest due to its relationship with the graphic mechanisms to produce developable surfaces 1. Curiously, this second memoir was published before the first memoir and, perhaps for that reason, the text begins by mentioning the work presented at the Academy nine years earlier with its main contributions. In this text, the polar surface is described as "the loci of all the evolutes of the same curve, which forms a surface endowed with the property of being able to extend on a plane".

A few years later, Monge collected all of his contributions on developable surfaces in *Application de l'Analyse a la Géométrie* (1807), where he exhibits the same six figures as in his first memoir, but now reworked into a single sheet (Fig. 2).

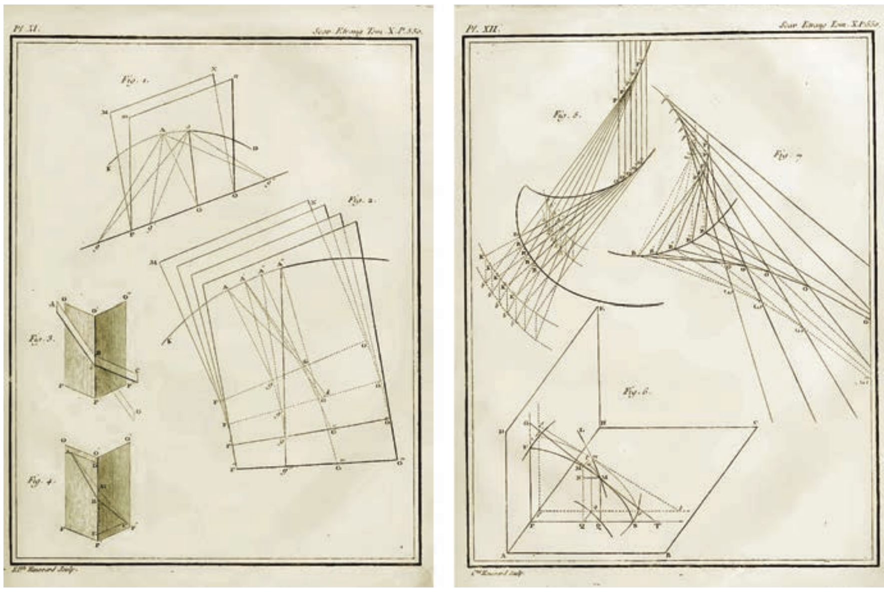
Monge's research on developables would be subsequently collected by several of his followers, such as Lacroix (1790), Fourier (1801), and Lancret (1806), who expanded and completed his research **2**.

Polar surfaces in Descriptive Geometry

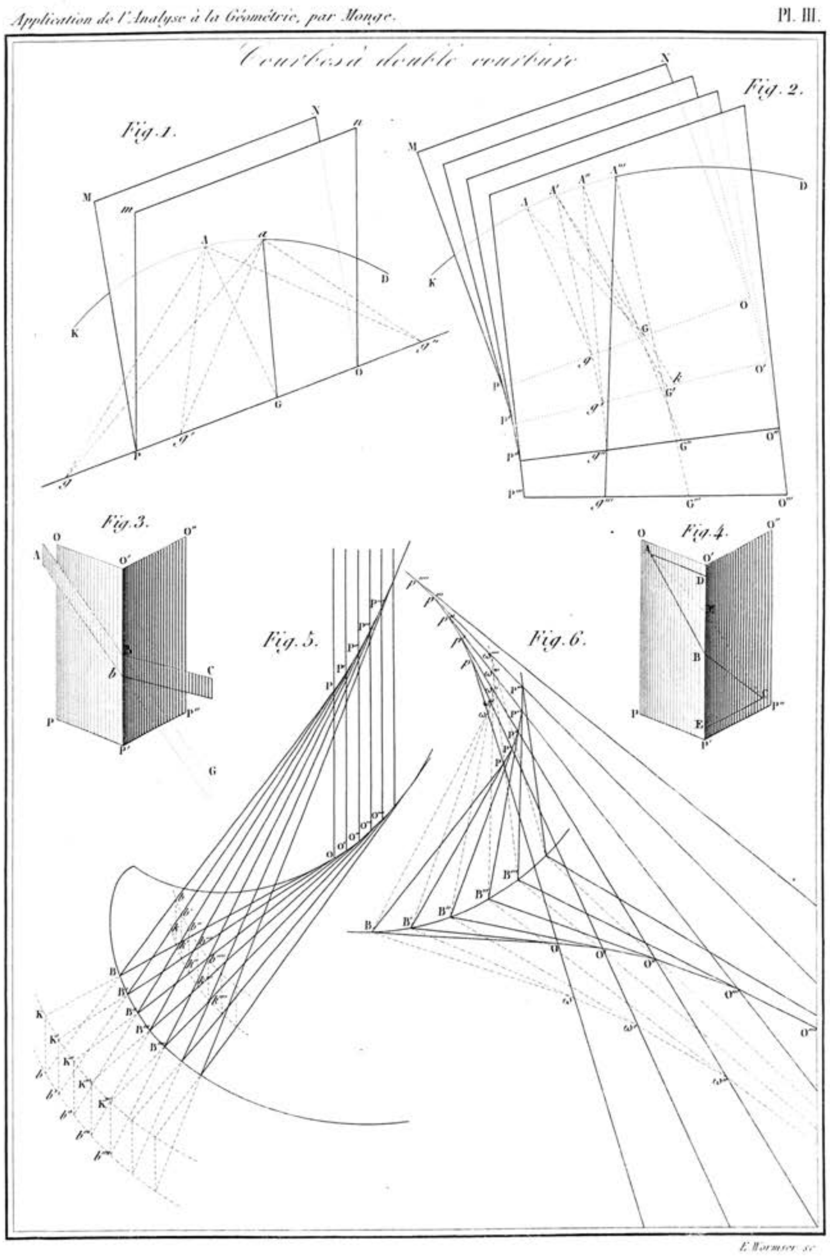
The main studies on Monge's work coincide in placing him as the creator of a new way of understanding Geometry, where the synthetic and graphic conception takes centre stage over algebra. This does not focus on the virtues of the double orthogonal projection system defended in his *Géométrie Descriptive,* but on how, in Monge's mathematical style, geometric ideas first go through their graphic and even dynamic conception, such as planes that rotate around an axis, surfaces that roll up, and curves that are set in motion, to later seek their analytical formulation (Dupin 1819; Cajori 1929; Tatoon 1951).

In the area of Architectural Graphic Expression, within Spain and related countries, the torsal, rectifying, and polar surfaces are all known thanks to the classic manuals of Descriptive Geometry. In the work of Izquierdo Asensi (1985) and Taibo Fernández (1983), it can be observed that these surfaces are described as a special group of developable surfaces. Although sufficiently elaborate graphic and synthetic explanations can be found for torsal and rectifying surfaces, in the case of polar surfaces (at least in the field of Descriptive Geometry) poorly elaborated graphic material and sometimes contradictory comments are uncovered **3**.

"Polar surfaces" are mentioned by certain authors in the field of mathematics, such as Glaeser and Gruber (2007) and Krivoshapko and Ivanov (2015). However, these surfaces only appear stated and almost never described in relation to other more complex geometric problems. In this respect, they are not included in the fields of Computer Aided Design, Parametric Geometry, or Architectural Geometry **4**.



1



2

1 Monge 1785 (1771). Planchas XI y XII
2. Monge 1850. Plancha III

1. Monge 1785 (1771). Plates XI and XII
2. Monge 1850. Plate III

en su *Géométrie Descriptive* sino de cómo, en el estilo matemático de Monge, las ideas geométricas pasan primero por su concepción gráfica e incluso dinámica: planos que se abaten, superficies que se enrollan, curvas que se ponen en movimiento, etc., para luego encontrar su formulación analítica (Dupin 1819), (Cajori 1929), (Tatoon 1951).

En el área de Expresión Gráfica Arquitectónica en España tenemos conocimiento de las superficies tangenciales, las rectificantes y las polares gracias a los manuales clásicos de Geometría Descriptiva. Vemos en la obra de Izquierdo Asensi (1985) y Taibo Fernández (1983) que estas superficies están descritas como un grupo especial de superficies desarrollables. Si bien para las superficies tangenciales y las rectificantes encontramos unas explicaciones sintéticas y gráficas suficientemente elaboradas, para el caso de las superficies polares –al menos en el campo de la Geometría Descriptiva– nos encontramos con un material gráfico escasamente elaborado y a veces contradictorio 3.

Podemos encontramos que las “superficies polares” aparecen mencionadas en algunos autores del campo de las matemáticas, como Glaeser y Gruber (2007) y Krivoshapko e Ivanov (2015), entre otros. Sin embargo, estas superficies solo aparecen enunciadas y casi nunca descritas en relación con otros problemas geométricos más complejos. En ese sentido, no aparecen recogidas en los campos del *Computer Aided Design*, *Parametric Geometry,* ni el *Architectural Geometry* 4.

Por todo ello pensamos que, al menos en nuestra área de Expresión Gráfica Arquitectónica, es necesaria una actualización de los conceptos generales de las superficies desarrollables en general y las superficies polares en particular, para incorporarlas a la paleta de recursos gráficos y operatorios del arquitecto. En la línea de lo que hemos expresado en otras ocasiones, el control geométrico basado en las herramientas gráficas digitales representa una oportunidad para la actualización de los contenidos de la Geometría Descriptiva desde el pensamiento gráfico aumentado (Martin-Pastor 2019).

Una revisión de la *Mémoire sur les développées*

Generalización tridimensional del concepto de evoluta plana

Tal como comenta Jean Delcourt (2011), el problema inicial que quiere resolver Monge en su *Mémoire* es la generalización de la evoluta plana al espacio. Es sabido que toda línea curva plana tiene infinitas curvas paralelas –involutas– y una línea curva –la evoluta– envolvente de las normales de la curva inicial. Cuando las involutas son curvas planas también coinciden con la línea que forman los centros de curvatura de dichas curvas paralelas. (Fig. 3 izquierda).

Monge, en su *Mémoire,* plantea que toda curva plana tiene también infinitas evolutas no planas –es decir, alabeadas– y que todas ellas conforman una superficie desarrollable denominada superficie de los polos o superficie polar (Fig. 3 derecha). Dicha superficie se define como la superficie tangente a todos los planos normales que recorren la curva, es decir, la envolvente de todos ellos.

For all these reasons we think that, at least in our area of Architectural Graphic Expression, an update of the general concepts of developable surfaces in general and polar surfaces in particular is necessary, for them to be incorporated into the architect’s palette of graphic and operational resources. In line with that which we have expressed on other occasions, geometric control based on digital graphic tools represents an opportunity to update the contents of Descriptive Geometry from Augmented Graphic Thinking (Martin-Pastor 2019).

A review of the *Mémoire sur les développées*

Three-dimensional generalisation of the planar involute concept

As Jean Delcourt (2011) comments, the initial problem that Monge wants to solve in his Mémorie is the generalisation of the planar involute to space. It is known that every planar curve has infinite offset curves (involutes) and one curve (the evolute) enveloping the orthogonal planes of the initial curve. When the involutes are planar, the curves also coincide with the orbit formed by the centres of curvature of said offset curves (Fig. 3. Left-hand-side).

Monge, in his *Mémoire*, states that every plane curve also has infinite non-planar evolutes (i.e., 3D evolutes) and that together they all make up a developable surface called the surface of the poles or polar surface (Fig. 3. Right-hand-side). Said surface is defined as the surface that is tangent to all the orthogonal planes that go over the curve, that is, the envelope of all these planes.

Graphic and synthetic description of the polar surface

The same approach is applicable to 3D curves. The polar surface of 3D curve, C, is formed by a set of generatrices that are the successive intersections of two adjacent orthogonal planes to C (Fig. 4) 5.

If a plane tangent is rolled on the polar surface, whereby said plane is understood as formed of paper or inextensible material, then any point contained in said plane describes a trajectory in space: curve C. Monge proposes a physical model for this: the tangent plane is conceived as two threads that are rolled on the polar surface, and it is deduced that the rolled threads correspond to a 3D evolute **6**.

> This demonstrates, according to Monge, the possibility of generating a 3D curve C by a continuous movement, by means of two threads that are tied at one of their ends at point U and these are then rolled over the surface (...) by the fact of extending the tangent threads over the surface, without slipping, the movement of the two threads will coincide with that of the tangent plane to the surface and the point U, the common end of the two threads, will describe the curve C in space. (Izquierdo Asensi 1985: 301)

Monge's theorems

The main concepts of Monge's *Mémorie* can be summarised in five theorems.

- *Theorem I. Any plane or double curvature curve has an infinite number of evolutes, whose geometric locus is also the surface of the poles of this curve, (Fig. 1. Images 2, 3, 4 by Monge).*
- *Theorem II. One of the evolutes of any curve, planar or double curvature, is obtained if, from one of its points and following an arbitrary direction, we throw a tangent to the developable surface that is the geometric locus of its poles and we freely bend the prolongation of this tangent on this surface.*
- *Theorem III. The curve formed by a straight line bent freely on a curved surface is the*

Descripción gráfica y sintética de la superficie polar

El mismo planteamiento es aplicable a curvas alabeadas. La superficie polar de la curva alabeada C está formada por un conjunto de generatrices que son las intersecciones sucesivas de dos planos normales a C consecutivos (Fig. 4) **5**.

Si enrollamos sobre la superficie polar un plano que permanece tangente a la superficie –entendiéndose dicho plano formado por papel o tejido inextensible– entonces cualquier punto contenido en dicho plano describirá una trayectoria en el espacio –la curva C– a medida que el plano se enrolla totalmente sobre la polar. Monge nos propone para ello un modelo físico: El plano tangente es concebido por dos hilos en tensión que se enrollan sobre la superficie polar, deduciendo que el hilo enrollado corresponde con una evoluta alabeada **6**.

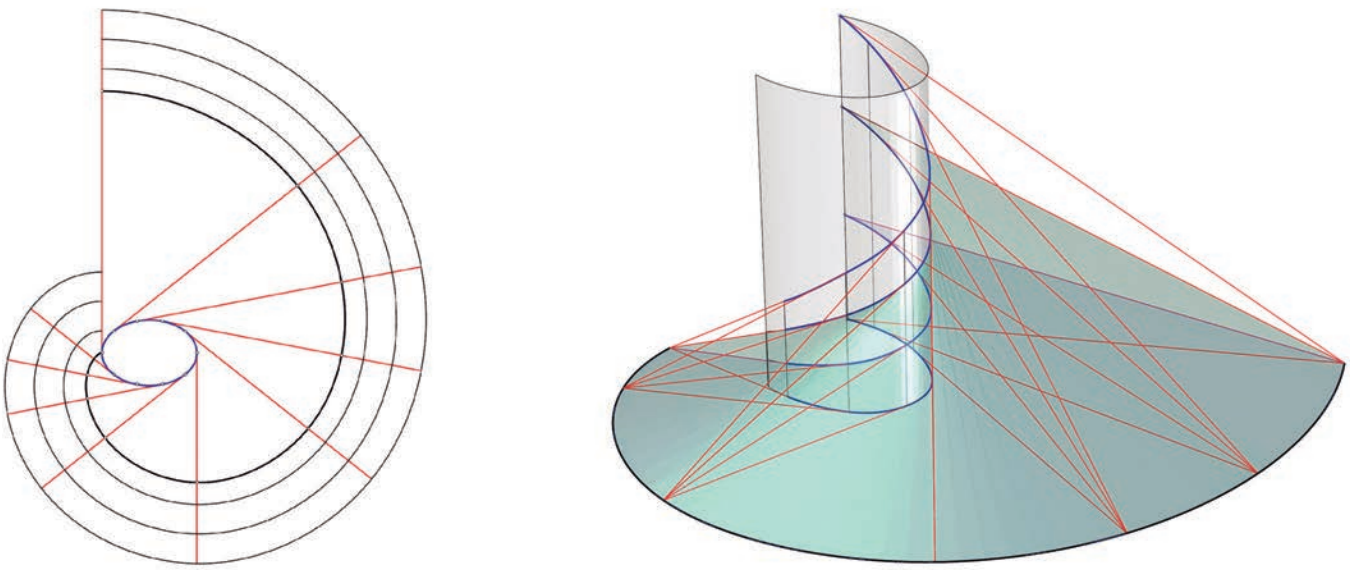
Los dos hilos parten de una misma generatriz de la superficie polar y sus dos extremos están conectados entre sí en un punto U cualquiera. La curva C se genera mediante el movimiento del punto U, a medida que los hilos se enrollan sobre la polar (Fig. 5).

> Esto demuestra, según Monge, la posibilidad de engendrar una curva alabeada C por un movimiento continuo, por medio de dos hilos que se atan por uno de sus extremos a punto U y luego se les extiende sobre la superficie (…) al ir extendiendo los hilos tangentes a la superficie, sin que se produzca deslizamiento, el movimiento de los dos hilos coincidirán con el del plano tangente a la superficie y su extremo común U describirá en el espacio la curva C. (Izquierdo Asensi 1985: 301)

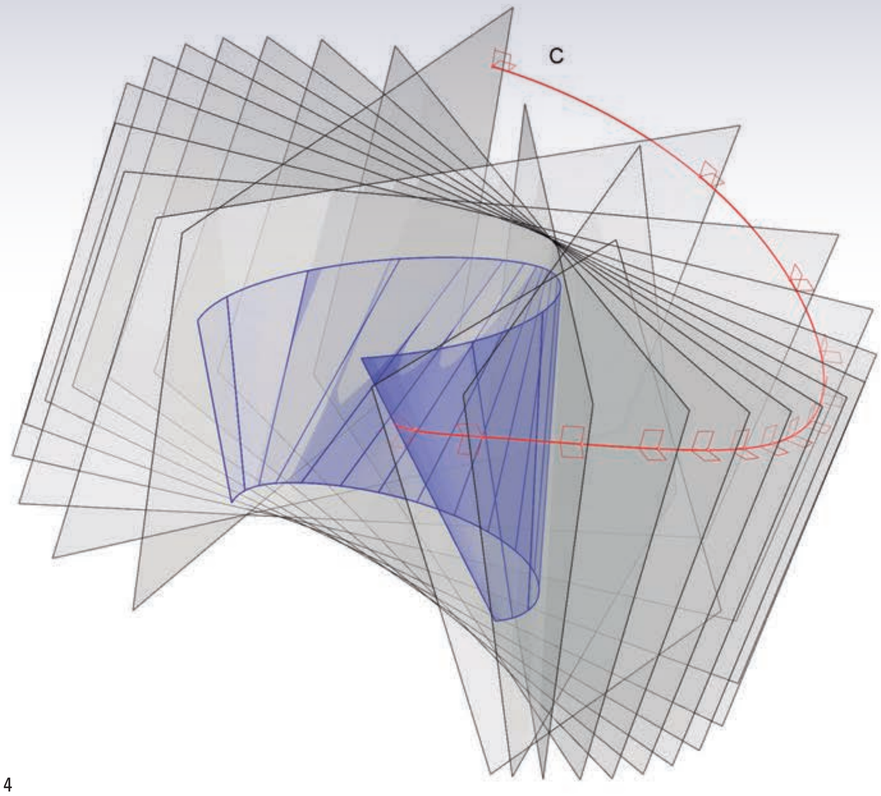
Teoremas de Monge

Los conceptos principales de la *Mémoire* de Monge podemos encontrarlos sintetizados en cinco teoremas:

- *"Teorema I. Cualquier curva plana o de doble curvatura tiene una infinidad de evolutas, cuyo lugar geométrico es también la superficie de los polos de esta curva."* (Fig 1. Imágenes 2, 3, 4 de Monge)
- *"Teorema II. Tendremos una de las evolutas de cualquier curva, plana o de doble curvatura,*



3



4

3. Izquierda: La evoluta plana de un conjunto de curvas planas paralelas o involutas. Derecha: Diferentes evolutas alabeadas de una misma curva plana
4. Generación de la superficie polar (azul) de una curva C (roja) como la envolvente de los planos normales a lo largo de ella
5. Generación de la curva C asociada a una superficie polar, mediante dos hilos que se enrollan

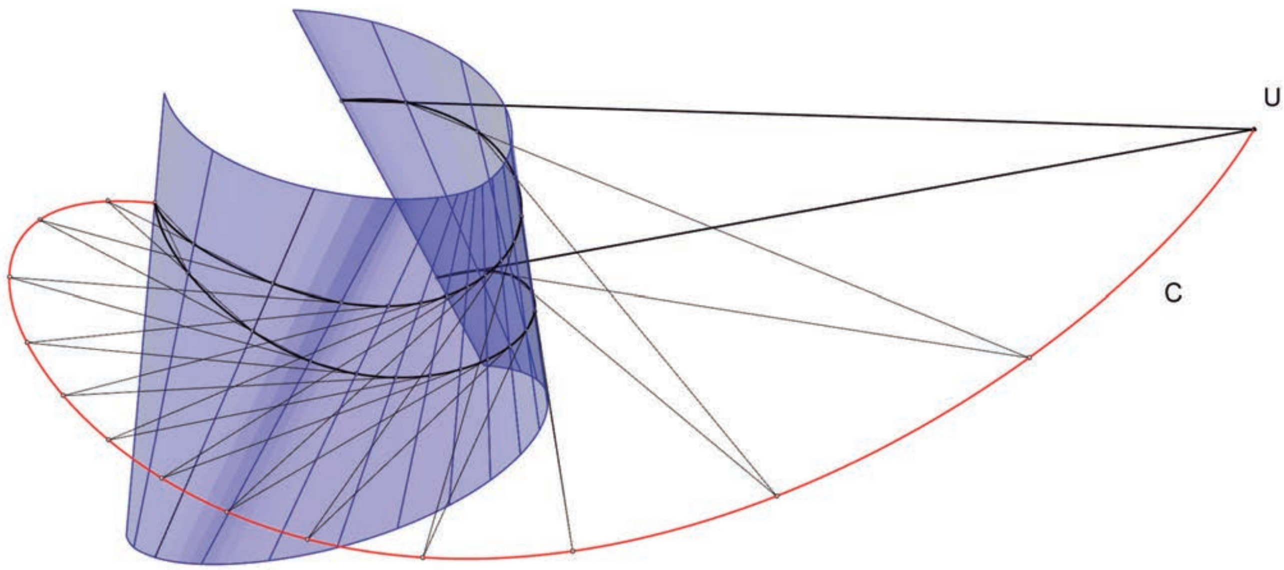
3. Left-hand-side: The plane evolute of a set of offset plane curves or involutes. Right-hand-side: Different 3D evolutes of one planar curve (involute)
4. Generation of the polar surface (blue) of a 3D curve C (red) as the envelope of the normal planes along it
5. Generation of C (curve linked to the initial polar surface) using two rolled threads

*si por uno de sus puntos –y siguiendo una dirección arbitraria– trazamos una tangente a la superficie desarrollable que es el lugar geométrico de sus polos, y doblamos libremente sobre esta superficie la prolongación de esta tangente." (*Fig 1. Imágenes 2, 3, 4 de Monge*)*

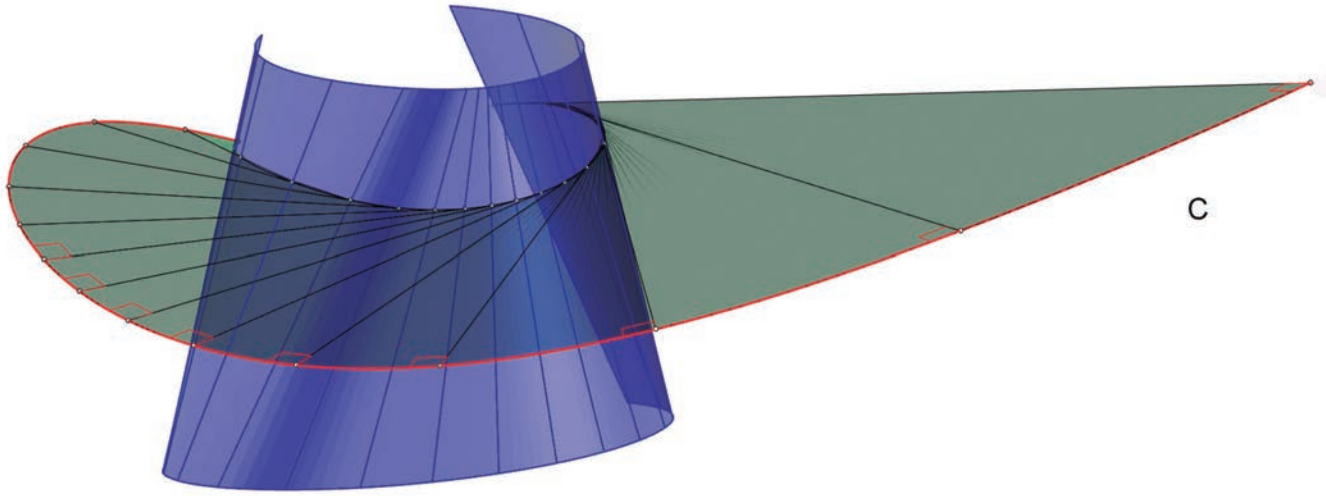
- *"Teorema III. La curva formada por una línea recta doblada libremente sobre una superficie curva es la más corta entre sus extremos que se puede dibujar sobre esta superficie." (*Fig 1. Imágenes 4, 5 de Monge*)*
- *"Teorema IV. Cualquier desarrollable [si la consideramos involuta] puede ser generada por otra superficie desarrollable, que en consecuencia debe considerarse como su evoluta, y estas*

shortest between its extremes that can be drawn on this surface (Fig. 1. Images 4, 5 by Monge).

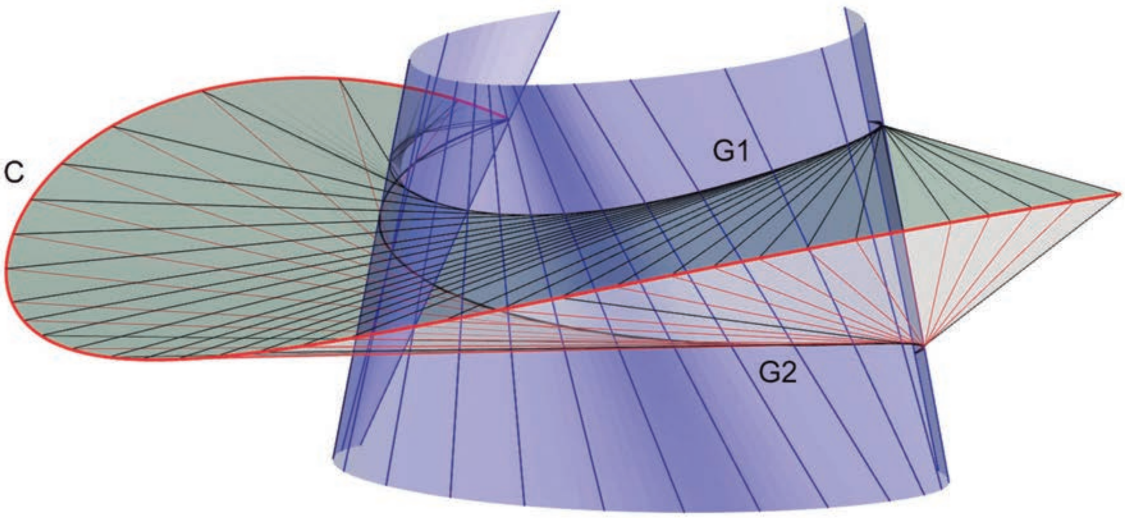
- *Theorem IV. Any developable surface [if considered as an involute] can be generated by another developable surface, which must consequently be considered as its evolute, and these two surfaces always intersect at the edge of regression of the involute surface.*
- *Theorem V. When a developable surface is such that its involute is a cylindrical surface*



5



6



7

with an arbitrary base, then any part of its surface is in relation to its projection on the plane of the base of the cylinder.

Discussion. From the polar surface to offset curves

Two ways of understanding the relationship between a curve C and its polar surface emerge from Monge's text.

Case 1: Starting from any curve C:

– A taut thread that starts from a point on curve C, and touches an arbitrary point on its polar, is wound on said curve according to a curve G. This curve is one of the many 3D evolutes of the curve C and has the property of being a geodesic line G of the polar surface (Fig. 6).

– The movement of the thread in space generates a developable torsal surface whose edge of regression is the 3D evolute G. All the straight lines contained

dos superficies siempre se cruzan en la arista de retroceso de la superficie involuta."

- *"Teorema V. Cuando una superficie desarrollable es tal que su evoluta es una superficie cilíndrica de base arbitraria, cualquier parte de su superficie está en relación con su proyección sobre el plano de la base del cilindro."*

Discusión. De la superficie polar a las curvas paralelas

Del texto de Monge se desprende dos maneras de entender la relación entre una curva alabeada C y su superficie polar.

Caso 1: Si partimos de una curva C cualquiera.

– Un hilo tenso que parte de un punto de C –y toca en un puto arbitrario de su polar– se enrolla sobre esta según una curva G. Dicha curva es una de las muchas evolutas alabeadas de la curva C y tiene la propiedad de ser una línea geodésica G de la superficie polar (Fig. 6).

– El movimiento del hilo en el espacio genera una superficie tangencial desarrollable que tiene como arista de retroceso la evoluta alabeada G. Todas las rectas contenidas en el plano normal a C generan una serie de evolutas G1, G2, ..., Gn, de C, así como una serie de superficies tangenciales diferentes (Fig. 7).

Cada una de estas superficies de-

6. La evoluta alabeada como curva geodésica en la superficie polar
7. Dos superficies desarrollables tangenciales cuyas generatrices se apoyan en C y en su polar. Sus regladas son perpendiculares a C y sus aristas de retroceso son evolutas alabeadas

6. The 3D evolute as a geodesic curve on the polar surface
7. Two torsal developable surfaces whose generatrices rest on C and its polar. Its rules are perpendicular to C and its edges of regression are 3D evolutes

sarrollables tangenciales tienen la propiedad de apoyar en la curva C y tener todas sus regladas perpendiculares a la curva C. Se trata de una de las propiedades más importantes de la superficie polar.

Caso 2: Si partimos de una superficie desarrollable cualquiera, entendida ésta como una superficie polar.

Al enrollar sobre la superficie polar un plano que permanece tangente a ella, cualquier punto contenido en dicho plano describirá una trayectoria C en el espacio a medida que se enrolla.

– Curvas paralelas. Como la posición del punto en el plano que se enrolla es aleatoria, al cambiar la posición del punto generamos no una, sino un conjunto de curvas paralelas C1, C2, …, Cn, que comparten la misma superficie polar. Por ello, no solo la curva C sino todas las curvas paralelas a ella –asociadas a la trayectoria de cualquier punto del plano tangente– definen la superficie polar (Fig. 8). Dicho proceso gráfico explica de forma sintética la generación de curvas paralelas alabeadas.
– Regladas perpendiculares. De los casos anteriores se deduce que dos líneas curvas paralelas entre sí definen siempre una desarrollable con las regladas perpendiculares a ambas curvas (Fig. 9)
Desde el punto de vista de los conceptos de evoluta e involuta, la superficie polar sería la generalización tridimensional del concepto de evoluta plana y el conjunto de líneas curvas alabeadas paralelas a C, sería la generalización tridimensional de las involutas planas.

Otras implicaciones de la *Mémoire*: superficies rectificantes y líneas de curvatura principal

Como todas las evolutas alabeadas son líneas geodésicas de la superficie polar, y ésta es desarrollable, entonces la polar es la superficie rectificante de todas las evolutas [7] (Fig. 10). Por este motivo se ha considerado a la *Mémoire* de Monge como la precursora de la idea de superficie rectificante [8].

Podemos generar la superficie polar no solo desde una curva C, sino también a partir de una superficie desarrollable cualquiera. La polar se define entonces como la envolvente de los planos perpendiculares a la superficie desarrollable inicial que pasa por sus regladas (Fig.11).

Tal como hemos comentado, cualquier superficie desarrollable que se apoye en la curva C y que tenga sus regladas tangentes a la superficie polar tiene la propiedad de tener todas sus regladas perpendiculares a C. Si tenemos en cuenta que las dos familias de líneas de curvatura principal de una superficie desarrollable se definen por: 1.- la familia de las regladas. 2.- la familia de líneas perpendiculares a las regladas en todos sus puntos; podemos deducir que la curva C es una línea de curvatura principal de la superficie desarrollable inicial (Fig. 11).

Ya que una curva C admite infinitas superficies desarrollables tangenciales a su polar, podemos generalizar que todas las curvas C1, C2, …, Cn, paralelas entre sí, son las familias de líneas de curvatura principal de todas las superficies desarrollables posibles asociadas a la polar (Fig. 12). De esta forma, quedan vinculados los conceptos de línea de curvatura principal de una superfi-

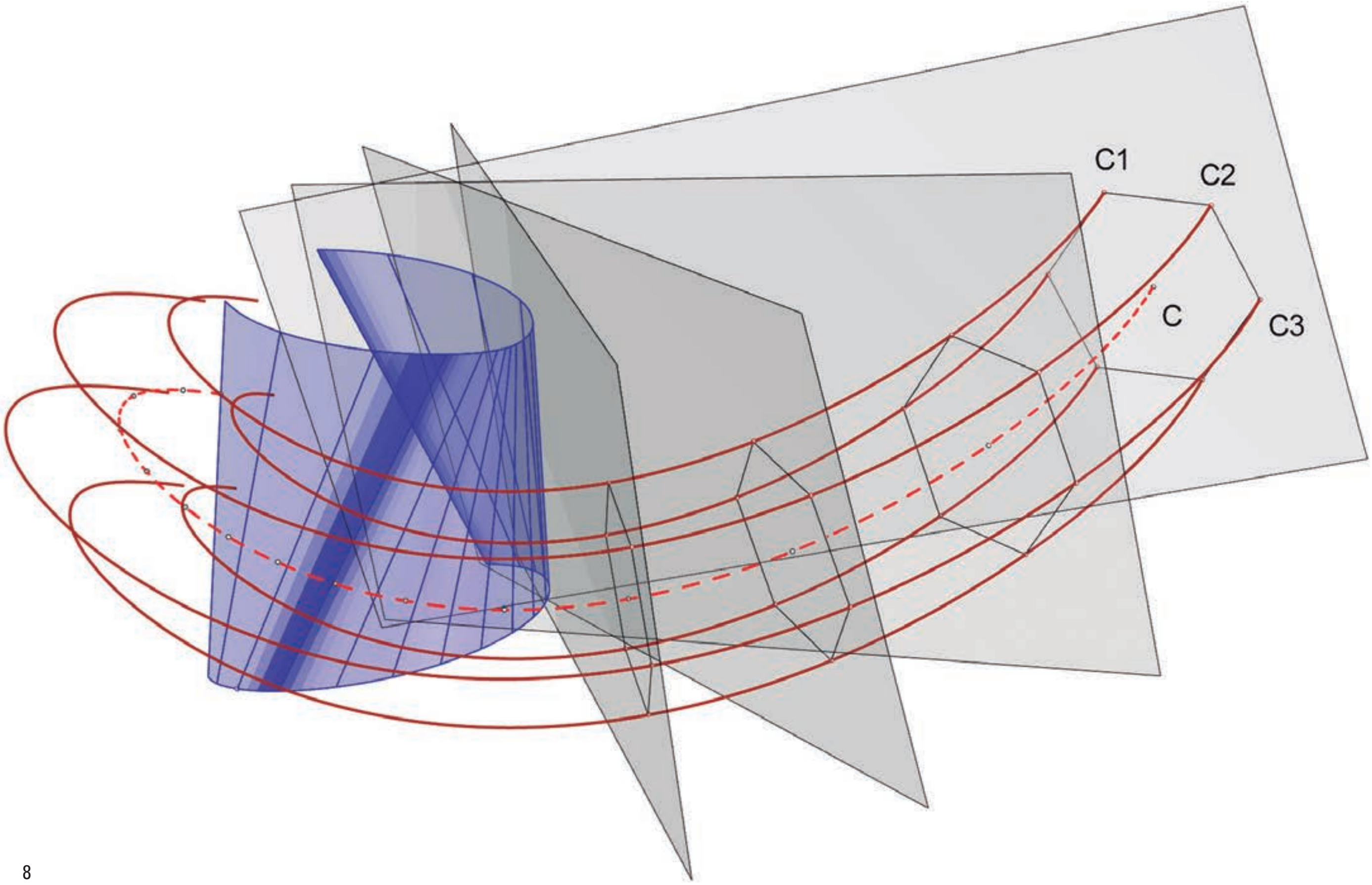
on the normal plane to C generate a series of evolutes G1, G2, ..., Gn of C, as well as a series of different torsal surfaces (Fig. 7). Each of these torsal developable surfaces has the property of "lying on curve C and having all its rules perpendicular to curve C". This is one of the most important properties of the polar surface.

Case 2: Starting from any developable surface, understood as a polar surface:
By rolling a plane that remains tangent to the polar surface over said polar surface, any point contained in this plane describes a trajectory C in space.

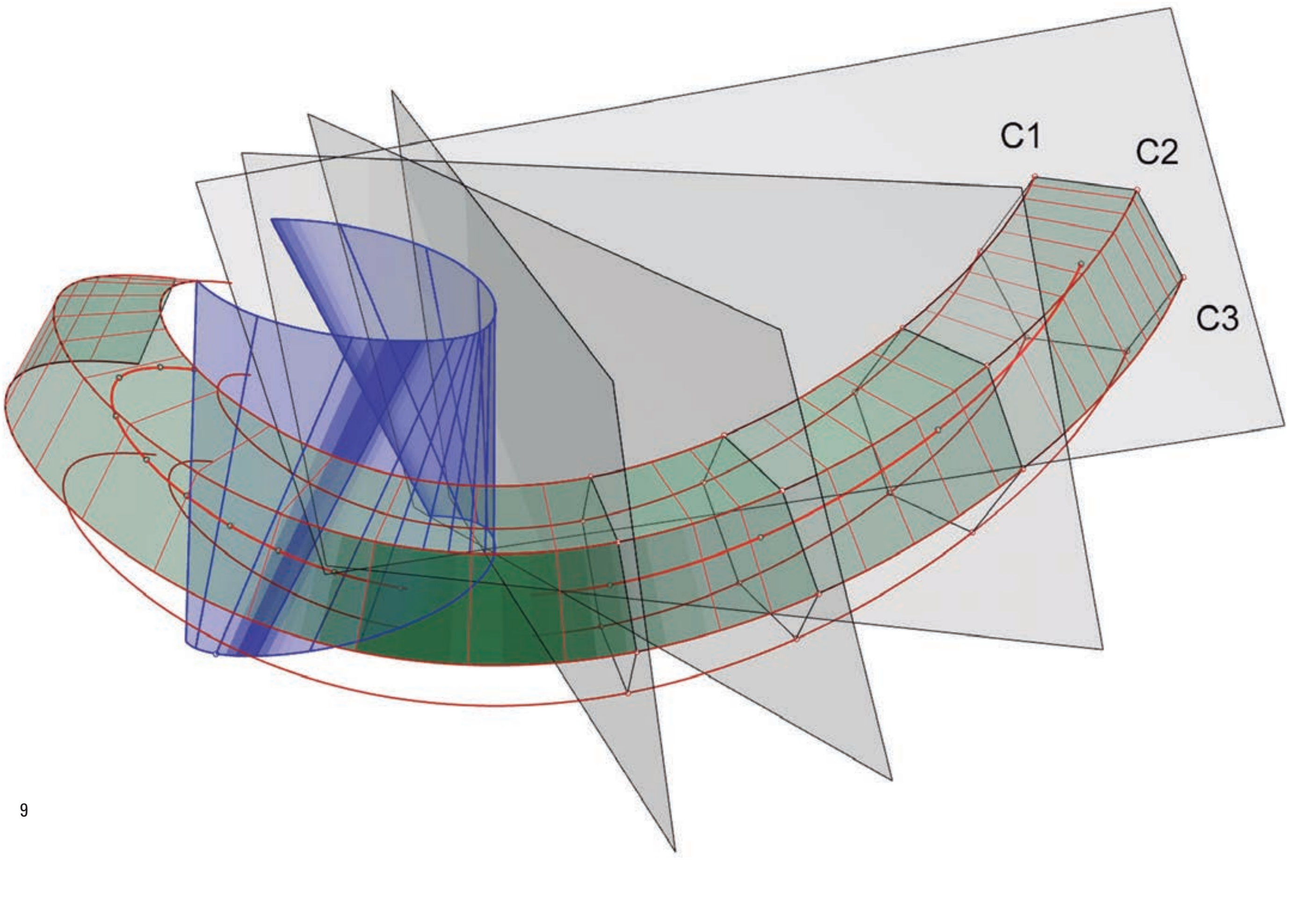
– Offset curves. Since the position of the point in the rolling plane is random, by changing the position of the point we generate not one, but a set of offset curves C1, C2, …, Cn, that share the same polar surface. Therefore, not only curve C but all the offset curves associated with the trajectories of any point on the tangent plane, define the polar surface (Fig. 8). This graphic process synthetically explains the generation of 3D offset curves.
– Perpendicular rules. From the previous cases it can be deduced that two offset curves always define a developable surface with the rules perpendicular to both curves (Fig. 9).
From the point of view of the concepts of involute and evolute, the polar surface would be the three-dimensional generalisation of the concept of a planar evolute and the set of 3D offset curves would be the three-dimensional generalisation of the planar involutes.

Other implications of the *Mémoire*: rectifying surfaces and principal curvature lines

Since all 3D evolutes are geodesic lines of the polar surface, which is developable, then the polar is the rectifying surface of all the evolutes [7] (Fig. 10). For this reason, Monge's *Mémorie* has been considered as the precursor of the idea of a rectifying surface [8].
The polar surface can be generated not only from a C curve, but also from any developable surface. The polar is then defined as the envelope of the planes perpendicular to the initial developable surface that passes through its rules (Fig. 11).



8



9

8. Conjunto de curvas alabeadas C1, C2, … Cn, paralelas entre sí
9. La superficie desarrollable entre dos curvas paralelas tiene regladas perpendiculares a ambas curvas
10. La superficie polar como superficie rectificante de todas sus evolutas alabeadas

8. Offset 3D curves C1, C2, … Cn
9. The developable surface that rests between two offset curves has its rules perpendicular to both curves
10. The polar surface as the rectifying surface of all its 3D evolutes

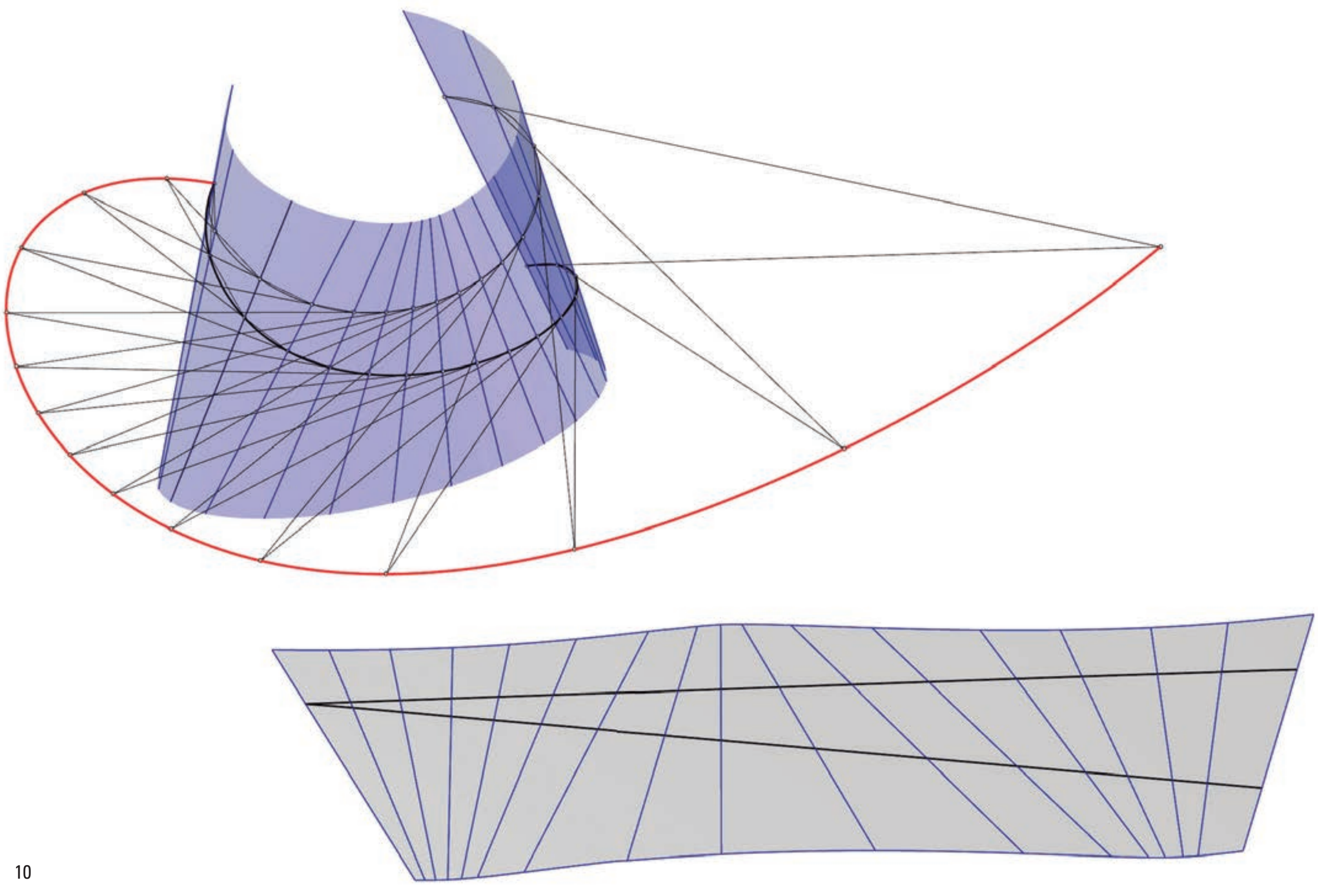
cie desarrollable con el de superficie polar, que tendrá aplicaciones importantes para la discretización de superficies complejas **9**.

Dos casos prácticos citados por Monge en su *Mémoire*: La superficie cilíndrica y cónica como superficies polares

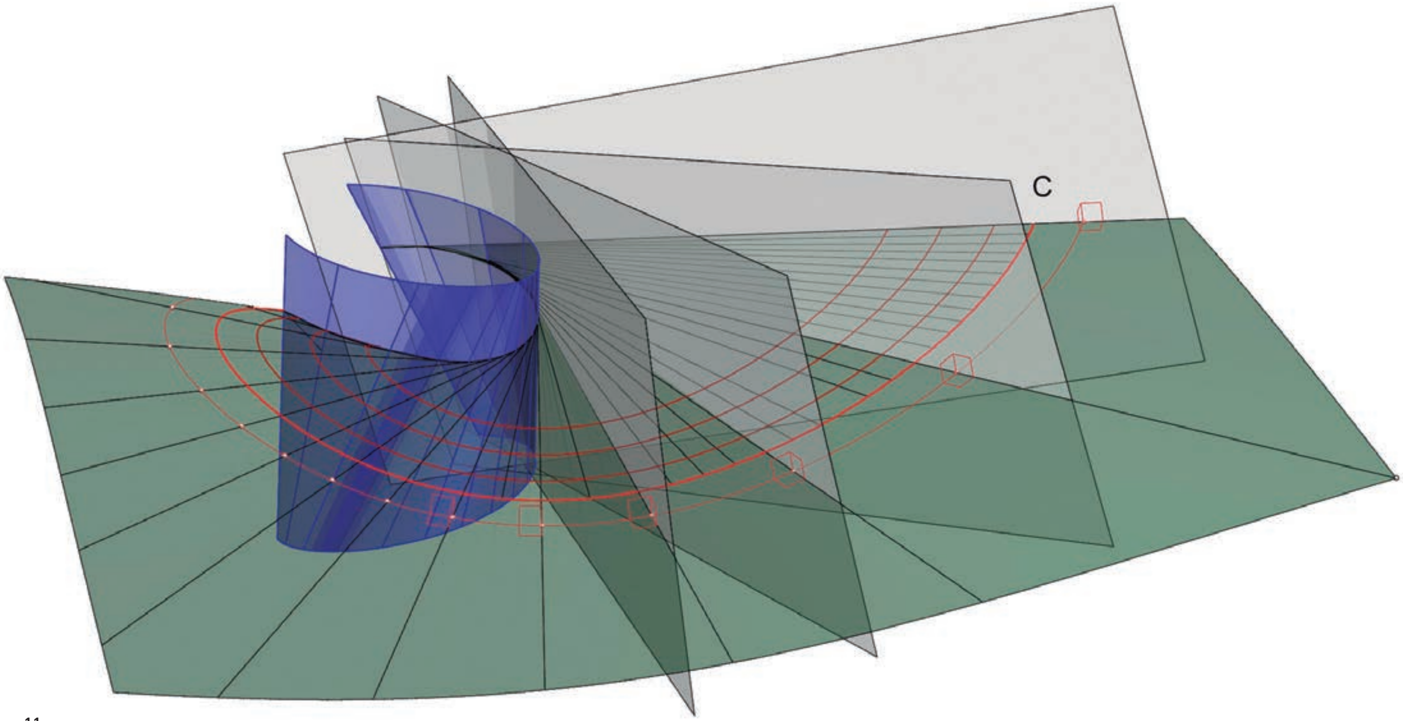
El cilindro, entendido como superficie polar de una curva plana, es una idea general que recorre toda la *Mémoire* de Monge. Este concepto explica como todas las superficies de igual pendiente de una curva plana tocan a su polar, el cilindro polar, en una curva que es a la vez: evoluta alabeada de la curva plana, geodésica del cilindro polar y arista de retroceso de la desarrollable de igual pendiente (Fig. 13).

El cono entendido como superficie polar. Monge demuestra al final de su *Mémoire* que la superficie polar de cualquier curva esférica es siempre un cono. En la Fig. 14 exponemos una interpretación gráfica a dicho problema con la ayuda de un cono de revolución. Podemos observar que las trayectorias en el espacio de los puntos del desarrollo plano de un cono –a medida que éste se enrolla sobre el cono– generan curvas esféricas contenidas en la misma esfera **10**.

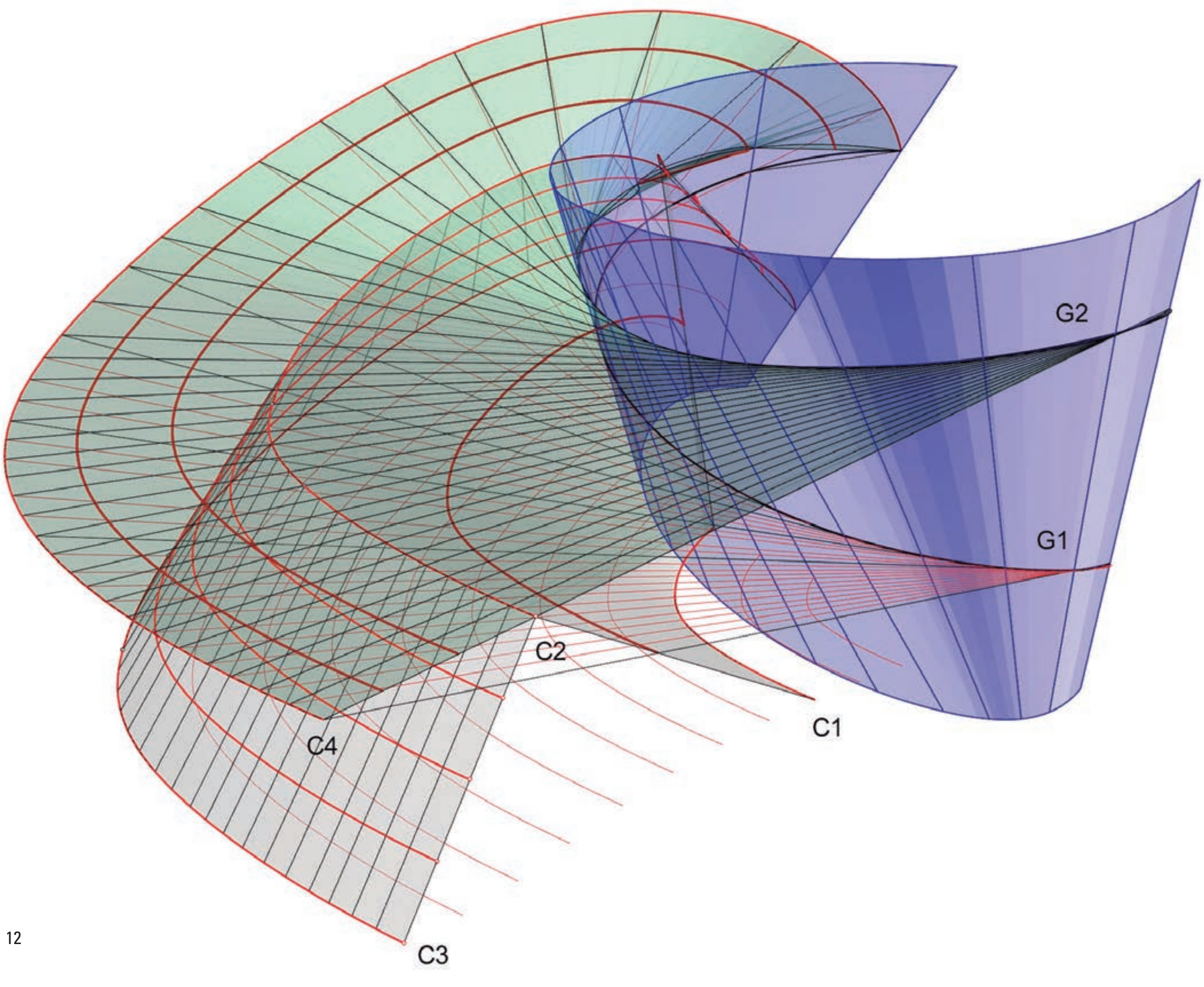
As mentioned earlier, any developable surface that rests on the curve C and that has its rules tangent to the polar surface also has all its rules perpendicular to C. If it is borne in mind that the main curvature lines of a developable surface are defined by (1) the family of the rules, and (2) the family of orthogonal lines to the rules at all its points, then it can be deduced that curve C is a principal curvature line of the initial developable surface (Fig. 11). Since a curve C admits infinite torsal developable surfaces to its polar, it can be generalised that all the offset curves C1, C2, ..., Cn, are principal curvature lines of all the possible developable surfaces associated with the polar (Fig. 12). In this way, the concepts of the main curvature line of a developable surface are linked with that of the polar surface, which has major applications for the discretisation of complex surfaces **9**.



10



11



12

11. La curva C y sus paralelas forman una familia de líneas de curvatura principal
12. Algunas de las infinitas superficies desarrollables asociadas a la polar (azul) y sus líneas de curvatura principal (rojas) C1, C2, … Cn

11. The curve C and its offset form a family of principal curvature lines
12. Several of the infinite developable surfaces associated with the polar (blue) and its main curvature lines (red) C1, C2, … Cn

Conclusiones

La expresión gráfica, tal como defendía Gaspard Monge, ofrece una herramienta poderosa para concebir y operar con conceptos geométricos complejos.

Una revisión de la *Mémoire* de Monge, con herramientas gráficas digitales, nos ha permitido sacar a relucir importantes propiedades de las superficies polares y sus utilidades para la geometría arquitectónica. En ese sentido, destacamos la importancia de las superficies polares para:

1. Generar gráficamente la red de curvas paralelas a una curva alabeada.
2. Generar gráficamente el conjunto de superficies desarrollables que se apoyan en una curva alabeada y tiene sus regladas ortogonales a dicha curva. Es decir, generar una superficie donde la curva inicial, y sus paralelas, sean líneas de curvatura principal de dicha superficie.

El control de las líneas de curvatura principal en las primeras fases de diseño es de gran importancia en arquitectura ya que nos permite diseñar superficies fácilmente discretizables en mallas de cuadriláteros planos y otras propiedades notables. Aunque muchas de estas cuestiones hayan sido abordadas en geometría arquitectónica desde el algebra y la computación, no se había vinculado al concepto de Superficie Polar de Monge. ■

Notas

1 / Este tema ha sido estudiado en (Martin-Pastor y González-Quintial 2023)
2 / Citado por Delcourt (2011).
3 / Los textos de Izquierdo Asensi (1985: 300) y Taibo (1983: 67) aportan propiedades diferentes de la superficie polar de una curva en relación a su evoluta y al lugar geométrico de los centros de curvatura.
4 / Entre otras muchas, no se nombran en *Developable Surfaces: Their History and Application*, de Lawrence (2011), ni en *Parametric Geometry of Curves and Surfaces* de Lastra (2021), tampoco las nombra Pottmann en su obra, ya clásica, *Architectural Geometry* (2007).
5 / La dificultad de realizar tales operaciones geométricas por medios gráficos tradicionales se ha superado con las herramientas gráficas digitales y paramétricas.
6 / Este recurso del hilo como mecanismo cinético aparece recogido en la *Mémoire:* en la demostración del Teorema II (Fig.1 de Monge); en la parte final de la demostración del Teorema III; en el problema VI "*Encuentra la curva formada por una línea recta, o hilo, doblado libremente sobre una superficie*" del Teorema III; en el escolio del Problema VII, "*Dadas las ecuaciones de cualquier curva de doble curvatura encuentre las que desee de cualquiera de sus evolutas*" del Teorema III.
7 / La rectificante es la superficie desarrollable que pasa por la curva G y que, en su forma plana, transforma a la curva G en una recta. Para profundizar en la relación existe entre la superficie rectificante de una geodésica y las superficies circunscritas ver (Martin-Pastor et al 2021) y (González-Quintial et al 2023).
8 / Así lo contempla Lawrence (2015) citando a Reich (2007).
9 / La importancia de la superficie polar para la discretización de superficies se abordará en un próximo artículo de los mismos autores.
10 / Este problema no fue representado por Monge ni tampoco ha sido desarrollado gráficamente por autores posteriores. Hay que precisar que el cono no tiene por qué ser cuadrático, como el representado en el ejemplo.

Referencias

– CAJORI, F., 1929, *Generalizations in geometry as seen in the history of developable surfaces*. The American Mathematical Monthly, 36, 431-437, 1929
– DELCOURT, J., 2011, *Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches De Clairaut à Darboux*. Arch. Hist. Exact Sci. (2011) 65:229–293. https://doi.org/10.1007/s00407-010-0078-6
– DUPIN, C., 1819, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*. Paris: Bachelier,
– FOURIER, J., 1801, *Notes sur les développées des lignes courbes*. ms.na.fr 22519.
– GLAESER, G. y GRUBER F., 2007, Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts, 1(1)*. 59-71. https://doi.org/10.1080/17513470701230004
– GONZÁLEZ-QUINTIAL, F. y MARTÍN-PASTOR, A. 2023. Superficies rectificantes. Concepto, realidad geométrica y distorsión constructiva. *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 28 (47), pp. 228–239. https://doi.org/10.4995/ega.2023.16997
– IZQUIERDO ASENSI, F., 1985, *Geometría descriptiva superior y aplicada* [3ª edición]. Madrid: Dossat.

Two practical cases cited by Monge in his *Mémoire*: The cylindrical and conical surface as polar surfaces

The cylinder, understood as the polar surface of a plane curve, is a general idea that runs through Monge's *Mémoire*. This concept explains how all the surfaces of equal slope of a planar curve touch its polar, the polar cylinder, in a curve that is a 3D evolute of the planar curve, a geodesic of the polar cylinder, and an edge of regression of the surface of equal slope (Fig. 13).

The cone understood as a polar surface. Monge demonstrates at the end of his *Mémoire* that the polar surface of any spherical curve is always a cone. In Fig. 14, a graphic interpretation of this problem is presented with the help of a rotational cone. It can be observed that the trajectories in the space of the points of the planar development of a cone, as it is rolled over the cone, generate spherical curves contained in the same sphere **10**.

Conclusions

Graphic expression, as Gaspard Monge advocated, offers a powerful tool for the conception and operation with complex geometric concepts.

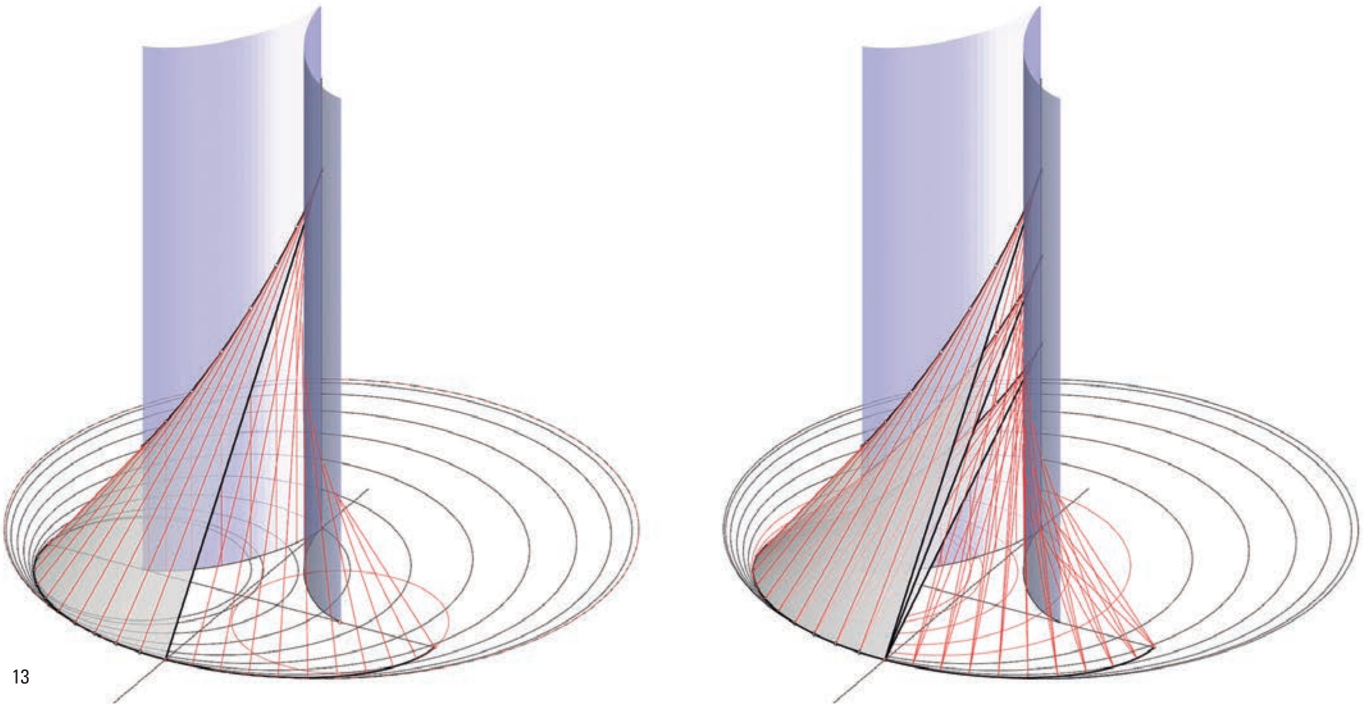
A review of Monge's *Mémoire*, with digital graphic tools, has enabled us to bring to light important properties of polar surfaces and their uses for architectural geometry. In this respect, we highlight the importance of polar surfaces for:

1. Graphically generating the network of the offset curves from one 3D curve.
2. Graphically generating developable surfaces that rest on a 3D curve and have their rules orthogonal to said curve.

In other words, we can generate the developable surfaces that rest on a curve, while also fulfilling the condition that said curve remains one of its main curvature lines. That is, we can generate a surface where the initial curve, and its offset, are main curvature lines of said surface.

13. Superficie de igual pendiente sobre arco de elipse y su cilindro polar
14. Generación de curvas esféricas a partir de un cono polar

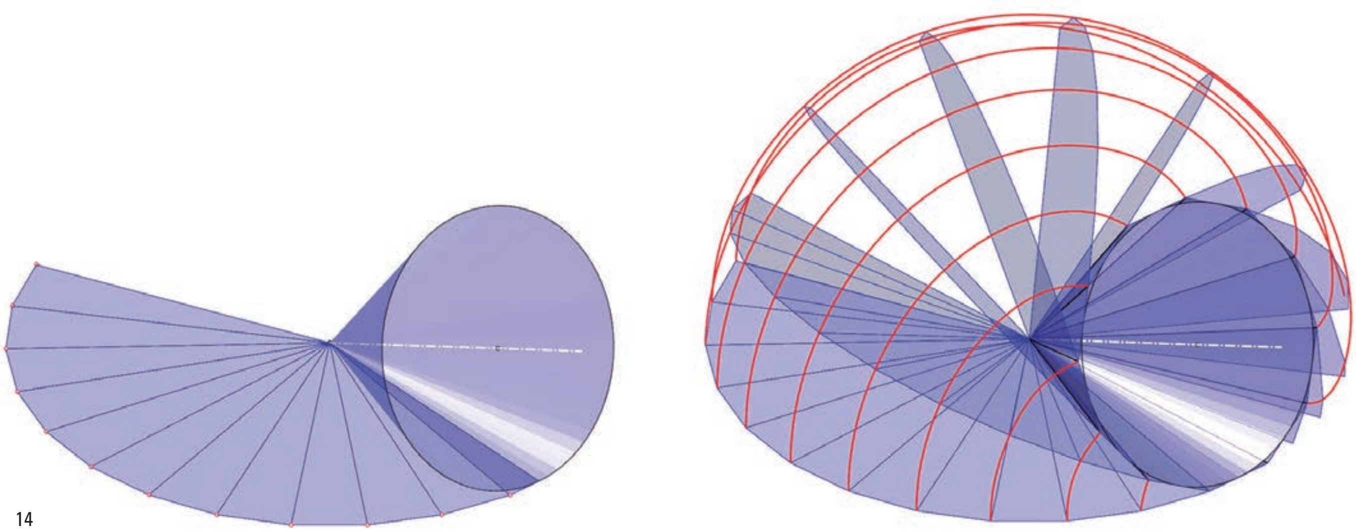
13. Surface of equal slope on an ellipse arc and its polar cylinder
14. Generation of spherical curves from a polar cone



13

Control of the main curvature lines, from early phases of design, is of major importance in architecture since it enables the design of easily discretisable surfaces by planar quadrilateral meshes and other notable properties.
Although many of these issues have been addressed in Architectural Geometry from algebra and computing, none have previously been linked to Monge's concept of polar surface. ■

– KRIVOSHAPKO, S.N. y IVANOV, N., 2015, *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7.
– LACROIX, S.F., 1790, *Mémoire sur les surfaces développables...* Archives de l'Académie des Sciences.
– LANCRET, M.A., 1806, Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes a double courbure et des surfaces développables. *Mémoires présentés par divers savants a` l'Académie des sciences de l'Institut de France*, 2.
– LASTRA, A., 2021, *Parametric Geometry of Curves and Surfaces. Architectural Form-Finding*. Springer-Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81317-8
– LAWRENCE, S., 2011, Developable Surfaces: Their History and Application. *Nexus Network Journal*, 13(3). 701-714. https://doi.org/10.1007/s00004-011-0087-z
– MARTÍN-PASTOR, A. y GONZÁLEZ-QUINTIAL, F., 2021, Surface Discretisation with Rectifying Strips on Geodesics. *Nexus Network Journal* 23,



14

565–582 (2021). https://doi.org/10.1007/s00004-020-00540-x
– MARTÍN-PASTOR, A. y GONZÁLEZ-QUINTIAL, F., 2023, Approaching Developable Surfaces Through Shadow and Penumbra. *Nexus Network Journal* 25, pp. 521–541 (2023). https://doi.org/10.1007/s00004-023-00647-x
– MARTÍN-PASTOR, A., 2019, Augmented Graphic Thinking in Geometry. Developable Architectural Surfaces in Experimental Pavilions. In *Graphic Imprints EGA 2018* (Ed. Marcos, Carlos) Springer, 2019. Pp. 1065–1075. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93749-6_87
– MONGE, G., 1780, Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables avec une application a la théorie des ombres et des pénombres. *Mémoires de divers sçavans IX:382–440*. https://archive.org/details/mmoiresdemath09acad/page/382/mode/2up
– MONGE, G., 1785, Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes a double courbure. *Mémoires de divers sçavans X:511–550*. https://ia600209.us.archive.org/18/items/mmoiresdemath10acad/mmoiresdemath10acad.pdf
– MONGE, G., 1799 (ó 1798), *Géométrie Descriptive*, Paris: Baudouin. [La 1ª versión española es de 1803. *Geometría Descriptiva*. Madrid: Imprenta Real. Su edición facsímil es de 1966, comentada y estudiada por Ángel del Campo Francés, José Mª Gentil Baldrich y Enrique Rabasa Díaz. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos].
– MONGE, G., 1807. *Application de l'Analyse a` la Géométrie*. Paris: Benard.
– MONGE. G., 1769, Sur les développées des courbes à double courbure et leurs inflexions. *Journal encyclopédique*: 284-287.
– POTTMANN, H, ASPERL, A., HOFER, M. y KILIAN, A., 2007, *Architectural Geometry.* Bentley Institute Press.
– REICH, K., 2007. Euler's Contribution to Differential Geometry and its Reception. Pp. 479- 502 in: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy,* (Ed.) Robert E. Bradley and C. Edward Sandifer. Amsterdam: Elsevier.
– TAIBO FERNÁNDEZ, A., 1983, *Geometría descriptiva y sus aplicaciones*. (Vol. 2). Madrid: Tébar Flores. [1ª edición 1943, Madrid: Escuela Especial de Ingenieros Industriales]
– TATON, R., 1951, *L'œuvre scientifique de Monge*. Paris: Universitaires de France, 1951.

Notes

1 / This topic has been studied in Martin-Pastor and González-Quintial (2023).
2 / Cited by Delcourt (2011).
3 / The texts of Izquierdo Asensi (1985: 300) and Taibo (1983: 67) provide different properties of the polar surface of a curve in relation to its evolute and the geometric loci of the centres of curvature.
4 / Among many other absences, they are not named in Developable Surfaces: Their History and Application by Lawrence (2011), nor in Parametric Geometry of Curves and Surfaces by Lastra (2021), nor are they named by Pottmann in his now classic work, *Architectural Geometry* (2007).
5 / The difficulty of performing such geometric operations by traditional graphical means has been overcome with digital and parametric graphical tools.
6 / This resource of the thread as a kinetic mechanism appears recorded in the *Mémoire*: in the proof of Theorem II (Fig. 1 by Monge); in the final part of the proof of Theorem III; in Problem VI "Find the curve formed by a straight line, or thread, freely bent on a surface" of Theorem III; and in the scholium of Problem VII, "Given the equations of any double curvature curve, find as many as desired from any of its evolutes" of Theorem III.
7 / The rectifying surface is the developable that passes through curve G and that, in its planar form, transforms curve G into a straight line. To delve deeper into the relationship between the rectifying surface of a geodesic and the circumscribed surfaces, see (Martin-Pastor et al. 2021) and (González-Quintial et al. 2023).
8 / This is observed by Lawrence (2015), citing Reich (2007).
9 / How to use the polar surface for the discretisation of complex surfaces will be addressed in a future article by the same authors.
10 / This problem was not represented by Monge, nor has it been developed graphically by later authors. It should be borne in mind that the cone does not have to be quadratic, as is the cone represented in the example.

References

– CAJORI, F., 1929, *Generalizations in geometry as seen in the history of developable surfaces.* The American Mathematical Monthly, 36, 431-437, 1929
– DELCOURT, J., 2011, *Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches De Clairaut à Darboux.* Arch. Hist. Exact Sci. (2011) 65:229–293. https://doi.org/10.1007/s00407-010-0078-6
– DUPIN, C., 1819, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge.* Paris: Bachelier,
– FOURIER, J., 1801, *Notes sur les développées des lignes courbes.* ms.na.fr 22519.
– GLAESER, G. and GRUBER F., 2007, Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts, 1(1).* 59-71. https://doi.org/10.1080/17513470701230004
– GONZÁLEZ-QUINTIAL, F. and MARTÍN-PASTOR, A. 2023. Superficies rectificantes. Concepto, realidad geométrica y distorsión constructiva. *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica, 28* (47), pp. 228–239. https://doi.org/10.4995/ega.2023.16997
– IZQUIERDO ASENSI, F., 1985, *Geometría descriptiva superior y aplicada* [3ª edición]. Madrid: Dossat.
– KRIVOSHAPKO, S.N. and IVANOV, N., 2015, *Encyclopedia of Analytical Surfaces.* https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7
– LACROIX, S.F., 1790, *Mémoire sur les surfaces développables...* Archives de l'Académie des Sciences.
– LANCRET, M.A., 1806, Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes a double courbure et des surfaces développables. *Mémoires présentés par divers savants a` l'Académie des sciences de l'Institut de France*, 2.
– LASTRA, A., 2021, *Parametric Geometry of Curves and Surfaces. Architectural Form-Finding.* Springer-Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81317-8
– LAWRENCE, S., 2011, Developable Surfaces: Their History and Application. *Nexus Network Journal,* 13(3). 701-714. https://doi.org/10.1007/s00004-011-0087-z
– MARTÍN-PASTOR, A. and GONZÁLEZ-QUINTIAL, F., 2021, Surface Discretisation with Rectifying Strips on Geodesics. *Nexus Network Journal* 23, 565–582 (2021). https://doi.org/10.1007/s00004-020-00540-x
– MARTÍN-PASTOR, A. and GONZÁLEZ-QUINTIAL, F., 2023, Approaching Developable Surfaces Through Shadow and Penumbra. *Nexus Network Journal* 25, pp. 521–541 (2023). https://doi.org/10.1007/s00004-023-00647-x
– MARTÍN-PASTOR, A., 2019, Augmented Graphic Thinking in Geometry. Developable Architectural Surfaces in Experimental Pavilions. In *Graphic Imprints EGA 2018* (Ed. Marcos, Carlos) Springer, 2019. Pp. 1065–1075. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93749-6_87
– MONGE, G., 1780, Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables avec une application a la théorie des ombres et des pénombres. *Mémoires de divers sçavans IX:382–440.*https://archive.org/details/mmoiresdemath09acad/page/382/mode/2up
– MONGE, G., 1785, Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes a double courbure. *Mémoires de divers sçavans X:511–550.* https://ia600209.us.archive.org/18/items/mmoiresdemath10acad/mmoiresdemath10acad.pdf
– MONGE, G., 1799 (ó 1798), *Géométrie Descriptive*, Paris: Baudouin. [La 1ª versión española es de 1803. *Geometría Descriptiva*. Madrid: Imprenta Real. Su edición facsímil es de 1966, comentada y estudiada por Ángel del Campo Francés, José Mª Gentil Baldrich y Enrique Rabasa Díaz. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos].
– MONGE, G., 1807. *Application de l'Analyse a` la Géométrie.* Paris: Benard.
– MONGE. G., 1769, Sur les développées des courbes à double courbure et leurs inflexions. *Journal encyclopédique*: 284-287.
– POTTMANN, H, ASPERL, A., HOFER, M. and KILIAN, A., 2007, *Architectural Geometry.* Bentley Institute Press.
– REICH, K., 2007. Euler's Contribution to Differential Geometry and its Reception. Pp. 479- 502 in: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy,* (Ed.) Robert E. Bradley and C. Edward Sandifer. Amsterdam: Elsevier.
– TAIBO FERNÁNDEZ, A., 1983, *Geometría descriptiva y sus aplicaciones.* (Vol. 2). Madrid: Tébar Flores. [1ª edición 1943, Madrid: Escuela Especial de Ingenieros Industriales]
– TATON, R., 1951, *L'œuvre scientifique de Monge.* Paris: Universitaires de France, 1951.