UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# Alma algebraica en la toma de decisiones


| | |
|---|---|
| **Apellidos, nombre** | Benítez, Julio[1] (jbenitez@mat.upv.es)<br>Carpitella, Silvia[2] (silvia.carpitella@csun.edu)<br>Izquierdo Sebastián, Joaquín[1] (jizquier@upv.es) |
| **Departamento** | [1] Departamento de Matemática Aplicada<br>[2] Dept. Manufacturing Systems Engineering and Management |
| **Centro** | [1] Universitat Politècnica de València<br>[2] California State University Northridge |

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# 1 Resumen

Algunos sistemas de **toma de decisiones**, especialmente con **elementos subjetivos**, utilizan comparación dos a dos de los elementos involucrados. Así, se obtienen las llamadas **matrices** de comparación dos a dos (PCM, del inglés, *pairwise comparison matrices*), de cuyo estudio se pueden obtener prioridades en las que fundamentar la decisión. No obstante, debido a las limitaciones cognitivas humanas y al número de elementos a comparar, el tamaño de las PCM debe ser pequeño. Por ejemplo, tradicionalmente, en la metodología AHP (*Analytic Hierarchy Process*) (Saaty, 1987), se recomienda que, para obtener resultados razonables y consistentes, el número de elementos de comparación (criterios o alternativas) no debe ser superior a siete. Este límite es ampliamente conocido en la literatura (Miller, 1956) como *chanel capacity*, una medida de la capacidad humana para procesar información, y se refiere a la cantidad de elementos que se pueden mantener en la memoria a corto plazo en un momento dado. Sin embargo, estudios neurológicos más recientes establecen un número de $4 \pm 1$ para elementos no relacionados entre sí, y alrededor de 15 para conceptos interrelacionados (Marnell, 2014). En general, la comparación dos a dos está prácticamente siempre sujeta a inconsistencias, especialmente si el número de elementos comparados no es pequeño. En cualquier caso, una pregunta natural que nos hacemos es: **¿qué interés tiene un proceso de decisión sin consistencia suficiente?** Obviamente, puede derivar en una decisión errónea susceptible de acarrear efectos no deseados. Se necesita, pues, algún criterio para contrastar tal consistencia, algún test objetivo de consistencia que permita rechazar matrices provenientes de juicios que puedan calificarse de (demasiado) aleatorios. Y, también, se necesita alguna herramienta de mejora de la consistencia que ayude a tomar decisiones útiles y robustas. Este artículo te presenta una propuesta de una tal herramienta de mejora de la consistencia y, sin descender a detalles demasiado técnicos, muestra cómo el **Álgebra** de un curso típico de Escuelas y Facultades universitarias técnicas proporciona la base de una posible propuesta. Las matrices y su operativa básica aparecen *ab initio* y, además, se muestra la necesidad de determinados aspectos avanzados esenciales en la asignatura, **espacios vectoriales** y **aplicaciones lineales**, y aspectos geométricos clave (**producto escalar**, **norma**, **ortogonalidad**, **proyección** sobre subespacios, **coeficientes de Fourier**, etc.). Así, el artículo tiene vocación de motivación para el alumno y puede ser fuente de proyectos académicos de gran interés.

# 2 Introducción

En (Benítez *et al*., 2021) se presenta la metodología AHP a un nivel asequible para un alumno de primer curso, donde ya ciertos elementos del Álgebra son utilizados (sistemas de ecuaciones lineales) o preconizados (Teoría Espectral, Teorema de Perron). En ese artículo se define una PCM como una matriz positiva (sus entradas son positivas) y recíproca (sus entradas verifican $a_{ji} = 1/a_{ij}\ \forall i, j$). Los valores de la matriz se obtienen al comparar dos a dos los elementos involucrados utilizando la denominada escala de Saaty, que utiliza valores entre 1 y 9 para ponderar la importancia relativa entre dos elementos, desde 1 (igual importancia) hasta 9 (mucha mayor importancia).

**Ejercicio 1**. Considera las dos matrices recíprocas, obtenidas de comparar tres elementos dos a dos por dos personas o procesos distintos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de estas matrices, obtén su valor propio de Perron y su vector de prioridades (vector de Perron) asociado. Observa con atención las diferencias.

Nota 1: Para $A$ puedes hacer el cálculo a mano. Pero para $B$ necesitarás ayuda computacional; por ejemplo, en Python puedes utilizar la función `eigs` que debes importar de la librería `scipy`, concretamente, del módulo `scipy.sparse.linalg`. Esta función, con la sintaxis `val, vec = eigs(B, k=1, which='LM')`, proporciona `val`, **el** (`k=1` indica eso: solo uno) **mayor valor propio (en módulo)** (indicado por `which='LM'`, por *largest magnitude*) de la matriz $B$ y su vector propio asociado, `vec`.

Nota 2: El vector de prioridades es el vector de Perron normalizado de modo que la suma de sus componentes sea 1. Puedes utilizar `w = vec / numpy.sum(vec)` para esta normalización. Convéncete del significado de esta expresión, es decir, de que para un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, si $S$ es la suma de las componentes de $\mathbf{v}$, entonces las componentes del vector $\frac{1}{S}\mathbf{v}$ suman 1.

Al observar las diferencias, has tenido que ver que, aun siendo matrices diferentes, proporcionan vectores de prioridades parecidos. Lo que es obvio es que la consistencia de los juicios emitidos es distinta, puesto que se han utilizado valores distintos en las comparaciones por pares: habrás observado que sus entradas $a_{13} = 6$ y $b_{13} = 4$ (y sus simétricas, claro, por la reciprocidad) son distintas. Fíjate ahora en lo siguiente:

Para ambas matrices, la entrada (1,2), de valor 2, indica que

<u>se prefiere el primer elemento 2 veces más que el segundo</u>;

y la entrada (2,3), de valor 3, indica que

<u>se prefiere el segundo elemento 3 veces más que el tercero</u>.

Entonces, lo (completamente) consistente sería

<u>preferir el primer elemento 2*3 = 6 veces más que el tercero</u>.

Así que la matriz $A$ es completamente consistente: su elemento (1,3) vale 6; mientras que la $B$ no lo es: su elemento (1,3) vale 4. Sin embargo, las prioridades obtenidas son muy parecidas. La pregunta ahora es, pues: ¿es que hay distintos grados de consistencia? Naturalmente: es algo inherente a la condición humana y está relacionado con esa capacidad (*chanel capacity*) a que se refieren los neurólogos.

Empecemos definiendo la consistencia (completa) de una PCM.

**Definición**. Una PCM, $A$, se dice que es consistente si

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk}, \forall i, j, k.$$

Observa que, según esta definición, $A$ es consistente, pero $B$ no lo es.

Una caracterización menos intuitiva pero muy interesante de las matrices consistentes es la siguiente.

**Caracterización de la consistencia de una PCM.** Una PCM es consistente si y solo si existe un vector (columna) positivo, $\mathbf{w}$, tal que $A = \mathbf{w}^{(-1)}\mathbf{w}^T$, siendo $\mathbf{w}^{(-1)}$ el vector cuyos elementos son los inversos de los de $\mathbf{w}$, y $\mathbf{w}^T$ el vector (fila) traspuesto de $\mathbf{w}$.

Esta caracterización (consulta el Teorema 1 de (Benítez *et al.*, 2019), por ejemplo) tiene un interesante corolario: ese vector $\mathbf{w}$ (habitualmente normalizado a suma 1 de sus componentes) es el vector de prioridades buscado. Además, la matriz $A$ tiene rango 1, es decir, todas sus columnas son proporcionales entre sí, en particular, proporcionales a $\mathbf{w}$. Así que una matriz consistente de orden $n$ tiene tan sólo $n - 1$ parámetros libres: las componentes de $\mathbf{w}$ menos una (ya que la suma de tales componentes suele tomarse igual a 1).

Volvamos ahora a la cuestión de nuestra *chanel capacity* humana. Planteemos: para tomar 'buenas' decisiones, ¿necesitamos ser completamente consistentes? Ciertamente no, aunque sí debemos ser 'suficientemente' consistentes en nuestras comparaciones dos a dos, como parecen indicar las matrices $A$ y $B$ anteriores.

Saaty (1987) sugiere un test objetivo (universalmente aceptado) para evaluar la consistencia de una PCM. Para ello, define el índice de consistencia (*consistency index* en inglés) de una PCM, $A$, de orden $n$ como

$$\mathrm{CI}(A) = \frac{\lambda_{\text{máx}} - n}{n-1},$$

siendo $\lambda_{\text{máx}}$ el valor propio de Perron de $A$.

Se puede ver que siempre $\lambda_{\text{máx}} \geq n$, por lo que $\mathrm{CI}(A) \geq 0$. Además, $\mathrm{CI}(A) = 0$ es equivalente a que $A$ es (completamente) consistente (Benítez e Izquierdo, 2019).

Como hemos señalado en el Resumen, el tamaño importa: no es lo mismo ser consistente con 3 o 4 comparaciones, que serlo con 10. Para tener en cuenta el tamaño, Saaty (mediante simulación por ordenador) construyó, para cada tamaño, 50000 PCM aleatorias, calculó para cada $A$ su $\mathrm{CI}(A)$, y obtuvo la media de estos índices de consistencia, que denominó $\mathrm{RI}$ (*random index*), índice aleatorio de consistencia. La tabla siguiente tiene estos valores de $\mathrm{RI}$ para $3 \leq n \leq 15$.

| Orden | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RI | 0.52 | 0.89 | 1.11 | 1.25 | 1.35 | 1.40 | 1.45 | 1.49 | 1.52 | 1.54 | 1.56 | 1.58 | 1.59 |

*Tabla 1. Índice aleatorio de consistencia (Saaty, 1987)*

Saaty propuso considerar una PCM como 'aceptablemente consistente' si $\frac{\mathrm{CI}(A)}{\mathrm{RI}} \leq 0.1$ (es decir, aceptar comparaciones dentro del 10% inferior de aleatoriedad). Y en tal caso, aceptar el vector de Perron obtenido como vector de prioridades.

**Ejercicio 2**. Comprueba si la matriz $B$ del ejercicio 1 es aceptablemente consistente.

Para aquellos casos en que la consistencia no sea aceptable, conviene disponer de una herramienta de mejora de la consistencia. De esto va este artículo, cuyo contenido básico está tomado (simplificado) de (Benítez *et al*., 2011).

# 3 Objetivos

Tras concluir con la lectura y estudio de este documento, serás capaz de:

- Explicar en qué consiste la consistencia de una PCM.
- Decidir si una PCM es aceptablemente consistente.
- Mejorar la consistencia de una PCM no aceptablemente consistente.

# 4 MEJORA DE LA CONSISTENCIA

El objetivo de este artículo es presentar elementos algebraicos que permiten mejorar la consistencia de una PCM. Están básicamente contenidos en (Benítez *et al*., 2019). Aquí se enfatiza sobre los resultados, de modo que puedan ser utilizados ya, y se remite a esta referencia para los detalles técnicos, cuya base se ve en los cursos típicos de Álgebra.

## 4.1 Herramienta de medida

La primera idea que hay que tener en cuenta es que mejorar la consistencia de una PCM, $A$, que no es aceptablemente consistente, implica realizar cambios en algunas de sus entradas $a_{ij}$, es decir, implica cambiar (se supone que ligeramente) alguno o algunos de los juicios emitidos. Para cuantificar la envergadura de los cambios realizados se debe utilizar una **herramienta de medida** adecuada. Hemos entrado así en la parte del Álgebra que denominamos **Geometría**. La tecnología básica de medida en Geometría es el **producto escalar**, que permite definir **longitudes** de vectores y **ortogonalidad** entre ellos. Conoces el producto escalar habitual de vectores de dos y tres componentes, que se generaliza para vectores de $n$ componentes así: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \Sigma_{i=1}^{n} u_i v_i$, siendo $u_i$ y $v_i$, respectivamente, las componentes de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Y también debes recordar que (para ese producto escalar) la longitud (norma, módulo) de un vector $\mathbf{v}$ es la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo, $\|\mathbf{v}\| = +\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = +\sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} v_i^2}$. También sabes que, si el producto de dos vectores no nulos vale 0, los vectores son perpendiculares. Habrás visto o verás todas estas cosas en tu curso de Álgebra y verás generalizaciones a espacios vectoriales distintos de $\mathbb{R}^n$ y a productos escalares distintos.

Como en nuestro caso tenemos que comparar matrices, necesitamos un producto escalar entre matrices (sí, las matrices pueden ser consideradas vectores, claro: se pueden sumar y se pueden obtener múltiplos de ellas; estos son los ingredientes de un espacio vectorial, como quizá sepas). Uno de los productos escalares más sencillos para matrices es $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(X^T Y)$, siendo $\mathrm{tr}(\cdot)$ la traza de una matriz (la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal principal); $^T$ indica trasposición. Fíjate que para vectores (que son matrices con una única columna) de $n$ componentes, este es el producto escalar que conoces (no dejes de convencerte). De este producto escalar matricial se deduce la denominada norma de Fröbenius dada por

$$\|X\|_F = +\sqrt{\langle X, X \rangle} = +\sqrt{\mathrm{tr}(X^T X)}.$$

En Python, `LA.norm(X, 'fro')`, del módulo `linalg` de `numpy`, proporciona la norma de Fröbenius de la matriz $X$ (habiendo importado antes `numpy.linalg` como `LA`), es decir, `LA.norm(X, 'fro')` realiza el cálculo $\|X\|_F = +\sqrt{\langle X, X \rangle}$. Si quieres usar $\|X\|_F = +\sqrt{\mathrm{tr}(X^T X)}$, necesitarás conocer la forma de calcular la traza de una matriz, `np.trace(M)` de `numpy`, y aplicarla mediante `np.sqrt(np.trace(X.T*X))` (habiendo importado `numpy` como `np`).

**Ejercicio 3**. Ahora tendrías que ser capaz de construir una función que, dadas dos matrices del mismo tamaño, $A$ y $B$, devuelva como argumento de salida la distancia entre $A$ y $B$: $\mathrm{d}_0(A_1, B_1) = \|A_1 - B_1\|_F$. Te va a hacer falta para los cálculos siguientes.

Sin embargo, esta norma no es muy adecuada para nuestras PCM. Realiza los cálculos del ejercicio siguiente para convencerte.

**Ejercicio 4.** Considera las 2 parejas de PCM

$$\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ y } \left\{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/8 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1/9 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Utiliza la función del ejercicio 2 para comprobar que las distancias entre las matrices de cada pareja son

$$\mathrm{d}_0(A_1, B_1) = \|A_1 - B_1\|_F = 1.118; \;\; \mathrm{d}_0(A_2, B_2) = \|A_2 - B_2\|_F = 1.001.$$

Las diferencias entre las matrices de ambas parejas, $1.118$ y $1.001$, no parecen muy distintas. Y esto no resulta convincente: la diferencia entre $A_1$ y $B_1$ (fíjate que el primer elemento es igual de importante que el segundo en $A_1$, mientras que es el doble de importante que el segundo en $B_1$), debería ser ostensible más notoria que la diferencia entre $A_2$ y $B_2$ (fíjate que el primer elemento es 8 veces más importante que el segundo en $A_2$, mientras que es 9 veces más importante que el segundo en $B_2$). Y, claro, la relación entre los números 1 y 2 es muy distinta de la relación entre 8 y 9. De hecho, los vectores de prioridades (normalizados a suma 1) para estas matrices (calcúlalos) son

$$A_1 \to \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, B_1 \to \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 \to \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0.11 \end{pmatrix}, B_2 \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que la diferencia entre las prioridades de $A_1$ y $B_1$ es bastante mayor que la diferencia entre las prioridades de $A_2$ y $B_2$. Sin embargo, hemos visto que las distancias entre $A_1$ y $B_1$ y entre $A_2$ y $B_2$ son bastante parecidas.

Así que necesitamos utilizar otra distancia que acomode mejor esta situación.

Para ello, en vez de trabajar con las entradas, $a_{ij}$, de una matriz, $A = (a_{ij})$, trabajaremos con sus logaritmos neperianos $\log a_{ij}$, es decir, utilizaremos la matriz $L(A) = (\log a_{ij})$. Observa que `numpy.log(A)` devuelve el logaritmo elemento a elemento de la matriz $A$.

**Definición.** Dadas $A, B$ matrices positivas del mismo orden, definimos la distancia entre ellas como

$$\mathrm{d}(A, B) = \|L(A) - L(B)\|_F.$$

**Ejercicio 5.** Modifica la función que has creado en el ejercicio 3 para que devuelva esta distancia entre dos matrices (positivas, claro) del mismo tamaño. Y ahora, comprueba que para las matrices del Ejemplo 1 se tiene

$$\mathrm{d}(A_1, B_1) \approx 0.9803;\ \mathrm{d}(A_2, B_2) \approx 0.1666.$$

Claramente estas distancias sí marcan mejor la diferencia que intuíamos entre ambas parejas de PCM. Esta nueva forma de medir distancias entre PCM parece haber solucionado el problema planteado por el ejemplo 1.

## 4.2 Matriz consistente más próxima a una matriz no consistente del mismo tamaño

Ya tenemos una herramienta de medida 'razonable'. Utilicémosla en nuestro problema.

Enunciemos el problema que planteamos en este artículo.

**Problema.** Dada una matriz (positiva) recíproca <u>no consistente</u>, $A$, hallar (de entre las matrices consistentes del mismo tamaño que $A$) la matriz $B$ que está más cerca de $A$:

$$\text{Hallar } B \text{ tal que } d(A, B) \leq d(A, B') \equiv \|L(A) - L(B)\|_F \leq \|L(A) - L(B')\|_F,$$

para toda matriz $B'$ consistente del mismo tamaño que $A$.

Antes de resolver el problema, observamos un efecto secundario múltiple, tremendamente beneficioso, derivado ¡de la utilización de los logaritmos!. Al tomar los logaritmos de los elementos de las matrices positivas recíprocas, estamos trabajando con el **espacio vectorial** de las matrices cuadradas de orden $n, \mathcal{M}_n$, en donde emergen dos importantes **subespacios vectoriales**, que presentamos en los dos próximos subapartados. Esta es la **esencia vectorial del Álgebra** en acción: los espacios vectoriales son clave en el Álgebra. Observa que el conjunto de las matrices positivas de tamaño $n, \mathcal{M}_n^+$, NO es un espacio vectorial, mientras que $\mathcal{M}_n$ sí lo es. Así que la toma de logaritmos nos ha metido de lleno en el Álgebra. Esta zambullida algebraica es, básicamente, el concepto de *linealización*, que se utiliza permanentemente y tan fructífero resulta en multitud de problemas científicos y técnicos.

### 4.2.1 El subespacio de las matrices antisimétricas

Consideramos el conjunto de las matrices recíprocas de orden $n$, que son las matrices con que tenemos que trabajar, las PCM. Para $A$, una matriz recíproca (por supuesto, positiva), se tiene $a_{ij}a_{ji} = 1$; así que $\log a_{ij} = -\log a_{ji}$, lo que significa que $L(A)$ es una matriz antisimétrica: $L(A)^T = -L(A)$. Pero el conjunto de las matrices antisimétricas de orden $n$, $\mathcal{M}_n^a$, es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n$ (que – recuerda – SÍ es un espacio vectorial). Por tanto, el conjunto de todas las matrices $L(A)$, siendo $A$ recíproca de orden $n$, ES un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n$. Las dimensiones respectivas son $\dim \mathcal{M}_n = n^2$ y $\dim \mathcal{M}_n^a = n(n-1)/2$. Has estudiado o estudiarás estas cosas en tu curso de Álgebra.

**Ejercicio 6.** Razona que $\dim \mathcal{M}_n = n^2$ y $\dim \mathcal{M}_n^a = n(n-1)/2$.

### 4.2.2 El subespacio $\mathcal{L}_n$

Ahora consideremos, el conjunto $\mathcal{L}_n := \{L(B) : B \text{ es una matriz consistente de orden } n\}$;

1. es un subconjunto de $\mathcal{M}_n^a$ (ya que toda matriz consistente es recíproca);
2. es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n^a$;
3. la dimensión de $\mathcal{L}_n$ es $n-1$. Esto no es estándar (en un curso de Álgebra), pero se puede probar utilizando aplicaciones lineales y el teorema de las dimensiones (que sí se estudian en un curso de Álgebra) y se deriva de la caracterización de la consistencia dada en la Introducción. Los detalles técnicos concretos los puedes ver en (Benítez *et al*., 2019).

**Ejercicio 7.**

1. Utiliza las definiciones de matriz consistente y matriz recíproca para comprobar que toda matriz consistente es recíproca.
2. Comprueba que $\mathcal{L}_n$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n^a$: comprueba que la suma y la multiplicación por escalares están bien definidas en $\mathcal{L}_n$: utiliza bien las propiedades de los logaritmos.

### 4.2.3 Solución mediante la proyección ortogonal

Este aterrizaje en el mundo lineal de los espacios vectoriales nos permite resolver el problema planteado mediante una técnica clave en Geometría: la proyección (un concepto geométrico que no puede faltar en un curso de Álgebra).

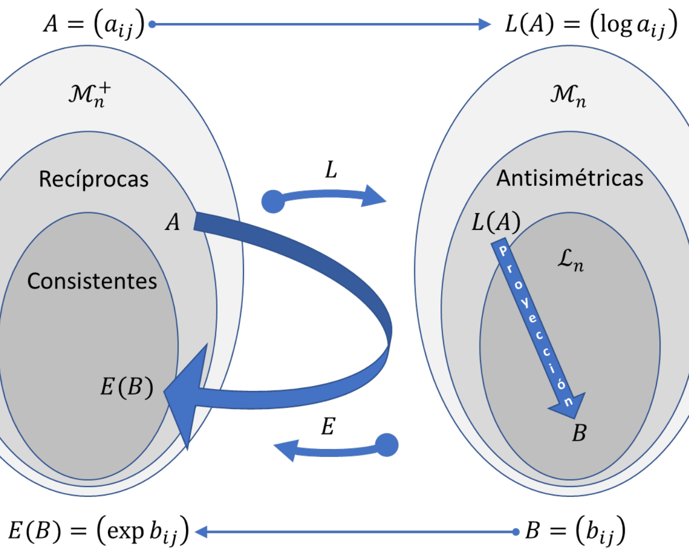


**Figura 1**. Consistencia mediante linealización

Mira la Figura 1. Partimos de una PCM, $A$, que es recíproca. Con la función $L$ volamos a la derecha hacia las antisimétricas para aterrizar sobre $L(A)$ que es antisimétrica; ahora hay que calcular la proyección ortogonal de $L(A)$ sobre el subespacio $\mathcal{L}_n$, marcada como $B$.

Finalmente, para regresar al mundo de las matrices positivas, tomamos antilogaritmos: ese viaje de vuelta al mundo de las matrices positivas (matrices consistentes, en este caso) se realiza con la función $E(\cdot)$ que, dada una matriz $B = (b_{ij})$, proporciona la matriz $E(B) = \left(\exp b_{ij}\right) \in \mathcal{M}_n^+$. Observa que, aunque hay varias funciones en Python que involucran a la función exponencial y a las matrices, aquí debes utilizar la exponencial elemento a elemento, `numpy.exp(B)`.

Este viaje de tres vuelos es la herramienta que abordamos en este artículo. Los vuelos de la $L$ y de la $E$ son suaves. No obstante, el vuelo de **proyección ortogonal** se avecina turbulento. La **teoría mínimo-cuadrática**, que también es parte esencial en un curso estándar de Álgebra, subyace al proceso de proyección ortogonal, y soluciona las turbulencias. Lo vemos a continuación.

### 4.2.4 La proyección via una base ortogonal

La forma más adecuada para construir la proyección ortogonal de un vector de un espacio vectorial (para nosotros nuestra matriz $L(A)$) sobre un cierto subespacio (para nosotros $\mathcal{L}_n$) de un espacio vectorial (para nosotros $\mathcal{M}_n$) es una fórmula (que no puede faltar en ningún curso de Álgebra) que proporciona los denominados coeficientes generalizados de Fourier (la **teoría de Fourier** es la puerta de un campo de enorme interés en Física e Ingeniería). Esta fórmula precisa de una **base ortogonal** (base de vectores perpendiculares dos a dos) en el subespacio vectorial donde se proyecta. Esta fórmula tampoco falta en ningún curso de Álgebra básico.

**Coeficientes generalizados de Fourier.** Dados $\mathcal{V}$, un espacio vectorial con un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$; $\mathcal{U}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, de dimensión finita; y $\mathbf{x}$ un vector de $\mathcal{V}$, la proyección de $\mathbf{x}$ sobre $\mathcal{U}$ viene dada por

$$P_{\mathcal{U}}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \mathbf{u}_i,$$

siendo $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortogonal de $\mathcal{U}$.

A los coeficientes $\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2}$ se los llama coeficientes generalizados de Fourier del vector $\mathbf{x}$ en la base ortogonal $\mathcal{B}$.

Para aplicar esta fórmula a nuestro problema, identificamos $\mathcal{V} = \mathcal{M}_n, \mathcal{U} = \mathcal{L}_n$ y $\mathbf{x} = L(A)$, que es la matriz que queremos proyectar. Y necesitamos una base ortogonal de $\mathcal{L}_n$.

Los detalles que permiten construir una base ortogonal de $\mathcal{L}_n$ y calcular los coeficientes de Fourier de $L(A)$ de manera eficiente pueden verse en (Benítez *et al*., 2019).

### 4.2.5 Una fórmula simple para el cálculo de la proyección

No obstante, algo más de trabajo de desarrollo nos ha permitido obtener una expresión de la proyección de $L(A)$ sobre $\mathcal{L}_n$, que involucra ¡solamente sumas!. El resultado, publicado en (Benítez *et al*., 2013) es el siguiente:

**Fórmula simple para la proyección de una matriz antisimétrica sobre $\mathcal{L}_n$.** Si $M$, de orden $n$, es una matriz antisimétrica, entonces la proyección de $M$ sobre $\mathcal{L}_n$ es

$$P_{\mathcal{L}_n}(M) = \frac{1}{n}[(MU_n) - (MU_n)^T],$$

siendo $U_n$ la matriz cuadrada de orden $n$ cuyas entradas son todas igual a $1$.

**Ejercicio 8**. Convéncete de que esta fórmula (salvo por la división por $n$) solo involucra sumas; es decir, no es necesario realizar formalmente la multiplicación de las matrices que aparecen en la fórmula simple; es que, sí, es realmente simple.

## 4.3 Proceso de consistencia mediante linealización

El proceso completo de mejora de la consistencia que estamos abordando, que denominamos proceso de linealización, se resume en los siguientes pasos:

1. Se parte de una PCM, $A \in \mathcal{M}_n^+$, recíproca pero no suficientemente consistente.
2. Se calcula (tomando logaritmos) $M = L(A)$, que es una matriz antisimétrica.
3. Se calcula (mediante la fórmula simple) $P_{\mathcal{L}_n}(M) = \frac{1}{n}[(MU_n) - (MU_n)^T]$.
4. La matriz consistente más próxima a $A$ (tomando exponenciales) es $E\left(P_{\mathcal{L}_n}(M)\right)$.

**Ejercicio 9 final.** Considera la PCM siguiente con la que un experto compara 4 proyectos entre los que distribuir un cierto presupuesto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utiliza las herramientas computacionales vistas o construidas.

1. Prueba que no es aceptablemente consistente.
2. Obtén la matriz consistente más próxima a $A$.

Al comparar la matriz consistente obtenida con la matriz original, el experto piensa que la nueva matriz no refleja bien su opinión y decide que hay que cambiar algunas entradas: el experto piensa que las entradas (2,3) y (2,4) de la matriz consistente obtenida deben tomar ambas el valor 2. Hazlo (¡no olvides la reciprocidad!).

3. ¿Es la nueva matriz aceptablemente consistente?
4. Si lo es, di cuál es finalmente el vector de prioridades obtenido, es decir, di qué porcentaje del presupuesto se asignará finalmente a cada uno de los proyectos.
5. Si aún no es aceptablemente consistente, ¿puedes imaginar alguna forma de seguir con el proceso de mejora de la consistencia?

## *Discusión y posterior desarrollo*

Dada una PCM, $A$, no suficientemente consistente, hemos visto una herramienta que permite obtener la matriz consistente más próxima a $A$: $E\left(P_{\mathcal{L}_n}(L(A))\right)$. Es obvio que esto mejora la consistencia de la matriz, sí, pero de una manera drástica, pues el proceso proporciona una matriz completamente consistente.

¿Es esto bueno? Sí, pero quizá no tanto: a veces, lo mejor es enemigo de lo bueno. Porque quizá la matriz sintética así obtenida no sea del agrado del experto que emitió los juicios para construir la matriz $A$, ya que puede considerar que sí, puede ser perfectamente consistente, pero no, no refleja su visión.

¿Significa esto que el experto no es consistente? No necesariamente, porque un humano no tiene por qué ser completamente consistente en todo, o sería un robot. Es decir, es admisible cierto grado de inconsistencia, especialmente en un esquema en el que los juicios se expresan (como sabes) en una escala numérica que va de 1 a 9, y en sus inversos (para acomodar la reciprocidad).

Por ello, en el Ejercicio final anterior se ha abierto una puerta hacia un **Sistema de Soporte a la Decisión** en el que pueda existir cierta iteración mediante el *feedback* con el experto, hasta conseguir una solución de compromiso entre 'el tira' hacia la consistencia de la herramienta presentada y 'el afloja' de la subjetividad del experto.

Esto podría ser una parte del trabajo a realizar: construir un mecanismo apropiado que sistematice este 'tira y afloja', que permita obtener decisiones consistentes que reflejen al máximo el criterio del experto (puedes consultar (Benítez *et al*., 2019), para ver una posibilidad –una posible respuesta al apartado 5 del ejercicio 9– de un proceso de mejora de la consistencia que utiliza la herramienta presentada en este artículo).

# 5 Cierre

El objetivo de este artículo ha sido dar una herramienta que permita mejorar la consistencia de una PCM no satisfactoriamente consistente.

Se ha presentado una tal herramienta, denominada de linealización, que se ha construido utilizando el alma de acero del Álgebra, que la dota de fortaleza y rigor. La herramienta ha resultado ser extremadamente simple de utilizar: tomar logaritmos, hacer unas sumas y tomar exponenciales.

Este artículo puede utilizarse como clase de motivación que atraiga el interés del alumno hacia el curso de Álgebra que esté a punto de empezar. Asimismo, los ejercicios propuestos y el desarrollo posterior enunciado pueden constituir un nicho de tareas relacionadas y una fuente de inspiración para trabajos académicos sobre el tema.

# 6 Bibliografía


Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R. Achieving matrix consistency in AHP through linearization. *Appl. Math. Model.*, 35, 4449–4457, 2011.

Benítez, J., Izquierdo, J., Pérez-García, R., Ramos-Martínez, E. A simple formula to find the closest consistent matrix to a reciprocal matrix. *Appl. Math. Model.*, 38(15-16), 3968–3974, 2013.

Benítez, J., Izquierdo, J., Cómo tomar una decisión. Analytic Hierarchy Process: otro uso de las matrices. La Gaceta de la RSME, 22(1), 61-79, 2019.

Benítez, J., Carpitella, S., Izquierdo, J. Esquema de derivación consistente de prioridades en un marco de consenso, Universitat Politécnica de València, 2019.

Benítez, J., Carpitella, S., Izquierdo, J., Una clase inicial de motivación para el Álgebra Matricial, Universitat Politècnica de València, 2021.

Miller, G.A. The magic number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information, Psychol. Rev. 63, 81–97, 1956 http://dx.doi.org/10.1037/h0043158.

Marnell, G. Chunking the information presented to readers. A critique of information mapping, Aust. N. Z. J. Tech. Commun. 33, 2014 http://www.abelard.com.au/information%20mapping.pdf.

Saaty, T.L., The analytic hierarchy process-what it is and how it is used. J. Math. Model. 9, 161–176, 1987.