



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA

TESIS DOCTORAL:

**ESCULTURA
MATEMÁTICA:**

**Antecedentes en la
Historia del Arte,
Desarrollo, Perspectivas
de Evolución y
Clasificación por
Conceptos Matemáticos**

Ricardo Zalaya Báez.

**ESCULTURA MATEMÁTICA:
ANTECEDENTES EN LA
HISTORIA DEL ARTE,
DESARROLLO, PERSPECTIVAS
DE EVOLUCIÓN Y
CLASIFICACIÓN POR
CONCEPTOS MATEMÁTICOS**

Tesis Doctoral realizada por:

Ricardo Zalaya Báez.

**Profesor del Departamento de Matemática
Aplicada de la Universidad de la Universidad
Politécnica de Valencia.**

Dirigida por:

El Doctor Javier Barrallo Calonge.

**Profesor del Departamento de Matemática
Aplicada de la Universidad del País Vasco.**

Programa de Doctorado:

Matemática Multidisciplinar.

**Departamento de Matemática Aplicada de
la Universidad Politécnica de Valencia.**

Valencia, Abril 2.005

AGRADECIMIENTOS

No creo necesario mencionar expresamente a los componentes de mi familia, compañeros y amigos, ellos ya conocen mi profundo agradecimiento. En representación de todos los profesores de mi Departamento, el de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, sí que lo haré a los dos directores que han ejercido este cargo en el mencionado Departamento, durante el desarrollo de esta tesis, el doctor Lucas Jodar y el doctor Alfredo Peris.

Por último, debo mostrar mi especial gratitud al doctor Javier Barrallo, director de esta tesis, además del reconocimiento público de mi profunda admiración. Este profesor es investigador en la Escuela de Arquitectura de la universidad del País Vasco, y posee muchos años de experiencia en el estudio del tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Concretamente ha dedicado numerosos años a profundizar en el conocimiento de estas concomitancias en el caso de la Escultura, siendo especialmente relevante por su autoridad en este tema, y en casi todos los que están relacionados con él. En definitiva, si no hubiera contado con Javier Barrallo y sus conocimientos, experiencia y dominio en este apasionante campo del Arte Matemático, la investigación que ha culminado con esta tesis no hubiera sido posible.

RESUMEN

El objetivo principal de esta tesis doctoral es estudiar el tipo de Arte que hemos denominado “Escultura Matemática”, y clasificar ésta de forma tan exhaustiva y completa como sea posible. No existe en la literatura científica ningún estudio que haya conseguido clasificar desde el punto de vista matemático este tipo de escultura. Esto nos llevó a elegir el desarrollo de esta taxonomía como objetivo fundamental de esta investigación. Además, ello le confiere la característica de innovación que se exige a todas las tesis doctorales.

Empezamos por investigar de forma general los antecedentes históricos de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte, y en particular entre la Escultura y las Matemáticas. Para lograrlo hemos efectuado un análisis histórico sistemático.

A continuación y para desarrollar la taxonomía de un conjunto de elementos el primer paso es definir los objetos que se incluyen. Para este fin hemos tenido que definir el término, “Escultura Matemática”. Pertenecen a esta tipología todos aquellos trabajos escultóricos en los que en su concepción, diseño, desarrollo o ejecución resulta necesaria la utilización de las Matemáticas. Estas características pueden variar desde las relacionadas con la geometría más sencilla, hasta la geometría no euclidiana o la topología más compleja.

Por otro lado, creemos que el mejor criterio para realizar una estructura de la clasificación de la Escultura Matemática será plantear como grupos principales diferentes áreas de las Matemáticas y subdividir éstos, a su vez, según los conceptos matemáticos más importantes utilizados en los diferentes tipos de diseño de obras escultóricas. Los grupos principales que hemos establecido son: Escultura Geométrica, Escultura con Conceptos de Cálculo, Escultura con Conceptos de Álgebra, Escultura Topológica y Escultura con Conceptos Matemáticos Varios.

El principal interés de esta investigación es ayudar a formalizar el estudio de la Escultura Matemática, lo que creemos que fomentará su inclusión en la enseñanza universitaria, bien como una asignatura independiente, o bien como una parte o un tema dentro de las asignaturas que traten las relaciones entre las Matemáticas y el Arte.

ABSTRACT

The main objective of this doctoral thesis is to study the kind of Art that we have called “Mathematical Sculpture” and classify it as exhaustive and complete as possible. There is no study in the scientific literature that offers a systematic classification of Mathematical Sculpture. That led us to choose the developed of this taxonomy as the basic objective of this research. Moreover, it gives characteristic of innovation that must be present in all doctoral thesis.

We have started researching in general the relationship between Mathematics and Art and in a special manner the relationship between Sculpture and Mathematics. To achieve it we have done a systematic historical analysis.

Then in order to develop the taxonomy of a set of elements, the first step consists in identifying its component elements. For that end, first we have to define the term “Mathematical Sculpture”. All the sculptures for which the application of Mathematics becomes essential in their conception, design, development or execution belong to this typology. This characteristics could ranged from the simplest geometry to the most complex non-Euclidean geometry or topology.

On the other hand, we think that the best way for classifying Mathematical Sculpture consists in establishing as principal groups, different areas of Mathematics and then subdividing these groups according to the more important Mathematical concepts used in the different types of sculpture's design. We have proposed the next as main groups: Geometrical Sculpture, Sculpture with Concepts of Calculus, Sculpture with Algebraic Concepts, Topological Sculpture and Sculpture with different Mathematical Concepts.

The main interest of this research is to contribute to settle down the study of Mathematical Sculpture, so as to allow for its incorporation in higher education syllabi, either as a separate course or as a part of the course contents of other courses dealing with the relationship between Mathematics and Art.

RESUM

L'objectiu principal d'esta tesi doctoral és estudiar el tipus d'Art que hem denominat “Escultura Matemàtica”, i classificar esta de forma tan exhaustiva i completa com siga possible. No existix en la literatura científica cap estudi que haja aconseguit classificar des del punt de vista matemàtic este tipus d'escultura. Açò ens va portar a triar el desenvolupament d'esta taxonomia com a objectiu fonamental d'esta investigació. A més, això li conferix la característica d'innovació que s'exigix a totes les tesis doctorals.

Comencem per investigar de forma general els antecedents històrics de les relacions entre les Matemàtiques i l'Art, i en particular entre l'Escultura i les Matemàtiques. Per a aconseguir-ho hem efectuat un anàlisi històrica sistemàtica.

A continuació i per a desenvolupar la taxonomia d'un conjunt d'elements el primer pas és definir els objectes que s'inclouen. Per a este fi hem hagut de definir el terme “Escultura Matemàtica”. Pertanyen a esta tipologia tots aquells treballs escultòrics en què en la seua concepció, disseny, desenvolupament o execució resulta necessària la utilització de les Matemàtiques. Estes característiques poden variar des de les relacionades amb la geometria més senzilla, fins a la geometria no euclidiana o la topologia més complexa.

D'altra banda, creem que el millor criteri per a realitzar una estructura de la classificació de l'Escultura Matemàtica serà plantejar com a grups principals diferents àrees de les Matemàtiques i subdividir estos, al seu torn, segons els conceptes matemàtics més importants utilitzats en els diferents tipus de disseny d'obres escultòriques. Els grups principals que hem establert són: Escultura Geomètrica, Escultura amb Conceptes de Càlcul, Escultura amb Conceptes d'Àlgebra, Escultura Topològica i Escultura amb Conceptes Matemàtics Diversos.

El principal interès d'esta investigació és ajudar a formalitzar l'estudi de l'Escultura Matemàtica, la qual cosa fomentarà la seua inclusió en l'ensenyança universitària, bé com a una assignatura independent, o bé com una part o un tema dins de les assignatures que tracten les relacions entre les Matemàtiques i l'Art.

ÍNDICE

1	Prefacio	9
2	Introducción.....	12
3	Antecedentes Históricos.....	19
3.1	Antecedentes en la Época Prehistórica -----	19
3.2	Antecedentes en el Arte de las Antiguas Civilizaciones -----	22
3.3	Antecedentes en el Arte Clásico-----	28
3.4	Antecedentes en el Arte Islámico -----	34
3.5	Antecedentes en el Arte de Otras Civilizaciones-----	37
3.6	Antecedentes en la Alta Edad Media -----	46
3.7	Antecedentes en la Baja Edad Media -----	54
3.8	Antecedentes en la Edad Moderna -----	60
3.9	Antecedentes en la Edad Contemporánea -----	81
4	Antecedentes en la Escultura del Último Siglo.....	101
4.1	La Escultura de la Primera Mitad del Siglo XX-----	101
4.2	La Escultura de la Segunda Mitad del Siglo XX-----	107
5	La Escultura Matemática.....	120
5.1	Concepto de Escultura Matemática -----	120
5.2	El Proceso de Concepción de la Escultura Matemática -----	124
5.3	La Evolución de la Escultura Matemática y sus Precedentes en el Arte ----	129
5.4	La Informática y la Escultura Matemática -----	133
5.5	Los Procesos de Fabricación Controlados por Ordenador en la Escultura -	141
5.6	Situación Actual y Perspectivas de la Escultura Matemática-----	145
6	Clasificación de la Escultura Matemática.....	152
6.1	El Concepto de Clasificación -----	152
6.2	Propósito de la Clasificación-----	153
6.3	Precedentes en la Clasificación de la Escultura Matemática -----	155
6.4	Clasificación de las Matemáticas-----	158
6.5	Clasificación de la Escultura-----	160
6.6	Versiones Previas de Nuestra Clasificación de la Escultura Matemática ---	161
6.7	Propuesta Definitiva de Clasificación de la Escultura Matemática-----	163
6.8	Dificultades para la Clasificación de la Escultura Matemática-----	164

7	Estudio de los Grupos de la Clasificación	168
7.1	Escultura Geométrica	168
7.1.1	Escultura Poliédrica	171
7.1.2	Superficies Matemáticas Curvas.....	181
7.1.3	Geometrías no Euclídeas	198
7.1.4	Geometría Fractal.....	204
7.2	Escultura con Conceptos de Cálculo.....	210
7.2.1	Sucesiones y Series Matemáticas.....	212
7.2.2	Escultura con Conceptos de Cálculo Diferencial	216
7.2.3	Escultura con Conceptos de Cálculo Diversos	225
7.3	Escultura con Conceptos de Álgebra	227
7.3.1	Simetrías	230
7.3.2	Transformaciones.....	232
7.3.3	Esculturas Modulares	234
7.3.4	Operaciones Booleanas	237
7.4	Escultura Topológica	241
7.4.1	Superficies no Orientadas	243
7.4.2	Nudos y Figuras Entrelazadas	246
7.4.3	Otros Conceptos Topológicos.....	252
7.5	Escultura con Conceptos Matemáticos Varios	255
8	Conclusiones	267
9	Referencias	276
10	Bibliografía	281
10.1	Bibliografía de Matemáticas	281
10.2	Bibliografía de Informática Matemática.....	281
10.3	Bibliografía de Arte	282
10.4	Bibliografía de las Relaciones Matemáticas Arte	282
11	Páginas Web	285

1 Prefacio

El propósito de desarrollar esta tesis doctoral nació a finales del 2001, cuando conseguí un texto realmente interesante que se titulaba *Esculturas del Campus de la Universidad Politécnica de Valencia*, referencia [1]. Este magnífico libro era un extenso compendio en el que se describían las diversas esculturas que se hallan diseminadas por el Campus de dicha universidad, basándose en el estudio de sus imágenes, para lo que incluía unas preciosas fotografías muchas de estas obras. Al ojear este texto, empecé a vislumbrar un importante tema, la relación intrínseca que existe entre Matemáticas y Escultura que se aprecia fundamentalmente a partir de la obra escultórica realizada en el siglo XX, sobre todo desde su segunda mitad. En dicho texto, y prácticamente durante todo su contenido, se revelaban muchos aspectos de las profundas y firmes relaciones existentes entre ambas materias.

A finales del año siguiente, asistí a dos jornadas que se denominaron: *Cuartas Jornadas de Investigación y Fomento de la Multidisciplinariedad* y *Terceres Jornades d'Innovació Docent: L'Ensenyament de les Matemàtiques i el Projecte EUROPA*, que simultáneamente se celebraron en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia. Estas reuniones se suelen convocar con una periodicidad anual. En ambas impartió dos magníficas conferencias el profesor e investigador de la Universidad del País Vasco **Javier Barrallo**.

En la primera de las exposiciones que tituló *Escultura Matemática*, nos mostró una completísima colección de fotografías de obras escultóricas reunidas a lo largo de muchos años de investigación, referencia [2]. En esta conferencia este profesor lograba demostrar la existencia de un tipo de escultura que es conceptualmente matemática. En la segunda conferencia, referencia [3], que versaba sobre las amplias aplicaciones de los fractales, este investigador exponía la utilización que él les daba en el Arte. También, como se podrá apreciar a lo largo de esta tesis, esta “nueva” geometría posee unas formidables características para su empleo en Escultura.

Aconsejado por este profesor, Javier Barrallo, aquella primera idea fue tomando cuerpo y decidí investigar en el campo de las relaciones entre **Matemáticas y Escultura**, alentado por la gran experiencia que posee en el estudio de este campo de **las relaciones de las Matemáticas y el Arte**. Inicié el proceso con la realización del Trabajo de Investigación para la Obtención de la Suficiencia Investigadora. Una de las cuestiones que surgieron al empezar, fue la de concretar los objetivos de este trabajo. Esto se refleja en la variedad de los **títulos que me planteé. Entre las primeras ideas al respecto, se encontraban las siguientes:**

- “La generación de Escultura a través de las Matemáticas”.
- “Conceptos matemáticos en la Escultura”.
- “Conceptos geométricos en la Escultura”.
- “La Escultura Matemática”.
- “Las matemáticos en la Escultura del siglo XX, vista desde la perspectiva de comienzos del siglo XXI”.
- “Influencia de las Matemáticas en la evolución futura de la Escultura”.
- “La génesis matemática de la Escultura”.

La enumeración anterior de los posibles títulos que contemplamos para este Trabajo de Investigación, pudo servir para señalar algunos de los aspectos que sería interesante estudiar con respecto al tema de las relaciones entre la ciencia de las Matemáticas y el arte de la Escultura. Sin embargo, tratar con profundidad todos estos aspectos creemos que sería un objetivo demasiado ambicioso para nuestra tesis.

Sin embargo, dada la necesidad de concreción lógica que conlleva cualquier investigación, el objetivo principal que elegimos fue **la clasificación por conceptos matemáticos** de la que a lo largo de la tesis denominaremos “**Escultura Matemática**” y que en nuestro estudio definiremos. En cualquier caso, creímos necesario empezar nuestra investigación de una forma general, con el estudio de los antecedentes en la historia del Arte.

Lógicamente, para la realización de esta tesis también he estudiado algunos aspectos generales del tema de las relaciones de las Matemáticas y la Escultura, tanto de los mencionados en la enumeración anterior como de algunos otros que creímos interesantes. Éstos permitieron profundizar en el tema de una forma más sistemática y que tratamos que fuera lo más completa posible, aunque sin olvidar el objetivo fundamental de la investigación la consecución de la clasificación ya comentada.

Existen muchos estudios que analizan las relaciones del Arte con las Matemáticas, pero creemos que son pocos los que se han dedicado a la investigación de éstas concomitancias en el caso de la Escultura. Estos trabajos, o resultan demasiado genéricos, o están aplicados a otra rama del Arte como la Arquitectura, la Pintura, la Música, o son específicos de una determinada relación. Especialmente profusos son los dedicados a la relación con la Arquitectura. La gran mayoría de estos trabajos han sido realizados por investigadores extranjeros. Sin embargo también existen algunas publicaciones, aunque escasas, de autores españoles. Acerca de los referentes a las relaciones existentes entre Matemáticas y Escultura se puede ver los que he consultado en las referencias, que se incluyen al final de la presente tesis. Además se incluye una bibliografía básica.

En cualquier caso, se cabe resaltar que creemos que **no existe ningún trabajo en que se incluya un estudio que haya sistematizado totalmente esas relaciones entre Matemáticas y Escultura y menos aún, que haya conseguido clasificar la Escultura Matemática**. De hecho para la realización de esta investigación, además del lógico asesoramiento del profesor Barrallo, he consultado a alguno de los principales expertos en este campo, que me han confirmado la carencia de un estudio como el que se realiza en esta tesis. Entre los investigadores que he consultado se encuentran: **Nathaniel Friedman**, profesor del departamento de Matemáticas de la Universidad de Albany, **Reza Sarhangy**, profesor del Southwestern College en Kansas y **Carlo Sequin**, de la universidad de Berkeley en California. Estos expertos no sólo me han confirmado dicha ausencia, sino que me han sugerido ideas para la realización de la clasificación. El profesor Sequin ha elaborado la página web de referencia [PW1], que considero la mejor sobre Escultura Matemática.

Otro de los motivos que me “animaron” a hacer esta tesis doctoral fue el que su tema estaba comprendido dentro del apasionante campo de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. También lo hizo la idea que en algún momento anterior había tenido y que resurgió de nuevo: “algunos de los mejores artistas de la historia dominaban las Matemáticas o si no, por lo menos, eran buenos matemáticos”. Esto no sólo se ha producido en el caso de muchos grandes arquitectos, lo que no nos sorprende, sino también en el de algunos escultores. Como demostración de lo anterior y de la relación intrínseca que existe entre Matemáticas y Arte, pueden servir los casos de genios como Leonardo da Vinci, Alberto Durero y Antonio Gaudí.

Dado el interés de esta investigación, que creemos que ha sido suficientemente justificado, trataremos de lograr el objetivo final de nuestro estudio, el conseguir una taxonomía adecuada, extendiéndola a la escultura que podríamos llamar matemática desde un punto de vista conceptual. Resaltamos que, aunque existen muchos ejemplos de obras escultóricas en las que se podrán encontrar propiedades geométricas y incluso matemáticas, las que consideraremos que pertenecen a la Escultura Matemática son aquéllas en que esta relación es “trascendental” para su realización. En el capítulo correspondiente trataremos de concretar el tema.

Las investigaciones realizadas en nuestra tesis doctoral, sobre todo la elaboración final de la clasificación de la Escultura Matemática, **permitirán o facilitarán la inclusión de su estudio en la enseñanza universitaria en asignaturas en las que se estudie la relación entre Matemáticas y Arte**, especialmente en aquellas especialidades que se puedan inscribir en la rama técnico artística, como por ejemplo en Arquitectura.

INTRODUCCIÓN



2 Introducción

Creemos que es evidente la existencia de **obras escultóricas que son conceptualmente matemáticas**. Para presentar este tipo de escultura mostramos unos primeros trabajos que resultan ser unos ejemplos muy claros, los de las figuras 1, 2, 3 y 4. En la figura 1, situada en la portada anterior, se muestra una interesante obra de **Brent Collins** extraída de su página web, referencia [PW2]. En ella se puede apreciar que su diseño se ha basado en un profundo estudio de las superficies y de sus propiedades topológicas. En la figura 2, a la derecha, una obra de otro escultor matemático **John Robinson** que destaca, además de por su preciosa estética, por su atrayente geometría. Las figuras 3 y 4 las comentaremos posteriormente.

Figura 3 (debajo): Pepe Noja, “Siglo XXI”. Tamaño 1500 x 500 x 480 cm. Acero inoxidable. Situada en la entrada norte del Campus de la UPV. Año 2000, Valencia.



Figura 2 (arriba): John Robinson, “Star Burst, (Explosión de una Estrella)”; 1996. Acero inoxidable. Tamaño 38 cm.



Figura 4 (arriba): Bathsheba Grossman; “Universal Clef, (Clave Universal)”. Bronce de silicio. Tamaño aproximado 8 cm.

Figura 1 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Brent Collins. “Hepteroïd”. Gallery Fourth, Early Modular Surfaces, picture 3; (Galería Cuarta, Primeras Superficies Modulares, imagen 3). Año 1997. Fotografía de Phyllip Geller.

A continuación, resumiremos los aspectos básicos que se desarrollarán en la presente tesis que tendrá como objetivo fundamental el estudio de un tipo de arte que denominamos “**Escultura Matemática**”, y que posteriormente definiremos. Empezaremos mostrando algunas de las obras escultóricas de autores contemporáneos que se hallan diseminadas por el Campus de nuestra universidad, la Universidad Politécnica de Valencia. Sus imágenes las vamos a extraer del libro de la referencia [1], y nos van a permitir situar el tema y presentar algunos ejemplos característicos de este tipo de escultura. Continuaremos con los antecedentes históricos del Arte, en sentido amplio, **tratando de estudiar con cierto detenimiento las relaciones entre las Matemáticas y el Arte**, las cuales se pueden encontrar desde los primeros tiempos de la Humanidad. En una primera etapa se va a poder observar las relaciones entre la Artesanía y las Matemáticas, para posteriormente ir encontrándolas con el Arte, en general, y con todas las artes plásticas, en particular.

Todo estos estudios previos nos permitirán enfocar uno de los objetivos fundamentales de nuestra investigación, analizar estas correspondencias en el caso de la Escultura. Se constatará la existencia de estas relaciones desde las primeras manifestaciones escultóricas, sobre todo con la Geometría, lo mismo que constataremos con el Arte en general, y **la aparición paulatina de conceptos matemáticos muy diversos a lo largo de la extensa historia de la Escultura**. Por último, profundizaremos en la fortísima relación existente en la escultura actual, especialmente en la que denominaremos matemática, lo que nos permitirá posteriormente realizar su clasificación.

A lo largo del presente trabajo también se incluirá algún ejemplo de obras de otras ramas de las artes plásticas, como la Arquitectura, la Pintura o incluso alguno de artesanía. Elegiremos aquéllas que consideremos importantes, bien porque poseen una acusada relación que podíamos conceptualizar de intrínseca con las Matemáticas, o incluso porque se les podría considerar en sí mismas auténticas obras escultóricas.

Como ya se ha comentado en el libro mencionado, referencia [1], se describen esculturas de autores contemporáneos diversos, casi todos ellos de procedencia española, y situadas en **el Campus de la Universidad Politécnica de Valencia**. El estudio de estas, muchas de las cuales son un buen ejemplo de la utilización de conceptos matemáticos en la Escultura, permitirá que si algunos miembros de nuestra universidad lo desean puedan comprobar “in situ” alguno de los aspectos estudiados en esta tesis.



Hemos elegido algunas de las obras situadas en nuestra universidad, incluidas en el libro referido, como prototipo para presentar este tipo de escultura. Un ejemplo que presenta una característica muy utilizada, la orientación o no de una superficie, es el que se muestra en la fotografía de la figura 5. Esta es una obra de **Xavier Bertomeu** que está constituida básicamente por dos cintas de Moebius, que es el caso más sencillo del concepto de superficie de una única cara.

De este libro he incluido otras fotografías de obras que también son características de este tipo de escultura, como la figura 3 en la página anterior y algunas otras en páginas posteriores. En esta última se muestra una escultura de **Pepe Noja**, constituida por un esbelto cilindro con el que se realiza un nudo.

Figura 5: Xavier Bertomeu, “El origen de la vida, o El Universo,”. 210 x 136 x 200 cm. Acero inoxidable y pedestal de hormigón armado. Año 2001 Escultura situada en el Ágora de la UPV.

Estas dos últimas que hemos comentado, figuras 3 y 5, son ejemplos de lo que hemos denominado **“Escultura Matemática” sencilla**. La utilización como en estos casos de una geometría con figuras muy simples en el diseño de la obra resulta bastante frecuente en la escultura actual. Sin embargo, en otros casos se tratará de **piezas de gran complejidad** en las que se utilizan complicados conceptos de Geometría, Álgebra, Topología, etc. Una obra que es un ejemplo clarísimo de este tipo más complejo de escultura es la de la figura 4, situada en la primera página de esta introducción. Está realizada por una magnífica escultora matemática, **Bathsheba Grossman** y se titula **“Universal Clef, (Clave Universal)”**. Esta obra es un trabajo en el que claramente se puede apreciar que es **“conceptualmente matemático”**. En él se observan diferentes propiedades topológicas y también tipos de simetrías. Esta propiedad, la simetría, ha sido desde los orígenes del Arte uno de los conceptos matemáticos que se ha utilizado con más frecuencia.

Otra clase de escultura es la que mostramos en las siguientes imágenes. Estos trabajos no son tan claramente **“conceptualmente matemáticos”**, aunque sí demuestran una geometrización en su diseño. Ejemplo de este tipo son las siguientes esculturas de **Nasio Bayarri**, que se hallan situadas en el Campus de la UPV. La figura 6, situada debajo, **“Cósmico Geométrico”** forma un conjunto con otra obra que hace de compañera suya, denominada **“Cósmico Demiúrgico”**. Con estos elementos geométricos tan simples este autor ha conseguido realizar una figura novedosa.



De ambas obras y de otro trabajo de este escultor, Nasio Bayarri, se muestran las figuras 9, 10 y 11, situadas al final de la página siguiente. En estas dos esculturas anteriores, figuras 9 y 10, se ha de resaltar que su formación está realizada básicamente con sólidos muy sencillos como prismas y cilindros. La última de las obras de este autor, la que se muestra en la figura número 11, es muy diferente. En este caso es un retrato, aunque se ha producido un cierto nivel de abstracción geometrizando uno de sus lados.

Con estas figuras acabamos esta presentación de las obras de este tipo de escultura situadas en la UPV, y pasamos a analizar brevemente la existencia de escultura de tipo matemático en el arte de nuestro país a partir de algunos ejemplos de obras que puedan ser características. En España también se pueden encontrar algunos ejemplos, aunque no es precisamente de los países en que este tipo de escultura se halle más extendido, y sobre todo si tiene una concepción puramente matemática. En bastantes casos las obras de esta clase de escultura, que se hallan expuestas en museos y salas de exposiciones y en los espacios públicos de nuestras ciudades, han sido realizadas por artistas españoles.

Algunos de estos escultores españoles han llegado a alcanzar una gran resonancia internacional y han realizado obras en las que se puede entrever propiedades geométricas. Tal vez los escultores del último siglo XX más reconocidos internacionalmente sean **Jorge de Oteiza** y **Eduardo Chillida**, ambos de procedencia vasca. En sus obras resulta claro que no sólo se han basado en la utilización de figuras geométricas sino que también en algunas se podrán observar las relaciones con la lógica booleana, presentes en toda su concepción. En la figura 7, situada en la siguiente página, exponemos un magnífico trabajo de Chillida, que nos demuestra la presencia de esta lógica.

Figura 6 (izquierda): Nasio Bayarri “Cósmico Geométrico”. Piedra, 1989. Dimensiones: 340 x 125 x 85 cm. Escultura situada en el jardín del rectorado de la UPV, Valencia.

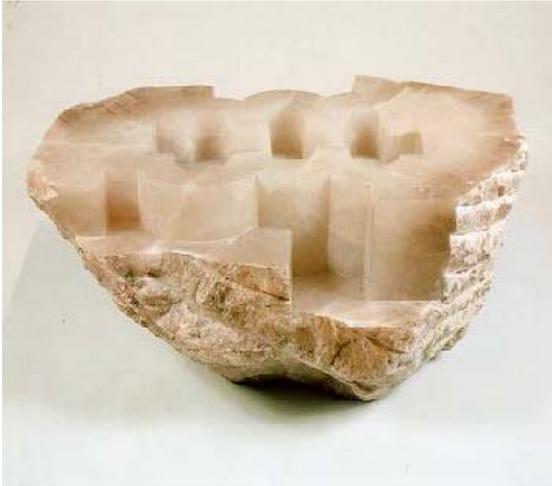


Figura 7 (arriba): Eduardo Chillida, “Homenaje a la mar III”. Alabastro. Tamaño 51 x 69 x 100 cm; Año, 1984.



Figura 8 (centro): Max Bill, “Endless Ribon, (Cinta sin fin)”, Versión I. Granito, 1953. Museo de Arte de Baltimore, Estados Unidos.



Figura 9 (detalle): Nasio Bayarri “Cósmico Demiurgo”. Acero corten inoxidable y base de hormigón, Año 1989. Tamaño: 350 x 255 x 115 cm. Rectorado de la UPV, Valencia.



Figura 10 (detalle): Nasio Bayarri “Cósmico Geométrico” Tamaño: 340 x 125 x 85 cm. Piedra, año 1989. Rectorado de la UPV. Cabeza de la obra de la figura 6.



Figura 11: Nasio Bayarri “Homenaje a José Manuel Benet”. Cabeza 50 x 49 x 60 cm. Bronce, 1989. Campus de la UPV.

En esta atrayente obra de la figura 7, además de la utilización de sencillas formas geométricas espaciales como cubos, prismas y cilindros rectos o curvados, se observa que se puede construir efectuando operaciones de lógica o de conjuntos matemáticos, como la unión, la intersección o el complementario.

Asimismo, en las calles y jardines de Valencia, localidad en que se halla nuestra universidad, lo mismo que en las de otras ciudades se sitúan obras en las que también se puede ver algunas relaciones matemáticas de las que se detallarán en la presente tesis.

Otra obra claramente matemática es la de la figura 11, en la página siguiente. En ella se aprecia una sencilla escultura en la que uniendo delgados cilindros metálicos, se logra construir una interesante figura geométrica. En el diseño de esta obra se utilizan conceptos matemáticos muy diversos relacionados con los siguientes campos: la Geometría y la Topología, las superficies (cilindros) y sus intersecciones, las simetrías de rotación, los caminos cerrados, etc.

La Geometría ha sido, como se podrá comprobar a lo largo de esta investigación, el área de las Matemáticas más utilizada en la escultura conceptualmente matemática, y que como ya hemos anticipado denominaremos simplemente “Escultura Matemática”.

La nación donde más desarrollo ha adquirido este tipo de Escultura es en Estados Unidos, aunque también en Canada, Japón, Australia y en algunos países europeos existen diversos escultores que realizan obras de una gran calidad. Podemos considerar al escultor **Max Bill** un precursor de este Arte.

Este autor además de utilizar numerosos conceptos geométricos en su trabajo, inició el uso en escultura de las superficies no orientadas. El caso más sencillo de este tipo de superficie es la banda o cinta de Moebius, que es uno de los primeros objetos de este arquetipo que apareció en la escultura y que Max Bill utilizó profusamente, consiguiendo obras de una gran belleza, como la de la figura 8 en la página anterior. Con respecto al estudio de las características matemáticas de las obras de este escultor, resulta interesante la referencia [4] del investigador, **Ton Marar**.



Figura 12 (arriba): Jose María Cruz Novillo, "Sin Título". Año 1989. Situada delante de la entrada de la torre Picasso. Madrid, España.



La Escultura Matemática comprende tipos muy diferentes a los de estas últimas obras, como la que se puede observar en la figura 13, situada en el final de la página. Esta obra ha sido realizada por **Charles Perry**, uno de los mejores y de los más reconocidos escultores matemáticos. Para ampliar la información sobre su trabajo se puede visitar su página web, referencia [PW3].

Este escultor, utilizando básicamente sólo superficies regladas, ha logrado crear una obra que resulta vistosa y espectacular. Ésta ciertamente constituye un conjunto geométrico muy complejo que impacta al espectador. Esta obra escultórica y otras similares creemos que están contribuyendo a despertar el interés del público en general por este tipo de escultura.

A continuación, y situados en la página siguiente, incluimos dos trabajos de un artista que está considerado otro de los mejores escultores matemáticos, **John Robinson**. Estas dos imágenes ilustran el proceso mental de abstracción y posterior geometrización para llegar al diseño de la segunda obra. La número 14 se titula "Acrobats" y la número 15 "Elation (Regocijo)". Estos dos sencillos trabajos nos muestran el gran contraste existente al pasar un motivo figurativo (figura 14), a uno simbólico (figura 15). Ésta se puede considerar una conceptualización matemático-geométrica de la anterior escultura.

Para estudiar el trabajo de este artista y observar otros ejemplos de obras suyas, resulta muy interesante el artículo de la referencia [5], que está incluido en un monográfico acerca de las relaciones Matemáticas-Arte de la revista *Mètode*, publicada por la Universidad de Valencia. También nos sirve para mostrar el tipo de investigaciones, que desde un punto de vista matemático se han realizado sobre este tipo de escultura, pero que tal como hemos comentado son demasiado específicas y muchas de ellas, como la de este caso, sólo estudian el trabajo de un autor concreto.

Figura 13 (izquierda): Charles Perry, "Equinox". Acero inoxidable. Altura 14 m. Año 1982. Lincoln Center, Dallas, Texas.

Los escultores matemáticos: Brent Collins, Helaman Ferguson, Bathsheba Grossman, Charles Perry, George Hart, Nathaniel Friedman, Keiso Ushio, John Robinson, etc., se encuentran entre los más conocidos internacionalmente. De algunos de ellos ya hemos mostrado ejemplos de su trabajo. A lo largo de esta tesis expondremos otras obras de los anteriores, y de otros autores todavía no mencionados que nos servirán para analizar y finalmente para clasificar esta escultura.

Para estudiar la Escultura Matemática resultan muy interesantes algunas ponencias de los Congresos organizados periódicamente por dos prestigiosas organizaciones internacionales de este campo: **ISAMA** y **BRIDGES**. En el último congreso, **Meeting Alhambra ISAMA-BRIDGES 2003**, referencia [6], celebrado simultáneamente por ambas en colaboración con la Universidad de Granada, presentamos la ponencia, *Mathematical Sculpture Classification*, referencia [7]. Estas organizaciones, **I.S.A.M.A.**, The International Society of the Arts Mathematic and Architecture, y **BRIDGES**, Sociedad para el fomento de los “puentes” entre las Matemáticas, el Arte y la Música, reúnen a algunos de los mejores expertos en el campo de las relaciones Matemáticas y Arte.



Figura 14 (Izquierda): John Robinson, “Acrobats (Acróbatas)”. Serie: “Univers (Universo)”. Centro de Deportes de Canberra, Australia.

Figura 15 (derecha): John Robinson, “Elation (Regocijo)”. Serie: “Univers (Universo)”.

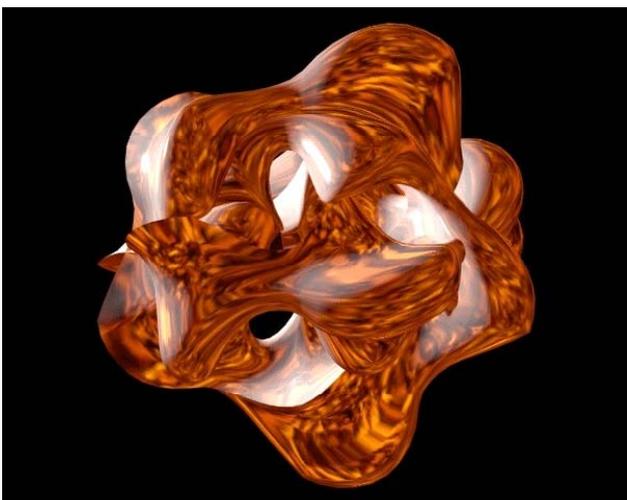


Figura 16 (debajo): Javier Barrallo. Escultura virtual número I, de la serie de título “Hyperescultura”. España, 1994.

En estas esculturas, cuando son muy complejas, para poder diseñarlas, estudiarlas y realizarlas es necesario utilizar la Geometría, la Topología e incluso el Cálculo Diferencial. **En muchas de las obras más complejas se llega a hacer casi imprescindible la utilización de Informática**, manejando diversos programas de diseño gráfico y de Matemáticas.

El ordenador también permite la creación de lo que podemos llamar “escultura virtual”. Esto permite a los escultores y a los artistas plásticos, en general, visualizar sus ideas antes de ser ejecutadas. Para ello necesitan muy pocos medios: un sencillo ordenador y algún programa informático adecuado, y, evidentemente, de su imaginación y de su sensibilidad. Incluso les permite realizar trabajos de la categoría que llamaremos “exclusivamente virtual”.

En este tipo de escultura, las posibilidades de la utilización de las Matemáticas son casi “ilimitadas”. Un buen ejemplo es el mostrado en la figura 16, situada a la izquierda, que muestra una escultura “exclusivamente virtual” de **Javier Barrallo**, director de esta tesis. Este profesor en otras de sus obras utiliza la teoría de fractales. Al respecto puede ser interesante consultar la referencia [3], ya mencionada, escrita por este experto en los fractales y que precisamente la denomina de una forma que explica las grandes posibilidades de utilización de esta geometría en el Arte: *Geometría Fractal: Algoritmos y Creación Matemática*.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS



3 Antecedentes Históricos

En este capítulo vamos a describir las manifestaciones artísticas de una forma cronológica, tratando de **estudiar brevemente las relaciones entre las Matemáticas y el Arte**, las cuales se pueden vislumbrar desde los orígenes de la humanidad. Nos centraremos en las culturas que más han influido en el arte de la sociedad occidental, aunque también describiremos muy sucintamente el de otras civilizaciones que a veces son llamadas “lejanas”, pero que también han influido en el nuestro. Dada la necesaria concisión con que se deben exponer los resultados de esta investigación, en este capítulo dedicado a antecedentes, sólo incluiremos un resumen del estudio realizado, que hemos intentado que fuese lo más completo y exhaustivo posible.

3.1 Antecedentes en la Época Prehistórica

Desde los primeros tiempos de la humanidad, incluso antes de que se pueda decir que aparecieran las manifestaciones artísticas propiamente dichas, se pueden establecer relaciones con determinados conceptos matemáticos, especialmente con los geométricos, en las construcciones y en los utensilios elaborados por nuestros ancestros. Hace unos 500.000 años, en el **Paleolítico inferior**, tal como se constata en el yacimiento de Terra Amata en Niza, el hombre construía cabañas de ramajes de planta oval, referencia [8]. En las formas geométricas adoptadas para estas primeras construcciones, ya se pueden intuir los primeros razonamientos de tipo lógico con “fundamentos matemáticos” aplicados a la realización de una estructura, que teniendo una forma geométrica sencilla, permita una resistencia suficiente.



Figura 18 (arriba): Collar realizado con piedras coloreadas. Piedras pintadas. Bastoncillos grabados. Placa de hueso perforada con bóvido grabado. Todas estas piezas se hallan expuestas en el Museo de las Antigüedades Nacionales de Francia, St. Germain-en-Laye.

Figura 17 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Templo de los Jaguares en las ruinas mayas de Chichén Itsá. Representación en una aguada de la artista Adela Breton. Península de Yucatán, Méjico.

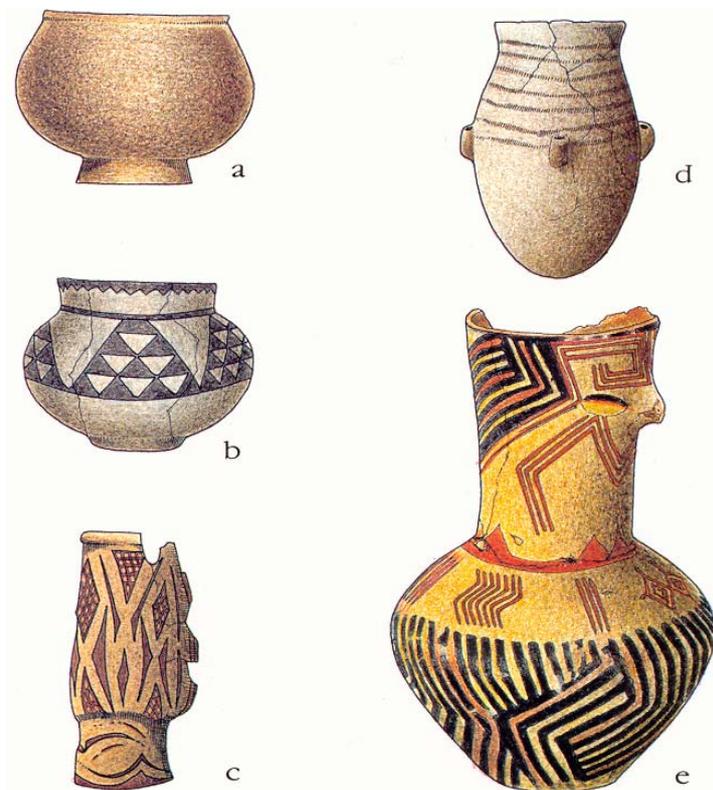
Los utensilios fabricados por los pueblos del Paleolítico que en una primera etapa tenían una función únicamente práctica, pasaron a ser embellecidos o en algunos casos fueron destinados directamente a una función de adorno. En la figura 18, situada al final de la página anterior, se pueden observar algunos de estos objetos. Éstos pueden ser considerados como tal vez los primeros pasos dados en la Escultura, o incluso como precursores de ésta. Incluso, en ellos **se puede observar la aparición de algunos conceptos matemáticos** como el paralelismo de rectas. Véase la pieza superior de la figura. También se puede observar que ya se utilizaban algunas formas geométricas planas elementales como las circunferencias, triángulos y curvas diversas, así como figuras espaciales: anillos, cilindros, conos, conos truncados, etc.

Durante el Paleolítico se desarrollaron otras facetas artísticas. La que se considera más importante es el **Arte Rupestre** y, aunque su principal temática fue la representación de figuras animales y antropomórficas, también se realizaron algunas con signos geométricos. En ellas se puede vislumbrar nuevamente la utilización de conceptos geométricos. Además, se realizaron pinturas que son geometrizarciones de figuras de animales o de hombres.

Leroy-Gourhan ha intentado crear un vocabulario formal, referencia [8], para clasificar las figuraciones que fueron utilizadas durante el Paleolítico. Esto nos permite comprobar nuevamente la aparición de diversos criterios geométricos en el Arte Prehistórico. Cuatro son los tipos que este investigador contempló en su clasificación:

- **Geométrico Puro**
- **Figurativo Geométrico**
- **Figurativo Sintético**
- **Figurativo Analítico.**

En el Neolítico, se desarrollo una artesanía nueva, la cerámica, que también se debe considerar otra faceta artística. En algunas de las piezas que se elaboraron en esta época como las de figura 19, ya se puede observar la utilización en la decoración de sus superficies de muy diversos motivos geométricos.



Además hay que tener en cuenta que para la concepción de piezas, como las que se muestran en la figura de la izquierda, se necesitaba saber la construcción de las formas espaciales simples: esfera, cilindro, tronco de cono, etc. Por otro lado, se produjo la aparición de otros **cuerpos de revolución** y eso que todavía no era conocido el torno de alfarero.

Figura 19 (izquierda):
Piezas de cerámica datadas en el Neolítico Inferior. Pertenecientes a yacimientos arqueológicos de los siguientes países: Grecia: a) y b) por Leroy-Gourhan. Bulgaria: c) según Georgier y d) dibujo sobre el original en el Museo Regional de Vratsa. Italia: e) según Bernabó Brea.

En estas cerámicas se utilizaban formas de otras superficies cuádricas, la sencilla esfera, el elipsoide, el paraboloides y incluso la del hiperboloides de una hoja. También, tanto en su decoración como en sus formas, se puede ver la aparición de otros conceptos matemáticos más genéricos, los **tipos de simetría**. Además, en cuanto al **concepto de curvatura de una superficie** se observa la utilización de curvaturas suaves, puntos angulosos, líneas en las que hay cambios bruscos, etc. En definitiva, se necesitaba el conocimiento de ciertos conceptos geométricos.

Durante el Neolítico, la Escultura, arte objetivo fundamental de estudio en este trabajo, alcanzó una notable evolución en cuanto a procedimientos y técnicas. Los principales hallazgos de obras escultóricas se han producido en yacimientos arqueológicos en el Próximo Oriente, en el norte de África y en el Levante español.

También se han encontrado obras escultóricas de esta época en civilizaciones de lugares muy lejanos a nosotros como las del Lejano Oriente, las civilizaciones prehistóricas americana, y las de algunos pueblos africanos. En este último continente es donde tal vez ha habido hallazgos más interesantes. Todas estas civilizaciones aunque son realmente desconocidas para nosotros, no son por ello menos importantes para el desarrollo del Arte, y el estudio de sus manifestaciones artísticas. Además, ello puede proporcionar ideas útiles para el diseño de Escultura Matemática.

En la evolución de la Escultura neolítica el concepto de abstracción está presente en todas sus fases. En un mismo yacimiento se han hallado formas que tienden a un esencialismo geométrico, junto con otras mucho más orgánicas. Ejemplo de ello son las esculturas elaboradas en el sudeste europeo, en las que encontramos tanto figuras caracterizadas por un cierto refinamiento anatómico, como otras en que sus cabezas se convierten en estructuras geométricas. En ellas se puede apreciar por ejemplo, figuras humanas con silueta en rombo, círculos para formar las orejas, un cilindro para la nariz, dos triángulos invertidos como ojos, etc.

Caso extremo de esquematización lo constituyen algunas formas planas en las que sólo el perfil y algunas incisiones realizadas de forma superficial, denotan una cierta relación con el cuerpo humano, realizadas tanto en piedra (yacimiento de Dimini) como en placas de hueso (Gumelnitsa). También se han encontrado cerámicas con estas características como por ejemplo las del yacimiento de Mestkur en Bulgaria.

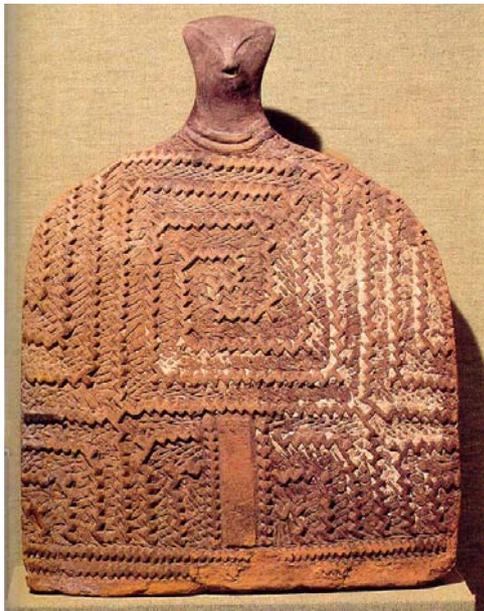


Figura 20 (arriba): Figurilla masculina grabada con motivos geométricos. Terracota. Museo de Historia de Bucarest.

En estas obras, de nuevo, observamos la utilización en la Escultura de conceptos geométricos. Un magnífico ejemplo que ilustra la aparición de estos conceptos y relaciones, es la escultura que se muestra en la figura número 20. En ella como en otras de esa época, además de la esquematización de su forma y el que los rasgos de la cara de la figurilla se convierten en estructuras geométricas, se aprecia la ornamentación del exterior de la obra mediante la realización de un relieve muy interesante, constituido utilizando diversos motivos geométricos.

La decoración de esta figurilla que podemos observar a la izquierda, básicamente, consiste en una línea quebrada que se repite. Esta línea es una espiral poligonal, que abarca todo el cuerpo de la escultura. Observando su composición se puede deducir el conocimiento por el autor, aunque sólo sea **de forma intuitiva de algunos conceptos matemáticos y geométricos**. Estos pueblos conocían las formas de algunos polígonos básicos y de sus medidas, las simetrías. En definitiva hay presencia en su Arte de la Geometría y de las Matemáticas.

3.2 Antecedentes en el Arte de las Antiguas Civilizaciones

Las civilizaciones mesopotámicas y egipcia iniciaron la primera gran revolución en el conocimiento humano. A partir de las primeras formas de organización social, acometieron una transformación radical del saber humano, aportando el desarrollo de la escritura y de lo que resulta substancial para los objetivos de esta investigación, la verdadera “**creación de las matemáticas**”. Una de las más importantes civilizaciones mesopotámicas, la babilónica, descubrió la operación matemática de la multiplicación y las fracciones antes del 2000 a. J. C. y estableció las primeras normas para pesar y medir. Posteriormente, hacia el 1700 a. J. C., eran ya capaces de resolver ecuaciones de segundo grado.

Arte Egipcio

Entre las aportaciones fundamentales de la cultura egipcia cabe destacar la escritura jeroglífica, código merced al cual ha sido posible estudiar y conocer los innumerables restos de su Arte. También ha permitido estudiar su sociedad, cultura y lo que resulta más importante para poder profundizar en el objetivo de este apartado de la presente investigación, el gran desarrollo de su ciencia y especialmente de sus matemáticas. En definitiva, el gran desarrollo de la cultura de este pueblo ha permitido un gran avance en la historia de la humanidad.

La lengua egipcia, como medio de expresión de la verdadera memoria histórica del país, fue durante mucho tiempo un enigma para los sabios europeos. La casualidad hizo que en 1799, el pico de un soldado del ejército de Napoleón, destinado en las fortificaciones de la ciudad de Rosetta, tropezase con una gran piedra de basalto negro. Esta pieza debido al lugar en que fue hallada se denominó “piedra Roseta”, figura 21. Lo sorprendente fue que en su cara pulida tenía tres inscripciones en las lenguas, jeroglífica, demótica y griega. Estas leyendas daban noticia de un mismo decreto de los sacerdotes de Menfis, fechado en el año 196 a. J.C., durante el reinado de Tolomeo V Epífanes (hacia 205-180 a. J. C.).



Los mejores “cerebros” de aquella época intentaron utilizar la piedra Roseta, como base para descifrar los misteriosos signos jeroglíficos de los egipcios, aunque esto no se consiguió hasta más de veinte años después. Fue el francés Jean François Champollion, quien en 1822, estudiando su código consiguió deducir que los jeroglíficos no eran signos sólo simbólicos, sino que también lo eran de tipo fonético. Se les denomina signos plurigráficos. Es decir, contienen símbolos, letras y signos auxiliares. Además demostró que no se trataba de un verdadero alfabeto, pues sus 24 signos, sólo incluían las consonantes. Al leer un determinado texto, había que completarlo con las vocales. Todas las consideraciones expuestas le permitieron descifrar esta escritura.

Figura 21 (izquierda): Piedra de Rosetta. Estela (fragmento). Basalto negro (196 a. J. C.) Museo Británico, Londres.

No puedo dejar de mencionar una de las facetas del Arte Egipcio más conocidas, las pirámides, que aunque incluidas en la arquitectura, arte que no es el objetivo final de este trabajo, son uno de los más claros ejemplos de las relaciones intrínsecas entre las Matemáticas y el Arte. Además cabe resaltar que la forma geométrica de “pirámide”, también se ha utilizado en otras civilizaciones, como las mesopotámicas o las centroamericanas. Vamos a fijarnos en las Pirámides de Gizeh, construidas aproximadamente entre los años 2650 y el 2550 a. J. C. y en particular en la de Keops en el fondo de la figura 12. Sus dimensiones son impresionantes, tiene 146,6 m. de altura y 240 m. de lado de la base, ocupando por tanto aproximadamente 5 hectáreas. Además la pirámide de Keops, está compuesta de más de 2,3 millones de grandes bloques de piedra, de al menos 2,5 toneladas de peso, que tuvieron que ser cortados, pulidos, transportados y colocados en la estructura con una precisión milimétrica. Estos números pueden dar una idea de la inmensa magnitud de la obra y de la tremenda dificultad de todas sus fases, empezando por la de su diseño y la de planificación, hasta lógicamente la de su construcción.

Las soluciones técnicas adoptadas en su construcción siguen siendo un auténtico misterio, aunque se han hecho numerosas hipótesis acerca de ello. Una de las más conocidas es la del historiador griego Herodoto, que visitó Egipto en el año 450 a. J. C., y que nos dice que en la construcción de la pirámide trabajaron 100.000 personas continuamente, durante un espacio de 20 años, sin contar otros 10 años previos de preparativos. Fuera como fuese, lo que resulta evidente es que tanto para el diseño y planificación de estas pirámides como para su construcción, se necesita unos conocimientos matemáticos y geométricos muy completos. En cualquier caso, se las puede considerar como un auténtico documento de los conocimientos que poseían los matemáticos y astrónomos egipcios. Esto nos demostraría claramente y con total fiabilidad que estas ciencias, al menos, se hallaban muy desarrolladas en esta civilización.

Algunos investigadores han conjeturado con **las medidas geométricas de estas pirámides diversas relaciones matemáticas**. Por ejemplo, los ingleses Taylor y Smith descubrieron que el perímetro dividido entre el doble de la altura resulta 3,14159, esto es el número pi con 5 decimales exactos. Por otro lado, aventuraron que la longitud lateral de la pirámide es la diezmillonésima parte de la mitad del eje terrestre. Estas relaciones y otras siguen en el misterio hoy en día.

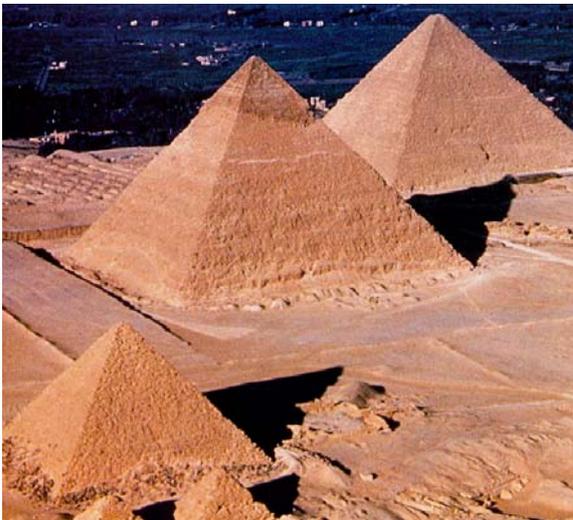


Figura 22: Pirámides de “Gizeh”. En primer término, “Mikerinos” (la Pirámide Divina), 65,5 m. de altura. En el centro, “Kefren” (la Gran Pirámide), 143,5 m. de altura. Al fondo, “Keops” (la Pirámide que es el lugar del alba y el ocaso), 146,6 m. de altura. Edificadas durante la IV dinastía del Imperio Antiguo.

Uno de los aspectos en los que es evidente, no ya la influencia sino más aún una fuerte dependencia del Arte con respecto a las Matemáticas, es el de la utilización de normas de representación para el cuerpo humano. En concreto, son muy importantes las que fijan las proporciones de las distintas partes del cuerpo, esto es, **el canon de las proporciones humanas**.

Esta normalización se utilizó por los egipcios en la pintura y lo que es importante para el objetivo de esta tesis, en la Escultura. Este arte con este pueblo experimentó un desarrollo realmente importante, siendo los principales motivos, la figura humana o la pseudo-humana, como la de algunos dioses.

El modelo básico que utilizaba esta civilización, era la figura humana de pie y por supuesto de perfil, como se requería en el Arte Egipcio. Observar la figura número 23 situada al final de la página siguiente, en la que se ilustra de forma muy clara todas las medidas que empleaban.

Como unidades de medida de longitudes, los egipcios utilizaban el codo, el pie, la braza, etc. que han seguido usándose hasta tiempos relativamente recientes. Los módulos guardaban relación con la mano y el brazo: con el puño cerrado, con el ancho de la mano y con el codo (la longitud desde el codo hasta el extremo del pulgar).

En cuanto a las medidas totales que otorgaban al cuerpo humano, figura 23, éste de pie medía 18 puños (o cuadrados), o 4 codos, o 24 anchos de mano. La distribución de las medidas de sus partes principales era: de la frente al cuello, 2 cuadrados; del cuello a las rodillas, 10; de las rodillas a la planta, 6, al igual que el ancho de sus hombros (5, en las mujeres). Otras medidas se detallan en el croquis de la figura anterior. En cuanto al canon para la figura sentada, ésta tenía una altura total de 15 cuadrados. Estos modelos apenas cambiaron en las épocas clásicas del Arte Egipcio y sólo en la Baja Época pasó la figura a tener un canon más alargado.

El valor con que el Arte Egipcio dotó a los objetos domésticos cotidianos permitió un extraordinario desarrollo de la cerámica, las artes del vidrio, la orfebrería y la joyería. Todas estas artesanías tal vez también deberían ser consideradas como otras ramas del Arte, sobre todo viendo algunas de las maravillas que elaboraron. Todas ellas se pueden considerar emparentadas con la Escultura, por lo que su estudio puede resultar muy interesante para esta investigación.

Un buen ejemplo es el del vaso expuesto en la figura 24, en la página siguiente. Esta pieza pertenece al tesoro encontrado en la cámara funeraria del faraón Tut Anj Amón (Tutankamon), uno de los hallazgos arqueológicos más importantes del arte egipcio, ya que fue una tumba que se encontró sin haber sido saqueada. Se debe destacar que en el diseño de este vaso se utilizaron figuras geométricas de sólidos espaciales, cilindros, anillos y también las de algunas superficies cóncavas como el hiperboloide y el paraboloide.

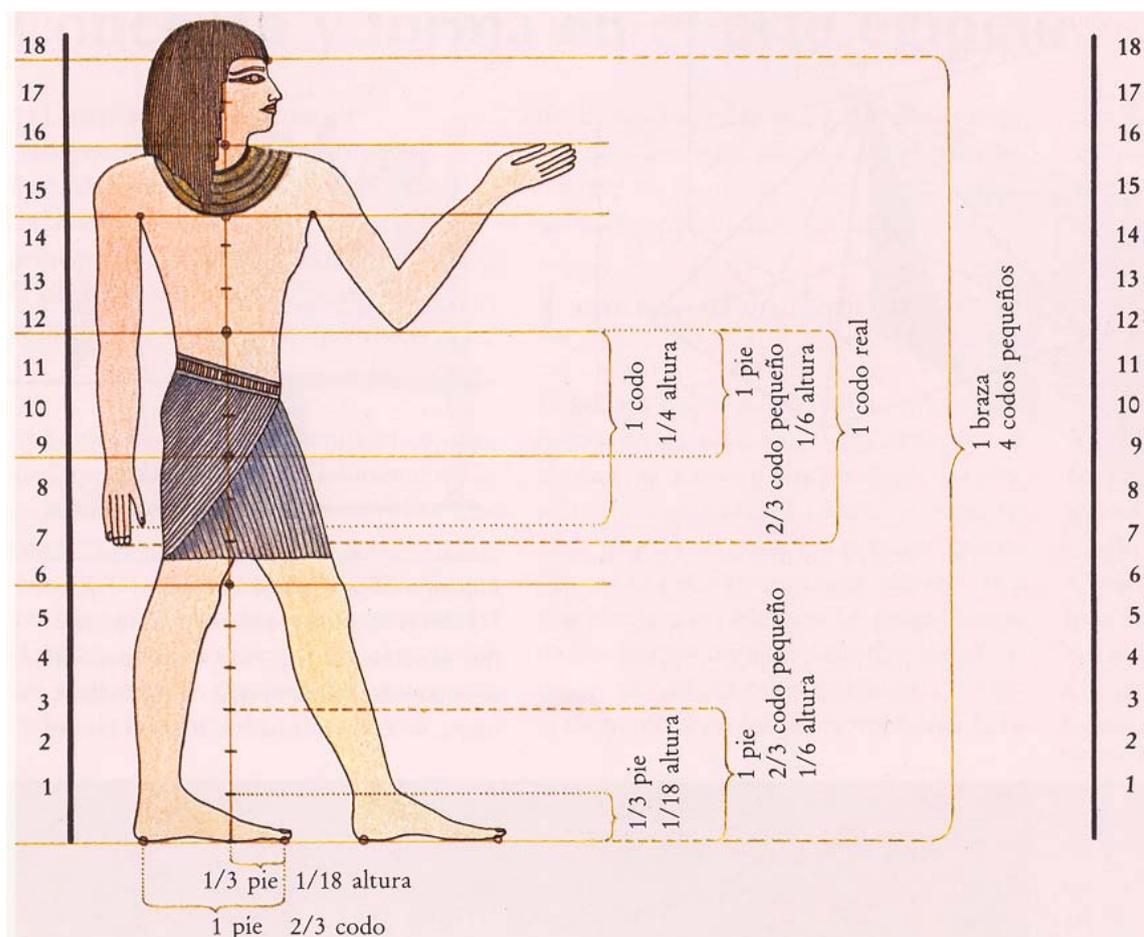


Figura 23 (arriba): Canon Egipcio de las proporciones humanas de Iversen, a partir de un modelo de Lepsius.

También, si observamos la figura 24 que está situada debajo, apreciaremos la utilización en su composición, o en su decoración, de figuras geométricas planas: triángulos, rombos, círculos, arcos y óvalos, etc. Todo esto manifiesta algunas **características que se pueden incluir en el conjunto de relaciones entre las Matemáticas y el Arte**. Todo lo que hemos estudiado respecto del Arte Egipcio, presenta algunas características que a partir de esta civilización se pueden incluir en el estudio de las amplias correlaciones de las Matemáticas y la Escultura en las que se encuadra la investigación de la presente tesis.

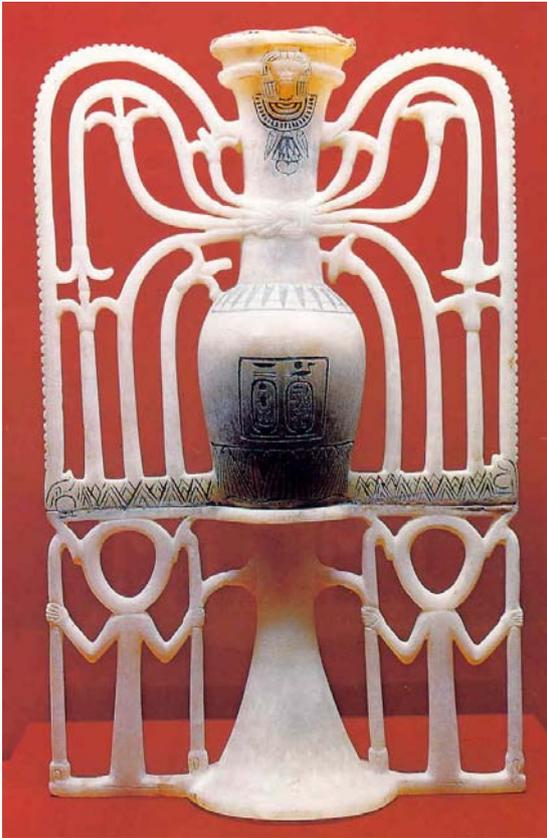


Figura 24: Vaso de ungüentos. Alabastro. Tesoro de Tut Anj Amón. Imperio Nuevo, XVIII dinastía. Museo del Cairo.

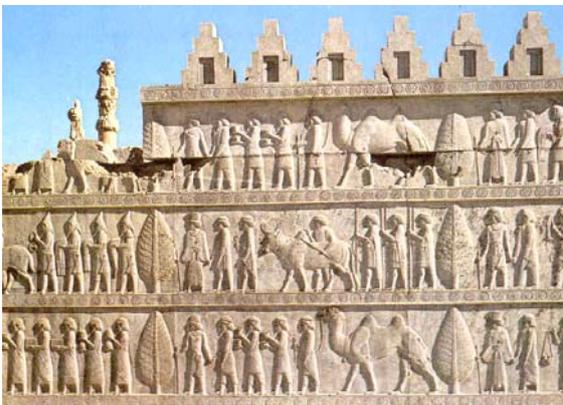


Figura 25: Friso situado en las ruinas de Persépolis, capital del Imperio persa.

Arte Persa

Otra gran civilización de las que han sido llamadas “antiguas” fue la Persa. Este pueblo, situado en un primer momento en un reducido territorio en las proximidades de Oriente Medio, logró formar un gran imperio. Los persas llegaron a alcanzar gran desarrollo en las ciencias en general, y en concreto, **en las Matemáticas y de la Astronomía**. En algunos de sus monumentos se puede apreciar la utilización de estos conocimientos.

En las artes también lograron un gran nivel, comparable incluso al de la civilización griega de la que fue coetánea y adversaria. Especialmente, su Arquitectura y Escultura alcanzaron una gran perfección, lo que nos lleva a resaltar algunas de sus realizaciones, ya que se podrán utilizar para justificar los objetivos de este trabajo de demostrar la gran relación entre las Matemáticas y la Escultura.

La civilización persa ha tenido gran influencia en la nuestra a través de la griega. Posiblemente, en una de las construcciones en que alcanzó mayor perfección fue en la capital imperial de Persépolis. En la figura 25, en la parte inferior del margen, se observa un detalle de un friso situado en las ruinas de esta ciudad. En esta faceta de la Escultura, la de los relieves, los artistas persas fueron unos verdaderos maestros. Además, y lo que es más importante para la tesis, en este conjunto podemos observar algunas de las relaciones matemáticas y geométricas que estudiaremos en este trabajo.

Estudiando este relieve se observa la utilización de diversos motivos geométricos y su repetición mediante traslaciones. Esto es lo que se denominan frisos. Además, en otras obras del arte persa se puede observar que conocían diferentes líneas curvas y ya utilizaban la geometría de algunas figuras espaciales, como los poliedros, etc.

Arte Prehelénico

Cuando a principios del siglo XIX, algunos viajeros europeos muy entusiastas de la cultura clásica trajeron por primera vez ciertas figuras de mármol que les parecieron curiosidades primitivas de sus viajes por el Egeo, nadie, ni siquiera los expertos, se imaginaba que aquellas piezas eran anteriores a las de la Grecia Clásica. Estas esculturas pertenecían a una civilización que floreció en las islas Cícladas, situadas en el Egeo al norte de Creta, entre aproximadamente el 3500 y el 2000 a. J. C. Esta cultura fue también un antecedente de una civilización maravillosa, la Cretense, y tuvo como centro más importante la **isla de Thera**.

Hemos elegido para este estudio dos ejemplos que denotan la gran habilidad creativa de este pueblo, figuras número 26 y 27. Estas dos obras se podrían considerar precursoras de algunas esculturas de artistas actuales. Sobre todo, esto es debido a que lograron una gran esquematización y sencillez en sus obras. En la figura 26, esta esquematización se ha llevado hasta el extremo de realizar muchas de las partes del cuerpo mediante cilindros. También esta escultura, aparece sentada sobre una silla, en la que la estructura de las patas y el respaldo está realizada mediante una forma cilíndrica que va recorriendo una trayectoria curva. Las intersecciones se hallan perfectamente resueltas, lo que demuestra el conocimiento de algunas superficies matemáticas por estos pueblos, cuyo arte se puede considerar precursor del clásico. Las figuras realizadas por esta cultura eran en su mayoría femeninas y con un tamaño desde 5 cm hasta el de un porte casi natural. Algunos investigadores creen que estas esculturas acaso representen una diosa local de los isleños. Un ejemplo de este tipo es el de la fotografía de la figura 27, en la página siguiente.



Figura 26 (arriba): Un arpista. Escultura en mármol. Encontrada en Keros, isla de las Cícladas. Del 2700 al 2500 a. J. C.

La forma de esta pequeña estatuilla de alguna manera nos puede recordar a las impresionantes esculturas de otra cultura muy diferente y muy alejada en el tiempo y en el espacio, la de la isla de Pascua, aunque en este caso, sus esculturas rituales denominadas “Moai” presentan un tamaño descomunal. En la de la figura 27 de la página siguiente, lo mismo que en el resto de esculturas de este tipo, la cabeza y el resto de partes del cuerpo se representaban simplificando su forma al máximo.

En definitiva, en las esculturas de esta civilización ya se aprecia la utilización de algunas **formas geométricas espaciales sencillas**. Además se puede deducir el conocimiento por los pueblos de estas islas de algunas propiedades geométricas, como el paralelismo y las simetrías.

Como los principales antecedentes del arte clásico propiamente dicho, el realizado posteriormente durante el primer milenio antes de nuestra era, se considera el de dos de las civilizaciones del Egeo que llegaron a un mayor esplendor, la cultura minoica en la isla de Creta, entre el 2700 y el 1200 a. J. C. y, la cultura micénica, en la ciudad del mismo nombre, entre el 1580 y el 1100 a. J.C.

La civilización minoica se caracterizó por el dominio en la construcción de grandes palacios como los de Cnosos, Festo, y Malia, cuyo modelo provenía de Oriente. En estos palacios cabe destacar las portentosas **pinturas murales** con que decoraron sus dependencias. En cuanto a **la Escultura** minoica, no se ha encontrado ningún ejemplo de obra escultórica monumental, aunque sí se ha encontrado algunas piezas de pequeñas dimensiones. Ejemplo de esculturas de este tamaño se muestran en las figuras 28 y 29, debajo.

En la primera de estas figuras se puede observar el perfecto acabado del trabajo, lo que nos da idea del apreciable desarrollo de su escultura. En los motivos con los que está decorada, se aprecia el uso de diferentes curvas. En la segunda, figura 29, además de utilizarse en su decoración algunos motivos geométricos, se puede observar la falda realizada a base de simples troncos de cono. **Su cerámica** también se ha de destacar, ya que se decoraba con motivos geométricos sobre todo en su primera época. Este estilo de cerámica se denominó de Camarés por el nombre de la gruta-santuario de su primer hallazgo.



En Grecia continental surgió **la civilización micénica**, cultura que está caracterizada por la herencia artística minoica. Las epopeyas homéricas, principalmente *La Iliada*, nos ofrecen diversa información de esta cultura. Su principal enclave fue la ciudad-fortaleza de Micenas, cuya muralla ciclópea era una impresionante obra arquitectónica. También son de destacar sus palacios. Con respecto a la **Escultura**, en sus tumbas, las cuales se decoraban mediante estelas funerarias, se plantea el problema general que presentaba el relieve de aquella época, el ser muy plano, ya que se obtiene rodeando las imágenes y rebajando el fondo, de modo que se trata más de dibujo que de escultura. Por otro lado, el único ejemplar conocido de obra escultórica de esta cultura de grandes dimensiones es el tímpano de encima de la puerta de los leones en la ciudad de Micenas.

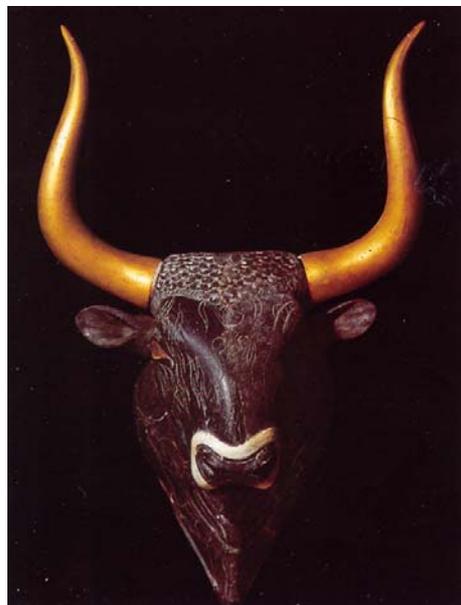


Figura 27 (izquierda): Figura humana estilizada. Mármol. Procedente de las Islas Cícladas del 2700 al 2500 a.J.C.

Figura 28: Cabeza (Ritón) de toro datado en el Minoico reciente; siglo XVI a. J. C. Esteatita negra y madera dorada. Museo de Candia, Creta.

Figura 29: Diosa de las serpientes. Minoico reciente; hacia 1600 a. J. C. Loza; altura 29,5 cm. Procedente de Cnosos. Museo de Candia, Creta.

3.3 Antecedentes en el Arte Clásico

Como hemos comentado anteriormente, las civilizaciones egipcia y las mesopotámicas iniciaron las Matemáticas. Sin embargo, **la verdadera creación de las Matemáticas con entidad de ciencia no se produce hasta su desarrollo en la cultura griega**. Entre sus aportaciones más sobresalientes y que permiten darle esta entidad, están la noción de prueba y la iniciación de una estructura axiomática. También descubrieron algunos de los grandes problemas, entre ellos los referentes a la inconmensurabilidad y al infinito. Además, lograron avances en aspectos tales como la teoría de las proporciones y la cuadratura de las figuras curvilíneas. Ver referencia [9].

En cuanto a la Geometría, su mismo nombre deriva del griego y literalmente significa “medida de la tierra”, fueron los griegos los que transformaron el sistema de mediciones prácticas de los egipcios y mesopotámicos en un sistema lógicamente ordenado, y substituyeron el enfoque empírico por uno deductivo. Aunque serán conocidos recordaremos brevemente algunos datos de sus principales matemáticos. **Pitágoras** (aprox. 580-496 a. J. C.), al que se atribuye el famoso teorema, considerado como uno de los teoremas más importantes de la Geometría plana y de la Trigonometría. **Euclides** (aprox. 365-300 a. J. C. libro 280 a. J. C.), que en sus *Elementos* (aprox. 280 a. J. C.), recopiló y ordenó en un sistema axiomático todas las reglas geométricas conocidas en su tiempo. **Apolonio de Pérgamo** (aprox. 230 a. J. C.), que desarrollo y unificó todos los trabajos anteriores sobre secciones cónicas, y dedujo todas estas curvas a partir de las secciones de un cono doble circular. Por último, destacar a **Arquímedes** (287-212 a. J. C.) que además de establecer su famoso principio, fue el precursor del cálculo integral. Su gran innovación consistió en establecer un tratamiento riguroso de las áreas y volúmenes limitados por líneas y por superficies curvas, basándose en el método de eliminaciones sucesivas, atribuido a un matemático no tan conocido, Eudoxio de Cnido (400-347 a. J. C.). Hay una breve reseña de ellos en la anterior referencia [9].

También comentaremos brevemente las escuelas matemáticas griegas, y lo que importa para esta investigación, su relación con el Arte. Según la referencia [10], se pueden clasificar en:

- **Tradición Vitruviana.** Se les ha llamado matemáticos “artesanos o aplicados”. Es la escuela más antigua. *El trabajo de Vitruvio*, es el único documento que ha sobrevivido. Influyó muy acusadamente en el Arte.
- **Escuela Pitagórica.** Matemáticos “sincréticos”. Es de una filosofía intermedia entre las otras dos. Está rodeada lo mismo que su fundador de un halo de misterio y de numerosas leyendas.
- **Tradición Euclideana.** Matemáticos “abstractos”. Es la última escuela que apareció, siendo su más importante libro *Los Elementos* de Euclides.

Arte Griego



Figura 30 (arriba): Fachada del Partenón. Acrópolis, Atenas. Hacia el 447-438 a. J. C.

El ideal de belleza de los griegos estaba impregnado de dos conceptos, los de armonía y proporción. La palabra “cosmos”, que de acuerdo con la tradición se le atribuye a Pitágoras, significa “orden” y este orden era percibido como armonía. Un ejemplo típico es el Partenón, figura número 30. Es también un testigo evidente del uso de las matemáticas en el arte griego. Por ejemplo, sus columnas están dispuestas ligeramente inclinadas hacia adentro para corregir ilusiones ópticas, con el diámetro levemente ampliado en su parte central, y emplazando en los ángulos otras columnas más gruesas.

El concepto de proporción es vital en la estética griega. Los matemáticos griegos dieron la conocida definición: “La razón de dos segmentos es el cociente de sus longitudes”. Según Euclides, proporción es la igualdad de dos razones. **La proporción influyó muy notablemente en la representación de la figura humana.** La escala propuesta por los vitruvianos tomaba como unidad base la altura del hombre, refiriendo las partes del cuerpo como submúltiplos. Este sistema fue llamado armónico. Ver referencia [10]. Evidentemente, con todo lo anterior se puede apreciar la relación tan acusada del arte griego con las Matemáticas.

Anteriormente se ha comentado el Arte de algunas de las civilizaciones precursoras de las clásicas: las de las islas del Egeo, la cretense y la micénica. A continuación se hará un breve resumen del arte griego y en particular de su escultura, faceta del arte que es el objetivo principal de análisis. A partir del siglo XII a. J. C. en el que se produce la destrucción de la ciudad de Micenas, fechada aproximadamente hacia el año 1150 ó el 1100 a. J. C., se desarrolla la primera formulación del arte griego, propiamente dicho, la llamada **Edad Oscura** que se extiende a lo largo del siglo VIII a. J. C. Se la ha denominado así, a causa de la falta de información de fuentes históricas de esta época. El arte elaborado en este periodo siguió influido profundamente por el de las civilizaciones cretense y sobre todo por el de la micénica. Los expertos en arte han dividido esta época, que corresponde a la edad del hierro en Grecia, en los dos periodos siguientes:

- **Protogeométrico**, hacia 1075-950 a. J. C.
- **Geométrico**, hacia 950-725 a. J. C.

Durante este largo período que se inicia con la llegada de los pueblos dorios a Grecia, la Arquitectura y la Escultura no destacan por sus creaciones. En cambio, puede seguirse la evolución artística de esta época a través del estudio de la cerámica. Aunque la clasificación anterior está basada en las características de la cerámica principalmente, se puede utilizar para apoyar nuestro objetivo, de que también es posible estructurar la Escultura de acuerdo a conceptos matemáticos.



Figura 31: Ánfora funeraria del Dipilón. Periodo Geométrico; siglo VIII a. J. C. Terracota barnizada. Altura 1,55 m. Museo Arqueológico Nacional de Atenas.

El estilo Protogeométrico aparece como una evolución lógica de las últimas formas micénicas, además de resultar una consecuencia de los fuertes contactos con el arte geométrico oriental. Durante la última fase del arte micénico el repertorio decorativo ya se había estilizado y esquematizado, haciéndose abstracto y lineal lo que se mantiene en el estilo Protogeométrico. Los motivos de origen naturalista se habían “desorganizado y descompuesto” en imágenes ornamentales formadas por volutas, líneas rectas y curvas y en esquemas geométricos abstractos. La transformación de las imágenes naturalistas es una novedad estilística.

El Geométrico. En este período se produjeron transformaciones radicales en la policromía y en la decoración. Rombos, meandros, triángulos, círculos y ruedas, rosetas geométricas, etc., recubren las diferentes partes de la pieza cerámica. Un ejemplo muy valioso de este periodo es el ánfora funeraria de Dipilón, realizada en terracota barnizada y llamada así por la necrópolis situada a las puertas de Atenas, donde fue encontrada. Esta pieza se expone en las figuras números 31 (al lado), 32 y 33 (página siguiente). En esta última, se muestra un estudio gráfico que resulta muy interesante y que nos presenta las múltiples relaciones geométricas que se han podido deducir de su forma.

El periodo de formación del arte griego se produjo entre los finales de los siglos VIII y VII a. J. C. Sus principales aportaciones fueron la eclosión de la cerámica decorativa y la aparición de las principales tipologías arquitectónicas y escultóricas. En el siglo VI a. J. C. se inicia una fase de gran prosperidad política y económica, que en el arte griego se ha llamado **periodo Arcaico**. En Arquitectura el uso de la columna como elemento constructivo permitió el auge de los dos grandes órdenes clásicos: el dórico y el jónico. El siglo V a. J. C. significó para la cultura griega el momento de máximo esplendor, lo que también sucedió en su Arte.

Durante el tercer cuarto de este siglo V aparece en Grecia **el clasicismo propiamente dicho**. A partir del año 450 a. J. C. las tendencias arquitectónicas se vuelven más ornamentales, a pesar de mantener la fidelidad al orden Dórico, y posteriormente aparece el orden Corintio. En la figura 34, en la siguiente página, se muestran sus características principales. Ésta se ha extraído del facsímil de un libro del siglo XVIII, referencia [11]. Los esquemas de las columnas, bases, capiteles, etc., incluidos en esta interesante imagen, demuestran la evidente importancia de las Matemáticas en la arquitectura clásica. Por otro lado, también se pueden considerar estas partes de un monumento como auténticas obras escultóricas, por lo que también avalarían la utilización de las Matemáticas en la Escultura clásica.

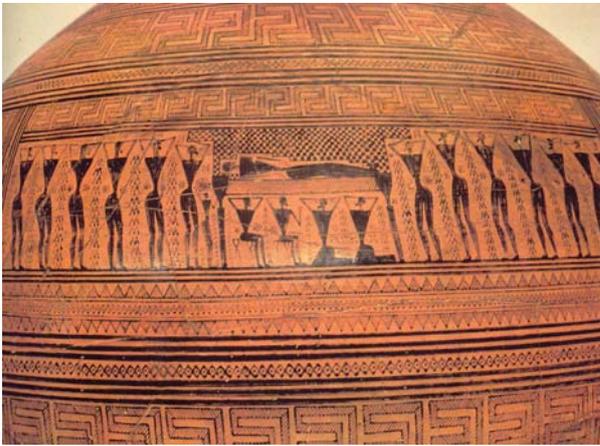
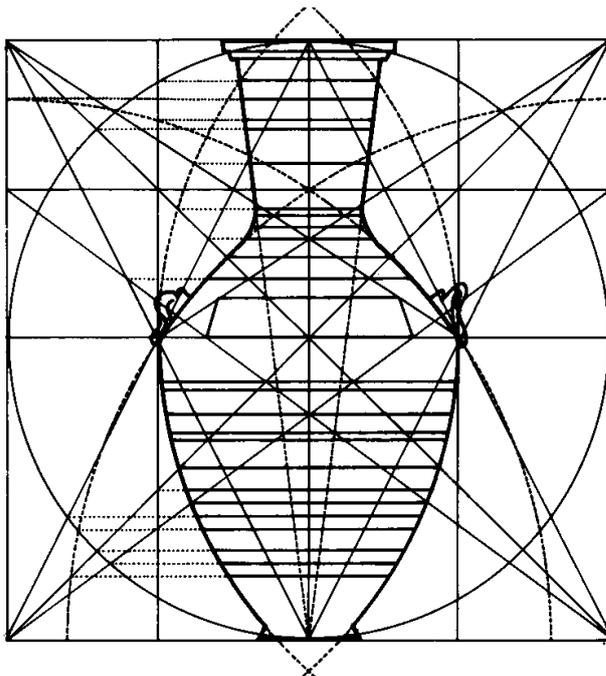


Figura 32: Ánfora funeraria del Dipilón. Detalle correspondiente a la figura anterior.



En la Escultura, la representación del cuerpo humano idealizado constituye la base del canon clásico y es una de las aportaciones fundamentales de la cultura helénica a la civilización occidental. A esta época clásica pertenecen dos escultores fundamentales y que puede que sean los más conocidos del arte de Grecia, **Fidias y Policleto**. A éstos también se podría añadir a Praxíteles y Lisipo. Estos dos últimos pertenecen al siglo siguiente.

El modelo de Policleto del canon clásico establece las proporciones ideales que proporcionan al cuerpo perfección. Básicamente se realizaba integrando seis veces la altura de la cabeza en la altura total. En el siglo IV a. J. C. **Lisipo renovó este modelo** alargando las proporciones del cuerpo humano. Estos cánones griegos han sido referencia en todo el arte occidental a lo largo de la historia, e insistimos en que demuestran las relaciones tan acusadas que existían entre el Arte y las Matemáticas. Sin embargo en la escultura griega, y dada la preferencia de los motivos “humanos y divinos” como tema casi exclusivo en sus períodos de mayor esplendor, resulta difícil encontrar ejemplos de obras a las que se pueda atribuir una concepción que sea puramente geométrica o matemática. Ello sucede en general en toda la escultura de origen clásico.

Figura 33 (izquierda): Ánfora funeraria del Dipilón. Esquema de sus relaciones geométricas.

En las figuras 35 y 36, situadas en la siguiente página, se puede observar uno de estos pocos ejemplos de obras de concepción casi puramente geométrica que hemos encontrado. Es el monumento de las tres serpientes el cual representaba las figuras de tres de estos animales, y estaba basado en unas espirales entrelazadas para describir el cuerpo de estos reptiles. Éste fue erigido para conmemorar la victoria griega sobre los persas en la batalla de Platea. En la primera de las fotografías, la figura 35 se muestra en detalle este monumento de las tres serpientes, mientras que en la segunda se presenta un dibujo de un manuscrito turco, que nos ha servido para describir el monumento original.

La cultura helenística significó el último y uno de los más brillantes períodos en los que se ha clasificado la cultura griega. Cronológicamente, se halla situado entre la muerte de Alejandro Magno (323 a. J. C.) y las sucesivas anexiones llevadas a cabo por el Imperio Romano, las cuales culminaron con la conquista de Egipto en el último tercio del siglo I a. J. C. El helenístico fue un periodo artístico muy fértil, especialmente en lo que se refiere a la Arquitectura y a la Escultura. Esta civilización “se disolvió” debido a la pujanza del Imperio Romano, aunque sería mejor decir que ambas culturas “se fusionaron”.

En la figura 37 de la siguiente página se puede observar el relieve titulado, “La Caza de la Pantera”, perteneciente al Sarcófago de **Alejandro Magno** y procedente de su necrópolis real de Sidón en Fenicia (Libano). En el marco con el que se le rodea, sí que se puede ver la utilización de motivos geométricos, lo que se podría considerar una importante aplicación de la Geometría, como complemento en la escultura. Esto va a ser bastante general en muchos relieves y en otras partes de algunas obras escultóricas clásicas, como pueden ser las peanas.

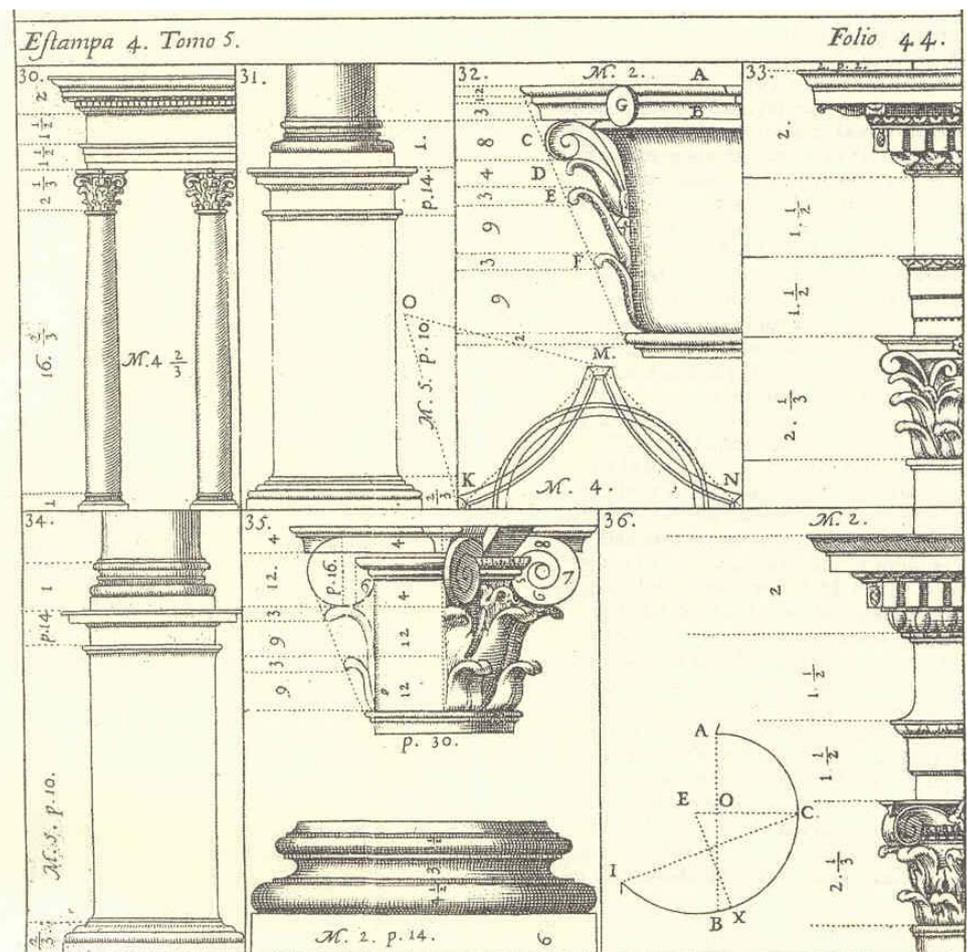


Figura 34: Estilo Corintio en estampa 4, del tomo 5, folio 44 del libro, “Tratado XIV de la Arquitectura Civil”, incluido en el “Compendio Matemático III” de Thomas Vicente Tosca. Madrid, 1727.

Arte Romano



El arte romano supone la culminación del proceso evolutivo de las culturas mediterráneas. En la cultura y arte romano, además de la civilización helenística, su principal fuente, hay que tener en cuenta la incorporación de múltiples elementos de las más diversas culturas de todo el Mediterráneo y en general de su inmenso imperio. Hay que suponer a Roma como una ciudad a la que afluía gran cantidad de obras artísticas de todo el orbe conocido, lo que provocó que **el eclecticismo fuera una característica fundamental del arte romano.**

Para la cultura romana resultó muy importante la influencia de la **civilización etrusca**, surgida a finales del siglo IIIIV a. J. C. en Toscana y que tuvo su período de expansión hasta el siglo V a. J. C. A partir de entonces y debido al comienzo de la expansión del territorio romano su cultura fue “absorbida”. No voy a extenderme en la descripción del arte romano, ya que la mayoría de lo expuesto anteriormente para el griego, también se le puede aplicar. Puede ser interesante comentar que en **la escultura romana es realmente muy clara la influencia helénica.** De hecho, en bastantes casos sus esculturas resultan ser una copia exacta de un original griego.

Como ya se ha comentado, de igual forma que en el arte griego, y dada la preferencia casi absoluta por los motivos figurativos en esta escultura, resulta difícil encontrar ejemplos de obras escultóricas a las cuales se les pueda atribuir una concepción puramente geométrica o matemática.



Figura 35 (izquierda arriba): Detalle del monumento de las Tres Serpientes. Bronce. Siglo V a J. C. Estambul.

Figura 36 (izquierda centro) Monumento de las Tres Serpientes, según se muestra en un manuscrito turco.

Figura 37 (derecha): Sarcófago de Alejandro: “Caza de la Pantera”. Hacia 310 a. J. C. Mármol policromado; 1,95 x 3,18 m. Procede de la necrópolis real de Sidón, Fenicia (Libano). Museo Arqueológico de Estambul.



Sin embargo, sí que se puede observar en algunas obras artísticas propiedades geométricas. En la figura número 38 mostramos la “Columna Trajana”, en la que se describe de una forma sucesiva las dos campañas militares organizadas por este emperador, disponiendo los relieves en forma de helicoidal. Esto significa la utilización de una figura claramente geométrica, para dar idea secuencial de la evolución temporal.

Dos ejemplos muy significativos, de otras dos ramas del arte en las que también se aprecia una gran influencia matemática son los siguientes. En la figura 39 se observa el Panteón llamado de Adriano, aunque este emperador sólo reconstruyó este templo que originalmente había sido erigido por Agripa. Este monumento es característico y resulta realmente majestuoso, ya que dispone de la cúpula de mayor diámetro de todas las que se construyeron en la antigüedad. Además posee otras características geométricas, por ejemplo su cúpula es una semiesfera perfecta y el resto del edificio, un cilindro de altura equivalente al radio de la esfera. Ya es sabido el gran desarrollo de **la Arquitectura y la Ingeniería romana**, lo que les permitió la realización de obras que como ésta han perdurado a través de los siglos. En definitiva, el panteón es un claro ejemplo arquitectónico de la necesidad de dominar las matemáticas.

Los artesanos romanos fueron verdaderos maestros en el diseño y en la elaboración de **mosaicos**, aspecto artístico que estuvo muy presente en sus edificios, según se puede observar en la mayoría de los restos arquitectónicos que se conservan. En la figura 40 se puede observar un mosaico romano procedente del norte de África, zona en la que han aparecido numerosos restos de ruinas romanas.



Figura 38 (izquierda arriba): “Columna Trajana”. 110-113 d. J. C. Mármol; 39,61 de altura y 3,83 m de diámetro. Foro de Trajano, Roma.

Figura 39 (izquierda debajo): “Panteón”, vista interior. Hacia 118-128 d. J. C. Diámetro de la cúpula 43,30 m. Roma.

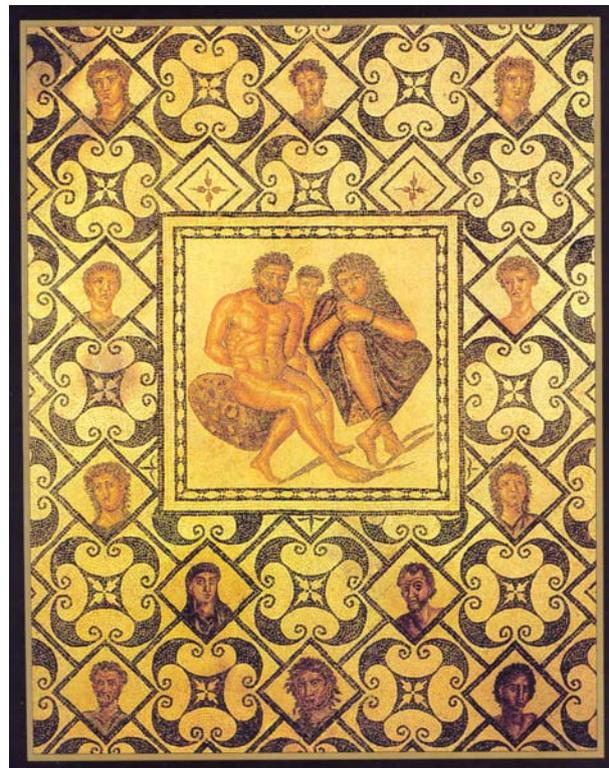


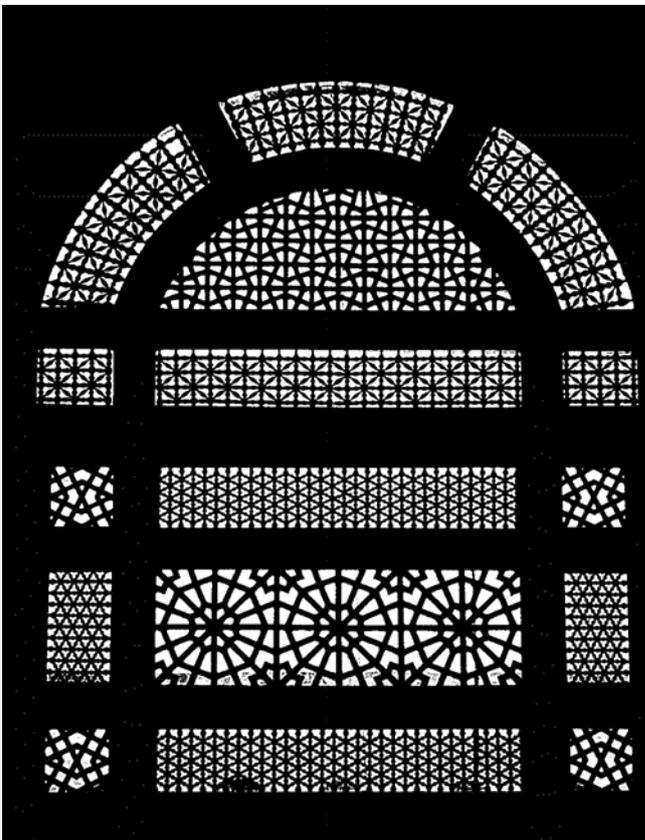
Figura 40: Mosaico romano procedente del norte de África. En su centro se sitúa un motivo en el que se representa a prisioneros bereberes encadenados.

3.4 Antecedentes en el Arte Islámico

La civilización islámica ha sido muy importante para el desarrollo de la cultura cristiana occidental, especialmente para la española, y también para el Arte en general. Además, adquiere una gran significación a la hora de la realización de esta tesis, debido al acusado contenido matemático de su Arte. Con respecto al tema, se pueden mencionar las palabras de Salma Marani en una ponencia sobre arte islámico: “En el mundo islámico entre los siglos X y XIII, se creó un tipo de arte en él que se integraba motivos geométricos, caligrafía e iluminación. Estos motivos fueron creados por artistas que trabajaron en colaboración con matemáticos”. La investigación en “**Arte Matemático**”, o más aun en las profundas relaciones del Arte y las Matemáticas, encuentra uno de sus mejores campos en el arte musulmán. Ver al respecto la referencia [12].

Con respecto al gran desarrollo que experimentaron las matemáticas con los árabes, hay que tener en cuenta que éstos entre el siglo VIII y el Renacimiento fueron los principales depositarios de los conocimientos griegos. Además de adoptar el sistema de numeración Hindú, que da un valor relativo a las cifras según su posición, realizaron aportaciones propias al Álgebra, a la teoría de las paralelas y a la trigonometría esférica. Análogamente a lo ocurrido en otras civilizaciones, el fin principal de sus matemáticos era tratar de resolver problemas astronómicos y del calendario.

En Siria precisamente se construye la gran mezquita de los Omeyas, una de cuyas celosías se muestra en la figura 41 de la página anterior. Ésta, lo mismo que otras celosías árabes se pueden considerar auténticas obras escultóricas. En esta celosía se aprecia, además de un diseño realizado exclusivamente con diversas figuras geométricas, la utilización de varios de los conceptos que trataremos en este trabajo, como pueden ser la repetición, la simetría, etc. Esta imagen anterior de este detalle de una mezquita, demuestra el excelente trabajo de tipo geométrico que realizaron los artistas musulmanes en estos monumentos.



El Alminar de la figura 42 que se muestra en la página siguiente, pertenece a la mezquita de Samara, y recuerda a un zigurat de la época babilónica. Éste es un claro ejemplo de monumento islámico, nítidamente concebido de forma muy matemática. Es una rampa helicoidal que asciende, acercándose de una manera regular hacia la pequeña cúpula que se halla situada en su cima.

En todos los monumentos de la arquitectura islámica se nota la importantísima influencia de la Geometría. El papel del geómetra en la arquitectura musulmana, no sólo era decisivo para que los muros de las edificaciones se convirtiesen en reflexiones metafísicas o religiosas, se exigía su presencia a la hora de proyectar los edificios.

Figura 41: Celosía de la gran mezquita de los Omeyas (709-715). Damasco, Siria.

En estos términos se expresaba el historiador Ibn Jaldun, del 1332 al 1406, al referirse a la construcción de una obra arquitectónica: “Se requiere un conocimiento general o especializado de la proporción y de la medida para llevar las formas de las cosas de la potencialidad a la realidad de una manera conveniente. Para conocer estas proporciones hay que recurrir al geómetra”.

El diseño de las bóvedas islámicas es otra prueba bastante concluyente de la fortísima relación con la geometría del arte islámico. Un ejemplo es la figura 43. Otro ejemplo notable es el diseño de las bóvedas de la mezquita del Cristo de la Luz en Toledo. Dibujos de la figura 45 situada en la página siguiente. Como se puede apreciar estas bóvedas presentan una gran variación en la elección de sus motivos geométricos.

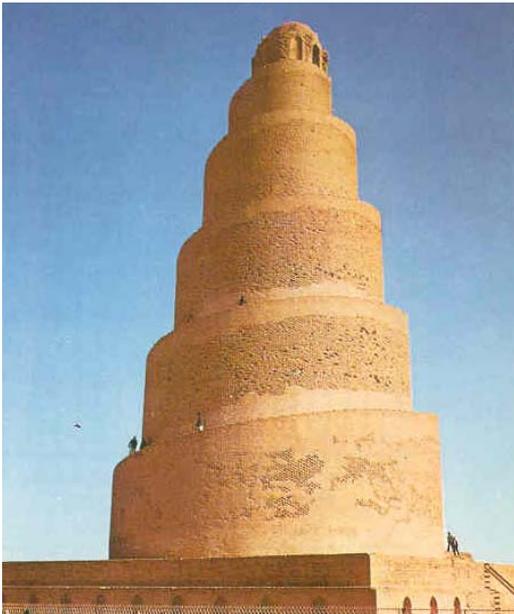
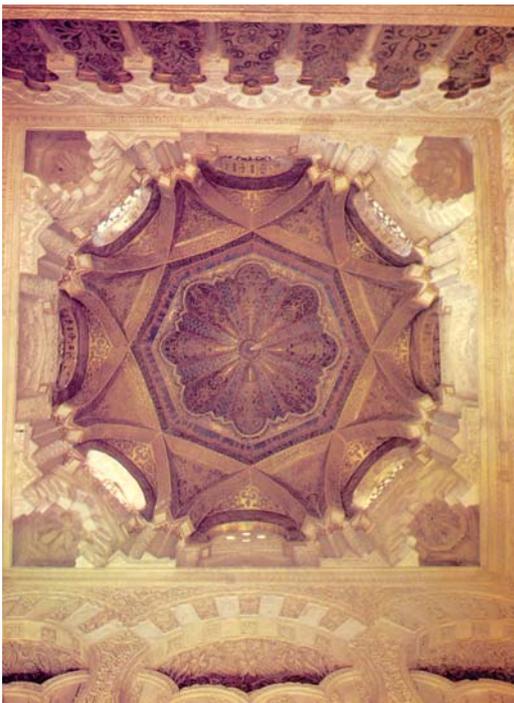


Figura 42 (arriba): Alminar de la mezquita de Samara. Hacia la mitad del siglo IX. Bagdad, Irak.



La primera etapa del arte islámico, la correspondiente a nuestra Edad Media, finaliza con la presencia de los turcos, cuya historia y arte resultan sumamente interesantes, pero que no nos detendremos a estudiar debido a la concisión requerida, y porque le resulta aplicable casi todo lo que expondremos del arte islámico en general.

Ya hemos comentado la importantísima influencia de la cultura y del arte musulmán en España y especialmente en el sur. Sabido es que en nuestro país, se encuentran dos de los mejores monumentos musulmanes existentes y que han sido más estudiados, tanto en su faceta artística, como en cuanto al aspecto de los numerosos conceptos matemáticos que aparecen en casi todos sus diseños, la Mezquita de Córdoba y sobre todo la Alhambra de Granada.

La fabulosa mezquita de Córdoba fue comenzada en el año 785 por Adderranan I y fue concluida más de dos siglos después por el conocido Almanzor. En la figura 43, situada en la página anterior, se veía una vista general de la cúpula del mirhab, que está considerada como la más bella obra de mosaico musulmán en España. En la siguiente figura, la número 44, se exponen tres dibujos esquemáticos. Uno de su cúpula, otro de las arcadas superpuestas y otro de las arcadas entrelazadas. Todos demuestran la concepción geométrica de esta obra.

El otro monumento fundamental del arte islámico en España, es la renombrada **Alhambra** de Granada, la cual ha sido objeto de infinidad de estudios, acerca de sus muy numerosas y fuertes relaciones con las Matemáticas. También ha sido y sigue siendo fuente de inspiración de multitud de artistas.

Figura 43 (izquierda): Cúpula del mirhab de la Mezquita de Córdoba. Decoración con mosaicos.

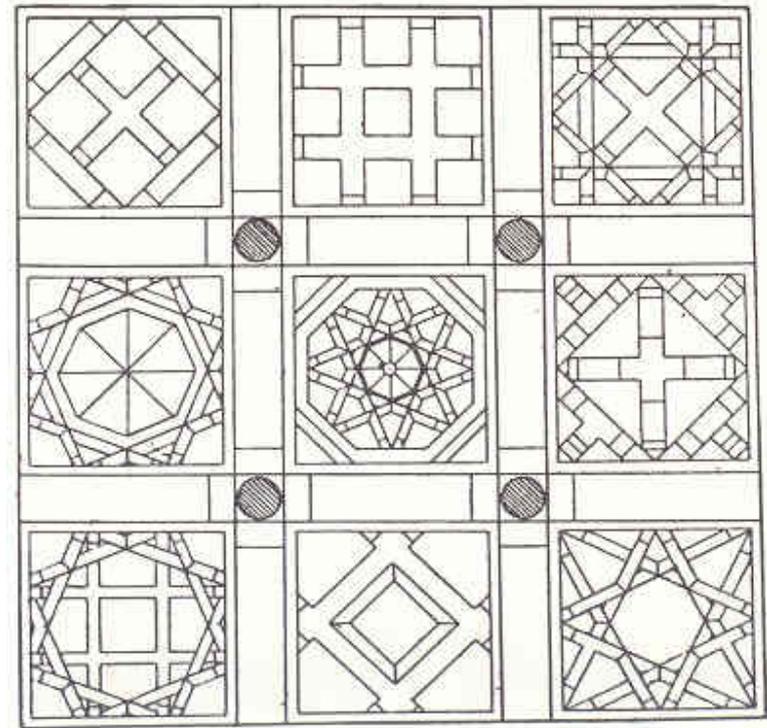
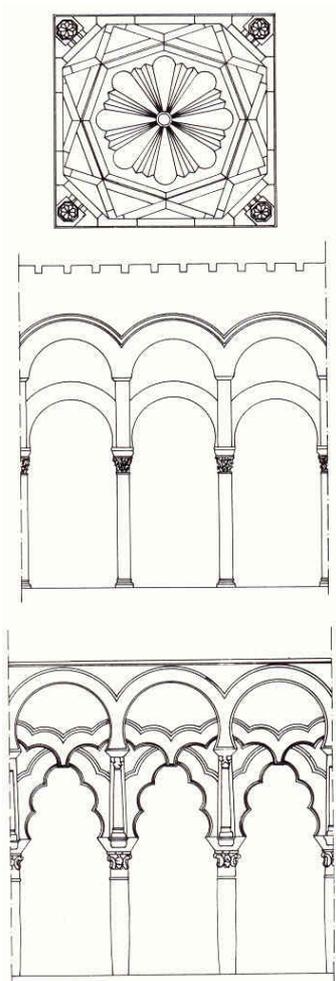


Figura 44 (izquierda arriba): Dibujos del mirhab. Mezquita de Córdoba.

Figura 45 (arriba): Dibujo de bóvedas de la mezquita del Cristo de la Luz (999 d. C. J.). Toledo.

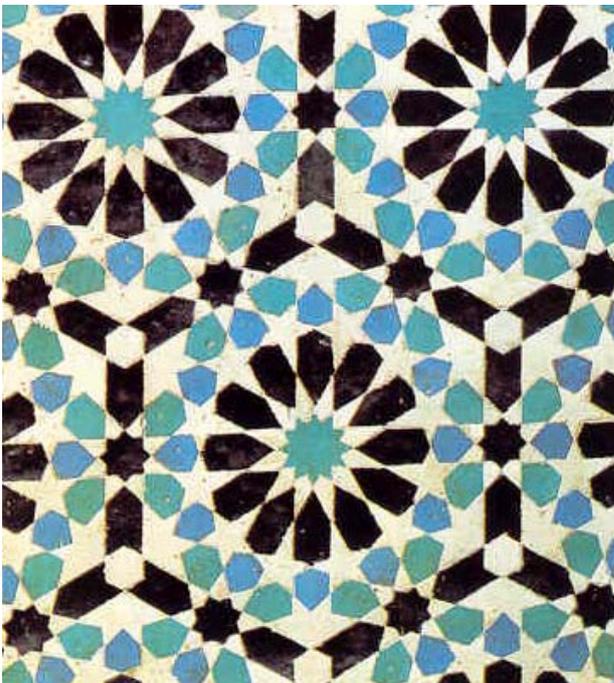
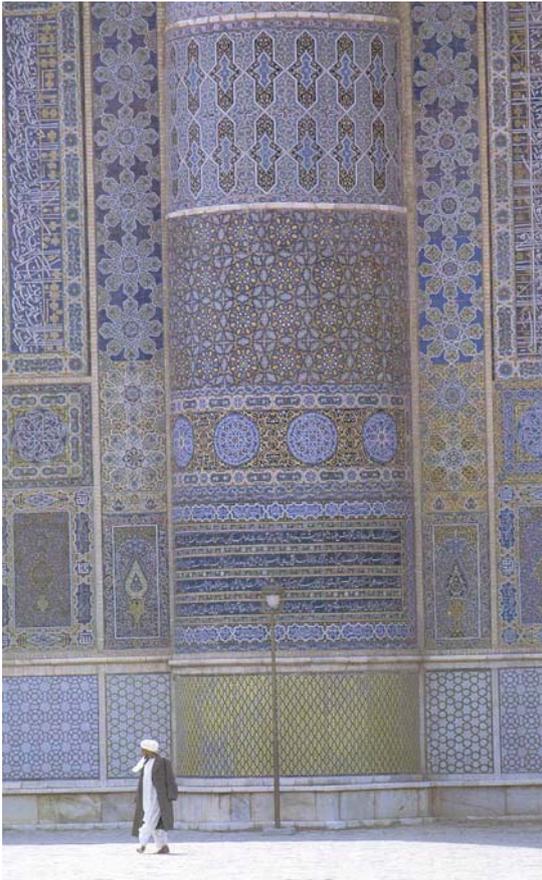


Figura 46 (debajo): Panel de azulejos con motivos geométricos. Siglo XIII. Cuarto real de Santo Domingo, Alhambra, Granada.

Un artista genial fuertemente influenciado por este arte es el arquitecto **Antonio Gaudí**. Ello está documentado en la excelente ponencia de **Claudi Alsina y Rafael Pérez**, referencia [13]. Muchas de las edificaciones de este artista se podrían considerar auténticas esculturas matemáticas, incluso, si sólo se considera alguna de sus partes por separado, como sería el caso de algunas de sus cúpulas.

Dentro del arte islámico, otra de las manifestaciones artísticas, en la que es evidente su concepción geométrica, es la confección de azulejos. El estudio de **sus maravillosas composiciones** ha permitido el desarrollo de las teorías acerca de cómo rellenar el plano con diferentes motivos geométricos, esto es el de los tipos de mosaicos posibles. Incluimos dos ejemplos. En la figura 46, a la izquierda vemos un detalle de un conocido mosaico situado en España.



En la figura 47, la fotografía situada al lado izquierdo, mostramos una impresionante fachada decorada con azulejos con una gran profusión de motivos geométricos. Se halla en una mezquita de Afganistán. La situación de esta construcción nos sirve para recordar la gran extensión geográfica de la civilización islámica y por tanto de un arte como éste de una evidente concepción geométrica.

En cuanto a la **escultura islámica**, son realmente muy escasas sus manifestaciones, motivado ello por las características consignas de la religión musulmana. Tampoco hemos encontrado ninguna obra escultórica islámica de concepción matemática. Entre sus pocas obras destacan las situadas en España, como los leones del patio de ese mismo nombre en la maravillosa Alhambra de Granada y las pilas de piedra de Sevilla y las de Marraquesh, en este caso en Maruecos.

Figura 47 (derecha): Exterior decorado con azulejos con motivos geométricos muy diversos. Siglos XV-XVI. Mezquita Aljama, Harat, Afganistan.

3.5 Antecedentes en el Arte de Otras Civilizaciones

En esta tesis, por la concisión requerida, solamente vamos a incluir algunos ejemplos de obras de estas otras civilizaciones, a veces llamadas “**lejanas culturales**”, pero cuya influencia en el arte actual no es tan lejana. También estudiaremos de forma muy breve algunas de estas civilizaciones, bien las que consideramos más importantes por su arte en sí mismo, o bien las de aquellos pueblos en las que hemos encontrado antecedentes muy claros de la importancia, en general, de la Geometría o de las Matemáticas en la concepción de su arte.

En este apartado no vamos a seguir un orden cronológico, dada la gran diversidad de manifestaciones que englobamos en él, y que corresponden a periodos históricos situados, desde varios milenios antes de Jesucristo, en los casos del arte asiático oriental y el prehispánico, a épocas muy recientes, en él de algunos pueblos africanos o en él de algunas islas de la Polinesia.

Además de estudiar las civilizaciones del continente europeo se debe estudiar las de otros continentes, fundamentalmente creemos que dos, el asiático y el americano. Estos han albergado civilizaciones que llegaron a alcanzar un desarrollo cultural muy elevado, incluso superior al de nuestra civilización o al de las que fueron origen de la nuestra, como las que se desarrollaron en Oriente Medio, en determinadas épocas. Entre las culturas cuyo arte ha llegado a alcanzar un mayor desarrollo, se encuentran las del continente asiático como la China, la Hindú, la Japonesa y algunas de las culturas de Indochina e Indonesia. También tiene como origen este continente la civilización Árabe e islámica en general, pero dada la gran importancia de su arte a la hora de la realización de este trabajo, debido a su fuerte influencia matemática ha sido ya tratado en el apartado específico, inmediatamente anterior.

Arte Chino y Japonés

La milenaria China es un ejemplo de una civilización que ha llegado a un desarrollo cultural muy elevado, incluso en algunas épocas muy superior al de nuestra civilización. Una buena muestra de su arte, es la figura número 48 situada debajo. En este caso es una pieza de orfebrería, aunque puede ser considerada una auténtica obra escultórica. Esta idea es genérica y se puede aplicar a muchas obras artísticas, o incluso a algunos trabajos artesanales que aunque no se puedan considerar estrictamente esculturas, sí que se les pueden atribuir características propias de esta naturaleza.

El exterior de esta pieza la figura 48, también está totalmente decorado mediante figuras geométricas. Además tiene interés desde un punto de vista matemático la forma que presenta, la de una superficie cuádrada, el hiperboloide circular de una cara. Como posteriormente veremos este tipo de superficies matemáticas y otras muchas son muy utilizadas en la escultura actual. En la figura 49 se muestra otro caso de obra artística china, en cuya decoración se ha logrado un maravilloso efecto geométrico. En ella se utilizan conceptos como la simetría, con respecto a planos para la forma del vaso, o los motivos geométricos utilizados en su decoración.



Figura 48 (izquierda): Copa Gu. Hacia el año 1300 a. J. C. Bronce. Perteneciente a la cultura Shan. China.

El arte japonés, aunque con rasgos relativamente similares a los del resto de las culturas de Extremo Oriente, presenta una evolución característica hacia concepciones propias. Hasta en el arte de una civilización con una historia tan diferente a la nuestra y que no proviene de la cultura clásica, es posible encontrar relaciones con las Matemáticas.

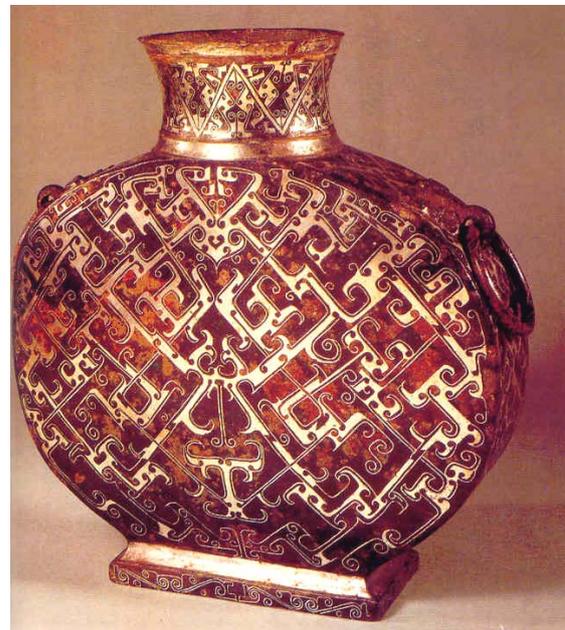


Figura 49: Vaso tipo "Pieng Hu". Hacia los siglos V-III a. J. C. Bronce con incrustaciones de cuprita y malaquita. Altura 31 cm. Perteneciente al arte de los reinos combatientes de China. Museo Smithsonian Institución de Washington.

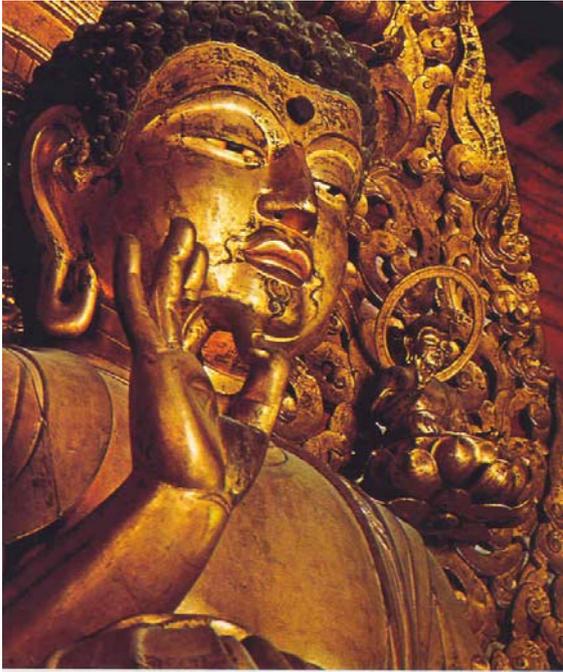
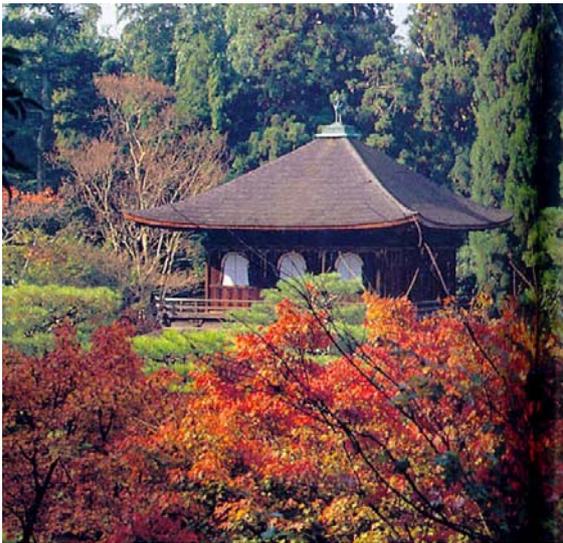


Figura 50 (arriba): Cabeza del buda “Amida Nyorai”. Siglo IX d. J. C. Madera lacada y dorada. Templo de Toji, Kyoto. Japón.



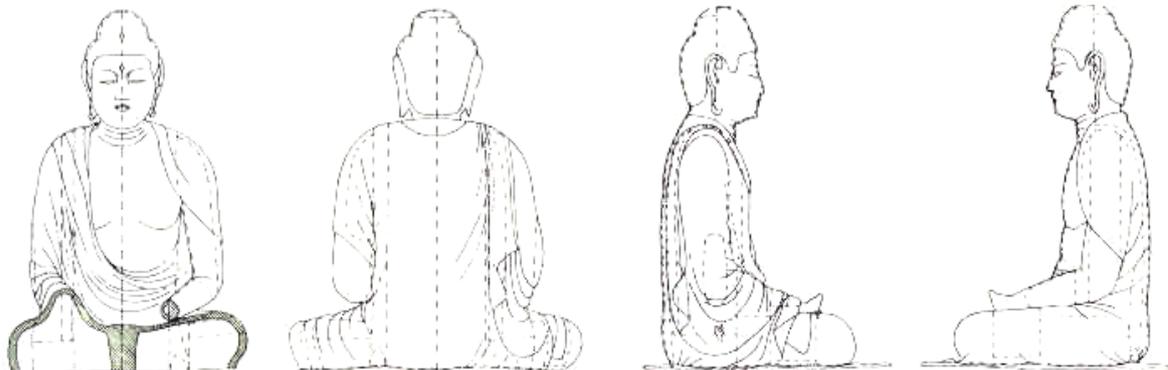
Un caso que demuestra la existencia de estas relaciones es el **Ken japonés**. Este diseño tradicional japonés de viviendas se basa en dos principios fundamentales: la existencia de un módulo rectangular que por repetición genera el espacio habitable y, la adopción de una medida (el Ken), para dicho módulo basada en la dimensionalidad humana. Éste es un diseño “modular” de singular simplicidad y belleza. En la figura número 51, situada debajo a la izquierda, presentamos un ejemplo de una pequeña construcción, una sencilla casita realizada con este diseño.

En cuanto a la escultura tradicional japonesa, vamos a escoger un ejemplo de uno de los temas más seguidos en el arte de esta parte del mundo, la representación de Buda. La obra escultórica que presentamos a estudio es la de figura 50. En esta imagen se muestra la cabeza de Buda.

En la escultura figurativa de una forma general, no suele resultar fácil encontrar propiedades matemáticas, aunque a veces sí que se puede observar que en su diseño se ha seguido un claro proceso geométrico. Adjuntamos los bocetos, figura número 52 en la parte inferior de la página, de un estudio acerca de la construcción del anterior buda japonés. En el diseño de muchas obras, en mayor o menor medida, es posible encontrar algunas propiedades geométricas.

Figura 51 (izquierda): Casita tradicional. Japón.

Figura 52 (debajo): Esquemas de la ejecución de la estatua del Buda “Amida Nyorai”.



Arte Hindú

En la península del Indostán a lo largo de la historia se han desarrollado sucesivamente diversas civilizaciones, situadas en diferentes reinos, que han dado origen a épocas de gran brillantez cultural y artística. Uno de estos reinos fue el de Pandio, ya mencionado por el romano Plinio, uno de los historiadores, junto con el griego Herodoto, más conocidos de la antigüedad clásica. Durante el reinado de su monarca más poderoso, Tirumala Naik, fue iniciada la construcción del conjunto de Templos de Meenakshi, que merecen ser considerados los más fantásticos e impresionantes templos hindúes y que utilizaremos de ejemplo.

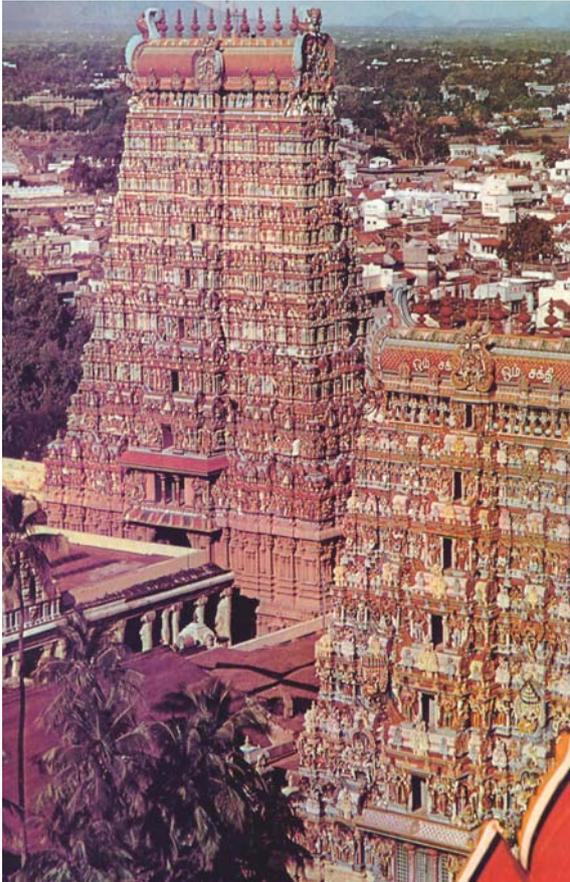


Figura 53: Templo de Meenakshi, construido en el reinado de Tirumala Naik (1623-1659). Madura. India.

Mostramos una fotografía suya en la figura número 53 situada al lado izquierdo. Sus dimensiones son francamente colosales, 260 m de longitud por 230 de anchura. Se dice que se tardó en construir 120 años, y según la tradición llegó a contar con un total de 33 millones de esculturas.

Este conjunto monumental es una de las realizaciones escultóricas más logradas y complejas que existen. Llegó a contar con más de tres millones de esculturas y supera con mucho a los de las portadas o retablos de las catedrales Góticas o Barrocas, que son tan conocidas para nosotros.

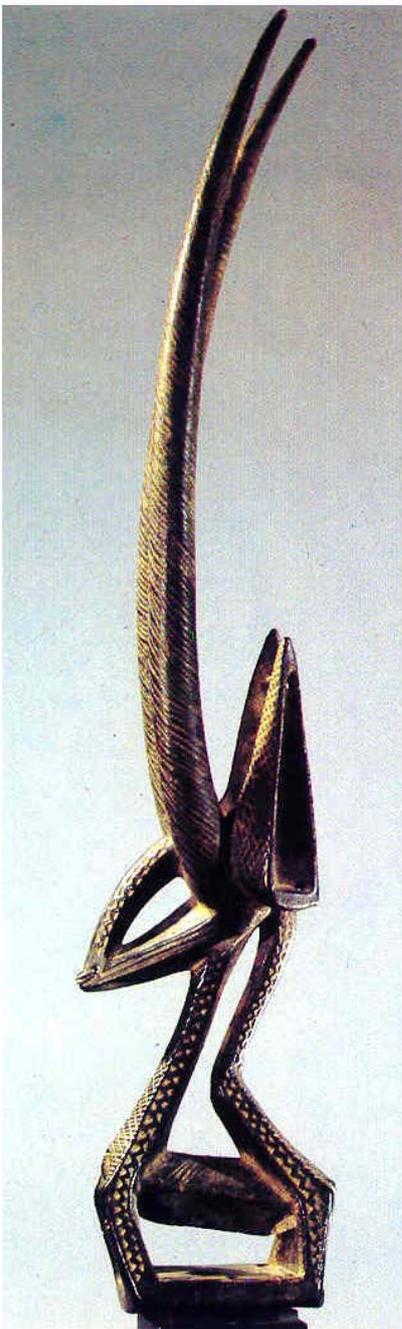
En el diseño de estas construcciones, y sobre todo en la lograda disposición de sus esculturas, resulta evidente que dada su gran complejidad se necesitó conocer y aplicar conceptos geométricos y matemáticos muy diversos. **Demostración de esta necesidad de la presencia de las matemáticas** en el diseño de estos monumentos hindúes, es el imprescindible y detallado conocimiento de las formas y medidas de las numerosas superficies utilizadas, como por ejemplo el cilindro, el tronco de pirámide, paraboloides, elipsoide, etc. Estas superficies se observan en un análisis detallado de este templo.

Arte Primitivo

También se debe mencionar el Arte de otras civilizaciones, de las que se han considerado “primitivas”, como las africanas o las polinesias, pero que han influido muy acusadamente en numerosos artistas contemporáneos. El fuerte valor estético de las creaciones de los pueblos primitivos, fue muy apreciado por la vanguardia parisense en la que se inscribieron artistas europeos diversos y de diferentes movimientos. Este arte fue especialmente reivindicado por los cubistas (Braque, Picasso) y los fauvistas (Matisse), como es conocido. Para aproximarse al Arte de estos pueblos “primitivos” es necesario en primer lugar establecer claramente el concepto al que responde tal enunciado.

Entendemos por **arte primitivo** el desarrollado en la actualidad o en un pasado próximo, por pueblos indígenas muy diferentes y fundamentalmente diseminados por los dos continentes ya mencionados **África y Oceanía**, aunque también se incluye el de algunos pueblos sudamericanos o esquimales y todos ellos caracterizados por un nivel cultural muy inferior al de las denominadas “culturas avanzadas”. Hay que diferenciarlo del arte de los pueblos prehistóricos, antepasados de nuestras propias culturas, aunque, bien es cierto, que en muchos casos guarda unas relaciones muy sorprendentes. También en el arte de estas civilizaciones primitivas se puede entrever diversos conceptos matemáticos y sobre todo geométricos.

Una cita al respecto de Salma Marani, en la referencia [12] ya comentada, dice: “**El uso de la geometría ha sido prominente en el arte de muchas culturas. Los griegos, los chinos y muchas de las civilizaciones africanas crearon este tipo de arte**”. Estas palabras apoyan nuestra afirmación de la indudable presencia de la geometría en este arte. Esto también se puede deducir de los ejemplos de arte primitivo aportados, figura inferior y siguientes.



En la figura número 54, situada en el margen, se muestra una escultura de una civilización africana, que muy bien podría haber sido realizada por un escultor contemporáneo. Sin embargo, esta obra pertenece al **arte Banbara de Mali**, pueblo africano que alcanzó una depurada técnica escultórica. En la referencia [8] anterior aparece un comentario muy interesante para los objetivos de nuestra tesis y acerca del arte de esta cultura:

“El arte del pueblo Bambara se caracteriza por la geometrización de los volúmenes, la angulosidad y la decoración geométrica”. Todas éstas son características que se inscriben en el tema de las relaciones Matemática y Escultura. En la figura número 55, situada debajo, se muestra otra escultura de los banbara. En este conjunto se simbolizan los dos sexos, algo que resulta común en muchas culturas.



Figura 54 (izquierda): “Tyi-wara” vertical. Hierro. Arte Banbara de Mali. Museo de Bellas Artes de Dallas.

Figura 55 (arriba): “Tyi-wara” masculino y femenino. Hierro, 30 cm de mayor dimensión. Arte Banbara de Mali. Colección Anspach de Nueva York.



Otro ejemplo de otra cultura, aunque con unas implicaciones muy parecidas, es el de la figura de la izquierda la número 56. En ella se muestra una escultura del **arte Dogón**, otro pueblo habitante de la sabana de Mali. En el pasado este pueblo realizó tallas de gran tamaño muy estilizadas, hasta el punto de que las figuras humanas quedan casi reducidas a volúmenes geométricos muy sencillos. Estilo que se aplica en la figura masculina, realizada en hierro.

Pertenciente al arte africano en la figura número 57, situada debajo, vamos a presentar un objeto que no es una propiamente una escultura sino un hacha ceremonial. Este objeto es una magnífica obra artesana y se halla decorada con gran profusión de motivos geométricos. Además, las formas que se utilizaron en él son figuras matemáticas y el mango básicamente está formado por un tronco de cono que se ha alabeado y la hoja del hacha es una superficie cuyo contorno describe una sorprendente curva.

Por último del arte africano incluimos dos ejemplos de **máscaras**, las figuras 58 y 59 situadas en la página siguiente. Este tipo de realización se halla muy extendida en todas las culturas africanas y en general en casi todas las civilizaciones primitivas. Aunque las máscaras tampoco se pueden considerar esculturas en un sentido estricto, sí que tienen un gran sentido artístico.

Para el africano la máscara constituye el medio con el que captar la fuerza sobrenatural de los espíritus, apoderarse de ella y utilizarla a favor de la comunidad. La que se expone en la figura 58 en la parte superior de la página siguiente, resulta ser un claro ejemplo de esquematización casi total de una cara. Sus rasgos faciales se han simplificado al máximo. Por otro lado, y como dato curioso, nos recuerda a las máscaras de otra civilización muy alejada espacial y temporalmente, la micénica.

La máscara de la figura 59, también situada en la página siguiente, es un caso muy particular, ya que es una pieza que presenta cuatro caras idénticas. Esto permite suponer el conocimiento por el pueblo fang y aunque sólo sea de una forma intuitiva de las simetrías. Además en esta máscara observamos una simplificación de los rasgos faciales y del contorno de las caras que se convierte en un óvalo.



Figura 56 (arriba): Figura masculina. Hierro. Arte Dogón de Mali. Colección Hélène Kamer, París.

Figura 57 (abajo): Hacha ceremonial. Hierro, madera y cobre. 38 cm de altura. Zaire. Museo del Hombre de París.

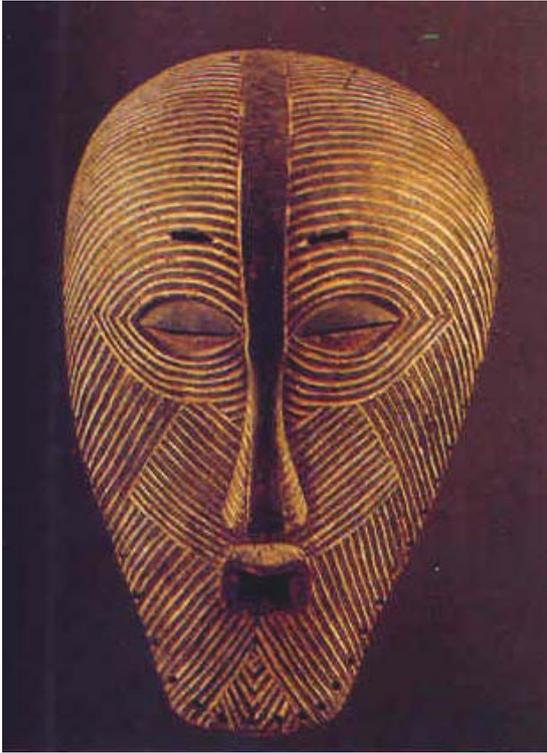


Figura 58 (arriba): Máscara de madera recubierta de arcilla. 38 cm de altura. Arte Kongo. Cabinda, Angola. Colección Tishman, Nueva York.



Figura 59 (derecha): Máscara-yelmo cuatrifacial. Madera blanda con fragmentos de espejo, barnizada. Altura 32 cm. Arte fang. Gabón. Museo del Hombre de París.

En el continente oceánico formado por un territorio principal, Australia, y por una cantidad ingente de islas situadas en el océano Pacífico se ha desarrollado un arte autóctono. El arte de estos **pueblos del Pacífico**, presenta una enorme variedad de manifestaciones y estilos y en algunas de sus realizaciones, se puede encontrar diversas propiedades que nos interesan a la hora de realizar este estudio.

La Escultura es una faceta artística en la que estos pueblos de nuestras antípodas son unos maestros. En esta zona se suele realizar, además de diversas piezas escultóricas, relieves, que estos pueblos utilizan muy frecuentemente en la decoración de sus edificaciones, embarcaciones, e incluso objetos cotidianos, etc. Un ejemplo de su escultura es el de la figura número 60, situada en la página siguiente, en la que el cuerpo se ha simplificado, utilizando sencillas figuras geométricas. **En el arte polinesio**, nuevamente, se presenta la utilización de la decoración mediante motivos geométricos, lo que se constata en la cara de la escultura de la figura anterior situada al lado, y que se halla totalmente recubierta con motivos de este tipo.

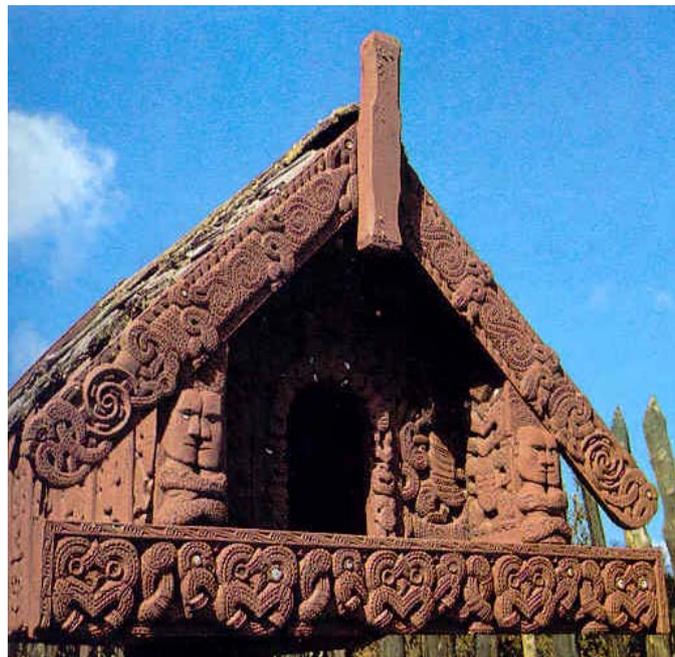
Otro tipo de obra realmente diferente, es el de la figura número 61, situada en la página siguiente. En esta fotografía se halla una edificación muy sencilla, un almacén de víveres, pero que se encuentra casi completamente adornado. En la decoración de esta construcción se ha utilizado el relieve, lo que resulta muy habitual en **la civilización maorí**, que todavía pervive en Nueva Zelanda. El friso inferior contiene tres motivos que se repiten de una forma ordenada. Este tipo de técnica también se utiliza de forma frecuente en la escultura actual.



En la parte superior de esta edificación que se muestra en la figura 61 se hallan otros dos relieves con motivos idénticos, situados de forma simétrica. Aunque estos trabajos se supone que son fundamentalmente sobre temas de inspiración zoomorfa, sus motivos se han geometrizado de forma muy evidente.

Figura 60 (izquierda): Estatua polinesia. Talla incisa. Kotti, Nueva Zelanda.

Figura 61 (debajo): Almacén. Arte Maorí. Nueva Zelanda.



Arte Americano Prehispánico

Algunas civilizaciones prehispánicas alcanzaron un elevado desarrollo. Empezaremos por destacar la cultura y el arte de algunas de las **centroamericanas** como: la Maya, la Olmeca, la Tolteca, la Zapoteca, la Azteca, etc. Además de estas culturas hay que destacar la Inca en Sudamérica. En el arte de estos pueblos, y en particular en su escultura, también se pueden observar conceptos matemáticos muy diversos.

Una de las civilizaciones que logró un elevado desarrollo de las Matemáticas y de la Astronomía fue la **Maya**. Ejemplo de ello es la figura número 17, que se puede ver en la carátula, situada al inicio de este capítulo. En ella se expone una pintura del Templo de los Jaguares de las ruinas mayas de Chichén Itzá. En los relieves que lo decoran, véase la portada de esta edificación, se utilizan diversas figuras geométricas. Esto, como ya se ha recalcado varias veces, es muy común en algunas obras de escultores actuales.

Aunque descubierta muy tardíamente, en el año 1957, por el antropólogo alemán H. Beyer, la **cultura Olmeca** tuvo una enorme importancia en el desarrollo del arte mesoamericano. Esto lo ejemplifican las múltiples tipologías escultóricas encontradas en los yacimientos arqueológicos de esta civilización. En el llamado de la Venta, se halló la cabeza colosal que se muestra en la figura número 62, situada en la página siguiente.



Figura 62 (arriba): Cabeza colosal del yacimiento arqueológico de la Venta, Arte Olmeca. Villahermosa, Tabasco, Méjico.

En el caso de estas majestuosas **figuras olmecas monumentales**, siempre se respeta el carácter macizo de la piedra, y los rasgos de las imágenes están incididos sin alterar su sustancia.

El elemento que más predomina en estas esculturas es el cúbico-geométrico, no hay salientes, las depresiones no pasan de ser incisiones que articulan y varían el conjunto sin modificar el carácter del bloque.

De todo esto se puede deducir la gran importancia de la geometría en esta escultura, lo que se demuestra claramente con el interesante estudio del canon utilizado en las cabezas magistrales, en los dibujos de la figura 63, situada debajo.

También destacaré el arte de otra de las civilizaciones prehispánicas más importantes, **la civilización inca** que formó el imperio más poderoso del continente Americano, comparable a algunos de los de Occidente. Un ejemplo muy demostrativo en relación con el objetivo de la presente tesis, es el de la figura número 64 en la siguiente página. Con sus casi dos metros por encima del suelo este monumental “Intihuatana”, como denominaban a sus altares, tallado del lecho mismo de granito es el monumento inca conocido más grande de este tipo. Al parecer el escultor inca retiró tan sólo de la piedra aquellas porciones que no poseían “huaca”, lo que en su lengua quiere decir aspecto sagrado. Esta pieza podría ser considerada precursora de la escultura actual, dado que esta técnica de trabajo ha sido seguida por ciertos escultores contemporáneos, como podría ser Chillida. Esto lo analizaremos en el apartado correspondiente que situamos en el capítulo siguiente.

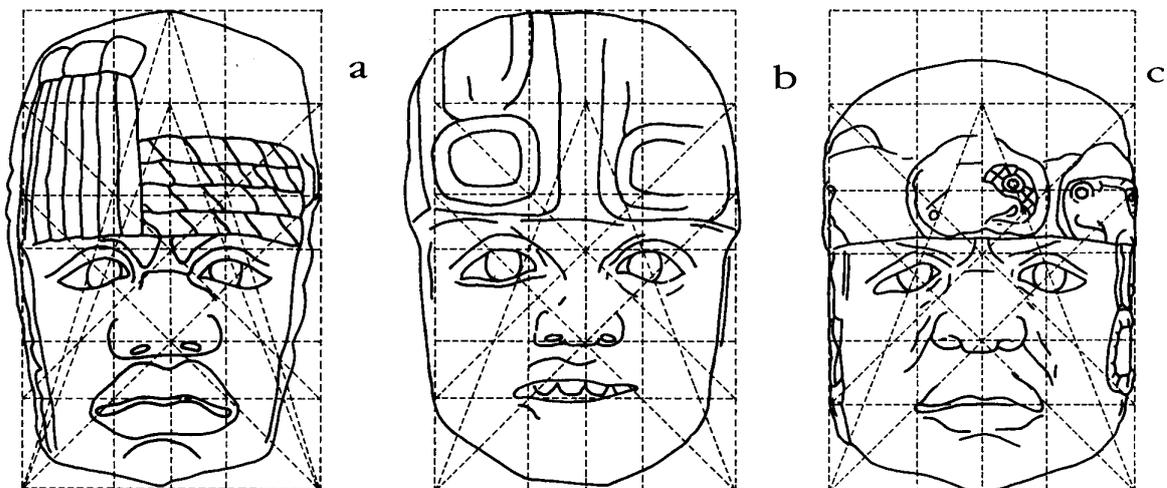


Figura 63 (arriba): Ejemplos de canon Olmeca aplicado al diseño de cabezas colosales.



Figura 64 (arriba): “Intihuatana”, tallado en el lecho de granito. Monumento inca. Hacia 1300. Ruinas de Machu Picchu, Perú.

3.6 Antecedentes en la Alta Edad Media

Teodosio fue el último emperador que gobernó el Imperio Romano íntegro. Cuando murió en el año 395, las fronteras del imperio estaban intactas, pero sus sucesores, sus propios hijos, aún eran muy jóvenes, lo que no auguraba estabilidad al imperio. Uno de ellos, Honorio, se hizo cargo de la mitad occidental y el otro, Arcadio, de la oriental. La división del imperio en dos partes se consolidó a principios del siglo V.

Arte de los Pueblos Bárbaros



Durante este siglo V, se produjeron en el Imperio diversas invasiones de los pueblos que fueron llamados “bárbaros”, sobre todo en los territorios de la parte occidental. Ello se ilustra en el relieve de la cubierta de un cofrecillo, cuyo tema es el imperio cae ante las fuerzas hostiles, figura 65 al margen.

En la fotografía de dicha figura se muestra un detalle de este relieve, en el cual se aprecia una cierta esquematización, y su constitución parcialmente geométrica. Para ello se basaron en la utilización de sencillas figuras de anillos y esferas, en algunas partes de los personajes.

Figura 65: Cubierta de cofrecillo, detalle. Siglo VIII d. J. C.



Figura 66 (arriba): Cubierta de Biblia con incrustaciones de piedras preciosas y camafeos engarzados en oro. Pertenciente a una reina lombarda. Siglo VII d. J. C.



Figura 67 (arriba): Hacha tipo Néstor con decoración geométrica. Bronce temprano; aproximadamente 2000 - 1500 a. J. C. Bucarest, Museo de Historia



En el Arte, **tras la caída en el año 476 del Imperio Romano de Occidente**, se sucede una etapa compleja en la que se funden las formas clásicas con las germánicas, conforme a la estética y principios que configuraron el arte del cristianismo.

Un claro ejemplo de esta influencia cristiana es él que se incluye en la figura 66, que nos muestra la cubierta de una Biblia con incrustaciones que perteneció a una reina lombarda. En esta fotografía se puede observar su muy apreciable relación con las matemáticas y que fue diseñada con exquisito gusto geométrico, utilizando formas muy sencillas. Además son evidentes los tipos de simetrías planas presentes.

Otro ejemplo de objeto artístico que aunque datado en una fecha mucho más antigua, anticipa el de estos pueblos, es el hacha de la figura 67. Su decoración está realizada mediante incisiones con las que se ha representado formas geométricas. Además hay otras propiedades, simetrías, etc.

Según la referencia [12], “La fragmentación política producida tras la caída del Imperio Romano determina la creación de formas particulares en cada reino y la ruptura con la cultura clásica favorece la originalidad en la creación artística”. Creemos que la utilización de la expresión ruptura es exagerada, si bien es cierto que se produjo una separación y el casi total olvido de la antigua cultura clásica, hasta finales de este periodo, la Edad Media, a la que se ha llamado **periodo oscuro**.

La Arquitectura que se realizó en esta primera época solía tener formas bastante sencillas, y presentaba algunos ejemplos de notable interés. Uno de éstos es el de la figura 68, correspondiente a una construcción del **pueblo ostrogodo**.

Figura 68 (izquierda): Mausoleo del rey Teodorico en Rávena. Italia.



Figura 69: Baptisterio de Cividale. Aproximadamente del año 740.

El edificio del final de la página anterior es el muy famoso mausoleo del rey Teodorico. Está formado por dos cuerpos. El inferior tiene una planta decagonal, y la del superior es circular. Como particularidad interesante se debe mencionar la elaboración de la cúpula que se ha esculpido en un único bloque de piedra.

Otro ejemplo de una época posterior, el siglo VIII, se muestra en la figura 69 a la izquierda. La forma de este baptisterio es la de un sencillo sólido, un prisma de base hexagonal. También su decoración exterior se ha realizado con relieves con una estructuración geométrica, en la que se han utilizado algunas formas geométricas planas.

En definitiva, los pueblos germánicos en su arquitectura utilizaban propiedades matemáticas y especialmente geométricas, lo que resulta lógico dada su evidente herencia de la arquitectura de los romanos, especialmente en la de los ostrogodos que se asentaron en Italia. Ver ejemplos anteriores.

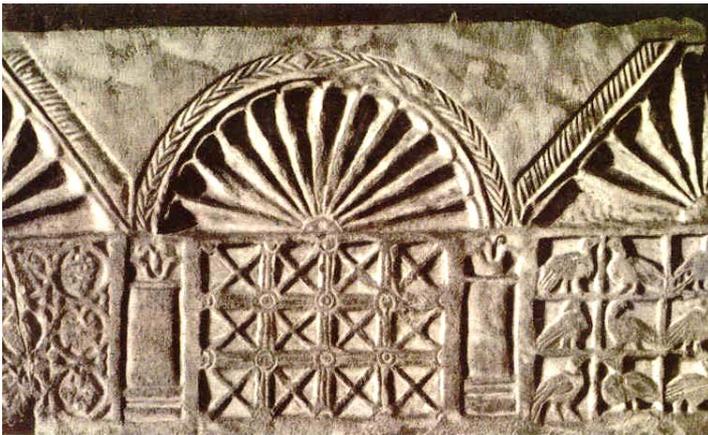


Figura 70: Cancel visigodo. Museo de Mérida

Entre todos los pueblos germánicos destacó el de los **visigodos**, debido a su arte y cultura superiores. Llegaron a España a principios del siglo V y alcanzaron su época de mayor esplendor en el siglo VII.

En cuanto a la Escultura de los pueblos germánicos y en particular a la **escultura de los visigodos** son muy escasas las obras que se han conservado, salvo las realizadas en marfil.



En estas piezas muy resulta difícil encontrar relaciones con las Matemáticas, objeto de este trabajo. En el relieve de la figura 70 se muestra un caso en que sí se aprecian éstas. Posee la característica organización en este arte de los visigodos que utilizaban, arcos en mitra y motivos en retículos. Se observa el uso diversas formas geométricas, como la corona y el sector circular en el arco de medio punto central y propiedades como la disposición en retícula, las simetrías, las repeticiones, etc.

Figura 71 (izquierda): Placa de bronce dorado. Arte vikingo. Procedente de Björke. Museo Histórico de la Universidad de Bergen, Noruega.



En el norte de Europa, y hasta el siglo décimo, las formas artísticas siguieron modelos autóctonos. El principal pueblo de esta zona europea, en esa época, es el **vikingo** que destacó por su trabajo con los metales. Un ejemplo es el de la figura 71, página anterior en la que además de la simetría con respecto a varios ejes, podemos observar diversas curvas matemáticas. Las cerradas y albeoladas son de tipo rosa. Otro interesante ejemplo es la fibula de la figura 72.

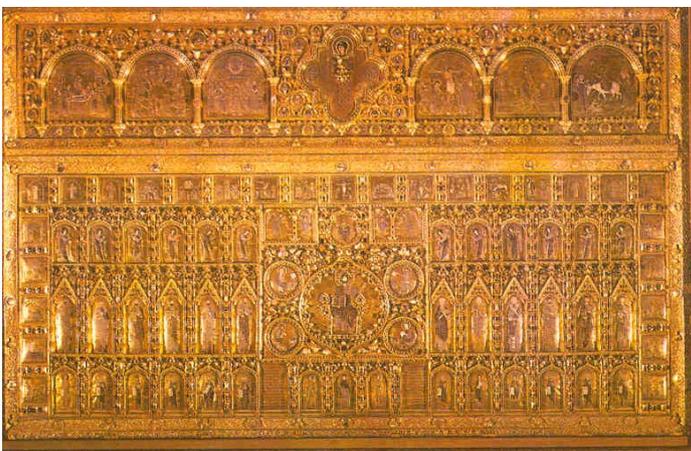
Figura 72 (izquierda): Fíbula de Strickland. Siglos VI - VII. Londres, Museo Británico.

Arte Bizantino

La fundación de Constantinopla en el año 330 y la división del Imperio Romano son dos hechos fundamentales para la historia del Arte. Mientras que en Europa Occidental, y como ya se ha comentado se rompe la continuidad del arte romano, en Oriente se mantiene hasta 1453, es decir hasta el final de la Edad Media.

En la **escultura bizantina** no hemos encontrado obras en las que claramente se pueda deducir un fuerte contenido matemático. Sin embargo, sí se pueden observar ejemplos en las artes aplicadas. Sobresalen las obras de orfebrería con abundante empleo de oro y esmalte tabicado o albeolado. Una obra maestra es Pala de Oro de San Marcos de Venecia, que se muestra en la figura 73. Aunque no es una obra escultórica propiamente dicha, creo que en ella se puede apreciar un gran trabajo escultórico. También se puede observar una estructuración geométrica en la disposición de los motivos y observar la utilización de diversas propiedades matemáticas como simetrías, curvaturas, etc. Todas estas características sirven para apoyar los objetivos de nuestra investigación.

Otra faceta artística en la que los bizantinos fueron unos verdaderos maestros es la de los **mosaicos**. En la siguiente figura, número 74 de la página siguiente, se muestra un detalle de un mosaico con un diseño bastante geométrico. En él se utilizaron diversas propiedades y conceptos matemáticos, como son: el rellenar una figura con una línea cerrada en el motivo del ángulo superior derecho, la representación en el plano de dos curvas que se van entrelazando, los diversos tipos de simetría, etc.



En definitiva, en el mosaico anterior se constata muy claramente la influencia de la Geometría en su concepción. Esto sucede también en muchos otros tipos de mosaicos elaborados por diferentes culturas a lo largo de la historia, como la romana, de la cual el arte bizantino es heredero.

Figura 73 (izquierda): Pala de Oro. San Marcos de Venecia.

El Arte de los Reinos Cristianos

El periodo de gestación del arte de los reinos cristianos culmina en torno al año 800, cuando se asienta la **cultura carolingia** que representa la afirmación de Europa. El arte europeo, como el español, asimilará múltiples formas y técnicas que le llegan a través de los mundos bizantino e islámico.

La coronación del emperador Carlomagno en la Navidad del 800 en Roma es un hecho fundamental para la cultura europea en cuanto supone la renovación del Imperio Romano de Occidente, así como la renovación espiritual de Europa. No obstante, en las zonas periféricas de Europa existe una evolución independiente, como es el caso de la cultura vikinga en la nórdica, brevemente estudiada en un apartado anterior.



Figura 74 (arriba): Mosaico procedente del pavimento del Gran Palacio de Constantinopla. Siglo V. Museo de los Mosaicos de Estambul.

En el arte carolingio resulta fundamental la Arquitectura, presente en general con construcciones de tipo religioso, como abadías, catedrales y capillas. Un ejemplo que nos permite descubrir relaciones geométricas muy claras, es el de la figura 75, que nos muestra un detalle del pórtico de la segunda abadía de Lorsch. Resulta evidente la repetición en su diseño de figuras de hexágonos y triángulos, en el fondo del pórtico, lo que produce unos sorprendentes efectos visuales.

En las Islas británicas son escasos los restos arquitectónicos de esta época que se han conservado. Son destacables las torres circulares de los monasterios. Se puede ver una en la figura 76, en la siguiente página.

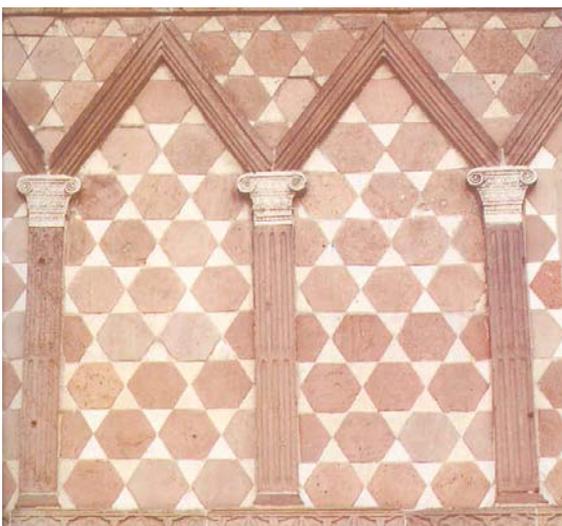


Figura 75: Detalle del pórtico de la fachada de la segunda abadía de Lorsch. Iniciada entre los años 778 y 784. Hesse, Alemania.

En esta imagen, al fondo, se observa la torre circular de un monasterio irlandés, el de Monasterboice. **La Escultura** realizada en las Islas británicas durante este periodo, está representada por algunos restos escultóricos, cuya decoración fue realizada basándose en estilizaciones, entrelazados, espirales y también esquematizaciones geometrizadas, lo que resulta importante para nuestro tesis.

Ofrecen particular interés las cruces monumentales irlandesas. En la misma figura de la siguiente página la de la abadía irlandesa anterior, se muestra un magnífico ejemplo de este tipo de cruces esculpidas en piedra. Son de destacar, la interesante forma geométrica que presenta y la estructuración de los relieves, así como el uso de ciertas figuras geométricas planas y espaciales.

Entre las obras artísticas de estos reinos sobresale la orfebrería. Un ejemplo se muestra en la figura número 77, situada abajo en el margen. Nuevamente se utilizan entrelazados y espirales, llegando a alcanzar en este caso una cierta complejidad.

En España, la invasión islámica representa la ruptura respecto al pasado pues si aún subsisten formas visigóticas, la creación del reino asturiano, como la presencia carolingia en Cataluña y el desplazamiento hacia el norte de las comunidades mozárabes, determinan la creación de tres estilos artísticos diversos. Estos son el arte asturiano, el mozárabe y por último el catalán carolingio. En cuanto a los objetivos de este trabajo, el encontrar relaciones matemáticas en el arte, en el mozárabe y posteriormente en el mudéjar resultará fácil, ya que la utilización de conceptos geométricos y matemáticos, dada precisamente sus fuertes influencias islámicas, es abundante.

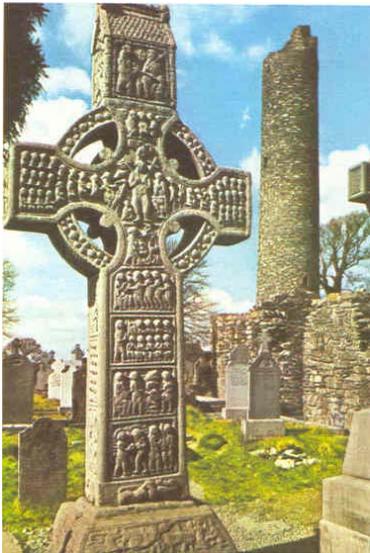


Figura 76 (arriba): Cruz de Monasterboice, en primer lugar. Torre circular del monasterio, al fondo. Irlanda.



Figura 77 (arriba): Estuche de la campana de San Patricio. Museo de Dublín.

El Arte Románico

Después de esta época con diferentes estilos que se han enclavado en lo que se han llamado **Prerrománico**, se inicia el románico propiamente dicho. **El Arte Románico** se desarrolló en Europa occidental durante los siglos XI, XII y parte del XIII. La concepción estética de este arte adquirió un significado nuevo, introduciendo el sentimiento del hombre, del mundo y de la divinidad, típicos de la visión cristiana. Dios fue considerado el único referente válido en todas las manifestaciones artísticas realizadas para ensalzar su poder.

La Escultura adquiere en este arte una importancia fundamental, ya que se incorpora plenamente al edificio, al que embellece al mismo tiempo que cumple una importante misión docente. El monumento principal durante el Románico es la iglesia, que no sólo está destinada a albergar en su seno a los fieles, sino que mediante las artes figurativas contribuye a mantener viva la fe del creyente. Todas estas razones son esenciales para comprender el gran desarrollo alcanzado por la Escultura en este periodo.

El marco en el que se sitúan las obras, es casi siempre el arquitectónico, y es el que determina en la mayor parte de las ocasiones la forma escultórica. Así tendremos figuras largas y enanas, figuras que se ajustan a la forma del capitel, de las jambas de una puerta o de las dovelas de un arco, etc.

En los espacios disponibles, véase la figura 78 situada en la siguiente página, se puede advertir la clara estructura geométrica con la que se ha organizado la superficie y a la que se han acomodado las esculturas. En esta portada nuevamente, se puede observar la aparición de la rama de las Matemáticas que resulta siempre más fácil de vislumbrar en el Arte, la Geometría. También en estos conjuntos, aunque son de tema figurativo, se utiliza a veces motivos geométricos.

De acuerdo con los objetivos de nuestra tesis, es interesante resaltar la presencia de **motivos geométricos en el Arte Románico**. Al respecto se puede tener en cuenta la máxima incluida por Teófilo en su manuscrito *Schedula Diversarum Artium*.

Este manuscrito prescribía que el maestro vidriero debía llenar los espacios libres entre los cuadros históricos con figuras geométricas, con hojas y con flores. La utilización en la escultura de motivos geométricos, se puede observar en la imagen, figura 78, de la portada de Iglesia de Saint Pierre. Además de exponer como ejemplo un caso de portada, también podemos observar motivos de tipo geométricos en el detalle del dintel de la puerta de entrada de la iglesia de Sant Andreu en la fotografía de la figura 79, que está situada al final de la página. En este último relieve las bandas superiores e inferiores parecen estar basados en un sencillo motivo floral que se dobla, utilizando una rotación y una traslación. Luego, se repite a lo largo de las bandas. Además, se pueden observar otras propiedades como la disposición simétrica de las figuras de los ángeles.

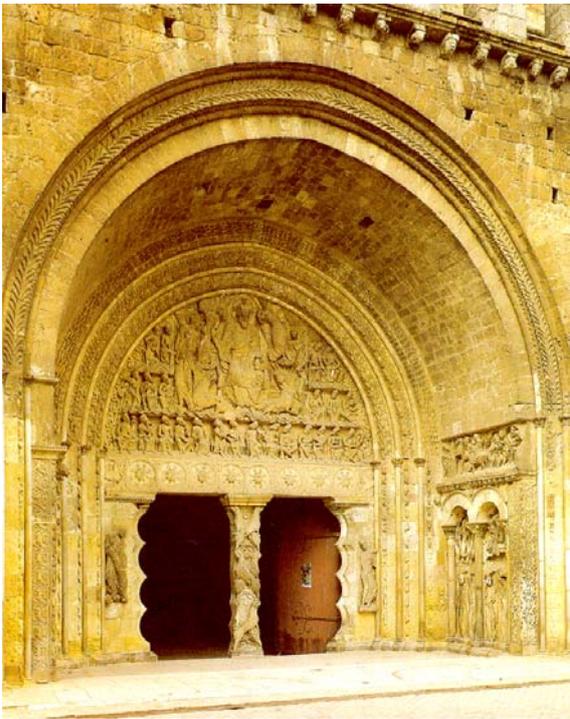


Figura 78 (arriba): Portada de Iglesia de Saint Pierre. Hacia 1110 - 1120. Moissac (Tarn-et-Garone, Occitania), Francia.

Otro ejemplo románico, aunque ya con influencias góticas es el ábside de la **catedral** de Monreale. A la izquierda en la figura número 78, se muestra con detalle. La decoración de esta edificación religiosa resulta realmente impresionante.

Otra de las principales realizaciones de la escultura de este periodo son **los capiteles**. Hemos incluido dos ejemplos con un fuerte significado geométrico (página siguiente). En el primer capitel, figura 80, se representa un entrelazado, motivo en el que se implican conceptos topológicos. En el segundo ejemplo que exponemos, figura 81 se muestra una espiral, curva matemática que se utiliza frecuentemente y que incluso posee un significado filosófico y místico

En la Península Ibérica el estilo románico se implantó en las tierras del norte reconquistadas a los árabes. El románico hispánico se forjó a partir de influencias provenientes de Francia y de Lombardía, hasta propiciar un lenguaje autóctono pleno



Figura 79: "Maiestas Domini". Relieve sobre piedra. Hacia 1020 - 1030. Detalle del dintel de la puerta de entrada de la iglesia de Sant Andreu de Sureda (Rosellón), Francia.



Figura 80 (arriba): Capitel con entrelazados; fines del siglo XII. Claustro de la Colegiata de Santillana del Mar, Santander.

Hay que destacar la gran influencia que tuvo en la cultura y en el arte español de este periodo y durante toda la Edad Media, el Camino de Santiago. Las obras escultóricas que incluimos en la página son del **románico español**. Un caso interesante es la figura 81. Este conjunto de cuatro columnas puede ser visto como una superficie reglada

La escultura románica en España, se desarrolló bastante. En el último cuarto del siglo XII, en España trabajaron importantes escultores en torno a los cuales se inician las formas góticas. A estos artistas se les suele considerar como introductores de este estilo, aunque tradicionalmente se les incluya entre los más representativos del románico final.

En un primer periodo en España y sobre todo en el reino de Aragón, proliferan las imágenes de la virgen con el niño, conforme al modelo bizantino de la “kiriotissa”. Esto es, una virgen sedente y hierática. Un ejemplo es el de la Virgen de Covet, en la figura 83. En este caso, es en la decoración policromada de su peana y fondo donde podemos apreciar la utilización de motivos geométricos como los poligonales y estrellados situados en la parte inferior.

La catedral de Santiago de Compostela es el más excelso monumento de la arquitectura románica en España, y el más señalado santuario medieval de la cristiandad de en Occidente, fuera de Roma. Su construcción aunque iniciada en el Románico, no se terminó hasta muchos siglos después. La calidad de sus numerosas obras escultóricas es innegable. En el año 1118, se colocan los dinteles del pórtico de la Gloria realizados por el maestro Mateo, que es una de las obras escultóricas más impresionantes de la catedral de Santiago. Esta obra culmina el proceso evolutivo de la estilística románica e inicia un nuevo concepto, por lo que debe ser considerada como la más representativa de la etapa inicial del gótico.



Figura 81 (arriba): Capitel con espiral (inacabado); siglo XII. Santa María de l’Estany, Barcelona.



Figura 82 (arriba): Columna, segunda mitad del siglo XII. Claustro de la Iglesia de San Pedro de la Rúa. Estella, Navarra.



Figura 83 (derecha): Virgen de Covet, Lérida. Último cuarto del siglo XII. Museo de Arte de Cataluña.

3.7 Antecedentes en la Baja Edad Media

En este periodo se asientan los fundamentos de la cultura moderna con la renovación de **los conocimientos científicos, literarios y filosóficos que imparten las universidades**, cada vez más pujantes y con criterios más amplios. Al final de esta etapa, tres hechos fundamentales señalan los nuevos tiempos, la invención de la imprenta, los ideales de la cultura italiana renacentista y los descubrimientos geográficos. El término gótico que originariamente significaba “bárbaro, propio de godos, por contraste con la serenidad armónica del arte italiano”, véase la referencia [15], realmente significó un avance del Arte y de la Cultura, en general, y la cimentación de las bases que hicieron posible el inicio del Renacimiento. Véase al respecto la fachada de la catedral de Pisa que se muestra en la figura 84 que, pese a ser realizada entre los siglos XI y XII y ser todavía Románica, ya anticipa algunas de las características del Renacimiento.

La valoración y el concepto que se tenía de los artistas y artesanos también mejoró. Siempre que el arquitecto era representado en efigie, sus vestimentas no eran las de un artesano, sino las de un sabio. En dichas representaciones, tampoco faltan los instrumentos de la profesión: larga vara o regla, escuadra o compás y maqueta, que aluden al arte de la Geometría, que según decían es la “regla de oro” de la Arquitectura. Esto se ilustra en el relieve sobre madera de la figura número 85, en la página siguiente. En lo que respecta a esta investigación, e incluido dentro del avance general de las ciencias, se encuentra el de las Matemáticas y de la Geometría. De nuevo, podemos relacionar un desarrollo de estas ciencias con un avance en el Arte.

El estilo Gótico es el que domina este periodo histórico y se desarrolla entre mediados del siglo XII y principios del XV, salvo en Italia, donde el Renacimiento se inicia un siglo antes a principios del XVI. Es decir, coincide prácticamente con la Baja Edad Media. El periodo Gótico representa la culminación del proceso cultural de Occidente. En la segunda mitad del siglo XII se afirma el florecimiento de las ciudades que han de ser el motor y el marco para el desarrollo de un estilo que responde fielmente a los ideales del ciudadano libre. El artista en esta época alcanza plena independencia y los seglares acceden a la cultura, a diferencia de la época anterior, que estaba prácticamente reservada a la iglesia. Por otra parte, la complejidad de la estructura social determina diversas orientaciones artísticas que amplían la extensión y profundidad del Arte



En esta época, a diferencia de los siglos anteriores enclavados en la Alta Edad Media, empieza a ser frecuente la realización de **tratados y estudios** acerca de los diferentes procedimientos artísticos, surgidos de la práctica de los talleres de artesanos, lo que también cimienta la relación del Arte con las ciencias.

Uno de los más conocidos de la época es el que se denominó *Libro dell'Arte*, manuscrito que el artista italiano Cennino Cellini seguramente escribió, en el avanzado ambiente de la ciudad italiana de Padua, a finales del siglo XIV.

Figura 84: Fachada de la catedral. Siglos XI - XII. Pisa, Italia.

La Arquitectura Gótica

Este arte experimenta un notable avance a partir del Gótico, ya que gracias a las nuevas estructuras y conocimientos se erigen grandes construcciones, fundamentalmente las impresionantes catedrales. La construcción de este tipo tan extraordinario de edificaciones es posible debido al esfuerzo económico de todos los ciudadanos, al avance de la Ciencia y al buen hacer de los artistas.



La ordenación geométrica en la **catedral gótica** es evidente. Al respecto, podemos observar las siguientes figuras, debajo, la número 86, un sencillo croquis que explica uno más complejo, él de la figura 87 en la página siguiente, sobre el alzado de la catedral de Milán, que aparece en un estudio realizado por Caesar Cesarino; en 1521. En él se relacionan diversas relaciones geométricas de esta construcción de Milán. En la figura 88, también en la página siguiente, se identifican sus diferentes alturas. En esta imagen tan sencilla se pueden observar muy fácilmente algunas de las semejanzas geométricas que se pueden establecer entre las diversas partes de esta catedral.

Otro rasgo simbólico de esta influencia de la Geometría es el que en los laberintos que se disponían en los pisos de las catedrales góticas se inscribían los nombres de los arquitectos que habían intervenido en su construcción, dentro de figuras con forma circular o poligonal.

Otro estudio francamente interesante sobre los aspectos matemáticos de la Arquitectura es el de las **bóvedas góticas**. Presentamos un ejemplo de una preciosa geometría, en la figura 89 de la página siguiente, que muestra la que se ha denominado “La palmera”, ya que su forma recuerda a este árbol. Aunque la estructura de esta bóveda, no es de las más complejas se llegaron a realizar, algunas son extraordinarias y en su diseño se ha conseguido un gran equilibrio. Las fachadas de las catedrales y de las iglesias fueron enriquecidas con ventanales y rosetones decorados con piedra. Éstos producen en el interior de estas magníficas construcciones su característica iluminación. En estos trabajos se puede apreciar bastantes de las propiedades geométricas que resaltamos en esta tesis.

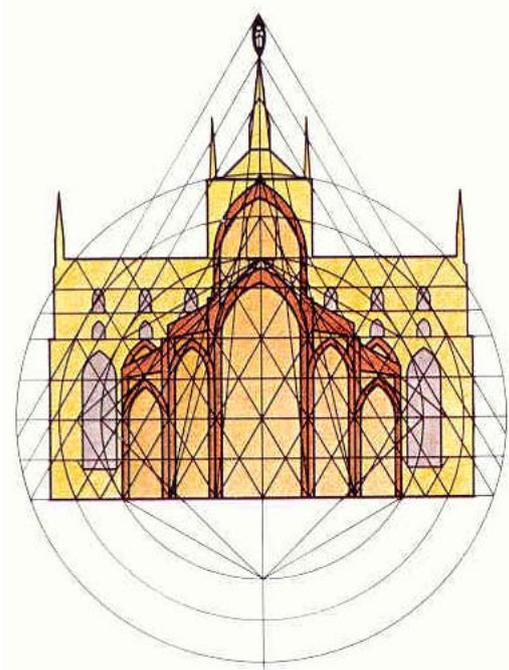


Figura 85 (arriba): Geómetra o arquitecto. Relieve sobre madera; Siglo XIII. Catedral de Saint Pierre, Poitiers, Francia.

Figura 86 (izquierda): Croquis sencillo del estudio de la catedral de Milán de Caesar Cesarino; 1521.

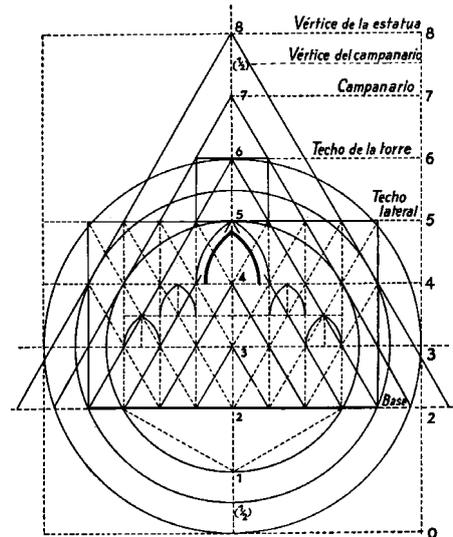
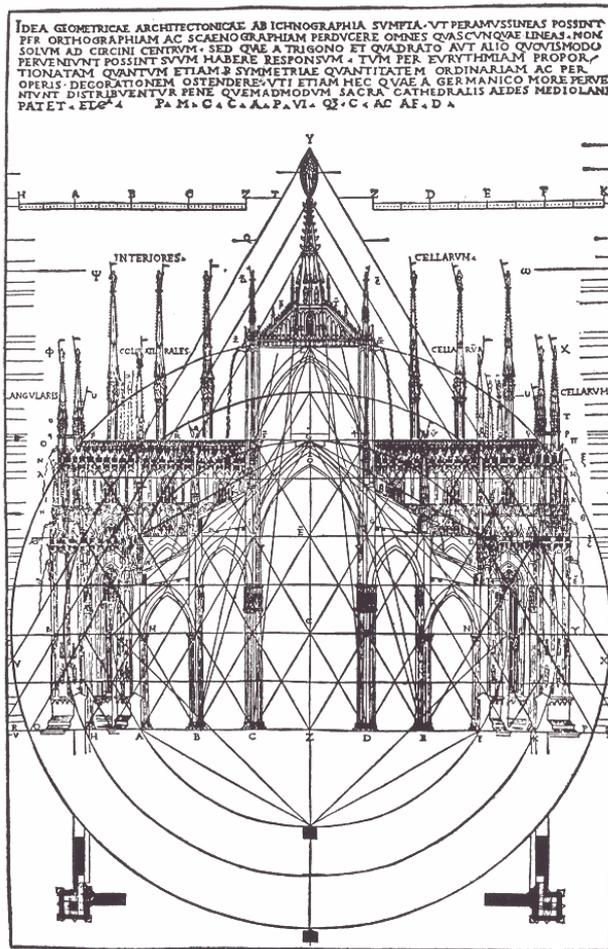


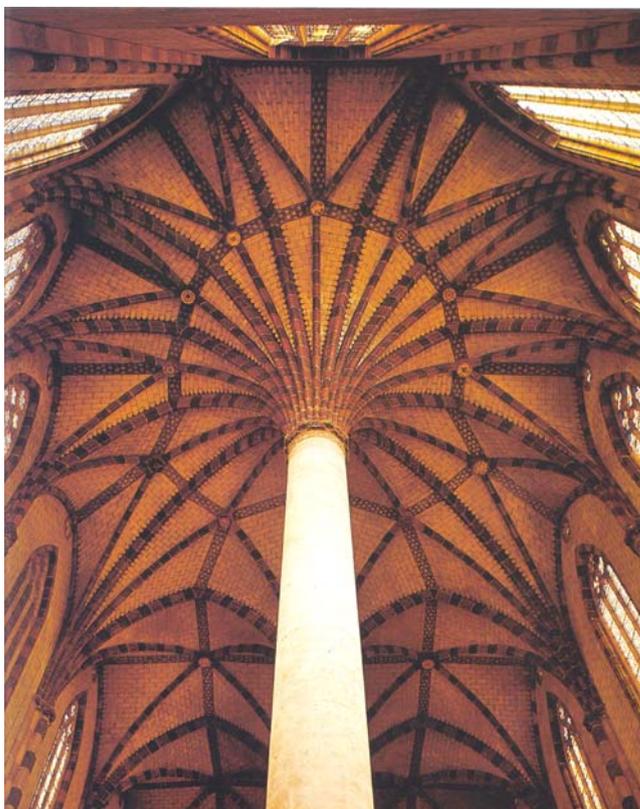
Figura 88 (arriba): Dibujo en el que se identifican las diferentes partes de la catedral de Milán del estudio de Caesar Caesarino. Año 1521.

Figura 87 (izquierda): Alzado de la catedral de Milán incluido en el estudio de Caesar Caesarino. Año 1521.

Un magnífico ejemplo de **ventanal gótico** es el de la figura 90 situada en la página siguiente. En el diseño de su parte superior se pueden apreciar la gran gama de curvas utilizadas. También muchos de **los rosetones** de estas catedrales góticas resultan muy impresionantes, y sus estructuras geométricas, llegan a ser francamente complejas.

Un ejemplo que demuestra la existencia de claras estructuras con relaciones geométricas muy diversas, es el de los dibujos mostrados en la figura 91 de la página siguiente. En sus imágenes se observa la evolución que tuvieron los ventanales góticos. En estos ventanales y rosetones, además del conocimiento de los artesanos de numerosas curvas, se constata la existencia en su diseño de relaciones matemáticas diversas.

Figura 89 (izquierda): “La palmera”. Bóveda de la iglesia de los jacobinos; año 1320. Toulouse, Languedoc, Francia.



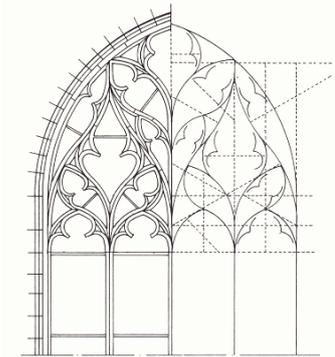
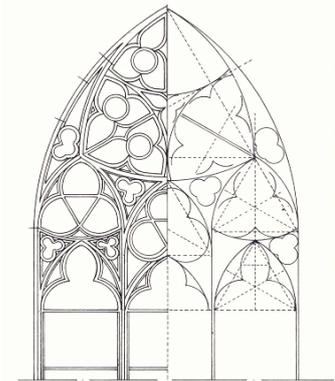
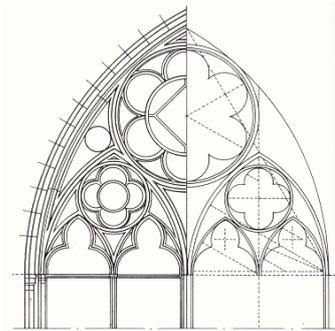
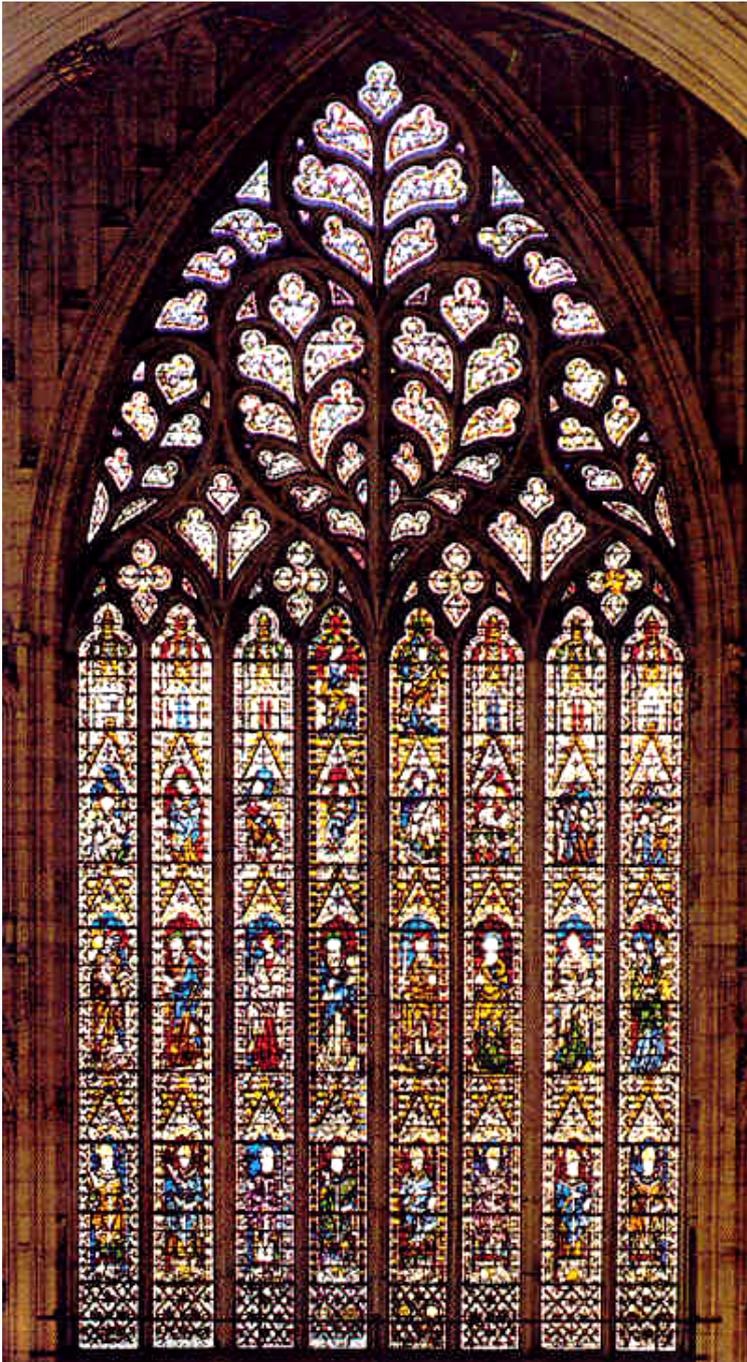


Figura 90: Vitral, Catedral de York. Siglos XIII - XIV. Yorkshire, Gran Bretaña.

Figura 91: Evolución de los ventanales góticos durante los siglos XIII - XVI.

La Escultura Gótica

En el mundo gótico la principal fuente de inspiración de los artistas es el mundo sensible. Se busca la belleza ideal de las formas naturales. La elección de temas figurativos y sobre todo religiosos **hace muy difícil encontrar obras artísticas de inspiración puramente geométrica o matemática** en las artes figurativas y en concreto en la Escultura, objeto principal de investigación en nuestra tesis.

Hemos podido encontrar algunos ejemplos en los cuales se puede apreciar una disposición en la que muy claramente se utilizan propiedades geométricas. Sobre todo esto se percibe en los relieves. Un buen ejemplo es el incluido en la figura 92 de la página siguiente, en la que se muestra la fachada principal de la catedral de Toledo.

La Escultura gótica en muchos casos es parte integrante de la Arquitectura. Como soporte de las piezas escultóricas o fundamentalmente de los relieves se utilizan las arquivoltas, los rosetones, y muy especialmente las jambas, las hornacinas, las gárgolas y el parteluz de los pórticos. Todo esto se aprecia en la portada de la figura 92. Para consultar el significado de estos términos se puede consultar el diccionario de arte de la referencia [15], ya mencionada, o cualquier otro similar. En las diferentes partes de los pórticos y aunque las figuras se encontrasen adosadas, tendieron a adquirir un volumen completo. Este “salir” de estas figuras de las edificaciones se contrapuso con el “entrar” de las esculturas de las hornacinas.



Figura 92 (arriba): fachada principal de la catedral de Toledo. Construcción entre los años 1227 - 1234 y 1493.



En realidad, este juego de volúmenes entrantes y salientes de formas cóncavas y convexas es el principio predominante en la configuración plástica de la fachada gótica, que en ocasiones se concibió más como una obra escultórica que como una propia estructura arquitectónica.

Otra faceta del Arte en la que se puede observar interesantes propiedades matemáticas, es la elaboración de relicarios, como el que se muestra en la figura número 93. En ella se muestra un detalle del relicario de Santa Isabel, en el que se observa la utilización de unas formas geométricas muy complejas. Además, esta pieza está decorada con piezas de esmalte, formando motivos geométricos planos.

Figura 93 (izquierda abajo): “Maestas domini”. Detalle del relicario de Santa Isabel; 1249. Cobre dorado y repujado, esmaltes y gemas. Iglesia de Santa Isabel. Magdeburgo, Hesse, Alemania.

El Arte Mudejar y el Mozárabe

En la Península Ibérica durante toda la Edad Media, primero con el Románico y luego con el Gótico, coexiste el arte **Mudéjar**. Este estilo se desarrolla en la España cristiana a partir del siglo XII, y en él predominan las formas y técnicas islámicas que se funden con las cristianas.

Dadas estas características es lógico, lo mismo que en el arte islámico, que se utilicen profusamente los motivos geométricos. Ver el apartado en el que se describe brevemente este arte y sus relaciones con las Matemáticas. **En el arte Mudéjar, se consigue una decoración geometrizada**, mediante la disposición de los ladrillos, esquinados, en saledizo, oblicuos o dibujando una espina de pez.

Incluimos dos ejemplos muy característicos que nos permiten **constatar esta decoración geométrica**, pertenecientes a dos edificios emblemáticos. En la figura 95 se muestra el Templete Mudéjar del claustro del Monasterio de Guadalupe. En él, además de la decoración geométrica, también podemos observar sus formas que desde un punto de vista matemático corresponden básicamente a las de sólidos, como las de los prismas octogonales de la parte superior. En la figura número 96, se muestra la fachada Mudéjar del Alcázar de Sevilla. En esta construcción, además de los relieves geométricos, se aprecia en su parte superior una filigrana con interesantes propiedades matemáticas. También es muy interesante el pórtico de la figura 94, inmediatamente debajo.



Figura 94 (arriba): Pórtico de la iglesia de San Miguel de la Escalada. León.

Otro estilo característico de la Península Ibérica durante esta época es el **Mozárabe**. Fue el practicado por los cristianos que permanecieron en tierras musulmanas. Unión feliz de influencias islámicas, visigóticas, etc. Lo mismo que en cualquier arte con influencias musulmanas, **la Geometría resulta fundamental en su concepción**. Es por ello que ha sido estudiado por muchos investigadores de este campo de las relaciones Matemáticas-Arte.

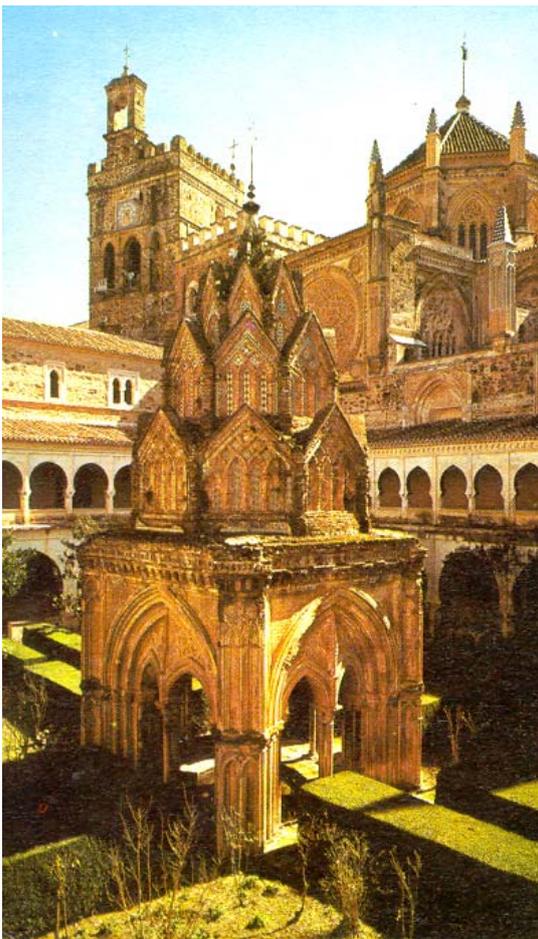


Figura 95: Fray Juan de Sevilla. Templete central mudéjar del claustro del Monasterio de Guadalupe, Cáceres; 1401.

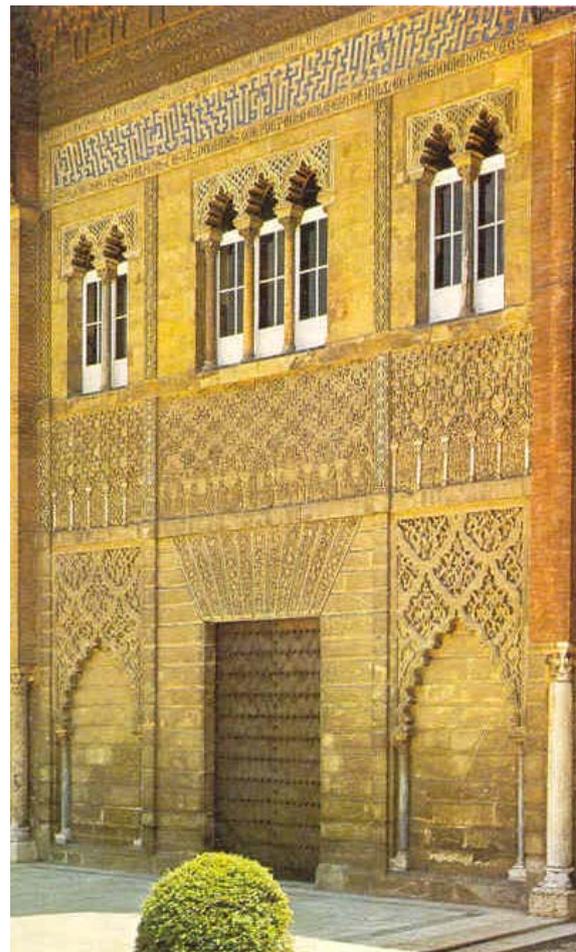


Figura 96 (derecha): Fachada mudéjar del Alcázar de Sevilla. Inscripción de 1405.

3.8 Antecedentes en la Edad Moderna

Esta edad histórica abarca desde la Caída de Constantinopla, hasta la Revolución Francesa. A la concepción estática del universo de la Edad Media, en todos los aspectos va a suceder una visión dinámica plena de iniciativas y experimentaciones que en el transcurso de algunas décadas, **va a cambiar el panorama económico, social, político, científico y, aún geográfico del mundo.** También se ha pensado que la fecha característica para el inicio de esta edad histórica se podría hacer coincidir con un acontecimiento que cambió precisamente el conocimiento geográfico del mundo, el Descubrimiento de América.

En cuanto a la evolución de las Matemáticas hay que resaltar, que durante la Edad Media los árabes habían sido los depositarios de los conocimientos matemáticos griegos. Además, su civilización también aportó a esta ciencia numerosos avances, entre otros y a partir del sistema de numeración hindú, las cifras arábicas. Aunque en Europa no fue hasta el final del siglo XVI, cuando se recuperó la mayor parte de los estudios matemáticos de la antigüedad y se dominó el Álgebra árabe y la Trigonometría.

Durante el siglo XVII hubo innovaciones realmente importantes en todas las ramas de las Matemáticas. También se introdujeron conceptos decisivos en su avance, como el de Probabilidad y fundamentalmente la Geometría Analítica y el Cálculo. Para finalizar, con esta breve descripción de la evolución de las Matemáticas diremos que durante el siglo XVIII se amplió el cálculo al estudio de los procesos en el infinito. Este impresionante desarrollo fue debido a que durante la Edad Moderna vivieron muchos de los considerados **mejores matemáticos de la historia**, como pueden ser Descartes, Newton, Leibnitz y Euler.

En definitiva, todo lo que anteriormente hemos expuesto es lo que nos permite afirmar que los grandes avances de la Matemática, y la aparición de nuevas ramas, como la Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial, es lo que básicamente ha hecho posible la definitiva creación en nuestra época de lo que llamamos Escultura Matemática.



Figura 97: “Triunfo del cálculo digital sobre el cálculo con ábacos”. Ilustración fechada en 1503.

En la figura 97 a la izquierda se ilustran los avances de las Matemáticas durante esta época, con un grabado que idealiza el triunfo del cálculo digital sobre el cálculo con ábacos. Esta imagen ha sido extraída de una enciclopedia de Matemáticas que resulta realmente interesante. Está reseñada en la referencia [16].

Pitágoras, a quien aparte de su famoso teorema, probablemente el más utilizado de las Matemáticas, se le atribuye la invención del ábaco, aparece con expresión ensombrecida, mientras que Beocio considerado el inventor del cálculo escrito con números arábigos, ya ha terminado sus cálculos.

Consustancial con los muy vitales y formidables cambios que se produjeron con la aparición de la Edad Moderna es el Renacimiento.

El Renacimiento

Se entiende por Renacimiento el fenómeno cultural que, en el inicio de la Edad Moderna, retoma los principios de la cultura de la antigüedad clásica actualizándola a través del Humanismo. Esto lo hace sin renunciar a la tradición cristiana, aunque sustituyendo la omnipresencia de lo religioso del mundo medieval por una afirmación de los valores del mundo y del hombre, independientemente de su trascendencia religiosa. Aunque es difícil fijar una fecha de inicio, el Renacimiento empieza en Italia a finales de la Edad Media al menos un siglo antes que en el resto de Europa. Sin embargo, dado que queremos conservar el sentido unitario en el estudio de este estilo vamos a incluirlo en su conjunto en este apartado, correspondiente a la Edad Moderna.

En el aspecto artístico, el Renacimiento supone la sustitución del sistema formal del mundo Gótico por otro distinto, apoyado en los modelos de la antigüedad grecorromana que empiezan a estudiarse con criterio riguroso, buscando en ellos unas definiciones científicas o al menos matemáticas de la belleza y armonía. Esto es lo que hace de esta época que sea única y que en ella se encuentren algunos de los antecedentes más valiosos para nuestro trabajo. Como muestra del valor que se dio a **la Geometría**, debajo incluimos el relieve de la figura 98.

El pensamiento humanista llevaba al artista el estudio de la ciencia y especialmente del cuerpo humano y de la perspectiva. Al respecto, puede ser interesante observar el detalle de un estudio de la cabeza humana de Piero della Francesca, en la figura 99 de la página siguiente. En esta figura se observa que este artista trataba de encontrar relaciones matemáticas para todas las medidas de las diferentes partes de la cabeza. En el último dibujo de esta figura, en el que se presenta una vista superior, se puede ver que intentó marcar la posición angular de las diferentes partes, utilizando múltiplos de treinta grados.

Para el artista del siglo XV las ciencias, entendiéndose por éstas: las Matemáticas, la Geometría, la Óptica, la Perspectiva, la Mecánica, la Anatomía y la Fisiología; así como la teoría de la luz y de los colores, son un medio para conocer y explicar plásticamente la realidad. En definitiva, **en el Renacimiento aparecen ya definitivamente unidos el Arte y las Matemáticas**, lo que es muy importante para justificar los objetivos de nuestra investigación.

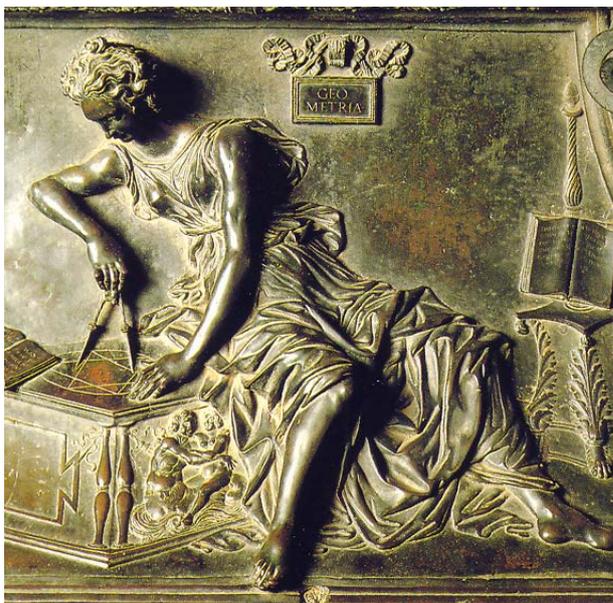


Figura 98 (arriba): “La Geometría” por Antonio del Pollaiuolo; 1484 - 1493. Relieve en bronce a la cera perdida en la tumba del Papa Sixto IV. Roma, San Pedro, Grutas Vaticanas.

Los artistas que vivieron en esta época habitualmente dominaban o al menos practicaban varias facetas del Arte. Un buen ejemplo puede ser el del conocido arquitecto **Alberti**, que dominó la técnica de al menos la Arquitectura, de la que escribió el conocido tratado *De Re Edificatoria*; de la Pintura, sobre la que formuló *De Pictura* y, de la Escultura sobre la que escribió *De Statua*.

Otros casos muy conocidos de artistas que alcanzaron el dominio de varias artes son Miguel Ángel y Rafael. Pero si hay un hombre que pueda resumir por sí solo el afán de saber del humanista, éste es **Leonardo da Vinci**. Personaje genial y polifacético que dominó muchas ramas del Arte: Pintura, Escultura y Arquitectura; y de las ciencias: Física, Geometría, Óptica, Mecánica, Botánica, Anatomía y Fisiología e incluso, las Matemáticas y la Ingeniería.

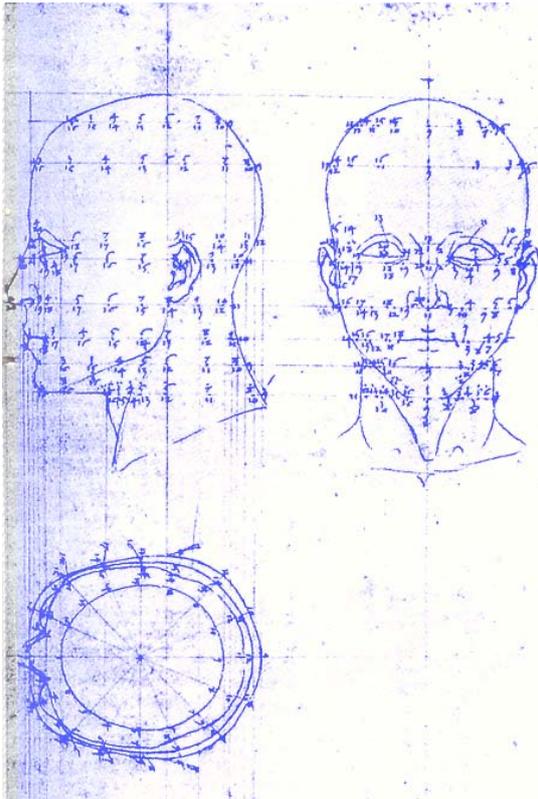


Figura 99 (derecha): Estudio de la cabeza (detalle). Piero della Francesca; hacia 1470. Manuscrito autógrafa “De Prospectiva Pingendi”. Biblioteca Palatina, Parma.



Figura 100 (izquierda): Estudio para iglesias con planta central y cubierta con cúpula. Leonardo da Vinci; 1490 - 1500. Códice B. Instituto de Francia, Paris.

En los códices de Leonardo ha quedado constancia de esta fecundidad inigualable y de una asombrosa capacidad de invención. Como es conocido, anticipó muchas realizaciones técnicas que la humanidad ha llevado a cabo en siglos posteriores, muchas incluso durante el siglo XX. En la figura 100 se muestra un ejemplo de sus diseños en este caso arquitectónicos, un estudio para iglesias con planta central y cubierta con cúpula. Leonardo, a través de reiterados dibujos se planteó muchos tipos diferentes de templos, centrados y coronados con cúpulas, cuya gravedad compensaba con ábsides adosados a los lados de un octógono, tanto de planta semicircular como cuadrangulares; o con ábsides, semicirculares en los extremos de una cruz griega, en cuyos diedros imponía torres octogonales o cilíndricas de varios cuerpos de perfil escalonado. Su profundo estudio nos sirve para que comprobemos la excepcional importancia en la Arquitectura de las Matemáticas y la Geometría y también de otras ciencias, sobre todo la Física.

La Arquitectura Renacentista

La Arquitectura es siempre la el Arte en el que se infiere una relación más acusada con las Matemáticas, lo que es todavía más evidente en el Renacimiento. En el “**Quattrocento italiano**”, esto es, en el arte renacentista italiano del siglo XV se creó una nueva Arquitectura que rompió con las anteriores formas góticas imperantes en Italia hasta principios del siglo XV. El inicio de ésta lo expresó **Filippo Brunelleschi**, mediante la concepción de su primera gran obra la Catedral y sobre todo la cúpula de Santa María del Fiore. En la figura 100 en la página siguiente, mostramos una vista general de esta catedral. Su diseño muestra un exquisito uso de las proporciones. Además, Brunelleschi utilizó formas de sólidos matemáticos y una decoración totalmente geométrica. Los fundamentos de esta primera Arquitectura fueron la medida, la proporción y la razón, tomados de la civilización grecorromana.



Figura 101 (arriba): Catedral de Santa María del Fiore. Brunellesi, 1417 - 1446. Florencia.

En la arquitectura renacentista es fundamental el tratado anteriormente mencionado de **León Battista Alberti**, *De Reaedificatoria*, escrito en diez volúmenes, siguiendo los preceptos de **Vitruvio** que le permitieron fijar sus principios. En el apartado correspondiente al arte clásico hemos estudiado brevemente las características de la escuela Vitruviana. En los esquemas de las figuras 102, debajo, y la número 103, al principio de la página siguiente, se demuestra este uso de las proporciones en el palacio y en la Loggia Rucellai y en un lateral de templo Malatestiano, respectivamente, construcciones realizadas por Alberti.

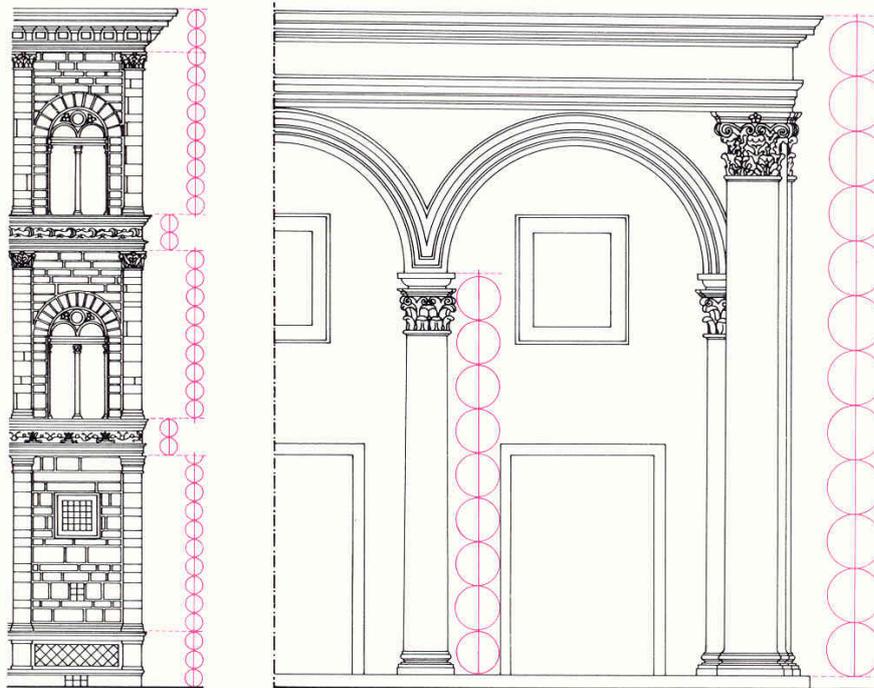


Figura 102: Dibujo en el que se ilustran las proporciones de los órdenes en el Palacio y en la Loggia Rucellai. Alberti; años 1446-1455. Florencia.

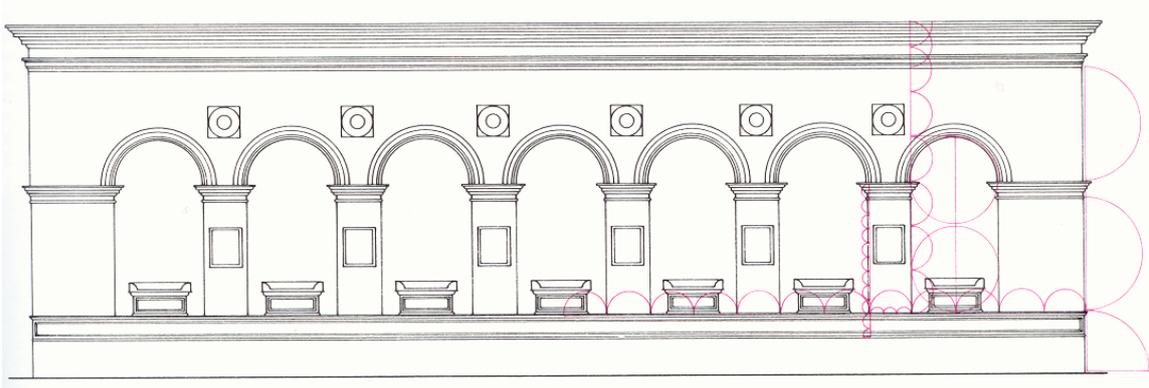


Figura 103 (arriba): Esquema de las proporciones en un lateral de templo Malatestiano. Alberti a partir de 1450. Rímini.

Figura 104 (centro): León Battista Alberti. Iglesia de Santa María Novella; 1470. Florencia.



Incluimos dos fotografías de una construcción renacentista con decoración totalmente geométrica, la Iglesia de Santa María Novella, realizada por Alberti. En la figura 104 se muestra una perspectiva general, mientras que en la figura 105, en el final de la página, aparece un detalle del friso central situado en su fachada. En él se utilizaron motivos geométricos parecidos, pero no iguales.

Existen muchos otros ejemplos de edificaciones renacentistas en las que además de una estructura muy geométrica, también se utilizó una decoración de ese tipo, especialmente en Italia. La biblioteca Laurentiana de Florencia es una de éstas construcciones y fue diseñada por uno de los mejores artistas del Renacimiento y de todas las épocas, **Miguel Ángel**.

A este respecto, se puede consultar la referencia [17]. En este interesante estudio se realiza una clasificación de los motivos clásicos geométricos encontrados en la biblioteca. Esta posibilidad de clasificar motivos artísticos nos estimula en nuestro objetivo final de conseguir una taxonomía, desde un punto de vista matemático, de la Escultura.

El siglo XVI en el arte italiano es llamado “**Cinquecento**”. En él decrece la importancia artística de Florencia, encumbrándose Roma. En torno a la corte pontificia se agrupan artistas de la más variada procedencia. Entre los arquitectos más importantes podemos citar a Donato Bramante, a Rafael y al ya citado Miguel Ángel.

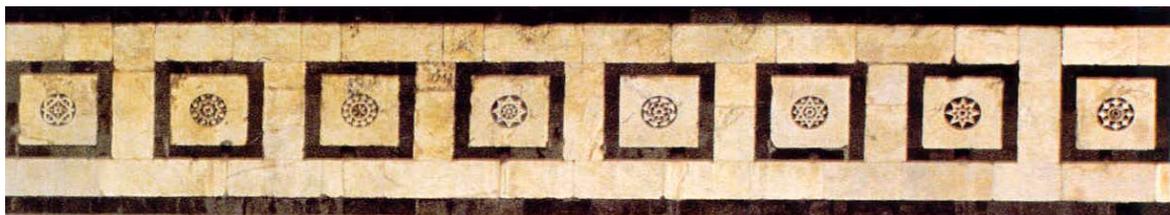


Figura 105 (debajo): Friso de la iglesia de Santa María Novella. Alberti 1470. Florencia.



Figura 106 (arriba): Bramante. Escalera del Belvedere. Vaticano, Roma; 1510.

En la figura número 106, se ve una construcción romana la escalera del Belvedere del Vaticano de **Bramante**. Ésta describe una curva matemática muy utilizada en el Arte la hélice, aunque en la fotografía como es lógico y debido a la perspectiva, otro de los temas en que se constata las relaciones entre el Arte y las Matemáticas, aparece como una espiral.

En España, la introducción de las formas renacentistas es lenta debido, entre otros factores, al auge del Gótico final y a la inercia técnica de arquitectos y albañiles. Aunque las relaciones con Italia se hacen muy directas a partir del emperador Carlos V, lo que hace que la moda de lo italiano se asiente aunque primero en los aspectos exteriores.

La arquitectura renacentista en España se divide en Plateresco y Purismo. En general durante el Plateresco, que es un estilo netamente español, las proporciones de los edificios no son en nada clásicas, excepto en algunas edificaciones de arquitectos italianos. De hecho, persisten elementos góticos y en algún caso hay una síntesis con el Mudéjar.

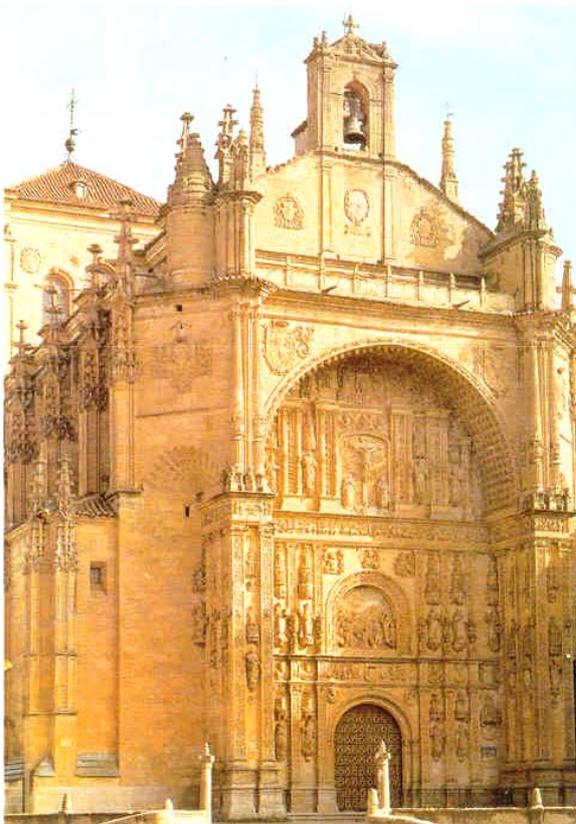


Figura 107 (izquierda): Juan de Álava; Fachada de la iglesia del colegio de San Esteban de Salamanca. 1530 - 1537.

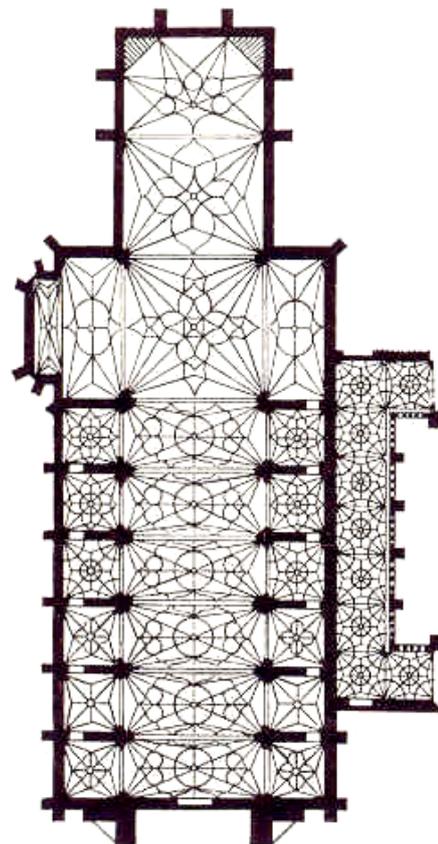


Figura 108 (derecha): Planta de la iglesia del colegio de San Esteban.

Para finalizar este breve estudio de la arquitectura renacentista en España, incluimos un ejemplo en la página anterior, la iglesia del colegio de San Esteban de Salamanca, colegio en torno al cual se formó una escuela de arquitectos y decoradores de singular importancia. En la figura número 107, en la que se muestra su fachada, se aprecia aparte de la disposición geométrica de los relieves, la utilización de formas y motivos de esa índole. En la figura 108, en la que se muestra su planta, se puede observar la permanencia de las bóvedas de crucería y nervaduras del Gótico. Esta compleja estructura demuestra la obligatoria utilización de diferentes conocimientos geométricos en el diseño de esta construcción.

La Pintura Renacentista

La importancia de las Matemáticas y de la Geometría es también evidente en la Pintura. Además de la generalización del uso de la perspectiva también se aprecia la utilización de diversos cánones en la figura humana. Según la referencia [18], ya mencionada anteriormente, Alberti en el tratado de pintura también aludido incluyó el sistema armónico de Vituvio ya estudiado, y que resumiendo consistía en considerar la altura humana como un módulo y referir las otras parte del cuerpo humano a submúltiplos de esta unidad. Además, Alberti en sus tratados estableció el sistema llamado aritmético. Este sistema se basaba en fijar como unidad una parte del cuerpo humano y realizar las restantes partes de cuerpo, utilizando múltiplos de ésta. En Pintura tomó como unidad la cabeza, mientras que en Escultura adoptó el pie.

Durero, el maravilloso pintor alemán, también tuvo unas fuertes inquietudes matemáticas, utilizó los sistemas estudiados por Alberti, probando con diferentes escalas. Además, y según se indica en la referencia [10], anteriormente indicada, creía haber encontrado un único ejemplo de progresión geométrica entre las medidas del cuerpo humano:

$$(\text{cuello a cadera}) \times (\text{rodilla a tobillo}) = (\text{cadera a rodilla})^2$$

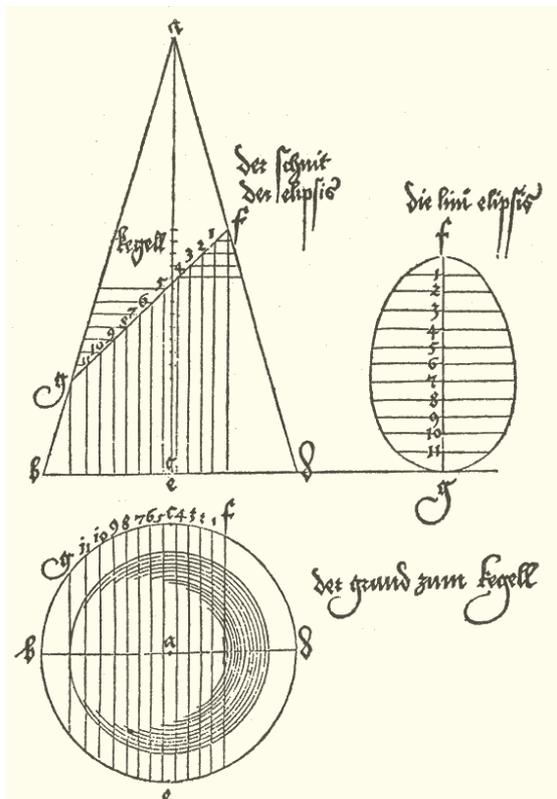


Figura 109 (arriba): Alberto Durero. Construcción de una elipse.

Lo que se expresaría así: “la distancia de la cadera a la rodilla es media proporcional entre las medidas del cuello a la cadera y de la rodilla al tobillo”. Otro ejemplo de un estudio geométrico de este pintor se muestra en la figura 109, cuyos dibujos describen el método de construcción gráfica de una elipse, a partir de la sección de un cono.

En la pintura renacentista también se pueden encontrar otros muchos ejemplos de pintores, en los que se aprecia el uso de las matemáticas en la concepción de sus trabajos. Una grandiosa obra que podría ser una de las más representativas del Renacimiento es la Capilla Sistina de Miguel Ángel, figura 110, en la página siguiente.

Aunque las propiedades matemáticas utilizadas en su diseño no resultan evidentes, si la estudiamos con detenimiento sí que podemos encontrar algunas. Empezaremos con la bóveda, el enorme espacio 36 x 13 m en planta, fue subdividido por medio de diez arcos fajones fingidos en nueve sectores transversales, que por intersección de falsas cornisas se subdividen a su vez en 3 registros.



Figura 110: Miguel Ángel, 1508 - 1512. Capilla Sistina (antes de la restauración). Vaticano.

Arrancando de la parte alta de las paredes se espacian 8 triángulos, en la fotografía de la izquierda, sólo aparecen 6 de estos triángulos. Para lograr la integración en el fresco de las paredes con la bóveda, Miguel Ángel dispuso 12 lunetos. Las 4 esquinas de esta capilla se hallan ocupadas por pechinas de mayor superficie que los triángulos. En toda esta disposición se puede apreciar un cuidadoso estudio de los tamaños y las proporciones para lograr conseguir los efectos estéticos y visuales buscados.

Continuando con este breve estudio, en el resto de esta capilla, también se observa otras características geométricas, como la utilización de abundantes motivos geométricos en la decoración del suelo. Véase por ejemplo en primer lugar de la fotografía los diseños con “ochos” y circunferencias. Además en el trabajo de la reja se puede observar recursos geométricos.



Figura 111 (debajo): Andrea Pisano. Detalle de las primeras puertas del baptisterio de Florencia.

La Escultura Renacentista

Si tenemos en cuenta que el **principal motivo de esta escultura era la figura humana**, resulta difícil encontrar ejemplos de obras cuya concepción sea totalmente matemática, las cuales son el objetivo principal de este estudio. Aunque sí que hemos podido observar algunos trabajos en los que se manifiesta el uso de la Geometría y de algunas características relacionadas, lo que resulta especialmente frecuente en los relieves.

Una de las manifestaciones de la Escultura en la que se consiguieron obras maestras es la realización de puertas monumentales como las diversas del Baptisterio de Florencia. En la figura número 111, se observa un detalle de una de las primeras puertas del escultor **Andrea Pisano**. Perteneció a una familia de artistas que formó un famoso taller artístico en la ciudad italiana de Siena. Aunque esta obra es bastante anterior a esta época, en ella se renueva la técnica de fundición y se anticipa el Renacimiento. También se observa una estructuración geométrica y otros detalles como el marco en el que se inscriben cada uno de los motivos, que se ha formado por un rombo interceptado por cuatro semicircunferencias.

Cuando Lorenzo el Magnífico instaló en un jardín próximo a San Marcos su colección de antigüedades clásicas, acudieron allí los artistas florentinos a dibujar y a modelar ante mármoles famosos como la “Venus de Médicis”. A lo largo del Renacimiento prosiguió el hallazgo de numerosas obras de antigüedad clásica, lo que permitió a los artistas disponer de numerosos modelos, que incluso llegaban a copiar directamente. En definitiva, la Escultura italiana del Renacimiento nace apoyada en los modelos clásicos pero no se rompe la continuidad de ciertas formas de lo medieval, que por otra parte en Italia había estado muy influidas por la supervivencia de lo antiguo. Así en los primeros artistas del “Quattrocento”, se advierte una esbeltez de proporciones y una elegancia lineal y curvilínea que proviene del Gótico internacional.

En la escultura del renacimiento y sobre todo en la italiana, se advierte también el gusto por el desnudo, lo mismo que la utilización casi siempre de los materiales que se llamaban nobles, esto es el mármol y el bronce, además de un acusado interés por lo monumental y lo severo, consecuencia del reflejo enteramente clásico que inundaba a todo el Renacimiento italiano. El escultor más importante del “Quattrocento” florentino es sin duda **Donatello** (1386-1466). Cultivó también la orfebrería y supo de Arquitectura y Pintura. Es en realidad el gran creador del estilo del Renacimiento pleno. En un detalle de una de sus obras, figura 112, se puede observar que la técnica es casi pictórica en la composición de la escena. En este relieve se demuestra la maestría del artista en el manejo de la perspectiva. Otra de las obras más famosas de Donatello es la Cantoría, figura 113, en la página siguiente. En ella se observa el estudio geométrico realizado en la disposición de los motivos y el uso de formas geométricas en su decoración.

Del mismo modo que en la Arquitectura, en la Escultura del siglo XVI, que en el arte renacentista italiano ha sido llamado “Cinquecento”, decrece la importancia artística de la ciudad de Florencia, encumbrándose Roma. En torno a la corte pontificia se agrupan artistas y escultores de la más variada procedencia pero que resultan disminuidos por la presencia de un genio, **Miguel Ángel**, tal vez el máximo de la Escultura, arte que consideraba el suyo. Florentino de nacimiento y discípulo de Bertolo de Giovanni, que a su vez lo había sido de Donatello.



Figura 112 (arriba): Donatello; “San Antonio Curando el Pie a un Joven” (detalle). 1446 - 1450. Relieve en bronce dorado; 0,57 x 1,23 m. Basílica de San Antonio, Padua.



Figura 113 (arriba): Donatello; 1433 - 1439. Cantoría (tribuna para los cantores). Mármol y mosaico. Museo de la catedral de Florencia.

Dada la representación en las obras de Miguel Ángel de forma casi exclusiva de la figura humana, no hemos podido encontrar un ejemplo en el que se noten unas relaciones matemáticas o geométricas claras.

En lo formal, en la Escultura de este siglo las delicadezas y el amor a los detalles del anterior, ceden paso a una grandiosidad monumental y simplificadora. El relieve plano y sutil casi desaparece y se prefiere el bulto redondo y el tamaño superior al natural. **La escultura renacentista en los países europeos** está unida a la difusión de los modelos italianos y a la presencia de escultores italianos, contratados por las cortes europeas.

La escultura renacentista en España presenta frente a la realizada en Italia una serie de características diferenciales. Ante todo, el predominio total y absoluto de lo religioso y el rechazo de lo profano y de lo pagano que queda relegado a una función decorativa en el mejor de los casos. Junto a las características anteriores, hay que señalar la supervivencia del material tradicional de la escultura gótica, la madera policromada, a diferencia de la escultura italiana del Renacimiento que como ya hemos comentado, utilizaba fundamentalmente materiales nobles. Con estos materiales se construyen enormes retablos tan característicos del arte español. En piedra y sólo ocasionalmente en mármol se realizan los monumentos funerarios y, como es lógico, la escultura decorativa y monumental unida a la Arquitectura.

Los escultores españoles de ese periodo más importantes son los burgaleses, **Bartolomé Ordóñez** y **Gil de Siloé**. Éste último era hijo del también famosísimo **escultor gótico Gil de Siloé**. Se formó en Italia y también fue arquitecto de importancia, con lo que dados estos antecedentes se puede deducir su gran calidad. Debajo en la figura 114, se muestra uno de sus monumentos funerarios, el sepulcro de Juan II y de Isabel de Portugal. En esta obra apreciamos como detalle importante su forma en estrella de ocho puntas, lo que otorga un lugar a la geometría en su diseño.



Figura 114 (arriba): Gil de Siloé 1486 - 1488. Sepulcro de Juan II y de Isabel de Portugal. Alabastro. Burgos, Cartuja de Miraflores.

En España el periodo central del siglo XVI coincide con el momento de máximo esplendor de la Escultura, especialmente de la castellana, gracias a la labor de algunos artistas de primer orden como Berruguete y el francés **Juan de Juni**.

Alfonso Berruguete fue hijo del pintor, Pedro, y se educó en Italia, lugar en el que conoció a Miguel Ángel personalmente. Con la gran formación que atesoró y sus maravillosas cualidades personales consiguió realizar una muy brillante obra escultórica pero alejada de los objetivos de nuestro trabajo.

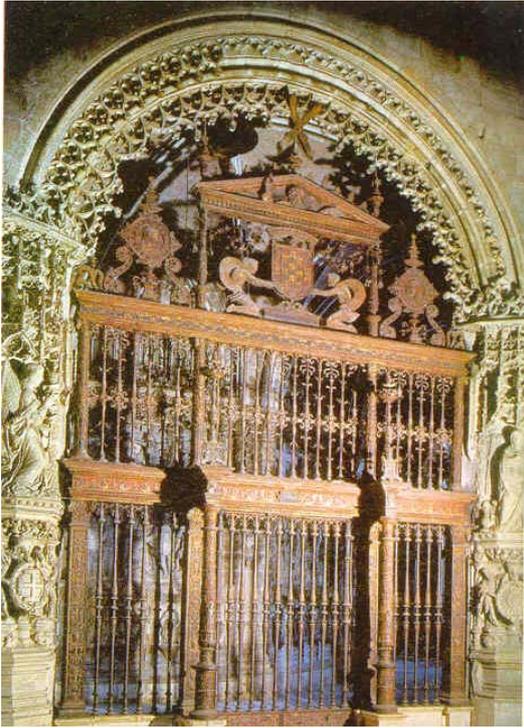


Figura 115 (arriba): Reja de la capilla del Condestable de la Catedral de Burgos. Cristóbal de Andino, 1523.

En el siglo XVI, España conoce un florecimiento extraordinario de las artes industriales y en concreto de la orfebrería y de las artes del hierro, fundamentalmente la rejería. Todo ello se ve favorecido tanto por el abierto contacto político con Italia como por la riqueza que, durante buena parte de este siglo, llega a España con el oro americano. En los trabajos de las rejas y cancelas, sí que se pueden encontrar características que entran en los objetivos de nuestro trabajo. Un ejemplo magnífico de este tipo de obra es el de la figura 115, en la que se muestra la reja de la capilla del Condestable de la majestuosa Catedral de Burgos. En esta fotografía se observa la utilización de motivos geométricos en su diseño, lo que también ocurre en la decoración escultórica del arco.

A la severidad, gran equilibrio y reposo tan característicos de la primera parte del Renacimiento, le sucede en la segunda mitad del siglo XVI, en Italia, un estilo diverso, el **Manierismo**, que substituye la serenidad, por la tensión y la medida, por los efectos de sorpresa.

Quizá fuese Miguel Ángel, tal vez el artista por excelencia del Renacimiento, el que en su vejez iniciase esas formas nuevas tan características del Manierismo, sometiendo a los elementos del arte clásico a una interpretación personal y muy dramática. Ello se puede apreciar en algunos de sus trabajos de la Basílica de San Pedro de Roma. El Manierismo va a ser el preámbulo que permitirá la aparición del Barroco.

El Barroco y el Rococó

El arte del siglo XVII y de los primeros años del siguiente siglo se viene llamando "Arte Barroco", utilizando con sentido amplio un término que hasta comienzos del siglo XX, tenía una significación despectiva y que sólo en fechas recientes ha alcanzado una definición aproximada y una decidida valoración. Barroco, es un vocablo que parece derivar del término portugués aplicado a las perlas deformes o "barruecas", y representa un momento importante de la cultura occidental. Coincide con la afirmación de las nacionalidades, la tensión reforma-contrarreforma y la aparición de un incipiente capitalismo.

En la Ciencia y la Filosofía, durante esta época, son características la experimentación directa y la duda metódica que posteriormente conducen al racionalismo. En cuanto a su evolución y a los importantísimos avances que experimentaron las Matemáticas, se puede consultar el breve resumen que hemos incluido al comienzo del apartado de la Edad Moderna y en el correspondiente a las Matemáticas de la época clásica.

En el Arte, al equilibrio, a la razón y a la belleza que exaltaba el Renacimiento van a suceder ahora dos direcciones distintas. De una parte un mayor interés por la realidad, unido a un deseo de aproximación del hecho religioso en los países católicos. Por otro lado, un interés por lo monumental, lo sorprendente y lo rico y deslumbrante. **El Barroco es el arte del movimiento**, de la tensión dramática, y de la definitiva captación de la perspectiva aérea, en la Escultura y en la Pintura. A continuación vamos a describir brevemente este estilo, resaltando las obras en que se puede vislumbrar algunas de las características que nos interesan.

La Arquitectura Barroca

Ya hemos visto como a finales del siglo XVI una Arquitectura de matemático rigor, solemne y desnuda, servía bien a los ideales de la Iglesia Contrarreformista. Pero conforme va avanzando el siglo XVII, esa desnudez va cediendo el paso a una mayor complicación, fuerza y dinamismo, todas ellas características fundamentales del Barroco.

En esta época barroca las fachadas de las iglesias con dos cuerpos, y con aletones, se van haciendo más movidas y ricas de claroscuro. Éstas se llenan con numerosas y muy variadas obras escultóricas, las columnas se desprenden del muro, y el efecto general es de mayor riqueza y de dinamismo. A la vez se empiezan a dibujar fachadas cóncavas y convexas, que se relacionan directamente con el espacio urbano y que se edificarán, teniendo en cuenta el ángulo bajo el cual van han ser vistas, buscando también los efectos de las perspectivas fugadas y de los ejes diagonales. Características éstas que reflejan la necesidad de un profundo estudio geométrico.

En la figura número 116, debajo, se muestra una fotografía de la Cúpula de la capilla del Santo Sudario de la Catedral de Turín. En ella podemos apreciar una estructuración geométrica que resulta bastante compleja. También, es de destacar la utilización de diferentes y muy interesante formas en el conjunto. Para diseñar y realizar una construcción tan compleja como esta cúpula se necesita un nivel matemático elevado. Esto es un aspecto a tener en cuenta en las construcciones de esta época, y en general, en muchas obras de arte Barrocas.

El arquitecto por excelencia del Barroco es **Gian Lorenzo Bernini** (1598 - 1680). Hijo de un escultor, y él mismo escultor genial, va a encarnar mejor que nadie el deseo de magnificencia de la Roma triunfal. En buena parte, el aspecto monumental de la Roma actual se debe a este extraordinario artista. Inicia su carrera con el Baldaquino de San Pedro de la famosa Basílica del Vaticano, que se puede ver en la figura de la página siguiente.

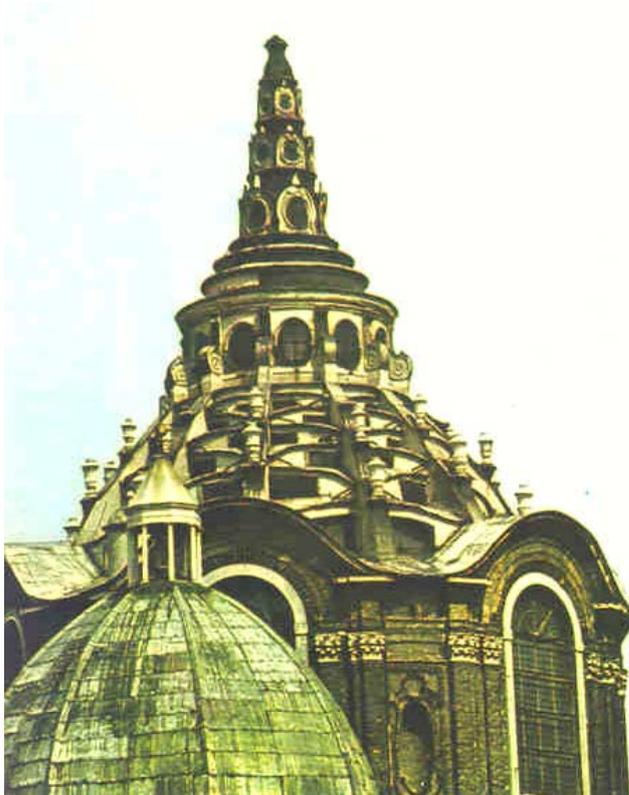


Figura 116 (arriba): Guarino Guarini. Cúpula de la capilla del Santo Sudario de la Catedral de Turín, 1667.

Su obra más importante o por lo menos la más conocida, es la plaza de San Pedro del Vaticano. La enorme “columnata elíptica”, rematada por un conjunto de estatuas, que ideó **Bernini**, parece abrazar a los fieles, a la vez que la multiplicidad de puntos de vista crea una sensación de verdadero bosque de columnas. En la disposición de esta formación es evidente la inspiración en la figura de la elipse y la necesidad del conocimiento de sus características matemáticas.

Junto a Bernini, la gran figura del Barroco romano es el arquitecto **Francesco Borromini** (1599 – 1667), que es en cierta manera su contrario. Si Bernini utilizó siempre los elementos de la arquitectura clásica en toda su pureza, aunque dándoles un sentido diferente de fuerza, magnificencia y contrastes, Borromini con una inventiva extraordinaria, va a romper con todas las reglas, a inventar elementos nuevos, y a concebir la Arquitectura casi en términos de Escultura.

En la figura 117 se ve el Baldaquino de San Pedro, el altar de la Basílica de San Pedro del Vaticano. Está sostenido sobre cuatro columnas salomónicas que hacen aquí su aparición en la Arquitectura y que desde entonces van a ser infinitamente copiadas e imitadas. Este tipo de columnas resulta evidente que se podrían identificar con una superficie matemática. También es muy interesante para estudiar desde un punto de vista matemático, la cúpula de su parte superior. Además, se pueden observar diversas características geométricas en el resto de este monumento, así como en algunos motivos de la decoración. En las bóvedas, y por tanto también en ésta, resulta obvio la utilización en su diseño de diversas consideraciones de tipo matemático y geométrico.

El nombre de Borromini dio origen al estilo que se ha llamado de tipo **Borromeo o Borromíneo**. Comenzó a trabajar, como maestro de obra de la Basílica de San Pedro. También fue escultor, y uno de los más notables del Barroco, aunque en realidad no ejecutó ninguna escultura en el sentido común de la palabra. Además, logró expresarse a sí mismo como algunos maestros modernos, en espirales abstractas o en esculturales filiformes en la cima de sus iglesias. Pero fue sobre todo un escultor de edificios que se expresó con la mayor simplicidad, mediante plantas de edificios elaboradas matemáticamente, con espacios finamente excavados, en los cuales resulta difícil distinguir dónde acaba la Arquitectura y dónde empieza la Escultura.

El principal interés de Borromini siempre estuvo encaminado a modelar el espacio. En las esculturas colocadas en los vértices de sus torres, trabajó con superficies onduladas, con esferas, con espirales y con formas aún menos habituales. Algunas de estas características se pueden observar en la iglesia de la figura 116, en la página anterior. La información sobre este estilo se puede completar en la referencia [19]. El trabajo de este importante artista, dado el extenso uso que hace de la Geometría, entra de lleno en los objetivos de nuestra investigación.



Figura 117: Gian Lorenzo Bernini. Baldaquino del altar de San Pedro. Bronce y oro. Basílica de San Pedro, Vaticano, 1624 - 1633.

Figura 118 (derecha): Johann Bernhard Fischer von Erlach. Fachada y columnas de la iglesia de San Carlos Borroméo. Viena; 1716 - 1737.

Un ejemplo de arquitectura de este tipo pero de una construcción de fuera de Italia, es la figura 118, que muestra la iglesia de San Carlos Borroméo de Viena. Su diseño nos demuestra un cuidadoso estudio geométrico. Se ha enriquecido con dos columnas portentosas, que nos recuerdan a las conmemorativas erigidas por algunos emperadores romanos. En ellas se narra la vida del santo, disponiéndola en espiral. Este uso de la espiral es una característica matemática que además permite dar una idea de avance temporal en los sucesos que se narran en estos relieves.



La Pintura Barroca

El siglo XVII, en el que se desarrollan las nacionalidades políticas en Europa, es por excelencia el **siglo de las escuelas artísticas “nacionales”**. Es evidente que, una vez más, es Italia quien suministra los elementos pero las evoluciones de estas escuelas son independientes. En el Arte Barroco la reacción antimanierista y las dos direcciones fundamentales de la Pintura, **naturalismo y clasicismo**, también tienen su origen en Italia pero van a ser inmediatamente interpretadas de modo diferente en cada país.

La oposición antimanierista más decidida la representa el **Naturalismo o Realismo** que **Caravaggio** lleva a su punto más alto. Utiliza un recurso que hará fortuna, el “tenebrismo”, de forma breve consiste en presentar a los personajes sobre un fondo oscuro, destacándoles con una iluminación dirigida y violenta. El último gran estilo pictórico italiano es el **Pleno Barroco**, que se especializa en decoraciones de bóvedas y muros con un sentido triunfal y grandioso.

Un ejemplo de este estilo es el de la figura número 119, en la que se puede ver el mural de la bóveda de la nave de San Ignacio en Roma. En esta decoración, en un alarde perspectivo, finge arquitecturas que prolongan las reales, incluso simulando una gran cúpula que no existe. Este género de pintura que **exige grandes conocimientos matemáticos y geométricos**, recibe el nombre de “**cuadratura**” y demuestra nuevamente la importancia de las Matemáticas en el Arte, aunque en este caso en una especialidad que no es la Escultura.



Figura 119 (arriba): Padre Pozzo. Mural de la Bóveda de la nave de San Ignacio. Roma; 1691 - 1694.

La figura culminante de la pintura en Flandes, y una de las más importantes de su siglo y de la historia del arte en Europa, es el genial **Pedro Pablo Rubens** (1577-1640). Sus composiciones pictóricas se ordenan habitualmente con un esquema diagonal, lo que les dota de una sensación de movimiento que se prolonga más allá del marco. También resultan importantes dos discípulos del genial Rubens, Van Dick y Jordaens.

La pintura holandesa de este siglo proporcionó un gran maestro **Rembrandt** y además magníficos pintores como Frans Hals y **Vermeer**. El siglo XVII en la Pintura, lo mismo que en la Literatura española, es también llamado “**Siglo de Oro**”. Algunos de sus artistas más importantes son: Francisco Rivalta, José de Rivera, Zurbarán, Murillo y Valdés Leal.

Aunque sobre todos estos conocidos artistas destaca una gran figura, **Diego de Velázquez**, que ha sido considerado el pintor español más importante de la historia. En sus obras pictóricas las Meninas y las Hilanderas, que se han considerado las culminantes, es donde lo que se ha llamado “aire ambiente”, esto es, la consecución total de la perspectiva aérea, llega a su máxima perfección. En definitiva, el desarrollo de la Pintura en el Barroco es realmente extraordinario en todos los países europeos.

En la Pintura no resulta fácil encontrar conceptos matemáticos de aplicación directa y, menos aún, **obras de concepción totalmente matemática**. Sin embargo, uno de los rasgos geométricos que se suele presentar en diversas obras es la disposición las composiciones de acuerdo con una estructuración geométrica muy estudiada. Al respecto, se puede observar los casos de dos de los pintores tal vez más geniales, Rubens y Velázquez.

La Escultura Barroca

Hasta el Barroco, la Escultura fue siempre inscrita en su relación con las otras artes. Los escultores se esperaba que contribuyesen al embellecimiento de la iglesia o del palacio. Su lenguaje especializado era parte de un más amplio discurso. Fue de nuevo el maravilloso artista y escultor Bernini, quien se dio cuenta que los límites de la Escultura eran demasiado estrechos. A este respecto, se puede consultar la magnífica historia de este arte: *Sculture from Antiquity to the Present Day*, referencia [20].

El deseo de fuerza, dinamismo y monumentalidad que presenta la Arquitectura barroca y, el impulso naturalista en la Pintura de este periodo, se dan también en la Escultura, si bien la evolución es un poco más lenta. Ante todo la Escultura del Barroco va a ser la escultura del movimiento. Frente al equilibrio y reposo del Renacimiento, o la tensión interior replegada sobre sí misma del Manierismo. La Escultura barroca va a proyectarse dinámicamente hacia fuera, por eso serán frecuentes las composiciones en aspa, los paños flotantes en el viento y la gesticulación expresiva de brazos y manos.

En la escultura italiana nuevamente vuelve a destacar Bernini, la figura culminante del siglo. Además de numerosas obras escultóricas, como decorador urbano realizó un conjunto deslumbrante de fuentes en la ciudad de Roma. En su etapa central, mientras atiende también a sus importantes encargos arquitectónicos, se rodea de un excelente taller, igual que les sucederá a algunos importantes artistas de su siglo, como el ya mencionado Rubens, cosa que le permitirá atender una enorme cantidad de encargos. Bernini tuvo muchísimos discípulos y colaboradores que prolongan su estilo hasta bien entrado el siguiente siglo XVIII. Su influencia fue decisiva en toda Europa, especialmente en los aspectos más oficiales de la escultura funeraria y contemplativa. Cuando los numerosos artistas y, en concreto los escultores educados en Italia, vuelven a sus países de origen el estilo berninesco inunda Europa.



Se ha de destacar entre todas las escuelas de Escultura de Europa a dos, la francesa y la española. Un ejemplo de un artista francés es la estatua ecuestre de Pedro el Grande, realizada en bronce, figura 120, situada a la izquierda. Aunque se aleja del tipo de escultura que investigamos, la base, es un trabajo que remotamente se podría relacionar con algunas esculturas contemporáneas.

Figura 120: Falconet. Estatua ecuestre de Pedro el Grande. Bronce, 1782. Plaza de los Decembristas, San Petersburgo.

En España, una vez más, las especiales circunstancias de nuestra realidad histórica determinan unas características peculiares de nuestro arte en general y de nuestra escultura en particular. Durante el siglo XVII mientras en Italia, Francia y algún otro país europeo se desarrolla la escultura de estilo berniniano, en mármol y en bronce, con amplio uso de la mitología y la alegoría; en España se cultiva la escultura en madera policromada y de carácter religioso. Mencionaremos algunos escultores de los muchos con gran calidad que hubo en esta época, como Gregorio Fernández y Juan Martínez Montañés. Este último tuvo importantes discípulos como Juan de Mesa y Alonso Cano. Por último citaremos a **Francisco Salzillo**. Aunque hay que resaltar que el tipo de trabajo que hacían se aleja totalmente de nuestra investigación.

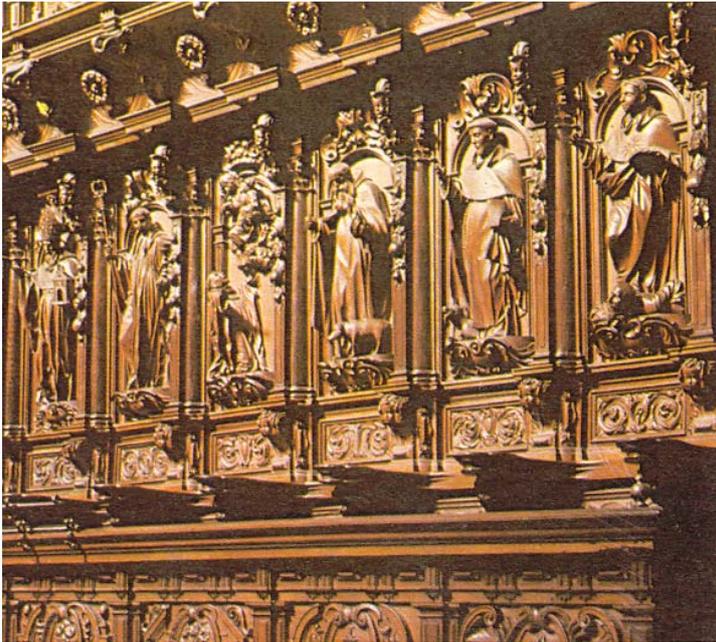


Figura 121 (izquierda): Pedro de Mena. Sillería del coro de la catedral de Málaga. Talla en madera, 1658 y siguientes.

Figura 122 (abajo izquierda): José Benito de Churriguera. Retablo del Altar mayor de la iglesia de San Esteban. Madera policromada y dorada. Salamanca; 1693 - 1697.

Figura 123 (abajo derecha): Ignacio de Vergara sobre diseño de Hipólito Rovira. Portada del Palacio del Marques de dos Aguas. Mármol. Valencia; 1740 - 1744.



Un buen ejemplo que demuestra la categoría de estas obras, aunque en este caso es una talla sin policromar, es la figura 120, primera de la página anterior, en la que se expone una parte de la sillería del coro de la catedral de Málaga, realizada por otro magnífico escultor, **Pedro de Mena**. Las sillerías de los coros son una de las muestras de trabajos escultóricos de una gran calidad. En esta obra sí que podemos apreciar alguna relación con las Matemáticas, como la utilización de algunos motivos de tipo geométrico en su decoración, por ejemplo espirales y pequeños prismas, además de lógicamente presentar una estructuración también geométrica.

En España en torno a los años 1700 y coincidiendo con la aparición de la nueva dinastía de los borbones, se produce un importante proceso de activación cultural llegando a la culminación del arte barroco español. En Castilla, las figuras más significativas son los artistas de la familia Churriguera. Éstos eran de origen catalán, aunque establecidos en Madrid y con importante y muy fecunda proyección hacia Salamanca. Su importancia fue tanta, que el término “**Churiguresco**”, llegó a sustituir al de Barroco en España.

Ejemplos de una gran complejidad, y por tanto de una muy complicada realización, son las obras del artista más conocido de esta familia, **José Benito de Churriguera**. En la figura 121, situada en la página anterior, se puede ver el retablo del altar mayor de la iglesia de San Esteban. Este relieve está realizado en madera policromada y dorada, lo que insistimos resulta común en los retablos españoles y especialmente en los barrocos. Por último, un ejemplo más tardío es la obra figura 122, también situada en la página anterior. Es un trabajo escultórico de los más importantes de este siglo en España, la Portada del Palacio del Marques de dos Aguas. Realizada por **Ignacio de Vergara** sobre diseño de **Hipólito Rovira**.

El Rococó

El estilo que llamamos **Rococó** es en buena parte creación francesa, surgido en el ambiente refinado y frívolo de la regencia del Duque de Orleans, durante la minoría de edad de Luis XV, y mantenido a lo largo del reinado de este último. **En Francia los expertos lo circunscriben entre los años 1680 y 1750, aproximadamente.**



Se le ha llamado así por el motivo decorativo que lo caracterizaba, la “*rocaille*”, palabra francesa que se aplica a un elemento asimétrico que muestra un aspecto de tipo cartilaginoso, medio vegetal, medio calcáreo como concha, que inunda todo. Este último texto en el que se explica la procedencia y el significado de este término, barroco, se ha extraído de la *Historia del Arte* de José M^a de Azcárate, referencia [12], ya reseñada.

Fuera de Francia los modelos del Rococó constituyen una moda general, que se extienden por Europa, pero sobre todo en las pequeñas cortes alemanas y especialmente en los ambientes aristocráticos. Ejemplo de ello son muchos de sus palacios. En este estilo resulta difícil encontrar el arte que es el principal objetivo de nuestra investigación, él conceptualmente matemático.

Figura 124: Francisco Hurtado. Sacristía de la Cartuja de Granada. 1742 - 1747.

En España, simultáneamente con el desarrollo de la arquitectura barroca de la primera mitad del siglo XVIII, y en torno a la corte de los borbones, surge un arte muy vinculado a ciertos modelos del Rococó francés. Ejemplo de ello son los palacios reales de la Granja y de Aranjuez. Una muestra de escultura de la época del Rococó en España se puede ver en la figura 124, en el final de la página anterior. En esta fotografía de la Sacristía de la Cartuja de Granada, se expone la decoración de su interior realizada por Francisco Hurtado. Ésta resulta una obra sorprendente en yeso blanco y está concebida con una fantasía sin igual. En los diseños de sus obras y dada la clara influencia árabe en este artista, podemos encontrar motivos geométricos diversos, como se puede apreciar en las columnas de esta sacristía.

Por último, debemos resaltar que también en todas las artes del Rococó, no sólo en las consideradas mayores o principales, se producen diversas manifestaciones en las que se pueden apreciar relaciones con las Matemáticas. Un claro ejemplo es el arte geométrico de las verjas del Rococó. Además lógicamente también se presentan algunas características en otras decoraciones de tipo geométrico como las de sus jardines.

Neoclasicismo

Es un estilo simultáneo con el Rococó que era el arte de la sociedad aristocrática, aunque como es lógico algunos de sus elementos fueron imitados y copiados en otros círculos artísticos. Este término, Neoclasicismo, engloba a las formas artísticas más adecuadas y preferidas por la burguesía crítica e intelectualizada, amiga de la razón y el orden. Esta capa de la sociedad fue su gran impulsora.



Las formas del Neoclasicismo van a ser totalmente diferentes, ya que **se van a apoyar en el “clasicismo”**, en lo que puede entenderse y juzgarse con la plena razón. Se van a resucitar las formas del pasado romano y otorgar prestigio a lo moral, sobrio y austero. En definitiva, la segunda mitad del siglo XVIII va a moverse entre dos polos opuestos, el Rococó y el Neoclasicismo.

El Arte Neoclásico se basa en el orden clásico y en los modelos de la antigüedad. Toma gran auge a finales del siglo XVIII, con el estímulo de la nueva sociedad que la revolución francesa sueña con implantar, y con **los estudios de lo clásico que fueron renovados con los descubrimientos de Pompeya y de Herculano**. También con las reflexiones teóricas de los historiadores, encabezados por Winckelman, el cual en 1755, publica el ensayo *Reflexiones sobre la Imitación del Arte Griego*.

Figura 125 (izquierda): Ruinas de uno de los templos de Paestum, Italia. Grabado por Piranesi en 1778.

El principal promotor de las excavaciones clásicas fue Carlos VII de Nápoles, futuro **Carlos III** de España. A partir del año 1738 bajo sus órdenes se iniciaron trabajos de excavación sistemáticos en Herculano y, diez años más tarde en Pompeya. Como consecuencia de los grandes descubrimientos de estas excavaciones, se extendió la publicación y la difusión de importantes documentos, bien en forma de texto, bien recogidos en álbumes con dibujos y grabados del arte de la Antigüedad. En la figura 125 situada en el final de la página anterior, y como ilustración de estos importantes descubrimientos relacionados con el arte clásico, se muestra un grabado de esta época de las ruinas de un templo de Paestum en Italia.

La Arquitectura Neoclásica

Se debe distinguir en esta arquitectura dos líneas diferentes. Una que en realidad sigue siendo barroca pero con voluntario deseo de contraste con el Rococó, a consecuencia de lo cual va poco a poco desnudando sus elementos y tendiendo a una simplicidad casi romana. La otra línea es esencialmente funcional y desnuda, cargada a veces de intención simbólica y constituye la verdadera “arquitectura de la razón”. Este otro estilo se vuelca en construcciones de tipo práctico o industrial como bolsas de comercio, bibliotecas, teatros, hospitales, etc.

En España juega un papel muy importante en la difusión de las formas del Neoclasicismo y en la lucha contra el Barroco, la **Academia de Bellas Artes de San Fernando**. Algunas de las construcciones neoclásicas más importantes se deben al arquitecto **Francisco Sabatini**, Puerta de Alcalá y Ministerio de Hacienda en Madrid. Como representante de la verdadera “Arquitectura de la Razón”, debemos citar a **Juan de Villanueva**, que proyectó el Museo del Prado de Madrid.



Figura 126 (arriba): Museo del Prado de Madrid. Proyectado por Juan de Villanueva en 1785.

En la figura número 126, a la izquierda, se muestra una fotografía de la entrada principal de este museo. Esta imagen nos permite constatar que las construcciones de este arquitecto, Juan de Villanueva, estaban dotadas de una sobriedad y elegancia notables.

El estudio de las proporciones en esta obra, y en general en todo su trabajo, no tiene nada que envidiar a los clásicos y sirve para constatar de nuevo la importantísima influencia de la Geometría y las Matemáticas en la Arquitectura.

La Pintura Neoclásica

Resulta más difícil justificar que la influencia de las Matemáticas en la pintura neoclásica sea tan importante. Sin embargo, muchas veces es evidente el estudio de proporciones para la realización de las composiciones y de las figuras humanas incluidas en una obra pictórica. Esto se puede constatar en el estudio para la obra del pintor **Jacques-Louis David** “El Juramento de los Horacios”, en la figura 127 situada en la página siguiente.

Durante el siglo XVIII, **Italia pierde un poco su papel director de la pintura europea**, en favor de Francia. Sin embargo, en la monumental Roma se inicia un movimiento de reacción frente al Barroco y el italiano Carlo Maratta constituye precozmente una escuela que desembocará en el clasicismo y en cuya tradición se forma el pintor alemán **Antón Rafael Mengs**, siendo en realidad el primer neoclásico pleno.

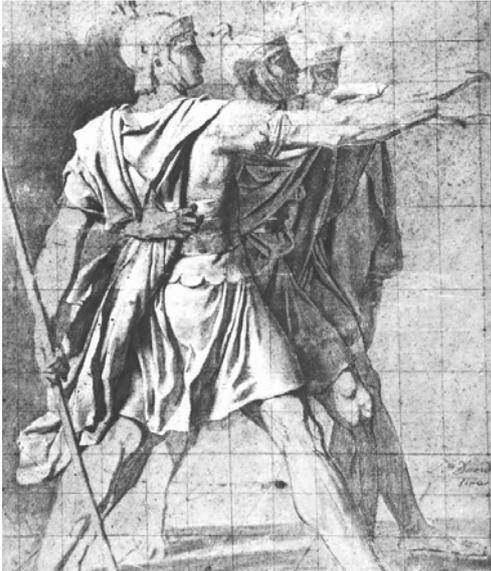


Figura 127: Estudio para el cuadro “El Juramento de los Horacios” por David; 1783. Museo Bonnat. Bayona.



Figura 128: Columna Vendôme. Plaza Vendôme París, 1810.

Aparte de **David**, uno de los mejores pintores neoclásicos franceses, se debe destacar a Jean-Auguste Dominique Ingres. De los pintores españoles de la época hemos de mencionar al genial **Francisco de Goya y Lucientes** que también tuvo una fugaz etapa neoclásica.

La Escultura Neoclásica

Como ya hemos comentado, también en la escultura neoclásica la semilla de Bernini se mantiene viva durante todo el siglo XVIII, si bien bifurcándose en dos líneas. Éstas son, una la del refinamiento y “jugueteo” que se puede llamar Rococó, y otra más severa que será la que irá propiciando la introducción del estilo Neoclásico. Uno de los primeros escultores que se puede considerar neoclásico es **Houdon**, un retratista genial de la sociedad prerrevolucionaria

Igual que Goya recorre todos los movimientos de la época en que le tocó vivir, desde el Rococó hasta el Romanticismo. Hizo retratos de las figuras cumbres de la historia del pensamiento de su tiempo, Voltaire, Roseau, Diderot, etc., y de los políticos claves como, Napoleón, Washinton, etc.

Además de Houdon, los escultores más destacados del neoclasicismo son el italiano **Antonio Canová** y el danés **Bertel Thorvaldsen**. En las esculturas de esta época, en general y exceptuando el cuidadoso estudio de sus medidas y proporciones, resulta bastante difícil encontrar otros conceptos matemáticos.

Un ejemplo de una obra escultórica en la que se aprecia influencia matemática, en su forma, es la Columna Vendôme, que se muestra en la figura número 128. Fue erigida por encargo de Napoleón cuya estatua se ha situado en la cima, en 1810, para conmemorar la batalla de Austerlitz. En esta obra se sigue el modelo de la columna de Trajano. El friso describe un recorrido helicoidal, una figura claramente matemática y muchas veces utilizada a lo largo de la historia del Arte. Su longitud total es de aproximadamente 240 metros. Aunque fue realizado por treinta escultores diferentes, siguiendo un diseño de un pintor, Bergeret, consiguieron una gran unidad en toda esta composición.

Una de las obras de Houdon que representa a una de las figuras cumbres de la historia del pensamiento de su época es la de Voltaire, personaje clave en el devenir histórico, figura 129, en este caso sedente. En la figura 130, también situada en la página siguiente, presentamos la parte superior de la fachada de la Iglesia de Notre-Dame de Lorette, con su magnífico frontón. Esta obra fue realizada por escultor francés **Charles Lefoeuf-Nanteuil**, no tan conocido como los anteriores.



**Figura 129: J. A. Houdon
Voltaire, 1780. Vestíbulo de
la Comedia Francesa, París.**



**Figura 130 (derecha): Frontón y capiteles de la Iglesia
de Notre Dame de Lorette. La Virgen con el Niño
Adorada por los Ángeles. Encargada en 1830 a
Charles Lefocuf-Nanteuil. París.**



**Figura 131 (abajo): Antonio
Canová, “Danzarina”, 1810.
Mármol; 1,77 m de altura.
Galería Nacional de Roma.**

La estructura del edificio de la iglesia y la del conjunto de los trabajos escultóricos que la embellecen, sigue fielmente el modelo de un templo clásico, aunque en este caso los temas de éstos son motivos cristianos. Es de destacar, dados los objetivos de este estudio, la utilización de figuras geométricas planas sencillas como el triángulo y el rectángulo. Además se emplean motivos geométricos diversos para enmarcar la escena.

Antonio Canová es considerado el escultor más importante del Neoclásico. Adquirió una fama e influencia que se extendieron por toda Europa. Sus primeros trabajos son próximos al Barroco, aunque posteriormente realiza algunas de las mejores esculturas del Neoclasicismo, de temas mitológicos como Teséo y el Minotauro, Hércules y Lidia, etc.

Como ejemplo muy típico del trabajo escultórico de Canová, en la figura 131, situada al lado izquierdo exponemos una de sus numerosas obras “La Danzarina”, que es de inspiración totalmente clásica. En esta escultura, si exceptuamos el cuidadoso estudio de las medidas y proporciones del cuerpo humano, resulta bastante difícil encontrar otras relaciones con las Matemáticas.

En España, el papel de la Academia de Bellas Artes de San Fernando resulta también muy importante para el desarrollo de la escultura neoclásica. Por otro lado, las grandes transformaciones urbanas encargadas por el rey Carlos III, ofrecieron a los escultores, que en muchos casos eran de procedencia extranjera ocasiones de trabajar, como por ejemplo en las fuentes madrileñas, aunque a veces con un tardío recuerdo Barroco.

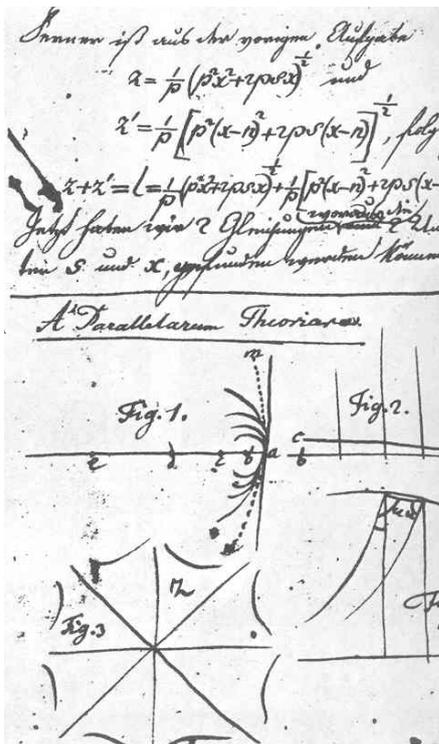
3.9 Antecedentes en la Edad Contemporánea

La Revolución Francesa de 1789 pone en crisis a toda la sociedad del antiguo régimen. Esta fecha clave es la que se considera el inicio de la Edad Contemporánea. Sus efectos no sólo se van a notar en Francia, sino que, como consecuencia de las guerras de Napoleón, los ideales de “Libertad, igualdad y fraternidad”, encontrarán amplio eco en todos los países de la vieja Europa. No sólo en estas naciones, también en las colonias americanas de los europeos prenderán estos ideales revolucionarios, desembocando en la independencia de estos países.

Uno de estos países, Estados Unidos, pasará a convertirse en el siglo XX en la primera potencia mundial en casi todos los campos y por tanto también en el cultural y artístico, en el que pasará a ser un referente. Norteamérica, también ha sido la cuna en el que **se ha desarrollado principalmente la escultura puramente matemática**, durante la segunda mitad del siglo XX. Las obras de esta escultura de concepción fundamentalmente matemática, serán las que básicamente se podrán incluir en la clasificación de esta escultura.

Para que en el siglo XX, especialmente durante sus últimas décadas, se haya podido desarrollar algunos de los tipos de Escultura Matemática, que veremos detenidamente en los capítulos posteriores, han sido muy importante algunos de los avances de esta ciencia que se han producido en la Edad Contemporánea. Este desarrollo fue posible, ya que durante los siglos anteriores, hubo innovaciones realmente trascendentales en todas las ramas de las Matemáticas. También en la Edad Moderna, se han desarrollado áreas como la Geometría Analítica y el Cálculo, lo que ha resultado fundamental para la Escultura Matemática.

El siglo XIX además de por la creación de nuevas ramas de las Matemáticas, como el Álgebra abstracta y el desarrollo de las más tradicionales, destacó por la continua búsqueda del rigor y la estructura, como muestran la aritmetización del análisis y la sistematización de la Geometría por medio de los grupos de transformación. En la actualidad la Topología y la teoría de conjuntos sirven de fundamento a casi todas las ramas de las Matemáticas. Además, la tendencia a la abstracción y axiomatización se ha generalizado.



La Geometría, experimentó un notable avance en los inicios de la Edad Contemporánea. El geómetra **Gaspard Monge** (1746 - 1818) creó la Geometría Descriptiva y, con su desarrollo de la representación de los sólidos por sus proyecciones sobre un plano, sentó las bases del dibujo aplicado a la ingeniería. Su discípulo **Poncelet** (1788 - 1867), a partir de los métodos de Desargues, estableció los principios de la descriptiva moderna que ha resultado muy importante para el Arte.

La Geometría Diferencial, esto es, la que estudia las propiedades de las curvas y las superficies, en el entorno de un punto fue implantada por Monge y perfeccionada por **Carl Friedrich Gauss**, (1777-1855), uno de los matemáticos más trascendentales de la historia. La curvatura gaussiana, permite describir **las geometrías no euclídeas** sin definir las superficies en un espacio euclídeo. Este concepto va a ser muy importante para la escultura puramente matemática del siglo XX.

Figura 132: Página de un manuscrito de Janos Bolyay, referente a la Geometría no Euclídea (1820).

Félix Klein (1849 - 1925) unificó las Geometrías euclídeas, la clásica no euclídea y la proyectiva al definir la geometría como el estudio de las propiedades invariantes respecto a un cierto grupo de transformaciones. Por último, destacamos la geometría de **Riemann**, instrumento que resultó indispensable para el desarrollo de las teorías de **Albert Einstein** (1879 – 1955), uno de los principales genios de la humanidad.

Gauss ya aceptó la idea de una geometría no euclídea, aunque lo mantuvo en secreto. Por ello se atribuye a Janos Bolyay y a **N. I. Lovachesky** el descubrimiento de la primera Geometría no Euclídea que Klein denominó Hiperbólica. En la Figura número 132, situada en el final de la página anterior, se muestra una imagen de una página de un manuscrito de **Janos Bolyay**, referente a la Geometría no Euclídea. Para completar este breve resumen puede ser interesante consultar el libro de la referencia [9].

El Romanticismo

El Neoclasicismo aunque empieza su andadura a mediados del siglo XVIII y por lo tanto en la Edad Moderna, hemos situado su estudio en el apartado anterior, **sigue vigente durante los primeros decenios de la Edad Contemporánea**. Es más, en estos años se convierte en el estilo “oficial” revolucionario. Todo estas aseveraciones se pueden constatar, si se observa la escultura de la figura 133, una obra de Antonio Canová, en la que aparece Napoleón como el dios Marte trayendo la paz. Una escultura en la que, ciertamente, por el afán de seguir los ideales neoclásicos se idealizo a Napoleón, representándole como el dios de la guerra. Aunque dado que se diseñó, siguiendo el modelo de las esculturas de los dioses clásicos que habitualmente eran representados desnudos, provocó que no pudiese ser exhibida durante mucho tiempo.



A finales del siglo XVIII y desde las propias filas del estilo Neoclasicismo triunfante surge, primero tímidamente, luego con gran fuerza una actitud nueva que profundizando en la conciencia subjetiva y en el mundo de la sensibilidad, desembocará en el siguiente estilo el Romanticismo. Figuras como la del pintor **Francisco de Goya** representan muy bien el tránsito de una actitud a otra.

Durante toda la primera mitad del siglo XIX atravesó Europa una nueva sensibilidad, la del Romanticismo, que de alguna forma también surgió como reacción al Neoclasicismo y al pensamiento ilustrado y que **logró transformar totalmente los modelos y las formas del Arte**. El movimiento Romántico además se caracterizó por su acusada vocación universal, incluso intemporal, y por tratar de expresar la infinita soledad del espíritu humano, confrontado con la naturaleza.

En Alemania, uno de los principales focos origen de este movimiento, la fuerte eclosión del espíritu romántico se produjo antes que en otros países, durante el último cuarto del siglo XVIII. En él influyeron de forma determinante dos de los principales y más conocidos escritores románticos Schiller y Goeethe. La estética de este movimiento se presentaba como opuesta a los valores fomentados en el Neoclasicismo, fijando sus modelos en el pasado, en la tradición gótica y medieval.

Figura 133 (izquierda): Antonio Canová, “Napoleón como el Dios Marte Trayendo la Paz”. 1803 - 1809.



Figura 134: Francisco de Goya, tendencia dibujo “Divina Razón no Dejes Ninguno”. Hacia 1820 - 1823. Museo del Prado, Madrid.



Figura 135: Castillo Neogótico de Neuschwanstein. Construido por encargo de Luis I de Baviera. Baviera, Alemania.

Este movimiento artístico en su primera etapa se denomina **Prerromántico** y, de igual forma que acontece en el resto del periodo, tuvo en la Literatura su principal impulsor. La confrontación entre la magnificada razón del Neoclasicismo, y los sentimientos y la pasión del Romanticismo se ponen de manifiesto en el dibujo del pintor Goya, “Divina Razón no Dejes Ninguno”, figura 134.

El Romanticismo

En cuanto a la gran evolución que sufrió la Arquitectura en el siglo XIX, cabe distinguir dos estilos pertenecientes a dos realidades opuestas y que se dieron paralelamente, el Historicismo y la arquitectura Industrial.

El Historicismo, profundamente enraizado en los principios racionalistas y académicos del siglo XVIII, siguió las corrientes historicistas del siglo anterior. En general se expresó a través del Neoclasicismo y, en Alemania e Inglaterra, debido a la grandísima influencia del movimiento Romántico, mediante el **Neogoticismo**.

Un ejemplo de este tipo de arquitectura es el de la figura número 135, situada en el margen izquierdo, el castillo Neogótico de Neuschwanstein. Fue construido por encargo de Luis I de Baviera, en 1815 - 1840. Este estado alemán fue uno de los principales enclaves de las construcciones historicistas, como son por ejemplo los castillos, que fueron no sólo de tipo Neogótico, sino también **Neorrománico, Neotónico, etc.**

Hemos elegido como ejemplo esta construcción para mostrar este tipo de arquitectura, ya que resulta un llamativo conjunto, en el cual es claramente visible la utilización en su diseño de varios sólidos matemáticos, fundamentalmente sencillos prismas, conos y cilindros, que han sido combinados para formar un formidable conjunto geométrico.

Uno de los puntos culminantes de estas fantasías arquitectónicas será el pabellón real inglés de Brighton, cuya fotografía se muestra en la figura número 136, que está situada al principio de la página siguiente. Esta edificación pertenece a un estilo que fue calificado en la época como “**Gótico-Hindú**”. De nuevo, en su diseño se ha utilizado numerosas formas de interesantes sólidos matemáticos, predominando en este caso los que están limitados por superficies curvas y resultando un conjunto arquitectónico realmente espectacular. Además en esta construcción la decoración exterior se ha realizado utilizando numerosos motivos geométricos, lo que proviene de la influencia islámica del arte hindú.



Figura 136 (arriba): John Nash. Fachada del Pabellón Real de Brighton. 1810 - 1815. “Gótico-Hindú”. Brighton, Gran Bretaña.



Figura 137: Torre Eiffel. Gustave Eiffel 125 m de anchura y 321 m de altura. Exposición Universal; París, 1887 - 1889.

La Arquitectura Industrial, la segunda tendencia de la Arquitectura del siglo XIX, fue en la que resultó completamente decisiva la aportación de los ingenieros. Estos fueron quienes mediante nuevos procesos industriales crearon construcciones e infraestructuras de un gran desarrollo tecnológico que hasta aquel momento resultaban imposibles de realizar.

La aparición de las que fueron llamadas **Exposiciones Universales**, permitió que éstas sirvieran de escaparates de una nueva época arquitectónica, que alcanzaría su pleno desarrollo en el siglo siguiente. La torre Eiffel de París es posiblemente el ejemplo más emblemático de arquitectura de estas características.

Esta torre fue erigida bajo las órdenes del arquitecto del mismo nombre y realizada con motivo de la celebración de una Exposición Universal, la de París de 1889, que conmemoraba el primer centenario de la Revolución Francesa. En esta emblemática construcción es evidente la utilización de las Matemáticas tanto por los complejos cálculos necesarios como por su estructura puramente geométrica. Ello se puede constatar en la imagen que incluimos, figura 137.

La Pintura del Siglo XIX

En cuanto a la pintura de finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, no podemos dejar de mencionar a un genial artista, **Francisco de Goya**. Considerado como uno de los principales artistas de la historia de la pintura, su gigantesca obra es entre todas las realizadas por pintores españoles, la que representa de un modo más veraz la idea de España. En su trabajo, se dan cita múltiples registros y estilos, interpretados por un artista único e irrepetible, capaz de sintetizar el pasado y prologar los hallazgos del futuro. Se había iniciado en el Barroco y Rococó, aunque rápidamente evolucionó y fue pasando por diversos estilos como el Neoclasicismo y el Romanticismo, llegando en su última época a realizar obras que incluso se consideran antecesoras del estilo impresionista. Goya ha sido considerado uno de los primeros pintores “modernos”.

Ya hemos comentado que durante la primera mitad del siglo XIX se impuso en Europa el Romanticismo, que también en la Pintura tuvo su principal foco **en Alemania** y como principales exponentes a Caspar Friedrich y Philipp Runge. En Inglaterra los dos pintores más reputados fueron Constable y Turner. En Francia los dos pintores que han sido considerados jefes de filas del romanticismo fueron Gericault y Delacroix. En la figura de debajo, exponemos una obra pictórica de **Runge**. En la Pintura en general, y aparte de que en algunas obras concretas, como por ejemplo la de la figura 138, se puede observar una disposición muy geométrica, y la utilización en otras obras del concepto de la perspectiva, es difícil encontrar otro tipo de conceptos matemáticos.

Las tendencias realistas maduran en el seno del Romanticismo. La disolución de la “visión clásica” contribuye a romper la tradicional jerarquía temática. Ya no es preciso pintar a los héroes y dioses de la antigüedad. Por el contrario, la atención se dirige hacia el paisaje, hacia los tipos populares y hacia lo perecedero. En toda esta actitud anterior está la base del **estilo Realista**, el cual cristaliza como movimiento con la revolución de 1848, que tuvo como escenario las calles de París. Como consecuencia de ésta se impuso la Segunda República y el sufragio universal.

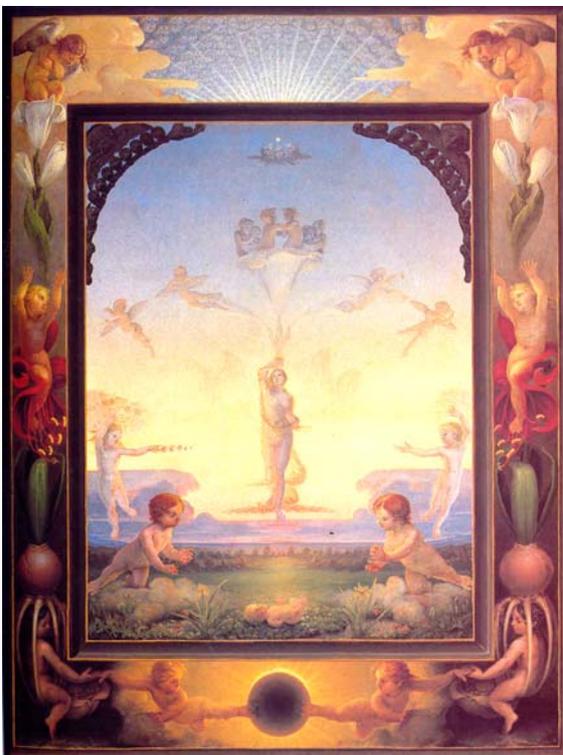


Figura 138: Philipp Otto Runge.
“La Mañana”, 1808. Óleo sobre lienzo;
1,08 x 0,85 m. Galería de Arte, Hamburgo.

Este nuevo movimiento artístico se venía fraguando desde hacía tiempo. Balzac, el novelista reaccionario pero tan admirado por Marx y Engels los principales filósofos de las ideas revolucionarias, muestra en sus obras un gran realismo. Sin embargo, para la pintura y puede que en general para todas las artes visuales, quizá sea más importante **la aparición de la fotografía**. De hecho, sin su consolidación como principal medio de la difusión artística, nos habría resultado muy difícil la realización de esta tesis.

Aunque popularmente se conoce como inventor de la fotografía al francés **Louis Jacques Mandé Daguerre**, realmente el primer hombre que logró fijar en un papel las imágenes del exterior que se proyectaban en el interior de la llamada “cámara oscura”, fue **Joseph Nicéphore Niepce**, quien se asoció con Daguerre posteriormente, y que fue el que tuvo la mentalidad empresarial que hizo posible la rápida difusión del invento. A finales de siglo la fotografía ya estaba muy extendida y experimentó un auge que no ha parado hasta nuestros días.

Gracias a alguno de los pintores anteriormente mencionados, por ejemplo Daumier, y a otros artistas que utilizaron la litografía, técnica que había sido inventada por A. Senefelder en el año 1796; el siglo XIX conoció un nuevo fenómeno en la historia del arte, la “democratización de la imagen” que pudo llegar a buena parte de la población. A ello, lógicamente, también contribuyó de una forma fundamental la invención de la fotografía, anteriormente comentada.

Como reacción a **la pintura romántica**, el tipo predominante en las primeras décadas del siglo XIX, los pintores realistas opusieron una nueva visión de la realidad social, que halló su principal expresión en la obra de algunos pintores franceses como Gustave Courbet, Honoré Daumier y Jean Francoise Millet. Paralelamente a los prolegómenos de la pintura impresionista y bajo la influencia de la escuela de Courbet, en la segunda mitad del siglo XIX, surgió por toda Europa una serie de artistas que conocieron el éxito como Corot, Menzel, y Fortuny, que se consideran enclavados en lo que se ha llamado **Naturalismo**. Éste último pintor es considerado un precursor de los impresionistas.

Para acabar de resumir esta rápida sucesión de estilos pictóricos en este siglo debemos referirnos brevemente al Impresionismo. La expansión de la fotografía, a partir de la década de 1860, y el interés que despertaron los grabados japoneses, constituyen los principales referentes de **la pintura impresionista**. Entre los artistas franceses que iniciaron su desarrollo cabe citar a Édouart Manet y Claude Monet. Entre los pintores que la perfeccionaron a Auguste Renoir y Edgar Degas. Por último, cabe citar a dos pintores que también participaron en este movimiento, aunque posteriormente derivaron hacia otros estilos, éstos son Paul Cezanne y Paul Gauguin. Para profundizar se puede consultar la obra, *Los Impresionistas*, referencia [21].

De las obras de los pintores de estos últimos estilos, no hemos incluido imágenes, ya que no hemos podido encontrar ninguna en la que de forma clara se encuentren otros conceptos relacionados con las Matemáticas que no sean que hemos comentado, la disposición geométrica y la utilización del concepto de la perspectiva, la que incluso resulta más difícil de apreciar en este tipo de obras de pintura “moderna”, sobre todo en las impresionistas. Sin embargo, incluimos un detalle de una estampa japonesa en la figura 139 que se muestra debajo, obra del artista japonés Hiroshige, en la que se utiliza la perspectiva. El arte oriental y en concreto el japonés influyó mucho en la Pintura de esta época.



Figura 139 (arriba): Hiroshige, Goyu. “Sobre el Tokaido” (detalle). Estampa de los años 1833 - 1834. Museo Británico, Londres.

La Escultura del Siglo XIX

En la Escultura de este siglo, sobre todo **al principio, sigue predominando el estilo Neoclásico**, que ya hemos estudiado en un apartado anterior. Un claro ejemplo de ello es el de la mayoría de edificios oficiales que se realizaron en este siglo. Un caso concreto se muestra en la figura 140, situada al final de esta página. En ella se puede ver el frontón de las Cortes Españolas, obra de **Ponciano Ponzano**. Su diseño es totalmente fiel al estilo de los templos clásicos. Debido a ello, esta obra presenta las mismas características de los frontones de la antigüedad, que también hemos estudiado brevemente, en el correspondiente apartado. Dados los objetivos de nuestra investigación destacaremos la utilización en él de figuras geométricas planas muy sencillas como el triángulo, y el rectángulo. Además su decoración también emplea diversos motivos geométricos para enmarcar la escena.

En la Escultura del siglo XIX, también hay que tener en cuenta que una vez desaparecidos los grandes maestros neoclásicos, Canová y Thorvaldsen, que agotaron todas las posibilidades de este estilo, **se planteó la dificultad de hallar nuevos lenguajes para este arte** y así romper el limitado espacio de formas (hombre y animal) que constreñía anteriormente a la Escultura en particular, y a todas las artes visuales en general.

Por lo que respecta al periodo romántico, otro factor iba a contribuir al aislamiento de la Escultura y a repercutir más en su falta de vitalidad creativa. Se trata de su marginación del antiguo ideal, de la realización de la “**obra de arte total**”, esto es, de un proyecto artístico que englobase a todas las artes, que también intentaría llevar a cabo Wagner con la ópera. La unidad de las artes había seducido a los grandes creadores artísticos desde Leonardo da Vinci pero la Escultura quedaba excluida de las mismas. En lo que a los objetivos de este estudio respecta, nos interesa la unidad de todas las artes entre sí, y la de la Escultura con las Matemáticas. En el Renacimiento donde estudiamos brevemente a Leonardo da Vinci, ya pudimos estudiar el fuerte impulso que este genio y otros dieron a esta relación, aunque también nos demostró su dificultad, sobre todo en el caso concreto de la Escultura.

La principal característica en la Escultura de la segunda mitad del siglo XIX, fue la búsqueda de los efectos de luces y sombras, es decir de los efectos pictóricos, interés al que no era ajeno el deseo que presentó de imitar algunas de las peculiaridades de la Pintura. La aparición simultánea de dos importantes escultores en la parte final de este siglo, el genio francés Auguste Rodín y el alemán Adolf von Hildebrand, permitió consolidar de forma definitiva el camino para la revolución del lenguaje escultórico. El primero con su obra excepcional y el segundo con su teoría descrita en *El Problema de la Forma*, en 1893.

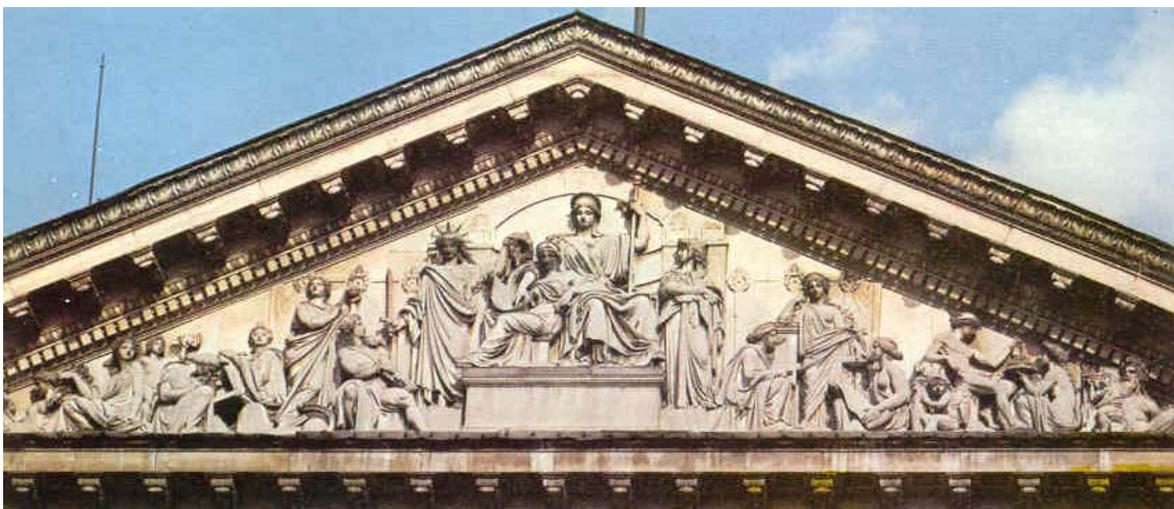


Figura 140 (arriba): Ponciano Ponzano. Frontón de las Cortes Españolas, Madrid.



Figura 141 (arriba): Jean-Baptiste Carpeaux. Detalle del grupo escultórico principal de la fuente, “Los cuatro continentes sosteniendo la esfera celestial”. Bronce, 1872. Jardín del Observatorio de París.

En la figura número 141, se muestra en detalle el grupo escultórico principal de la fuente que tiene un nombre muy alusivo, “Los cuatro continentes sosteniendo la esfera celestial”, cuyo conjunto completo se muestra en la figura 142. Esta es una obra del escultor, **Jean-Baptiste Carpeaux**. Esta fuente, nos permite analizar sus relaciones con las ciencias en general, y con las Matemáticas, por ejemplo a partir de la presencia de la propia esfera armilar. En algunas de estas fuentes monumentales se pueden vislumbrar algunas relaciones con las Matemáticas y sobre todo con la Geometría.

En la figura 143 situada debajo, se presenta una obra diseñada en 1850 por un artista muy completo el pintor y escultor **Honoré Daumier**, que preconiza en algo a la escultura de nuestro tiempo. Sus obras escultóricas evidencian el mismo gusto por la caricatura que él usaba como un arma política.

Las reflexiones estéticas del escultor y sobre todo gran teórico de la Escultura y del Arte, **Adolf Von Hildebrand** (1847 - 1921), parten de la idea de que en toda obra de arte deben prevalecer, por encima de otros aspectos, las formas, línea, volumen y color. El complemento a las teorías de Hildebrand lo constituye la obra del increíble escultor francés Auguste Rodín (1840 - 1917). Se le considera el más importante escultor desde Bernini y uno de los más destacados de la historia de la humanidad.



Figura 142 (arriba): Jean-Baptiste Carpeaux. Fuente de “Los cuatro continentes sosteniendo la esfera celestial”. Bronce, 1872. Jardín del Observatorio de París.

Figura 143 (derecha): Honoré Daumier. “Ratapoil”. Diseñada en 1850 y fundida en 1891. Bronce, aproximadamente 3,50 m. de altura.





Figura 144: Auguste Rodín. “La mano de Dios o la Creación”, Mármol; 0,62 x 0,78 x 0,515 m. Museo Rodín de París; 1897 - 1898.

La obra escultórica de uno de los artistas más impresionantes y innovadores, **Auguste Rodín**, se inspira, sintetizándolas en ocasiones, en todas las corrientes desde las del Renacimiento hasta las del Impresionismo y el Simbolismo. Con ella culmina a la manera “Wagneriana” todo el romanticismo del siglo XIX. Una de las más originales composiciones de Rodín es “La mano de Dios o la Creación”, en la figura 143. Para comprobar la importancia de la obra de este genial artista para la Escultura, resulta muy interesante una visita al Museo Rodín de París.

La Escultura en España, sobre todo en la segunda mitad del siglo XIX, evolucionó mucho con respecto al clasicismo imperante con escultores como **Agustín Querol** (1860 - 1901) y **Mariano Benlliure** (1862 - 1947). Aunque su trabajo posee gran calidad, sus limitaciones se perciben mejor, teniendo en cuenta la simultaneidad de su obra con la de Rodín. En cualquier caso, en la Escultura del siglo XIX, lo mismo que en general en la realizada anteriormente, no existía prácticamente la que hemos denominado “Escultura Matemática”.

Ello se puede comprobar en la fotografía de la figura número 145, situada debajo, en la que se muestra una imagen de la extensa muestra de obras escultóricas expuestas en el **Salón de Escultura del Siglo**, realizado en el Gran palacio de París, en el año 1900. Todos los trabajos que se pueden observar, siguen una concepción bastante tradicional de la Escultura, en la que se representa en general motivos humanos o animales con materiales clásicos. Sin embargo no ocurre lo mismo en la Arquitectura, pues el Gran Palacio de París, pertenece a la segunda tendencia de la Arquitectura del siglo XIX, que se ha denominado industrial y que surgió debido a la aportación de los ingenieros y al gran desarrollo tecnológico experimentado. En este tipo de Arquitectura es todavía más evidente la profunda influencia de las Matemáticas.



Figura 145 (arriba): Vista general del Salón de Escultura del Siglo. Celebrado en el Gran Palacio de París, en 1900.

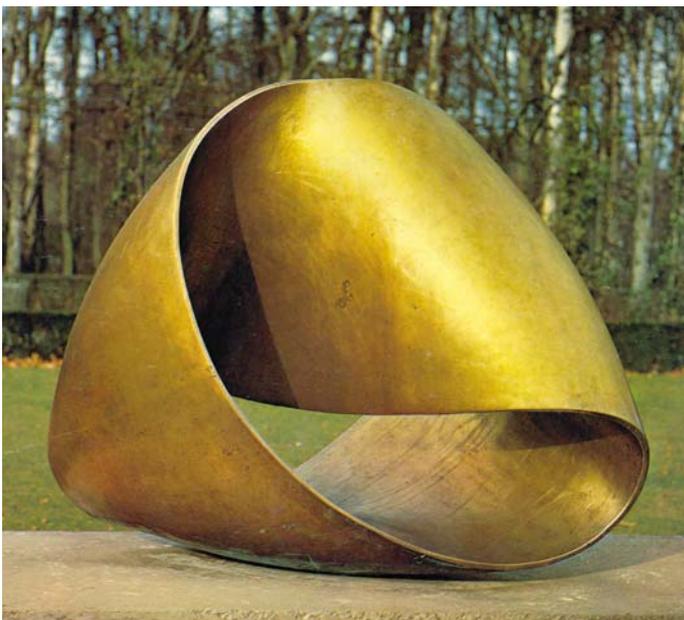
El Arte del Siglo XX

De todos es conocido el trascendental cambio que sufrió el Arte en este siglo. Algunas de las causas que hicieron posible esta transformación son las siguientes. En los primeros años del siglo XX, **la imagen fotográfica** se ha divulgado de modo tan prodigioso, que cada vez tiene menos interés la representación “ilusionista” de la realidad. Por otra parte, el imperialismo, que va a conducir a la primera Gran Guerra, pone también ante la atención occidental el problema de **las culturas no europeas**, con sistemas de representación muy distintos al nuestro como en la escultura negra y oceánica, la pintura australiana o amerindia, etc., que hacen recapacitar en la convencionalidad del sistema figurativo dominante en la cultura occidental desde el Renacimiento.

El arte de estas civilizaciones, a las que se ha considerado “primitivas”, ha influido muy acusadamente en numerosos artistas contemporáneos. El fuerte valor estético de las creaciones de los pueblos primitivos, ya fue muy apreciado por la pujante vanguardia parisiense en la que se inscribieron artistas europeos muy diversos. Este arte fue especialmente reivindicado por los cubistas, véase el caso de Picasso, y los fauvistas, en el caso de Matisse, que resaltamos ahora a pesar de que ya lo hemos mencionado en el apartado correspondiente en que estudiamos el arte de estas civilizaciones.

A esto, habría que añadir un tema totalmente diferente el **imparable progreso científico y técnico**, que habiéndose iniciado a partir de diferentes descubrimientos a finales del siglo anterior, aconteció desde principios del siglo XX. En 1900, Sigmund Freud publica *La Interpretación de los Sueños*, a partir de esta teoría se valora la importancia del inconsciente, y cinco años más tarde, Albert Einstein elabora su famosa y trascendental *Teoría de la Relatividad*. Los esquemas cambian radicalmente, la lógica consciente puede ser una pantalla que oculta otras motivaciones más profundas; el espacio y el tiempo no son fenómenos independientes; la geometría de Euclides no revela la estructura inmutable del mundo y sólo tiene un cierto “valor operativo”.

Los descubrimientos matemáticos, más los increíbles y rápidos avances de la ciencia y la tecnología, van a fomentar la aparición paulatina de un **arte conceptualmente matemático**, cuya escultura es la que intentaremos clasificar en este estudio. Un ejemplo tópico y típico de Escultura Matemática, es el de la figura 146 situada debajo. En esta obra el escultor Max Bill, ha utilizado para su concepción la Cinta de Moebius, un concepto muy claramente matemático, que es el caso más sencillo de superficie no orientada. Esta superficie tiene la propiedad a la que hace honor el título que este artista dio a esta obra, “Superficie sin Fin”.



Este escultor, **Max Bill**, ha realizado varias obras basadas, en la Cinta de Moebius, aunque con diferente estética y acabado, lo que también han efectuado otros varios artistas. El Museo Middleheim de escultura al aire libre de Amberes, donde se encuentra expuesta esta escultura, reúne otros trabajos de indudable interés para nuestro estudio. Éstos se pueden observar en el libro de la referencia [22].

Figura 146 (izquierda): Max Bill, “Superficie Sin Fin”. 1953-1956; Dimensiones: 125 x 125 x 80 cm. Museo Middleheim de Escultura al Aire Libre, Amberes, Bélgica.

Si tuviésemos que destacar una única característica del Arte del siglo XX, ésta sería la **rápida y acusada sucesión de muy diversos movimientos artísticos**. Durante la segunda mitad del siglo anterior, como ya hemos podido apreciar al estudiarlo en los apartados anteriores, ya había dado comienzo el establecimiento de estos rápidos cambios de tendencias que, a diferencia de los “estilos artísticos clásicos” imperantes hasta el siglo anterior, duraban incluso varios siglos y ahora pueden durar sólo unos pocos años. Estos movimientos artísticos a veces han coincidido simultáneamente en el tiempo. Esta acusada sucesión de tendencias, en la Pintura, es incluso más evidente que en las otras artes.

Uno de los movimientos artísticos más pujantes es el Modernismo, que ya durante los últimos años del siglo XIX es el que logra, básicamente, aglutinar a los creadores de diversa ramas del arte, aunque fundamentalmente a los arquitectos. A continuación vamos a describir de forma breve este importante movimiento artístico.

El Modernismo

En este estilo desembocan muchas de las premisas sociales, artísticas y arquitectónicas del siglo XIX. El Modernismo, en sentido amplio, **es un movimiento estético de amplia difusión internacional**. Se desarrolla aproximadamente entre 1890 y 1910. Constituye, cronológicamente, un período de transición entre los dos siglos, pero también desde el punto de vista formal la Arquitectura y el Arte modernistas, recogiendo la mejor herencia decimonónica, preparan el camino a las experiencias más vivas y fecundas del Arte contemporáneo.

No parece haber un punto de partida único para este movimiento artístico. La burguesía enriquecida y refinada de fines de siglo y muchos aristócratas de distintos países europeos sentían la necesidad de un arte enraizado en el pasado, pero más elegante y de mayor calidad que el ofrecido por los artistas historicistas o por los ingenieros del hierro y cristal. En este momento hay una cierta resurrección “romántica” en corrientes literarias como el Simbolismo o en actitudes estético-filosóficas, como la de “**el Arte por el Arte**”, la fantasía libre y creadora, la reivindicación de lo subjetivo y de la melancolía, se despliegan paralelas a una defensa apasionada del goce y del placer que proporcionan las artes.

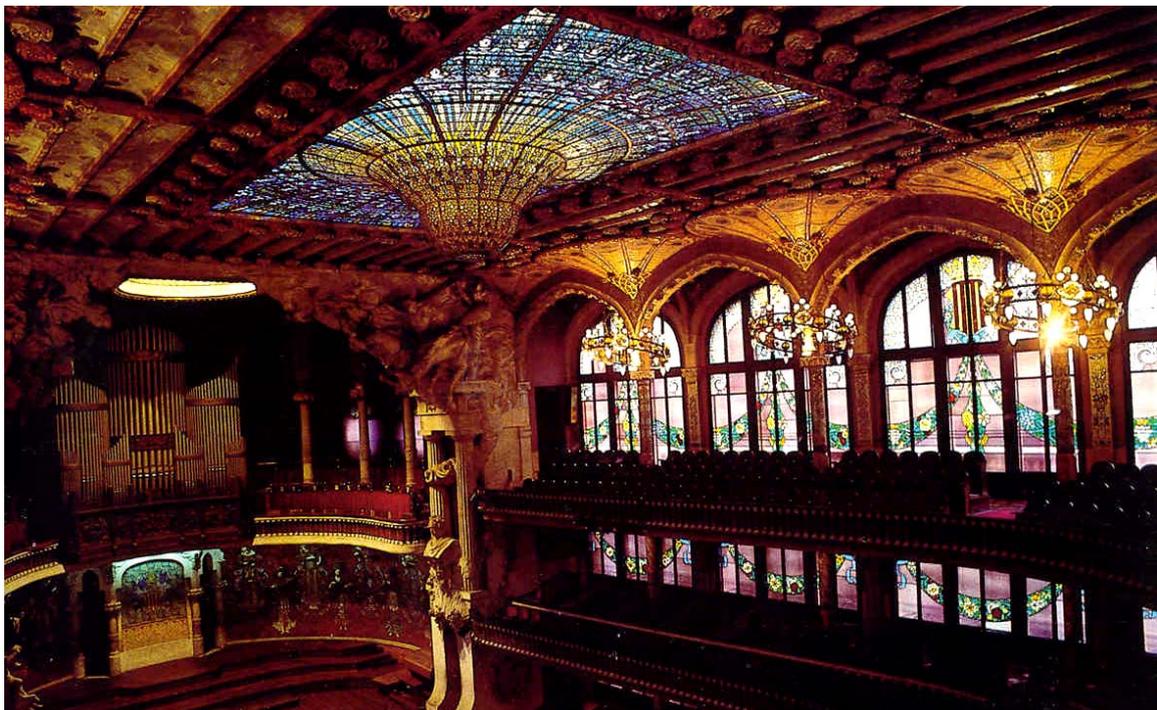


Figura 147 (arriba): Luis Domènech i Montaner; 1905 - 1908. Vista interior de la Sala del Palau de la Música Catalana, Barcelona.

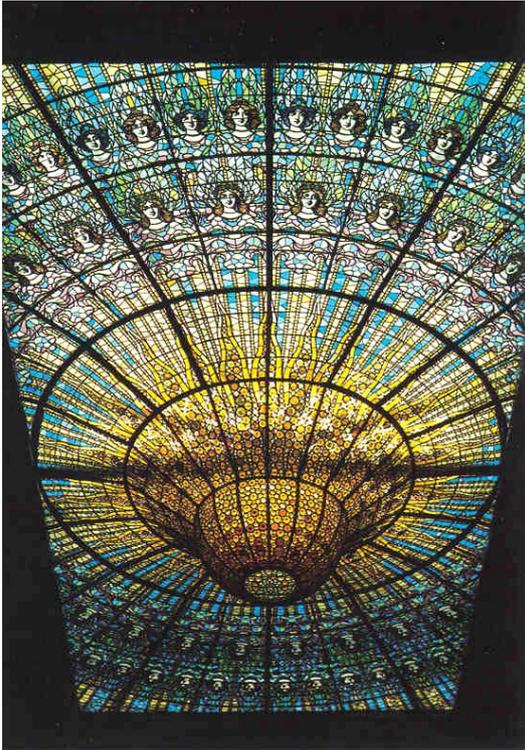


Figura 148: Techo de vidriera y lámpara central de la Sala del Palau de la Música Catalana edificado por Luis Domènech i Montaner. 1905 - 1908, Barcelona.

El techo y la lámpara central de vidriera de la sala del Palau de la Música, en las figuras anteriores; se caracterizan por un diseño totalmente geométrico. De nuevo apreciamos la utilización de la Geometría de una forma fundamental en otras artes decorativas. Domènech i Montaner consiguió una obra arquitectónica, en la cual reúne numerosas facetas del Arte de forma maravillosa.

La obra del joven arquitecto **Antoni Gaudí** (1852 - 1926) es ya de una sorprendente novedad cuando en los años 1878 - 80 construye, la Casa Vicens de Barcelona con un estilo de evocaciones neomudéjares. Entre las interesantes características de este edificio como la policromía brillante en ladrillo, piedra, cerámica y el uso de la luz indirecta, ya se hallaban algunas de las que acompañarán a Gaudí en su creación artística. Su impresionante arte creaba sugerencias que no se podían relacionar con ningún estilo conocido.

Como esta base social y psicológica es común a diferentes países, el Modernismo surge en distintos puntos de Europa. Muy pronto los viajes de los artistas, las exposiciones, las revistas, y la exportación de ciertos productos, van a contribuir a que los hallazgos personales, o incluso los nacionales, alcancen una dimensión internacional. **Este estilo va a tener distintas denominaciones** en cada país, siendo algunas de las más características las siguientes:

- **Art Nouveau, en Francia.**
- **Modern Style, en Gran Bretaña.**
- **Jugendstil, en Alemania.**
- **Sezessionstil, en Austria.**
- **Modernismo, en España.**

El Modernismo alcanzó en **Cataluña**, una de sus versiones más perfectas y acabadas, merced al genio de Antoni Gaudí. Junto a él destacaron importantes arquitectos, como, Josep Puig i Calfach y Luis Domènech i Montaner. En la figura 147 la página anterior, se observa una vista interior de la sala del Palau de la Música Catalana, edificado por **Domènech i Montaner**. En la figura 148 (detalle), se muestra el techo de vidriera y la lámpara central de esa misma sala.

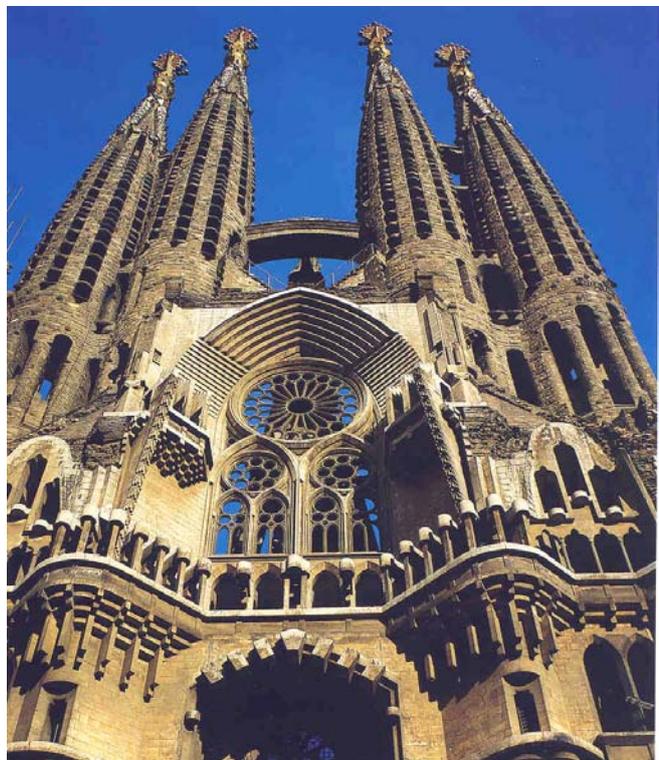


Figura 149: Antoni Gaudí. Fachada de la Natividad del Templo de la Sagrada Familia. 1893 - 1903, Barcelona.

En Cataluña ya existe a fines de siglo XIX una próspera burguesía industrial, culta y nacionalista, que prestará su apoyo a los principales arquitectos del movimiento. El conde Eusebio de Güell es uno de estos magnates industriales, para el que Gaudí construyó algunas de sus mejores obras. El Palacio Güell tiene bastante importancia en su evolución artística. Sus puertas, eran parabólicas, una de las numerosas formas matemáticas que se pueden encontrar en su obra. Están cerradas por rejas de hierro forjado en las que el metal es tratado con una gran ductilidad y libertad. Gaudí, no conviene olvidarlo, era descendiente de una familia de forjadores.

En el año 1883 recibe el encargo de continuar con las obras del **Templo de la Sagrada Familia**, tarea a la que se entrega por completo. Proyectó un edificio gigantesco que habría de tener tres fachadas, cripta y unas naves vagamente góticas. Sólo pudo terminar la Fachada de la Natividad, en la figura 149 en la pagina anterior. Pocas veces en la historia de la Arquitectura se puede contemplar una conjunción tan feliz entre el atrevimiento de las soluciones estructurales y la exuberancia e imaginación del resultado global.

Otras obras de Gaudí muy conocidas son las casas Mila y Batló. En la figura 150, debajo, podemos ver la cúpula de la torre cilíndrica de la casa Batló realizada en mosaico de cerámica troceada y con revestimientos cerámicos, materiales que se identifican con su estilo. La fabulosa imaginación de este artista y su **capacidad para fundir Escultura y Arquitectura** en un marco natural culminan en el Parque Güel, donde los brillantes mosaicos, las columnas inclinadas, los fantásticos corredores y la inventada fauna policroma, hacen de este jardín algo único en la historia del arte europeo. En estos ejemplos anteriores se constata lo que es evidente en toda su obra, el anhelo de la realización de la “obra de arte total”; esto es, un proyecto artístico que englobase a todas las artes. La unidad de éstas que como ya hemos comentado había seducido a los principales creadores artísticos como Leonardo da Vinci, aunque ninguno integró en ella a la Escultura tan totalmente como hizo Gaudí por lo que podríamos decir que su arquitectura es escultural.

En lo que a los objetivos de esta tesis respecta, nos interesa **la unidad de todas las artes entre sí, y más todavía la de la Escultura con las Matemáticas**. Gaudí, se puede decir que dio a esta relación un fenomenal impulso. Existe una variada bibliografía sobre el trabajo artístico de este maravilloso creador. Son interesantes para estudiar las relaciones matemáticas en sus obras los estudios relativos del investigador Claudio Alsina, como el anterior de la referencia [13].



Figura 150 (arriba): Antoni Gaudí. Cúpula de la torre cilíndrica de la casa Batló. Años 1904 - 1906. Mosaico de cerámica troceada y revestimientos cerámicos. Barcelona.

En Valencia el Modernismo, tuvo también un desarrollo realmente interesante. El Mercado Central es una magnífica obra de este estilo. Fue construido en el año 1910. Zonas enteras de nuestra ciudad demostraban que el modernismo consiguió convertirse en un arte muy popular, con construcciones que todavía hoy se pueden ver.

En Europa, tal y como ya hemos comentado, el Modernismo fue el estilo que logró aglutinar a los creadores en general y a los arquitectos en particular. Éste dio lugar a formas arquitectónicas muy diversas. Una de éstas llamada “Sezessionstil”, es la que fue característica en Austria.

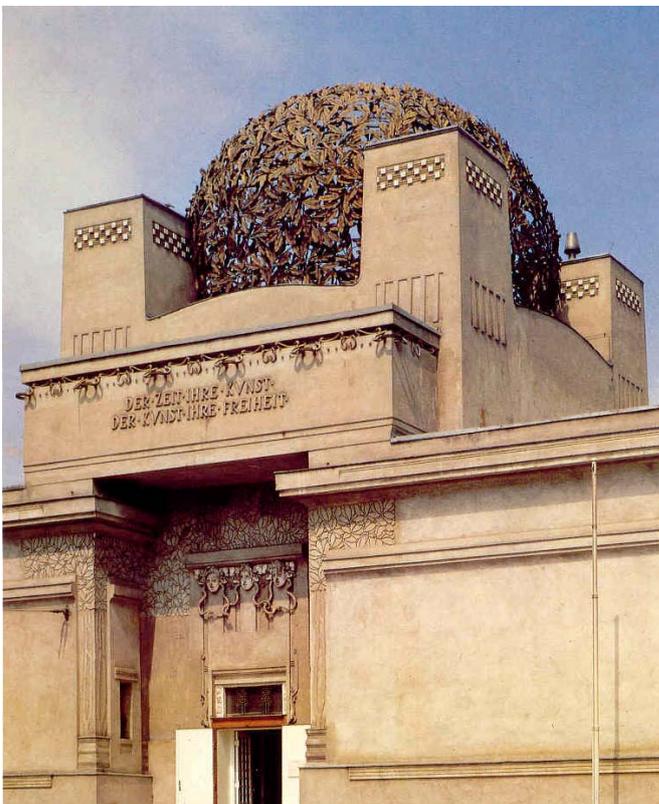
Como ejemplo incluimos el Palacio de la “Secesión”, que se muestra en la figura número 151 situada en la página siguiente. Esta construcción presenta características bastante geométricas, como la forma de su cúpula, o la utilización para componer este conjunto, casi sólo de sencillos prismas.

La Arquitectura del Siglo XX

La arquitectura del siglo XX ha transformado radicalmente el paisaje urbano de las ciudades, a las que se empezó a trasladar la gran mayoría de la población, sobre todo en los países más desarrollados. El nacimiento de lo que se ha llamado “mundo moderno”, definido en buena medida por el Racionalismo y también por el Funcionalismo, ha impregnado a la totalidad del mundo contemporáneo. En el seno del “Art Nuveau” surgen las premisas de la nueva arquitectura. También hemos de mencionar a la “Escuela de Chicago” que se considera como un precedente realmente muy importante de las tendencias de la Arquitectura del siglo. En la figura 152, situada en la página siguiente, se muestra la catedral católica de Tokio del arquitecto japonés **Tange**. Hemos elegido este ejemplo para presentar esta nueva arquitectura, ya que consideramos que este edificio es una auténtica pieza escultórica. Además, su concepción es profundamente matemática. El cuerpo del edificio está formado por sencillos prismas y el tejado es una superficie reglada.

Con la fundación en 1919 de la Escuela de Arquitectura y Artes Aplicadas conocida como la “**Bauhaus**” por el arquitecto **Walter Gropius**, se inició uno de los capítulos decisivos del Arte del siglo XX. La vuelta al concepto de artesanía y la organización pedagógica instaurada por esta escuela fundada en Weimar, propician una profunda renovación de la Arquitectura y del Diseño. Junto a Gropius, algunos de sus principales miembros fueron los pintores **Kandiski y Klee** y el arquitecto Van der Rohe. En el estilo de todos estos geniales artistas, existe una concepción del Arte que razonaremos que se puede considerar como profundamente matemática.

En la figura 153, situada en la página siguiente, presentamos un dibujo que muestra una vista general del edificio de la Bauhaus, diseñada por el propio Walter Gropius y edificada durante los años 1925 - 1926. Esta sede de la escuela, nos sirve para ilustrar la anterior premisa de una concepción profundamente matemática en los trabajos de este movimiento artístico. El cuerpo de este edificio está formado por sencillos prismas, y la ordenación de esta obra en su conjunto es casi totalmente geométrica. En esta edificación se anticipan muchas de las características que serán continuamente utilizadas como base de los diseños arquitectónicos de la segunda mitad del siglo.



En paralelo, la Arquitectura tuvo una gran figura, que ha sido trascendental en su devenir, Charles-Edouard Jeanneret (1887 - 1965), que fue conocido como **Le Corbusier**. Este artista ha sido el principal impulsor del Funcionalismo en la nueva arquitectura.

Su huella ha sido seguida por muchos arquitectos, principalmente en Francia, en los Países Nórdicos y en España. En la figura 154, situada en la página siguiente, se puede ver una fotografía de “Notre-Dame-du-Haut”, edificada por Le Corbusier, en los años 1950-1955. Este arquitecto propuso el uso de volúmenes simples y definió la vivienda como “máquina para vivir”.

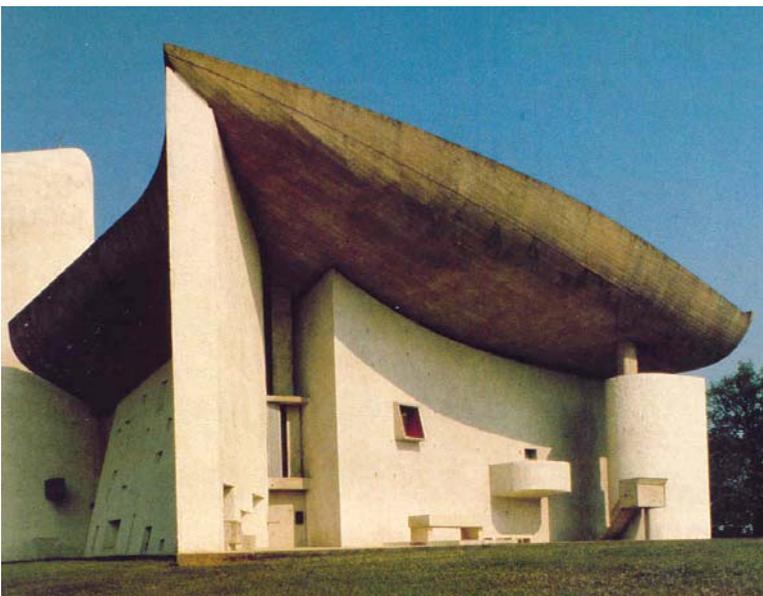
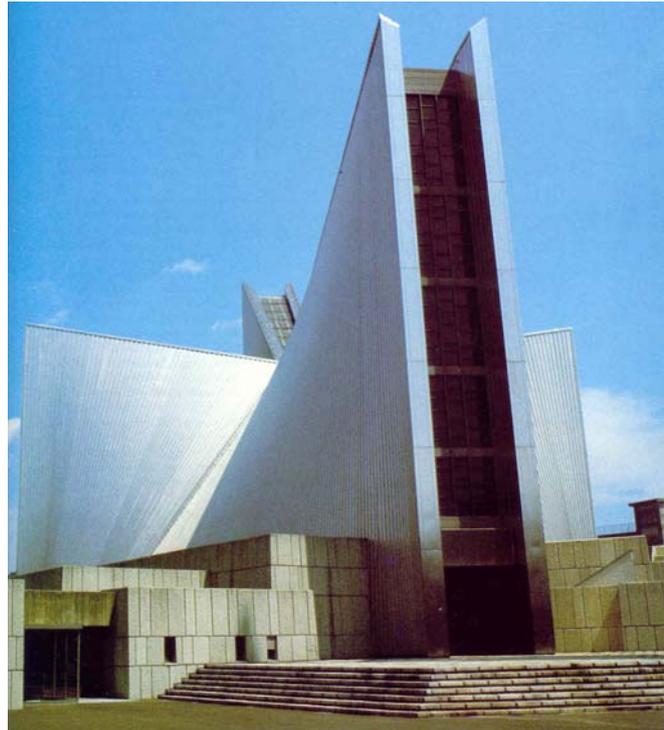
Figura 151 (izquierda): Joseph Maria Oldrich; 1898. Fachada del Palacio de la “Secesión”. Viena.

En la referencia [12], ya mencionada, **M^a Francisca Blanco y Elena Nieto**, investigadoras con estudios muy diversos dentro del campo de las relaciones del Arte y las Matemáticas, nos demuestran con claridad que Le Corbusier, concibe la Arquitectura de forma totalmente Matemática.

Figura 152 (derecha): Catedral católica por Tange. Tokio.

Figura 153 (inmediatamente debajo): Dibujo con vista general del edificio de la Bauhaus por Walter Gropius. 1925 - 1926, Dessau, Alemania.

Figura 154 (al final de la página): Le Corbusier, “Notre-Dame-du-Haut”. 1950 - 1955. Ronchamp, Francia.



La gran influencia de las Matemáticas en Le Corbusier, se constata en su propuesta de utilización de una Arquitectura que tenga en cuenta la “dimensión humana” y la necesidad de la producción masiva y en serie.

Para conseguirlo, contempla por ejemplo la utilización de la famosa “**razón áurea**”, creando a partir de ella y mediante el uso de una secuencia de Fibonacci, una escala que aplica en las construcciones.

La utilización de esta propiedad matemática en la obra de Le Corbusier, se expone con detalle en un libro que precisamente se titula *El Número de Oro*, como se denomina también a la razón áurea, escrito por el reconocido investigador en este tema clásico, **Matila Ghyka**. Ver al respecto la referencia [23].

La Pintura del Siglo XX

Algunos de los movimientos que se iniciaron en el siglo XIX, siguen activos a principios del siglo XX como por ejemplo el **Impresionismo** y sus movimientos “herederos”. El calificativo de “impresionistas” hizo fortuna, siendo hoy unánimemente aceptado. Su mayor importancia no radica en las innovaciones pictóricas que proponen, a pesar de que son muchas y afortunadas, sino en la dinámica de cambio y renovación total que van a imprimir en el arte occidental.

Apenas transcurridos ocho o nueve años desde la primera exposición impresionista, surgen ya síntomas de cansancio y se anuncian nuevas corrientes. El **Neoimpresionismo** es un fenómeno de los años ochenta del siglo XIX, que se prolonga, con ecos apagados, hasta principios del XX. Pero, como tal tendencia, no es una sustitución simple de lo anterior ni hereda en exclusiva las conquistas impresionistas. Resaltamos este movimiento ya que la cuestión que más le preocupaba era **la unión entre el Arte y la Ciencia**. Esto apoya los nuestros objetivos, aunque en la escultura como veremos tarda aun más tiempo en presentarse este fuerte interés en la mencionada unión.

Con respecto al tema de la unión entre el Arte y la Ciencia, se debe recordar la publicación por David Sutter en la revista belga *L'art* de algunos artículos dedicados a los fenómenos de la visión, en los que dijo lo siguiente: “Las reglas no estorban lo espontáneo de la invención ni de la factura, pese al carácter absoluto que adoptan. La ciencia libera de toda incertidumbre, permite moverse en libertad dentro de un círculo muy amplio; por eso, es doblemente injurioso para el Arte y para la Ciencia creer que se excluyen necesariamente.” En esta época interesan de modo particular los problemas ópticos, esto es, la luz, el color, etc., creándose un clima para ello, con hechos como los siguientes: la nueva publicación, en 1889, de la obra de Chevreul, *La ley del contraste simultáneo*, y las experiencias ópticas de Helmholtz y Edouard Rood, etc. Este clima resulta sumamente propicio para las nuevas aportaciones estéticas.

Georges Seurat (1859 - 1891) se formó en ese ambiente y en la admiración a Piero della Francesca, Ingres, Poussin, etc. Desde el año 1882 experimenta su técnica de puntos de colores puros que, colocados junto a otros complementarios, permiten la aparición de un nuevo tono por su fusión en la retina del espectador. El procedimiento, denominado, **Divisionismo o Puntillismo**, está totalmente elaborado en el año 1884 cuando Seurat con otros artistas fundan el “Salón de los Independientes”. En él expuso “El baño”, obra clave en su producción. También pinta “Tarde de Domingo en la Isla de la Grande Jatte”, que es un verdadero programa estético, figura 155.

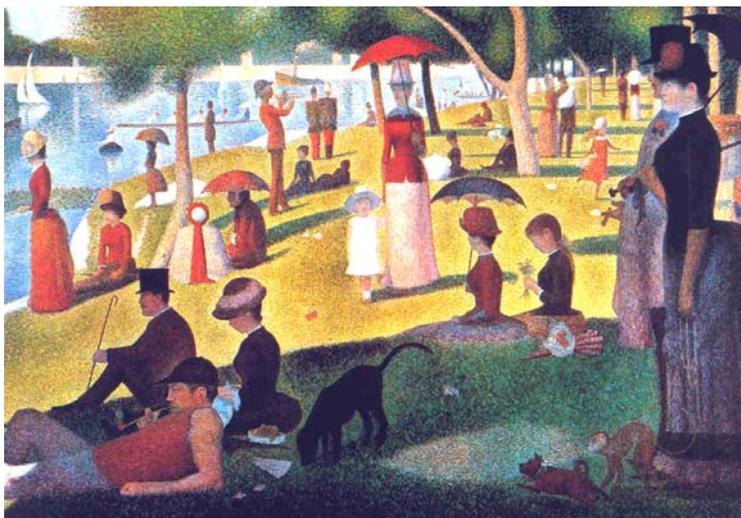


Figura 155 (arriba): Georges Seurat, “Una Tarde de Domingo en la Isla de la Grande Jatte”. Años 1884 - 1886. Óleo sobre lienzo; 2,06 x 3,06 m. Instituto de Arte de Chicago.

Justo este año de la terminación por Seurat de esta obra pictórica, Félix Fénéon consagra en la revista de arte titulada *L'Art Modern*, el conocido y repetido término de neoimpresionismo para designar a estas tendencias.

En él, se produce un contraste muy claro entre la superficie de la tela, llena de múltiples puntos cromáticos, y la estructura geométrica, casi cubista, de las masas y figuras. Los cuadros de Seurat producen la sensación de algo que ha sido confeccionado, siguiendo un programa muy consciente y sistemático.

En definitiva, el Neoimpresionismo pretende un arte “construido” y con ello abre la puerta a todas las corrientes artísticas “abstractas y científicas” del siglo XX. Otros artistas siguen sus propios caminos: **Toulouse-Lautrec**, al hacer algunos carteles modernistas, pone el acento en la idea del arte-comunicación; Paul Gauguin, con sus grandes planos de color arbitrario, con la búsqueda de temas exóticos, libera al Arte de “la naturaleza” sugiriéndonos su reconstrucción. Uno de los genios del arte, **Van Gogh** (1853-1890), inaugura una nueva relación entre el artista y el mundo exterior que se expresa en la realidad de la pintura; Paul Cézanne, en cambio, es el creador de un orden nuevo, el iniciador de una reconstrucción racional y perdurable de la naturaleza.

Finalmente, por estas mismas fechas, en los últimos años del siglo XIX, los pintores **simbolistas** investigan el sueño y el inconsciente, preludiando la gran corriente surrealista. Como puede apreciarse, en los 25 años que median entre 1880 y 1905, la herencia impresionista ha sido recogida de modo tan diverso y creador, que la vemos manifestarse en ciernes casi todas las tendencias importantes del arte contemporáneo.

En los primeros años del anterior siglo XX, siguen desarrollándose de modo colectivo y sistemático las premisas del **Posimpresionismo**. Pero todas estas premisas expresadas en la parte inicial de este capítulo, referentes a las características históricas y sociales, se traducirán en las artes plásticas, de formas muy diferentes. Todos estos precedentes son los que, entre otros, han conseguido producir reacciones, como las siguientes:

- **La afirmación del valor “subjetivo y emotivo” del color, como se hace en el Fauvismo.**
- **La destrucción del espacio monofocal, heredado desde los siglos XV - XVI, como en el Cubismo.**
- **El hincapié en la velocidad y en la simultaneidad como elementos condicionadores de la vida contemporánea, como en el Futurismo.**

El líder del movimiento fauvista es **Henry Matisse**. En la figura 156, se expone su obra “Danza”. En la figura 157 en la página siguiente, se muestra una obra de Pablo Ruiz Picasso, una figura clave de la Pintura de este siglo y que es considerado como uno de los principales artistas de la historia del arte.



Figura 156 (arriba): Henry Matisse, “Danza” (primera versión, panel izquierdo). 1931 - 1933. Óleo sobre lienzo; 3,40 x 3,87 m. Museo de Arte Moderno de París.

Al francés Matisse se le ha comparado a menudo con Picasso, en el sentido de que como ha sucedido en general con los grandes artistas, fueron muy independientes y también en que han ejercido una gran influencia en todo el abanico de la pintura moderna. Además en lo que respecta a nuestros fines, en la obra de ambos genios se puede observar muy claramente la utilización de la Geometría.

Su profunda influencia ya se había anticipado en **Paul Cezanne** (1839 - 1906), quien llegó a elegir repetidamente a sus amigos para poder practicar “un ejercicio de reducción de la realidad, al cilindro, al cono, y a la esfera”. De estas experiencias derivará de forma muy directa la pintura cubista.



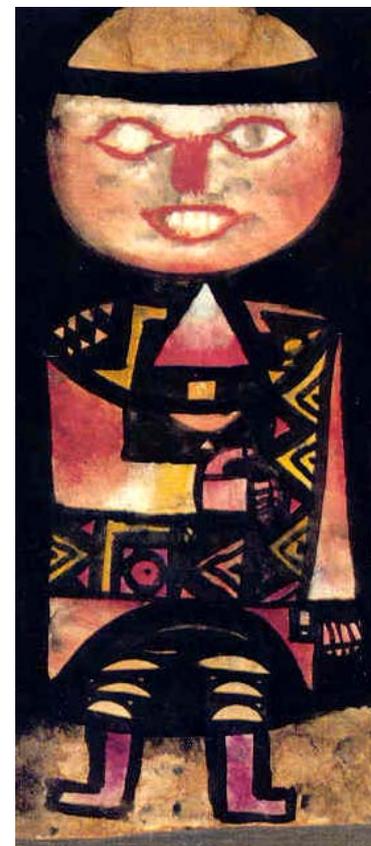
Figura 157 (arriba): Pablo Picasso, “Retrato de Ambroise Bollard”. Años 1909 - 1910. Óleo; 92 x 62 cm. Museo Pushkin de Moscú.

El **Expresionismo** se desarrolló en las primeras décadas del siglo XX en tierras alemanas. Sus precursores fueron **Vincent van Gogh**, Edvard Munch y James Ensor, que otorgaron al color un nuevo poder expresivo y captaron la realidad en toda su crudeza. Sin embargo, su eclosión verdadera se debió a dos grupos de artistas, “Die Brücke (El Puente)”, y “Der Blaue Reiter (El jinete Azul)”, que agrupó a una serie de artistas alrededor de la personalidad decisiva de **Wassily Kandinsky**, autor de la primera obra abstracta.

El artista de origen suizo **Paul Klee** alternó entre trabajos figurativos y abstractos. En la figura número 158, podemos ver su cuadro “actor”, realizado en el año 1923, en el que claramente se observa la simplificación del personaje, mediante formas geométricas sencillas y básicas, como cilindros, triángulos y elipses en la formación del cuerpo del personaje y la realización de su vestimenta con simples motivos geométricos.

De todos los movimientos descritos anteriormente se va desprendiendo la importante idea de que el Arte puede ser no sólo un instrumento de “representación” sino un medio de investigación, un vehículo para llegar a sensaciones y conocimientos inalcanzables por otros procedimientos.

Figura 158 (derecha): Paul Klee; “actor”, 1923. Óleo sobre papel; 0,465 x 0,250 m. Colección Felix Klee.



El nacimiento del **Cubismo**, es uno de los acontecimientos más importantes del arte contemporáneo. Este movimiento no es uno más, sino que representa de forma clara y definitiva la ruptura de la pintura tradicional. Otra de sus consecuencias es que las vanguardias serán en lo sucesivo fenómenos culturales que afecten por igual a todas las artes plásticas.

La figura cubista clave en la pintura y en casi todas las artes plásticas, es **Pablo Ruiz Picasso** (1881 - 1973). En la figura 157 se puede apreciar la influencia de la Geometría en su pintura. Estas experiencias artísticas nuevas no acaban con la Primera Guerra Mundial, pero podemos decir que cuando estalla los artistas de vanguardia han elaborado ya las bases estéticas y morales por las que se va a regir la próxima etapa de la humanidad. Algunas tendencias nuevas son meras consecuencias del Cubismo; en 1918 surge el **Purismo** que pretendió lograr una asepsia perfecta de líneas y volúmenes.

El **Orfismo** fue iniciado en el año 1912 y sus obras pictóricas más características revelan la gran importancia del color y renuncian a la representación “icónica”, con lo que vemos a la “abstracción”, lograrse en **ambientes cubistas, expresionistas y constructivistas**.

Después de la Primera Guerra Mundial se manifiesta en muchos artistas el deseo de expresar un rechazo radical de esa razón que ha llevado a los hombres a la matanza. Rechazo de la coherencia y la lógica cotidiana. He aquí el principio en el que basan su acción los **dadaístas** y los **surrealistas**. Los primeros reivindican el azar, la duda y el absurdo; rechazan violentamente todas las formas mitificadas del arte y, en algunos casos (Dadaísmo de Berlín), disuelven la actividad estética en la acción política. **Los surrealistas** descubren el orden de lo irracional, del sueño y del libre fluir de la conciencia; se inspiran en el psicoanálisis y propugnan hacer del Arte un método para alcanzar ese punto de encuentro entre lo real y lo imaginario donde se resuelven todas las contradicciones. Las formas que resultan de estos planteamientos son muy variadas, pero tienen en común el gusto por la fantasía, por sobrepasar los estrechos límites de lo cotidiano. Como tales vanguardias estéticas, Dadaísmo y Surrealismo tienen antecedentes muy importantes en algunos pintores de principios de siglo y en una tendencia italiana, **la Pintura Metafísica**.

La Geometría tuvo influencia en los pintores surrealistas. Un caso es Dalí, que ha sido estudiado por ejemplo en la referencia [24], titulada precisamente, *Geometry in Dali's Painting*. También la tuvo en **Joan Miró**. Al final de esta página, en la figura 159, exponemos una obra en la que se aprecia. En la formación del cuadro se observa claramente las simplificaciones, mediante formas geométricas planas sencillas y básicas, círculo, triángulo, elipse y espaciales, cono y esfera.

A partir del año 1945, los movimientos artísticos se han multiplicado bajo el efecto de los “mass media”. En este período, la capitalidad artística de Nueva York fue incontestable, aunque el concepto de “aldea global”, que se ha acentuado con el desarrollo informático, está creando espacios virtuales que están transformando el concepto de Arte en el siglo XXI. Sin embargo, la aparición en Nueva York del **Expresionismo Abstracto** significó un fértil período de la Pintura, que halló su contrapartida en el **Informalismo** europeo y que ha permitido con algunos artistas como Tapes y Saura recuperar la presencia española en los foros internacionales.

En las décadas de los sesenta y de los setenta, los “environments y happenings” trataron de borrar las barreras entre arte y vida, mientras proliferaron múltiples y muy dispares tendencias, como **Pop-Art**, **Nuevo Realismo**, **Nueva Figuración**, **Arte Cinético**. La sucesión de tendencias y movimientos en las décadas finales del siglo XX ha sido vertiginosa. Algunas de sus obras y artistas si que han realizado un arte conceptualmente matemático. El ejemplo más conocido de este tipo de arte es **Mauricius Cornellijs Escher**. Exponemos su autorretrato en la figura 160.



Figura 160: Mauricius Echer. “Mano con Esfera Reflectante, (autorretrato en un espejo esférico). Litografía de 1935.

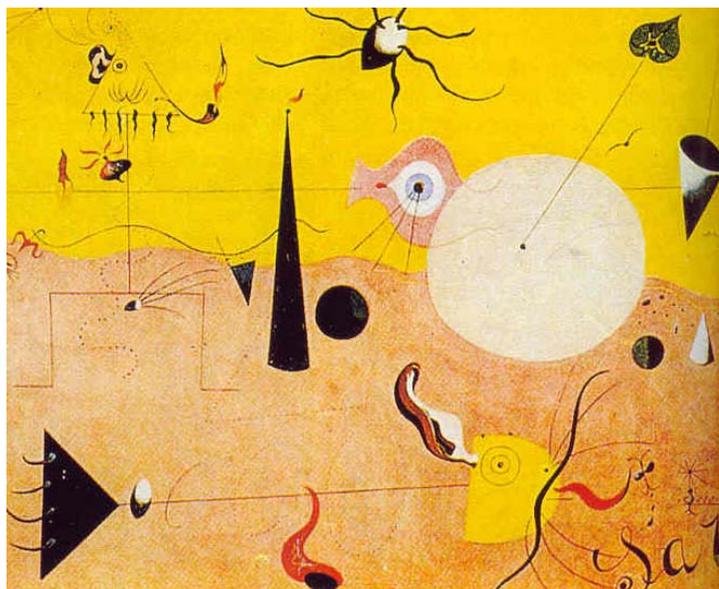
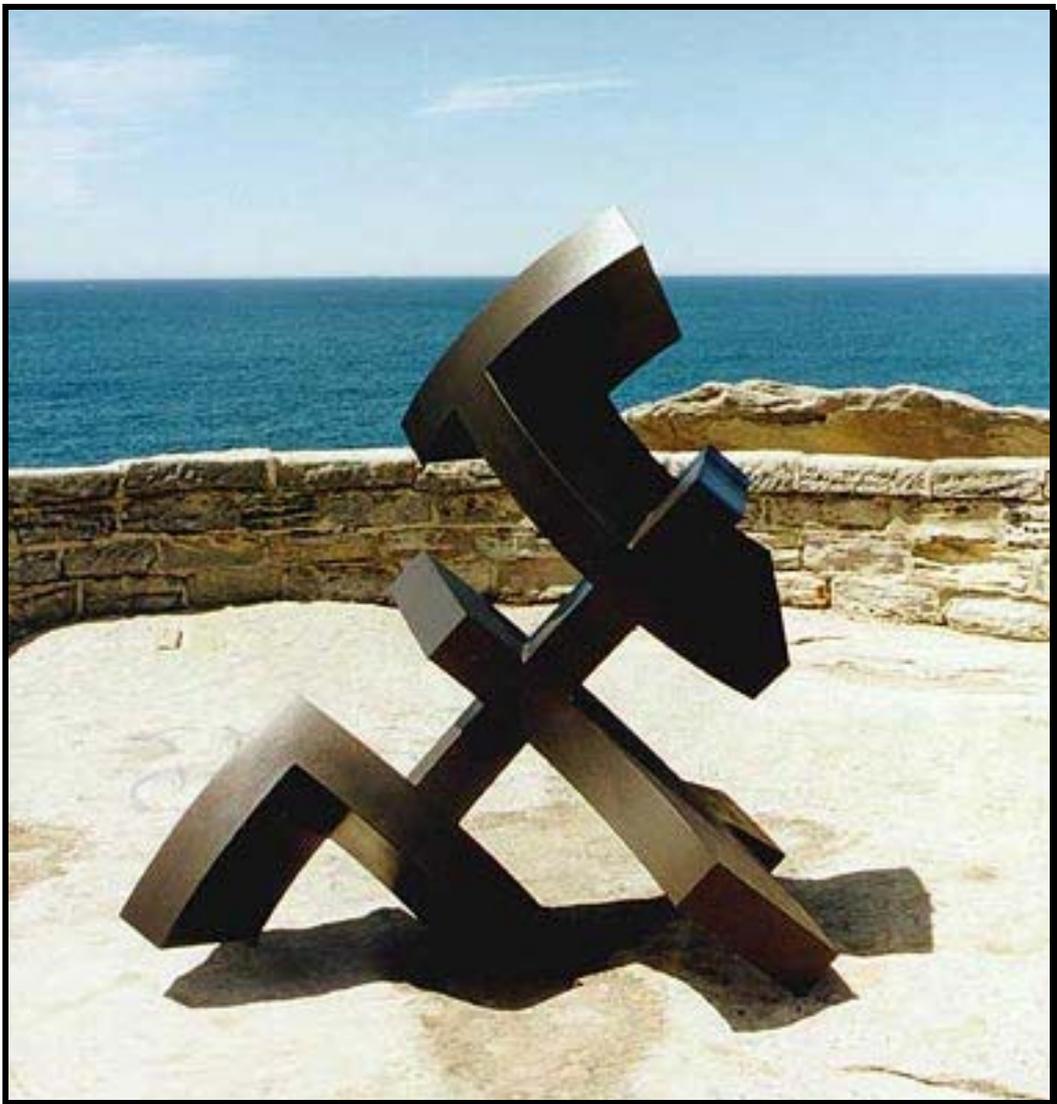


Figura 159 (derecha): Joan Miró. “Paisaje Catalán o el Cazador” (detalle). Óleo sobre lienzo; 0,65 x 1,00 m. Año 1923. Museo de Arte Moderno de Nueva York.

ANTECEDENTES EN LA ESCULTURA DEL ÚLTIMO SIGLO



4 Antecedentes en la Escultura del Último Siglo

Afortunadamente la mayoría de lo expuesto en el apartado anterior, referente a la Pintura, se puede utilizar en la Escultura del siglo XX. Un caso concreto que lo demuestra, es el hecho de que las repercusiones del cubismo en la Escultura no fueron menos importantes que en la Pintura. En definitiva, con los nuevos movimientos artísticos la escultura en este siglo experimenta un cambio radical. **En cuanto a la Escultura Matemática**, veremos que ésta efectúa su irrupción paulatina en el Arte a lo largo de este siglo, como tendremos ocasión de comprobar con los diversos ejemplos que incluiremos en este apartado. En la portada del capítulo, página anterior, incluimos la figura 161, una escultura realizada por **Robert Hague**, y titulada precisamente con un nombre alusivo a las Matemáticas, “Círculo Completo”. A continuación y dividiendo el siglo en sus dos mitades, describiremos brevemente los principales movimientos y escultores del siglo.

4.1 La Escultura de la Primera Mitad del Siglo XX

La decisiva aportación que el movimiento cubista supuso, consiguió revolucionar los principios escultóricos vigentes hasta aquel momento. En el Cubismo, por lo pronto, desaparecen los últimos restos realistas y de modo paralelo a lo que ocurre con el “collage” en dos dimensiones, surgen obras escultóricas que incluso llegan a estar construidas, a veces, con materiales de desecho. **La escultura cubista**, iniciada por el propio Picasso, tuvo sus mejores exponentes en Alexander Archipenko, Jacques Lipchitz y Raymond Duchamp-Villon. Matisse y Picasso que figuran entre los pintores que tienen un papel importante en la Escultura.



En la figura 162, exponemos “Cabeza de Mujer”, trabajo de **Pablo Picasso** en el cual utilizó como modelo a su compañera Fernanda Olivier. En esta obra anticipa muchas de las propiedades de la escultura cubista. Picasso hizo obras escultóricas de diferentes tipos y con medios muy diversos, por ejemplo mediante el ensamblaje de maderas y metales. Obras de este estilo son los instrumentos musicales o los “objetos de uso”. Con él se anuncia el principio **dadaísta** del “objeto encontrado”.

En la ciudad del Arte de este siglo, París, donde la escultura cubista aparece como algo muy revolucionario, se instala la figura del rumano Constantin Brancusi (1876 - 1957), que fue un escultor independiente con un camino personal, muy innovador y coherente.

Figura 162 (izquierda): Pablo Picasso. “Cabeza de Mujer (Fernanda)”. Bronce; 1909. Altura aproximada 35 cm.

Figura 161 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Robert Hague, “Círculo Completo”. Acero pintado, 170 x 160 x 100 cm.



Constantin Brancusi fue un escultor que trató de penetrar a través de lo que él consideraba las capas de la apariencia superficial de las cosas, para buscar las formas esenciales y alcanzar una belleza caracterizada por la reducción de los detalles, una simplificación con la que llegar a las formas absolutas y perfectas a través de un respeto escrupuloso por la naturaleza de los materiales, que trabajaba de forma artesanal hasta lograr unas superficies lisas, pulidas e inmaculadas. Entre sus temas figuran algunos animales. Un ejemplo de ello es “El pájaro en el espacio”, en la figura 163. Hizo múltiples versiones de la figura del pájaro, siendo todas ellas, no tanto una imagen del animal como la síntesis de la idea de vuelo.

La drástica reducción de los detalles y la simplificación con la que Brancusi pretendía llegar a las formas absolutas y perfectas, tiene para nuestro estudio un gran interés, ya que debido a esta filosofía la concepción de su escultura es profundamente geométrica. Esto también ocurre con el trabajo de **Raymond Duchamp-Villon**. Un ejemplo de su escultura es él de la figura 164, “El Caballo”.

La escultura cubista ya no necesariamente se realiza con un bloque homogéneo de piedra o de mármol, por lo que el resultado presenta huecos y vacíos entre las superficies, dando lugar a una nueva estética de la ausencia de masa. El escultor no define ya volúmenes, sino espacios y su método de trabajo tiende idealmente a parecerse cada vez más al de los arquitectos.

Otros importantes escultores cubistas son los subsiguientes. El ruso **Alexander Archipenko** (1887 - 1964) que es un verdadero precursor que, ya desde 1909, acusa la influencia cubista. Su “Mujer andando” y sus ulteriores “Medranos” son progresos notables en lo que respecta a la introducción del vacío en la masa y a la concepción de la escultura como “collage”. En el capítulo siguiente expondremos una obra suya. Jacques Lipchitz, que inventa sus “transparentes”, en los cuales invierte la relación de sólido y hueco, por ejemplo en “Desnudo reclinado con guitarra”. Henri Laurens introduce el color en un deseo mayor de aproximar la escultura a la pintura, ejemplo la obra “Guitarra y Clarinete”.

Las culturas no europeas, como ya hemos mencionado influyen muy profundamente en estos artistas. Ello se puede apreciar en la obra de la figura 165, situada en la página siguiente y realizada por Picasso en madera de roble pintada.

Otro ejemplo de obras escultóricas, que en este caso forman una serie en la que también se puede observar los procesos de reducción de detalles y de simplificación, son los cuatro relieves que se incluyen en la figura 166 en la página siguiente. Estos fueron realizados por **Henry Matisse** a lo largo de un largo periodo que va de 1909 a 1930.

Figura 163 (arriba izquierda): Constantin Brancusi. “El Pájaro en el Espacio”. Bronce; Años 1932 - 1940. Altura 1,347 m, incluyendo la base. Colección Peggy Guggenheim, Venecia.

Figura 164 (derecha): Raymond Duchamp-Villon. “El Caballo”. Año 1914; Bronce; Dimensiones: 1,00 x 1,00 x 0,525 m. Museo de Arte Moderno de París.





Dos grandes escultores españoles, sin contar a Picasso, se suman al Cubismo, haciendo aportaciones decisivas. Estos son **Pablo Gargallo** (1881 - 1934), que tuvo una vida artística dual, participando de las tendencias modernistas y creando, desde el año 1910, esculturas muy interesantes a partir de chapa metálica, efectuándoles graciosas incrustaciones, próximas a la estética del “Art Deco”.

Mayor interés tiene **Julio González** (1876 - 1942), hijo de un herrero con quien aprendió el arte tradicional de la forja y la moderna técnica de la soldadura autógena. En su trabajo a partir del año 1927, utiliza la chapa recortada, con la que realiza auténticas construcciones que alcanzarán cada vez mayor grado de abstracción. Las obras de Julio González además presentan ciertos ecos surrealistas. Este escultor fue el primero en usar el hierro de modo sistemático, abriendo así esta vía a uno de los capítulos más fecundos de la historia universal de la Escultura.

Como ejemplo incluimos la figura número 167, situada en la página siguiente. Por un lado, destacamos la influencia en ella de las culturas primitivas, ya que esta obra nos recuerda a ciertas máscaras africanas. Por otro lado, demuestra lo mismo que la mayoría de la escultura cubista una concepción de sus trabajos profundamente geométrica.

Otro campo en el que se ha extendido la escultura desde el Renacimiento es la realización de **fuentes ornamentales**. En la figura 168, en la página siguiente, podemos observar la fuente realizada por Joseph Maria Oldrich. La hemos incluido, ya que es evidente el sencillo diseño geométrico efectuado por el autor.



Figura 165 (arriba izquierda): Pablo Picasso, Obra titulada: “Figura”. Madera de roble pintada. Año 1907. Altura aproximada 80 cm.

Figura 166 (izquierda y debajo): Henry Matisse. Serie de cuatro relieves titulada “Mujer de Espaldas”. Bronce. Todas las piezas de altura 1,85 m, aproximadamente. Cronológicamente, de arriba abajo y de izquierda a derecha: 1909, 1913, 1916 - 1917, 1930.





Figura 167 (arriba): Julio González, "Cabeza". Chapa de hierro soldada.

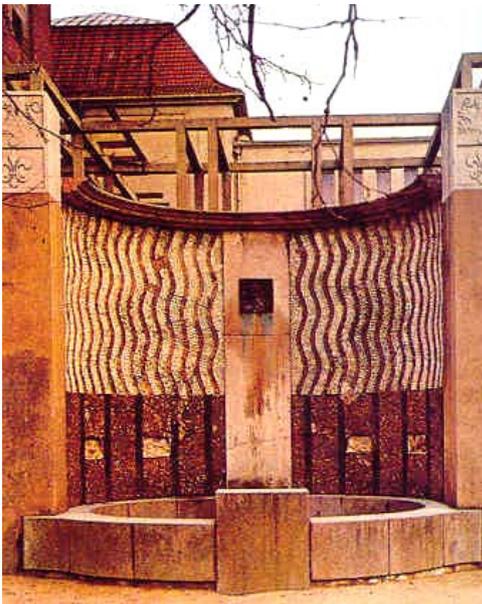


Figura 168 (arriba): Joseph Maria Oldrich. Fuente del Jardín del Palacio de Exposiciones. Año 1898. Darmstadt, Matildenhöhe.

Figura 169 (derecha): Umberto Boccione. "Formas Únicas de Continuidad en el Espacio"; 1913. Bronce; 1,264 x 0,89 x 0,406 m. Museo de Arte Moderno de Nueva York.

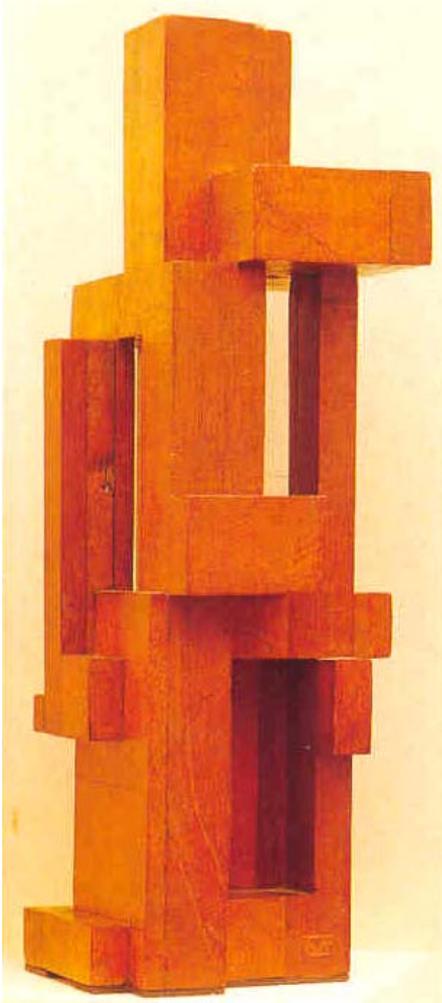
Paralelamente, en Italia apareció un estilo cuyas principales premisas fueron la exaltación del futuro y de los nuevos símbolos de la sociedad y de la modernidad, la máquina y la velocidad. Esta corriente se llamó **Futurismo** y aglutinó a una pléyade de creadores plásticos. Al respecto véase el apartado anterior dedicado a la Pintura.

El principal escultor de este movimiento, fue **Umberto Boccioni**. Además de trasladar a la escultura los temas característicos del Futurismo, como la expresión del dinamismo y la penetración del espacio en los objetos. También introdujo, en lo que a materiales se refiere, una actitud que ha sido fructíferamente desarrollada en nuestra época.

En las conclusiones del manifiesto de la escultura futurista, se habla de: "Destruir la nobleza puramente literaria y tradicional del mármol. Negar la exclusividad de un material para la construcción total de un conjunto escultórico".

Boccione afirma que hasta veinte materiales diversos pueden concurrir en una sola obra para obtener una emoción plástica. Enumeremos algunos de los que él incluye: cristal, madera, cartón, hierro, cemento, crines, cuero, tela, espejos, luz eléctrica, etc. Picasso, Tatlin, Duchamp y gran parte de la escultura posterior se movieron en esta línea.





La introducción de nuevos materiales ha sido vital para que florezca la escultura conceptualmente matemática, ya que en algunos casos sus obras son “esculpidas” de una forma automática, a partir de un diseño efectuado por medios informáticos y algunos de estos materiales, facilitan la realización.

Las obras de Boccioni en las que experimentó con diferentes materiales fueron destruidas, y pocas son las realizaciones que le sobrevivieron; pero, entre ellas, se cuenta la creación tal vez más impresionante del Futurismo: “Formas Únicas de Continuidad en el Espacio”, en la figura número 169 situada en el final de la página anterior.

Esta obra resulta una evocación singular de la fuerza del movimiento. No es la construcción de un cuerpo, sino de la acción del cuerpo, y las líneas de fuerza que se visualizan en el campo tridimensional como prolongaciones musculares, en una poderosa síntesis del dinamismo. Hemos incluido esta escultura, debido a que presenta algunas características de tipo geométrico y matemático.

Otro movimiento artístico de vanguardia fue el **Neoplasticismo**. Surgió en Holanda en el año 1920 y estaba integrado por arquitectos, poetas y pintores, que tenían como su premisa fundamental la unidad indisoluble de todas las artes, tomando la abstracción como modelo. El único escultor importante de esta tendencia fue Georges Vantongerloo.

En la figura 170 situada arriba, se expone su obra “Construcción de Relaciones de Volumen”. Este título expresa el concepto de Arte que tenía su autor. Su intención es la división del volumen escultórico con planos y bloques rectangulares, utilizando las figuras más simples de la geometría.

Tras la Revolución Soviética de 1917, Rusia vivió un periodo de gran florecimiento artístico en el que aparecieron diversos movimientos artísticos de vanguardia, como el **Rayonismo**, el **Suprematismo** y el **Constructivismo**. El principal artista de este último fue Vladimir Tatlin (1895 - 1956) que propugnaba que la distinción de las artes debía ser eliminada. Para él, la Pintura y la Escultura son en sí “construcción”.

Figura 170 (arriba): Georges Vantongerloo. “Construcción de Relaciones de Volumen”; 1921. Caoba; 0,410 x 0,121 x 0,105 m. Museo de Arte Moderno de Nueva York.

Figura 171 (derecha): Vladimir Tatlin. Modelo para el “Monumento a la Tercera Internacional”. Años 1919 - 1920.



El Constructivismo produjo muchos más proyectos que realizaciones. El monumento a la Tercera Internacional (1919-20), modelo en la figura número 171 en el final de la página anterior, de haberse construido habría sido una obra descomunal de 395 metros de altura, con varios pisos giratorios en revoluciones diarias, mensuales y situado entre la Escultura y la Arquitectura. Este monumento, proyectado por **Tatlin**, habría sido una de las obras capitales del arte contemporáneo. La precariedad económica de la URSS y el triunfo progresivo del "realismo socialista" impidieron la materialización de éste y de otros proyectos.

En una visión panorámica del Arte de entreguerras no pueden olvidarse artistas que, más allá de su filiación a una u otra corriente, realizaron importantes aportaciones al arte del siglo XX. Entre estas figuras "al margen" no deben obviarse artistas como Amedeo Modigliani, Jules Pascin y Chaim Soutine. **Amedeo Modigliani** (1884 - 1920) desarrolló en pocos años una obra fecunda y destacó como pintor y escultor.

Para finalizar la breve descripción de la escultura de esta mitad del siglo, exponemos dos obras en las que se puede apreciar que su concepción es puramente matemática. La primera de **Anton Pevsner**, en la figura 172, en la que utiliza claramente las formas de superficies regladas. La segunda de **Naum Gabo** (1890 - 1977), en la figura 173, que también las usa. Aunque en este caso está construida mediante hilos tensados, práctica que se extenderá a partir de entonces. Esta última escultura además está suspendida, técnica de colocación que también se empezará a utilizar frecuentemente en la escultura moderna.

En el siguiente apartado estudiaremos la escultura de la segunda mitad del pasado siglo. En la exposición de obras que incluiremos, veremos que la presencia de Escultura de concepción matemática se extiende definitivamente. Además hay que tener en cuenta que las propiedades y conceptos matemáticos utilizados en estas obras aumenta progresivamente, lo que creemos que hace necesario para un adecuado estudio de este tipo de Escultura, clasificarla.



Figura 172 (izquierda): Anton Pevsner, "Columna victoria desarrollable". Bronce; 1946. Altura aproximada 1,05 m.

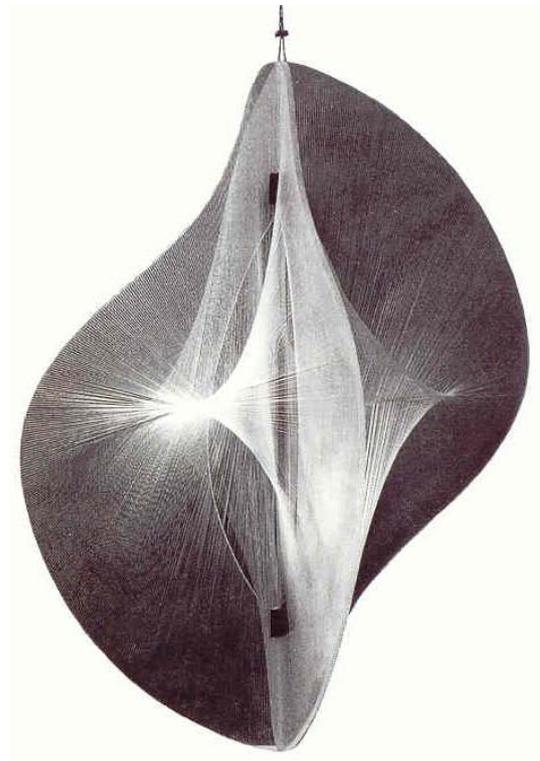


Figura 173 (derecha): Naum Gabo, "Spacial Linear Construction, (Construcción lineal en el espacio)". Plástico e hilos de nylon; 1946. Altura aproximada 90 cm.

4.2 La Escultura de la Segunda Mitad del Siglo XX

Lógicamente, muchos artistas y tendencias no se circunscriben sólo a una de las dos mitades en que hemos dividido a Escultura del siglo XX. Esta partición va a tener simplemente el objetivo de permitir una mejor ordenación de la investigación. Vamos a situar cronológicamente a los autores en la mitad de siglo en la que hallan desarrollado la mayor parte de su trabajo o en la que se halle su obra artística más importante desde el punto de vista de los objetivos de esta tesis.

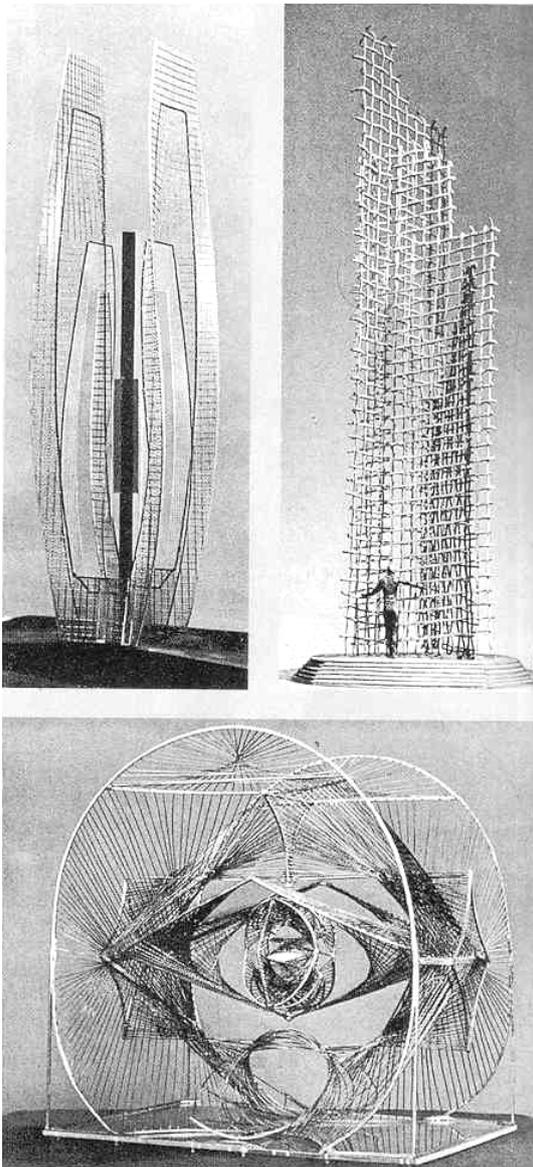


Figura 174: Segundos premios del concurso para el “Monumento al Prisionero Político Desconocido”. Concurso organizado por el London Institute of Contemporary Art en 1953. Cartel reproducido de la revista Art d’aujourd’hui. París 1953. Arriba la izquierda, Reg Butler; Arriba la derecha, Naum Gabo; abajo, Mirko Basaldella.

Esta filosofía la hemos aplicado a lo largo de toda esta investigación, no sólo a los movimientos sino también y lo que es más importante, en cuanto a la adscripción de un determinado artista a un estilo o movimiento.

Tal y como hemos anticipado, en la Escultura de la segunda mitad del siglo XX, se extiende la realización de **obras de concepción puramente matemática** o que por lo menos poseen unas evidentes y claras características geométricas o matemáticas. En la figura 174, izquierda, se observa las obras que obtuvieron el segundo premio en el concurso: “Monumento al Prisionero Político Desconocido”, lo que apoya la afirmación anterior de la extensión de este tipo de escultura. Estas obras pertenecen a Reg Butler; Mirko Basaldella y Naum Gabo. Este último artista, junto con Max Bill del que ya hemos hablado, fue otro precursor de la Escultura Matemática.

Cuando se inicia la Segunda Guerra Mundial, en 1939, **el ciclo de las vanguardias históricas puede casi considerarse concluido**. Desde el punto de vista “formal” ya se han realizado casi todas las rupturas posibles con el Arte tradicional. Respecto a las relaciones arte-sociedad o arte-individuo se habían explorado múltiples caminos. Debido a todo esto, el Arte posterior a 1945 es, a la vez, continuación de las tendencias artísticas anteriores y “revival” de ciertas vanguardias.

La mayor novedad de algunas de las aportaciones al Arte estribará en su implicación con la moderna sociedad tecnológica y de consumo. También es nueva la importancia que el mercado artístico asume como elemento que determina la vigencia de artistas y tendencias. Con independencia de todo lo anterior, el Arte ha tenido durante los últimos tiempos, un valor testimonial real e inapreciable, el de expresar la actividad libre y creadora dentro de un mundo “crecientemente degradado y enajenado”.

El estilo Surrealista y sus derivaciones como la corriente figurativa siguen en vigor en la segunda mitad del siglo XX con escultores como: Alberto Giacometti, Henry Moore, Max Ernst, etc. **Henry Moore** fue un artista de vida muy extensa y prolífica (1898 - 1986). Aunque había alcanzado ya su madurez en el ambiente del Surrealismo, no fue hasta después de la Segunda Guerra Mundial cuando adquirió una gran fama y prestigio internacional. Representa una línea más amable y más clásica, con tendencia a las formas orgánicas. De hecho, también se le ha enclavado en la corriente figurativa.

En los años treinta, Moore había enunciado lo que para él eran los aspectos fundamentales de la Escultura: “La figura humana es lo que me interesa más profundamente pero he encontrado los principios de la forma y el ritmo en el estudio de los objetos de la naturaleza, como piedras, huesos, árboles y plantas”. La figura femenina fue uno de sus temas recurrentes, aunque pronto incorporó otros que le fascinaban: las grutas, el vacío, las formas envolventes, la excavación de volúmenes sólidos para revelar formas internas.



Figura 175 (arriba): Henry Moore, “King and Queen (Rey y Reina)”. 1952 - 1953; Altura 170 cm. Museo Middelheim de Escultura al Aire Libre, Amberes, Bélgica.



Una de los trabajos de Moore más conocidos es “Rey y Reina”, en la figura 175, obra expuesta en el Museo Middelheim de Escultura al Aire Libre de Amberes. Los museos de escultura al aire libre se van a convertir en esta segunda mitad del siglo en una importante forma de difusión de la Escultura. En la figura 176 se muestra otro de sus trabajos “Arcos de colina”. En ambos podemos observar las simplificaciones de las formas que efectuó.

Alberto Giacometti (1901-1966) fue uno de los mejores escultores de este siglo y también como Moore muy prolífico. Pasó de las iniciales influencias cubistas y africanas a una órbita más paradójica y fantástica. La obra de Giacometti después de la Segunda Guerra Mundial consistió, básicamente, en grupos de figuras de bronce con superficies torturadas y extraños agrupamientos.

Hemos elegido entre su muy extensa y variada obra la de la figura número 177 “La jaula”, situada en la página siguiente, aunque no responde al estilo personal de este artista, ya que en ella podemos observar algunas propiedades geométricas. Aparte de la forma prismática de la jaula, también apreciamos la utilización de simples formas espaciales, como las esferas y otras más próximas a las de elipsoides. Otro artista surrealista muy importante fue **Max Ernst** (1891 - 1976), un alemán que desde 1922 había formado parte del Dadaísmo en Colonia.

Figura 176 (izquierda): Henry Moore. “Arcos de colina”, 1973. Bronce; 5,5 m. Moline, Ullinois, Estados Unidos.

Posteriormente; **Max Ernst** contribuyó muy decisivamente a preparar la transición hacia el Surrealismo. En algunas de sus obras pictóricas parece anticiparse, en efecto, a las obras más características de Dalí o de Magritte. Por otro lado, es conocido por haber descubierto una de las técnicas surrealistas más significativas, el “frotamiento”, colocando un papel o un lienzo sobre alguna superficie con relieve (ramas, maderas, etc.), y frotándolo con un lápiz, se obtenía así una transposición visual relativamente azarosa del objeto en cuestión. La imagen obtenida podía, si se deseaba, ser retocada o completada de muchos modos por el artista. En la figura 178; al final de la página, se muestra la escultura de Max Ernst titulada “ Rey que Mueve a la Reina”.

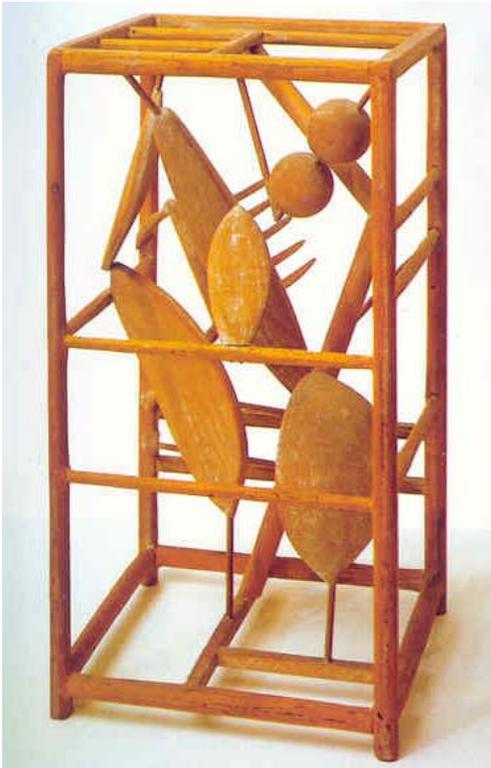


Figura 177: Alberto Giacometti.
“La jaula”. Bronce. Museo
Municipal de Arte de Estocolmo.

Calder también creó otras obras mucho más abstractas. Fue el “inventor” de la “escultura móvil”, para la cual estaba admirablemente preparado gracias a sus estudios de ingeniería. En la figura número 180, en la siguiente página, presentamos uno de estos móviles. En definitiva, sus objetos escultóricos no responden a las formas clásicas de presentación de la Escultura.

David Smith (1906 - 1965), fue un escultor con una producción realmente muy variada, siendo sus primeros trabajos de corte surrealista. Realizó obras escultóricas en las que integró objetos encontrados o fragmentos de maquinaria agrícola.

Figura 178 (derecha): Max Ernst, “Rey que
Mueve a la Reina”. Año 1944; 97 cm.
Museo de Arte Moderno de Nueva York.



La corriente abstracta en la Escultura es muy importante. Además en cuanto a los objetivos de nuestra tesis, sus obras suelen presentar muchas características geométricas y matemáticas y por tanto, podrán ser clasificadas de acuerdo a estos conceptos. A continuación vamos a estudiar la obra de sus principales representantes. Empezaremos por los de otros países: David Smith, Anthony Caro, Alexander Calder, etc. En España sobresalen los vascos Jorge de Oteiza y Eduardo Chillida.

Anthony Caro, fue un escultor que se caracterizó por el logrado desarrollo de estructuras abstractas, horizontales, lineales y abiertas, en las que utiliza piezas prefabricadas de metal que pinta de vivos colores.

Alexander Calder (1898 - 1976), asimiló como pocos los mejores estímulos del Surrealismo. Tuvo influencia del escultor **Jean Arp**, aunque la fascinación por las formas que flotan en un espacio indefinido parece más próxima a la pintura de Miró. Fue un innovador al realizar esculturas “móviles” que distinguía de las “estáticas”. Un ejemplo muy representativo de estos trabajos puede ser la “Fuente de Mercurio” que hizo para el Pabellón Español de la Exposición Universal de 1937.

David Smith también desarrolló una importante serie con estructuras filiformes que construyen dibujos en el espacio, para pasar finalmente a elaborar grandes construcciones de acero inoxidable, de formas cúbicas, con un peculiar acabado de la superficie con texturas de efectos reflectantes. En estos años de mitad de siglo y con al menos algunas obras que se pueden enclavar en una escultura que de una forma genérica podríamos llamar abstracta, destacaron también otros artistas además de los que ya hemos comentado brevemente. Este es el caso de los escultores siguientes: **Reg Butler, Barbara Hepworth, Eduardo Paolozzi, Mark di Suvero, Alexander Liberman, Berto Lardera, etc.**



Figura 179 (arriba): Alexander Calder, “The Great Vitesse (La gran velocidad)”, Acero pintado de rojo, 1969. Altura, 13,5 m. Plaza: Centro Vanderberg, Grand Rapids, Michigan, USA.

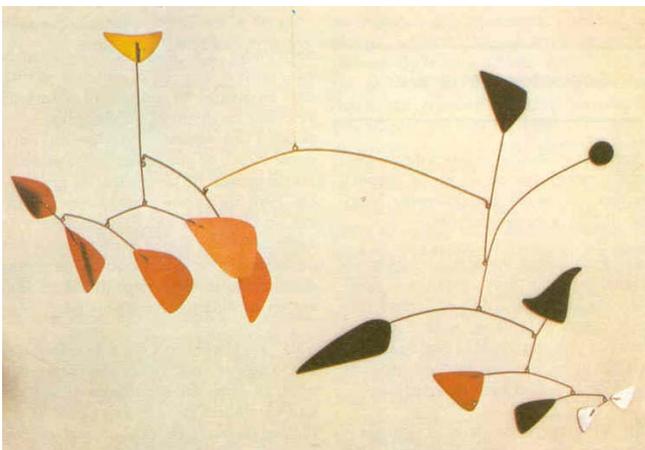


Figura 180 (arriba): Alexander Calder, Móvil. Año 1956. Galería Naviglio, Milán.

En la Escultura Abstracta española, destacan sobre todo los vascos, Jorge de Oteiza y Eduardo Chillida. Además su trabajo resulta muy interesante para nuestra tesis, ya que en sus obras podemos encontrar; por un lado, conceptos matemáticos y propiedades geométricas y, por otro, operaciones de lógica o de conjuntos matemáticos.

Jorge Oteiza a través de una rigurosa evaluación de la trayectoria histórica de la geometría, desarrolló a finales de la década de los cincuenta una teología del Reduccionismo, una visión metafísica de la ausencia, fundamentada en Malevich, y en el Constructivismo que debe situarse como antecedente inmediato del Minimalismo. En la figura 181, en la página siguiente, se expone una obra de Oteiza titulada “Escultura Negra”, que se encuentra expuesta en el Museo de Arte Abstracto de Cuenca. Este museo es bastante interesante desde nuestro punto de vista, ya que contiene obras que en algún caso poseen un contenido “matemático” muy elevado.

Eduardo Chillida ha sido sin duda uno de los escultores más importantes y conocidos del anterior siglo XX. Nació en el año 1924 y después de realizar los estudios de arquitectura, vivió tres años en París, donde inició la realización de obras escultóricas. A su regreso a España, trabajó el hierro, enlazando con la tradición de Julio González y de Picasso. En la obra de Chillida al uso del hierro se sumaron el acero, la madera, el hormigón y el alabastro, los que han sido prácticamente sus únicos materiales escultóricos.



Figura 181 (arriba): Jorge de Oteiza.
“Escultura Negra”. Mármol Negro. Museo de
Arte Abstracto de Cuenca.

Algunas esculturas de Chillida evocan herramientas de una austeridad muy primitiva; en otras obras escultóricas, el hierro, de volúmenes cuadrangulares, se retuerce en laberintos, “moviéndose” en el espacio o define densos bloques con breves espacios entallados. Los materiales y sus texturas aparecen con frecuencia potenciando una elegancia hecha de autenticidad y de rudeza, aunque con el alabastro, la luz juega delicadamente con la materia y el espacio.

La Arquitectura, arte en el que se había iniciado este artista, reaparece en buena parte de su obra, con su estructura poderosa. Esto resulta muy interesante para nuestra tesis, ya que la Arquitectura es un arte que tiene un fuerte contenido matemático. En la figura 182, situada en la parte inferior a la izquierda, exponemos un magnífico trabajo de Chillida.

Tanto esta obra como el anterior ejemplo de **Jorge de Oteiza**, nos demuestran la presencia de diversos conceptos geométricos y matemáticos. En general, en el trabajo de estos dos artistas se utilizan sencillas y diversas formas espaciales como cubos, prismas y cilindros rectos o curvados, etc. Además en algunas obras de Oteiza y Chillida, como la de la figura número 7 situada en la introducción, se puede observar que sus formas se pueden deducir, efectuado operaciones de lógica o de conjuntos matemáticos, como la unión, la intersección o el complementario. Otro ejemplo de estas operaciones de lógica son las cruces de Chillida, de las que mostraremos dos ejemplos en el siguiente capítulo, en el que estudiamos la clasificación de la Escultura Matemática. **La obra de estos dos artistas se puede considerar antecesora del arte Minimal o Mínimo.**



Figura 182 (arriba): Eduardo Chillida, “La Mesa
de Giacometti I”. Año 1992. San Sebastián.

Figura 183 (derecha): David Smith, “Cubos XIX”.
Pertenece a la serie “Cubi”, un conjunto de 28
piezas en acero inoxidable.



El Arte Minimal (Minimal Art) surgió a comienzos de la década de los sesenta en los Estados Unidos. Se situó en la encrucijada de una doble dinámica, referida por una parte a la continuidad de la tradición geométrica norteamericana y, por otra, a una reacción contra el abusivo predominio de las corrientes realistas entre coleccionistas, galeristas y conservadores de museos. También se enfrentaba al Pop Art. Sin embargo, a pesar de su aparente oposición el Arte Minimal y el Pop comparten ciertos aspectos, como el interés por la realidad más palpable, la repetición del motivo, etc. Este arte supuso la última etapa del Reduccionismo inaugurado por Malevitch, los constructivistas rusos y los componentes del grupo holandés De Stijl.



Figura 184 (arriba): Larry Bell. “Elipse”, 1965. Tamaño 1,36 x 0,356 x 0,356 m. Museo Whitney de Arte Americano, Nueva York.

Hemos incluido fotografías de algunas obras minimalistas que creemos interesantes. La primera, la de la figura 183 situada en la página anterior, se titula “Cubos XIX”. Su autor es **David Smith**, artista que hemos estudiado en la parte dedicada a la Escultura Abstracta, expuesta anteriormente, y que también realizó esculturas pertenecientes al Arte Minimal.

La siguiente obra “Elipse” se muestra en la figura número 184, arriba, y pertenece al trabajo de **Larry Bell**. Se halla expuesta en el Museo Whitney de Nueva York, otro museo que resulta muy interesante porque alberga algunas de las obras escultóricas del arte actual, que presentaremos en esta parte final de la presente tesis. Por último, del Arte Minimal incluimos dos trabajos igualmente interesantes. Una obra de **Sol Lewitt**, “Piezas Modulares en Escalón”, en la figura 185 situada a la derecha.

Los artistas minimalistas tratan que sus objetos se alejen, tanto de la idea de Escultura como de Pintura, para acceder a la categoría de “objetos específicos”. Desean un máximo nivel de abstracción, una geometría estricta, basada en el orden, la simplicidad, la claridad, la literalidad y un acabado industrial que borre cualquier huella de manualidad.

Este componente de literalidad, “el objeto es el objeto”, es lo que vincula al Arte Minimalista con las corrientes conceptuales que aparecerán inmediatamente después, con artistas igualmente empeñados en lograr una elaboración tautológica de la obra de arte. Precisamente, algunas de las características anteriores como máximo nivel de abstracción y, sobre todo, una geometría estricta son las que hacen esta corriente de Escultura entre de lleno en los objetivos de la investigación de nuestra tesis. Algunos artistas minimalistas importantes son: **Robert Morris, Sol Lewitt, Carl Andre, etc.**

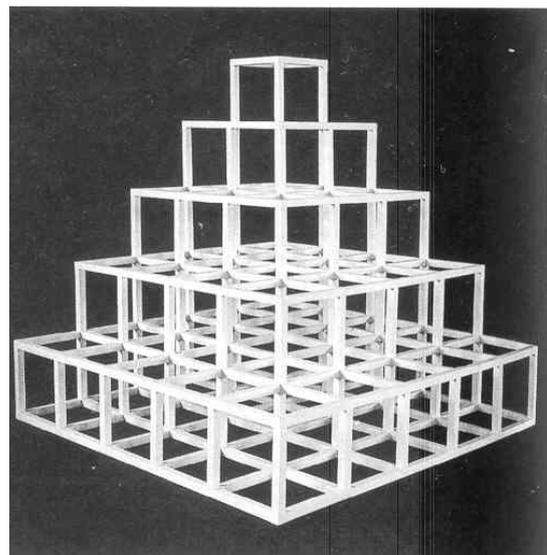


Figura 185 (arriba): Sol Lewitt. “Piezas Modulares en Escalón”. Madera pintada de blanco, 61 x 61 x 61 cm. Año 1971.



Figura 186 (arriba): Tony Smith. “La Serpiente Está Afuera”. Tamaño aproximado 4,25 x 6,8 x 5,3 m. Acero pintado en azul, 1962.

Esta obra mostrada en la página anterior se realizó, a base de repetir un simple cubo, que se iba situando de forma adecuada hasta lograr formar la estructura deseada. A este tipo de escultura la llamaremos “modular”. Es un ejemplo en el que se pueden encontrar conceptos geométricos diversos.

Por último mostramos una escultura de **Tony Smith**, a la que tituló “La Serpiente Está Afuera”, figura 186. La forma de esta obra recuerda al animal que el autor representa, a pesar de su total simplificación.

La Escultura que algunos expertos de arte denominan “Geométrica” va a ser parte integrante del objetivo de estudio en nuestra tesis, la Escultura Matemática. Aquella se inicia en Europa, basándose en la herencia del inmediato pasado, como puede ser el estilo de la Bauhaus. Al respecto, se puede consultar la referencia [22]. Sus principales figuras de estos años son **Richard Paul Lohse** y **Max Bill**, aunque también se puede considerar que tienen trabajos en esta línea los escultores **Reg Butler**; **Mirko Basaldella** y **Naum Gabo**, ya comentados anteriormente.

Max Bill fue director, desde el año 1955, de la “Hochschule für Gestaltung de Ulm”, un intento efímero de renacimiento de la Bauhaus europea, cuya desdichada historia refleja en gran medida la de la primitiva Bauhaus de Walter Gropius. El programa de reconstrucción se planteó claramente; todo lo que había aparecido como intuición visual de un orden había de acomodarse a la ley más general de la Matemática. Max Bill ha sido en Europa el artista que planteó con mayor claridad la herencia de la vanguardia geométrica como posibilidad de futuro. Esta tendencia ha sido seguida en nuestros días por diversos artistas. En su trabajo escultórico la cinta de Moebius es un motivo muy redundante. Ya en la Figura 146, se expuso la obra titulada “Superficie Sin Fin” que era una bella construcción volumétrica muy sencilla, basada en este tipo de cinta. Debajo en la figura 187, se puede observar de nuevo la aplicación de esta forma geométrica para la concepción de una obra, aunque en este caso, con bastante mayor complejidad en el recorrido.

El Arte Conceptual es provocado por el rechazo hacia los medios tradicionales del Arte. En la década de los años sesenta surgen una serie de tendencias que investigan nuevas formas, a partir de la utilización de nuevos materiales. Éstas han influido en la Escultura Matemática

En el año 1968 aparecía el artículo *La Desmaterialización del Arte*, escrito por los críticos Lucy Lippard y John Chandler, en la revista *Art International*. En el texto se analizaba el profundo proceso de transformación que vivía el arte contemporáneo.



Figura 187 (arriba): Max Bill. “Endless Ribbon”. Cinta de Moebius. Metal con tratamiento superficial. Japón.

Los artistas habían intensificado la gradual desaparición del objeto a “favor del concepto y del arte efímero”. Muchos de estos artistas minimalistas, como Morris, Smithson, André y otros, emprendían trabajos experimentales con estas nuevas ideas y, a veces, en nuevos escenarios. Los medios tradicionales del Arte no parecían ya ser los apropiados. A fines de los años sesenta, se habían dado algunas manifestaciones en las que los nuevos comportamientos artísticos parecían exigir para el Arte, la libertad que se reclamaba en los campus universitarios. La misma disposición aparecía en distintos centros de Occidente con denominaciones diversas: **Arte Pobre, Land Art, Arte Conceptual, Antiform, Process Art, Earth Works, Arte Microemotivo, etc.**

Entre las primeras manifestaciones del Land Art, figuran la celebrada en la Dwan Gallery de Nueva York, en 1968, con el título de “Earth Works” (Trabajos en la Tierra) y, al año siguiente, la presentada en el White Museum de Ithaca con el mismo título. A partir de este momento se sucedieron diversas exposiciones, hasta que finalmente con la celebrada en el Museo Cívico de Turín, en el año 1970, se llega a la consagración oficial de los nuevos comportamientos artísticos. Esta exhibición fue denominada precisamente con el nombre de tres de estos movimientos en conjunto; esto es: “Conceptual Art / Arte Povera / Land Art”.

El Land Art (Arte de la Naturaleza) se realizaba principalmente en lugares naturales que en muchos casos eran lugares apartados. Sus principales artistas son Mike Heizer, Oppenheim y Walter de María. En la fotografía de la figura 188, situada debajo, mostramos una obra de este tipo realizada en el Gran Lago Salado en Estados Unidos por **Robert Smithson**. Su título “Spiral Jetty”, nos demuestra claramente la influencia de la Geometría en su diseño. La espiral es una de las curvas matemáticas que ha sido más utilizada a lo largo de la Historia del Arte.

El Arte Povera (Arte Pobre) fue iniciado en Italia por Germano Celant. Se le ha llamado así, debido a que utilizaba materiales humildes y pobres, generalmente no industriales (plantas, sacos de lona, grasas, cuerdas, tierra, troncos, y diversos y muy variados tipos de objetos) de los que se valoraban los cambios a medida que se iban deteriorando, es decir, se iban transformando. **Mario Merz** destaca entre los artistas italianos que han practicado este Arte. Sus obras parten de una ley estructural muy elemental, la del matemático medieval **Fibonacci**, para quien el desarrollo derivaba no de la simple sucesión de números sino de la progresión en la cual cada número resulta de la suma de los dos precedentes.



Figura 188: Robert Smithson. “Spiral Jetty”. Año 1973. Gran Lago Salado, Utah, USA.

Esta progresión matemática es la que aplica Mario Merz, en cualquiera de sus trabajos, ya sean objetos, espacios, vegetales, etc. Esto lo aplica a la colocación de las “piezas” que repite numerosas veces, hasta formar sus composiciones. Utiliza extraños y muy diversos materiales. Un ejemplo de su trabajo es la composición que formó disponiendo paquetes de periódico en el suelo, basándose en los números de Fibonacci. Esto nos demuestra de nuevo que hasta en los estilos artísticos que pretenden las formas más sencillas, como el Arte Pobre, Land Art, etc., muchas veces podemos observar la gran influencia de las Matemáticas.

Richard Serra es considerado uno de los escultores más destacados del siglo XX y es famoso por el carácter innovador y desafiante de una obra que subraya el proceso de fabricación, las características de los materiales, el compromiso con el espectador y el emplazamiento. Serra, como los artistas minimalistas de su generación, ha recurrido a materiales nada convencionales, los industriales, empezando a resaltar las propiedades físicas de su obra. Desligada de su papel simbólico, liberada de la base o pedestal tradicional e introducida en el espacio real del espectador. Estos artistas animaban a los espectadores a caminar alrededor y a veces por encima, por dentro o a través de la obra y a vivirla desde múltiples perspectivas.

Con los años, Richard Serra ha ido profundizando en este enfoque espacial y temporal de la escultura. Durante las últimas décadas ha realizado principalmente obras a gran escala, pensadas para un lugar específico, que crean un diálogo con un determinado entorno arquitectónico, urbano o paisajista y al hacerlo redefinen ese espacio y la percepción que el espectador tiene del mismo. Nacido en San Francisco en 1939, **Serra se licenció en Filología inglesa por la Universidad de California en Santa Bárbara y posteriormente en Bellas Artes por la de Yale en 1964.**

Serra pasó los dos años siguientes estudiando en París e Italia antes de establecerse en Nueva York, en 1966. Durante los años 1967 y 1968 se dedicó a explorar una lista de verbos, como: “salpicar”, “enrollar”, “apoyar”, “cortar” y “doblar”, que describen muchos de los procesos utilizados por el artista a lo largo de su carrera, utilizando sus propias manos o mediante métodos de fabricación industriales. Realizó muy pronto obras en las que lo esencial era el proceso. Para ello utilizaba materiales poco frecuentes como el caucho, que colgaba en tiras en las paredes de las galerías, y plomo fundido, que arrojaba en el ángulo entre la pared y el suelo. Serra dedicó especial atención al proceso mediante el cual se forman los materiales, y también a sus reacciones ante condiciones externas como la gravedad o la temperatura.



Figura 189 (arriba): Richard Serra. “Plinths”. Año 1967. Planchas de acero con tratamiento de envejecimiento. Museo Nacional de Arte Moderno de París.

Considerando que estas primeras obras seguían teniendo mucho de la tradicional relación de figura-fondo con el suelo o la pared, **Richard Serra**, a partir de 1969, empezó a moverse en otra dirección. Con su obra, hoy en día icónica “One Ton Prop (House of Cards)”, esto es, “Objeto de una Tonelada (Castillo de Naipes)”, formada por cuatro planchas de plomo que mantienen la verticalidad por la fuerza de su propio peso al apoyarse unas sobre otras, este autor empezó a interesarse por la naturaleza tectónica de la Escultura. Al igual que con las obras que reflejaban el proceso de su creación, seguía siendo visible la naturaleza de su construcción. En su serie de obras “Objetos”, Serra hizo patentes los principios del equilibrio y la gravedad y su papel elemental en la producción escultórica. A pesar de la flexibilidad del plomo y de su gran peso, estas obras están llenas de tensión; la aparente inestabilidad de los elementos crea un conflicto entre el miedo a que se derrumbe la pieza y la comprensión de las leyes de la Física.

Desde 1970 Serra ha trabajado sobre todo en acero, un material asociado habitualmente con la Arquitectura y la Ingeniería, disciplinas en las que el artista ha buscado una comprensión de los orígenes de la Escultura. Con la introducción del acero como material, la escala de su obra ha aumentado de manera espectacular. Ya no podían seguir considerándose objetos discretos pues su significado y composición no pueden separarse del entorno. Este interés por una experiencia a través del espacio y el tiempo y, en palabras de Serra, al “recuerdo y la anticipación”, surgió al conocer los jardines Zen de Kyoto durante una visita a Japón en 1970. En el jardín zen no existe una perspectiva fija. La influencia de este viaje fue evidente en muchas de sus obras posteriores, cuya perspectiva exterior no da ninguna pista sobre la forma interior.

Richard Serra es probablemente uno de los artistas pertenecientes a estas tendencias que más ha destacado en el ámbito internacional. En la figura 189, que se halla en la página anterior, mostramos su obra titulada “Plinths”, en la que utilizando solamente cuatro planos y un cilindro, consigue una obra muy interesante. Posteriormente, en el capítulo dedicado a explicar los grupos de nuestra clasificación, estudiaremos otras esculturas suyas, ya que las utilizaremos de ejemplo.

El Arte de la década de los ochenta del pasado siglo, se caracterizó por la idea de ruptura del vanguardismo, una filosofía y una dinámica del Arte que se había alimentado con la idea de innovación. En realidad, sus fenómenos más significativos comenzaron a extenderse en el Occidente industrializado desde aproximadamente los años 1975 a 1978. Frente a todo lo anterior, el Arte más característico de la década de los ochenta, dominado por el pensamiento posmoderno, parece negarse a continuar esa constante huida hacia adelante, esa búsqueda apasionada de dimensiones novedosas y opta por una operación de revisión del pasado del Arte, con la intención de agotar los filones que no fueron suficientemente explotados en su momento.

Después de esta **época “expansiva”**, característica de los años sesenta y setenta, cuando la energía de los artistas avanzados se dirigía a explorar nuevas fronteras, sigue otra “introspectiva”, ocupada en el comentario, en citas más o menos eruditas o en simples apropiaciones. Desde el punto de vista de la historia del arte, se trata de un tiempo muerto, un momento de reposo.

Figura 190 (derecha): Anish Kapoor, “La madre como montaña”; 1986. Colección particular, Londres.



Por otra parte, **frente a la globalidad de las propuestas vanguardistas de comienzos de siglo**, que diseñaron paralelamente ofertas para el Arte y para la realidad, la producción artística en la época de su “condición posmoderna”, se orienta preferentemente hacia la diversidad y la fragmentación: hacia la especificidad del “genius loci”, el espectáculo local, o las derivas del subjetivismo, el espectáculo del individuo. Otro elemento definidor de la estética que predominó en los años ochenta es lo que podríamos denominar coexistencia pacífica de tendencias artísticas de todo tipo, incluso las más alejadas estética y técnicamente. En las exposiciones de esta década, especialmente durante su segunda mitad, la pintura abstracta o figurativa se presentaba junto a fotografías, esculturas y construcciones, diseño gráfico, vídeo y “performances”. En definitiva todas las facetas del Arte se podían exponer juntas. Las tendencias artísticas principales fueron: el Arte de Frontera, la “Pittura Colta”, el “Pattern Painting”, el Arte Débil y el Neo-Decorativismo. En la pintura es donde más se desarrollaron estos movimientos.

A comienzos de esta década, la Escultura inglesa produjo una transformación en el panorama internacional. Se fomenta una valoración importante de la Escultura como objeto, abandonando su consideración de punto de investigación de elementos formales y espaciales. También se tiene la pretensión de desacralizar un arte tan solemne como la Escultura a través del empleo, a menudo, de objetos cotidianos que han sido reciclados. En este tipo de Escultura se produce un predominio del elemento visual sobre el táctil. Se trata de un Arte que, aun dentro de un característico rigor formal, mantiene la libertad de los materiales y las fronteras entre abstracto y figurativo. Algunos de los principales artistas de esta nueva escultura inglesa son: Anish Kapoor, Tony Cragg, Will Woodrow, Richard Wentworth, Anthony Gormley. La figura 190 en la página anterior, nos muestra una obra de **Anish Kapoor**, uno de sus artistas más importantes.

La Escultura realizada en los últimos años, tanto a finales del siglo pasado como a principios del actual es muy heterogénea, lo mismo que ocurre con todas las manifestaciones artísticas, por lo que resulta muy difícil tratar de estudiarla. Además hay que tener en cuenta la escasa perspectiva histórica con que contamos. Al respecto se puede consultar la referencia [25], *Art Now. 137 Artistas a Principio del Milenio*, en la que se trata algunos autores del arte actual con profundidad. En la tesis por no alargarnos sólo mostraremos algunos ejemplos de obras recientes.

El primero de ellos, el de la figura 191, está realizado por **Björn Dahlen** en el año 2001. Esta obra nos recuerda en sus materiales al arte Povera o Pobre, ya que está realizada con listones de madera, aunque en este caso se ha añadido tubos de neón, lo que ya no era característico de esta filosofía y sí del arte actual.

Hasta en una obra tan simple como ésta, se utiliza la Geometría. El autor con sólo listones construye una estructura (Geometría) y, además el motivo central de esta composición es un poliedro, un tipo de sólido que es muy utilizado en la Escultura Matemática.

Figura 191: Björn Dahlen, “Club Superespacial 3”. Listones de madera y tubos de neón; 2001. Kunstverein, Hanburgo, Alemania.

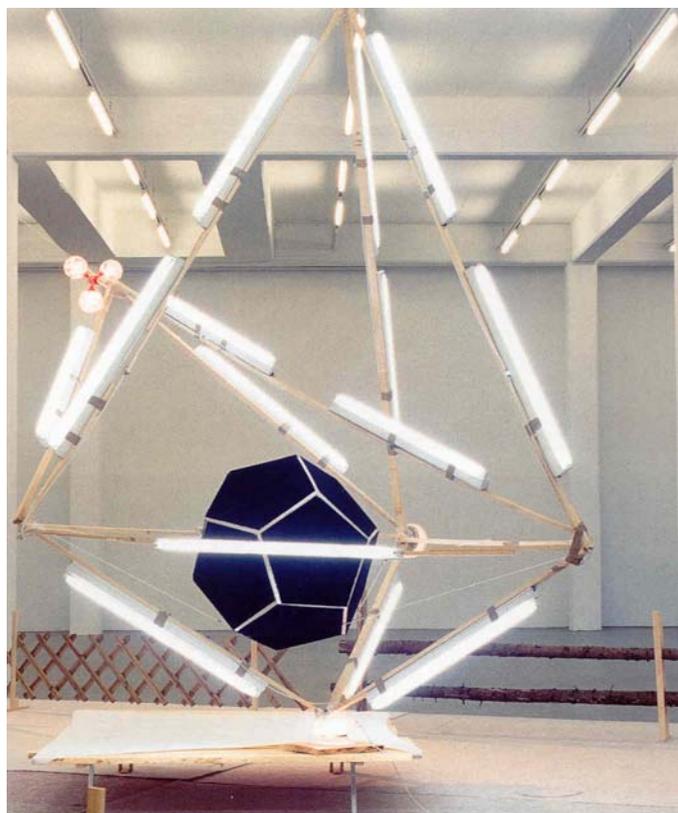




Figura 192 (arriba): Abdul Multihalib. “Musa Against Nature (Musa contra la Naturaleza)”. Placas de acero con oxidación superficial; 260 x 600 x 180cm.

El siguiente ejemplo, él en la figura 192 situada arriba, es también una escultura realizada en estos últimos años, por **Abdul Multihalib**. En esta obra nuevamente se utiliza unas formas muy sencillas, y se aplica la Geometría. Se puede considerar que sus piezas son las secciones que se obtendrían al seccionar con un haz de planos la figura de un determinado sólido. En definitiva, en las obras de escultura actual muchas veces es posible vislumbrar unas profundas influencias matemáticas y por supuesto geométricas, como comprobaremos en los capítulos posteriores.

Como ya hemos tenido ocasión de observar en el anterior capítulo de antecedentes, existen otras facetas del Arte que sin que se puedan considerar Escultura, en un sentido clásico, tienen en su concepción o en su realización al menos parte de su filosofía. Esto también puede ocurrir en muchas ramas de la artesanía como puede ser la cerámica, la forja, la joyería y, en general, en muchas de las piezas de diseño que sean volumétricas. En todas ellas, también podemos inferir relaciones con las Matemáticas.

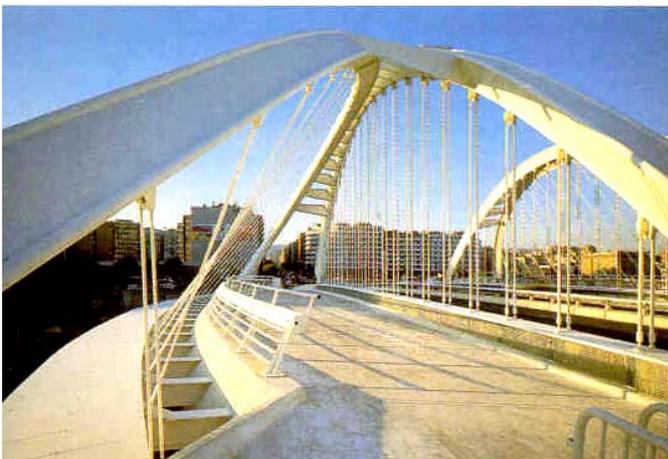


Figura 193: Santiago Calatrava. “Puente de Bach de Roda”. Años 1984 - 1987, Barcelona.

Un ejemplo claro podría ser la obra de **Santiago Calatrava**, artista de fama internacional que fue alumno de nuestra universidad. **Su Arquitectura e Ingeniería resultan “escultóricas”**. La figura número 193 muestra uno de sus famosos puentes, el de Bach de Roda. Fue la primera construcción de gran entidad realizada por este ingeniero y arquitecto y tiene una estructura plástica, dinámica y muy expresiva. Esta obra, lo mismo que casi todo su trabajo, no es una simple obra de ingeniería sino una gran escultura de escala urbana.

LA ESCULTURA MATEMÁTICA



5 La Escultura Matemática

En primer lugar y antes de que podamos realizar la clasificación de este tipo de Escultura, que es uno de los principales objetivos de nuestra investigación, tendremos que fijar qué Escultura es la que tratamos de catalogar, la que venimos denominando “Escultura Matemática”, concepto que definiremos en el siguiente apartado. También en este capítulo detallaremos las diferentes posibilidades de este tipo de Arte y expondremos ejemplos diversos que nos permitirán describirlo. Finalizaremos con su situación actual y sus perspectivas, antes de pasar a clasificarla. En primer lugar, lógicamente, debemos definir **el concepto de Escultura**. Según el diccionario especificado en la referencia [15] es: “El Arte de modelar, de tallar y de esculpir en barro, piedra, madera metal u otra materia conveniente, representando de ‘bulto’ un objeto real o imaginario, una figura, etc”. Posteriormente precisaremos el término ‘bulto’.

5.1 Concepto de Escultura Matemática

En nuestro anterior estudio de antecedentes hemos constatado que es evidente la relación entre el Arte y las Matemáticas. En el caso de las artes plásticas esto resulta irrefutable, ya que **el concepto de “forma” es consustancial en estas obras artísticas y por tanto la relación con la Geometría**. También ya hemos mostrado muchos ejemplos de obras escultóricas en las que hemos encontrado propiedades geométricas y incluso matemáticas. Sin embargo, para que consideremos que una obra concreta pertenece a la Escultura Matemática exigiremos más; es decir, esta relación con las Matemáticas ha tenido que ser “trascendental” en su realización.



En definitiva, la Escultura que incluimos dentro de esta categoría es aquella que se encuentra dentro de lo que conceptuamos como “Arte Matemático”, no simplemente la que tenga alguna relación con la Geometría. Proponemos la siguiente definición de Escultura Matemática. Vamos a considerar, por tanto, que **pertenecen a esta tipología todas aquellas obras escultóricas en los que en su concepción, diseño, desarrollo o ejecución resulta “fundamental” la utilización de las Matemáticas**.

Como se puede apreciar, esta caracterización que acabamos de formular resulta genérica y muy amplia pero **creemos que es imposible dar una enunciado cerrado de este término**. Por consiguiente, supondremos que un trabajo pertenece a la Escultura Matemática, si en el proceso de su realización se ha tenido en cuenta de forma muy apreciable, algún tipo de concepto o propiedad matemática que haya resultado básica en su concepción.

Figura 195 (izquierda): Paul Bloch, “Adam and Eve I (Adan y Eva I)”. Mármol, 2001 Tamaño 82 x 30 x 24 pulgadas. Collection of Mary and Dan Summers.

Figura 194 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Bathsheba Grossman, “Metatron”. Bronce.

Consideraremos que se incluyen en este tipo de Escultura, desde obras en las que aparecen conceptos o propiedades muy simples o relacionadas con la geometría más sencilla, hasta los trabajos escultóricos en las que intervienen los conceptos matemáticos más complicados o la más compleja Geometría no Euclidiana. Como percibiremos en los ejemplos que se incluyen en el resto de la tesis, no sólo influyen conceptos diversos de Geometría, sino también de Cálculo, de Cálculo diferencial o vectorial, algunos de Álgebra, de Topología, de Lógica, etc.

Esta utilización y la diferente complejidad resultan bastante evidentes en los ejemplos que se incluyeron en la introducción. Un nuevo ejemplo es la formidable obra de la figura 194. Debido a lo interesante que resultan sus características lo hemos elegido como portada de este capítulo de nuestra tesis. Es una figura bastante compleja realizada por una brillante escultora matemática, **Bathsheba Grossman**. En este trabajo, lo mismo que en otros de esta artista, observamos la utilización de conceptos matemáticos realmente muy diversos, como los relacionados por ejemplo con la geometría de los poliedros, la construcción de mosaicos, la topología de las superficies, las transformaciones isométricas en el espacio, etc. Para profundizar en su obra resulta útil su página web, referencia [PW4].

El anterior capítulo de la tesis dedicado a los antecedentes históricos del Arte, en el que hemos tratado con cierto detenimiento las relaciones entre las Matemáticas y el Arte, nos ha permitido encontrar numerosas conexiones desde los primeros tiempos de la humanidad. En cuanto a estas relaciones con las Matemáticas, en el caso de la Escultura, hemos constatado la existencia de algunas concomitancias, sobre todo con la Geometría, casi desde las primeras manifestaciones escultóricas.

Sin embargo, la Escultura que hemos definido como matemática no apareció hasta el siglo XX, sobre todo durante su segunda mitad. En nuestra investigación culminada con esta tesis, hemos comprobado que la realización de obras conceptualmente matemáticas, no se produjo hasta “bastante entrado” el siglo XX, difundándose ampliamente en sus últimas décadas. Esto se puede constatar observando la fecha en que fueron realizadas las obras ya expuestas. En el capítulo de la Escultura del pasado siglo, ya aparecen imágenes de algunas obras que creemos que claramente entran en la definición. En la figura 195, página anterior, se expone una obra de **Paul Bloch**, titulada “Adán y Eva I”. Para mostrar la interrelación de ambos entrelaza las dos figuras con que los ha esquematizado. Para profundizar en su trabajo, véase su página web [PW5]. Creemos que es evidente que las obras de las figuras 194 y 195 pertenecen a la Escultura Matemática, por lo que habrá trabajos en que no quede ninguna duda acerca de su correcta adscripción en este tipo.



En otras obras sí que veremos que podrá haberla. Estas dudas están provocadas porque nuestra definición de la Escultura Matemática resulta imprecisa, debido a que en ella hemos utilizado el término “fundamental” que tiene cierta subjetividad. En cualquier caso, insistimos en que consideramos imposible dar una definición cerrada de este concepto tan vital para nuestra tesis. Esto lo intentamos ilustrar con los siguientes ejemplos.

Figura 196: Ernst Trova. “Failing Man Series: Six Figures; (Serie del Hombre que Cae: Seis Figuras)”, 1964. Tamaño 40,6 x 48,3 x 48,3 cm. Museo Whitney de Arte Americano, Nueva York.

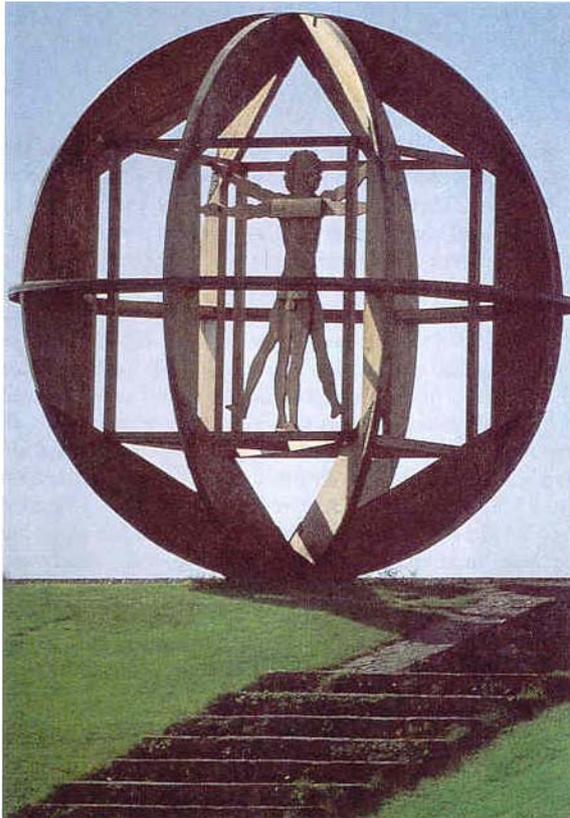


Figura 197: Mario Ceroli, "Inbalance (En el Aire)". Año 1938; Diámetro 3,55 m. Wadsworth Atheneum, Connecticut, USA.

Mostramos otro ejemplo con la figura 197 que aunque también sea en parte figurativa, creemos que se podría enlazar en la Escultura Matemática. Éste es un magnífico trabajo escultórico que podemos considerar pionero en este campo, ya que fue realizado en 1938, por el escultor **Mario Ceroli**. Además, el motivo de la obra está fundado en el famosísimo dibujo de Leonardo da Vinci. Este genial humanista, como resulta conocido, contribuyó muy notablemente a la relación del Arte con la Ciencia. En el apartado del Renacimiento ya hemos desarrollado este tema. La fuente en la que está basado el diseño de la obra anterior, avala nuestra pretensión de considerar ésta una escultura matemática.

Como último caso de trabajo que puede plantear dudas sobre su inclusión en la Escultura Matemática, mostramos la figura 198 a la derecha, un trabajo del escultor y profesor **Nathaniel Friedman**, denominado "Torso". A pesar de que el título indica su naturaleza figurativa, se puede intuir que posee la forma de una superficie matemática y también la presencia de un movimiento que le confiere la forma alabeada.

Figura 198 (derecha): Nathaniel Friedman, "Torso Flow Lines". Mármol. Universidad de Wesleyan, Estados Unidos.

Un ejemplo de la **difficultad que puede plantearse para adscribir en algunos casos una obra a la Escultura Matemática**, es el de la figura número 196, situada en la página anterior. Aunque sea un trabajo que no se puede considerar estrictamente matemático, creemos que sí se podría incluir en este tipo de escultura.

Esta composición de la figura 196, se titula "Seis Figuras" y fue realizada por el escultor **Ernst Trova**. Las seis figuras que la componen están dispuestas en las seis caras de un cubo y entre la posición de cualquiera de las parejas de dos figuras opuestas, hay relaciones de simetría. En ella también, se observa la esquematización y simplificación geométrica que se ha realizado al suavizar la curvatura de las superficies de la figura humana.

Un estudio interesante al respecto podría ser el análisis de las propiedades, esto es, **las transformaciones isométricas**, que habría que aplicar para obtener las posiciones que ocupan sus figuras. Éstas se podrían obtener, simplemente, efectuando a una de ellas diferentes rotaciones.





En cualquier caso, estos últimos ejemplos mostrados ponen de manifiesto la **dificultad de delimitar claramente lo que es la Escultura Matemática** y si una obra concreta lo es, como en el caso de las de las figuras 196, 197 y 198. Por otro lado, hay que tener en cuenta que hay trabajos que de una forma clara y explícita muestran esta naturaleza matemática; por ejemplo, si la escultura fuera la figura de un poliedro concreto no se plantearía ninguna duda.

En otras obras escultóricas algunos conceptos matemáticos se hallan presentes sólo de una forma oculta o implícita. Un ejemplo de ello, diferente a los anteriores, podría ser el de una obra que al estudiarla se dedujese que se ha construido mediante operaciones de lógica booleana. Este podría ser el caso de la escultura de la izquierda, figura 199, de **Bruce Beasley**. En ella se observa la complejidad adquirida a partir de la unión de sencillos prismas y cubos.

Figura 199 (izquierda): Bruce Beasley; “Solid Séquence (Sucesión Sólida)”. Bronce fundido en 1993. Altura aproximada 85 cm.

A la derecha en la figura 200, exponemos una fotografía que nos sirve para mostrar el caso opuesto, es claramente una Escultura Matemática. Fue realizada por el escultor **Philip King**, y es un ejemplo muy sencillo de la utilización de una simple figura geométrica como el cono elíptico. Esta figura se va seccionando, mediante la realización de ocho cortes realizados en planos verticales.

En cuanto a la pertenencia de una obra escultórica determinada a un tipo concreto de los que incluiremos en la propuesta de clasificación que haremos en algunos casos, sucederá lo mismo y su adscripción puede resultar realmente difícil.

En nuestra tesis, intentamos separarnos del habitual lenguaje matemático, basado en una compleja formulación algebraica. Este lenguaje, en general, será sustituido por la imagen de las obras, las gráficas, etc.



Figura 200: Philip King. “Through (A Través)”, 1965. Dimensiones: 213 x 335 x 274 cm. Colección del artista, Bedfordshire, Gran Bretaña.

5.2 El Proceso de Concepción de la Escultura Matemática

En este apartado de la tesis, sin embargo, no evitaremos el lenguaje matemático, basado en la formulación algebraica. Éste, se unirá a la imagen de las obras, las gráficas, etc., que a lo largo de la presente tesis serán el método utilizado, ya que nos hemos planteado como objetivos genéricos, describir la Escultura Matemática y clasificarla. Creemos que la mejor forma de lograr nuestros fines es explicarlos visualmente, lo que ya hemos intentado mostrando diversas obras en las figuras anteriores utilizadas para describir esta escultura.

A continuación, vamos a incluir algunos ejemplos concretos en los que explicaremos el desarrollo matemático implícito en el trabajo de algunos escultores o de algunas obras, que nos permitirán justificar el fuerte contenido matemático existente en lo que hemos definido como Escultura Matemática. Al final de la página se muestra una obra en que además de sus cualidades plásticas, también podemos apreciar valores matemáticos, figura 201, y que nos va a servir como ejemplo para describir el proceso matemático implícito en su concepción. En este caso es un trabajo de un escultor español, **Javier Carvajal**, perteneciente a su serie de obras incluidas en la denominación general dada por la famosa fórmula del cilindro, $\pi r^2 a$.

El proceso de construcción de las columnas que componen este conjunto escultórico, se resume en un libro de título, *Ritmos: Matemáticas e Imágenes*, referencia [26]. Este texto conjuga una preciosa estética, con unos contenidos muy interesantes y con un adecuado rigor matemático. Este procedimiento consiste en obtener a partir de un cilindro “rodajas simétricas”, mediante el corte con dos planos inclinados, lo que produce porciones de cilindro acabadas en dos secciones elípticas. Uniendo rodajas simétricas formadas mediante este proceso, repetido un determinado número de veces: 24, 48, 96, etc.; el necesario en función del ángulo entre las dos secciones, se tiene una aproximación al toro. Obsérvese la figura 202, situada al inicio de la página siguiente. Al respecto pensemos en las palabras del escultor: “Si aceptamos que la circunferencia es un polígono de infinito número de lados, hemos de aceptar también que el toro es el polígono de infinito número de lados cilíndricos”.



Figura 201 (arriba): Javier Carvajal. “Columnas Salomónicas”. Pertenecientes a la serie de esculturas, $\pi r^2 a$. Realizadas entre 1991 y 1994 en España.

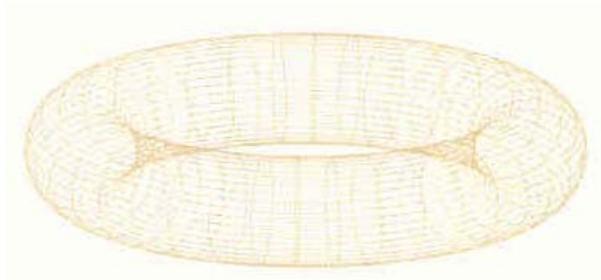


Figura 202: Aproximación de un toro.

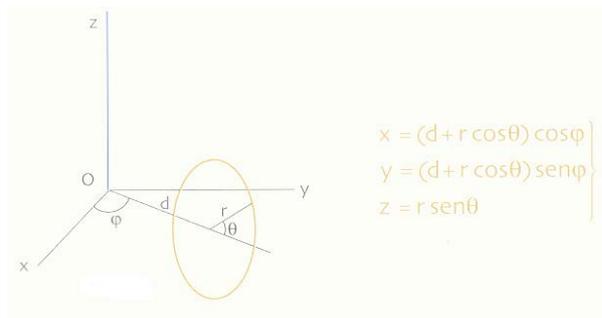


Figura 203: Ecuaciones paramétricas de una superficie toroidal y representación de una de sus secciones circulares.

La figura del toro comienza a enroscarse, transformándose las circunferencias de sus perímetros exterior e interior en dos curvas helicoidales paralelas que formarán, al aumentar el giro de las rodajas, una serie de columnas salomónicas. Para obtener diferentes formas de la superficie de la columna, sólo habría que variar el ángulo que forman entre sí las dos secciones de las “rodajas”, obtenidas a partir del toro. Si utilizáramos sus “gajos” (dos cortes planos del cilindro que se cortan en su interior), podríamos construir otros modelos diferentes de columnas. Estas posibilidades las detallaremos posteriormente.

En la figura 204 situada al lado derecho presentamos otra obra del escultor Javier Carvajal, que se titula, “Dos columnas de giro contrapuesto”, incluida en este grupo de la serie, el denominado “Columnas Salomónicas”. Este ejemplo también nos sirve para ilustrar la **dificultad de delimitar claramente qué es una Escultura Matemática** y si una obra concreta lo es.

El estudio de la Escultura Matemática se puede realizar de la forma tradicional en Matemáticas, como se podrá apreciar con el caso concreto de la serie de esculturas anterior, $\pi r^2 a$, de **Javier Carvajal**, cuya concepción se describe en el libro titulado *Forma y Número*, referencia número [27], que comentaremos brevemente.

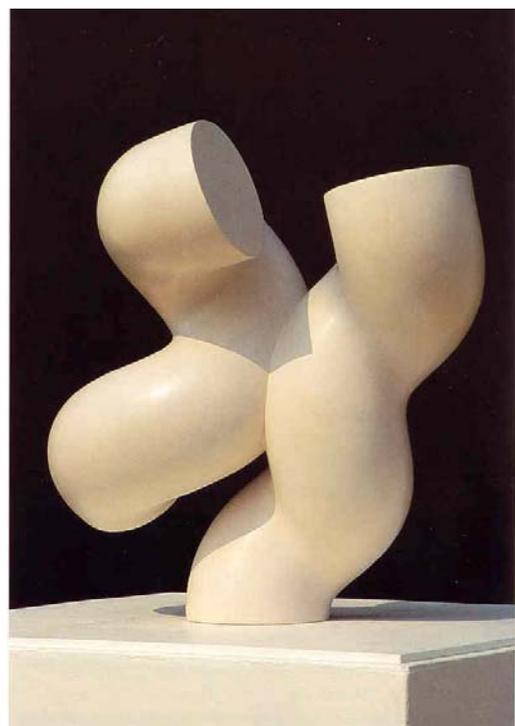
Figura 204 (derecha): Javier Carvajal, “Columnas Salomónicas, Dos columnas de giro contrapuesto”. Serie de esculturas, $\pi r^2 a$. España, 1991-1994.

Como ya es sabido, el “toro” es la denominación de la superficie matemática que se genera mediante la revolución de una circunferencia alrededor de un eje no diametral. Sus ecuaciones se incluyen, junto con la representación de la circunferencia correspondiente a una de sus secciones, en la figura 203, a la izquierda en el centro.

Una vez fijados ambos radios, si en las ecuaciones paramétricas de la superficie anterior, efectuamos la eliminación de los dos parámetros angulares, **obtenemos su ecuación cartesiana**. Estos dos parámetros representan las dos posiciones angulares de los puntos de la superficie.

$$4d^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + d^2 - r^2)$$

Resumiendo el proceso de diseño de las columnas salomónicas de la anterior figura 201, finalizaría seccionando el toro por una serie de planos radiales y girando sus rodajas, una a una, el mismo ángulo y en el mismo sentido.



En este texto un experto español en este tema de las relaciones Matemáticas y Arte, **Eliseo Borrás**, realiza un breve resumen de su investigación sobre de los procesos matemáticos utilizados en la realización de esta serie de esculturas. En dicho libro y acerca de las motivaciones de Javier Carvajal en esta serie escultórica, el profesor Eliseo Borrás literalmente dice: “Quedó atrapado, hipnotizado, por las posibilidades de ese cuerpo redondo y, a la vez, recto: el cilindro. Desde la simplicidad de este cuerpo ha creado formas complejas, guiado por dos fuerzas evolutivas: la lógica de los movimientos y la búsqueda de la belleza”.

El proceso de diseño de estas esculturas, incluidas dentro de esta colección, parte de la obtención de los cuerpos seccionando un cilindro. Al respecto, obsérvese la figura 205 situada al final de la página. Cada sección del cilindro es una elipse cuya posición se puede caracterizar por el ángulo θ , que forma su eje mayor con el eje central del cilindro dibujo situado a la izquierda de la figura 205. El plano determinado por estos dos ejes lo llamaremos plano principal de la sección. Dos secciones distintas del cilindro, dibujo situado a la derecha de la figura 205, determinarán un módulo de construcción para las esculturas de esta serie.

Además de por los ángulos respectivos, θ_1 y θ_2 , la posición relativa de ambas secciones queda determinada por el ángulo ϕ , que forman entre sí los planos principales y la distancia c entre los centros de las dos elipses. Si c es suficientemente grande para que no se corten las secciones, el módulo obtenido es una “rodaja”; dibujo situado a la derecha de la figura 205. Si estas secciones se cortan, los dos módulos obtenidos son “gajos”, dibujo del centro de dicha figura.

En un cilindro de radio r conocido, el conjunto formado por los cuatro parámetros anteriores (θ_1 , θ_2 , ϕ , c), determina cada uno de los módulos posibles. También se ha de cumplir que los ángulos θ_1 y θ_2 se encuentran comprendidos entre 0° y 90° , este último valor incluido, y el ángulo ϕ , entre 0° y 180° . Estas relaciones indican que, teóricamente, tenemos libertad para dar un número infinito de valores a cada uno de estos parámetros.

Si colocamos un módulo junto a otro, girando un cierto ángulo α , orientándolos en el mismo sentido o invirtiéndolos, y siendo de igual o de distinto radio, van naciendo nuevas figuras que son utilizadas por este escultor en sus obras. Ejemplo de estas figuras son los ovoides, las esferas, calabazas, columnas salomónicas (figuras anteriores 201 y 204), rosquillas que se acercan más y más al toro, troncos de conos y álabes que “serpentean”, etc. Este valor de ángulo α resulta ser un nuevo parámetro que se añade a los iniciales. Los movimientos de traslación y giro de los módulos generan formas que con frecuencia son muy semejantes a las de la naturaleza.

Otro ejemplo que mostramos, obtenido por Javier Carvajal aplicando el proceso anterior de unir “rodajas” de un cilindro, es la escultura de la que ofrecemos dos vistas diferentes en las figuras números 206 y 207, situadas en la página siguiente. Esta obra pertenece a la serie anterior, dentro del tipo: “Rodajas Paralelas” y está construida con rodajas no simétricas de 75 grados de sección y 180 grados de giro total.

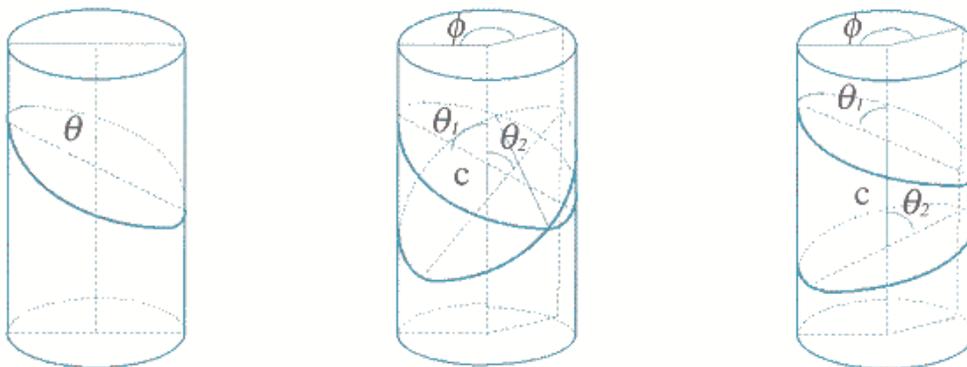


Figura 205 (arriba): Secciones de las piezas obtenidas de un cilindro y utilizadas por Javier Carvajal en la serie de esculturas $\pi r^2 a$.

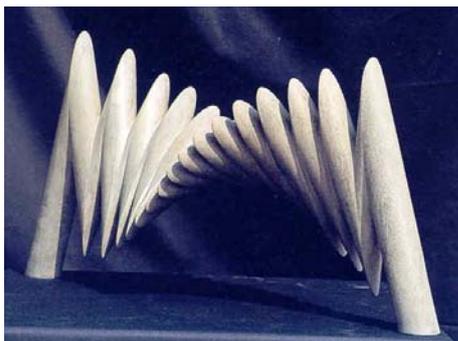
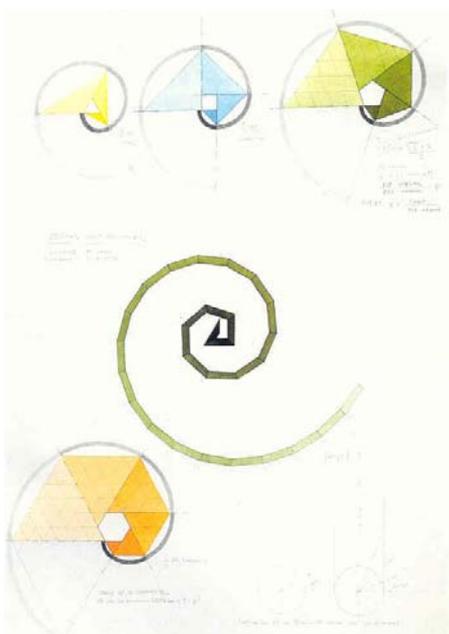
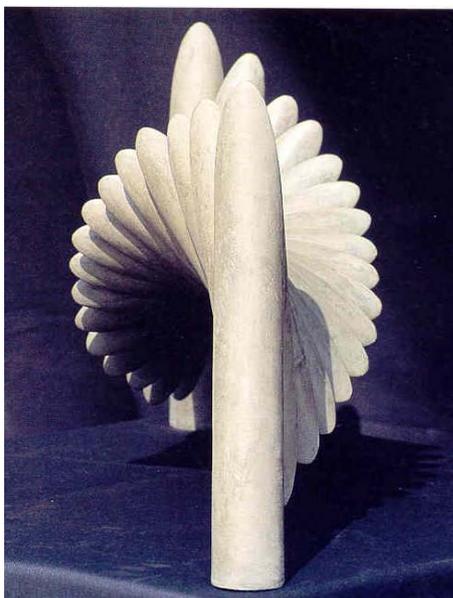


Figura 206 (arriba): Javier Carvajal. “Rodajas Paralelas”. Serie: $\pi r^2 a$. Caso de rodajas no simétricas de 75 grados de sección y, 180 grados de giro total. Vista de frente.



Pero no todas las formas impresionan por igual nuestros sentidos. Unas representaciones nos atraen más que otras porque corresponden a distintos “ritmos numéricos”. Éstos son una nueva prueba de la total concepción matemática de las obras de este escultor. Uno de los utilizados en esta serie de esculturas de **Javier Carvajal** es, el número π , lógicamente presente en los giros y que incluso se ha incluido en el título general de esta serie.

En otro de los tipos de esculturas incluidos en esta serie, denominado “espirales poligonales”, el lado de la espiral poligonal del polígono de n lados, después de k giros, es el número:

$$2k \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

Esto implica que el área de la figura de la espiral correspondiente es k^2 , unidades triangulares de la retícula sobre la que se construyen. También en las anteriores columnas salomónicas, figuras 201 y 204, hay $2\pi/a$, módulos (secciones de cilindro) en cada vuelta y una longitud, medida desde el centro de, $2\pi c/a$. Cuanto menor sea a , más alta será la columna.

En otro de los tipos de esculturas realizados por Javier Carvajal, “espirales multipoligonales”, los ángulos entre sus lados, siguen la relación:

$$\alpha_n = \pi \left(1 - \frac{2}{2+n} \right)$$

Además en los radios vectores de estas figuras, aparece la serie armónica:

$$\begin{cases} \rho_0^2 = 1 \\ \rho_n^2 = \left(1 + \sum_{k=1}^s \cos \left(\sum_{m=1}^k \frac{2\pi}{m+2} \right) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^s \operatorname{sen} \left(\sum_{m=1}^k \frac{2\pi}{m+2} \right) \right)^2 \end{cases}$$

La obra del tipo “espirales multipoligonales” que exponemos como ejemplo, la de la figura 209 en la página siguiente, es por tanto un trabajo de concepción claramente matemática, como nos indica el título y los razonamientos anteriores. Los cálculos respectivos se pueden comprobar en los bocetos utilizados para el diseño de esta escultura, observar la figura 208 que mostramos a la izquierda.

Figura 207 (centro): Javier Carvajal, Escultura de la figura anterior, vista de perfil.

Figura 208 (izquierda): Javier Carvajal. Bocetos utilizados en el diseño de la escultura, “espirales poligonales”, que se muestra en la figura siguiente.



El profesor y prestigioso investigador en este campo de las relaciones Matemáticas-Arte, **Elíseo Borrás**, en la anterior referencia [27], y que precisamente se titulaba, *Forma y número: Variaciones*, finaliza este análisis de los diversos procesos matemáticos implicados en el diseño de estas obras con las siguientes palabras:

“Forma y número son consecuencia directa de los procesos de crecimiento. Estos aspectos se corresponden en Javier Carvajal, que a través de la forma intuye el número, atrapa el ritmo y crea belleza”. Estas palabras también se podrían aplicar al trabajo realizado por muchos escultores matemáticos.

Sin embargo, los procesos matemáticos involucrados en el diseño o el desarrollo de estas obras escultóricas a veces, pueden llegar a ser realmente muy complejos. Un ejemplo puede ser el de la superficie descubierta por el matemático brasileño **Celso Costa**.

Ésta ha sido utilizada en el diseño de la obra de la figura 210, situada debajo a la izquierda, realizada por uno de los más reconocidos escultores matemáticos, **Helaman Ferguson**. Se titula “Superficie Mínima, de Costa II Br-Al”. Está caracterizada utilizando ecuaciones paramétricas de variable compleja. Parte de ellas se muestran a la derecha, figura 211, como ejemplo de la gran complejidad matemática que se puede alcanzar en la concepción de algunas obras. Ambas figuras están extraídas de su página web, referencia [PW6]. Estos ejemplos anteriores en los que se ha descrito los procesos matemáticos implícitos en su concepción, nos han servido para presentar esta filosofía del Arte. Dado que es evidente la gran cantidad de posibilidades de creación de Escultura Matemática que existen, y para no extender en exceso la tesis, sólo incluimos estos anteriores.

Figura 209 (arriba): Javier Carvajal, “Espiraes Multipoligonales”. Serie $\pi r^2 a$. España, 1991-1994.



$$S(w) = w \prod_{(0,0) \neq (m,n)} \left(1 - \frac{w}{m+ni} \right) e^{\frac{w}{m+ni} + \frac{w^2}{(m+ni)^2}}$$

$$\alpha(w) = \frac{\pi^2}{8\lambda^2} + \frac{1}{2} \Re \left(\pi w - Z(w) + \frac{\pi}{2\lambda^2} (Z(w-1/2) - Z(w-i/2)) \right)$$

$$\beta(w) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \log \left| \frac{P(w) - \lambda^2}{P(w) + \lambda^2} \right|$$

$$\gamma(w) = \frac{2\sqrt{2\pi}\lambda^2}{P'(w)}$$

$$(x, y, z) \leftrightarrow (\alpha(w), \alpha(i\bar{w}), \beta(w))$$

Figura 210 (izquierda): Helaman Ferguson. “Costa II, Br Al”. Superficie mínima de Celso Costa. Bronce de Silicio y Aluminio. Colección del artista.

Figura 211 (arriba a la derecha): Parte de las ecuaciones de la superficie de la obra anterior.

5.3 La Evolución de la Escultura Matemática y sus Precedentes en el Arte

En este apartado de la tesis vamos a comentar las razones que han permitido el desarrollo de la Escultura Matemática, que como hemos anticipado **se inicio en el siglo XX, especialmente a partir de su segunda mitad**. En la exposición del precedente capítulo dedicado a la Escultura del Siglo XX, hemos podido apreciar que ya en algunas tendencias artísticas de comienzos del anterior siglo, se había iniciado la realización de obras que anticipaban algunas de las características de la Escultura Matemática. Hacia el inicio de la segunda mitad del anterior siglo ya se puede decir que este tipo de escultura había alcanzado un cierto desarrollo. Muchos de los conceptos matemáticos que como veremos hemos utilizado en la clasificación, ya habían sido manejados en la creación de algunas obras escultóricas.

A continuación, resumiremos muy brevemente las principales tendencias del pasado siglo en las que hemos aparecieron precedentes de obras de Escultura Matemática y enumeraremos algunas de las principales obras que hemos mostrado en ese capítulo y escultores en los que hemos encontrado antecedentes. Al respecto son muy útiles el libro de la anterior referencia [8] *Historia del Arte*, Volumen IX, y la Historia del arte de la referencia [28], en los cuales se recogen algunas de las imágenes que hemos utilizado para describir los diferentes movimientos artísticos, a lo largo del capítulo anterior.



La Escultura Cubista. En primer lugar, tenemos que resaltar que la decisiva aportación del movimiento cubista, consiguió transformar e incluso revolucionar totalmente los profundos principios escultóricos vigentes hasta ese momento. Si asumimos que la principal característica de esta tendencia artística era geometrizar sus formas, es lógico que dentro de esta escultura se hayan producido diversas obras en que se puede entrever la aparición de algunos conceptos de tipo matemático, como ocurre con algunas esculturas del propio **Picasso**. Ya hemos mostrado algunas de ellas en las figuras anteriores 162 y 165. En la figura 212, mostramos una obra de otro importante escultor cubista, **Alexander Archipenko**.

El Constructivismo, otra corriente artística del siglo XX, también contribuyó a la aparición de diversos conceptos matemáticos en la Escultura. Para comprobarlo, sólo hay que fijarse en lo que decía el principal artista de este movimiento artístico, **Vladimir Tatlin**: “La pintura y Escultura son en sí construcción”. Ya mostramos una imagen de una obra suya en la figura 171. Además los artistas constructivistas proponían que la distinción de las artes debía ser “eliminada”.

El Neoplasticismo fue otro movimiento artístico de vanguardia surgido en Holanda, en el año 1920. Esta corriente tuvo como premisa fundamental “la unidad indisoluble de todas las artes”, tomando la abstracción como modelo, por lo que sus obras exhibían características geométricas. También contribuyó a la aparición de la Escultura Matemática.

Figura 212 (izquierda): Alexander Archipenko, “Silueta”. Año 1913. Museo de Hesse, Darmstadt.



El único escultor importante y realmente conocido de esta tendencia neoplástica fue **Georges Vantongerloo**. En la anterior figura número 170 expusimos una obra suya. En ella, además del evidente uso de sencillos prismas y de su disposición de tipo geométrico, se puede deducir la utilización de algunas operaciones de lógica.

El estilo Surrealista fue muy importante para la Escultura, aunque para nuestra tesis tiene menos interés, ya que en general los conceptos matemáticos en sus obras, o se presentan menos que en las otras artes o resultan insuficientes, como para considerar que ya hacían Escultura Matemática. No obstante, es conocido el caso de la influencia de las Matemáticas en la pintura de **Salvador Dalí**. Al respecto se puede ver la ponencia de **Blanco, Reyes y Santamarina** de la referencia [24].

En el trabajo de alguno de sus más célebres escultores como es el caso de **Constantín Brancusi**, podemos ver se que anticipan algunos conceptos Además de la obra suya de la figura 163, que ya incluimos en el estudio de este escultor incluido en el anterior capítulo, en la figura número 213 a la izquierda, mostramos su obra “La Nègresse Blonde, la cual nos sirve para evidenciar la gran simplificación y la interesante geometrización de los trabajos de Brancussi.

Figura 213 (izquierda): Constantín Brancusi, “La Nègresse Blonde (La Negitud Rubia)”; 1926. Dimensiones: 38,42 x 12,38 x 18,73 cm.

La corriente Figurativa es una de las derivaciones del estilo surrealista que todavía sigue en vigor en la segunda mitad del siglo XX con escultores realmente importantes como: **Alberto Giacometti, Henry Moore, Barbara Hepworth, Max Ernst**, etc. Ya hemos expuesto obras suyas en el capítulo anterior. Aunque en la escultura de estos artistas se aprecian algunas características geométricas, no podemos decir que sea conceptualmente matemática.

La corriente Abstracta en la Escultura fue muy importante y todavía hoy lo es. Tuvo un franco desarrollo en la segunda mitad del siglo XX. Además, en cuanto a los objetivos de nuestra tesis, bastantes obras en el caso de algunos autores concretos presentan muchas características geométricas y matemáticas y, por tanto deben ser incluidas en el estudio de este tipo de escultura.

En algunos de los trabajos de sus principales representantes: **David Smith, Anthony Caro, Alexander Calder, Jorge de Oteiza y Eduardo Chillida** y en los de otros escultores de esta tendencia, se puede vislumbrar muy claramente la utilización de algunos conceptos matemáticos.

Comentaremos muy brevemente tres obras de tres de los autores abstractos más importantes que ya fueron expuestas en el capítulo anterior. Estas esculturas son unos ejemplos muy claros y que ofrecen algunas interesantes características geométricas y matemáticas.

Figura 214 (derecha): Max Bill, “Unit Tripartite (Unidad Tripartita)”. Premio internacional de escultura de la 1ª Bienal Internacional de São Paulo del Año 1951.





Figura 215 (arriba): Atomium. 110 m de altura. Construido para la Exposición Mundial de 1958, Bruselas.

Esta escultura se inicia en Europa basándose en la herencia del inmediato pasado, como puede ser el estilo de la escuela de la **Bauhaus**, tal como comenta **Juan Antonio Ramírez** en el libro de la referencia [28]. Sus principales figuras en estos años son **Richard Paul Lohse** y **Max Bill**, aunque también se considera que tienen trabajos en esta línea escultores como **Reg Butler**; **Mirko Basaldella** y Naum Gabo. Comentaremos dos obras expuestas en el capítulo anterior. Una es la figura 172, escultura en la que se puede apreciar que su concepción es puramente matemática. El autor de la obra **Anton Pevsner** utiliza formas de superficies regladas. Está fechada a mediados del siglo, en 1946. En la misma página se muestra otro ejemplo de este tipo de obra realizada por **Naum Gabo**, figura 173, realizada en el mismo año. En este caso, está construida mediante hilos tensados, una técnica que permite construir fácilmente superficies regladas.

Como ya hemos dicho, se considera al escultor Max Bill un claro precursor de la Escultura Matemática. Además de las obras de las figuras 8 en la Introducción y la 146 y 187, ambas incluidas en el estudio detallado del escultor del anterior capítulo, en la figura número 214 en la página anterior, se muestra otra de sus interesantísimas esculturas. Este trabajo tiene por título “Unidad Tripartita”. En la referencia [4] el profesor Ton Marar analiza su topología.

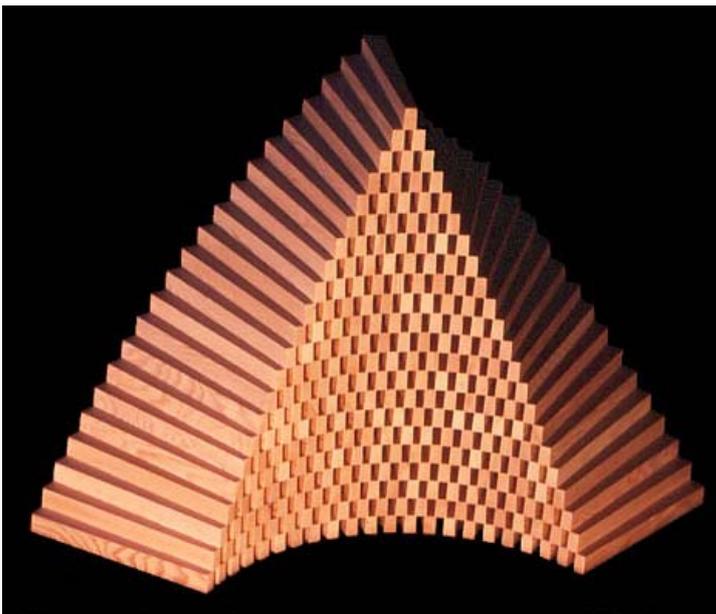


Figura 216 (abajo): Elias Wakan, “Hermitage”. Madera; 2002. Dimensiones: 62 x 62 x 27cm.

Estas tres esculturas abstractas son: la figura 179, una trabajo de Alexander Calder, titulada “La Gran Velocidad”; la figura 7, una escultura de Eduardo Chillida denominada “Homenaje a la Mar III” y por último, la figura número 183, una obra de David Smith titulada “Cubos XIX”.

El tipo de escultura que algunos expertos y críticos de arte denominaron “Geométrica”, va a ser el detonante de la aparición de lo que hemos conceptualizado como Escultura Matemática y desde ese momento va a permanecer siendo una parte fundamental de ella. De hecho va a ser uno de los grupos de nuestra clasificación.

Según nos comenta en el texto de la referencia, Max Bill resaltaba que las ideas abstractas en el Arte que inicialmente se manifiestan como conceptos, se tornaban “vivas”. En definitiva, el Arte era una expresión pura de armonía de medida y de regla. Debería existir un formalismo que definiera al Arte como un ramo de la Filosofía Metafísica.

En la figura 215 (arriba) mostramos el famoso Atomium de Bruselas, construcción de un impresionante tamaño, su altura es de 110 m. Esta es una obra “arquitectónica” que podemos considerar “escultural” y que ha sido objeto de numerosos análisis desde un enfoque matemático.

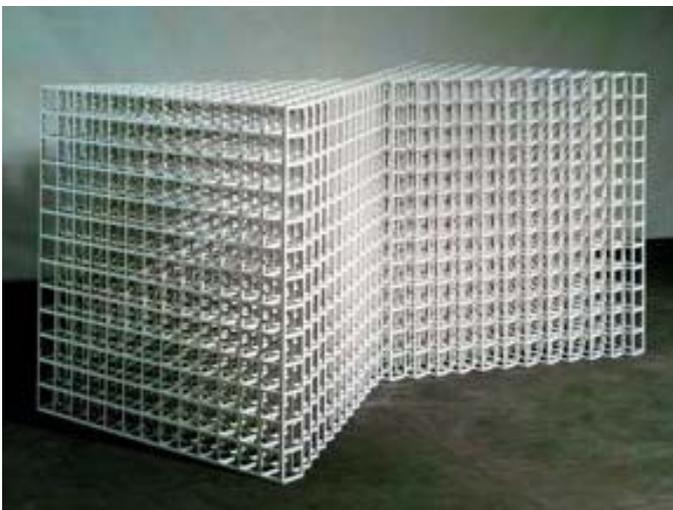
La escultura “Geométrica”, que como ya hemos dicho, ha permanecido siendo una parte fundamental de la Escultura Matemática y que de hecho va a caracterizar a uno de los grupos más extensos y variados de la clasificación, ha aparecido en diferentes apartados de nuestra tesis. En el final de la página anterior, en la figura 216, mostramos un trabajo de un escultor actual, **Elias Wakan**. En él consigue una interesante construcción utilizando una simple pieza prismática.

El estilo Minimalista es otro movimiento artístico en que sus artistas también quieren conseguir que sus objetos se alejen, tanto de la idea de Escultura como de Pintura, para acceder a la de “objetos específicos” con un **máximo nivel de abstracción, una geometría estricta, basada en el orden, la simplicidad, la claridad**, y un acabado industrial que borre cualquier huella de manualidad. Minimalistas importantes son **Robert Morris, Sol Lewitt, Carl Andre**, etc.

Hemos incluido algunas obras minimalistas que juzgamos interesantes en el capítulo anterior en el que describimos la escultura del siglo XX, la figura 180, “Cubos XIX” realizada por **David Smith**, artista cuyo estudio hemos situado en el capítulo precedente, también realizó esculturas que pertenecen al arte Minimal. Otra obra es “Elipse”, en la figura 184, que pertenecía a la obra de **Larry Bell**. Por último expusimos del Arte Minimal “Piezas modulares en escalón”, en la figura 185, de **Sol Lewitt** y una escultura de **Tony Smith**, titulada “La serpiente está fuera”, en la figura 186. Al final de esta página mostramos otra obra de Sol Lewitt, la figura 217.

El arte Conceptual es el último de los movimientos de pasado siglo que vamos a resaltar por su importancia en el desarrollo de la Escultura Matemática. Fue provocado por el rechazo hacia los medios tradicionales del Arte. En la década de los sesenta del pasado siglo surgen una serie de tendencias artísticas que investigan nuevas formas utilizando nuevos materiales. Los artistas habían intensificado la gradual desaparición del objeto a “favor del concepto y del arte efímero”. Muchos de los artistas minimalistas, como Morris, Smithson, André y otros, emprendían obras experimentales con estas nuevas ideas y a veces en nuevos escenarios. Los medios tradicionales del Arte no parecían ya ser los apropiados. Esto ocurría casi simultáneamente en distintos centros de Occidente, con denominaciones diversas: **Arte Pobre, Land Art, Arte Conceptual, Antiform, Process Art, Earth Works, Arte Microemotivo**, etc.

Land Art (Arte de la Tierra). Se realizaba principalmente en lugares naturales y en muchos casos apartados. Expusimos una obra perteneciente a **Robert Smithson**, en la fotografía de la anterior figura 188, que fue realizada en el Gran Lago Salado en Estados Unidos. Su título era “Spiral Jetty”. **Del Arte Povera (Arte Pobre)**, llamado así debido a que utilizaba materiales humildes y pobres, destacamos a **Mario Merz**. Sus obras parten de una ley estructural muy elemental, la serie del matemático medieval **Fibonacci**, que aparece muy frecuentemente en la naturaleza y también en el Arte. Esta progresión matemática es la que utiliza Merz, en cualquiera de sus trabajos, ya sean objetos, espacios, vegetales, etc. La aplica a la colocación de las “piezas” que repite numerosas veces hasta lograr formar sus composiciones.



Richard Serra seguramente es uno de los artistas de estas últimas tendencias que más ha destacado en el ámbito internacional. Este autor se caracteriza, además de por el uso de una geometría sencilla, porque en toda su obra hay un juego constante con los “espacios” al dividir el local en el que expone.

Figura 217 (izquierda): Sol Lewitt, “American, 1928 (Americano, 1928)”. Tamaño 150 x 300 x 159 cm. Año 1985. MOMA, Nueva York.

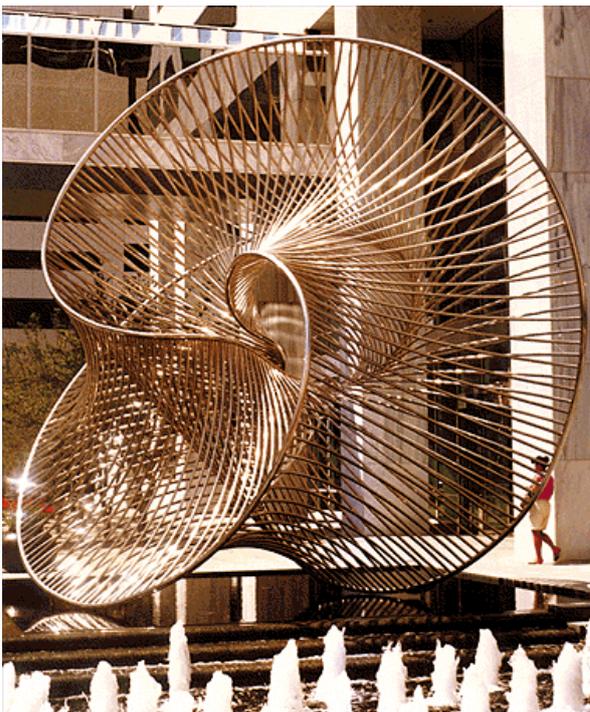
Es un escultor realmente interesante, que en sus obras utiliza sencillas formas geométricas y unas disposiciones metódicamente calculadas. En anterior figura 189, mostramos la escultura de **Richard Serra** titulada “Plinths” y posteriormente incluiremos alguna más de las características de este escultor. El trabajo de artistas de este tipo nos demuestra que **podemos observar la influencia de las Matemáticas muchas veces**, incluso en los movimientos artísticos que pretenden formas más sencillas como los movimientos Pobre, Minimalista, Conceptual, etc. En este breve recorrido histórico, hemos constatado la aparición de algunas esculturas conceptualmente matemáticas en varios de los principales movimientos artísticos del siglo XX.

Para finalizar este breve estudio temporal de los precedentes de la escultura de concepción puramente matemática, resaltaremos que **la aparición paulatina de conceptos matemáticos muy diversos a lo largo de la extensa historia de la Escultura**, creemos que contribuyó a permitir que desde mediados del anterior siglo XX se empezase a realizar obras de Escultura Matemática, o al menos de trabajos que poseen unas evidentes y claras características geométricas o matemáticas. Sin embargo, este tipo de escultura no se desarrolló claramente hasta bien entrada la segunda mitad de este siglo.

También ha contribuido muy significativamente a este avance de la Escultura Matemática, el interés que han experimentado por el Arte y en concreto por la Escultura algunos de los mejores matemáticos e informáticos. **La unión de ambas especialidades, Matemáticas e Informática, ha sido el “caldo de cultivo” ideal para que se desarrolle este tipo de escultura.** La profunda influencia del ordenador ha sido transcendental en el desarrollo de esta escultura y sobre todo a partir de la “generalización” de la Informática, tal como comentamos en el siguiente apartado.

5.4 La Informática y la Escultura Matemática

La mayor presencia y difusión del Arte conceptualmente matemático ha sido facilitada por la utilización por bastantes artistas de la Informática. También el ordenador ha permitido a los escultores realizar fácilmente todo los procesos necesarios para la creación de obras de Escultura Matemática, lo que ha sido determinante en su desarrollo. Además, **ha posibilitado una correcta ejecución en algunos de estos trabajos que han podido llegar a ser bastante complejos.**



Un ejemplo de estas obras puede ser la figura 218, similar a la escultura de la figura número 13. Este seductor trabajo que podemos observar en la imagen situada a la izquierda, se podría considerar una extensión del concepto de superficie reglada, porque utiliza para la formación de la superficie el movimiento de una curva cualquiera, no necesariamente una recta. En cualquier caso, es una superficie matemática bastante compleja. Esta obra ha sido realizada por uno de los mejores escultores matemáticos, que también es arquitecto, **Charles Perry**. Para estudiar su extenso trabajo es muy interesante su ponencia de la referencia [29].

Figura 218 (izquierda): Charles Perry, “Solstice, (Solsticio)”. Acero inoxidable; 1985. Altura aproximada 8,50 m. Plaza Barnett, Tampa, Florida.



Figura 219 (arriba): Bathsheba Grossman. “Sevenspheres, (Siete esferas)”. Metales con diferentes tratamientos superficiales.

Este artículo de Charles Perry, que también es un importante investigador en el tema de la Escultura Matemática, fue presentado como ponencia dentro de otra serie de congresos internacionales sobre el tema de las relaciones Matemáticas y Arte, y en concreto con el campo diseño, **Mathematics & Design**. En estos eventos periódicos también se han incluido otros interesantes trabajos acerca de la profunda influencia del ordenador en el Arte.

Otro claro ejemplo de utilización de la informática es la obra de la escultora matemática **Bathsheba Grossman**. A la izquierda en la figura 219 mostramos otro de sus trabajos, todos muy interesantes desde un punto de vista matemático. Ésta es una obra que posee una geometría y topología complicadas. Ha sido realizada por esta artista de formación informática, lo que se aprecia muy claramente en ella y en casi toda su escultura.

En este tipo de obras para poder diseñarlas, estudiarlas y realizarlas es necesario no sólo utilizar Geometría, sino Topología e incluso Cálculo vectorial y diferencial. Tal y como ya hemos enunciado, ello provoca que en muchas de **las obras más complejas se llega a hacer casi imprescindible la utilización de Informática**, utilizando diversos programas de diseño gráfico y de Matemáticas. Además en las últimas décadas se ha producido una evidente mejora de la calidad de los programas informáticos gráficos y matemáticos, característica que ha posibilitado a estos artistas una correcta ejecución de trabajos que pueden llegar a ser muy complejos y que serían difícilmente realizables sin estas herramientas. Algunos de estos escultores matemáticos, solos o ayudados por muy buenos informáticos o profesores universitarios, han desarrollado programas específicos para realizar tipos concretos de esculturas, como en el caso de **Brent Collins**.

Precisamente la primera imagen de escultura que expusimos en la presente tesis, la figura número 1, era un magnífico trabajo de este escultor matemático, Brent Collins. Dada su elevada calidad matemática la hemos utilizado como portada de la introducción de la tesis. Otro ejemplo similar es el que se muestra en la figura 220, a la derecha. En ella se representa una superficie con una topología bastante complicada. Este trabajo pertenece a su serie denominada: “Primeras Superficies Orientables”, la que junto con su otra serie: “Primeras Superficies No Orientables”, se dedica al tema de la orientación de las figuras en el espacio. Precisamente, a un tipo de nuestra clasificación lo denominaremos, Superficies No Orientables.

Figura 220 (derecha): Brent Collins. Madera Gallery third, Early Orientable Surfaces, picture 2; (Galería Tercera, Primeras Superficies Orientables, imagen 2). Fotografía de Phyllip Geller.



Además, la superficie anterior tiene la característica de ser una superficie mínima o de curvatura media nula. Posteriormente, en el capítulo correspondiente de la clasificación estudiamos este importante grupo de la Escultura Matemática, Superficies Mínimas, y las describiremos más detenidamente. Ahora nos interesa resaltar que algunos de los trabajos de Brent Collins más complejos, **han sido diseñados con un programa de ordenador que ha denominado “Collins Sculpture Generator”**, con el que es capaz de visualizar un tipo de superficies mínimas, las que se denominan de Scherk, que son muy utilizadas en este tipo de escultura.

Este fabuloso y completo escultor matemático en sus primeras obras, y antes de que empezase a utilizar el programa, previamente a la realización física de la escultura tenía que pasar por una fase de construcción de prototipos. Primero construía maquetas en cera, utilizando una armadura que iba cubriendo de este material. Este sistema le permitía estudiar la lógica geométrica de sus ideas intuitivas, aunque de una forma laboriosa y poco versátil.

Sin embargo, en los últimos años y ayudándose del programa que acabamos de mencionar, este escultor ha podido realizar diversas esculturas anulares en madera, formadas a base de cerrar en forma toroidal una porción de las superficies mínimas de Scherk, que genera mediante el uso del ordenador. El programa permite visualizar diferentes configuraciones, eligiendo el número de “agujeros” y el giro sobre sí misma experimentado por la superficie que se trata de representar. También posibilita experimentar de forma virtual e instantánea con diferentes parámetros.

En la figura 221, en la que se muestra como ejemplo una pantalla de las que se usan en el trabajo con este programa. Trabajando en ella se puede variar las características de la superficie de forma interactiva. En definitiva permite lograr una Escultura Matemática muy interesante, como se puede constatar con las obras de este escultor que estamos mostrando. Este programa fue diseñado por el informático y profesor de la universidad de Berkeley, **Carlo Sequin**, que también es escultor matemático, **en colaboración con Brent Collins**.

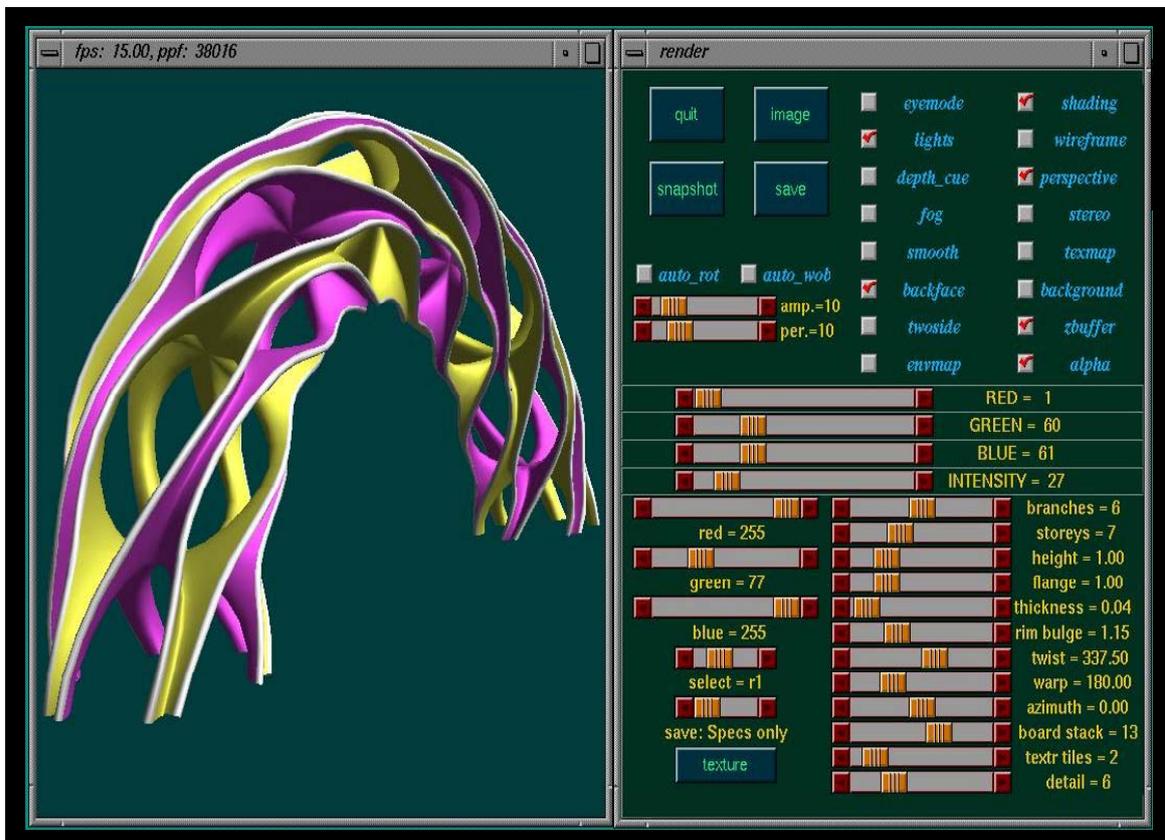


Figura 221 (arriba): Pantalla del programa surgido de la colaboración entre Carlo Sequin y Brent Collins para el diseño de Escultura Matemática mediante ordenador.

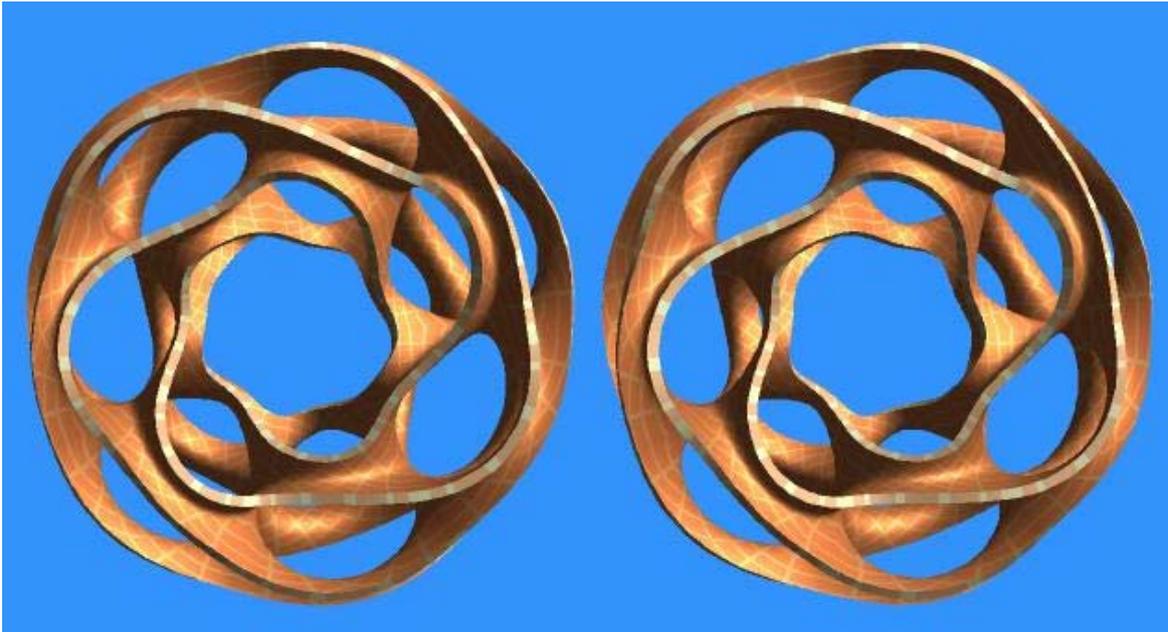


Figura 222 (arriba): Dos imágenes virtuales del diseño de la escultura de la figura 223, “Hexmonkey” (Silla de Mono de Seis Pisos). Realizada por Brent Collins.

El programa referido “**Collins Sculpture Generator**”, que en una primera etapa permitía simplemente la visualización espacial de diferentes formas de la figura matemática que se quería esculpir, ha sido posteriormente mejorado en sucesivas versiones. En una primera lo fue para permitir la realización de los planos de las diferentes secciones de la figura elegida, de forma similar a los scanners utilizados en medicina, lo que facilitaba la elaboración de la obra. Después ha sido “modernizado” para permitir la realización automatizada de la escultura.



Figura 223 (arriba): Brent Collins. “Hexmonkey” (Silla de mono de seis pisos). Madera. Gallery Fourth, Early Modular Surfaces, picture 3; (Galería Cuarta, Primeras Superficies Modulares, imagen 3). Fotografía de Phyllip Geller.

El proceso de la investigación para la creación del programa anterior y sus características se detallan en una ponencia muy interesante, la de la referencia [30], *Computer augmented inspiration*. En ella, además de describir la gran ayuda que para esta escultura representa el ordenador, su autor el profesor **Sequin**, **sustenta que su utilización mejora la inspiración de los artistas**, como nos dice en el mismo título de esta comunicación.

Esta referencia corresponde a una ponencia que fue presentada en otro de los Congresos Internacionales, de la asociación ISAMA, el celebrado en año 1999. Tal y como se ha podido constatar, dada la gran cantidad de referencias de los congresos de esta asociación incluidas en esta tesis. En ellos se han presentado algunos de los mejores estudios de este campo. Con la primera versión del anterior programa que fue denominada “Sculpture Generator 1”, Brent Collins diseñó la escultura que mostramos en la figura 223.

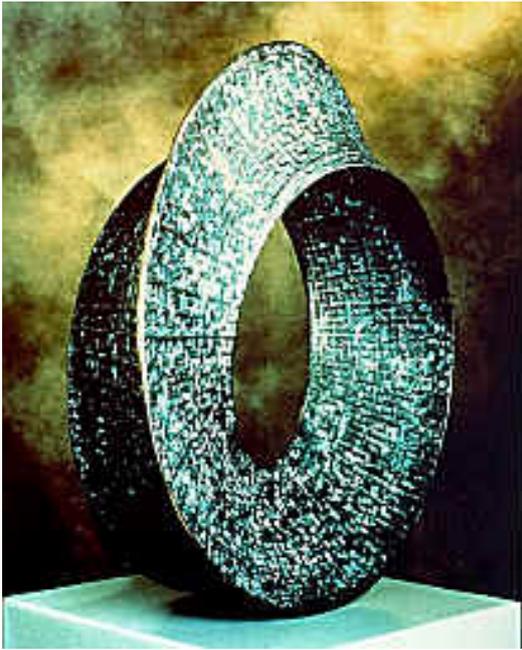


Figura 224 (arriba): Helaman Ferguson, “Umbilic Torus NC, (Toro Umbilical)”. Bronce de silicio.

Esta escultura de la figura número 223 es otro trabajo matemático de este importante escultor y es muy similar al de la figura 1, que utilizamos como portada de la Introducción. Estos dos modelos resultan demasiado complejos para haber sido esculpidos sin la ayuda de un ordenador y del programa adecuado, en este caso el diseñado por Carlo Sequin. En la figura 222, situada al principio de la página anterior, se observan dos vistas virtuales utilizadas para el diseño de esta obra escultórica.

Para realizar las anteriores esculturas, Brent Collins utilizó la versión del programa, “Sculpture Generator 1”, abreviadamente SG-1. El sistema fue implementado para permitir la realización de pequeñas maquetas, mediante un proceso de fabricación asistido por ordenador. El siguiente apartado lo dedicaremos a estudiar este interesante aspecto del tema. La segunda versión del programa, “Sculpture Generator 2”, de forma abreviada SG-2, fue una mejora notable de este software matemático y escultórico.

Otro importante artista que utiliza en su trabajo la informática es **Helaman Ferguson**, tal vez el escultor matemático más conocido internacionalmente. En algunos de sus trabajos ha empleado el ordenador “globalmente” en todo el proceso, logrando la realización completa de la escultura de una forma totalmente “automatizada”. En su interesantísima ponencia titulada *Equations to stone sculpture*, referencia número [31], describe la importancia y la forma de utilizar el ordenador para una realización completa de Escultura Matemática. En ella literalmente nos dice: “Las matemáticas son un lenguaje apropiado para hacer escultura. En particular, las ecuaciones matemáticas son una fuente para nuevas curvas, superficies y volúmenes”.

Ya hemos utilizado su trabajo como modelo para describir el proceso conceptual de la Escultura Matemática, caracterizado en el caso de este autor por una formulación algebraica muy compleja. Esto se puede apreciar en el ejemplo de su obra que se mostró en la figura 210 anterior, ya que también se incluyó parte de las ecuaciones que utilizaba para la modelización de esa escultura. En la parte superior de esta página incluimos una nueva obra en la figura 224, que este autor ha denominado “Umbilic Torus NC”. Esta escultura tiene una forma muy interesante correspondiente a una superficie no orientada. En esta figura las ecuaciones que caracterizan su superficie no son tan complejas como las de la otra obra ya referida, sin embargo la ha “decorado geoméricamente”. Esta obra ha sido diseñada y realizada con ordenador, rellenando su superficie con un relieve en el que se ha utilizado una versión de la curva de Peano, también analizada por Hilbert, cuya construcción se muestra en la figura número 225. Para estudiar en profundidad estas esculturas de Helaman Ferguson es muy útil la consulta de la anterior referencia [31].

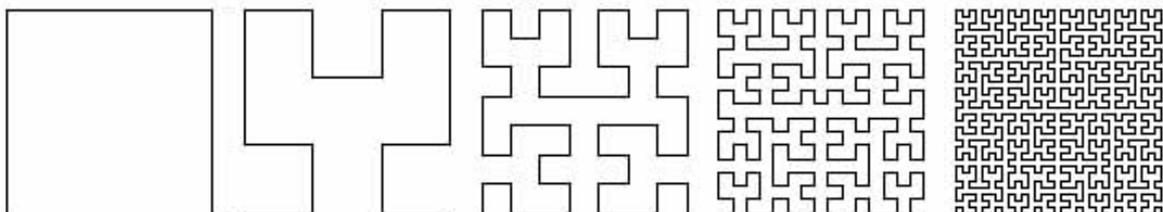


Figura 225 (debajo): Construcción de la curva de Peano, utilizada por Helaman Ferguson en la decoración de la escultura de la anterior figura 221.

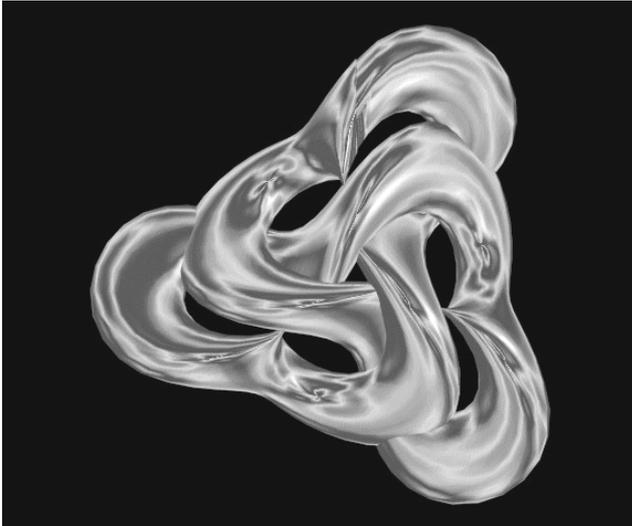


Figura 226 (arriba): Javier Barrallo, Escultura virtual número III, de la serie de título "Hyperescultura". España, 1994.

Con respecto a este tema de la utilización de la Informática en la Escultura, otro ejemplo de sus grandes posibilidades es el trabajo del profesor, informático y escultor **Javier Barrallo**, director de la presente tesis. Resaltamos que la coincidencia de estas actividades profesionales se produce en algunos de los mejores escultores matemáticos.

En el inicio de la presente tesis ya expusimos un ejemplo de su trabajo, en la figura 16. Al lado izquierdo se muestra otra sencilla escultura virtual de Javier Barrallo, de su serie de título "Hyperescultura", la figura 226. Para informarse mejor de su trabajo con el ordenador, es muy interesante consultar las conferencias de este profesor ya mencionadas, referencias [2] y [3].

El ordenador ha permitido a muchos artistas llevar a la práctica sus ideas, antes de ser ejecutadas, como ya hemos visto. Para ello necesitan muy pocos medios, sólo un sencillo ordenador y algún programa informático adecuado, además claro está de su imaginación. No todos estos escultores utilizan programas específicos diseñados por ellos o sus colaboradores, también usan los programas matemáticos más conocidos como Mathematica, Matlab, etc.

Incluso les permite realizar trabajos que se queden en la categoría que denotaríamos como "**exclusivamente virtual**". Un claro ejemplo de ello es la obra escultórica de Javier Barrallo y en concreto su serie denominada "Hyperescultura". En muchas de sus obras este "artista digital" usa la teoría de fractales, en cuya utilización en el Arte es uno de los pioneros en España. Para estudiar el uso de esta geometría en el Arte Matemático puede ser interesante consultar la referencia [3], ya comentada y cuyo título es, *Geometría Fractal: Algoritmos y Creación Matemática*. Otro ejemplo sería el de la figura 227, situada debajo, que muestra otra de sus obras "exclusivamente virtuales".

La impresionante extensión de **Internet también ha permitido una mucho mayor difusión de la Escultura Matemática**. También y como ya será conocido, todos los mejores museos y la mayoría de las salas poseen Páginas Web que son muy visitadas.

La versatilidad de la red también ha facilitado que la obra de muchos artistas matemáticos, haya podido ser conocida por un mayor porcentaje de personas. Muchos de **estos escultores tienen páginas web**, propias o compartidas, que les permiten exponer su obra. Además de las referenciadas en el texto, al final de la tesis incluimos una lista con las más interesantes, entre las muchas que hemos visitado.

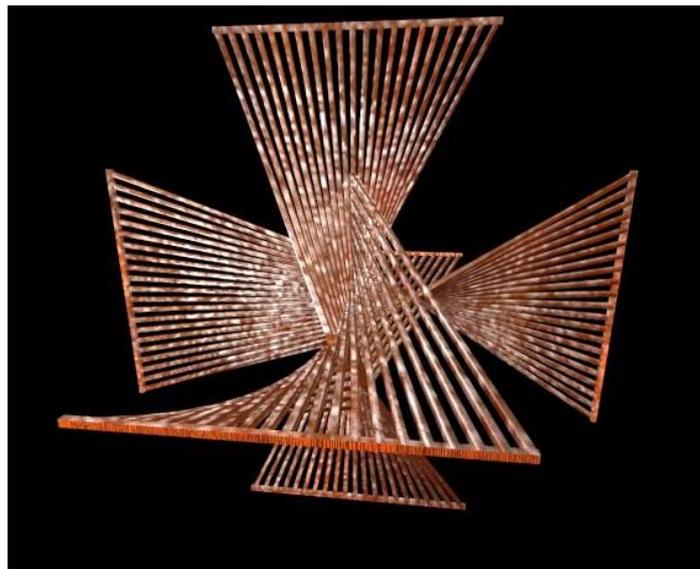


Figura 227 (arriba): Javier Barrallo, Escultura virtual número IV, de la serie de título "Hyperescultura". España, 1994.

Internet también permite a los escultores matemáticos la posibilidad de poner a la venta su obra por canales electrónicos. Esto, dada la gran difusión que obtienen de su trabajo con la red, les facilita la “subsistencia” permitiéndoles seguir en este campo del arte, lo que resulta tan difícil por lo menos como en las demás Artes. Podemos observar al respecto el ejemplo de la página web de Novica, en la figura 228. Esta página está auspiciada por el National Geographic y su ruta está en la lista final mencionada. En esta web se exponen para su venta diferentes obras, algunas de las cuales se pueden considerar Escultura Matemática. Otras webs interesantes son: The International Sculpture Center Organization (Asociación Internacional de Escultores), referencia [PW7], y la de la asociación internacional, Art & Sciences Collaborations Inc (Organización para la colaboración de las Ciencias y las Matemáticas), referencia [PW8]. Esta página aunque dedicada al tema de las relaciones Ciencias Arte, tiene vínculos con las de algunos escultores matemáticos.

Los programas informáticos que hemos comentado y que son utilizados por los artistas anteriores, suelen ser interactivos y permitir la variación de los parámetros con los que se diseña la escultura, lo que conlleva que se puede optimizar el resultado. Esto es también posible con los programas clásicos de Matemáticas, si se conocen las ecuaciones paramétricas de la superficie en que se va a basar la escultura. Ello sucede con los más conocidos como Mathematica, Matlab, etc., que dadas sus amplias capacidades gráficas pueden servir de ayuda para el trabajo de los escultores matemáticos. Por último, resumiendo ordenadamente y seleccionando entre las numerosas ventajas explicadas a lo largo del apartado que hemos constatado con los ejemplos de aplicación anteriores, **las principales ventajas de la utilización de la Informática en la Escultura son:**

- Proporciona una manera rápida y sencilla para investigar las primeras ideas acerca del diseño de una escultura.
- Al permitir visualizar la figura en tres dimensiones, en la mayoría de los casos, se puede evitar la construcción de prototipos de forma manual.

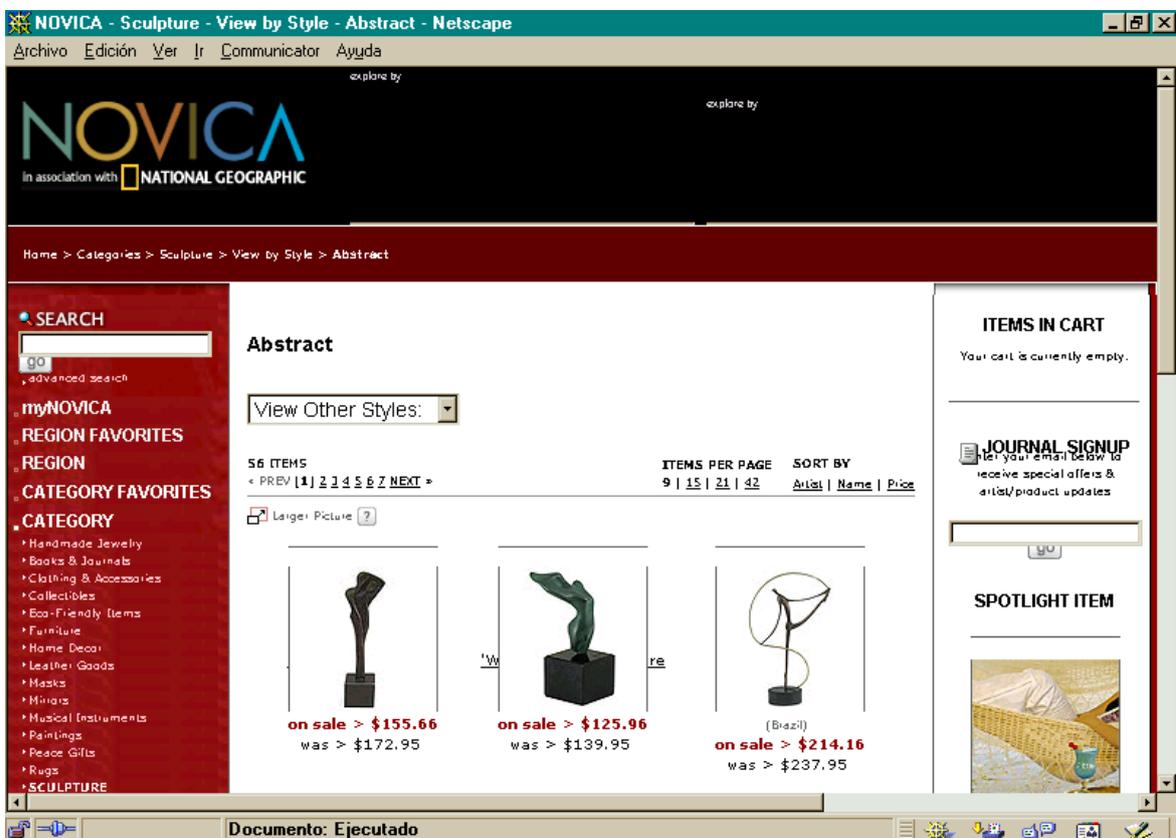


Figura 228 (arriba): Ejemplo de una página web dedicada a la escultura, Novica, auspiciada por National Geographic.

- Resulta casi imprescindible para el diseño de las esculturas más complejas, permitiendo la posibilidad de realizar la figura virtual. En algunos casos se puede comprobar que la obra deseada no es físicamente posible en tres dimensiones.
- Los programas utilizados suelen permitir la variación “instantánea” de los parámetros con los que se diseña la escultura, lo que conlleva poder optimizar el resultado. Esto también es posible con los programas clásicos de Matemáticas ya mencionados, si se conocen las ecuaciones paramétricas de la superficie en que se va a basar la escultura.
- Faculta la realización de una fácil investigación para obtener ideas con las que desarrollar nuevas obras.
- Permite la fabricación asistida por ordenador de prototipos que ayudan en la elaboración de la obra escultórica definitiva. Esto es especialmente utilizado para elaborar maquetas realizadas en materiales plásticos.
- También posibilita la fabricación automatizada de la propia obra de escultura. Algunos escultores matemáticos han implementado sus programas para lograrlo. Como veremos en el siguiente apartado, las obras no sólo podrán ser realizadas en materiales plásticos, sino incluso en materiales nobles como piedra y metal.
- Permite desarrollar obras de escultura exclusivamente virtuales. Esto lógicamente hace que las posibilidades de desarrollo de la Escultura Matemática sean casi “ilimitadas”, contribuyendo a presentar un futuro muy esperanzador.
- Facilita la utilización de las “nuevas geometrías”, como la fractal y las no euclídeas en la escultura. Con respecto a la Geometría Fractal se puede observar un nuevo ejemplo en la figura 229. Posteriormente estudiaremos este tipo de escultura.
- Facilita una mucho mayor difusión de la Escultura Matemática. Cualquier artista, galería de arte, institución cultural, etc., puede darse a conocer mediante una página en Internet y mostrar fácilmente sus obras. Hoy en día existe una increíble colección de páginas web dedicadas a cualquier tema y en concreto a la Escultura Matemática.

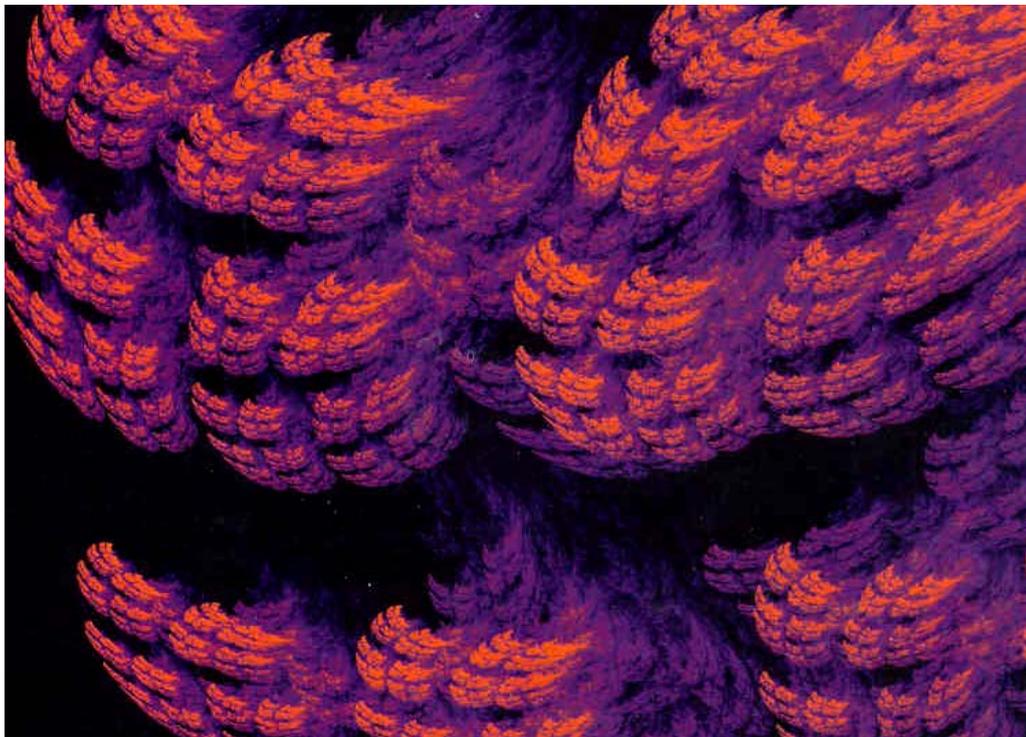


Figura 229 (arriba): Juan Mocholi. Ejemplo de Imagen de fractal en tres dimensiones.

5.5 Los Procesos de Fabricación Controlados por Ordenador en la Escultura

En general cada vez más artistas y, lo que más nos interesa para nuestra tesis, escultores matemáticos utilizan el ordenador, no sólo para diseñar sus obras sino incluso para construirlas con sistemas automatizados. Con estos procesos fabrican o bien la obra misma, o bien una maqueta de la imagen virtual que han obtenido con el ordenador, que les ayuda en la decisión de esculpirla definitivamente y si ésta es afirmativa, les facilita el proceso de ejecución “manual”. Lógicamente, estos procesos son muy útiles, llegando a ser casi imprescindibles en el caso de esculturas de geometrías y topologías complejas. Estas tecnologías de fabricación controladas por ordenador que se aplican a la escultura son denominadas de forma genérica en inglés como “**Solid Freeform Fabrication (SFF)**”. Se describen detalladamente en la ponencia, de la referencia número [32]. Con estas tecnologías se puede modelar formas y obras de casi cualquier complejidad con un coste económico bastante bajo. **Los sistemas más importantes son:**

- **Estereolitografía**, “Stereolithography (SLA)”, la que consiste en obtener el prototipo, solidificando un fotopolímero, mediante la utilización de un rayo láser controlado por el sistema informático.
- **Sinterización Selectiva por Láser**, “Selective Laser Sintering (SLS)”, la que usa un láser infrarrojo de alta intensidad para fundir y conseguir un compuesto a partir de partículas de nylon, fibra de cristal y polvo cerámico. Como si fuese una impresión en tres dimensiones, el material se va depositando gota a gota mediante un inyector hasta obtener el prototipo, mediante un rayo láser controlado por ordenador.
- **Modelado por Deposición de Material Fundido**, “Fused Deposition Modeling (FDM)”. Por último, comentamos este sistema en el que el prototipo se obtiene capa a capa, depositando delgados mantos de plástico semilíquido.



Figura 230 (derecha):
Bathsheba Grossman, “Flame
Beta 11 Stripes (Llama Beta
con 11bandas). Bronce sobre
pedestal de granito negro.
Diámetro 15,5 cm.

Figura 231 (arriba): Imagen
de la visualización con
ordenador de la escultura de
la figura anterior.



Algunos de los escultores que ya hemos estudiado y concretamente muchos de los que hemos tomado como ejemplo en el anterior apartado: Brent Collins, Helaman Ferguson, Bathsheba Grossman, etc., han utilizado estos procesos de fabricación controlados por ordenador. Con ellos realizan maquetas, para facilitar el diseño de las obras o incluso llegan a la elaboración de las propias esculturas. Una de las artistas matemáticas que ya hemos mencionado reiteradamente, la norteamericana **Bathsheba Grossman**, también utiliza la tecnología informática, llegando con procesos automatizados hasta la fabricación de la propia escultura, ya que de esta forma o bien fabrica el molde con el que realizará la fundición de las obras en metal o la obra definitiva.

Esta excepcional escultora matemática ha implementado sus programas para elaborar las obras. Afirma que es una creadora informática y literalmente se define como escultora digital. En su trabajo de realización de Escultura Matemática, combina los procesos de diseño informático y la fabricación de prototipos controlados por ordenador. Estos recursos le permiten llegar hasta la elaboración de unas esculturas preciosas y muy interesantes desde un punto de vista matemático. Para ilustrarlo incluimos unas frases del texto de su página web, referencia [PW4]: **“Soy una artista que explora la región entre el Arte y las Matemáticas. Mi trabajo es sobre las tres dimensiones, la simetría y la diferencia, sobre el cero y el infinito. Con todo aquello que tenga que ver con crear geometrías abstractas en el espacio. Mi trabajo explora el orden en 3D”**.

Ya hemos presentado una interesante obra suya que además hemos utilizado como portada de este capítulo, la figura número 194. Vamos a escoger como ejemplo para explicar este proceso informatizado para la fabricación de Escultura, otra de sus obras la de figura 231, situada en el final de la página anterior. **Las imágenes que la acompañan nos servirán para describir el proceso de una forma visual.** En la figura 230, situada también en la página anterior, se observa una imagen de la visualización con ordenador de la escultura de la figura anterior.

Las dos imágenes situadas abajo a la izquierda, figuras 232 y 233, corresponden a dos de las secciones del molde de esta escultura, dado que éste se fabrica sección a sección, partiendo de la imagen virtual de la escultura. En la imagen de la derecha, la figura 234, se observa el sistema de fabricación de este molde, realizado mediante ordenador y utilizado por Bathsheba Grossman. Una vez que ha realizado el molde, dos simultáneos en este caso, que se observan en una imagen virtual de la figura 235, la primera de la siguiente página, y en una fotografía en la figura 236, la de la derecha también en la siguiente página, ya puede pasar al proceso de fundición.

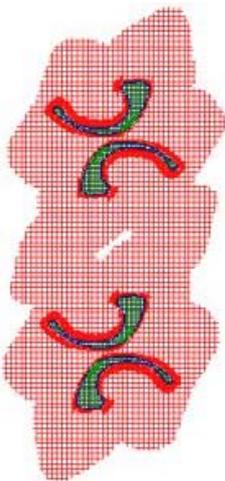


Figura 232: Imagen de ordenador de una de las secciones del molde de una escultura de Bathsheba Grossman.

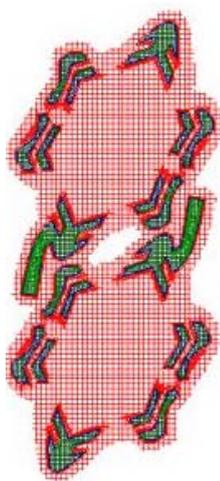


Figura 233: Imagen de otra sección de la misma escultura.

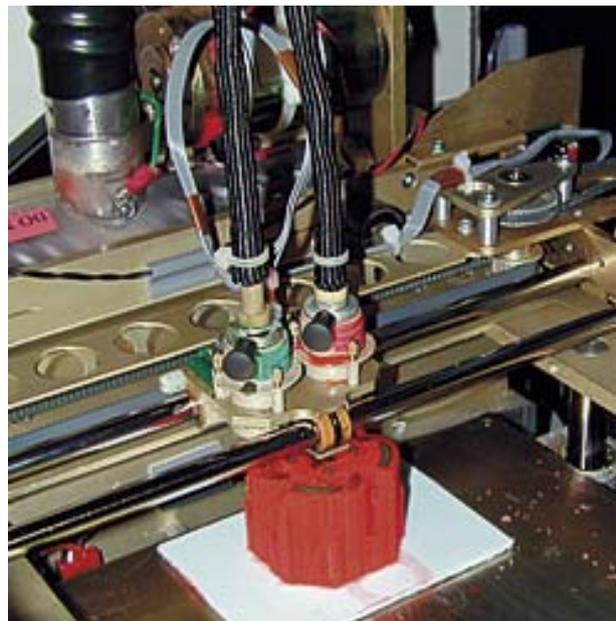
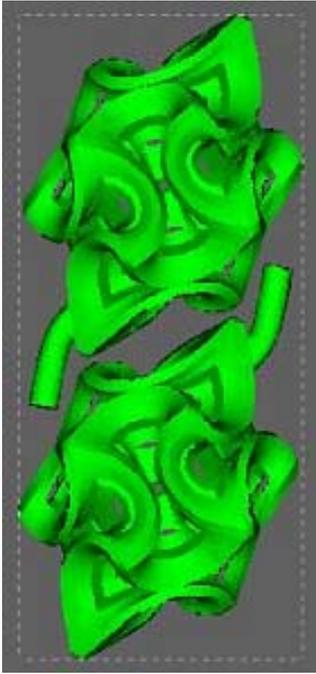


Figura 234 (derecha): Sistema de fabricación asistido por ordenador del molde para una escultura, utilizado por Bathsheba Grossman.



Por último para finalizar este proceso, se ha de fundir la escultura. En la figura 237 (debajo), mostramos unos sencillos croquis que ilustran las fases de este proceso en las que esta escultura, Bathsheba Grossman, utiliza el molde que se ha realizado con el **procedimiento informático** que acabamos de describir.

Figura 235 (izquierda): Imagen virtual de dos moldes de la escultura anterior de Bathsheba Grossman.

Figura 236 (derecha): Dos Moldes para la escultura anterior de Bathsheba Grossman, realizados con su proceso de fabricación asistido por ordenador.

El extraordinario escultor **Helaman Ferguson** es otro artista matemático que también utiliza la Informática en la Escultura, llegando a realizar su fabricación con procesos asistidos por ordenador. Para estudiar los sistemas de elaboración automatizada de su escultura es muy útil la consulta de la anterior referencia [31]. En esta ponencia además describe algunos de los complejos procedimientos matemáticos que utiliza en la concepción de sus obras, debido a lo cual le hemos escogido para precisamente justificar la génesis matemática de algunas esculturas.

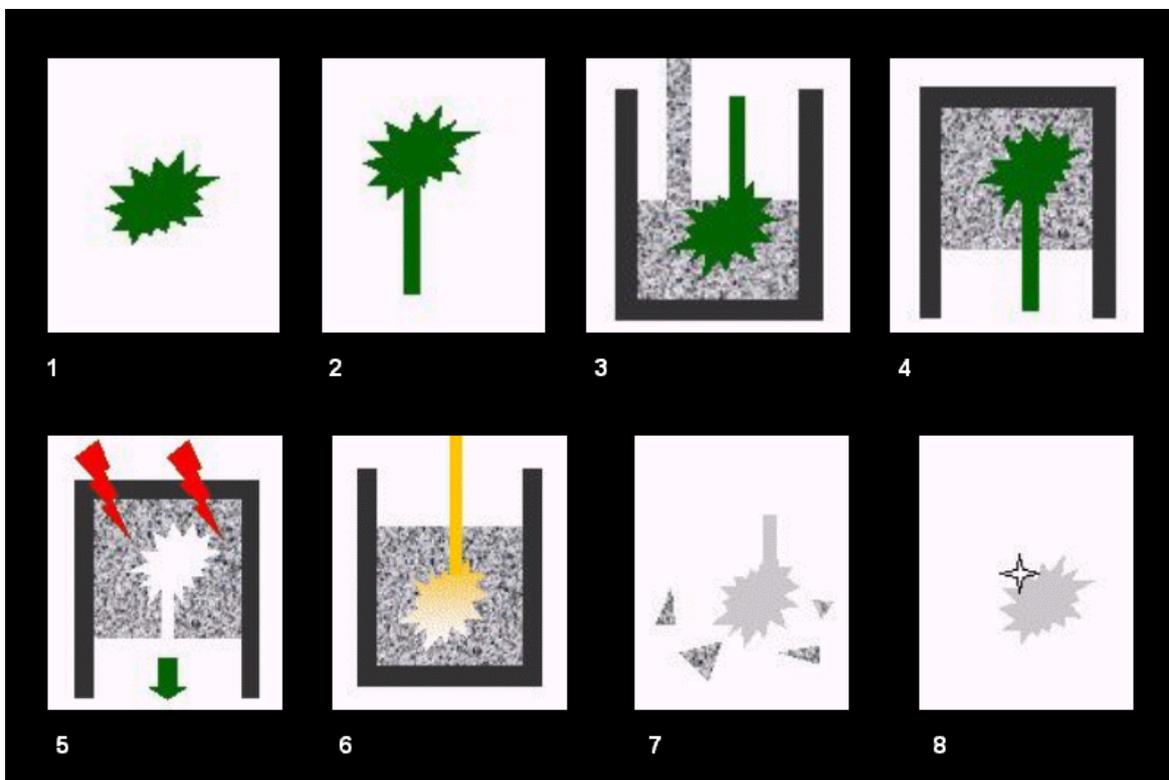


Figura 237: Fases del proceso de fundición de las esculturas de Bathsheba Grossman, utilizando el molde realizado con el proceso de fabricación asistido por ordenador.



Figura 238: Helaman Ferguson, "Costa V (Superficie Mínima de Costa V)". Mármol de Carrara.

En nuestra tesis, ya hemos presentado otras obras muy interesantes de **Helaman Ferguson**. En la imagen de la izquierda, número 238, mostramos otro trabajo suyo, que va a servir de ejemplo para describir la utilización de este autor del ordenador. Está fabricada con un procedimiento controlado por ordenador, muy diferente al utilizado por la anterior escultora Bathsheba Grossman, ya que en él, un sistema de talla automatizada elabora la escultura definitiva. Además también el material que utiliza en esta serie de obras es realmente muy diferente, "piedra precámbrica".

Para esculpir las ha utilizado dos versiones de un sistema de fabricación informático, que han sido denominadas con sus acrónimos como resulta tradicional en Estados Unidos. La primera **NIST SP I**, letras iniciales de National Institute of Standards and Technology, String Pot Measurement Systems, y la segunda una versión mejorada, **NIST SP II**. Estos sistemas han sido desarrollados por el **grupo de Robótica del Instituto NIST**.

El sistema que se visualiza en la fotografía de la figura 239, debajo, es el de la segunda versión, en el momento de la elaboración de la escultura de la figura número 238, situada a la izquierda. Con este proceso informático anterior, NIST SP II, se puede partir de las ecuaciones paramétricas de la superficie para diseñar la imagen virtual de la obra que se desea esculpir.

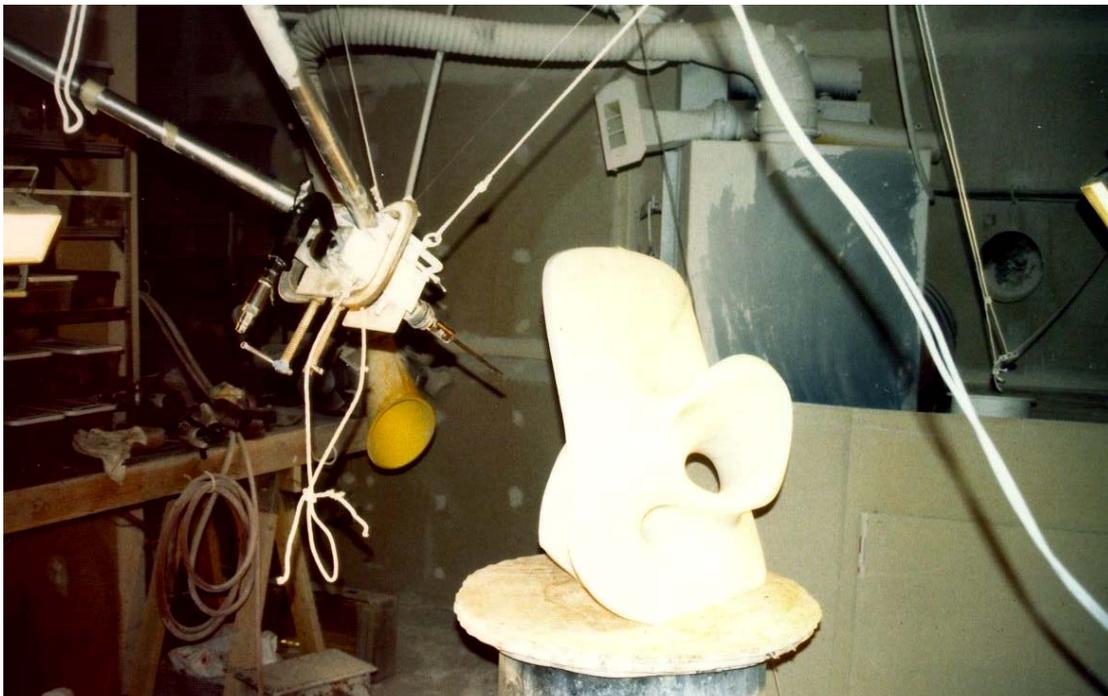


Figura 239 (arriba): Proceso de fabricación controlado por ordenador, NIST SP II, utilizado por Helaman Ferguson en la realización de algunas de sus esculturas.

Este es el caso de la escultura de la figura 238, **Superficie Mínima de Costa V**, situada en la página anterior. El sistema es capaz de monitorizar la longitud de seis cables, como se puede ver en la fotografía, que le permiten poder fijar la posición real en cualquier punto. Su software fue escrito en lenguaje de programación C++ e incluye un algoritmo que permite al sistema calcular la menor distancia, desde cualquier punto del bloque con que se va a esculpir la pieza, hasta el punto de la imagen virtual de la obra en curso más cercano. El conocimiento de estas posiciones y el cálculo anterior le permiten perforar en la dirección más adecuada, la cual se irá ajustando. La longitud de los seis cables del sistema, es monitorizada por sensores, formando lo que se denomina plataforma de Stewart. Ésta se basa en **el teorema de Chauchy**, que establece que un poliedro convexo cualquiera está determinado, si se conoce la longitud de sus aristas. Él que se ha utilizado en el procedimiento NIST SP II, es un octaedro, sólido matemático que como resulta conocido tiene ocho caras triangulares, doce aristas y seis vértices.

El sistema que este escultor dispone en su estudio posee dos triángulos equiláteros rígidos. El primero está fijo en el techo y la longitud de sus lados es de 13 pies (3,80 m). El segundo es móvil y la longitud de sus lados es de 3 pies (87 m). Las otras seis aristas son los seis cables del sistema ya mencionados, que son de longitud variable y que están colgados de los sensores y sometidos a tensión. A partir de la información de éstos es capaz de conocer la longitud de los cables y de controlar las tres coordenadas de la posición de la punta de la herramienta de perforación y también otros tres parámetros para regular su orientación. El sistema dispone de una docena de comandos interactivos para realizar diversas operaciones como mover el bloque, variar los tres puntos de registro, recalibrar los instrumentos, etc. Para realizar una escultura, además de partir de las ecuaciones de la superficie, también se puede utilizar un archivo digital de datos.

5.6 Situación Actual y Perspectivas de la Escultura Matemática

Con respecto a estos temas, se debe mencionar una de las conferencias del profesor Javier Barrallo, *Matemáticas y Escultura*, referencia [2], que ha sido aludida reiteradamente. A lo largo de esta disertación este investigador resumió su extenso y completo estudio en este apasionante campo artístico de la Escultura Matemática.

Las ideas genéricas y los numerosos ejemplos que recogió en esta conferencia, nos han servido para enfocar este breve análisis de la situación actual de la Escultura Matemática. En la actualidad existen ya algunos destacados escultores matemáticos, con cierta proyección internacional, y cuyo trabajo empieza a ser conocido por ciertos públicos. La difusión de este tipo de escultura se produce sobre todo debido a las obras que se hallan diseminadas por las plazas y parques de las ciudades. **La tipificación de la Escultura Matemática que se realiza en la actualidad es muy diversa**, lo que tendremos ocasión de comprobar al estudiar los grupos de la clasificación.



Figura 240 (derecha): Paul Bloch. “Bent Black Stone, (Piedra Negra doblada)”. Mármol Belga; 1996. Dimensiones: 35 x 35 x 22 cm.

En el capítulo anterior dedicado a la escultura del siglo XX, comentamos el trabajo de algunos escultores que sin poder ser considerados directamente como escultores matemáticos, han realizado obras que pueden ser clasificadas dentro de este tipo de escultura y de los que ya hemos incluido ejemplos. Éstos son Alexander Calder, Richard Serra y Sol Lewitt, entre otros. Ha habido otros artistas que si que deben ser considerados como los auténticos precursores de la escultura matemática: Max Bill, Naum Gabo, Richard Paul Lohse, Reg Butler, Mirko Basaldella y Anton Pevsner, etc. De ellos ya expusimos algunas de sus esculturas en el capítulo anterior.

Por otro lado, a lo largo de la presente tesis hemos mostrado obras de algunos de los que están considerados entre **los principales escultores matemáticos actuales**, y en concreto de los siguientes que relatamos en orden alfabético: **Bathsheba Grossman** (figuras 219 y 231), **Brent Collins** (figuras 1, 220 y 223), **Bruce Beasley** (figura 199), **Charles Perry** (figuras 13 y 218), **John Robinson** (figuras 2, 14 y 15), **Helaman Ferguson** (figuras 210, 224 y 238) y **Nathaniel Friedman** (figura 198).

También están en plena actividad otros escultores tan importantes como los anteriores, **George Hart, Carlo Sequin, Keiso Ushio, Arthur Silverman, Sebastián, etc.**, de los que todavía no hemos expuesto ninguna obra, si bien lo haremos posteriormente, ya también destacan en este campo de la escultura. Existen otros artistas actuales que aunque tal vez no se encuentren entre los principales escultores matemáticos, como **Paul Bloch** (figura 195), **Elias Wakan** (figura 216), etc., también realizan obras interesantes desde un punto de vista matemático. En la página anterior hemos incluido otra sugestivo escultura de Paul Bloch, en la figura 240.

En España, como hemos anticipado, algunos de los artistas pertenecientes a la Escultura que ha sido incluida en la que de forma genérica se ha denominado como Abstracta, han llegado a alcanzar una gran resonancia internacional con obras escultóricas en las que se puede entrever algunas propiedades geométricas o matemáticas.

Tal vez dos de los escultores españoles que más hacen este tipo de trabajo son **Oteiza y Chillida**, los más reconocidos internacionalmente. Ya hemos incluido imágenes de sus obras escultóricas, de Oteiza (figura 181) y de Chillida (figuras 7 y 182). A la derecha, en la figura 241, se muestra otra escultura de Oteiza “Homenaje a Manolo Gil”, situada en el Jardín del Campus de nuestra universidad.

En cuanto al Arte que hemos clasificado dentro de lo que hemos denominado Escultura Matemática, España no es de los países en que este tipo se haya extendido ampliamente, sobre todo si tiene una concepción puramente matemática. Aunque como ya hemos podido apreciar, también se puede encontrar algunos ejemplos de escultores que se puedan enlazar en él, como **Javier Carvajal**. Este artista es un ejemplo muy evidente de escultor matemático español del que ya hemos incluido algunas imágenes de su trabajo en las figuras: 201, 204, 206 y 209.

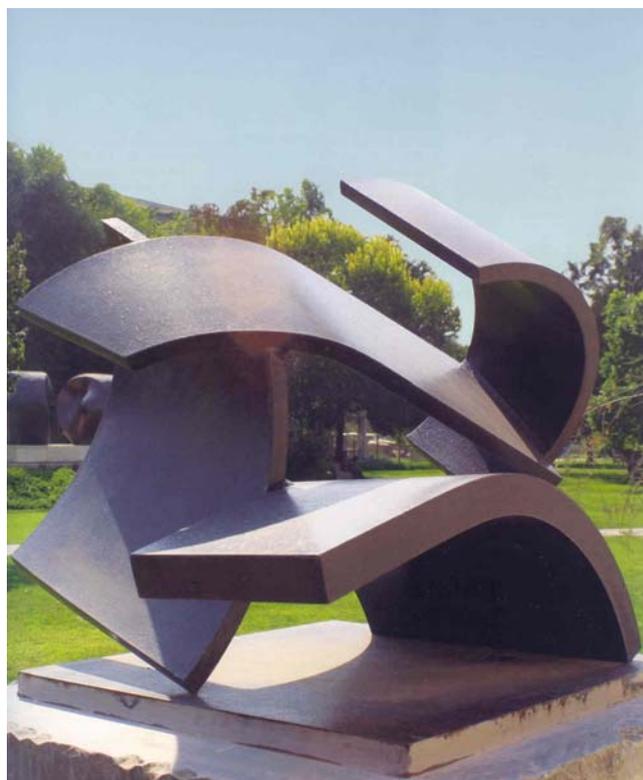


Figura 241 (arriba): Jorge de Oteiza, “Homenaje a Manolo Gil”; 1989. Tamaño 161 x 60 x 70 cm. Hierro y Pedestal de mármol. Campus de la Universidad Politécnica de Valencia.

Javier Carvajal, precisamente debido a lo evidente que resulta la concepción matemática de su escultura y a lo relativamente sencillo de su estudio, ha sido uno de los escultores que hemos elegido para describir su trabajo en el apartado anterior correspondiente. **Existe algún otro escultor español que también ha realizado obras que se pueden considerar matemáticas.** También en nuestras ciudades se pueden observar expuestas en sus calles, plazas o jardines. **En la propia Universidad Politécnica de Valencia**, como ya tuvimos ocasión de comprobar con las muestras que incluimos, se exponen algunas obras de estas características. Unos ejemplos de este tipo de escultura son las figuras, números 3, 4, y 5 de la introducción. Las tres han sido realizadas por autores españoles y están situadas en el Campus de nuestra Universidad. En él se encuentran diseminadas otras obras, que también se podrían situar en esta categoría de Escultura Matemática.

El futuro de la Escultura Matemática creemos que resulta bastante prometedor. Por un lado, se van incorporando nuevos artistas con un gran interés por las matemáticas y como ya hemos razonado la utilización de la informática proporciona unas posibilidades casi ilimitadas. Por otro lado, los gustos de la sociedad van lógicamente e inexorablemente evolucionando, lo que creemos incrementará la aceptación de este tipo de escultura. Al respecto de este tema puede ser muy ilustrativo consultar la interesante ponencia de la referencia [33], escrita por la investigadora **Harriet. E. Brisson**. Se titula *Aesthetic Geometry* y está incluida en el libro de actas del congreso internacional ISAMA 99.

Como se puede constatar en las conclusiones del apartado anterior en que hemos tratado **la influencia de la Informática en la Escultura Matemática**, los aspectos en los que estas nuevas tecnologías intervendrán decisivamente en el desarrollo futuro son muy numerosos. Una de las ideas recogidas era la de que facilitará la difusión de la Escultura Matemática, ya que permite a los artistas matemáticos darse a conocer por Internet. Un aspecto nuevo de este uso de la red es la posibilidad de ayudar a la venta de sus trabajos a los escultores matemáticos. Podemos observar al respecto el ejemplo de la página inicial de la web de la organización Novica, en la anterior figura número 228. En ella se exponen para su venta obras escultóricas.

También algunos de los escultores, como los que hemos utilizado de ejemplo para explicar los procesos de fabricación controlados por ordenador aplicados a la realización de Escultura Matemática, o de moldes para fundirla, como Bathsheba Grossman, Helaman Ferguson, etc. y dada la facilidad para reproducir copias con estas tecnologías, venden reproducciones de sus obras más interesantes, a precios asequibles para el gran público. **Esto pensamos que ayudará a extender el conocimiento de este Arte y a su difusión internacional.**



Figura 242 (arriba): Javier Barrallo, “Vulcano”. Ejemplo de diseño fractal, basado en un algoritmo de color. Bilbao, España.

Otra ventaja de Internet es que permite la difusión de revistas electrónicas que son un excelente medio para la difusión del Arte, ya que permiten un formato muy atractivo visualmente. Ejemplo de estas webs de revistas prestigiosas dedicadas a las relaciones de las Matemáticas y el Arte son las siguientes. La de la revista electrónica Visual Mathematics, referencia [PW9], medio en el que hemos publicado un artículo resumen de nuestro trabajo previo sobre la clasificación de la Escultura Matemática que se comenta en el capítulo posterior correspondiente. Otro ejemplo es la página web de la revista Leonardo, referencia [PW10], publicada por la editorial del MIT (Massachusetts Technological Institute), que edita el boletín electrónico de la Asociación Leonardo. También presenta una versión francesa de su página web, referencia final, [PW11]. En ella se presentan a veces contenidos diferentes a la versión americana. Un último ejemplo de web de otra interesante revista electrónica, también dedicada a las relaciones entre las Matemáticas y el Arte, es la de publicación YLEM. Se puede consultar su ruta en la referencia [PW12].

Para las perspectivas de la Escultura Matemática, también hay que tener en cuenta que prestigiosas entidades matemáticas han dedicado artículos de sus publicaciones a este campo del Arte Matemático y en concreto a la Escultura. En las páginas web de algunas de estas asociaciones se expone información de diversos eventos relacionados con este campo. Ejemplo de ello son la del Mathematical Sciences Research Institute, referencia [PW13] y la página perteneciente al National Council of Teachers of Mathematics (Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos), en la referencia [PW14].

También debemos resaltar que existen **prestigiosas universidades y especialmente los departamentos de matemáticas** de algunas de las enclavadas en Estados Unidos, país en que la elaboración y el estudio de la Escultura Matemática está más extendido, que han dedicado artículos de sus publicaciones a este campo. Si se consulta las referencias finales se constatará lo anterior. Tal vez el mejor ejemplo sea la reiteradamente mencionada página web de Carlo Sequin, profesor de la universidad californiana de Berkeley, referencia [PW1]. También algunas universidades de otros países como: Australia, Inglaterra, etc., han publicado en texto o electrónicamente estudios de este tema. Un ejemplo de ello es la página de la referencia [PW15], perteneciente al Centro para las Nuevas Artes, dependiente de la Universidad Nacional de Australia.

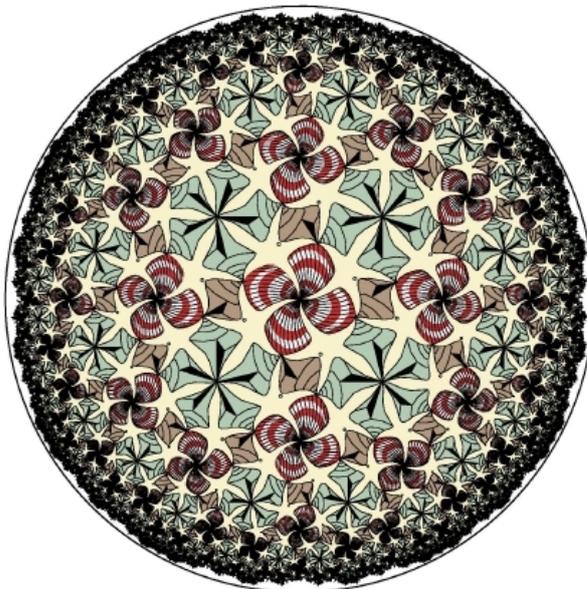


Figura 243 (arriba): Douglas Dunham. “Four and Five Shells Pattern, (Motivo de las Cuatro y Cinco Conchas)”. Basado en "Drawing Number 42" de Mauricius Cornelius Escher. Diseño de su serie “New Hyperbolic Escher Patterns (Motivos de la serie de Nueva Geometría Hiperbólica de Escher).

En el futuro de la Escultura Matemática, además de seguir con la utilización en los diseños de sus obras con conceptos de Matemáticas y Geometrías clásicas, creemos que se desarrollará ampliamente el uso de otros. Entre las concepciones básicas para su desarrollo futuro destacan las de “**las nuevas geometrías**”, tal como ya hemos comentamos en el apartado dedicado al estudio de las razones del desarrollo experimentado, sobre todo en la segunda del siglo pasado, por la Escultura Matemática.

Con respecto a una de estas geometrías, la fractal, en el apartado dedicado a ella, ya nos hemos referido a la investigación y el trabajo en este campo del director de esta tesis **Javier Barrallo**. También hemos incluido a lo largo de nuestra tesis alguna de sus obras virtuales, como las que se ven en las figuras números: 17, 226 y 227.

Para ilustrar la importancia que en la Escultura Matemática tendrá la **geometría fractal**, en la figura número 242, que está situada dos páginas atrás, presentamos otra de las obras de Javier Barrallo, incluida en una interesante exposición “The International Exhibition of Fractal Art”, celebrada en Belgrado en el año 2000. Aunque ésta, a diferencia de sus anteriores ejemplos, que hemos enclavado como “escultura virtual”, es una obra que podríamos conceptualizar de “pictórica”. Sin embargo, este trabajo también está caracterizado por una sensación de relieve que le daría ciertas características escultóricas.

Entre las muchas páginas web dedicadas al tema de los fractales hemos encontrado una, la de la referencia [PW16], una de las pocas de nuestra lista final que está escrita en español y que tiene una información muy completa de este interesante campo y muchos enlaces con otras direcciones relacionadas. En cualquier caso, en el capítulo de la tesis en el que describiremos los diferentes tipos de nuestra clasificación profundizaremos en las posibilidades de utilización de esta geometría en la Escultura Matemática.

En la Escultura Matemática actual es realmente muy poco frecuente la realización real, no virtual, de **obras en relieve**. Sin embargo, creemos que **la Geometría Fractal** presenta grandes perspectivas para ser utilizada en el diseño de escultura en relieve. Se puede imaginar que obras de tipos similares al de la anterior figura número 242, serán esculpidas, perdiendo su categoría de virtual. No sólo se realizarán trabajos basados en los fractales planos, en dos dimensiones sino que, como un poco más adelante mostraremos, se pueden elaborar esculturas espaciales.

Las posibilidades que se abren con la utilización de **las geometrías no euclidianas, elíptica e hiperbólica**, son interesantes. El ejemplo típico de su utilización en el Arte es el del genial pintor, **Mauricius Cornelius Escher**, uno de los artistas fundamentales en el desarrollo del Arte Matemático.

Es interesante para estudiar su obra la página web de la referencia [PW17], elaborada por **Alicia Escribano y Vicent Castellar**. Contiene información sobre el trabajo de este innovador artista e imágenes de una gran cantidad de sus “grabados matemáticos”, algunas de las cuales hemos utilizado a lo largo de la tesis. La obra de Escher ha servido de fuente de inspiración para numerosos artistas matemáticos. Obsérvese al respecto la versión de **Douglas Dunham** de uno de los grabados de Escher que se muestra en la figura número 243 situada en la página anterior.

Creemos firmemente que la utilización de este tipo de geometrías se puede desarrollar ampliamente en la Escultura, como ya ha sucedido en la Pintura durante el siglo anterior. Debido a ello, estableceremos un grupo específico dentro de la clasificación en el que incluiremos las obras escultóricas generadas con ellas. Una referencia muy interesante para estudiar una aplicación concreta de estos tipos de geometrías a la escultura es la número [34], titulada *Geometric Mosaic Tiling on Hyperbolic Sculptures*. En ella la escultora **Irene Rousseau**, nos describe su trabajo en este campo. Un ejemplo es su obra de la figura 244, situada en esta página, “Circle: Progressive Reduction”, en la que utiliza la geometría hiperbólica. Finalmente, opinamos que las geometrías no euclídeas permitirán en el futuro el desarrollo de otro tipo de Escultura Matemática.



Figura 244 (arriba): Irene Rousseau, “Circle: Progressive Reduction, (Reducción progresiva de un círculo)”. Base de madera, recubierta de mosaico de mármol y cristal.

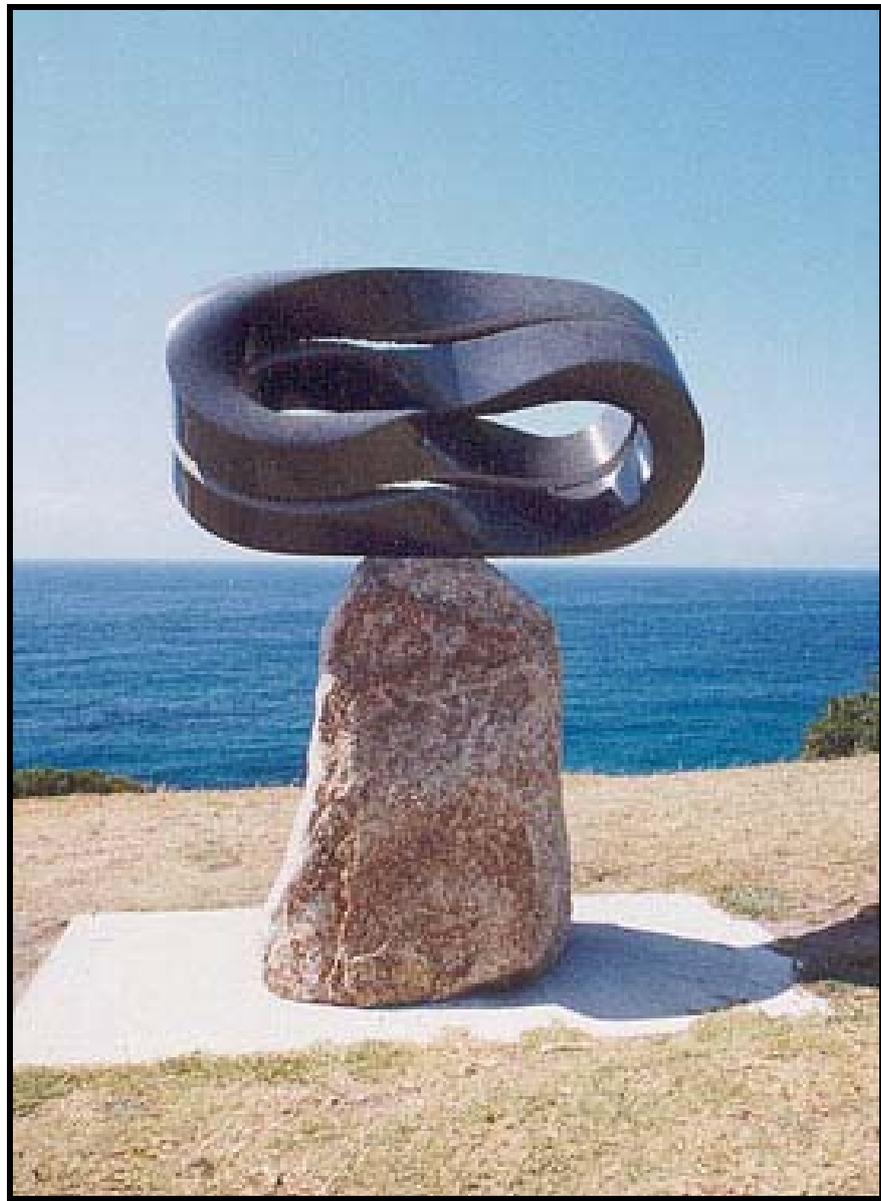
De Escher, el increíble pintor holandés que tanto atrae a los matemáticos y a los científicos en general, ya expusimos su autorretrato en el apartado dedicado a la pintura del siglo XX. Incluso en ese cuadro “jugaba” con la deformación que se produce en una imagen, en ese caso su propia cara, cuando se proyectada en una esfera, lo que se puede relacionar con las geometrías no euclidianas. Incluimos un último ejemplo de su trabajo en la figura número 245 situada debajo, que demuestra el fuerte contenido matemático que imprimía a su arte. Muestra una litografía titulada “Contrast (Order and Chaos)”. El título de ella nos sirve para introducir **las Matemáticas del Caos**, otro tipo de concepción que juzgamos que presenta posibilidades para su utilización en el Arte Matemático y más concretamente en la Escultura. Posteriormente, en el capítulo dedicado a explicar la clasificación trataremos esta gama de escultura.

En definitiva, las posibilidades de la utilización de todo tipo de técnicas matemáticas en la Escultura son casi ilimitadas, lo que creemos que le confiere un prometedor futuro. En cualquier caso, creemos que los ejemplos de obras escultóricas que ya hemos incluido a lo largo de la tesis y las que mostraremos, ilustran las posibilidades futuras de desarrollo de la escultura que hemos conceptualizado de matemática.



Figura 245 (arriba): Mauricius Cornelius Escher. “Contrast (Order and Chaos)”. Litografía de 1951.

CLASIFICACIÓN DE LA ESCULTURA MATEMÁTICA



6 Clasificación de la Escultura Matemática

Para poder realizar la clasificación de la Escultura Matemática, objetivo fundamental de nuestra tesis, en el capítulo anterior hemos tratado de definir el tipo de escultura que tratamos de catalogar. Esto como hemos razonado resulta difícil. Al final, hemos propuesto que pertenecen a esta tipología todas aquellas obras escultóricas en las que en su concepción, diseño, desarrollo o ejecución resulta “fundamental” la utilización de las Matemáticas.

Hemos de recordar que no hemos encontrado ningún estudio que se haya dedicado o en el que al menos, se haya incluido una clasificación exhaustiva de esta escultura mediante conceptos matemáticos, ni siquiera simplemente utilizando los de tipo geométrico. Los únicos intentos que conocemos son los efectuados por el director de la presente tesis, Javier Barrallo y por su autor, Ricardo Zalaya. En primer lugar hicimos un breve estudio preliminar en el que formulamos una clasificación previa que presentamos como ponencia en el congreso, **Meeting Alhambra ISAMA-BRIDGES 2003**. Este artículo se titulaba, *Mathematical Sculpture Classification*, referencia [7]. La imagen que presenta el capítulo final de referencias, muestra la portada de su libro de actas. Después la hemos mejorado y publicado en otras versiones como la de revista electrónica, Visual Mathematics, referencia [PW9].

6.1 El Concepto de Clasificación

Antes de pasar a realizar la clasificación, se debe tratar de definir el término con la mayor precisión posible. En primer lugar mencionaremos la información al respecto que hemos extraído del *Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española*. Consultando el vocablo clasificación vemos: “Acción y efecto de clasificar”, que nos remite a este verbo, cuya primera acepción es: “Ordenar o disponer por clases”. Por tanto llegamos al sustantivo “clasificación” que en su segunda acepción dicho diccionario define como “Orden en que con arreglo a determinadas condiciones o cualidades se consideran comprendidas diferentes personas o cosas”.

Estas definiciones del diccionario no precisan el concepto adecuadamente, aunque la última sí que nos orienta. En cualquier caso, trataremos de afinar esta definición. Las clasificaciones están constituidas por un conjunto ordenado de divisiones (división de los conceptos en especies, división de estas especies, etc.). Una clasificación está destinada a uso constante en alguna ciencia o esfera de la actividad práctica (por ejemplo, clasificación de los animales y de las plantas, de libros en una biblioteca, etc.).

Generalmente, en una clasificación se toman como base de la división caracteres esenciales de los objetos que se consideran. En este caso se denomina **clasificación natural** y pone de relieve analogías y diferencias esenciales entre los entes y tiene un valor cognoscitivo. Ésta es la taxonomía que buscamos.



Figura 247 (derecha): John Robinson, “Cosmos”, Symbolic Sculpture, Gallery 5. Serie: “Univers, (Universo)”.

Figura 246 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Keizo Ushio, “Oushi Zokei”. Granitos negros y blancos. Dimensiones: 220 x 150 x 70 cm. (Exposición: Escultura en el Mar, Australia), 2002.

En otros casos, cuando el fin de la clasificación estriba sólo en la sistematización de los objetos, en calidad de base se eligen caracteres que resulten convenientes para alcanzar el fin propuesto, aunque no sean esenciales para los objetos como tales. Un claro ejemplo de este tipo son los catálogos alfabéticos. **Tales clasificaciones se denominan artificiales y se alejan de lo que nosotros pretendemos.** Las clasificaciones más valiosas se basan en el conocimiento de las leyes relativas al nexo de las clases entre sí, al paso de una clase a otra en el proceso del desarrollo, por ejemplo, la clasificación de los elementos químicos debida a Mendeléiev. Toda clasificación es el resultado de hacer más “groseros”, hasta cierto punto, los límites reales entre las clases, pues dichos límites siempre son condicionados y relativos. **Con el avance del saber, las clasificaciones se modifican y se hacen más precisas.** Este pensamiento resulta muy importante para nuestra investigación, ya que esto mismo creemos que sucederá con la taxonomía que propondremos.

Vamos a tratar de basar la estructura de esta clasificación, en las diferentes áreas de las Matemáticas. Los límites entre los tipos de escultura que proponemos serán imprecisos, lo cual no es de extrañar, dado que la misma división de las Matemáticas lo es en algunos casos. Existen conceptos relacionados con varias áreas, de lo cual podemos intuir que habrá esculturas que se podrían clasificar en varios tipos simultáneamente. Una propiedad que se encuentra en este caso sería la de la orientación de una superficie, que está relacionada con la Geometría, el Cálculo diferencial y la Topología. De esculturas que “juegan” con este concepto, hemos mostrado algunas figuras, por ejemplo las de los números 214, 220, 223, etc.

Además habrá obras en las que simultáneamente estén involucrados varios conceptos matemáticos muy diferentes. Ejemplos de esta situación son las dos figuras precedentes. La escultura de la figura 246, “Oushi Zokei”, que se ha utilizado como portada es de **Keizo Ushio**, otro escultor matemático muy interesante. En ella, se pueden apreciar conceptos relacionados con varias áreas de las Matemáticas, la Geometría, el Álgebra, la Topología, etc. La figura 247 situada en la parte de debajo de la página anterior es otro trabajo de **John Robinson**, “Cosmos”, en él que también ocurre esta situación. Lo mismo sucede con la escultura de la figura 248, debajo, de **Paul Bloch**, “Closed Line, (Línea Cerrada)”. En cualquier caso, clasificaremos las obras por el concepto o campo de las Matemáticas que domine en su concepción, si es que ello ocurre (la Topología en las figuras números 246 y 248). A pesar de todo, habrá casos en que no sea posible por lo que al final estableceremos un grupo final heterogéneo para incluir a estas obras.

6.2 Propósito de la Clasificación

El Propósito de tipo didáctico que tiene esta clasificación es el de conseguir que el estudio de este tema, comprendido en el campo de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte, sea mucho más sistemático. Ello creemos que facilitará muy claramente la **inclusión del tema de la Escultura Matemática en la enseñanza universitaria.**



Asignaturas dedicadas al tema de las relaciones Arte Matemáticas ya se imparten, en general, en las especialidades que se pueden inscribir en la rama técnico artística, como por ejemplo, en Arquitectura.

Figura 248: Paul Bloch, “Closed Line, (Línea Cerrada)”. Mármol, 1994. Tamaño 70 x 40 x 40 cm.

Ya hemos mencionado que en la presente tesis vamos a intentar separarnos del habitual lenguaje matemático basado en una compleja formulación algebraica, como se ha podido apreciar. Éste, en general, será sustituido por la imagen de las obras, las gráficas, etc. Esto es debido a que nos planteamos un objetivo genérico, describir la Escultura Matemática y **creemos que la mejor forma de explicarla es visualmente**, como hemos intentado mostrando las figuras anteriores. También en este capítulo dedicado a la clasificación seguiremos la misma filosofía. Este tipo de metodología creemos que contribuiría a facilitar su introducción en las enseñanzas universitarias puramente artísticas, como pueden ser, Bellas Artes o Historia del Arte.

No sólo facilitará la inclusión del tema de la Escultura Matemática en diferentes facultades y escuelas técnicas, sino también en la Educación Secundaria. A este respecto cabe mencionar que ya se imparte una asignatura optativa, en segundo curso de Bachiller, denominada **Matemáticas de la Forma**. Sus contenidos desarrollan el tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Su programación viene recogida en el BOE de la referencia [36]. De este texto destacaremos el siguiente párrafo: “Para desenvolverse en el medio artístico es necesario conocer y saber manejar todos los elementos y componentes geométricos de las formas que han sido y son utilizados por artistas y diseñadores para crear sus obras. La importancia de la geometría radica precisamente en su utilidad para el estudio y manejo de las formas, tanto en las que aparecen en la naturaleza, como las de creación humana. **En las creaciones artísticas o de diseño el componente matemático es un factor más** que aparece junto con la luz, el color, o el volumen. Es la conjunción de todos estos elementos lo que proporciona un resultado final logrado o malogrado”.

Con relación a esta asignatura, es interesante resaltar que he tenido la oportunidad de impartir un curso organizado por el Centro de Formación del Profesorado de la UPV de Valencia y que iba fundamentalmente dirigido a los profesores de Bachillerato, que imparten o impartirán esta asignatura de Matemáticas de la Forma. Durante el desarrollo del curso he podido constatar la buena aceptación que ha tenido la clasificación de la Escultura Matemática que posteriormente expondremos. En la figura 249 debajo, se muestra una diapositiva de las presentaciones del curso.

BIBLIOGRAFÍA (V)



- Además de la anterior selección de libros, se incluyen otras referencias muy numerosas en la documentación que entregamos. También se incluyen otros medios didácticos como:
 - Videos
 - Artículos y ponencias en congresos
 - Paginas Web

Figura 6: Georges Hurt. Escultura poliédrica, mediante libros.

CURSO MATEMÁTICAS DE LA FORMA
SESIÓN 1ª

19

Figura 249: Ejemplo de diapositiva del curso: Matemáticas de la Forma impartido en el Centro de Formación de Postgrado de la UPV. Muestra una escultura de George Hart, “Millenium Bookball, (Esfera con libros del milenio). Madera y bronce; 1,40 cm. Commission for Northport Public Library, Northport, USA.

Creemos que sin la existencia de esta clasificación de la Escultura Matemática su estudio se tendría que hacer de una forma menos estructurada. Se limitaría a una enumeración de obras o de autores, de los que se realizarían estudios específicos, como ya se ha hecho en muchos casos de monografías de escultores matemáticos concretos. Ejemplos de estos estudios dedicados a un autor determinado son los de las referencias siguientes, anteriormente comentadas:

- *Geometría Fractal: Algoritmos y creación matemática.* Trata el trabajo en el campo de los fractales de Javier Barrallo. Referencia [3].
- *Max Bill e a Matemática.* Dedicado al trabajo de este escultor. Referencia [4].
- *Les escultures Simbòliques de John Robinson.* Dedicado al trabajo de este escultor matemático Referencia [5].
- *Forma y Número. Variaciones.* Estudia el interesante trabajo escultórico del español Javier Carvajal. Referencia [26].
- *Mathematical Sculpture.* Sobre la escultura de Charles Perry. Referencia [29].
- *Equations to Stone Sculpture.* Trata acerca del trabajo escultórico que basándose en ecuaciones matemáticas realiza Helaman Ferguson. Referencia [31].
- *Geometric Mosaic Tiling on Hyperbolic Sculptures.* Estudia la escultura basada en la geometría hiperbólica de Irene Rosseau. Referencia [34].

Al realizar esta clasificación, además del fin didáctico ya comentado, también tenemos otros propósitos mucho más genéricos. Uno de ellos es ayudar a lograr la difusión de la Escultura Matemática y otro, el facilitar la investigación en este campo. Esto afectará, tanto a los que estudian desde un punto de vista teórico como a los propios escultores, ya que creemos que la sistematización de tipos en esta escultura les facilitará la obtención de nuevos temas e ideas para su trabajo artístico.

Por último conviene resaltar que la filosofía de esta investigación entra claramente dentro del programa de doctorado en el cual se incluye, **Matemática Multidisciplinar**, impartido por la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). Recalcamos el último término de esta denominación, multidisciplinar, intención que creemos que los objetivos de esta tesis cumplen.



6.3 Precedentes en la Clasificación de la Escultura Matemática

El único intento de clasificación genérica que conocemos, al margen del nuestro, es en función de **los materiales de las esculturas**, ya que confieren a las obras diferentes propiedades geométricas. Como se verá, este tipo de tipología no permite incluir a todas las obras, solamente se podrán inscribir algunas muy concretas y en cualquier caso comprende muy pocos conceptos matemáticos.

Figura 250 (izquierda): Brent Collins. Fotografía de su almacén realizada por Phyllip Geller, en la cual que se muestran diversas esculturas realizadas en madera.

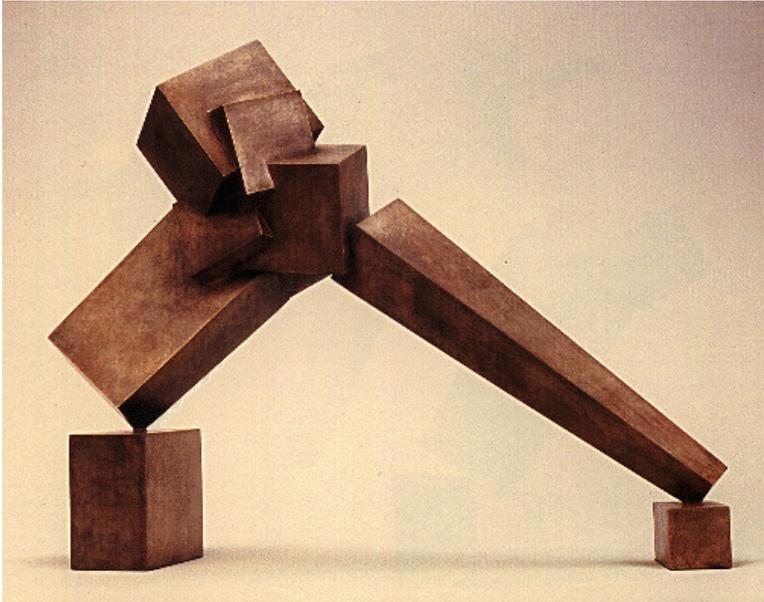
Además los materiales que se contemplan en esta taxonomía son francamente pocos, aunque se incluyen algunos de los más habituales en la Escultura Matemática. **Los tipos de materiales que se han incluido en esta clasificación son:**

- **Madera.** Esta clase de material se utiliza para enfatizar y marcar la curvatura de las superficies de la obra escultórica. Obsérvese al respecto la figura 250, situada en la página anterior, una fotografía del almacén de Brent Collins, en la que se muestran varias esculturas realizadas en este material. La madera dada su ligereza, también permite realizar obras complejas que si no serían muy inestables. Un ejemplo de este tipo es la escultura de la anterior figura 249. En esta imagen se puede apreciar lo inestable que resulta la construcción, efectuada unas piezas que simulan libros, por lo que se ha realizado en madera. Ésta es una obra de otro escultor matemático George Hart, del que hemos mostrado otra obra en la figura 249, y que consideramos que es de los mejores. Para profundizar en su trabajo véase su página web, referencia [PW18].
- **Piedra.** También esta clase de material tiende a enfatizar y marcar la curvatura de las superficies. En este material, y dado el gran peso que las obras adquieren no pueden ser muy complejas. Las obras de Nathaniel Friedman, están realizadas en piedra, en mármol entre otras, como se puede observar en la anterior figura 198. Esto se puede observar en la página web de la referencia [PW19]. Esta obra también podría servir de ejemplo de pieza que plantea dudas en su pertenencia a la Escultura Matemática. Otro escultor que realiza obras en este material es Paul Bloch. Mostramos otro trabajo suyo en la figura 251, situada debajo. Al respecto véase su página web, referencia [PW5].
- **Metal.** Este material se utiliza en escultura profusamente y de diversas formas. Un procedimiento muy usado es la soldadura, con la que se realizan esculturas con formas de poliedros o del tipo que denominaremos Booleano. Otro sistema para esculpir es mediante moldes, que se utilizan frecuentemente en el caso de la escultura del tipo que llamaremos Superficies Mínimas. Un ejemplo muy característico de trabajo en este material es el escultor matemático John Robinson, del que ya hemos mostrado varias obras. En su página web, referencia [PW20], se incluyen otras muchas. Otro escultor que realiza esculturas en metal es Bruce Beasley. Mostramos una en la figura 252, en la página siguiente. Para observar otras visítense su página web, referencia [PW21].
- **Hormigón.** Este material confiere a las esculturas ciertas propiedades comunes a la Arquitectura. Un escultor que utiliza frecuentemente este material es Eduardo Chillida. Un ejemplo de trabajo de este escultor realizado en hormigón se incluye en la figura número 253, que también está situada en la página siguiente.



Sin embargo, sí que hay alguna clasificación parcial de la Escultura Matemática, que ha sido planteada por algún artista para intentado catalogar su propio trabajo. El número de grupos que se contemplan en estas tipologías es muy reducido y abarca sólo a tipos muy concretos.

Figura 251
(izquierda): Paul Bloch, “Barolo”.
Mármol Negro, 2002.
Tamaño aproximado
55 x 48 x 31 cm.



Uno de los mejores escultores matemáticos y con una obra más variada, **Brent Collins**, clasifica su trabajo teniendo en cuenta conceptos geométricos y matemáticos. Esta es justo la tipología que utiliza en su página web, cuya ruta se puede ver en las referencias finales, la anterior [PW2].

Figura 252 (izquierda):
Bruce Beasley,
“Intersections II”. Año
1991, Bronce. Tamaño
aproximado 3,55 m.

La mayoría de estos grupos incluidos por Brent Collins en esta clasificación de su propia escultura están basados en conceptos geométricos y matemáticos, aunque como se puede observar no todos son de esta clase. Los tipos que incluye son los siguientes:

- Early Spiral Motifs
- Early Non-Orientable Surfaces
- Early Orientable Surfaces
- Early Modular Surfaces
- Modular Spirals
- Modular Toroids
- Balletic Suites
- Atomic Flowers
- Ribbon Sculptures
- Moebius Strip in Extremis
- Self Intersecting Columns
- Aferthought: Stone Reliefs from Twenty five Years ago



Figura 253 (arriba): Eduardo Chillida. “Sirena Varada”. Hormigón. Museo de escultura al aire libre del paso elevado de Juan Bravo. Paseo de la Castellana, Madrid.

6.4 Clasificación de las Matemáticas

Como ya hemos comentado, vamos a tratar de basar la estructura de esta taxonomía en las diferentes áreas que comprenden las Matemáticas. Los límites entre los diferentes grupos que incluimos en ella serán imprecisos, lo cual no nos resulta extraño, dado que la misma división de esta ciencia en diferentes “partes”, lo es también en algunos casos. Debemos recordar que existen conceptos que se estudian simultáneamente en diferentes campos matemáticos. Esto contribuye también a aumentar la dificultad de tipificar la Escultura Matemática. Existen numerosas versiones de clasificaciones de las Matemáticas. La que incluimos a continuación fue publicada en 1979, en la revista *Mathematical Review*. La clasificación de las Matemáticas de este estudio es:

- General. Historia y Biografía.
- Lógica y fundamentos. Teoría de conjuntos. Combinatoria. Teoría de grafos. Orden. Retículos. Estructuras algebraicas ordenadas. Sistemas matemáticos generales.
- Teoría de números. Teoría algebraica de números. Teoría de cuerpos y polinomios. Anillos y álgebras conmutativas. Geometría algebraica. Álgebra lineal y multilineal. Teoría de matrices. Anillos y álgebras asociativas. Anillos y álgebras no asociativas. Teoría de categorías. Álgebra homológica.
- Teoría de grupos y generalizaciones. Grupos topológicos. Grupos de Lie.
- Funciones de variables reales. Medida e integración. Funciones de una variable compleja. Teoría del potencial. Funciones de varias variables complejas y espacios analíticos. Funciones especiales. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ecuaciones en derivadas parciales. Ecuaciones en diferencias finitas y ecuaciones funcionales.
- Sucesiones. Series y sumabilidad. Aproximaciones numéricas y desarrollos en serie. Análisis de Fourier. Análisis armónico abstracto. Transformaciones integrales. Cálculo operacional. Ecuaciones integrales. Análisis funcional. Teoría de operadores. Cálculo de variaciones y control óptimo.



- Geometría. Conjuntos convexos y las desigualdades geométricas. Geometría diferencial. Topología general. Topología algebraica. Variedades y complejos celulares. Análisis global. Análisis en variedades.
- Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos. Estadística. Análisis numérico. Informática. Matemática general aplicada.

Figura 254 (izquierda): Alexander Calder, “Vertical Constellation with Bomb, (Costelación vertical con Bomba)”. Acero inoxidable pintado, madera y cable, 1943. National Gallery of Art, Washington.

Esta extensa clasificación de *Mathematical Review* continúa con otros muchos grupos pertenecientes a la **Matemática Aplicada**, y con campos correspondientes a prácticamente todas las ciencias y técnicas: Mecánica, Mecánica de fluidos, Acústica, Óptica, Astronomía, Teoría Electromagnética, Termodinámica, etc., que en general, se alejan de los conceptos que se utilizan en Escultura Matemática. También incluye una gran cantidad de subcategorías, sobre 3400. En algunos casos incluso se encuentran obras de este tipo de escultura que estarían relacionadas con los campos anteriores de la Matemática Aplicada. Un sencillo ejemplo sería el de la figura 254 situada en la página anterior, una obra de **Alexander Calder**. Esta imagen está extraída de la página web de la National Gallery (Galería Nacional de Arte de Estados Unidos), en la referencia [PW22]. Este museo resulta muy interesante y varias de sus obras las mostramos en nuestra tesis.

También algunos de los temas anteriores como la Teoría de Grafos, aunque aparentemente no tengan relación con la Escultura Matemática, sí que veremos que pueden ser utilizados. Un posible caso es el que se observa en la figura 255, debajo, en la que se muestra bastantes ejemplos de poliedros y sus grafos asociados. Como se podrá comprobar, aunque resulta imposible que aparezcan todos los grupos de la clasificación de las Matemáticas, **en nuestra propuesta de clasificación de la Escultura Matemática, se incluirán bastantes de las categorías anteriores.**

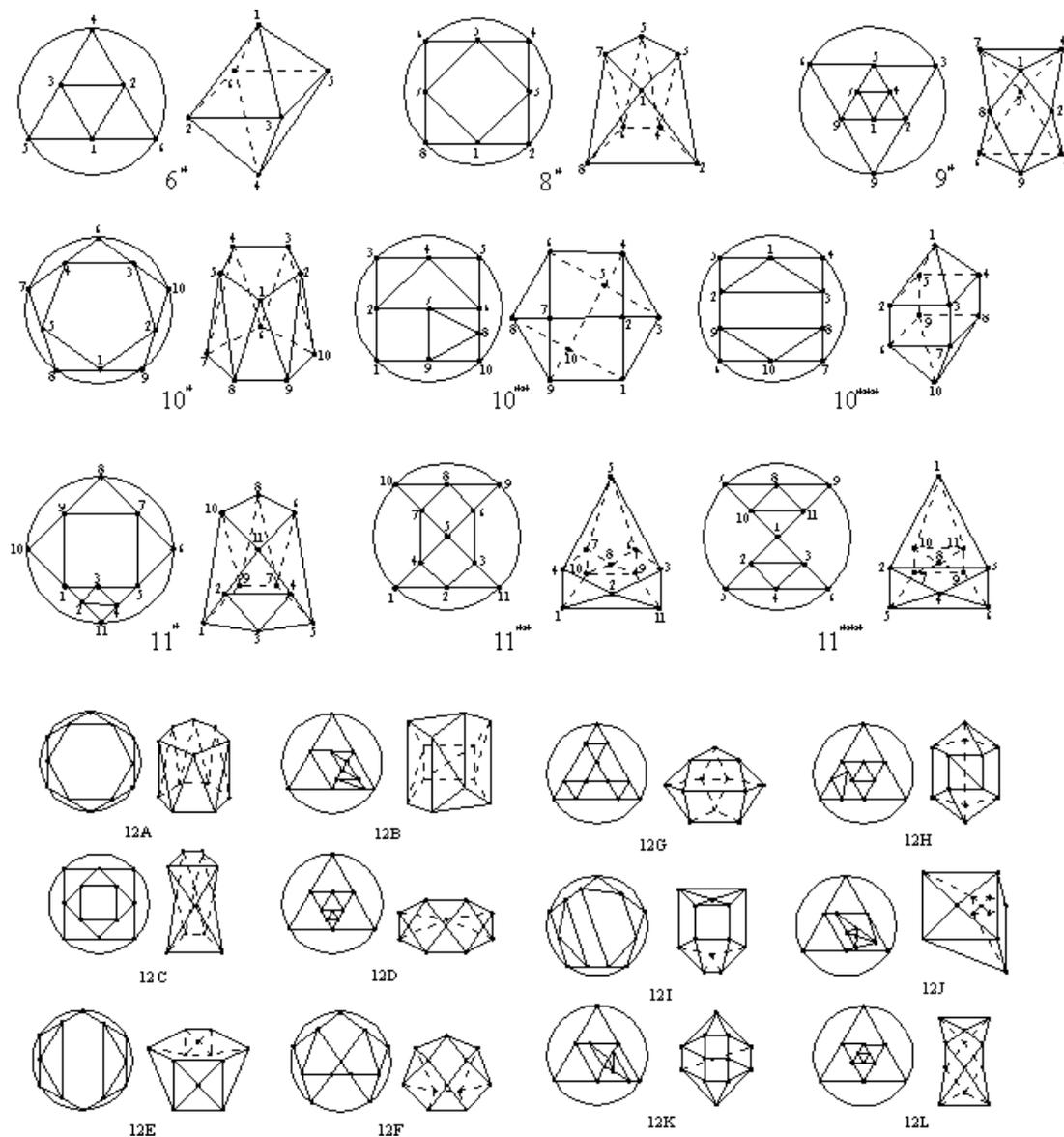


Figura 255 (arriba): Ejemplos de grafos de algunos poliedros.

6.5 Clasificación de la Escultura

Antes de dar esta clasificación, debemos precisar algunos términos utilizados en Escultura. Según se puede leer en el diccionario de la anterior referencia [15], escultura es: “Arte de modelar, de tallar y de esculpir en barro, piedra, madera metal u otra materia conveniente, representando de “bulto” un objeto real o imaginario, una figura, etc.” Definición que ya habíamos expuesto pero en la que se debe aclarar el concepto de “**bulto**” y sus diferentes tipos, ya que éstos también pueden aparecer en la Escultura Matemática. “**bulto redondo o completo**” es el que permite contemplar una escultura desde cualquier punto de vista a su alrededor. “**medio bulto**”, es ya un medio o bajo relieve, esto es, los que sobresalen del fondo la mitad o menos del bulto, respectivamente.

En general, los trabajos de Escultura Matemática serán de bulto redondo, aunque también habrá algunos que se enclavarían en todos los tipos de relieves anteriores. Hay que resaltar la dificultad de utilizar en este tipo de escultura el término de “relieve”, ya que se suele diseñar figuras aisladas, no escenas como las de la escultura figurativa clásica, y por tanto no solemos poder situar lo que en la definición anterior de relieve en escultura se ha denominado “fondo”. Un ejemplo de este tipo de escultura es el que se mostraba en la anterior figura 244, un trabajo realizado por la escultora matemática Irene Rousseau, que se podría considerar de alguna forma un bajorrelieve. Otro ejemplo es el del final de esta página, la figura número 256, una obra de **Brent Collins** que podría corresponder a algo similar a un medio o alto relieve.

Un último ejemplo de este tipo de obra, en la que aunque no resulta totalmente clara su inclusión en **el relieve**, pero que creemos que tienen características que la permiten identificar con este término, es la de la figura número 257 también situada al final de esta página, una obra de **Craig Hansen**. En ésta es evidente su contenido matemático pues se puede apreciar que tiene la forma de una superficie matemática formada exclusivamente con triángulos. En cualquier caso, pensamos que estos últimos trabajos se podrían considerar entre los relieves pertenecientes a la Escultura Matemática, si tomamos un concepto de relieve ampliado y incluimos en él aquellas obras en que la tercera dimensión, la profundidad, es considerablemente menor que las dos.

También en algunos casos se utilizarán motivos en relieve para la decoración de una pieza esculpida en bulto. Al respecto, obsérvese una obra muy interesante, la de la anterior figura número 224, un trabajo de **Bathsheba Grossman** que ha decorado geométricamente, rellenando su superficie con un relieve basado en la curva de Peano. Por último subrayar que en algunas obras de Escultura Matemática, y en estos motivos para realizar relieves, se pueden utilizar otros tipos de conceptos o propiedades matemáticas.



Figura 256 (izquierda): Brent Collins, Gallery twelve, picture 1, (Galería doce, imagen 1). Afterthought: Stone reliefs from Twenty-five Years ago, (Ocurrencias: Relieves en piedra de hace 25 años). Fotografía de Phyllip Geller.

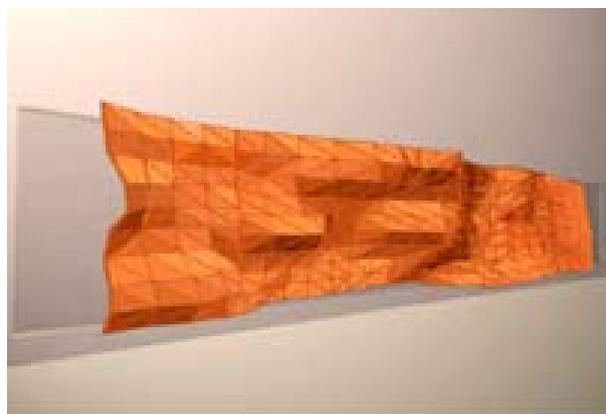


Figura 257 (derecha): Craig Hansen. “Sin título”; Madera.

6.6 Versiones Previas de Nuestra Clasificación de la Escultura Matemática

Los modelos de clasificación de la Escultura Matemática que nosotros proponemos, se basan exclusivamente en los conceptos y propiedades matemáticas que aparecen en este tipo de obras. La primera propuesta de clasificación que hicimos, en julio del año 2003, fue fruto del conocimiento acumulado a lo largo de los años por el profesor Javier Barrallo director de esta tesis doctoral y de las primeras investigaciones realizadas al respecto por el autor, Ricardo Zalaya. Cada grupo que se incluía en esta primera propuesta de clasificación que planteamos, estaba definido en función de una propiedad o concepto geométrico o matemático, o por un conjunto de ellos, que caracterizaban a las obras que contenía.

Como se podrá apreciar en la lista siguiente, alguno de los grupos que proponíamos era muy amplio, como por ejemplo el de poliédrica y geometría clásica, ya que en él se incluían obras en las que se utilizan características muy diversas pero que se podían englobar en un único grupo caracterizado por la característica común de pertenecer a ese tipo de geometría. Sin embargo otros de los tipos, como por ejemplo el de superficies de curvatura mínima, eran menos extensos. Esta propuesta se explica en la ponencia de la referencia [7] ya mencionada, y que precisamente se titulaba, *Mathematical Sculpture Classification*. A continuación vamos a enumerar sus grupos:

Propuesta inicial de clasificación (Julio del 2003).

- Geometría Poliédrica y Clásica
- Superficies no Orientadas
- Nudos Topológicos
- Superficies Cuádricas y Regladas
- Estructuras Modulares y Simétricas
- Operaciones Booleanas
- Superficies de Curvatura Mínima
- Transformaciones
- Otras



El motivo por el cual hemos sólo mencionado los grupos, que se incluían en nuestro primer planteamiento, es que creemos que esta clasificación ha sido mejorada en la propuesta final de nuestra tesis, incluida en el siguiente apartado y que expondremos con gran detalle en el siguiente capítulo describiendo cada uno de sus grupos.

Posteriormente en octubre del 2004 hicimos una segunda propuesta de clasificación de la Escultura Matemática, más elaborada, en la que ya tratamos de estructurar sus grupos de acuerdo a una categorización de las Matemáticas.

Figura 258 (izquierda):
Bathsheba Grossman,
“Alterknot (nudo cambiante)”.
Bronce y pedestal de mármol
negro. Tamaño 13 cm.

Esta segunda propuesta de clasificación se incluyó en un artículo resumen de nuestro trabajo sobre la clasificación de la Escultura Matemática, hasta esa fecha. Se publicó en la revista electrónica *Visual Mathematics*, una de las mejores publicaciones periódicas dedicadas al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Este artículo se puede consultar en la página web de esta revista, referencia anterior [PW9].

Segunda Propuesta de clasificación (Octubre del 2003).

- **Escultura con Características Geométricas**
 - ◆ Poliédrica
 - ◆ Superficies matemáticas curvas
 - Cuádricas y superficies de revolución
 - Superficies regladas
 - Superficies no orientadas
 - Superficies mínimas o de curvatura media nula
 - ◆ Otras superficies
- **Escultura con Conceptos Algebraicos**
 - ◆ Simetrías
 - ◆ Transformaciones y esculturas modulares
 - ◆ Operaciones booleanas
- **Escultura Topológica**
- **Escultura con Conceptos Matemáticos Varios**

En cuanto a la pertenencia de un trabajo escultórico determinado, a un tipo concreto de los que incluimos en nuestros modelos de clasificaciones, igual que ocurre con respecto al tema de su inclusión en la Escultura Matemática, **la adscripción a un grupo determinado puede resultar difícil en algunos casos**. Ejemplo de ello es obra de **Bathsheba Grossman** de la figura 258 en la página anterior. Como hemos comentado, habrá algunos trabajos que se puedan clasificar en varios tipos simultáneamente, debido a que pueden estar involucrados varios conceptos matemáticos. Creemos que una clasificación de la Escultura Matemática no puede ser excluyente.



Figura 259 (arriba): Vista aérea del conjunto de esculturas expuestas en Punta Sur y pertenecientes a diversos artistas: Bruce Beasley, Sebastián, Vicente Rojo, Joop Beljón, Manuel Felguerez, etc. Isla Mujeres, Méjico.

6.7 Propuesta Definitiva de Clasificación de la Escultura Matemática

Después de sucesivas mejoras efectuadas a lo largo de nuestra investigación, presentamos nuestra propuesta definitiva de clasificación de la Escultura Matemática, que hemos tratado de estructurar de acuerdo a la categorización de las Matemáticas. **Esta propuesta está abierta a mejoras en el futuro**, ya que continuaremos nuestra investigación sobre la Escultura Matemática, en general y en particular sobre su clasificación. Para conseguirlo insistimos en que esperamos contar con las posibles aportaciones de los expertos de este campo.

Propuesta definitiva de clasificación de la Escultura Matemática

- **Escultura Geométrica**
 - ◆ Poliédrica
 - ◆ Superficies Matemáticas Curvas
 - Cuádricas
 - Superficies de Revolución
 - Superficies Regladas
 - Otras Superficies
 - ◆ Geometrías no Euclídeas
 - ◆ Geometría Fractal
 - **Escultura con Conceptos de Cálculo**
 - ◆ Sucesiones y Series Matemáticas
 - ◆ Escultura con Conceptos de Cálculo Diferencial
 - Superficies Mínimas o de Curvatura Media Nula
 - Otros Conceptos de Cálculo Diferencial
 - ◆ Escultura con Conceptos de Cálculo Diversos
 - **Escultura con Conceptos de Álgebra**
 - ◆ Simetrías
 - ◆ Transformaciones
 - ◆ Esculturas Modulares
 - ◆ Operaciones Booleanas
 - **Escultura Topológica**
 - ◆ Superficies no Orientadas
 - ◆ Nudos y Figuras Entrelazadas
 - ◆ Otros Conceptos Topológicos
 - **Escultura con Conceptos Matemáticos Varios**
-

6.8 Dificultades para la Clasificación de la Escultura Matemática

En general clasificaremos cada caso concreto de escultura por la característica que creamos que “domina en su concepción”, si es que ello ocurre. Afortunadamente esto sucederá en la mayoría de las obras y por tanto, las lograremos clasificar. En el trabajo “Alterknot” que se ha mostrado en la figura número 258, al final de una de las páginas anteriores, se puede observar la utilización en su diseño realizado por la escultora **Bathsheba Grossman** de conceptos diversos, como los referentes a superficies matemáticas, nudos topológicos, simetrías, etc. En este caso, creemos que sí se puede catalogar, por lo que la incluiremos en el subgrupo Otros Conceptos Topológicos, incluido en la Escultura Topológica. Como se puede observar predominan este tipo de conceptos, aunque al no resultar clara la utilización de una propiedad concreta, esta obra se ha enclavado en este subgrupo un poco heterogéneo, pero como es lógico con una profunda influencia del área matemática reseñada.

Otro caso de obra con dificultades para su clasificación en un grupo de los anteriores es la que se muestra en la figura 260, un trabajo de uno de los más reputados escultores matemáticos, **George Hart**. Los grupos en los que al menos este trabajo se podría incluir serían: el tipo de las Poliédricas, dentro del grupo Escultura Geométrica, y los tipos Simetrías y Esculturas Modulares, dentro del grupo Escultura con Conceptos Algebraicos. Un interesante artículo de este escultor es el de la referencia [37], en el que también nos describe el proceso de creación de esta escultura concreta. **Los mejores escultores matemáticos, como: George Hart, Bathsheba Grossman, Brent Collins, etc., suelen resultar muy profundamente matemáticos en sus modelos**, valga la reiteración, lo que aumenta la dificultad de clasificación de muchas de sus obras.

Por otro lado, **la diversidad de la Escultura Matemática es realmente extensa**. Ello se constata en lo numerosos que resultan los tipos de la clasificación anterior. También se puede comprobar en la fotografía que se muestra en la figura 259, situada al final de otra de las páginas anteriores, en la que observa una vista aérea de un conjunto realmente heterogéneo de esculturas expuestas en Punta Sur. Las obras que se puede contemplar en este maravilloso paraje natural de la Isla Mujeres en Méjico pertenecen a diversos artistas: Bruce Beasley, Sebastián, Vicente Rojo, Joop Beljón, Manuel Felguerez, etc. Algunas de estas esculturas son unos interesantes trabajos matemáticos, en las que también se han utilizado conceptos muy diferentes.



Resumiendo, creemos que no es posible dar una tipología de esta escultura excluyente. Esto se constata fijándose en algunos de los ejemplos incluidos en las anteriores figuras. Trataremos de clasificar en cada caso concreto la obra escultórica por la característica que creamos que “domina en su concepción”. En general, esto sucederá en la mayoría, y por tanto las lograremos clasificar.

Figura 260 (izquierda): George Hart, “Fire and Ice (Fuego y Hielo)”. Año 1997. Madera de roble y bronce; diámetro 60 cm. Galería Vorpal.



Otro claro ejemplo de este tipo de esculturas que podríamos clasificar simultáneamente dentro de varios de los grupos de la clasificación, puede ser la mostrada en la figura 261, situada a la izquierda, y realizada por el escultor **Charles Perry**.

Este complejo e impresionante trabajo de 13 metros de altura se podría considerar una extensión del concepto de Superficie Reglada, formando la superficie con el movimiento de una curva cualquiera, no necesariamente una recta. Dado ello se podría clasificar en el grupo definido por este concepto.

Figura 261 (izquierda): Charles Perry, "Eclipse". Aluminio. Tamaño 13,5 m. The Hiatt Regency, San Francisco.

Sin embargo, esta escultura también se puede observar que comienza en su interior como un dodecaedro pentagonal, donde cada una de sus 12 caras es rotada hacia el exterior en sentido de derecha a izquierda. En el punto medio de estas rotaciones se forma un icosadodecaedro, sólido compuesto por 12 pentágonos y 20 triángulos situados entre ellos. Continuando la rotación hacia el exterior se forma otro poliedro llamado pequeño rombicosidodecaedro. El movimiento de rotación de las aristas entre estas tres figuras genera paraboloides hiperbólicos, que también son superficies regladas. Esta gran complicación en su diseño ilustra la dificultad de su clasificación, aunque creemos que se debería incluir en el subgrupo, Superficies Regladas. Para estudiar el trabajo de Charles Perry, es interesante la ponencia anteriormente mencionada, referencia [29], escrita por este escultor, arquitecto e investigador en Escultura Matemática.

A la derecha, presentamos como contraste un ejemplo de escultura en que su adscripción a un grupo determinado resulta fácil, el que se muestra en la figura 262. En este caso creemos que tiene una característica que ha sido fundamental en su concepción, el ser una superficie mínima o de curvatura media nula, concepto que caracteriza a uno de los tipos de escultura propuestos y en el que por lo tanto la clasificaremos.

Como particularidad interesante esta obra escultórica de la figura número 262, "Minimal Surface Costa X" del escultor Helaman Ferguson, está realizada en un bloque de nieve material que no se encontraba, lo mismo que otros muchos, en la clasificación en función de los materiales, expuesta anteriormente.

Figura 262 (derecha): Helaman Ferguson. "Superficie mínima de Costa X". Dimensiones: 395 x 285 x 285 cm. Esculpida en nieve en Noviembre de 1999. Brekenridge, USA.



La nieve permite la ejecución de obras de escultura francamente muy sorprendentes. Para estudiar la escultura realizada modelando este elemento, se puede leer **el artículo de Brent Collins y otros autores de título *Whirled White Web: Art and Math in Snow***, referencia [38]. En esta ponencia se estudian algunos de los trabajos de Escultura Matemática que se realizaron en uno de los concursos internacionales periódicos de escultura en nieve, celebrados en Norteamérica.

Existen otros artistas que también realizan algunas esculturas que se pueden considerar matemáticas. Un ejemplo es el de **Christopher Hodges**. En la figura 263, debajo, presentamos uno de sus trabajos. En este caso y dado que se siguen el esquema de un sencillo friso geométrico, la clasificaríamos dentro del subgrupo Transformaciones, que hemos incluido en el grupo genérico de Escultura Algebraica. Sin embargo también se podría incluir dentro del de las Modulares. En el siguiente capítulo trataremos de aclarar sus diferencias. Está extraída de la web de la exposición, *Sculpture by the Sea*, exhibición que reúne a numerosos artistas de todos los tipos. Aunque no está dedicada a la Escultura Matemática, también se exponen obras de este tipo. Véase la reseña de esta página de **la exposición anual *Sculpture by the Sea (Escultura en el Mar)***, referencia [PW23].

Otro interesantísimo escultor matemático del que todavía no habíamos presentado ninguna obra es el mejicano **Sebastián**. En la figura 264, utilizada como portada del capítulo siguiente, mostramos su trabajo titulado “León Rojo”. Esta preciosa escultura realizada en plata, también resulta difícil de clasificar, aunque resulta evidente su concepción profundamente geométrica. Para estos casos hemos previsto un tipo el de Otras Superficies, enclavado en el grupo general de Escultura Geométrica, en el cual incluiríamos esta obra. El completo libro *Geometría Emocional. Sebastián* muestra entre otras obras suyas las que se presentaron en la Exposición en el Antiguo Colegio de San Idelfonso de Méjico. Esta fue celebrada de abril a-julio de 2004. Al respecto consultar la referencia [39].

Igual que sucedía con nuestra clasificación previa, en esta propuesta final, todavía existen algunos subgrupos caracterizados por **conceptos matemáticos, que aunque a lo mejor no siendo tan importantes, sin embargo son aplicados frecuentemente en la Escultura Matemática**, y de hecho basándose en ellos se ha producido trabajos de gran calidad. A continuación, en el capítulo siguiente, mostramos otros ejemplos de estos tipos entre los muchos que incluimos.



Figura 263 (arriba): Christopher Hodges, “Curl Curl (Rizar, Rizar)”. Acero pintado, altura 330 cm. Catálogo n° 86 de la Exhibición Bondi: *Sculpture by the Sea*; (Exposición: *Escultura en el Mar*, Australia), 1999.

ESTUDIO DE LOS GRUPOS DE LA CLASIFICACIÓN



7 Estudio de los Grupos de la Clasificación

En primer lugar, recordamos los grupos principales que componen nuestra clasificación: Geométrica, Escultura con Conceptos de Cálculo, Algebraica, Topológica y el de las esculturas que presentan Conceptos Matemáticos Varios. A continuación, en los siguientes apartados de este capítulo describiremos de forma breve, dada la necesaria concisión, todos los grupos y subgrupos de la clasificación. Respetaremos la filosofía que nos hemos propuesto, ayudando a explicar estos tipos con cuantos casos y ejemplos de obras sea posible para tratar de caracterizarlos.

7.1 Escultura Geométrica

Este grupo principal es el más amplio de la clasificación, dada la gran relación, que incluso podríamos calificar de intrínseca, de las artes plásticas, y en concreto de la Escultura con la Geometría. Es tan genérico que en él se podría enclavar buena parte de la Escultura Matemática, para constatarlo solamente hay que fijarse en los ejemplos que hasta ahora hemos incluido en los capítulos anteriores, la gran mayoría de ellos se podrían considerar Escultura Geométrica.

Existen ejemplos de obras escultóricas en las que en su diseño se ha utilizado casi todos los tipos de sólidos, desde los más sencillos como cubo, esfera, cono, cilindro, pirámide, prisma, etc., a los más complicados poliedros irregulares o superficies de ecuaciones matemáticas complejísimas. Además en otras lo que se utiliza, no es la forma de un sólido matemático concreto, sino combinaciones entre ellos. Este tipo comprende, desde las esculturas más sencillas como “Amaryllis” de **Tony Smith**, figura 265 situada debajo, a algunas muy complejas, por ejemplo la obra “Eclipse” de **Charles Perry**, en la figura 261 anterior. Lo mismo sucede con su tamaño, puede oscilar desde el de las pequeñas esculturas, como la figura 266 de la página siguiente, a las de dimensiones enormes, por ejemplo los 13,5 m. de altura de la obra “Eclipse”.

También la Geométrica, es el tipo de Escultura Matemática de más tradición, principalmente a lo largo del siglo XX. Son numerosas las obras que se pueden incluir dentro este grupo. Durante el examen del Cubismo, vimos alguna escultura que podríamos incluir dentro de este conjunto. Al respecto, se puede consultar el estudio específico de este movimiento artístico, dentro del apartado dedicado a la Escultura de la primera mitad del siglo XX.

Figura 264 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Sebastian. “León Rojo”. Plata; 25 x 26 x 27 cm. Méjico D.F.; 1987.

Figura 265 (derecha): Tony Smith. “Amaryllis”, 1965. Dimensiones: 350 x 129 x 350 cm. Wadsworth Atheneum, Conneticut, USA.



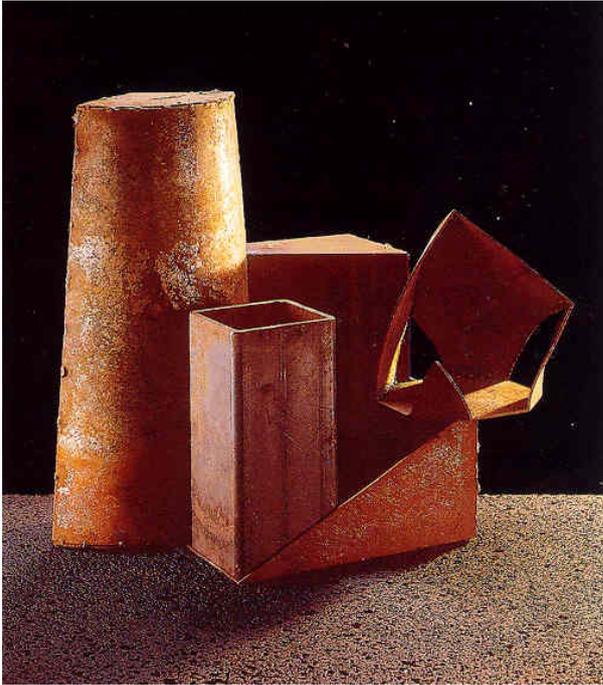


Figura 266 (arriba): Sebastian. “Sin Título”. Selección, “Las obras de las obras”, pieza I. Hierro oxidado, pequeño formato. Fotografía de Enrique Bostelmann. Méjico D.F.; 2003.

En el estudio previo relatado en el apartado dedicado a la Escultura de la primera mitad del siglo XX, se constató que en el trabajo realizado por autores enclavados en muchas otras tendencias, estilos y movimientos artísticos ya se anticiparon muchas de las características que posee la Escultura Geométrica.

El mejicano **Sebastián** resulta un ejemplo francamente interesante de escultor matemático que nos sirve para mostrar el proceso de conceptualización matemático y en especial geométrico de la Escultura. Además es un creador que con gran frecuencia utiliza los sólidos matemáticos más sencillos como cubo, cilindro, cono, esfera, prismas y algunos otros. Ello se aprecia en una serie de sus obras, las que fueron seleccionadas por el fotógrafo **Enrique Bostelmann** y que denomina “Las obras de las obras”. En la figura número 266, situada en el lado izquierdo, mostramos una escultura de Sebastián, realizada en el año 2003.

Este escultor se inscribe en la cultura mexicana, la cual es un ejemplo muy claro para ilustrar las relaciones profundas entre las Matemáticas y el Arte. Esto creemos que ya lo hemos razonado en el capítulo de Antecedentes Históricos. Su arte surge a partir de la valiosa memoria de la civilización precolombina, en la que ampliamente penetra la civilización grecolatina con la incursión de la cultura hispana.

También incorpora el gusto por las Matemáticas y el de la abstracción, transmitidos por los árabes a los iberos. De este profundo mestizaje floreció la cultura mejicana moderna. Vemos otro caso diferente de obra de Sebastián con una conceptualización geométrica, a la derecha en la figura 267. El camino “artístico-matemático” de este escultor, nos sirve para mostrar **la diversidad de la Escultura Geométrica**.

Figura 267 (derecha): Sebastian. “Diosa de la fertilidad”. Hierro con esmalte acrílico, 78 x 43 x 18 cm. Fotografía de Enrique Bostelmann. Méjico D.F.; 1995.



Sebastián, desde la década de los **sesenta ha explorado el volumen y el espacio a través de los cinco cuerpos regulares platónicos**, o sea, el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro; sin olvidar que también ha hecho incursiones en otros tipos incluidos en la Escultura Matemática, los relativos al plano topológico, a la cinta de Moebius etc. A la vez, fascinado por las piedras y la roca, concederá gran importancia al estudio de la cristalografía, mediante la cual privilegiará el sistema regular llamado cúbico, con base en los siete sistemas cristalográficos. Además de sus amplias investigaciones científicas y técnicas nacerán, en los años setenta, numerosas esculturas transformables que permiten a Sebastián rendir homenaje, entre otros, a Leonardo, Dürero y Brancusi. Estos son, sobre todo los dos primeros, son algunos de los principales “artistas matemáticos” de la historia. Debajo en la figura 268 se muestra uno de estos conjuntos con cuatro esculturas transformables, “Homenaje a Leonardo”.

En este grupo, Escultura Geométrica, clasificaremos fundamentalmente las obras que presenten figuras o formas de sólidos matemáticos. Sin embargo, las esculturas que se caractericen especialmente por alguna propiedad geométrica, como por ejemplo las simetrías, las incluiremos en el subgrupo específico que hemos ubicado en el grupo Escultura Algebraica, ya que éstas también son transformaciones algebraicas. Dentro del grupo de la Escultura Geométrica, hemos incluido cuatro importantes subgrupos: Poliédrica, Superficies Matemáticas Curvas, Geometrías no Euclídeas y Geometría Fractal, que a continuación estudiaremos con detenimiento. Los trabajos del escultor Sebastián, situados debajo, también nos sirven para presentar el primer subgrupo que hemos definido dentro de la Escultura Geométrica, el de la Poliédrica.

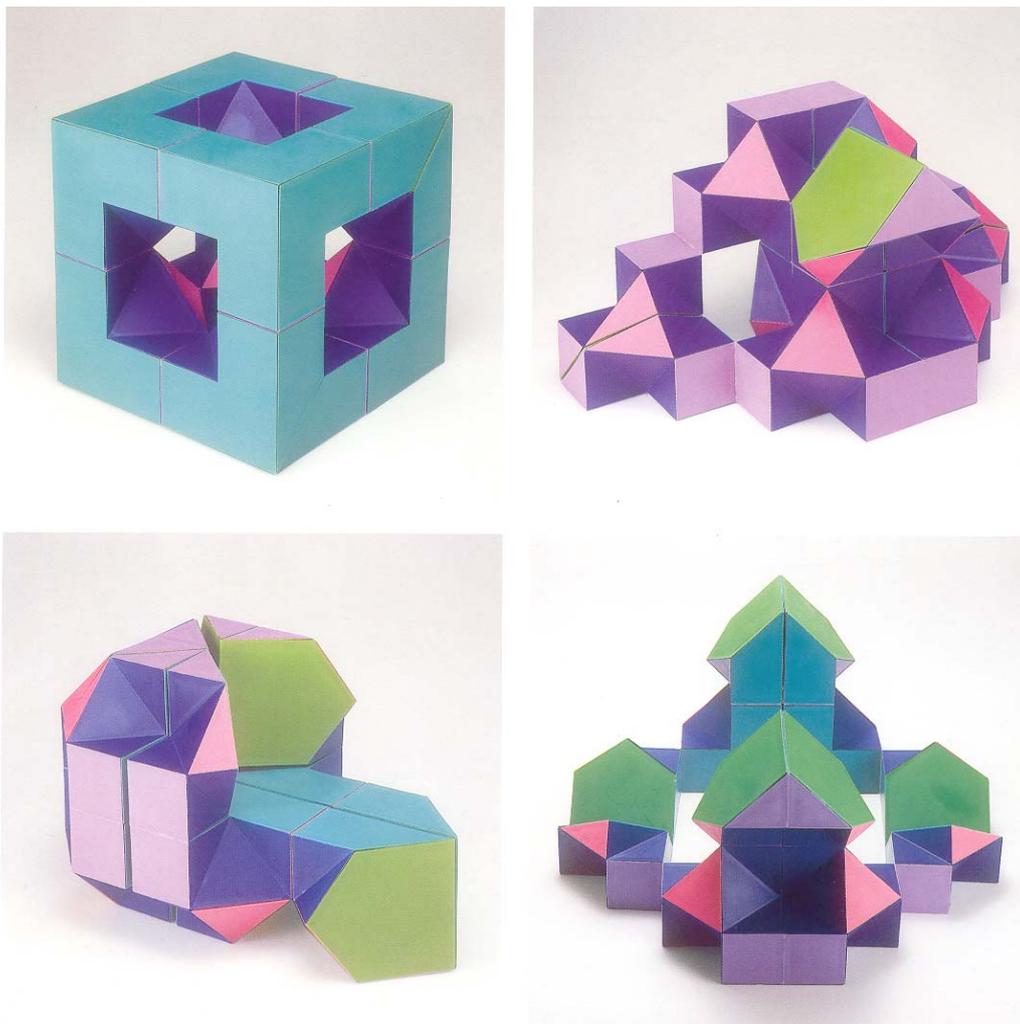


Figura 268 (arriba): Sebastian. “Leonardo”. Poliuretano, 20 x 20 x 20 cm. Fotografía de Enrique Bostelmann. Méjico D.F.; 1972.

7.1.1 Escultura Poliédrica

Este tipo de la Escultura Poliédrica, incluido dentro del grupo de la Geométrica, es tal vez uno de los subgrupos en que más obras se pueden inscribir. Lo mismo que ocurría, frecuentemente con el grupo de la Geométrica; es **uno de los tipos de escultura más practicado por los artistas matemáticos**, sobre todo a partir del siglo XX. Sin embargo en otras ramas del Arte como la Pintura, ya se había representado estas figuras matemáticas, desde mucho antes, sobre todo desde el Renacimiento. Además también en otras facetas artísticas, como en la joyería (tallado de piedras preciosas), los poliedros resultan fundamentales.

7.1.1.1 Los Poliedros

El vocablo **poliedro** proviene del griego, de *polys* (muchos) y *edra* (caras). Como resultará conocido, un poliedro o cuerpo multiplanar es un sólido limitado enteramente por superficies planas. Por ejemplo, el cubo, el cuboide, el prisma y la pirámide son poliedros. Estos últimos son los casos más sencillos pero existen otros mucho más complejos como los de Sebastian de las obras de la figura 268 en la página anterior. Al final de esta página en la figura 269 se representa otro poliedro el Dodecaedro Pentakis, un Sólido de Catalán. En ella se observa su figura espacial y su desarrollo plano obtenidos con **un interesante programa para estudiar los poliedros, el denominado Poly**.

Aunque todas las clases de sólidos matemáticos han sido utilizadas con bastante profusión en Escultura Matemática, como se ha constatado con los ejemplos de obras anteriores, con mucha mayor frecuencia lo han sido los poliedros y en particular los cinco regulares convexos o **Sólidos Platónicos**. No se sabe exactamente en qué época se conocieron estos cinco poliedros, aunque algunos ya lo eran anteriormente a los griegos. Se tiene constancia de que el objeto más antiguo realizado por el hombre con forma de dodecaedro es atribuido a tiempos prepitagóricos y hay una tradición que asigna el conocimiento de los cinco poliedros regulares a los pitagóricos.

Otros investigadores indican que el cubo, el tetraedro y el dodecaedro, los poliedros más simples, que se obtienen uniendo tres polígonos en cada vértice, pertenecen a los **pitagóricos**, mientras que el octaedro e icosaedro fueron estudiados por **Teeteto**. Cabe suponer que en épocas anteriores a los pitagóricos, estos poliedros ya se conocían de manera aislada como objetos físicos. También que los pitagóricos conocían estos poliedros y sólo la construcción de tres de ellos el cubo, el tetraedro y el dodecaedro y que fue Teeteto el primero en formular una teoría general.

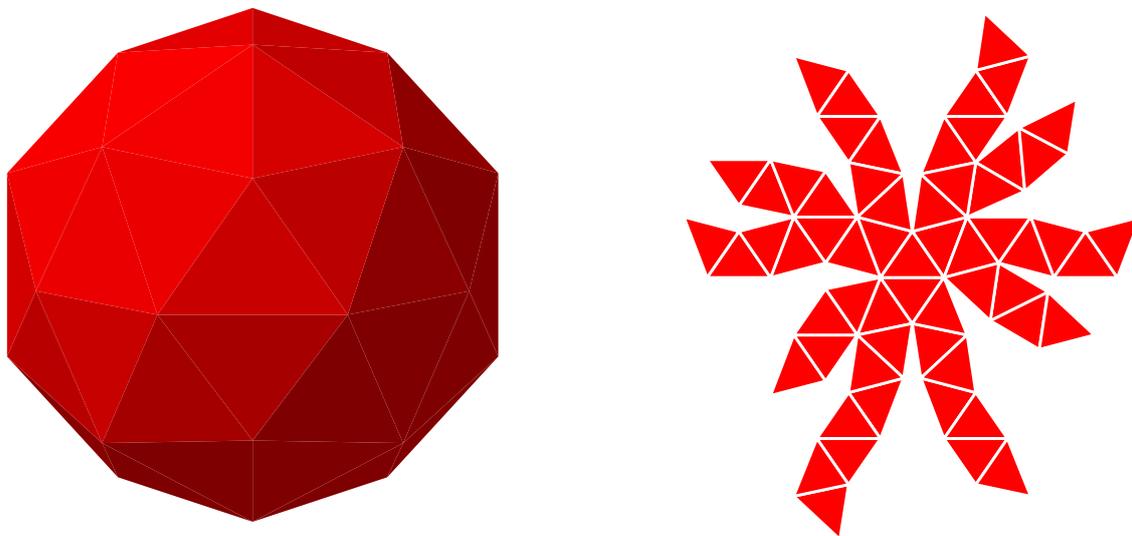


Figura 269 (arriba): Poliedro: Dodecaedro Pentakis, un Sólido de Catalán. Figura espacial y su desarrollo plano obtenidos con el programa Poly.

Esto se presenta en el libro XIII de los *Elementos de Euclides*, dando la construcción geométrica de los cinco cuerpos y demostrando que no pueden existir otros. Esto lo explicaremos posteriormente. Su nombre alternativo, sólidos platónicos, se debe a que **Platón** (427 - 347 a. c.) que los cita en su libro *Timeo*. En su concepción metafísica, los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares. De estos cuerpos elementales, Platón considera sólo los límites, las superficies, no hace ninguna alusión a su sustancia. Sea cual fuere su interpretación, lo que queda claro es que Platón da mucha más importancia a la forma que a la materia. Considera que estas superficies a su vez están descompuestas en triángulos elementales. Estos triángulos elementales son triángulos rectángulos de dos clases, isósceles y escalenos, el cartabón y la escuadra, que representan en último término los elementos últimos del universo.

Platón, siguiendo con esta filosofía, considera que las figuras que corresponden a los elementos básicos: fuego, tierra, agua y aire son los cuatro poliedros regulares: tetraedro, cubo, icosaedro y octaedro, respectivamente. La tierra al cubo, la forma más sólida y menos móvil. El fuego al tetraedro, por ser la más aguda y más móvil. El aire y el agua correspondían al octaedro e icosaedro, respectivamente. Ahora bien, sólo cuatro poliedros se corresponden con los cuatro elementos tradicionales. Pero existe todavía un quinto elemento, el dodecaedro, al que Platón simplemente alude en esta frase un tanto enigmática: “Quedaba sólo una última combinación: Dios la ha utilizado para el todo, cuando dibujó el orden final”.

Los sólidos platónicos son una de las gamas de figuras preferidas por los escultores matemáticos por su belleza y su sencillez, por lo tanto aunque su descripción con toda probabilidad ya será conocida, creemos que es interesante recordar de forma muy breve las características y propiedades que poseen estos cinco poliedros regulares. Un poliedro convexo se llama regular, si está limitado por polígonos regulares y si a cada vértice concurre el mismo número de aristas. Los cinco sólidos de este tipo se denominan platónicos (por el geómetra y filósofo griego Platón) o cósmicos. Véase la figura 270 en la que se incluyen estos cinco sólidos que son los siguientes: **tetraedro (4 caras); hexaedro o cubo (6 caras); octaedro (8 caras); icosaedro (20 caras) y dodecaedro (12 caras).**

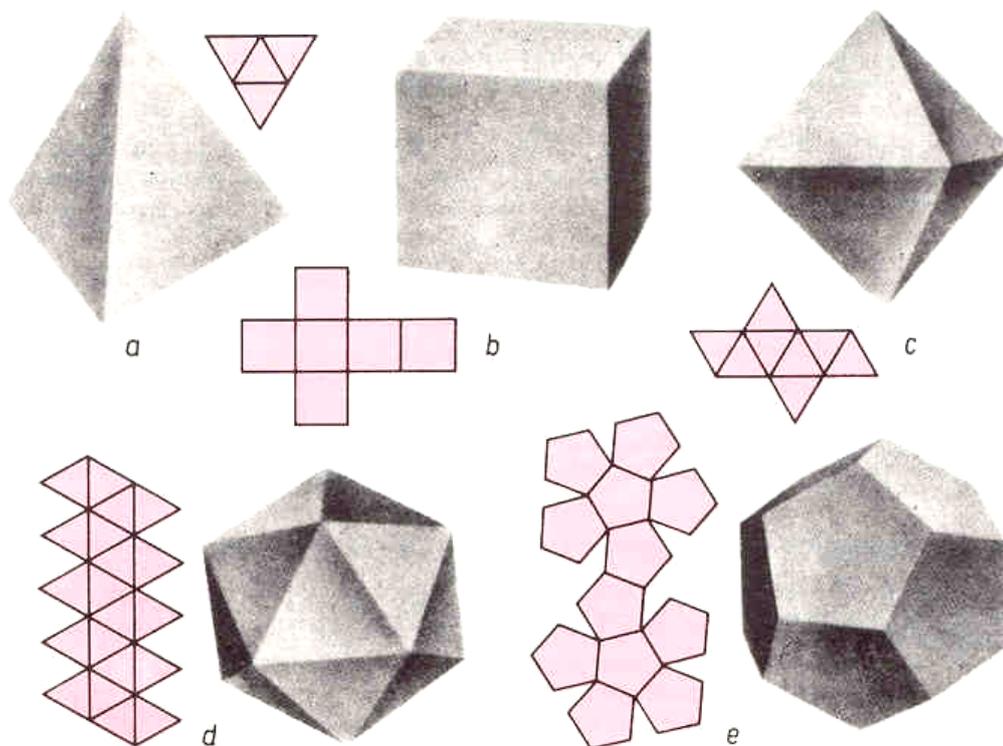


Figura 270 (arriba): Los cinco sólidos planos Platónicos (regulares) y sus desarrollos planos: a) tetraedro (4 caras); b) hexaedro o cubo (6 caras); c) octaedro (8 caras); d) icosaedro (20 caras); e) dodecaedro (12 caras).

De acuerdo con el teorema que dice que la suma de los ángulos formados por las aristas en cualquier vértice es menor que 360 grados, es obvio que no puede haber más que cinco poliedros regulares. Los casos posibles de poliedros, aplicando dicho teorema son los siguientes:

- 1) **Si el poliedro está limitado por triángulos equiláteros**, como los ángulos entre las aristas miden 60 grados, sólo pueden concurrir a un vértice tres, cuatro, o cinco caras, ya que si seis caras se cortaran en un vértice, entonces la suma de sus ángulos entre aristas sería, 360 grados.
- 2) **Si el poliedro está limitado por cuadrados** (ángulos en los vértices iguales a 90 grados), es posible construir un sólido en el que tres caras concurren en cada vértice.
- 3) **Si el poliedro está limitado por pentágonos regulares** (ángulos en los vértices iguales a 108 grados), se puede construir un sólido en el que en cada uno de sus vértices concurren tres caras pentagonales regulares.

Si las caras del poliedro fueran hexágonos regulares (ángulos en los vértices iguales a 120 grados), no sería posible lograr que tres caras concurrieran a ningún vértice, dado que 3 por 120 grados no resulta menor que 360 grados. **Estas consideraciones anteriores, nos conducen a la determinación de los únicos cinco tipos de poliedros regulares posibles.** En la tabla situada al final de la página, indicamos el número, v de vértices, c de caras y, a de aristas, para cada valor n del número de caras, que concurren a cada vértice. Todos los tipos de poliedros regulares han sido fuente de inspiración para numerosas esculturas matemáticas.

Tabla 1 (debajo): Características de los cinco sólidos regulares convexos o Platónicos: Tipo de polígono de la cara y número de caras, vértices y aristas de estos polígonos.

Tipo de cara	n	v	c	a	Sólido regular
triángulo equilátero	3	4	4	6	tetraedro
triángulo equilátero	4	6	8	12	octaedro
triángulo equilátero	5	12	20	30	icosaedro
Cuadrados	3	8	6	12	hexaedro o cubo
pentágonos regulares	3	20	12	30	dodecaedro

Como ya hemos anticipado los poliedros platónicos son una de las gamas de figuras preferidas por los escultores matemáticos por su belleza y su sencillez. Lógicamente, para su utilización éstos son transformados, embellecidos, decorados, etc. Un magnífico ejemplo de obra basada en un icosaedro es el que mostramos a la derecha en la figura número 271, un trabajo de **Charles Perry** titulado "Icosaspirale".

Igual que sucede con los sólidos platónicos, **los poliedros truncados**, han sido fuente de inspiración de numerosas esculturas matemáticas. Los casos posibles son infinitos, pero si las caras que inciden en todos y cada uno de los vértices de un poliedro regular se cortan de tal manera, que las secciones planas resultantes sean regulares y congruentes, el resto del sólido es nuevamente un poliedro regular, o un cuerpo semirregular o arquimediano.

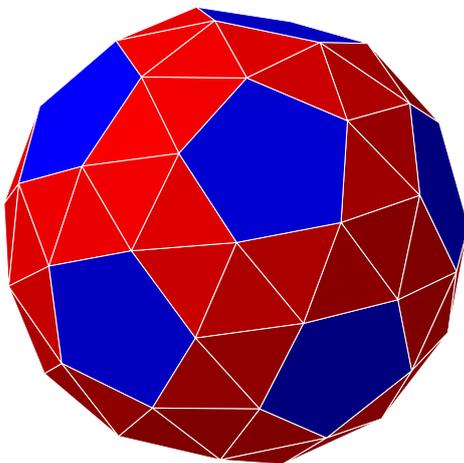


Figura 271: Charles Perry, "Icosaspirale". Tamaño 2,05 m. San Francisco, USA.

Los **poliedros semirregulares o arquimedeanos** fueron históricamente definidos por **Arquímedes**, aunque hemos perdido sus escritos. Todos los sólidos de Arquímedes son poliedros uniformes con caras regulares. Un poliedro con caras poligonales regulares es uniforme cuando existen operaciones de simetría que colocan cualquier vértice sobre cualquier otro vértice y no sobre otro punto del espacio. La heurística común para los estos sólidos es que la sucesión de caras que rodean cada vértice es siempre la misma. Aunque todos los sólidos Arquimedeanos tienen esta propiedad, también la cumple la girobicúpola cuadrangular elongada (sólido de Johnson 37) que no es de Arquímedes. Posteriormente comentaremos brevemente los sólidos de Johnson.

Los poliedros arquimedeanos posibles son exclusivamente los trece siguientes: Tetraedro truncado, Cubo truncado, Octaedro truncado, Cubooctaedro, Pequeño rombo cubooctaedro, Gran rombo cubooctaedro, Cubo simus, Dodecaedro truncado, Icosaedro truncado, Icosidodecaedro, Pequeño rombicosidodecaedro, Gran rombicosidodecaedro y Dodecaedro simus o “chato”. La forma de este último se muestra en la figura 272, debajo a la izquierda. Los nombres que suelen utilizarse para estos sólidos fueron dados por **Johannes Kepler**, el genial físico y astrónomo que era un “enamorado de los poliedros” y aluden a la forma de su obtención. Las figuras regulares, especialmente desde la época clásica han atraído a los artistas y por tanto también las de aquellas que se aproximaban a éstas, como ocurre con las formas semirregulares. Debido a ello, también los poliedros arquimedeanos se han utilizado en el Arte, y en especial en la Escultura Matemática.

Cuando se imagina la figura de un poliedro, se acostumbra a pensar sólo en los poliedros convexos, pero se debe tener presente que también existen los cóncavos. Ello provoca que cuando se hable de los poliedros regulares se piense sólo en los regulares convexos, sin embargo, existen otros cuatro poliedros regulares, no convexos, **los poliedros de Kepler-Poinsot**. Éstos se incluyen en otra clase importante, **los poliedros estrellados**, los cuales comentaremos después debido a su gran importancia en la Escultura Matemática. En las imágenes de la figura 274, página siguiente, se muestra un croquis de cada uno de los poliedros de Kepler-Poinsot. Para profundizar en estas figuras y en concreto en su apasionante clasificación, es interesante el libro de **Gregoria Guillén**, titulado precisamente *Poliedros*, referencia [40]. Éste texto pertenece a una serie muy útil para el estudio práctico de la Geometría, la *Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje (Tomo 15)*.

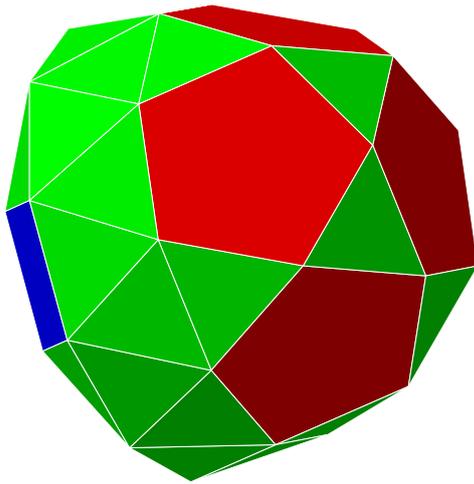


Si aceptamos para decirlo de forma sencilla otra disminución de “regularidad”, después de los Platónicos y de los de Arquímedes, los siguientes poliedros dentro de los convexos son: **los prismas, los antiprismas, las pirámides, las dipirámides y los deltoedros**. La mayoría de estos tipos genéricos resultan muy conocidos, por lo que creemos que no necesitan una descripción detallada. Éstos sólidos, incluso los más sencillos prismas y pirámides son muy utilizados en Escultura Matemática.

Figura 272 (izquierda): Ejemplo de Poliedro Arquimedeano, Dodecaedro Simus.

Tabla 2 (debajo): Características de los cuatro poliedros regulares cóncavos o de Kepler-Poinsot: Denominación, número de caras, vértices, aristas y tipo de polígono de sus caras.

Poliedro	c	v	a	Polígono
Pequeño dodecaedro estrellado	12	12	30	estrella pentagonal
Gran dodecaedro	12	12	30	pentágonos
Gran dodecaedro estrellado	12	20	30	estrella pentagonal
Gran icosaedro	20	12	30	triángulos



Los prismas y antiprismas, son después de los platónicos y de los de Arquímedes, los únicos poliedros uniformes convexos y de caras regulares que nos quedan por comentar. También fueron analizados por **Johannes Kepler**. En general no son regulares, pero hay que tener en cuenta que abarcan a los poliedros anteriores, también los platónicos se incluirían en estas categorías, por ejemplo el cubo es un prisma y el tetraedro una pirámide.

Figura 273 (izquierda): Ejemplo de Poliedro de Johnson, Cupularrotunda pentagonal giroelongada. Sólido de Jonson (J - 47).

El concepto de **prisma** resulta conocido pero podemos recordar el de **antiprisma**. Éste es un poliedro similar al prisma pero en el que la unión entre las bases, en vez de con rectángulos, se efectúa con triángulos. El concepto de pirámide también es muy conocido. Muy relacionado está el de dipirámide, que es la figura formada con una misma pirámide repetida y unidas ambas por la base. El concepto de deltoedro lo aclararemos cuando expliquemos dualidad.

Después de considerar las categorías precedentes, nos queda sólo un número limitado de poliedros convexos con caras regulares. La enumeración de los 92 casos de poliedros diferentes que son posibles fue realizada por **Norman W Jonson**. Debido a ello se denominan, **sólidos de Jonson**. Algunos de estas figuras ya no resultan tan conocidas como lo eran todas las anteriores y además presentan unos nombres casi imposibles de recordar, como por ejemplo la denominación del sólido de Johnson de la figura 273 situada arriba, Cupularrotunda pentagonal giroelongada, sólido de Jonson 37 (J - 47). De hecho como se puede observar, para facilitar la designación de estos sólidos se ha tenido que recurrir a una numeración correlativa.

Antes de continuar explicando tipos de poliedros, creemos preciso recordar **el concepto de dualidad de un poliedro**. El dual de un poliedro se construye reemplazando cada cara por un vértice y cada vértice por una cara. En algunos casos esta relación de dualidad es simétrica. Por ejemplo, el dual de un icosaedro es el dodecaedro, y el dual del dodecaedro es el icosaedro. Existen otros muchos ejemplos interesantes. Casos importantes de aplicación el concepto de dualidad son los siguientes. **Los sólidos de Catalán** son duales de los de Arquímedes, **las dipirámides** son duales de los prismas y por último, los **deltoedros** son duales de los antiprismas. Todos ellos no ya resultan tan conocidos en el Arte como los poliedros regulares, aunque el concepto de dualidad también ha sido utilizado en Escultura Matemática.

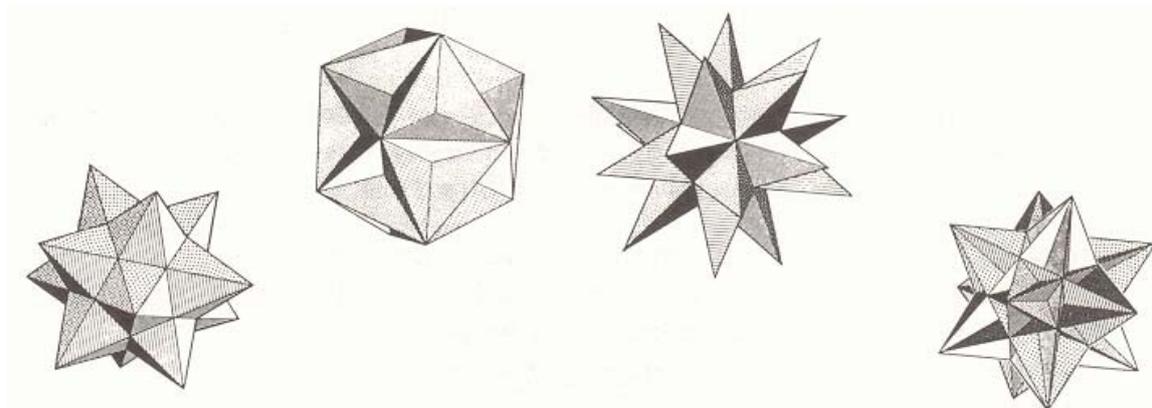


Figura 274 (arriba): Los cuatro sólidos regulares cóncavos o de Kepler-Poinsot: a) Pequeño dodecaedro estrellado; b) Gran dodecaedro; c) Gran dodecaedro estrellado; d) Gran icosaedro.

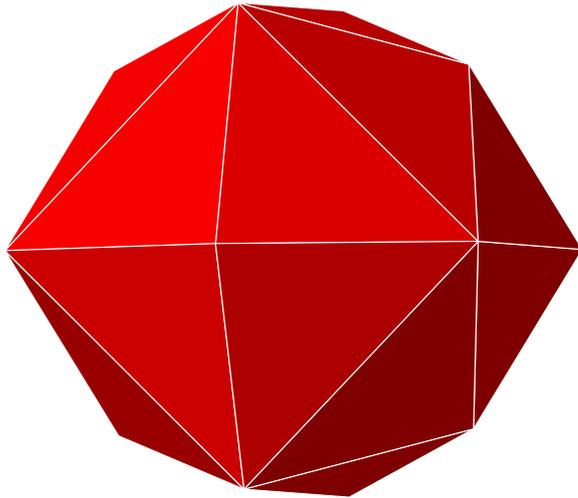


Figura 275 (izquierda): Ejemplo de Poliedro de Catalán, Hexaedro Tetrakis.

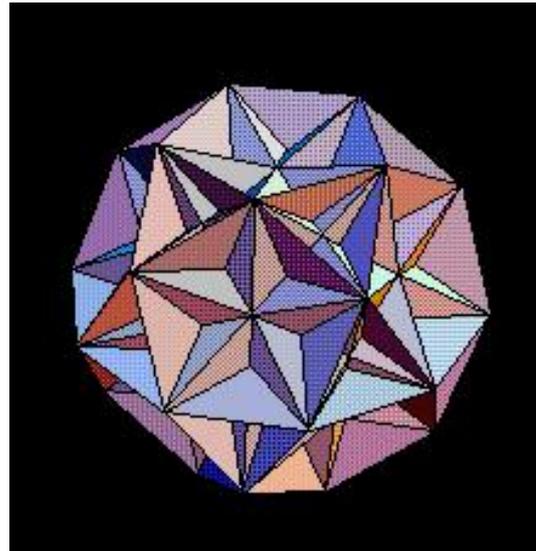


Figura 276 (derecha): Poliedro estrellado obtenido con el programa Mathematica.

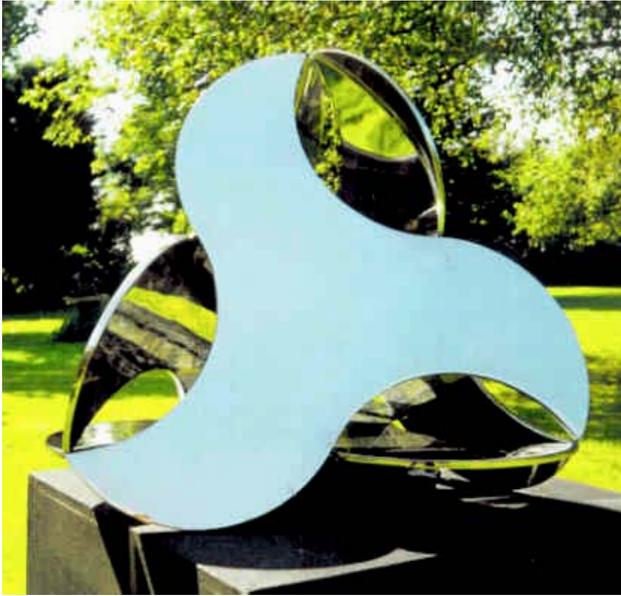
Arriba a la derecha, en la figura número 275, mostramos un sólido de Catalán, el Hexaedro Pentakis. Es el último ejemplo de poliedro obtenido con el programa informático Poly que presentamos. También los programas de matemáticas más clásicos como Matlab y Mathematica, ayudan en el trabajo con estos sólidos y permiten la aplicación de algunas transformaciones. En la figura 276 situada arriba a la izquierda, se observa un ejemplo de poliedro estrellado que en este caso se ha obtenido con el programa Mathematica.

7.1.1.2 Descripción de la Escultura Poliédrica

Las formas de los poliedros han sido y siguen siendo una gran fuente de inspiración para los escultores matemáticos. El diseño de algunas de sus obras es a veces el resultado de efectuar **una o varias transformaciones a la forma de un poliedro**, como sería el deformar sus caras, estrellándolas o redondeándolas, o cualquier otra metamorfosis geométrica que consiga efectos estéticos. Lógicamente, estos escultores para este fin también recurren a dar un acabado a las obras escultóricas que mejore sus cualidades artísticas.

A lo largo de los anteriores capítulos y apartados de nuestra tesis, especialmente en los que se han dedicado específicamente a la Escultura Matemática, ya hemos expuesto algunas obras que claramente se incluirían en el subgrupo de las Poliédricas. Las esculturas de las fotografías anteriores de las figuras: 2, 12, 170, 186, 191, 215 y 216 son ejemplo de ello. A continuación vamos a mostrar algunas obras muy concretas que clasificaremos en este grupo, elaboradas por algunos de los mejores escultores matemáticos para tratar de caracterizar mejor este tipo de arte y ilustrar sus grandes posibilidades.

En la figura número 277 situada en la parte de arriba de la página siguiente, se muestra un ejemplo relacionado con el hecho de efectuar transformaciones a los poliedros. En ella se observa otro trabajo del genial escultor matemático **John Robinson**, que ha realizado obras muy diversas que pertenecen al tipo de la Escultura Poliédrica. Esta sencilla pero muy conceptual Escultura Matemática está basada en la forma geométrica del más simple de los poliedros, el tetraedro. Los triángulos de sus caras han sido sustituidos por un conocido e intrigante motivo nazarí, utilizado en la Alhambra. También posee otros valores estéticos, los colores que adquiere, los diferentes reflejos en función de la iluminación, etc. A partir de la forma de un poliedro y “jugando” con ella, este autor ha creado una preciosa escultura.



Este tipo de escultura Poliédrica en que la forma de los más sencillos de éstos, los platónicos, se modifica para lograr impactantes obras escultóricas, ha sido magistralmente trabajado por **John Robinson**. Precisamente, iniciamos esta tesis mostrando otra de estas obras, la de la figura 2. Esta escultura estaba basada en la forma de un dodecaedro, en el que sus caras planas habían sido convertidas en estrellas de cinco puntas.

Figura 277 (izquierda): John Robinson, “Prometeus Hearth (El Hogar de Prometeo)”. Altura 40 cm. Acero Inoxidable pulido, 1994. Estudio del artista, Inglaterra.

Otro ejemplo muy claro de un fenomenal escultor matemático que ha realizado muchas obras que pertenecen a la escultura poliédrica, es el de **George Hart**. En las fotografías de las figuras anteriores números 249 y 260, hemos presentado dos trabajos suyos. Este escultor con pocos y sencillos tipos de piezas de madera y con simples uniones, consigue construir unas llamativas obras. Este artista matemático ha hecho investigaciones realmente interesantes sobre la Escultura Poliédrica, aunque con la especificidad reiteradamente resaltada que tienen todos los estudios de Escultura Matemática. Particularmente útiles son los dos estudios en los que este artista trata dos tipos concretos de esculturas que ha trabajado. Uno es el de la ponencia: *Sculture from Symetrically Arranged Planar Components*, referencia [37], ya mencionada. En esta comunicación se describe la realización de obras como las que acabamos de describir, mediante el montaje de piezas sencillas. En ella explica la utilización de estos “módulos planos” para realizar poliedros. En cualquier caso como el diseño deseado es un poliedro, las incluimos dentro de este tipo de escultura y no del Modular que incluiremos en la Algebraica y que explicaremos posteriormente.

El otro estudio de George Hart sobre Escultura Poliédrica trata sobre otro tipo de poliedros al que denominó *Zonish Polyhedra*, referencia número [41]. En esta ponencia introduce estos sólidos y explica sus grandes posibilidades para la el diseño de escultura.

En la figura 278 que está situada a la derecha vemos otra escultura de George Hart. Este extraordinario artista, utilizando diversas maderas preciosas de diferentes colores, logra construir una preciosa obra. Esta figura también es interesante desde un punto de vista topológico.

Figura 278: George Hart, “Roads-Untaken, (Carreteras sin Recorer)”. Maderas preciosas duras de diferentes colores como: corazón amarillo, padauk y nogal. Pedestal de metal. Diámetro 44 cm.



Este escultor, **George Hart**, también dispone de una interesante página web, cuya ruta se especifica en las referencias finales, [PW18]. Su título precisamente es *Geometric Sculpture of George W Hart*. Algunas de las palabras del texto de ésta resumen perfectamente las características generales de la Escultura Poliédrica: “Mi trabajo es sobre motivos y relaciones que derivan de los ideales clásicos de equilibrio y simetría. Es matemático y orgánico y sus formas abstractas invitan al espectador a ser partícipe de la belleza de la Geometría”. En la página referida se muestran también unas preciosas fotografías, seleccionadas por este escultor matemático, de muchas de sus obras preferidas. Además ha incluido un software que permite al espectador modificar de forma interactiva el punto de vista la representación de las obras con lo que posibilita su conocimiento en tres dimensiones. En definitiva, ésta es una herramienta muy valiosa para estudiar el trabajo de este gran escultor. Obsérvese en la figura 279 como ejemplo una imagen de esta página web.

En la figura 280, en la página siguiente, se muestra una obra de **Sebastián**, “Puerta del Río Mixcoac” realizada en hierro con esmalte acrílico, material frecuentemente utilizado por este atrayente escultor con trabajos realmente muy diversos. De este autor mejicano ya hemos incluido bastantes ejemplos en diferentes grupos. La escultura que mostramos en la figura del principio de la página siguiente utiliza formas muy sencillas, todas poliédricas, excepto el arco superior de la puerta. Dado esto la clasificamos en este subgrupo, aunque también presenta simetrías.

En nuestro país, aunque no es uno de los que más tradición tiene en la Escultura Poliédrica, también hay algunos escultores que realizan trabajos que se podrían incluir dentro de esta categoría. Si se recorren las calles de nuestras ciudades, se pueden ver obras de este tipo de los anteriores escultores o de algunos de otras procedencias. Son especialmente numerosas en nuestro Campus, el de la Universidad Politécnica de Valencia, donde se exponen algunas interesantes esculturas. En la parte inferior de la página siguiente, mostraremos dos ejemplos. En la figura 281 se encuentra una fotografía de la obra titulada “Obelisco”. Está realizada por otro escultor que tampoco habíamos presentado hasta el momento, **Lorenzo Frechilla**.

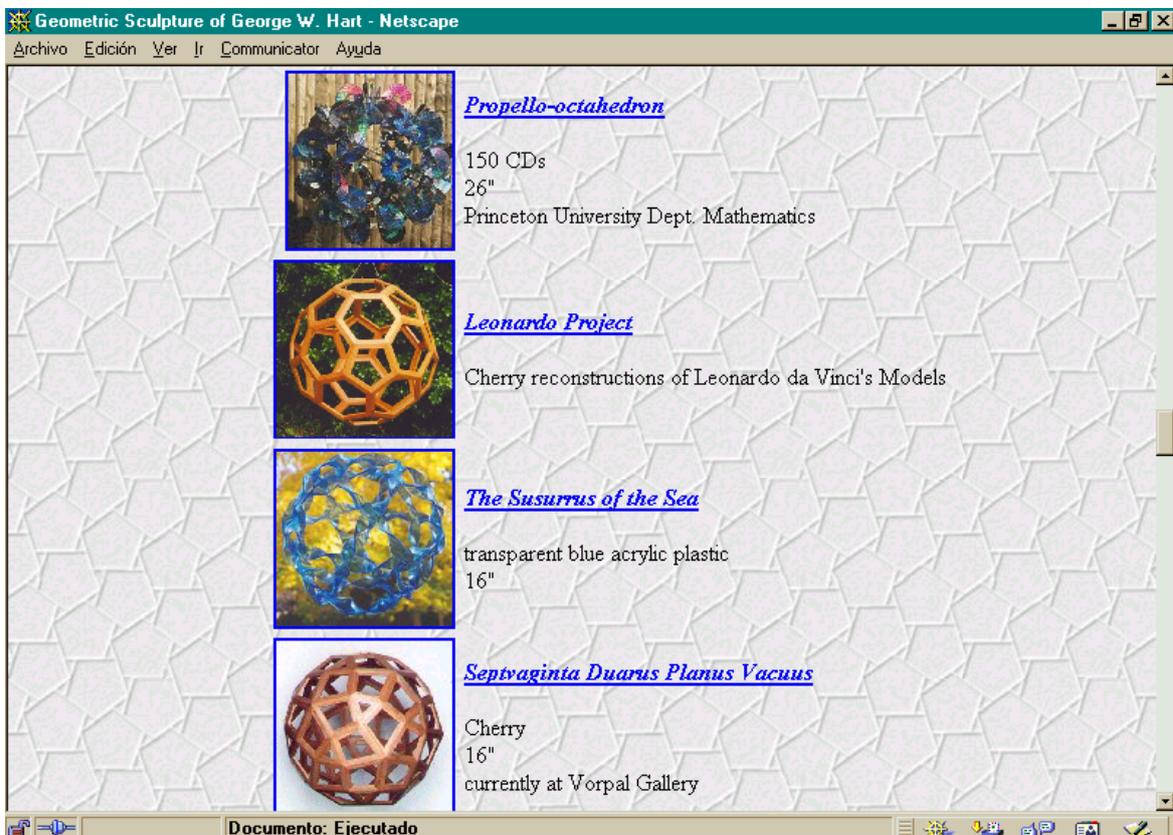


Figura 279 (arriba): Ejemplo página web de George Hart, dedicada a la escultura Poliédrica y titulada: *Geometric Sculpture of George W Hart*.



En esta obra, “Obelisco” con unas formas muy simples de poliedros se construye una sencilla composición. En la figura número 282 se muestra “Escultura Permutacional” de otro escultor español, **Francisco Sobrino**. Está realizada utilizando un único tipo de módulo de chapa cuadrada de acero inoxidable. Es un estupendo trabajo matemático.

En la fotografía de la figura 283 situada en la parte superior de la página siguiente, mostramos una bella obra denominada “American”, del escultor **Tony Smith**. Los trabajos de este autor son una interesante “abstracción”, dirían los críticos de arte, aunque nosotros decimos que son de “concepción matemática”. Esta escultura presenta unas sencillas formas geométricas, simples prismas seccionados, pero la composición que se consigue es realmente muy atractiva.

Figura 280: Sebastian. “Puerta del Río Mixcoac”. Hierro con esmalte acrílico, 1994. Dimensiones: 180 x 80 x 80 cm. Fotografía de Enrique Bostelmann.



Figura 281 (izquierda): Lorenzo Frechilla, “Obelisco”. Acero corten. Tamaño 540 x 60 x 40 cm. Escultura situada en el jardín del Rectorado. Campus de la UPV. 1980; Valencia.

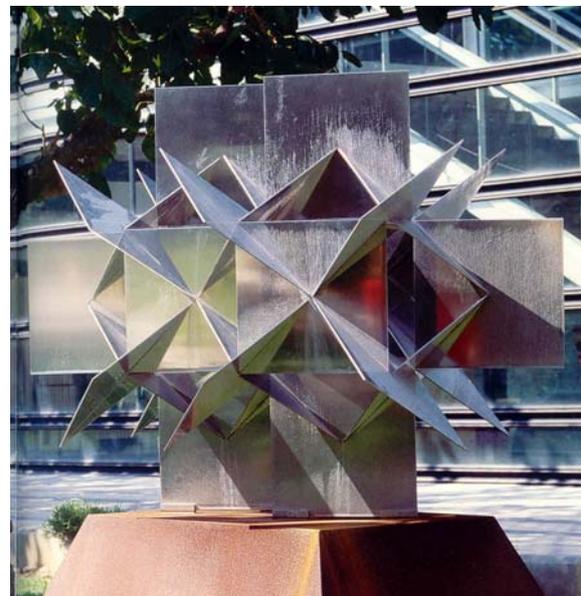
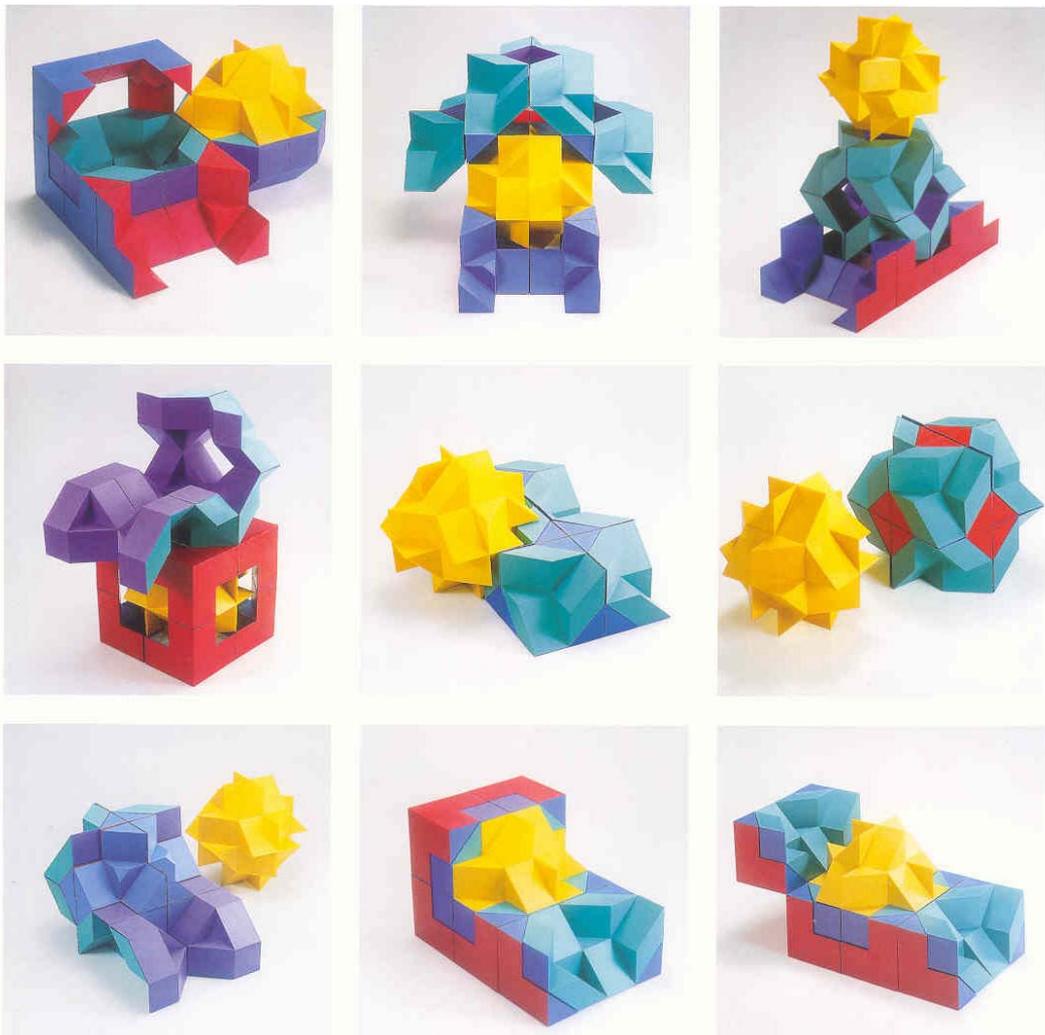


Figura 282 (derecha): Francisco Sobrino, “Escultura Permutacional”. Dimensiones: 250 x 150 x 150 cm. Chapa de acero inoxidable, módulos de 50 x 50 cm. Peana piramidal de 150 cm. Campus de la UPV. 2000; Valencia.



Para presentar el grupo de Escultura Poliédrica ya hemos mostrado el conjunto del escultor **Sebastián** titulado “Leonardo” que nos sirvió, además de para introducir este tipo de arte, para ilustrar su interesante trabajo de investigación escultórica, dedicados a rendir homenaje a artistas como Leonardo, Durero, etc. Debajo, en la figura 284 se muestra otro conjunto “Durero” formado por nueve “**obras transformables**”. Como se ha constatado con estos ejemplos anteriores las posibilidades de los poliedros en Escultura son casi ilimitadas. Entre otros motivos estos sólidos comprenden desde un simple cubo hasta los poliedros irregulares de formas más complejas.

**Figura 283: Tony Smith, “American”.
Situada en el Jardín de Escultura de la
National Gallery of Art, Washington.**



**Figura 284 (arriba): Sebastian. “Durero”. Poliuretano inyectado, 20 x 20 x 20 cm.
Fotografía de Enrique Bostelmann. Méjico D.F.; 1972.**

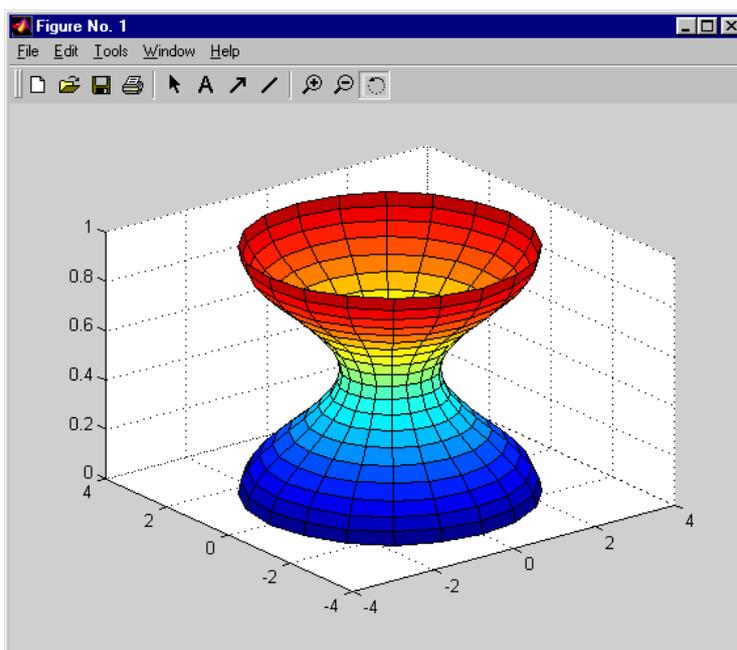
7.1.2 Superficies Matemáticas Curvas

Las Superficies Matemáticas son el siguiente subgrupo, dentro de este grupo principal de Esculturas Geométricas. Este tipo a su vez está subdividido en subgrupos que no son excluyentes. Por ejemplo, una superficie muy utilizada en el Arte Matemático es el paraboloides hiperbólico, llamado frecuentemente “silla de montar”, que es simultáneamente una cuádrica y una superficie reglada. **Los subgrupos en que hemos dividido el grupo de Superficies Matemáticas son los siguientes: Cuádricas, Superficies de Revolución, Superficies Regladas y Otras Superficies.**

Una obra de Escultura Matemática “siempre se podría considerar” formada por uno o varios sólidos matemáticos. Éstos pueden ser más o menos complejos y estar limitados por una o varias superficies. Si todas estas superficies son planas, nos encontramos en el tipo de escultura que hemos llamado Poliédrica. Si algunas de estas superficies no son planas, parecería que el tipo de escultura que las utilizase se podría clasificar en la Geométrica. Aunque existen muchas obras que su forma también recuerda a la de una o varias superficies, esto es, tienen una geometría característica pero en su concepción ha sido determinante una propiedad de un campo de las Matemáticas diferente, que se contempla en otro de los grupos principales de nuestra clasificación. En cada situación, la escultura concreta la tipificaremos por el concepto que destaque. Casos claros de lo anterior son el de las superficies de curvatura mínima y el de las superficies no orientadas.

Conviene recordar muy brevemente y de una forma sencilla el concepto de superficie, para fijar su utilización en Escultura Matemática. El conjunto de puntos del espacio de tres dimensiones cuyas coordenadas cartesianas satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, recibe bajo ciertas condiciones el nombre de superficie. Una condición podría ser por ejemplo que la función $F(x, y, z)$ sea continua en todas sus variables. Dependiendo de las condiciones impuestas resultarán diversos conceptos de superficie.

Las superficies utilizadas por los escultores matemáticos en el diseño de sus obras suelen estar caracterizadas por funciones continuas en todas sus variables. Al ser la escultura un objeto en el espacio de tres dimensiones, en su realización material se encontrará limitada por la realidad física. Esto conlleva la utilización de superficies que no tengan puntos de discontinuidad. Si en el diseño de alguna obra de Escultura matemática se utilizasen funciones que presentan algunos puntos de discontinuidad, en el caso de que la discontinuidad sea de salto infinito, se habrá de limitar, y en el caso de que sea de salto finito, se habrá de aproximar.



Para querer solamente explicar las superficies resulta más fácil utilizar coordenadas cartesianas, pero para diseñar y sobre todo en la fabricación asistida por ordenador de obras de escultura, es mejor manipular otros tipos de coordenadas, las cilíndricas, las esféricas y, especialmente, las paramétricas. Al respecto en el apartado anterior, se puede consultar el estudio correspondiente.

Figura 285 (izquierda): Ejemplo de representación de una superficie de revolución con MATLAB.



En la realización de las esculturas del grupo Superficies Matemáticas más complejas llega a ser casi imprescindible la utilización de informática. Actualmente, la gran mayoría de los artistas matemáticos utilizan programas de diseño gráfico y de matemáticas para poder diseñar y también para estudiar sus esculturas durante la fase de realización. La utilización de coordenadas que no sean cartesianas es especialmente interesante si se va a aplicar los programas informáticos de matemáticas más conocidos como: Mathematica, Matlab, e incluso hasta los más sencillos como puede ser Derive.

En la figura 285 al final de la página anterior, hemos mostrado una imagen de una superficie de revolución, que hemos definido como uno de los subgrupos de nuestra clasificación. Esta representación ha sido realizada con el programa MATLAB.

Figura 286 (izquierda): Brent Collins Gallery, third, Early Orientable Surfaces, picture 4; Galería, Tercera, Primeras Superficies Orientables, imagen 4). Fotografía de Phyllip Geller.

Para profundizar en este tema se puede consultar alguno de los libros de informática matemática de los que soy coautor, junto con otros profesores de la UPV. Para estudiar el aspecto concreto de la visualización de superficies resulta útil el libro *Fundamentos Matemáticos para la Ingeniería con MATLAB*, referencia [42]. Este subgrupo de Superficies Matemáticas también es de los que más obras incluye. **La gama de superficies posibles es infinita.** Además hay que tener en cuenta que varias pueden ser combinadas en una misma obra escultórica. En la exposición de obras de los anteriores apartados, ya hemos visto bastantes trabajos que claramente se incluirían en este tipo, como los de las figuras números: 4, 161, 163, 171, 172, 173, 174, 179, 188, 195, 198, 200, 201, 204, 206, 212, 213, 218, 220, 226, 227, 241, 250, 253, 256 y 261. **Observando el número de estas esculturas se constata la gran variedad de obras de este grupo**, por lo que creemos muy interesante establecer dentro subgrupos con lo que mejoraremos la clasificación.

De acuerdo con la filosofía de nuestra tesis y para describir los subgrupos de este tipo de escultura, en los siguientes apartados vamos a mostrar obras concretas que clasificaremos en ellos. Nuevamente la gran mayoría de estos trabajos estarán elaborados por algunos de los mejores escultores matemáticos y nos servirán para tratar de caracterizar mejor este tipo de escultura e ilustrar sus grandes posibilidades.

Figura 287 (derecha): Sebastián, “Torus Isotópico”. Hierro con esmalte acrílico. Tamaño 48 x 48 x 20 cm. Fotografía de Enrique Bostelmann. Méjico D.F.; 2002.



En el principio de la página anterior mostramos la obra de la figura número 286, elaborada por uno de los principales escultores matemáticos, **Brent Collins**. La última etapa de este autor es un claro ejemplo de la aplicación de los programas informáticos al diseño de Escultura. Esta obra precisamente se inscribe en sus estudios sobre superficies. También en esta página anterior, mostramos la obra de la figura 287, realizada por **Sebastián**, y titulada “Torus Isotópico”.

El toro es una de las superficies matemáticas que más atrae a los escultores, y era justamente la utilizada por **Javier Carvajal**, autor que utilizamos como modelo de concepción matemática de la escultura, cuando la tratamos en el apartado correspondiente. En la figura 288, debajo, incluimos uno de sus trabajos “Despojos”, que como su nombre indica son los desechos de su investigación escultórica con la geometría de superficies matemáticas. En la realización de sus obras quedaron restos que adoptan unas interesantes formas, como se puede ver en las fotografías inferiores. A continuación, describiremos los subgrupos en que hemos dividido el de Superficies Matemáticas Curvas, empezando por el de las Cuádricas, unas superficies francamente importantes en casi todas las ciencias y también en el Arte.



Figura 288 (arriba): Javier Carvajal, “Despojos”. Pertenecientes a la serie de esculturas, $\pi r^2 a$. Realizadas entre 1991 y 1994. España.

7.1.2.1 Cuádricas

Estas superficies siempre han atraído a todos los artistas y la aparición de algunas de ellas, como la esfera, particularización del elipsoide, e incluso éste mismo ha sido frecuente en el Arte. Lo mismo que las cónicas, curvas que se obtienen al seccionar una cuádrlica, han siempre sido un ideal de los geómetras y matemáticos. **En Escultura y sobre todo a partir de la aparición en el siglo pasado de la Matemática, estos sólidos han sido comúnmente utilizados**, especialmente algunos como los hiperboloides y los paraboloides hiperbólicos.

Conviene recordar de forma breve concepto de cuádrlica. Tal como ya dijimos el conjunto de puntos del espacio de tres dimensiones, cuyas coordenadas cartesianas satisfacen una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, y que recibe bajo ciertas condiciones el nombre de superficie. Si la condición que se pide es que la expresión anterior sea una ecuación algebraica de grado dos (como máximo), en las tres variables, ésta nos define una función cuadrática o cuádrlica. Estas superficies pueden ser estudiadas, matricialmente o algebraicamente, para lograr clasificar todos sus tipos. Se establecen dos grupos principales.

Las cuádrlicas llamadas **no degeneradas o propias** son aquellas en las que el determinante de la matriz de los coeficientes de la forma cuadrática es distinto de cero. Éstas son las que con una utilización más restrictiva del término son propiamente denominadas cuádrlicas. Los casos posibles son los siguientes:

- **Elipsoide.** La esfera es un caso particular, la medida de todos sus semiejes es igual.
- **Hiperboloide.** Existen de dos tipos, de una o de dos hojas.
- **Paraboloide.** También existen dos tipos, el elíptico y el hiperbólico.



Figura 289 (arriba): Santiago Calatrava. Cubierta con paraboloides hiperbólicos del restaurante del Oceanográfico. Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia.

También existen otros tipos de casos en que los valores posibles de los coeficientes de la forma cuadrática producen soluciones imaginarias, por lo que pueden no existir como figuras en el espacio real de tres dimensiones. También pueden resultar planos, reales o imaginarios. Todos los tipos de cuádricas reseñados en la lista anterior, han sido frecuentemente utilizados en el Arte y en Escultura Matemática, aunque las características de algunos de ellos como el cono, el paraboloides hiperbólico, o el hiperboloide de una hoja, de alguna forma las hacen especialmente apropiadas para esta faceta del Arte.

La cuádrica que probablemente ha sido la más utilizada en el Arte Matemático es el paraboloides hiperbólico, que es simultáneamente una cuádrica y una superficie reglada, como es conocido. El inconveniente que esto nos plantea es que en nuestra clasificación de la Escultura Matemática existen ambos subgrupos como tipos diferenciados. Cuando ocurra esto, como en el caso de esta figura 289; esto es, que exista esta dualidad, intentaremos en cada caso concreto de obra clasificarla dentro de uno de los subgrupos.

El primer trabajo que escogemos de ejemplo no es propiamente una escultura pero la cubierta del restaurante del Oceanográfico de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, lo mismo que en general ocurre con todo el amplio trabajo de este excepcional arquitecto, ingeniero y escultor, **Santiago Calatrava**, presenta unas características innegables escultóricas. Esta diseñada utilizando formas que atraen a este genial autor los paraboloides hiperbólicos. Creemos que es un orgullo que este completo artista haya estudiado en nuestra universidad, la Politécnica de Valencia.

La siguiente obra de este tipo que mostramos, a la derecha en la figura 290, es un ejemplo de un escultor **Aarón Fein**, del que todavía no habíamos presentado ningún trabajo. Lo ha denominado “Transformer, (Transformador)”. Lógicamente en algunas esculturas como la de esta figura, los recursos estéticos del artista hacen que la forma de la superficie matemática en que se ha basado, no sea tan evidente como en otras.

Figura 290 (derecha): Aarón Fein. “Transformer, (Transformador)”, detalle.



Las cuádricas denominadas **degeneradas o impropias** son aquellas en que el determinante de los coeficientes de la forma resulta ser igual a cero:

- **Cono.** En el caso general las secciones perpendiculares al eje de la figura serán elipses y se llamará cono elíptico. En particular cuando éstas sean circunferencias, circular.
- **Cilindro.** Los tipos posibles son tres: parabólico, elíptico y hiperbólico.

7.1.2.2 *Superficies de Revolución*

Estas superficies, como su nombre indica, se obtienen al girar una curva alrededor de un eje cualquiera. Si el giro es de 360 grados obtendremos un sólido de revolución, limitado por la superficie generada. Sólidos de rotación bien conocidos son: la esfera, el cono de revolución, el cilindro de revolución, el paraboloides de revolución, el hiperboloides de revolución de una sola hoja, el hiperboloides de revolución de dos hojas, el elipsoide de revolución, el toro, la pseudoesfera y la catenoide. En la anterior figura 285 hemos mostrado un sencillo ejemplo, una imagen de la representación de una superficie de revolución realizada con el programa Matlab.

Como resulta conocido algunos de ellos, el paraboloides y el hiperboloides de revolución, además de cuádricas, también son superficies de revolución. Esto es, corresponden a soluciones particulares de las ecuaciones que definen a ambos grupos. Otros de estos casos, como el cono de revolución, el cilindro de revolución, etc., además son superficies regladas, por lo que pertenecerán a otro tipo de superficies que también hemos utilizado en nuestra clasificación para la definición de un grupo, el siguiente, que explicaremos inmediatamente después de éste.

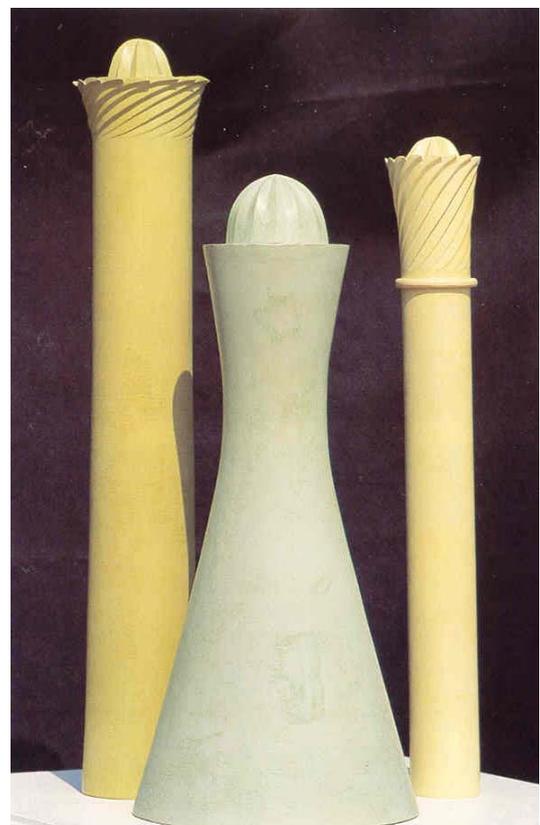
Las superficies de revolución también **han sido utilizadas con una gran profusión en el Arte**. La casi totalidad de modelos de columnas como es conocido presentan la forma de este tipo de superficie. No sólo lo han sido en las denominadas artes mayores sino también en las artesanías y en las artes decorativas como por ejemplo, en la cerámica realizada con torno, en la fabricación de cristal y en muchas otras actividades.

En la **Escultura Matemática** las formas de las superficies de revolución han inspirado a algunos autores en la realización de alguna obra concreta, como comprobaremos en las fotografías de los siguientes ejemplos. La primera escultura que presentamos nos sirve de muestra de obra en la que también se ha utilizado la forma de diversas superficies matemáticas que caracterizan a subgrupos diferentes de nuestra clasificación. Nos referimos al hiperboloides de una hoja que se utiliza en forma central de la figura 291 situada debajo.

Sobre el hiperboloides de una hoja ya hemos expuesto que, como ocurre en este caso, cuando presenta sección circular, es una superficie matemática de revolución, también es reglada y además cónica; todos ellos, grupos diferenciados en la clasificación de la Escultura Matemática. A pesar de todas las simultaneidades que presenta esta forma, decidimos clasificar esta escultura de la izquierda de **Javier Carvajal** en este subgrupo, Superficies de Revolución.

La decisión de incluir la obra de la figura número 291 en el presente subgrupo, es debida a varios factores. En primer lugar la ha titulado "Hipérbola", y además pertenece a su serie de escultura, $\pi r^2 a$, es decir, la caracterizada por la fórmula del volumen de un cilindro, el cual es un típico ejemplo de superficie de revolución.

Figura 291 (derecha): Javier Carvajal, "Hipérbola". Perteneciente a la serie de esculturas, $\pi r^2 a$. Realizadas entre los años 1991 y 1994. España.





En cualquier caso, creemos que la característica matemática más impactante de esta escultura de la figura 291 de la página anterior es que todas las formas que aparecen están basadas en superficies de revolución, incluso la parte de arriba de las columnas y las figuras colocadas encima, aunque en este último caso además se les ha añadido algunas transformaciones.

Otro ejemplo de la aplicación de estas formas a la Escultura es la simplificación de las figuras de una pareja humana en sólo dos superficies de revolución, que ha efectuado la autora española **Carmen Grau** en el conjunto escultórico que precisamente ha denominado, “Pareja”. Podemos observar esta obra que está situada en el Campus de nuestra universidad, la **Universidad Politécnica de Valencia**, en la figura 292 a la izquierda.

Figura 292(Izquierda): Carmen Grau, “Pareja”. Tamaño 285 x 150 m. Año 2000, Campus de la UPV, Valencia.

7.1.2.3 Superficies Regladas

Estas superficies, en inglés Ruled surfaces, **son las generadas por una familia de rectas**. Un caso trivial sería el plano. Entre las superficies regladas de segundo orden las más conocidas son los cilindros, parabólico, elíptico y el hiperbólico; el cono, el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico. A pesar de que sus principales ejemplos también se incluyen en los subgrupos anteriores pertenecientes al grupo de Superficies Matemáticas, hemos decidido definirlo como un tipo independiente dentro de nuestra clasificación de la Escultura Matemática. Esto se ha debido a que habrá determinados trabajos en los que el autor habrá resaltado la “generación” de la forma de su escultura con rectas y éstas serán las que incluyamos en este grupo. Un ejemplo de esto es la obra de la figura 293, realizada por el escultor matemático **Charles Perry** y titulada “Laberinto Hiperbólico”. De este tipo también son sus obras de las figuras 13, 218 y 261.

Una de las figuras utilizadas con **gran asiduidad en la Escultura Matemática, es la del paraboloides hiperbólico**. Otra obra francamente interesante con esta forma es la de la página siguiente, figura número 294. Como se observará no incluímos este trabajo en el subgrupo de Cuádricas, sino en Superficies Regladas.

Figura 293 (derecha): Charles Perry, “Hyperbolic Maze (Laberinto Hiperbólico)”. Metal soldado.





Figura 294 (arriba): Andreu Alfaro (detalle). Paraboloides hiperbólico, una superficie reglada. Aluminio. Avenida de Aragón Valencia, España.

El autor de la escultura de la figura número 294 es **Andréu Alfaro** y, lo mismo que algunas de las obras que anteriormente hemos mostrado, está ubicada en una plaza de nuestra ciudad, Valencia. La forma que este escultor utiliza en la composición es la de una superficie reglada, el paraboloides hiperbólico. Éste ha sido formado de una forma muy sencilla con delgadas barras de metal colocadas adecuadamente para lograr esta figura. Las obras construidas de esta forma nos producen la “sensación visual” de una superficie continua, que les dota de un interesante contenido matemático.

Otra figura utilizada con gran asiduidad en el Arte es el cilindro, por lo tanto nos interesa recordar los conceptos matemáticos relacionados con él. En primer lugar, el de **superficie cilíndrica**. Si una recta, la generatriz, se mueve en el espacio sin cambiar su dirección recorriendo una curva (llamada curva de guía), describe una superficie cilíndrica. Un cilindro es un sólido limitado por una superficie cilíndrica, cuya guía es una curva cerrada y por dos planos que son paralelos entre sí pero no paralelos a la recta generatriz.

Si el ángulo que forma la superficie cilíndrica con los planos de las bases en cada punto del canto (también llamado arista aunque no sea recto) de la figura es igual a 90° , se dice que el cilindro es recto, si no, que el cilindro es oblicuo. De acuerdo con la forma de la base tenemos diferentes tipos de cilindros. En particular, si la base es un círculo decimos que el sólido es un cilindro circular. Un cilindro circular recto se denomina cilindro de revolución. Si pensamos que el cilindro está hecho de un material sólido, y en él taladramos un cilindro más pequeño de modo tal que las bases de ambos cilindros sean concéntricas, obtenemos un cilindro hueco. Estas formas son muy utilizadas en la técnica y también en el Arte y en concreto en la Escultura.

De nuevo en los cilindros se produce su pertenencia simultánea a varios tipos de la clasificación de las superficies. Las cilíndricas, son un caso particular de las superficies regladas y también, como ya hemos visto, son cuádricas degeneradas. Incluso el cilindro circular además es una superficie de revolución. A pesar de todas estas coincidencias anteriores, trataremos de aclarar mediante ejemplos cuando una obra se incluirá en el este subgrupo de la clasificación de la Escultura Matemática.

Figura 295 (derecha): Charles Perry, “Ribbet Mobius Maze, (Laberinto de Moebius con Cintas)”. Acero inoxidable; 1998. Altura 2,90 m. Falls Church, USA.



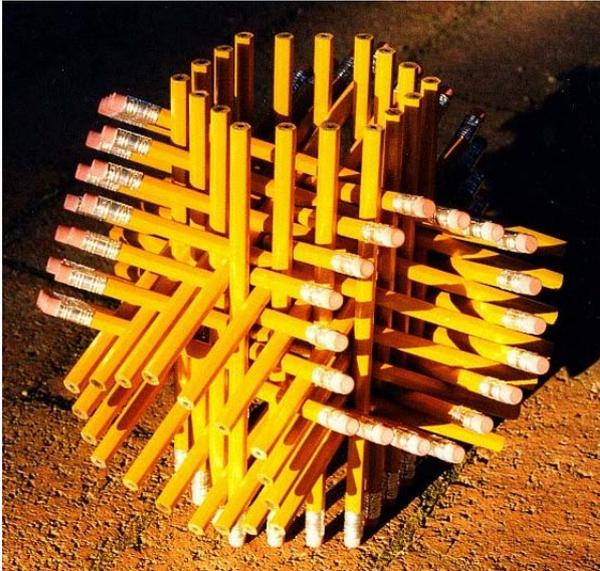


Figura 296 (arriba): George Hart, “72 pencils (72 lápices)”. Tamaño aproximado 21 cm.

Del excepcional escultor **Charles Perry** presentaremos otra de sus obras que muy claramente se clasificaría en el presente subgrupo, la de la figura 295 que está situada en la página anterior.

Por último vamos a mostrar un ejemplo no tan claro, el de la figura 296 a la izquierda una obra de **George Hart**. Aunque en este caso las superficies sólo se insinúan, creemos que se clasificará en el de Superficies Regladas. Este escultor posee una gran imaginación y con 72 lápices forma una “especie” de cilindros con los que construye esta obra, en que resalta la “generación” de las formas con rectas. Además este tipo de esculturas permiten “enseñar matemáticas”, ya que muestran de una forma muy fácil cómo construir superficies y sus intersecciones.

7.1.2.4 Otras Superficies

Definimos este tipo de la clasificación con una caracterización tan genérica como Otras Superficies para incluir aquellas esculturas, que aunque presentan un claro uso de estas formas, no pertenecen a ninguno de los tipos de superficies específicos que ya hemos analizado en nuestro estudio. En este subgrupo se clasificarán por tanto, desde trabajos que tengan formas tan sencillas como la de un plano, algunos de los trabajos minimalistas del escultor **Richard Serra**, hasta otras obras que pueden adquirir formas curvas realmente complicadas, como podrían ser las formadas por superficies en las que en su definición se utilizan conceptos matemáticos muy complejos. En la figura 297, se expone una fotografía de su exhibición en el Museo Guggenheim de Bilbao.



Figura 297 (arriba): Richard Serra. Conjunto de obras expuestas en su exhibición en el Museo Guggenheim de Bilbao.

Las obras que incluía en su exposición del **Museo Guggenheim de Bilbao** eran todas ellas de formas geométricas realmente muy sencillas, desde simplemente un plano a elipses, troncos de cono, etc. Una de sus obras más famosa “Snake”, en el centro de la imagen anterior, está basada en la ecuación de un polinomio de tercer grado. Otras imágenes de los trabajos de este autor se hallan en el apartado que incluye a los minimalistas y que hemos expuesto anteriormente. En Serra la sencillez de la geometría de sus trabajos escultóricos es alterada y muy sabiamente complementada con otros valores artísticos, como pueden ser la textura, los colores, el acabado, la iluminación, etc. Esto es una circunstancia general en la mayoría de las obras escultóricas y más concretamente en las que estudiamos en la tesis, las de Escultura Matemática. También a la estética de estos trabajos contribuye lógicamente, cualquier otro valor escultórico que pueda imaginar el artista.

En el anterior capítulo dedicado a la escultura del siglo XX, y también sobre todo en los apartados de esta tesis consagrados a la Escultura Matemática, ya hemos expuesto algunas obras que claramente se incluirían en este grupo de Otras Superficies. **Movimientos artísticos como el Cubismo, el Surrealismo, la corriente Figurativa, el Neoplasticismo etc., realizaron este tipo de escultura.** Estos estilos revolucionaron los principios escultóricos vigentes hasta aquel momento, y tenían como una de sus principales características la de geometrizar las formas.

Ejemplos más actuales resultan ser las figuras 6 y 9, situadas en el principio de la tesis. En estas dos obras de **Nasio Bayarri**, situadas en el Campus de nuestra universidad, ya resaltamos su realización con sólidos muy sencillos como prismas y cilindros, básicamente. En los jardines de nuestra universidad también se encuentran otras esculturas que se incluirían en este grupo. Por ejemplo la figura número 298 realizada por **Gerardo Rueda**, con sólidos muy sencillos como prismas cilindros y otras formas casi planas.



Este es también el caso de varias obras del escultor mejicano **Sebastián**. Sus geometrías precisamente nos han servido como ejemplo de diseños con **conceptualización matemática de la Escultura**. A este tenor y con frecuencia utiliza sólidos sencillos: cubo, cilindro, cono, esfera, prismas y algunos otros. Por ejemplo las de las figuras 266 y 267.

Otras esculturas de otros autores que se incluirían en este subgrupo de la clasificación, Otras Superficies, son las de figuras números: 179, 184, 188, 189, 190, 195, 198, 201, 204, 212, 220, 227, 240, 241, 250, 253, 254, 256 y 259.

Como se puede observar, no nos resulta difícil encontrar ejemplos, ya que siempre hay esculturas en las que el autor ha utilizado simultáneamente las formas de varias superficies, o las de algunas que no entran en nuestra clasificación.

Figura 298 (izquierda): Gerardo Rueda, “Otoño”. Dimensiones: 350 x 200 x 200 cm. Acero corten y bronce; 1992. Situada en el jardín de Arquitectura, Campus de la UPV, Valencia.



Los anteriores tipos, que hemos incluido en el grupo de superficies de la clasificación, son tan específicos que aunque ampliáramos de forma muy significativa los subgrupos que contemplamos en ella, siempre quedarían obras escultóricas con tipos de superficies matemáticas sin grupo concreto.

Un claro ejemplo de este tipo de escultura que incluiremos en Otras Superficies es el de la figura 299, cuya fotografía está situada a la derecha. Un trabajo realmente curioso de **Brent Collins**. Esta obra pertenece a la serie que ha denominado “Primeros motivos de espirales”. En su página web cuya ruta se puede consultar en las referencias finales, [PW3], se muestran otros ejemplos diversos que también se clasificarían en este subgrupo.

Figura 299 (derecha): Brent Collins. Gallery first, Early Spyral Motifs, picture 7; (Galería Primera, Primeros motivos de espirales, imagen 7). Fotografía de Phyllip Geller.

En el tipo Otras Superficies también se incluirá a las esculturas en las que en su diseño se haya utilizado formas de ecuaciones de superficies muy diversas y que no están contempladas en los grupos específicos anteriores. Ejemplo de ello son aquellas obras escultóricas en que se ha utilizado superficies basadas en **ecuaciones matemáticas de tipo trascendente, como podrían ser las trigonométricas, las exponenciales, las irracionales, etc.**

Los relieves conceptualmente matemáticos son un tipo de obras con una naturaleza realmente diferente a la mayoría de las anteriores, que suelen pertenecer a lo que en Escultura se denomina “bulto redondo” por lo que se incluirán en el grupo de Otras Superficies. Un ejemplo de este tipo de escultura era él de la figura 256, una obra de Brent Collins mostrada en el apartado anterior en que se estudiaba los relieves de forma breve.

En la figura 300, que está situada a la derecha, mostramos otro de estos relieves matemáticos realizado por Brent Collins e incluido en la serie de obras que ha llamado “Ocurrencias: Relieves en piedra de hace 25 años”.

Otro escultor no tan conocido en estos ambientes, y que también realiza trabajos matemáticos, es **Elias Wakan**. Este autor ha elaborado diversos relieves de tipo matemático algunos de los cuales se pueden observar en la fotografía de la figura 301, página siguiente, en la que se muestra una exposición suya.

En la anterior referencia [26], *Mathematical Sculpture*, escrita por el escultor e investigador, **Charles Perry**, relata algunas de sus realizaciones en este tipo de escultura, Otras Superficies.



Figura 300: Brent Collins. Gallery twelve, picture 1, (Galería doce, imagen 1). Afterthought: Stone reliefs from twenty-five years ago, (Ocurrencias: Relieves en piedra de hace 25 años). Fotografía de Phyllip Geller.



Figura 301: Fotografía de una exposición de Elias Wakan en la que se observan diferentes esculturas geométricas y algunos relieves matemáticos.

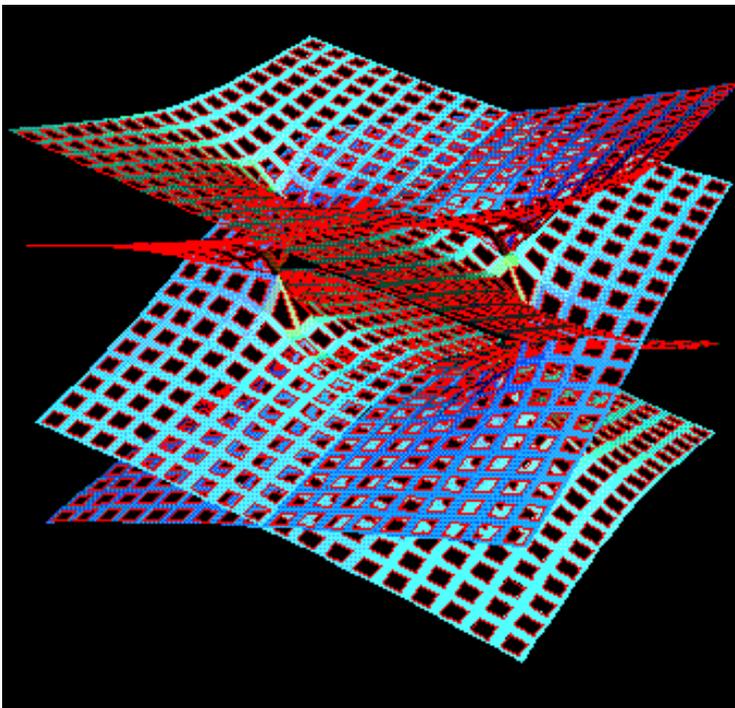


Figura 302 (arriba): Superficie de Riemann I, $(z^2-1)^{1/4}$. Imagen incluida en la ayuda del programa Mathematica.

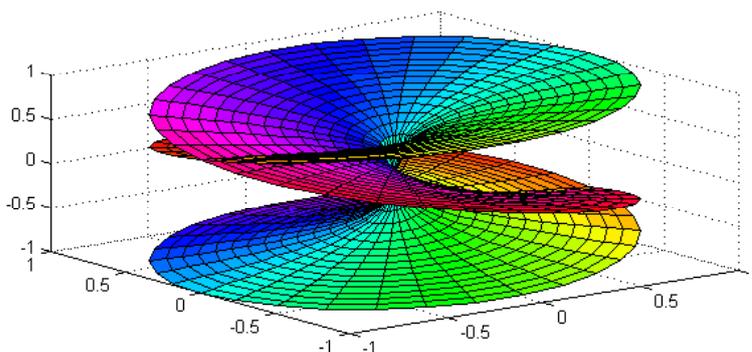


Figura 303 (izquierda): Superficie de Riemann, $(z)^{1/3}$, raíces cúbicas de un complejo. Imagen incluida en una demo de ayuda del programa Matlab.

De una forma general en la Escultura Matemática que utiliza superficies y por tanto también en la de este subgrupo, **resultan muy útiles los programas matemáticos**. Al respecto se puede consultar una ponencia muy interesante la de la anterior referencia [28].

Este texto fue escrito por uno de los mejores expertos en este campo, el profesor de la universidad de Berkeley **Carlo Sequin**, matemático, escultor e informático. En él este experto nos describe algunas posibles utilidades de la Informática en Escultura Matemática y también muestra algunas obras escultóricas que se clasificarán en este subgrupo.

En este subgrupo de la clasificación, tan diverso en su composición, Otras Superficies, también incluiremos aquellas obras escultóricas en las que en su concepción se haya utilizado las **superficies obtenidas a partir de la representación de funciones que se han definido en el campo complejo**.

Ilustramos las posibles aplicaciones de este campo de las Matemática con las figuras número 302 y 303, situadas a la izquierda y debajo. En la primera de ellas se visualiza la **superficie de Riemann I**, cuya expresión es $(z^2-1)^{1/4}$. Esta imagen está incluida en la ayuda de Mathematica.

En la segunda de estas imágenes la de figura 303, se observa otro ejemplo de superficie de Riemann, en este caso una de expresión muy sencilla, $(z)^{1/3}$, las raíces cúbicas de un complejo. Esta imagen está incluida en una de las demos de ayuda del programa Matlab. Estas imágenes de las dos últimas figuras de la página anterior creemos que poseen una estética que las hace válidas para su utilización en la Escultura Matemática y aventuramos que su empleo se extenderá. También nos sirven para apoyar el consabido beneficio del uso de Matlab, Mathematica, etc.; esto es, de los más conocidos de los **programas informáticos matemáticos** en la Escultura. Posteriormente, veremos algunas obras que se han diseñado con cálculos en matemática compleja pero se clasificarán en otro de los grupos de la escultura, topológica o algebraica, ya que predominan estas características.

Por último, y antes de finalizar la descripción de la escultura diseñada con geometrías clásicas, vamos a estudiar dos interesantes obras de **Richard Serra**, probablemente uno de los artistas perteneciente a las tendencias minimalistas y que más ha destacado internacionalmente en la segunda mitad del siglo XX. En todo el trabajo de este autor hay un juego constante con los “espacios” en que divide el local en el que expone. En la figura 304, debajo, mostramos una de estas obras, la titulada “Snake (Serpiente)” que se exhibe en el **Museo Guggenheim de Bilbao**. Ya presentamos su obra y esta exposición en la figura número 198, en el anterior capítulo dedicado a la Escultura del siglo XX, en él que estudiamos este movimiento. Estas obras nos servirán para explicar la utilización del programa, Mathematica, en la Escultura Matemática de este grupo de la clasificación, Otras Superficies y también como ejemplo de escultura basada la utilización en las superficies paramétricas. En las siguientes páginas, en las figuras 305 y 306, mostramos la otra obra desde dos posiciones diferentes.



Figura 304 (arriba): Richard Serra, “Snake, (Serpiente)”. Acero; 1996. Museo Guggenheim de Bilbao.

Nos dice este autor: “En la mayoría de las obras anteriores a “Torsiones elípticas” (la otra obra que nos referimos), yo conformaba el espacio entre el material que estaba manipulando, y me centraba en la medida y colocación de la obra, en relación con un contexto dado. En estas obras por el contrario, empecé con el vacío, es decir, empecé con el espacio, empecé de dentro hacia fuera, no de fuera hacia dentro, para poder encontrar la piel”.

El diseño de las piezas que el artista llama “receptáculos”, observar las figuras 305 y 306 situadas en las páginas siguientes, está basado en dos elipses perfectas e idénticas que se solapan en un ángulo. El acero se curva para actuar como una piel que encierra los vacíos elípticos y que gira a medida que va ascendiendo desde la elipse inferior a la superior. Los planos curvos del acero se inclinan hacia adentro y hacia afuera en un continuo, creando una forma no vista antes en la Arquitectura, ni en la Escultura. Serra concibió en parte esta serie de escultura a raíz de su visita en Roma a San Carlo alle Quattro Fontane de Borromini.

La cúpula elíptica de esta iglesia romana de Borromini asciende desde el espacio central de la iglesia como un cilindro oval. Serra se vio impulsado a explorar cómo esta forma podría doblarse hacia adentro sobre sí misma. Para resolver el problema el artista y un ayudante hicieron maquetas, utilizando dos elipses de madera pequeñas unidas mediante una clavija que a continuación envolvieron en una única plancha de plomo. Utilizando los mismos principios con un programa de ordenador llamado CATIA, diseñado originalmente para la industria aeroespacial, pudo realizar dibujos de línea continua del volumen y determinar el ángulo de la curva de cada plancha de acero curvada en “S”, necesario para las obras reales, que pesan aproximadamente 20 toneladas cada una y miden hasta 4,1 metros de alto. (Cada elipse tiene de dos a tres planchas).

Tras una larga búsqueda, **Richard Serra** encontró dos acerías con capacidad para fabricar estas obras tan complejas. Tres de las elipses ahora instaladas se fabricaron en el astillero y acería de Beth Ship en Maryland, EE.UU. y cinco en Alemania en la Pickhan Umformtechnik GmbH en Siegen. Como puede verse por las distintas pátinas del acero, aceitó algunas de las obras, aunque la mayoría se dejaron oxidar. Estas esculturas se adaptan perfectamente a la galería 104 del Museo Guggenheim Bilbao, diseñada por el conocidísimo arquitecto, Frank Gehry utilizando el mismo programa CATIA que Serra utilizaría después. Las obras “Torsiones Elípticas” se muestran junto con “Serpiente”, que el artista hizo específicamente para este Museo.

Esta última “Serpiente”, véase la figura 304 de la página anterior, está formada por tres curvas serpenteantes de acero y compuesta por seis secciones (dos por curva). Tiene en total 31,65 metros de largo, 4 metros de alto y más de 6,8 metros de ancho, como se percibe un gran tamaño. La sensación de movimiento e inestabilidad que transmiten los sinuosos e inclinados pasillos se refleja y magnifica en estas torsiones elípticas, que continúan el interés de Serra por las formas curvilíneas, pero con una torsión añadida. En esta escultura “Serpiente”, cada plancha de acero se inclina en una determinada dirección; en torsiones elípticas, una plancha puede ser tanto cóncava como convexa. En realidad, no existe en la estructura ninguna línea vertical perceptible. Estas nuevas formas parecen desafiar la gravedad y la lógica, haciendo que el acero sólido parezca tan maleable como el fieltro. Cambiando inesperadamente a medida que el espectador se mueve por dentro y fuera de ellas, estas esculturas crean experiencias sorprendentes de espacio y equilibrio provocando una sensación vertiginosa de acero sólido y espacio en movimiento.



Figura 305 (arriba): Richard Serra, “Torqued Ellipses, (Torsiones Elípticas)”. Acero; 1996. Museo Guggenheim de Bilbao. Vista I:



Figura 306 (arriba): Richard Serra, “Torqued Ellipses, (Torsiones Elípticas),”. Acero; 1996. Museo Guggenheim de Bilbao. Vista II:

El proceso para la representación con Mathematica de las superficies paramétricas de estas obras de Serra es el siguiente. Empezamos con las instrucciones para la obra “Serpiente”. Primero creamos las dos siguientes gráficas de las figuras 307 y 308:

```
puntos = {{0, 0}, {7, 2.5}, {25, -2.5}, {32, 0}}
```

```
::0, 0, {7, 2.5}, {25, -2.5}, {32, 0}
```

```
d1 = ListPlot[puntos, PlotStyle -> PointSize[0.015], AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-3, 3}]
```

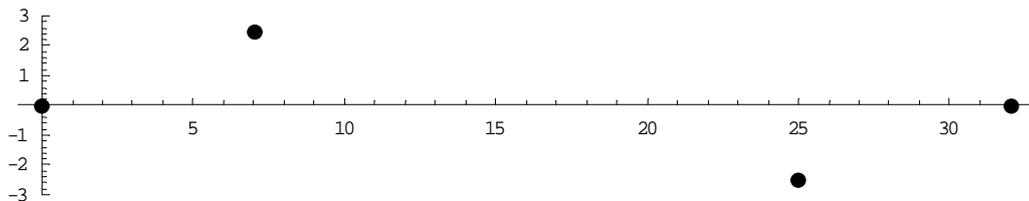


Figura 307 (arriba): Puntos utilizados en la escultura “Snake (Serpiente)”, representados en una gráfica obtenida con Mathematica.

```
ys[t_] = Simplify[InterpolatingPolynomial[puntos, t]]
```

```
0.0015873 H-32. + tL H-16. + tL t
```

```
xs[t_] = t
```

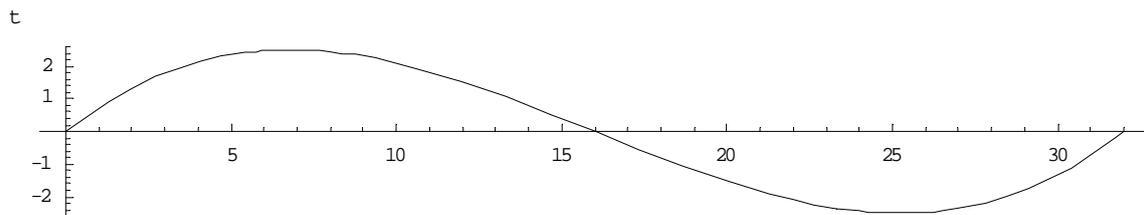


Figura 308 (arriba): Curva utilizados en la escultura “Snake, (Serpiente)”, representada en una gráfica obtenida con Mathematica.

Con lo que se obtienen las gráficas que hemos mostramos en las figuras 307 y 308 de la página anterior. A continuación introducimos las siguientes instrucciones:

```
s1 = ParametricPlot3D[x@tD, y@tD, u<, :t, 0, 32<, :u, 0, 4<, PlotPoints@ 30, AspectRatio@ AutomaticD;
s2 = ParametricPlot3D[x@tD, y@tD + 1, u<, :t, 0, 32<, :u, 0, 4<, PlotPoints@ 30,
  AspectRatio@ AutomaticD;
s3 = ParametricPlot3D[x@tD, y@tD + 2, u<, :t, 0, 32<, :u, 0, 4<, PlotPoints@ 30,
  AspectRatio@ AutomaticD;
Show[s1, s2, s3, ViewPoint -> :- 3.096, - 1.017, 0.910<D
```

Con lo que se obtienen tres gráficas una de cada superficie que no mostramos, ya que las “reunimos” con la última instrucción en una sola gráfica, que mostramos en la figura 309, situada debajo, en la que como podemos apreciar las superficies paramétricas tienen la forma de las de la obra de Richard Serra “Serpiente”, pero todavía sin que éstas posean la “inclinación” adecuada. A continuación introducimos las siguientes instrucciones, con lo que conseguimos la “inclinación” deseada para la escultura.

```
s1 = ParametricPlot3D[x@tD, y@tD + 0 + u 14, u<, :t, 0, 32<, :u, 0, 4<, PlotPoints@ 30,
  AspectRatio@ AutomaticD;
s2 = ParametricPlot3D[x@tD, y@tD + 1 - u 14, u<, :t, 0, 32<, :u, 0, 4<, PlotPoints@ 30,
  AspectRatio@ AutomaticD;
s3 = ParametricPlot3D[x@tD, y@tD + 2 + u 14, u<, :t, 0, 32<, :u, 0, 4<, PlotPoints@ 30,
  AspectRatio@ AutomaticD;
a = Show[s1, s2, s3, ViewPoint -> :- 5, - 0.5, 1.3<D
```

Con lo que se obtienen otras tres gráficas una para cada superficie que de nuevo no mostramos, ya que nuevamente las “reunimos” con la última instrucción en una sola gráfica, la que mostramos en la figura 310, situada en la siguiente página **Esta imagen como podemos apreciar describe perfectamente la forma de las superficies de la obra de Serra “Serpiente”**. A continuación describimos el proceso para la representación con Mathematica de las superficies de la otra obra, “Torsiones elípticas” (ver sus vistas en las figuras números 305 y 306). Empezamos con las instrucciones para introducir la forma de una de las superficies, con lo que se obtiene la gráfica de la figura 311, situada al final de la página siguiente.

```
c1 = ParametricPlot3D[H4 + u 4L Cos@tD, H4 - u 4L Sin@tD, u<, :t, -Pi + 0.2, Pi - 0.2<,
  :u, 0, 4<,
  ViewPoint -> :0.779, - 2.440, 2.212<, BoxRatios@ Automatic, PlotPoints@ 30D
```

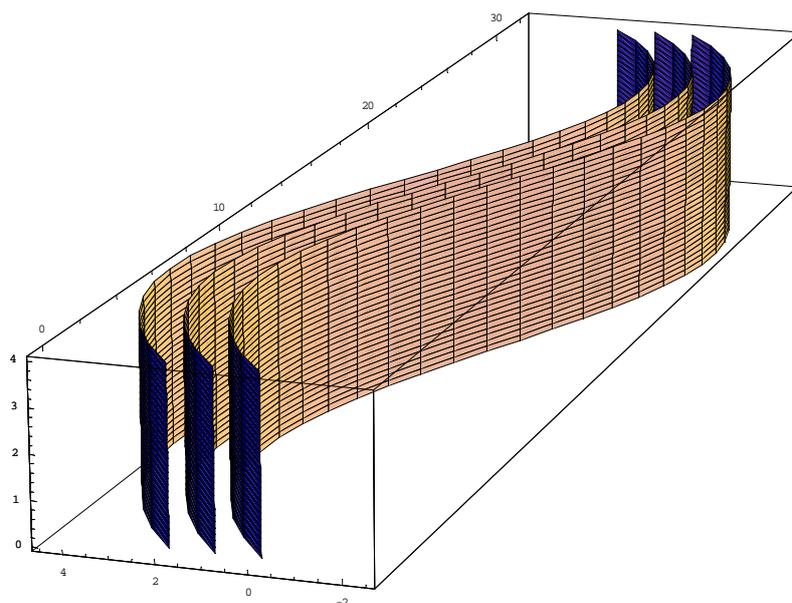


Figura 309 (arriba): Imagen previa de las superficies de “Snake, (Serpiente)”, todavía “sin inclinación”. Gráfica obtenida con Mathematica.

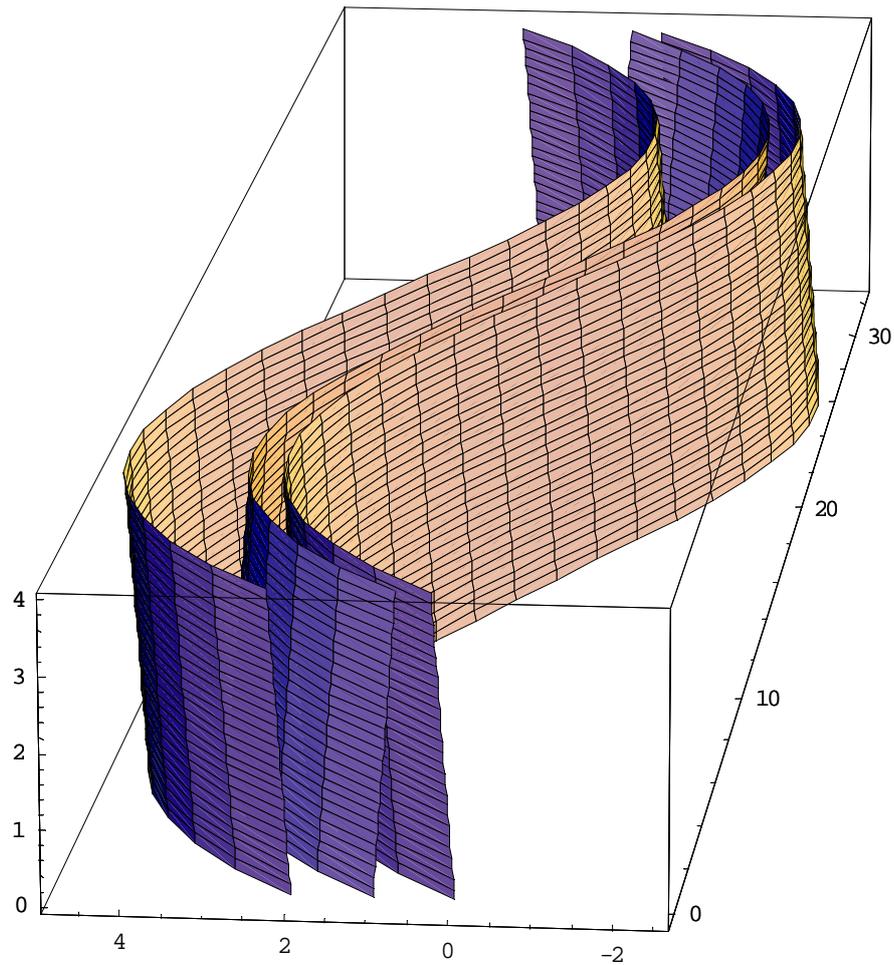


Figura 310 (arriba): Imagen de las superficies de “Snake, (Serpiente)”. Gráfica obtenida con Mathematica.

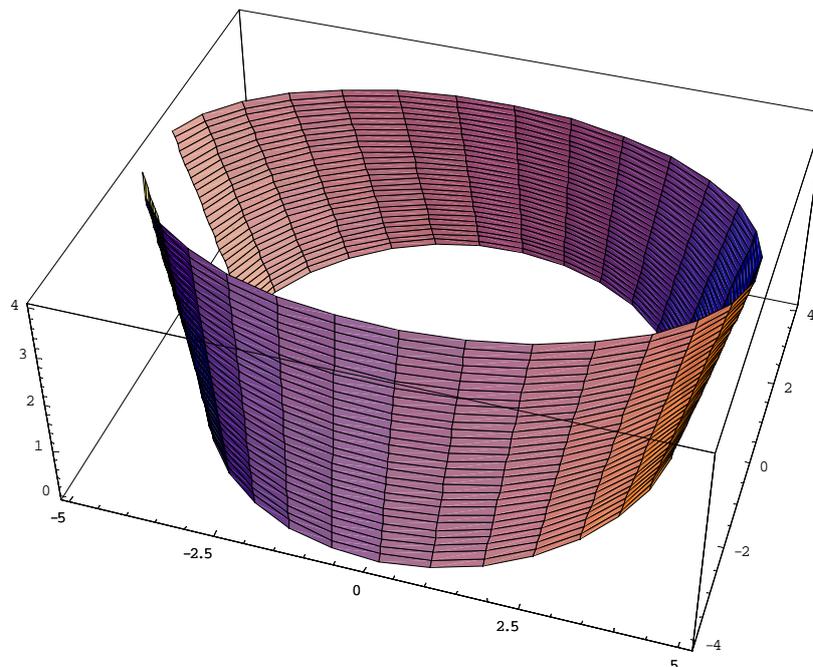


Figura 311 (debajo): Imagen de una de las superficies “inclinada hacia adentro”, utilizada por Serra en “Torqued Ellipses, (TorsionesElípticas)”. Gráfica obtenida con Mathematica.

A continuación seguimos el proceso con las instrucciones para introducir la forma de la otra de las superficies que esta situada al lado de la anterior; es decir, las correspondientes a la escultura, “Torsiones elípticas”. Introduciendo las instrucciones siguientes se obtiene la gráfica que mostramos en la figura 312, situada debajo.

```
c2= ParametricPlot3D[3.2+ u 4t Cos@tD, 3.2- u 4t Sin@tD, u, :t, 0+ 0.2, 2 Pi - 0.2<,
:u, 0, 4<,
ViewPoint -> :0.779, -2.440, 2.212<, BoxRatios@ Automatic, PlotPoints@ 30D
```

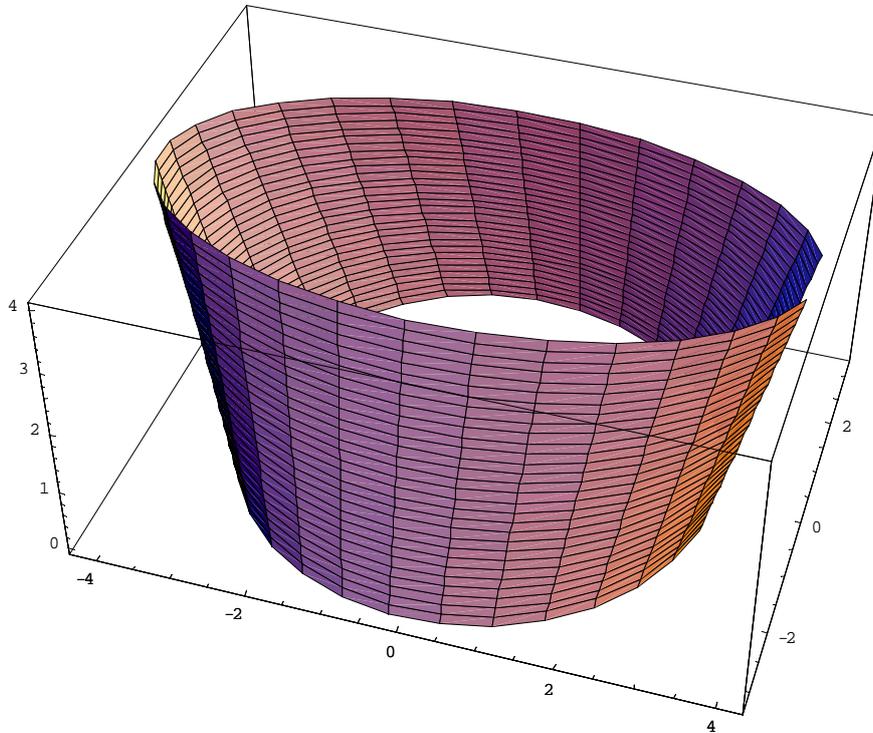


Figura 312 (arriba): Imagen de otra de las superficies “inclinada hacia adentro” utilizada en “Torqued Ellipses, (Torsiones Elípticas)”. Gráfica obtenida con Mathematica.

Con una última instrucción “reunimos” en una sola gráfica las dos superficies la que mostramos en la figura 309, situada justo debajo. Esta imagen como podemos apreciar describe perfectamente la forma de parte de las superficies de la obra de Serra “Torsiones elípticas”.

```
Show@c1, c2, ViewPoint -> :1, -2, 0.5<, Boxed@ False, Axes@ FalseD
```

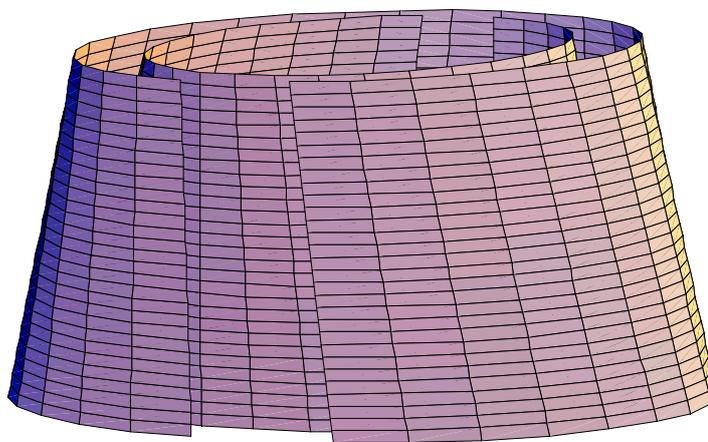


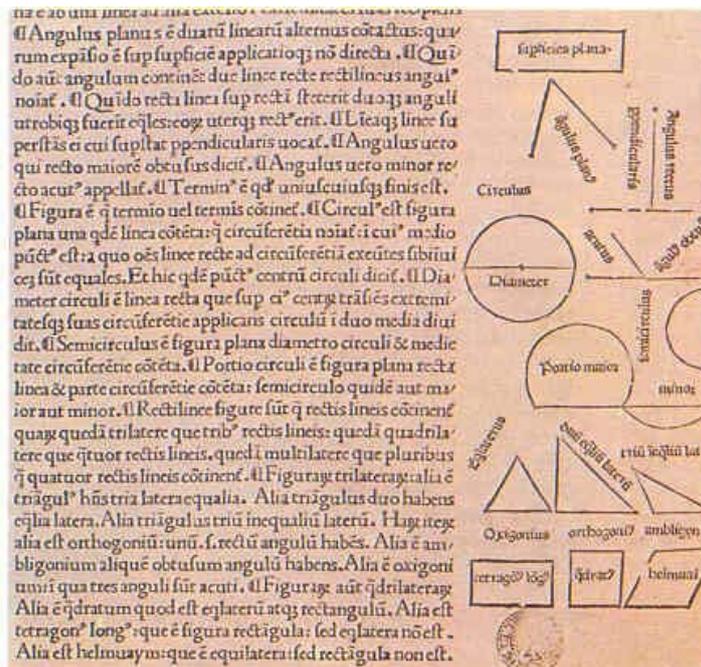
Figura 313 (debajo): Imagen de las dos superficies “inclinadas hacia adentro” utilizadas en “Torqued Ellipses, (Torsiones Elípticas)”. Gráfica obtenida con Mathematica.

7.1.3 Geometrías no Euclídeas

En la Escultura Matemática actual, a diferencia de lo que ocurre en el Arte en general, se encuentra poco difundida la utilización de otras geometrías que no sean la euclideana clásica. Sin embargo, creemos que en el futuro se desarrollará ampliamente el uso de otras geometrías en este tipo de escultura. Entre las concepciones que pueden ser básicas para el desarrollo venidero de la Escultura Matemática, destacan “**las nuevas geometrías**”, **Elíptica, Hiperbólica, Fractal, etc.**, lo que ya comentamos en el apartado anterior dedicado a la situación actual y a las perspectivas de desarrollo de esta escultura. Debido a todas estas circunstancias hemos decidido completar nuestra clasificación, añadiendo un subgrupo específico dedicado a las Geometrías no Euclídeas, dentro del grupo principal de Escultura Geométrica.

En el apartado mencionado, hemos expuesto una obra que claramente se incluiría en este subgrupo, la de la figura 244. Esta escultura está realizada por **Irene Rousseau**, y se titula: “Circle: Progressive Reduction, (Reducción progresiva de un círculo)”. En este apartado expondremos alguna más, aunque muy pocas, ya que **este campo de la Escultura Matemática todavía es poco fecundo** debido a su muy reciente aplicación. Vamos a mostrar algún otro trabajo de los que se clasificarían en este grupo de Geometrías no Euclídeas, para tratar de caracterizar mejor este tipo de escultura y ilustrar sus grandes posibilidades futuras. La página web de la asociación: The Geometry Center, referencia [PW24], resulta realmente útil para profundizar en muchos temas geométricos. Esta web tiene secciones especializadas en geometría diferencial, fractales, topología, geometría no-euclídea, etc.

Antes de exponer la situación y perspectivas de la Escultura Matemática en el campo de las geometrías no euclídeas, nos conviene recordar muy brevemente la evolución de la Geometría a lo largo de la historia y también algunos de los conceptos matemáticos relacionados con ella. Empezamos por subrayar la importancia vital para el Arte de la geometría clásica. **La Geometría Euclídea** es el ejemplo más antiguo e históricamente más importante de una disciplina científica deductiva. Hasta los tiempos actuales ha sido un ejemplo casi perfecto de ciencia exacta y fue el punto de partida para el desarrollo sistemático de los fundamentos de la Geometría. Un cambio transcendental comenzó a principios del siglo XIX con el descubrimiento de **la Geometría no Euclídea** y alcanzó su punto culminante con las investigaciones del excepcional matemático Hilbert. Actualmente cubre un campo muy amplio de investigaciones.



Los fundamentos de la geometría clásica como resulta conocido se hallan recogidos en *Los Elementos de Euclides*, una obra fundamental ya mencionada en diversas ocasiones. En la figura 314 situada a la izquierda, se muestra una página de este texto básico para la Geometría. Corresponde a una antigua edición veneciana de 1491. En ella, **Euclides de Alejandría** (aprox 365 - 300 A. C.) presenta una sinopsis del conocimiento matemático de su época.

Figura 314: Página de la geometría de Euclides. Edición veneciana de 1491

Los Elementos de Euclides contiene resultados muy diversos de Teoría de números, por ejemplo, el algoritmo de Euclides y la demostración de existencia de una infinidad de números primos; de Geometría de Sólidos, la teoría de los poliedros regulares, las teorías de la proporción y de la semejanza, y también un estudio de las cantidades inconmensurables; y de Geometría Plana. Al respecto, véase la página de una edición de este texto en la figura 314 de la página anterior. La importancia de esta obra reside en el hecho que los teoremas de la Geometría son demostrados, con ciertas limitaciones de acuerdo con los conocimientos de la época, exclusivamente por medio de deducciones lógicas a partir de un sistema de axiomas, sin hacer referencia al mundo real.

En la concepción de **Aristóteles** (aprox. 384 - 322 A.C.), seguramente el más importante de los filósofos griegos, los axiomas son enunciados evidentes provenientes directamente de la experiencia y formados a partir de conceptos sobre cuyo significado no debe haber duda alguna. Por esta razón Euclides define sus conceptos básicos, por ejemplo, “un punto es aquello que no tiene partes”, pero en las deducciones subsiguientes no hace uso de estas definiciones. A principios del siglo XIX, los matemáticos se dieron cuenta de que Euclides utilizaba tácitamente propiedades de orden que no habían sido explícitamente enunciadas como axiomas.

Estas insuficiencias del sistema de axiomas de Euclides fueron eliminadas por otro genio, el matemático **David Hilbert** (1862 - 1943), en su libro *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la Geometría)*, publicado en 1899, estudio en el que al mismo tiempo dio respuesta a problemas científicos de carácter nuevo y fundamental. De acuerdo a la axiomática de Hilbert, las cuestiones concernientes a la naturaleza de los conceptos básicos o de su relación con objetos reales no pertenecen a la teoría matemática en cuestión, sino a su metateoría. Los axiomas sólo establecen ciertas relaciones entre los conceptos fundamentales.

En principio, muchos de los famosos teoremas de Euclides son tan fáciles de verificar empíricamente como los axiomas. Así, y según las concepciones modernas, el uso de un sistema particular de axiomas en el desarrollo sistemático de una teoría matemática es simplemente una cuestión de conveniencia. Para ilustrar estas geometrías no euclídeas presentamos en la figura número 315 situada debajo, un ejemplo de segmentos entre puntos en una geometría hiperbólica. Esta imagen obtenida con el programa informático denominado Non Euclid.

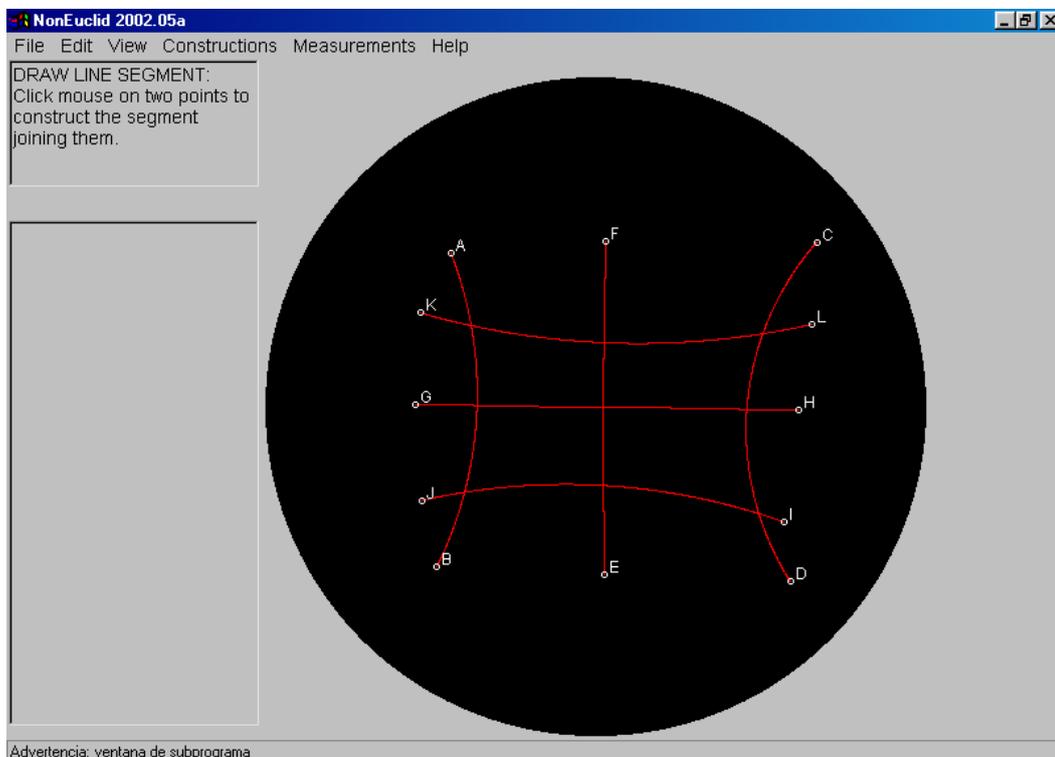
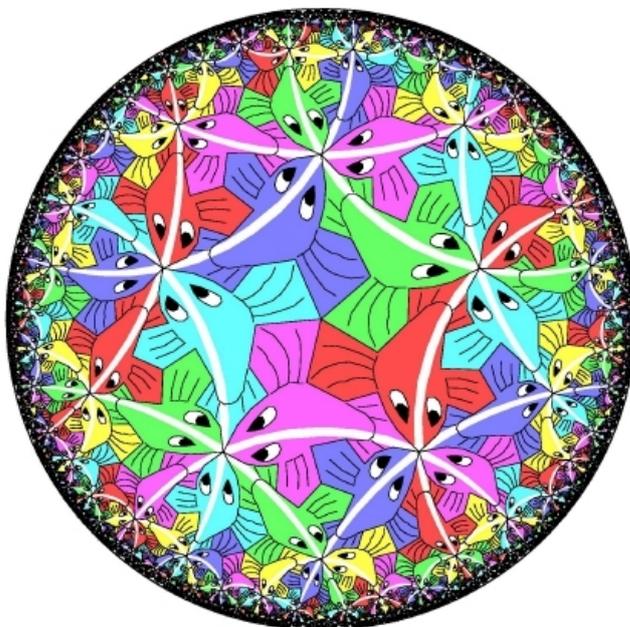


Figura 315 (arriba): Segmentos entre puntos. Imagen obtenida con el programa Non Euclid.

Uno de los ejemplos más claros de la utilización por conveniencia de un sistema particular de axiomas, es el caso del famosísimo **postulado V, el axioma de las paralelas de Euclides**, sobre la paralela a una recta trazada por un punto exterior a ésta. Este axioma de las paralelas (o postulado, como Euclides lo denominara), ha sido emitido con diversos enunciados equivalentes, y puede que haya sido el más discutido de la historia de las Matemáticas. Ha dado origen a la creación de las geometrías no euclidianas. El enunciado más sencillo de los del postulado quinto es la conocida sentencia: por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella. Entre los importantísimos matemáticos que a lo largo de la historia han dado enunciados equivalentes destacaremos a **Proco, Legendre, Laplace, Saccheri, Gauss, Bolyai**.

Además en la historia de la Geometría siempre ha habido intentos para suprimir este quinto postulado; ya algunos matemáticos griegos y árabes se preocuparon de ello pero sin llegar a ningún resultado. El matemático francés **Adrien Marie Legendre** (1752 - 1833), publicó en 1794 el libro, *Eléments de géométrie*, que se convirtió en el principal texto elemental sobre esta materia durante unos 100 años. Al principio este matemático intentó demostrar el quinto postulado, de lo que sacó valiosas consecuencias como por ejemplo, sólo se verifica que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180 grados si se admite el postulado.

Los matemáticos Gauss, Lobachevski y Bolyai construyeron, independientemente, una Geometría en la que el postulado de las paralelas de Euclides no es válido. Esta **Geometría no Euclídea** posee un grado de consistencia y armonía interna similares a los de la Geometría Euclídea. El genial matemático **Karl Friedrich Gauss** (1777 - 1855), fundándose en la hipótesis de infinitas paralelas por un punto, creó la primera Geometría no euclidiana pero no publicó sus resultados. **Nicolay Ivanovich Lobachevski** (1793 - 1856) y **Janos Bolyai** (1802 - 1860) llegaron al mismo resultado, partiendo de la suposición de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Diez años después de la muerte de Lobachevski el italiano, **Eugenio Beltrami** (1835 - 1900) encontró la primera realización de las partes esenciales de esta Geometría, en una superficie curva. En la figura 316, podemos ver un ejemplo de la utilización en el Arte de este tipo de geometrías realizado por **Douglas Dunham** y basado en un grabado, del que sea tal vez el artista matemático más conocido, **Mauricius Escher**. Posteriormente la comentaremos.



La segunda Geometría no Euclidiana fue introducida a mediados del siglo XIX por otro matemático, **Bernhard Riemann** (1820 - 1866), basándose en la imposibilidad de trazar por un punto exterior a una recta una paralela a ésta.

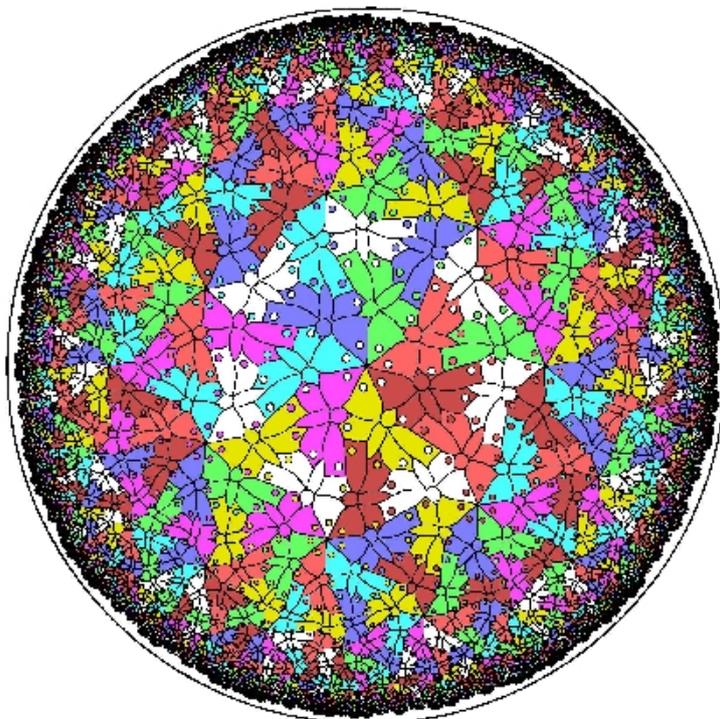
Antes en el año 1685, **John Wallis** (1616 - 1703) había intuido la necesidad de extender la geometría del espacio a un número superior a las intuitivas tres dimensiones. El paso decisivo lo dio Riemann al presentar el concepto de variedad diferencial de n-dimensiones, con lo que introdujo un nuevo y muy importante principio general sobre qué es lo que se puede entender por una Geometría.

Figura 316 (arriba): Douglas Dunham. “Five Equidistant Fish Pattern, (Motivo Cinco Peces Equidistantes)”. Basado en el grabado de Mauricius Cornelius Escher, “Hyperbolic Circle Limit III, (Círculo Hiperbólico Límite III)”. Diseño incluido en su serie “New Hyperbolic Escher Patterns, (Motivos de Escher de la serie Nueva Geometría Hiperbólica).

Esta idea de variedad diferencial de n-dimensiones fue expuesta por Riemann en 1854, en una conferencia titulada: *Sobre las hipótesis que yacen en los fundamentos de la Geometría*. Según este sobresaliente matemático, para la construcción de una Geometría es necesario dar una variedad de elementos, las coordenadas de estos elementos y la ley que mide la distancia entre elementos de la variedad infinitamente próximos. Para ello se supone que las partes infinitesimales de la variedad se miden euclídeamente. Esto significa que hay que dar en su forma más general el elemento de arco, en función de las coordenadas. Se definen como transformaciones aquellas aplicaciones que dejan invariante el elemento de arco. Esta nueva forma de concebir el espacio evolucionó con el tratamiento dado a comienzos del siglo XX, en los trabajos de los matemáticos italianos **R. Ricci-Curbastro** y **T. Levi-Civita**, hasta la noción que hoy denominamos como variedad riemanniana.

En una variedad riemanniana se dispone de una forma en el espacio, tangente en cada punto de la variedad, que nos permite medir las longitudes de vectores tangentes y el ángulo determinado por dos vectores. Ello permite determinar longitudes de las curvas que se consideren en dicha variedad y también se puede calcular el volumen de partes adecuadas de la variedad. Dados dos puntos “suficientemente próximos”, se pueden considerar todas las curvas que existan en la variedad entre esos dos puntos. Existe una curva especial que es la que realiza el recorrido con menos longitud entre esos dos puntos. Estas curvas se denominan geodésicas.

También se introducen la noción de **curvatura riemanniana** que asocia un escalar a cada plano tangente a cada punto de la variedad y que para el caso de superficies coincide con la noción de **curvatura de Gauss**. En los casos en que la curvatura sea cero, la variedad riemanniana se dice que es parabólica. Si es constante y mayor que cero, se dice que es elíptica y si es constante y negativa que es una variedad hiperbólica. Estos conceptos tienen como se puede ver una íntima relación con el Cálculo Diferencial y es más el de curvatura volverá a aparecer cuando estudiemos el subgrupo de Superficies Mínimas.



Este modelo matemático de las variedades riemannianas contiene la mayor parte de los modelos geométricos estudiados hasta el pasado siglo XX. Por una parte, los espacios euclídeos pueden ser considerados como variedades riemannianas con curvatura de Riemann nula.

Por otra parte las esferas y espacios proyectivos tienen una estructura de **variedades riemannianas del tipo elíptico**, y los espacios no euclidianos son **variedades riemannianas del tipo hiperbólico**. Además también, las superficies e hipersuperficies pertenecientes a los espacios euclidianos admiten de modo natural estructura de variedad riemanniana.

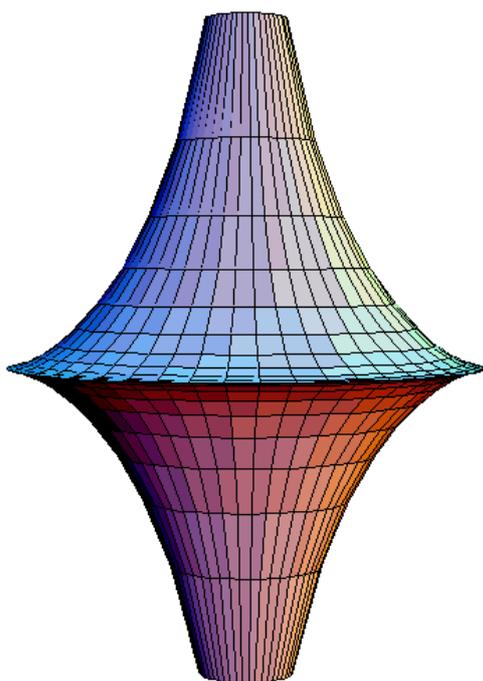
Figura 317 (arriba): Douglas Dunham. “Seven Butterflies Pattern, (Motivo de las Siete Mariposas)”. Basado en el cuadro de Mauricius Cornelius Escher, “Number 70”. Diseño incluido en su serie “New Hyperbolic Escher Patterns, (Motivos de Escher de la Nueva Geometría Hiperbólica).

Estas propiedades hacen que **la Geometría Riemanniana** sea un marco adecuado para el estudio de la Geometría. No obstante, existen otras formas de abordarlo; por ejemplo, el estudio de grupos discontinuos de transformaciones da una forma de presentar la Geometría como el estudio de propiedades de grupos de transformaciones tal y como la presentó el matemático **Felix Christian Klein** (1849 - 1925) en su famoso programa de *Erlangen*. Hemos de decir que existen modelos más amplios que generalizan simultáneamente la geometría riemanniana y el enfoque de Geometría como estudio de las propiedades de los grupos de transformaciones.

Hemos de señalar que la consistencia (relativa) de la Geometría Hiperbólica quedó confirmada a través de los modelos de Klein y **Henry Poincaré** (1854 – 1912). En las anteriores figuras: 243, 306 y 307, **Douglas Dunham** basándose en grabados de Mauricius Cornelius Escher nos presenta aplicaciones en el Arte de estas geometrías. En la figura 316, “Motivo de los Cinco Peces Equidistantes”, se inspira en “Círculo Hiperbólico Límite III”, que nos muestra el plano de Poincaré ilustrado por Escher, mediante peces de colores obtenidos por simetrías que cubren todo el plano hiperbólico. En este modelo, se toman como puntos aquellos que están en la bola (círculo) abierta de radio uno y como rectas los arcos de circunferencias ortogonales a la circunferencia exterior y que están contenidos en su interior y también los diámetros de dicha circunferencia. En la figura 317 se puede observar, “Motivo de las Siete Mariposas”, también de un cuadro de Escher.

Conviene comentar dos importantes figuras para estas geometrías. La pseudoesfera que se obtiene haciendo rotar la tractriz, alrededor de su asíntota. En cada punto regular esta superficie tiene curvatura de Gauss negativa y constante. A causa de esta propiedad, **la pseudoesfera sirve como un modelo de la Geometría no euclídea hiperbólica**, del mismo modo que **la esfera sirve de modelo para la Geometría no euclídea elíptica**. En la figura número 318, podemos observar una imagen de la Pseudoesfera, obtenida con el programa Mathematica.

Beltrami probó que el plano hiperbólico es localmente isométrico a la pseudoesfera. En este caso, el “interior” de un horociclo recubre de modo isométrico la parte superior de ésta. Es decir, que un sector de horociclo es isométrico a la parte superior de la pseudoesfera menos una de sus generatrices. Aunque muchos matemáticos han estudiado las variedades hiperbólicas de dimensión tres y su relación con la **Conjetura de Poincaré**, y a pesar de los miles de intentos, esta Conjetura no pudo ser probada en el siglo XX y es una de las cuestiones pendientes que más ha llamado la atención a geómetras y topólogos, siendo su resolución uno de los retos pendientes para el siglo XXI. Fue llamada así en honor a **Henry Poincaré** (1854 – 1912).



También creemos que se ha de mencionar la repercusión que las geometrías no euclidianas han tenido sobre las ideas filosóficas del espacio. La consistencia de la geometría no euclidiana es contraria a las ideas manifestadas por el filósofo **Enmanuel Kant** en: *La Crítica de la Razón Pura* (1781). Según Kant, “el espacio y las propiedades geométricas son intuiciones que tienen que hallarse en nosotros a priori, es decir, previamente a toda percepción de objetos, y consiguientemente, han de ser intuiciones puras, no empíricas”.

Sin embargo, la ciertamente increíble capacidad deductiva de Bolyai y Lobachevski llevó a dejar abierta la posibilidad de que el espacio que nos rodea pudiera ser explicado simultáneamente y de modo consistente por dos geometrías diferentes, la euclidiana y la hiperbólica.

Figura 318 (izquierda): Pseudoesfera. Imagen obtenida con el programa Mathematica.

Resumiendo para establecer clara distinción entre las dos principales de estas geometrías, la elíptica y la hiperbólica, recordaremos que la **elíptica o de Riemann** sustituye el postulado quinto, el axioma de las paralelas de Euclides, por este otro: No se puede trazar ninguna paralela a una recta por un punto exterior a ésta. **La hiperbólica o de Lobachevski** se funda en la infinidad de paralelas a una recta que pasan por un punto exterior a ella. Finalmente, una de las aportaciones más importantes de estas geometrías es su influencia en **la Teoría de Relatividad Generalizada** que se modela sobre variedades de dimensión cuatro con curvatura constante. Ello deja abierta tres posibilidades: Una de tipo elíptico, en la que el universo es finito y cerrado; y dos formas de espacio no cerradas, una parabólica o pseudo-euclidiana y otra hiperbólica. Debido a sus grandes posibilidades los modelos hiperbólicos seguirán formando parte de las futuras teorías cósmicas. Una curiosa interpretación artística de la imagen de este genial matemático y físico es la del retrato de **Albert Einstein** que mostramos en la figura 319, realizado por **Ken Knowlton**.

Para el desarrollo de la Geometría, también ha sido muy importante la contribución de **Klein**, que clasificó las distintas geometrías, según el tipo de transformaciones que las caracterizan y expuso sus relaciones con la teoría de grupos. Klein hizo posible que tanto la Geometría Euclídea como la no-Euclídea, se incluyeran dentro de un marco más amplio, **la Geometría Proyectiva**. Es interesante recordar que ésta estudia las propiedades de las figuras geométricas que son invariantes a través de una transformación proyectiva. El concepto fundamental es el de espacio proyectivo, ampliación del espacio ordinario añadiendo los elementos impropios. Los principales de éstos son punto impropio, es la dirección de una recta; recta impropia, es la orientación de un plano; y plano impropio, es el determinado por un punto y una recta impropia.

En el siglo XX la Geometría Proyectiva experimentó un gran desarrollo a partir del estudio de las transformaciones birracionales (**Cremona**), la geometría infinitesimal directa (**Bouligard, Marchaud**) y la introducción de los espacios abstractos (**Fréchet**). La intervención de la Topología ha hecho posible un gran desarrollo de los nuevos tipos de geometría, como por ejemplo la creada por **Bloschke**. **En su sentido moderno, la Geometría no se ocupa del estudio concreto del espacio físico**, aunque desde un punto de vista más tradicional las propiedades que estudia arranquen en último extremo de la intuición geométrica ordinaria. Su cometido estriba más en elaborar espacios abstractos dotados de determinadas características que formalicen rigurosamente aspectos de aquella intuición.



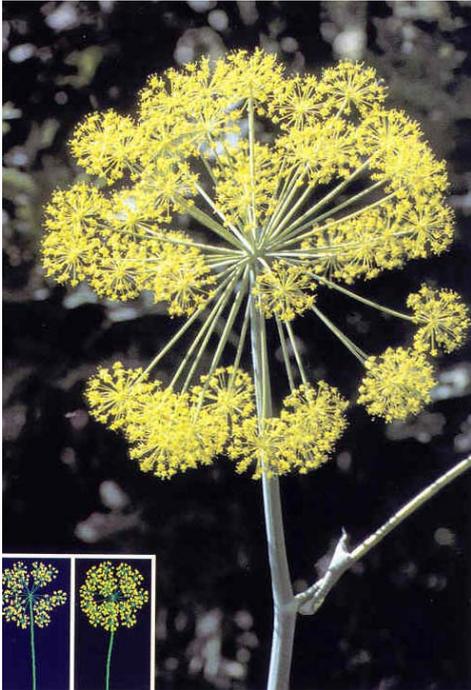
Figura 319: Ken Knowlton. “Retrato de Albert Einstein”. Realizado con conchas.

En cuanto a las investigaciones de los expertos acerca de las posibilidades de las “nuevas geometrías” en Escultura Matemática, es interesante mencionar algunos estudios. El primero el de la referencia número [43], una interesante ponencia, *Hiperspace, Hiperseeing and Hipersculture*, escrita por el profesor y escultor matemático, **Nathaniel Friedman**. En este artículo el autor analiza lo que denomina “Hyperescultura” y el tema del “Hiperespacio”, esto es, la utilización de más dimensiones de las tres del espacio habitual en la Escultura.

Otra notable referencia es la [44], una ponencia titulada: *Mathematics and Esthetics-Science and Art in the Bay Area*, escrita por **Benjamin Wells**. En ella describe brevemente los contenidos de un curso que imparten en la universidad de San Francisco dedicado, entre otros temas, a estos de las nuevas geometrías. En este seminario también se trata el campo de la geometría fractal que aquí se desarrolla en el próximo apartado.

7.1.4 Geometría Fractal

La Naturaleza nos brinda muchas bellísimas e increíbles formas, que nunca dejarán de sorprendernos. Estas formas evidentemente presentan un tipo de geometría que no somos capaces de explicar con las Matemáticas tradicionales. La naturaleza nos ofrece muchos ejemplos de estas impresionantes formas, como las que adquieren algunos de sus fenómenos climatológicos, nubes, nieve, escarcha, rayos, etc. Todos ellos son ejemplos de las **increíbles posibilidades de aplicación de la Matemática Fractal**, aunque no los únicos. Un ejemplo diferente es el que mostramos en la figura 320, debajo, un tipo de planta, el hinojo, que nos sirve para presentar los objetos fractales.



El término fractal (del latín fractus), significa irregular o interrumpido. Para explicar de forma muy sencilla su significado, **un objeto es denominado fractal**, con relación a su configuración geométrica, cuando su frontera, superficie o estructura, muestra una constitución que **resulta invariante a diferentes escalas**. Estos objetos pueden ser planos o espaciales, y no son sólo formas de la naturaleza, también existen como creaciones puramente matemáticas.

No todos los objetos de la naturaleza son fractales, pero éstos tienen una alta probabilidad de adoptar estas formas. Una propiedad fundamental de todos ellos es **la invariancia con respecto a la escala que se denomina autosimilitud**. Esta propiedad de autosimilitud aparece de forma aproximada en la naturaleza, lo que resulta muy interesante.

Figura 320 (izquierda): Planta de hinojo. Ejemplo de geometría fractal de la naturaleza.

Uno de los ejemplos más sencillos para explicar la construcción de un objeto fractal en el plano, es la “curva fractal de Koch” desarrollada por el matemático belga **Helge Von Koch**, en la figura 321. El interior de esta curva se denomina muy a menudo “copo de nieve”, aunque también es llamada “Isla de Koch”.

La geometría fractal es un lenguaje creado por el matemático Benoit Mandelbrot, nacido en Varsovia en 1924, para describir las formas complejas de la naturaleza. También permite describir diversos objetos matemáticos, como por ejemplo la curva de Koch, el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, etc., cuyo comportamiento cae fuera del marco que abarca la Matemática tradicional.

En la figura 322, página siguiente, hay otro objeto matemático fractal, en este caso en el espacio, la esponja de Sierpinski- Menger. Estas imágenes nos anticipan las grandes posibilidades que este tipo geometría tiene para la Escultura.

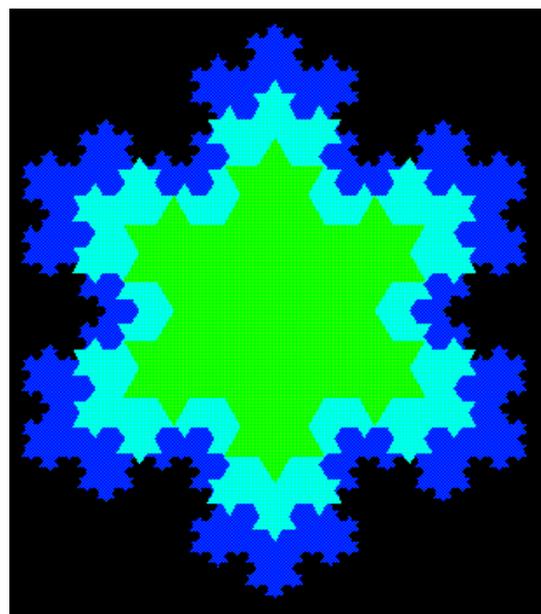


Figura 321 (debajo): Imagen en la que se explica la construcción de la “curva fractal de Koch”.

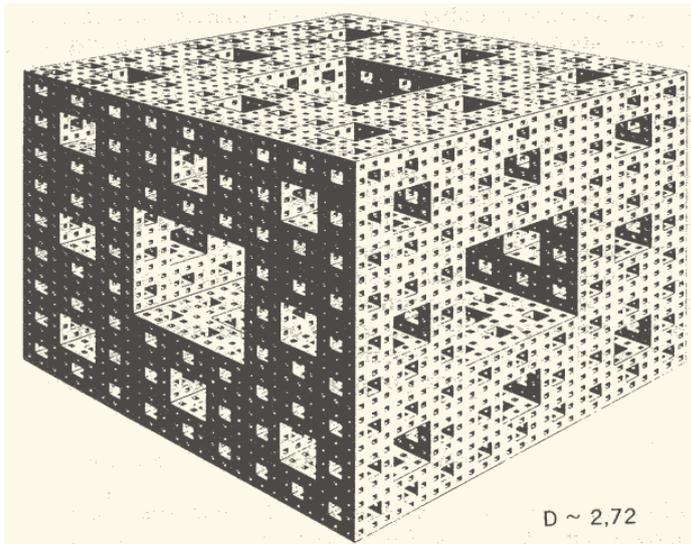


Figura 322 (arriba): “Esponja de Sierpinski-Menger”, figura fractal en el espacio.

Otro aspecto importante de los fractales es que **su dimensión es fraccionaria**. Es decir, en vez de ser unidimensional, bidimensional o tridimensional (como los objetos que nos son más familiares), **la dimensión en la mayoría de los fractales no se ajusta a dichos conceptos tradicionales**. Más aún, su valor raramente puede ser expresado con un número entero. Esto es, justamente, lo que les ha dado su nombre. Muchas veces los fractales se subscriben a la definición anterior. Otras no, en vez de observarse la misma estructura en proporciones menores de la figura principal que estemos observando, son evidentes rasgos y patrones nuevos. Ello dependerá del tipo de fractal que examinemos y como se verá de la función matemática que hayamos utilizado para producirlo, lo que comentaremos después.

Probablemente, el primer objeto fractal puro en la historia, el polvo de Cantor, fue descrito por el matemático alemán **Georg Cantor** (1845 – 1918), el inventor de la teoría de los conjuntos, alrededor de 1872. A pesar de ser una figura extremadamente sencilla, observar la figura 324 en al página siguiente, recoge los atributos anteriores de los fractales, presenta autosimilitud a cualquier escala y su dimensión es fraccionaria, $\log 2/\log 3$, aproximadamente 0,6309297535714574370995. Igualmente, podemos basarnos en él para introducir otra característica general de este tipo de objeto **son producidos por procesos de iteración**.

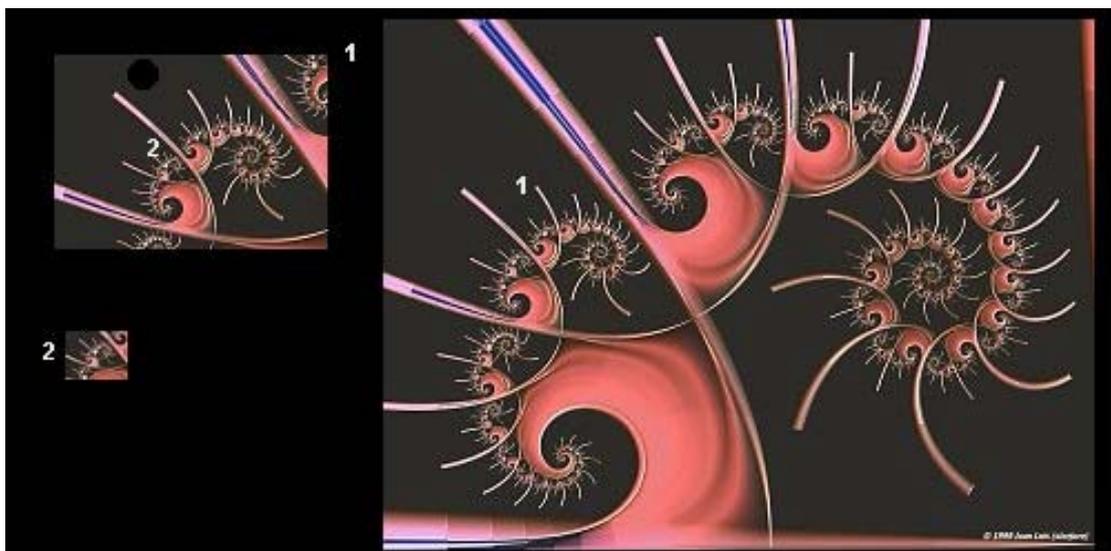


Figura 323 (debajo): “Fractal de Julia”. Figuras que ilustran su autosimilitud.

A continuación vamos a exponer los **principios básicos de la geometría fractal**, desde su “descubrimiento” hasta su uso por las ciencias y el Arte. Como ya hemos dicho un fractal es un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala.

Dicho de forma sencilla, si “enfocamos” una “porción” cualquiera de un objeto fractal, notaremos que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal, lo se observa muy claramente en el ejemplo de la figura 323. En ella vemos el “fractal de Julia”, denominado así por el matemático **Gaston Julia**.

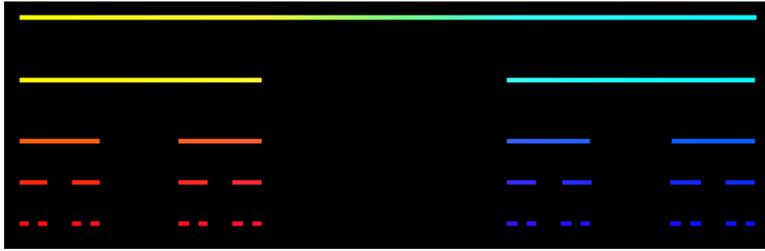


Figura 324 (arriba): Polvo de Cantor. El más sencillo de los fractales.

Posteriormente, se toma el resultado como valor inicial para el próximo cálculo. Dicha operación puede repetirse indefinidamente, produciendo la iteración. Cualquier proceso semejante puede tener como resultado un fractal. Aunque la existencia de los fractales se conoce desde fines del siglo XIX, pero eran considerados simplemente como curiosidades matemáticas. A principios del XX, vinieron los trabajos del referido Gaston Julia y **Pierre Fatou** sobre los fractales del conjunto de Julia (1918 - 1919). Sin embargo, su verdadera identidad no fue plenamente conocida hasta hace poco, en las décadas de los años sesenta y setenta, gracias a los importantes estudios de Mandelbrot y otros científicos. Entre otros entes, investigaron el conjunto de Mandelbrot y otros atractores extraños y bifurcaciones.

El conjunto de Mandelbrot fue descubierto por este investigador en la década de los setenta y nombrado así por **Adrien Douady** y **Jonh Hubbard** en honor a dicho matemático, en 1982. Su peculiar figura ha sido reproducida en múltiples ocasiones desde que se logró su primera representación visual en el año 1980. La función matemática que define al conjunto de Mandelbrot puede expresarse como el conjunto de todos los valores posibles de c (siendo c un número complejo), tal que la iteración de $z = z^2 + c$ (comenzando con $z = 0$) no va al infinito. La ecuación en sí misma es bien sencilla pero la gráfica resultante es infinitamente compleja. Como ya hemos indicado un ordenador es casi imprescindible para trabajar con éste y otros tipos de fractales.

Hay una muy estrecha relación entre lo que se ha llamado fractales y los procesos de crecimiento. La geometría fractal es la que explica los procesos caóticos, es decir, de los procesos dinámicos cuyo desarrollo depende muy crucialmente de las condiciones iniciales. Todos estos sistemas dinámicos varían con el tiempo y están regidos por ecuaciones diferenciales no lineales. Dado que estos sistemas de ecuaciones no pueden ser resueltos de forma exacta, se han de resolver mediante métodos iterativos que proporcionan soluciones aproximadas. Obsérvese un ejemplo en la figura 325. Obviamente hasta la llegada de los ordenadores, la ingente cantidad de cálculos que significaba este tipo de resolución no era accesible para el estudio de aplicaciones reales. Sin embargo, en la actualidad, sí que es posible simular complejos fenómenos durante largos periodos de tiempo. Benoit Mandelbrot fue el primer investigador que utilizó el ordenador para producir una representación gráfica del comportamiento de los sistemas dinámicos en el plano complejo.

En 1979, el matemático **John Hubbard**, utilizando **el método iterativo de Newton**, un procedimiento para la resolución aproximada de ecuaciones, tal vez el más utilizado de estos métodos, hizo que el ordenador fuera explorando muchos de los infinitos puntos que componen el plano complejo.

Asignaba colores a los puntos, y a medida que fue obligando al ordenador a realizar una exploración, más detallada, se fue desconcertando pues obtenía imágenes que tenían mucho que ver con los fractales. Además estas gráficas tenían una estética muy agradada.

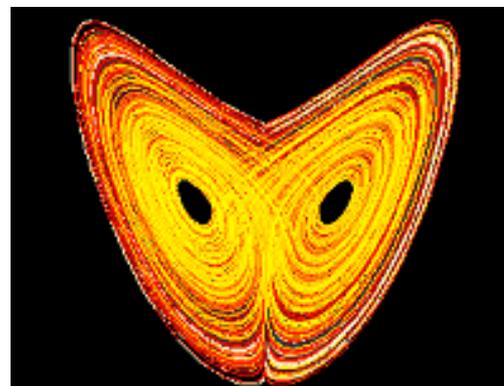


Figura 325 (debajo): Imagen virtual del Atractor de Lorent.

La iteración como resultará conocido, se puede describir como un proceso que se repite un número n de veces, dicho de otra forma, **se retroalimenta**. Para ello se empieza por utilizar un valor inicial en el cálculo de cierta función.

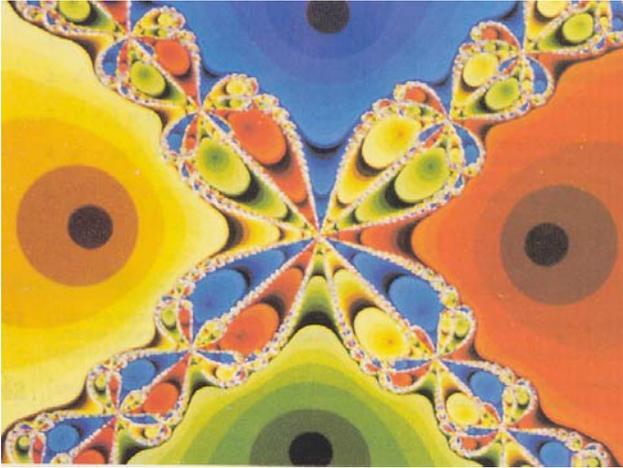
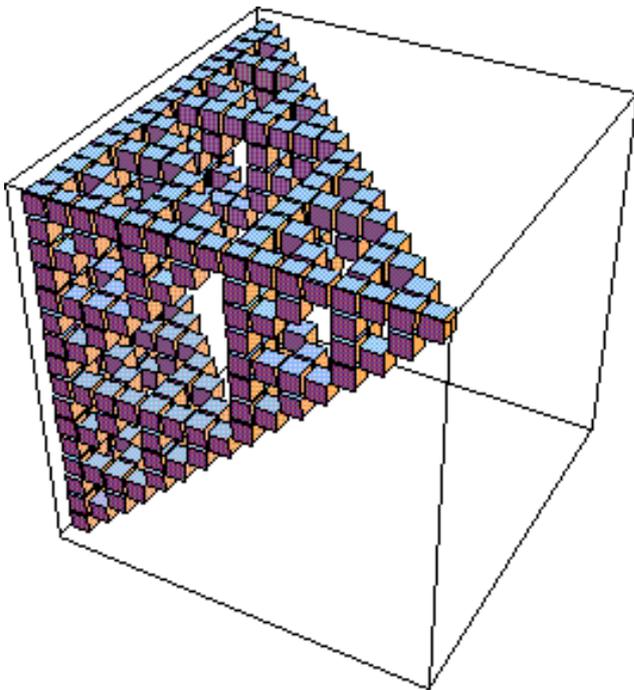


Figura 326 (arriba): Fractal de John Hubbard. Está obtenido a partir de la resolución de la ecuación: $z^4-1=0$.

Para profundizar en el estudio de **los fractales, basados en la utilización de diferentes algoritmos para la formación de los colores** y de sus posibilidades para elaborar motivos artísticos, puede ser francamente útil consultar la ponencia de Javier Barrallo: *Coloring Algorithms for Dynamical Systems in the Complex Plane*, citada en la referencia [45]. Tampoco debemos dejar de mencionar dentro de la bibliografía clásica de Geometría Fractal, uno de los libros de Mandelbrot de divulgación científica de este tema, *Los Objetos Fractales*, referencia [46], que hemos utilizado en la breve descripción anterior.

Con respecto a la utilización de la Informática en este campo de los fractales, como hemos dicho resulta casi imprescindible, dado lo complejos y extensos que resultan los cálculos. También los programas matemáticos más conocidos pueden resultar útiles. Como ilustración de ello en la figura 327, debajo, mostramos una interesante imagen fractal en el espacio que está incluida en la ayuda del programa Mathematica. Este tipo de figuras creemos que tiene unas interesantes posibilidades para su aplicación en la Escultura Matemática.



Un ejemplo de esta utilización sería la representación de cómo el método de Newton lleva, a partir de puntos iniciales diferentes, a cada una de las cuatro soluciones posibles de la ecuación: $z^4-1=0$. En la figura 326 a la izquierda, se representa este fractal.

Este uso tan sorprendente del ordenador para obtener representaciones gráficas de la geometría fractal permite realizar obras artísticas. Con respecto a este tipo de arte, ya nos hemos referido a la investigación y el trabajo artístico en este campo del director de esta tesis, **Javier Barrallo**. En la figura 242 ya vimos un ejemplo suyo de un diseño fractal, basado en un algoritmo de color.

Con respecto a la **utilización de los fractales en el Arte**, algunos expertos recientemente han postulado que estos han estado asociados al Arte mucho antes de que se estableciera su evidencia matemática.

A lo largo de la historia el ser humano, a veces, ha utilizado patrones geométricos repetitivos, o recursivos, como elementos para la decoración de vasijas, la ilustración de libros, y similares. También existen otras expresiones artísticas como la Arquitectura que se pueden relacionar con estructuras fractales.

Figura 327 (izquierda): Imagen de geometría fractal, incluida en la ayuda del programa Mathematica.



Figura 328: Domo gótico de la catedral de Ely, Gan Bretaña.

Un ejemplo de uso en Arquitectura de elementos que pueden relacionarse con estructuras fractales, es el Domo gótico de la catedral de Ely, en la figura 328 situada a la izquierda. Los fractales también han cruzado la frontera entre la Ciencia y el Arte. Hoy en día, muchos artistas que han escogido este nuevo tipo de geometría para sus trabajos producen magníficas representaciones hábilmente elaboradas de estos objetos matemáticos. Incluso se utilizan en otras artes diferentes, por ejemplo los valores que se asignan a los parámetros que definen un fractal pueden convertirse a notas musicales, para generar composiciones de música fractal.

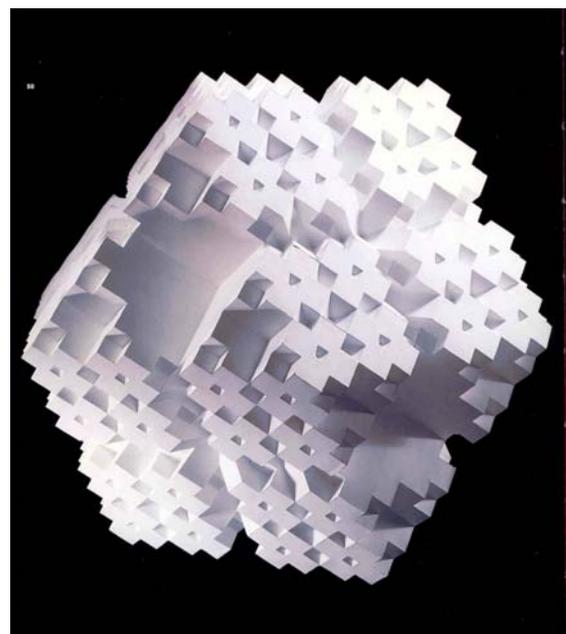
También como ya hemos mencionado antes, la utilización de la Informática para elaborar **Arte Fractal**, resulta imprescindible. Existen programas específicos para este fin, que han sido desarrollados por informáticos expertos en este campo artístico como Javier Barrallo.

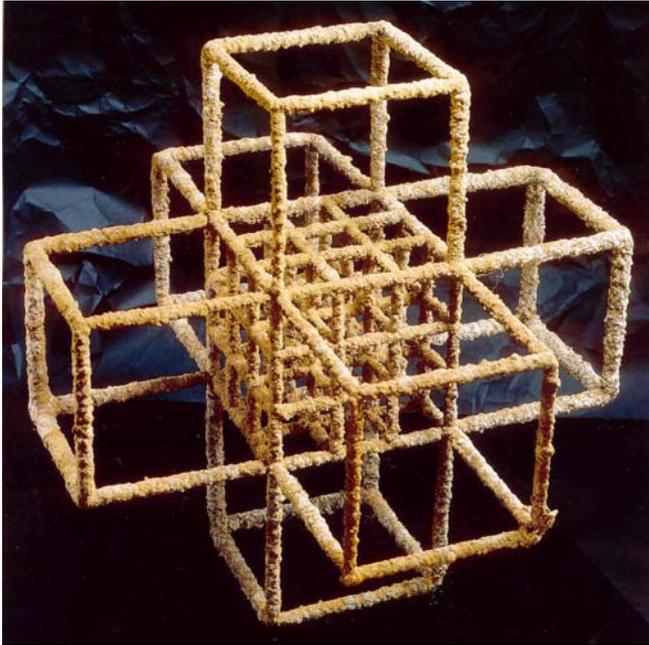
En cuanto a la utilización de la Geometría Fractal en el diseño de obras de Escultura Matemática, no podemos dejar de mencionar a escultores que han realizado aproximaciones en este campo. **Sebastián** el escultor matemático del que ya hemos incluido diversas obras, también ha elaborado alguna de este tipo como la de debajo, figura 329. Una clara realización escultórica de la geometría fractal, titulada “Hiper cubo”. Otro ejemplo de este autor de Escultura Fractal, que incluso resulta más claro que el anterior, es el de la figura 330 en la página siguiente y que además ha titulado “Cubo Fractal”. Este trabajo en metal ha sido acabado con un novedoso tratamiento superficial de envejecimiento por recubrimiento salino. También **Bathsheba Grossman**, entre los muchos y diversos tipos de Escultura Matemática que ha realizado, ha esculpido alguna obra en la que ha utilizado Geometría Fractal, que posteriormente mostraremos.

Aunque este tipo de escultura se halla poco extendida, insistimos en que el futuro creemos que se incrementará notablemente la utilización de la Geometría Fractal en la realización de obras de Escultura Matemática. Debido a ello y a lo específicas que resultan ser las características propias de esta escultura, hemos decidido incluir un subgrupo dedicado a albergar estas obras en la clasificación de la Escultura Matemática que proponemos.

A continuación y antes de empezar el desarrollo del siguiente grupo principal de nuestra clasificación, Escultura con Conceptos de Cálculo, creemos que debemos **resumir los diferentes tipos de geometría** que hemos estudiado en estos últimos apartados, con el fin de intentar aclarar los grupos de nuestra taxonomía. Como veremos algunos de estos tipos de geometría, también se consideran en sí mismas áreas específicas de Matemáticas. Sin embargo, y debido a su importancia para la Escultura Matemática, en nuestra propuesta de clasificación los hemos supuesto grupos principales diferentes al primero, Escultura Geométrica.

Figura 329 (derecha): Sebastián, “Hiper cubo”. Maqueta en cartón, 100 x 100 x 100 cm. Año 2002.





La siguiente clasificación de la Geometría está basada en el libro de la referencia [47], de **Jan Gullberg**. Sin embargo, nosotros la hemos extraído de la versión traducida del inglés, de la pagina web de referencia [PW16]. Ésta ha sido recopilada por **Juan Luis Martínez** y titulada *Naturaleza de los Fractales*. También la hemos utilizado para elaborar el resumen teórico anterior. Es la siguiente:

Figura 330: Sebastián, “Cubo Fractal”. Metal con tratamiento superficial de envejecimiento por recubrimiento salino. Tamaño 99 x 93 x 93 cm. Años 1993-1995.

Geometrías Euclidianas. Las conocidas hasta el siglo XIX, cuando se comenzaron a desarrollar los nuevos tipos de geometría, en los que el postulado de Euclides no es válido.

- **Geometría Euclidiana.** Denominada también geometría clásica o elemental. Es la más conocida e intuitiva.
- **Trigonometría.** Es la que estudia geometría de los triángulos. Se divide en trigonometría plana, para triángulos en un plano, y trigonometría esférica, para triángulos en la superficie de una esfera.
- **Geometría de proyección.** Es la interesada en las propiedades de figuras planas que no cambian cuando un conjunto específico de puntos se proyecta sobre un plano.
- **Geometría Analítica.** Se subdivide en geometría analítica plana, para ecuaciones con dos variables, y geometría analítica sólida, para ecuaciones con tres variables.
- **Geometría Diferencial.** Tuvo su origen cuando matemáticos del siglo XVIII, siguiendo los descubrimientos de Descartes, añadieron el Cálculo diferencial e integral a curvas, superficies y otras entidades geométricas.
- **Análisis Vectorial.** Es la que estudia las cantidades que poseen magnitud y dirección. Éstas son conocidas desde los tiempos de **Aristóteles**, pero su estudio fue iniciado por **Simón Stevin** en la década de 1580. La teoría moderna data de principios de siglo XIX.

Geometrías no Euclidianas. Durante el siglo XIX, algunos excepcionales matemáticos comenzaron a desarrollar otros tipos de geometría para los cuales, al menos, uno de los axiomas de Euclides no se sostiene. Esto dio origen al florecimiento de las Geometrías no Euclidianas.

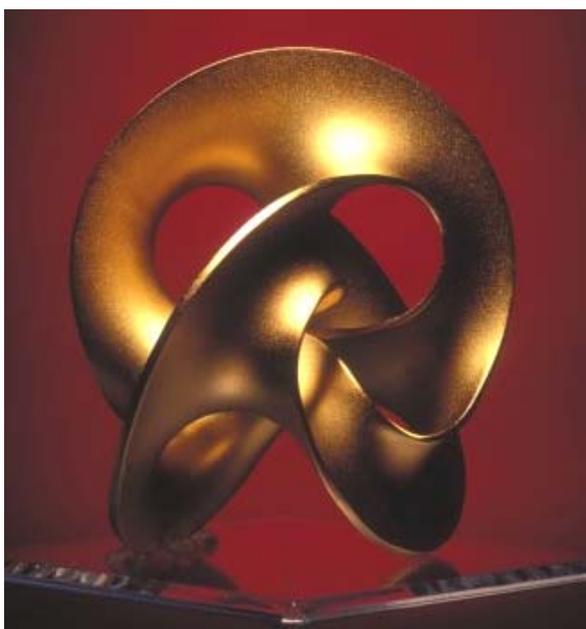
- **Geometría Hiperbólica.** Rechaza el famoso postulado de las paralelas de la Geometría Euclideana, y establece que: “Por un punto fuera de una línea recta dada pasa más de una línea que no interseca dicha línea.”
- **Geometría Elíptica.** También rechaza el postulado de las paralelas y establece que: “no hay líneas paralelas”, y además el que si se extienden suficientemente lejos dos líneas rectas cualesquiera situadas en un plano se encontrarán.
- **Topología.** Se ocupa de las propiedades que no se alteran por deformaciones continuas tales como flexión, “estiramiento” y “torcimiento”.
- **Geometría Fractal.** La adición más reciente al campo de la geometría, estudia las formas y figuras que poseen recursividad y dimensión fraccionaria.

7.2 Escultura con Conceptos de Cálculo

En el capítulo anterior dedicamos un apartado específico a comentar **las dificultades que planteaba dar una estructura a la clasificación de la Escultura Matemática**, aunque en cualquier caso realizamos una propuesta concreta de esta tipificación. También comentamos que catalogaríamos cada caso de obra concreta por las características que creyésemos que “dominan en su concepción” y que afortunadamente esto sucedería en la mayoría de las esculturas. Uno de los grupos principales que contemplamos en la clasificación fue Escultura con Conceptos de Cálculo. En él, **incluiremos aquellas obras en las que en su diseño estén fuertemente implicados, algunos conceptos, procesos o métodos de Cálculo**. Este grupo resulta muy heterogéneo, lo que es lógico dada la gran amplitud y diversidad de los temas que abarca esta parte de las Matemáticas.

Prácticamente cualquier obra de Escultura Matemática, al menos aparentemente, siempre se podrá clasificar en el anterior grupo de Escultura Geométrica, ya que presentará formas geométricas. Las que incluiremos en éste arquetipo, Escultura con Conceptos de Cálculo, será porque en su concepción se haya utilizado algún concepto de este campo, o el proceso de diseño se haya basado en algún procedimiento de cálculo matemático aritmético diferencial, numérico, etc. Además éstos habrán tenido que ser fundamentales en su desarrollo. Los subgrupos que hemos incluido en este grupo de la clasificación son los siguientes: Sucesiones y Series Matemáticas, Escultura con Conceptos de Cálculo Diferencial y Escultura con Conceptos de Cálculo Diversos.

Ya hemos expuesto algunas obras que claramente se incluirían en este grupo. Un caso muy claro es el de alguna escultura de **Javier Carvajal**, que precisamente hemos utilizado de ejemplo para describir el proceso matemático implícito en la concepción de la Escultura. Una clara muestra es “Espirales Multipoligonales”, en la figura 209. Otra obra que también se incluiría en este grupo es la de la figura 210, “Superficie Mínima Costa VI”, de **Helaman Ferguson**. Como se puede ver son realmente muy diversas, lo mismo que los conceptos utilizados. En la primera, la figura 209, los relacionados con sucesiones y series que incluiremos en el siguiente apartado. En la segunda un concepto de cálculo diferencial el de Superficies Mínimas, uno de los más utilizados, por lo que hemos definido un subgrupo para ellas dentro de nuestra clasificación de la Escultura Matemática. Debajo incluimos otra obra “Treefoil (Nudo en Trébol)”, figura 331, que además de conceptos topológicos, también los presenta de cálculo. Ha sido realizada por **Brent Collins**, mediante el programa informático desarrollado en colaboración con **Carlo Sequin** que ya hemos estudiado.



Este grupo de la Escultura con Conceptos de Cálculo, también se podría denominar, Escultura con Conceptos de Análisis Matemático. Antes de estudiarlo, **resumiremos muy brevemente los conceptos y la historia de esta parte de las Matemáticas** basándonos en un texto, el diccionario de la anterior referencia número [9]. **Es la ciencia que emplea los conceptos de infinito e infinitésimo en diversas formas, para desarrollar el Cálculo diferencial e integral.**

Figura 331 (izquierda): Brent Collins. “Trefoil, (Nudo en Trébol)”. Gallery Fourth, Early Modular Surfaces, picture 6; (Galería Cuarta, Primeras Superficies Modulares, imagen 6).

Los orígenes se remontan a la antigüedad. **Arquímedes** (c. 287 - 212 a. C.) desarrolló notablemente el método de las eliminaciones sucesivas establecido por **Eudoxo** (c. 400 - 347 a. C.) y determinó la cuadratura de un segmento parabólico y de otras figuras curvilíneas, además de definir las tangentes a la espiral. En el siglo XVII se inició el cálculo moderno, como consecuencia de los descubrimientos realizados simultánea e independientemente por **Newton** (1642 - 1727) y **Leibniz** (1646 - 1716) sobre el nuevo cálculo y rápidamente se produjeron avances en este campo.

Entre los matemáticos ingleses, que prefirieron servirse de la notación y de los métodos de **Newton**, por ejemplo fluxiones que fue el nombre que dio a las derivadas, cabe destacar a **Brook Taylor** (1685 - 1731) que introdujo las denominadas series de Taylor, mediante las cuales se podían estudiar las funciones por sus series de potencias respectivas. El estadista y matemático francés **Abraham de Moivre** (1667 - 1754), analizó las series trigonométricas y estableció la conocida identidad: $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos (n x) + i \operatorname{sen} (n x)$, muy útil en el tratamiento de los números complejos. **Colin MacLaurin** (1698 - 1746) generalizó y extendió el trabajo del genial Newton sobre las derivadas en su *Treatise on Fluxions* (1742), interesándose especialmente por la convergencia y divergencia de las series.

En la Europa continental, los hermanos **Bernoulli**, especialmente **Johann** (1667 - 1748) y **Jakob** (1654 - 1705) aplicaron muy pronto el cálculo de Leibniz. El marqués **Guillaume de l'Hopital** (1661 - 1704) escribió el primer libro de texto acerca de los nuevos métodos, *L'Analyse des Infiniment Petits* (1696). Otros como **P. Varignon** (1654 - 1722) y **J. Riccati** (1676 - 1754) fomentaron el uso del nuevo cálculo. Gran parte del éxito de las Matemáticas durante el siglo XVIII fue debido al progreso experimentado por la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal. Estas dos disciplinas implican los conceptos de función y continuidad. De hecho, la historia del Cálculo durante los siglos XVIII y XIX es tanto el proceso de definición y aclaración de estos conceptos, como el establecimiento de nuevos procedimientos para alcanzar mayor rigor.

En 1748, **Leonhard Euler** (1707 - 1783) publicó dos volúmenes de título: *Introductio in Analysin Infinitorum*, que constituyen la primera obra en la que el papel principal se adjudica a las funciones y no a las curvas. Aunque la primera definición de función dada por Euler se restringía a expresiones analíticas, que para este genio es sinónimo de ecuación o fórmula algebraica, en su libro: *Institutiones Calculi Differentialis* (1755), introdujo una definición moderna que postulaba que las variables y las funciones se pudieran determinar “por cualquier procedimiento” deseable. La teoría de funciones tiene una importancia para la realización de Escultura Matemática, tanto en la de Superficies, subgrupo anterior, como en algunas de las pertenecientes a éste. Para ilustrar el tema incluimos la figura 332, en la que se muestra una página de un manuscrito de Euler.

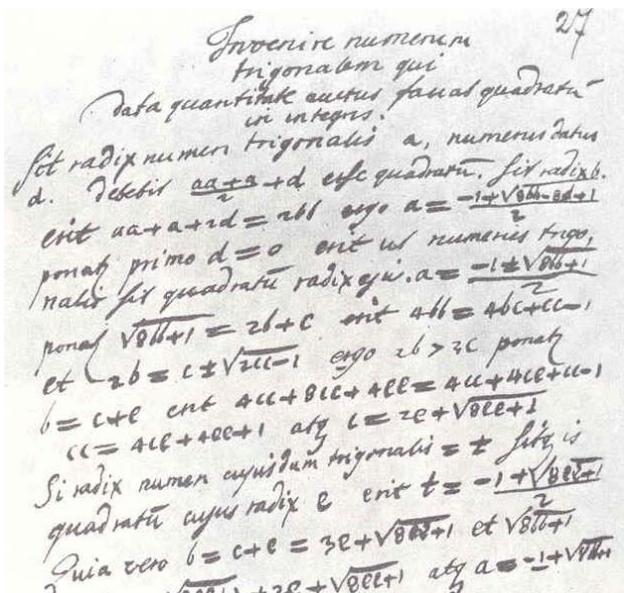


Figura 332: Página de un manuscrito de Euler.

Sin ninguna duda el mayor estímulo para el desarrollo del Análisis en el siglo XVIII proviene de la Física Matemática, por ejemplo la aplicación del método de las series infinitas al problema de la cuerda vibrante. Estos estudios se caracterizaron por el uso de los nuevos conceptos de función y de continuidad, así como por tratar con espíritu crítico las cuestiones básicas.

Karl F. Gauss (1777 - 1855), en 1812, investigó la convergencia de las series trigonométricas. Sin embargo, la mayor aportación al rigor de las demostraciones matemáticas fue debida al texto *Cours d'Analyse* publicado en el año 1821 por **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857).

En este libro Cauchy da la definición de integral entre dos límites y la demostración de que el concepto de integral definida, puede aplicarse a ciertas funciones discontinuas, aportaciones que transformaron completamente el Cálculo. Por otra parte, fueron los estudios de **Joseph Fourier** (1768 - 1830), los que impulsaron a Cauchy a enunciar en el año 1821 su importante definición de continuidad. No obstante, fue **Peter Dirichlet** (1805 - 1859) el primero que definió una función discontinua en todos y cada uno de los puntos de su dominio de definición. Todos estos resultados fueron desarrollados por **Riemann**, quien en 1850 generalizó el concepto de integral de Cauchy, con el fin de hacerlo compatible con otros tipos de funciones discontinuas. Por último, **Lebesgue** (1875 - 1941) y otros matemáticos aportaron otras generalizaciones al concepto de integral.

Aunque para la realización Escultura Matemática el concepto teórico de límite tiene menos importancia, comentaremos que **Karl Weierstrass** (1815 - 1897) investigó profundamente estos temas e introdujo un concepto de límite basado en el método delta-épsilon. El enfoque aritmético del cálculo realizado por Cauchy y Weierstrass mostró que los temas de continuidad y límite, estaban íntimamente relacionados con el continuo de los números reales, estudiados en detalle por **Georg Cantor** (1845 - 1918) y **Richard Dedekind** (1831 - 1916). La aplicación de la teoría de conjuntos de Cantor revolucionó el Análisis en el siglo XX. También hemos de mencionar la contribución de algunos matemáticos, **Marie Jordan** (1838-1922), **Giuseppe Peano** (1858-1932) y **W. Sierpinski** (1892 - 1969), que dedicaron especial atención a la teoría de conjuntos.

Por otra parte, el Análisis se orientó hacia el problema de las ecuaciones diferenciales en el que **Poincaré** y **E. Picard** (1856 - 1941) obtuvieron brillantes resultados. Dentro del campo del análisis funcional, fue **Joseph Louis Lagrange** (1736 - 1813) el primero que implantó el cálculo de variaciones y **P. Lévy** (1886 - 1971) el que acuñó el término “Análisis Funcional”. Es obligado mencionar la importante contribución del grupo de eminentes matemáticos franceses **Bourbaki**, que ha propuesto una visión de las matemáticas basada en una jerarquía de estructuras que va de lo más simple a lo más complejo y de lo general a lo particular. Esta escuela ha procurado en el siglo XX unificar las matemáticas de acuerdo al espíritu de **Hilbert**, un enfoque muy abstracto del Análisis y de todas las demás ramas, basado sobre las estructuras, las relaciones y los axiomas.

Después de este breve resumen del desarrollo histórico del Cálculo que nos ha servido para enfocar las posibilidades de éste en la Escultura Matemática, trataremos de definir los diferentes subtipos planteados dentro de este grupo, Escultura con Conceptos de Cálculo, y para ello mostraremos obras muy concretas que incluiremos en sus subgrupos. Además, su estudio nos servirá para justificar los conceptos matemáticos intrínsecos en estas obras y también nos permitirá caracterizar mejor este tipo de escultura y ilustrar sus grandes perspectivas para el futuro.

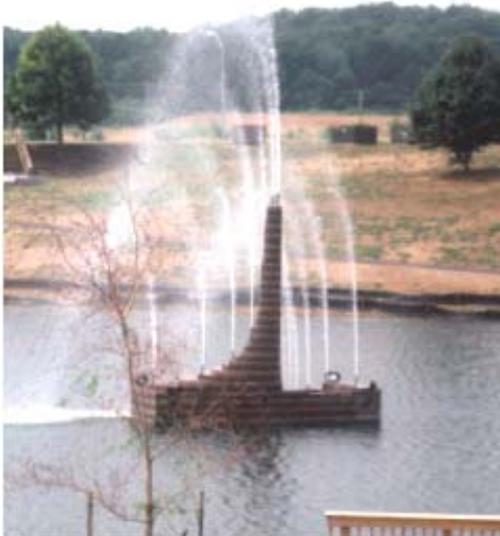
7.2.1 Sucesiones y Series Matemáticas

En este subgrupo de la clasificación de la Escultura Matemática, **vamos a incluir aquellas obras en las que en su diseño está fuertemente implicado el cálculo de sucesiones y series.** Éste se ha podido utilizar por ejemplo para elegir las medidas, características, etc., de las piezas con que se han compuesto las obras. También puede ser la relación entre las medidas de las formas utilizadas.

Figura 333: Helaman Ferguson, “Fibonacci

Fountain (Fuente de Fibonacci): $\left(\frac{1+5^{1/2}}{2^{1/2}} \right)$ ”.

Granito y acero, 2002. Maryland Science and Technology Center. Bowie, Maryland, USA.

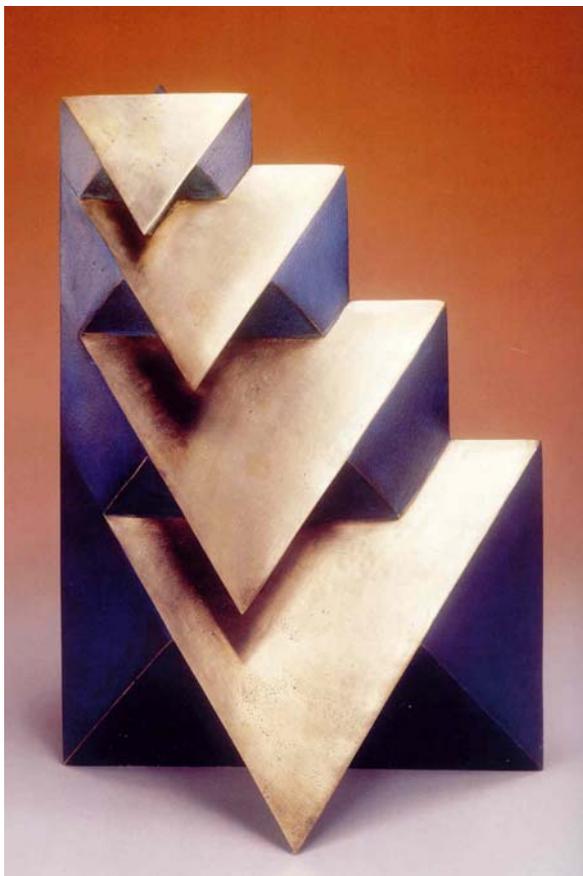


Una obra que se incluiría en este subgrupo es la de la figura 333 en la página anterior, “Fibonacci Fountain”, realizada por el que tal vez sea el escultor “más matemático”, **Helaman Ferguson**. Éste, ha sido utilizado como modelo, tanto en el apartado dedicado a la concepción matemática de la Escultura como en el de la utilización de la Informática. La fotografía de esta obra está extraída de un interesante artículo, referencia [47], en el que se describe el excepcional trabajo de este artista. Este interesante estudio está incluido en un número monográfico: *Artist Using Science & Technology*, de una interesante revista electrónica YLEM. Esta publicación se dedica a este apasionante campo de las relaciones Matemáticas-Arte. Está clara la pertenencia de esta obra a este subgrupo, ya que el autor la **ha diseñado utilizando la sucesión de Fibonacci**.

En el texto de este artículo se refiere que este autor ha realizado esculturas matemáticas de muchos tipos como pueden ser: toros simples y dobles, superficies no-orientables, esferas, bandas de Moebius, nudos en trébol, superficies con cruces, etc. Como se ve la mayoría de estos tipos provienen de la Topología, aunque el concepto matemático que ha primado en el diseño de la fuente anterior de **Helaman Ferguson**, corresponde al Cálculo.

Otra obra en la que en su diseño también se utiliza una sucesión y que por tanto se puede clasificar aquí, es la de la anterior figura 216, obra de **Elias Wakan**. En este trabajo el autor ha ido disponiendo las piezas en capas, utilizando la sucesión más sencilla de todas, la de los números naturales. También **Javier Carvajal**, en este caso español, ha realizado esculturas de este tipo. Un ejemplo claro es el de la anterior figura 209, una escultura titulada “Espirales Multipoligonales”, parte de cuyos bocetos y cálculos se mostraban en la figura 208 que se adjuntaba. En esta obra aparecía la serie armónica (debajo) en los radios vectores de las figuras

$$\begin{cases} \rho_0^2 = 1 \\ \rho_n^2 = \left(1 + \sum_{k=1}^s \cos \left(\sum_{m=1}^k \frac{2\pi}{m+2} \right) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^s \operatorname{sen} \left(\sum_{m=1}^k \frac{2\pi}{m+2} \right) \right)^2 \end{cases}$$



También utilizaba la sucesión de los siguientes valores para los ángulos de esta escultura:

$$\alpha_n = \pi \left(1 - \frac{2}{2+n} \right)$$

Otro claro ejemplo de este empleo de sucesiones en el diseño de una escultura, es los tamaños elegidos por el autor para la forma que se repite cuatro veces en la obra de la izquierda, la figura 334, realizada por el escultor matemático **Sebastián** que ya ha aparecido en muchos y muy diferentes tipos de nuestra clasificación.

A continuación, y para utilizarlo de ejemplo de estudio con cierta profundidad matemática de este tipo de escultura, vamos a presentar el análisis que realizó el escultor Javier Carvajal para la realización de su obra “Espirales $2\sqrt{2}$ ”.

Figura 334 (izquierda): Sebastián, “Equinoccio Quetzalcóatl”. Bronce, año 1993. Tamaño 39 x 19 x 19 cm.

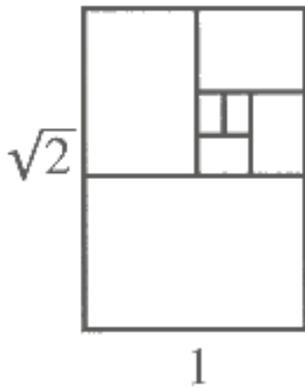


Figura 335: Dibujo de una hoja din A, en el que se muestra la propiedad que ésta posee, al doblarla por la mitad, del lado mayor, resulta otra que mantiene las proporciones de la inicial.

Este autor previamente a esta obra realizó algunas obras del tipo que llamó “Espirales Poligonales”. Javier Carvajal nos dice acerca de ellas: “Cada polígono genera una espiral distinta; cuanto mayor sea el número de lados más perfecta será la espiral, pues sus arcos de circunferencia serán más y de menor grado”.

Después, siguiendo su evolución matemática Javier Carvajal llevó a cabo otro tipo de obras, a las que denominó “Espirales Multipoligonales”. Un ejemplo de ellas es la escultura de la anterior figura número 209.

De estas obras Carvajal nos dice: “Sobre la base del principio anterior, me propongo crear una espiral de tramos rectos en la que participen todos los polígonos. Dos lados de un polígono y el ángulo que forman ya lo definen; con otro lado igual y un nuevo ángulo surge el polígono siguiente y así repetidamente en una sucesión recursiva”. En la página anterior se incluye las fórmulas relativas.

Figura 337 (derecha): Javier Carvajal, “Espirale $2\sqrt{2}$ ”. Perteneciente a su Serie: $\pi r^2 a$. Presentada en la exposición de la Fundación Bancaixa celebrada en Valencia, España.

Javier Carvajal para realizar esta escultura que se muestra en la figura 326 que está situada en el final de la página, se inspiró en las medidas de la hoja din-A; es decir, la clásica hoja rectangular. La figura que se ha adoptado para el papel más común, tiene una interesante propiedad, al doblarla por la mitad del lado mayor, resulta que mantiene las proporciones de la forma inicial. Observar la imagen de la figura número 335, situada a la izquierda en la que se ve el dibujo correspondiente.

Esta propiedad atrajo a este autor y le llevó a la creación de la obra de la figura 326, que incluye en las que llama espirales espaciales y a la que ha denominado “Espirale $2\sqrt{2}$ ”, debido a que los volúmenes sucesivos de esta obra están en proporción $2\sqrt{2}$. En la figura 336 situada en el centro se muestra un croquis que realizó para facilitar su elaboración, en el que se observa una vista en planta del proyecto de este trabajo. Esta imagen nos sirve para mostrar algunos de los conceptos matemáticos que ha utilizado este escultor, Javier Carvajal.

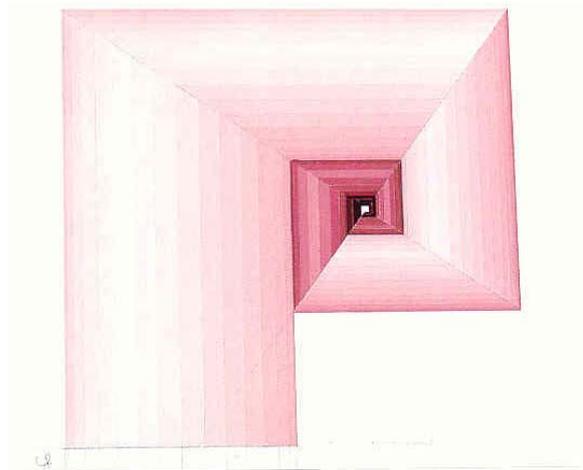
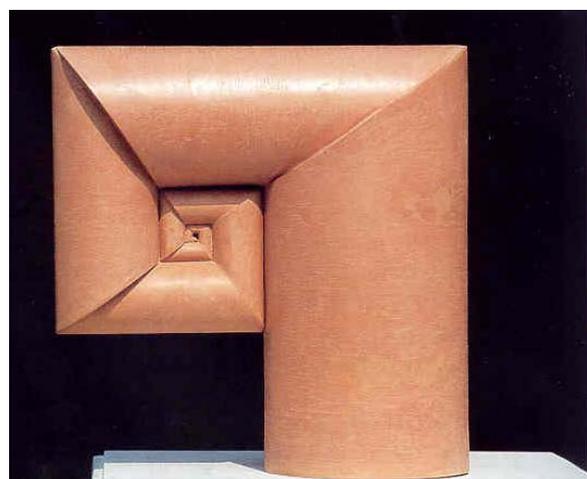


Figura 336 (arriba): Javier Carvajal. Croquis para la elaboración de la escultura “Espirale $2\sqrt{2}$ ”, mostrada en la figura siguiente. Vista en planta.



Javier Carvajal continúa su disertación: “La serie repetida de tramos rectos en el plano bidimensional tenderá a la línea curva, pues me acerco al polígono de infinito número de lados, la circunferencia. Esta espiral multipoligonal expresada en el espacio mediante giros en las secciones del cilindro se elevará progresivamente, y tenderá ahora a la línea recta cuando el giro en cada ángulo sea de 90° . A partir del ángulo recto volverá a decaer pero en sentido inverso”. Esta evolución matemática de Javier Carvajal, a través de los tipos anteriores de escultura, fue la que le llevo a diseñar la obra “Espirale $2\sqrt{2}$ ”, que hemos mostrado en la figura 337 de la página anterior.

En el dibujo de una hoja din-A de la figura 335 en la página anterior, se ve un rectángulo que es dividido sucesivamente por la raíz cuadrada de dos. Esta división genera una espiral, al igual que si se partiese de otro polígono. Además, las diagonales de todos los rectángulos que se formen se cortarán perpendicularmente y seccionarán los cilindros, con los que se ha construido la escultura, en dos ángulos suplementarios de valores $54^\circ 44'$ y $35^\circ 16'$. Se obtendrán unas secciones que serán elípticas y tangentes, circunscritas en los límites de sus ejes. La Geometría Descriptiva nos posibilita conocer en su verdadera magnitud los desarrollos de las distintas partes cilíndricas y las elipses de sus secciones, correspondientes a los dos planos con que corta perpendicularmente al cilindro de partida.

En la siguiente figura, la número 338 debajo, mostramos una página del manuscrito en el que se pueden observar los gráficos y cálculos numéricos que Javier Carvajal utilizó para la realización de esta obra, “Espirale $2\sqrt{2}$ ”. **Las diversas obras que hasta ahora hemos presentado de este magnífico escultor, como se habrá constatado, son conceptualmente matemáticas**, como se puede constatar con el estudio que muestra la figura inferior. En este manuscrito se comprueba que en esta obra además de los conceptos relacionados con las sucesiones, tipo de escultura en que la clasificamos, también intervienen otros como los relativos a cuádricas y en general los de curvas y superficies.

Estas obras pertenecen a la atrayente serie de Javier Carvajal, denominada $\pi r^2 a$, que elaboró entre los años 1991 y 1994, exhibidas en una exposición suya auspiciada por la Fundación Bancaixa y celebrada en Valencia. Para finalizar el análisis de estas esculturas, destacaremos lo evidentes que resultan los conceptos matemáticos que este autor utiliza en sus obras, por lo que cuando podamos seguiremos tomando el trabajo de este autor como modelo para explicar algunos subgrupos de nuestra clasificación de la Escultura Matemática.

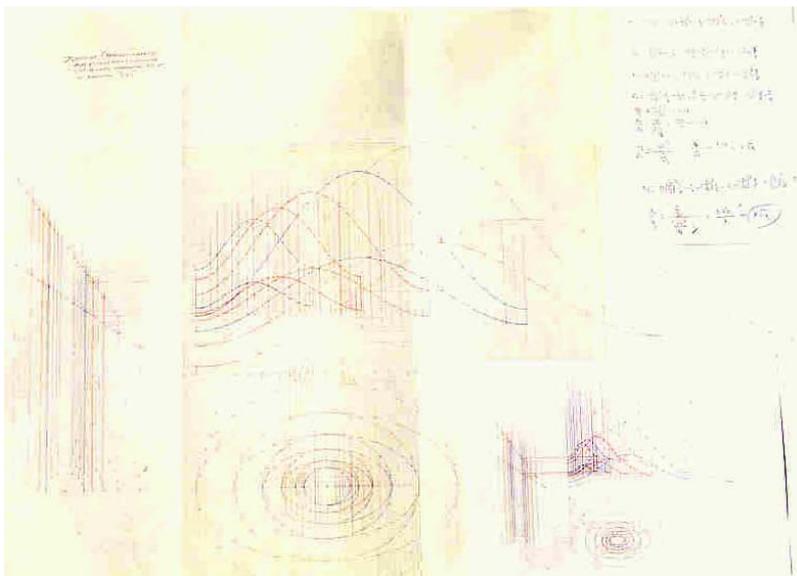


Figura 338 (arriba): Javier Carvajal. Gráficos y cálculos numéricos para la realización de la escultura que se muestra en la figura de la página anterior. “Espirale $2\sqrt{2}$ ”.

Para finalizar este apartado, señalaremos que ya hemos expuesto que otros artistas no puramente matemáticos, como **Mario Merz**, perteneciente al “Arte Pobre”, han utilizado este tipo de conceptos.

Merz en sus obras parte de **la sucesión de Fibonacci**, que aplica en cualquiera de sus trabajos. Coloca “piezas” que repite muchas veces, hasta lograr formar sus composiciones. Un ejemplo de su obra es la que formó disponiendo, paquetes de periódico en el suelo, basándose en los números de Fibonacci.

7.2.2 Escultura con Conceptos de Cálculo Diferencial

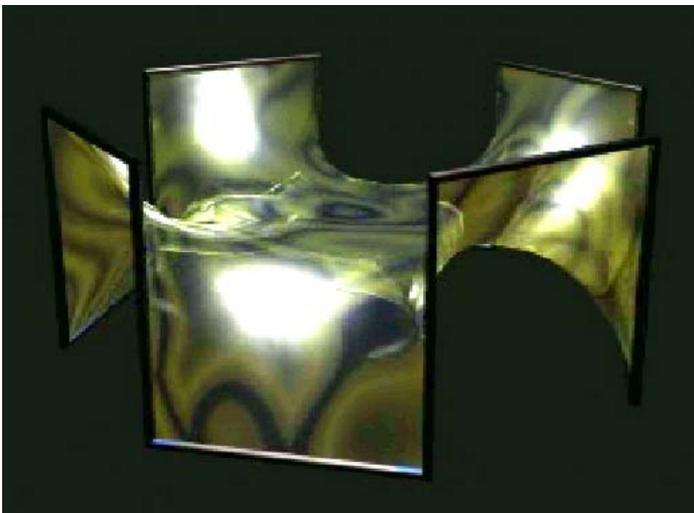
En la introducción de este grupo principal, Escultura con Conceptos de Cálculo, al cual pertenece el presente subgrupo, Escultura con Conceptos de Cálculo Diferencial, hemos incluido un resumen muy breve del desarrollo histórico del Cálculo. En este somero estudio se ha podido comprobar algunas de las posibilidades que presenta este tipo de cálculo para su utilización en la Escultura Matemática. Además, **los contenidos que abarca esta parte de las Matemáticas son muy amplios** y algunos de ellos claramente aplicables a esta escultura. Los ejemplos de obras que veremos serán muy diversos, como superficies mínimas de varios tipos, ecuaciones diferenciales, matemáticas del caos de la que mostraremos un ejemplo, el atractor de Lorent, etc.

Sin embargo, creemos que en la práctica hasta el presente en la Escultura Matemática **no se han utilizado, suficientemente, las grandes posibilidades del Cálculo Diferencial** y por lo tanto no podremos mostrar muchas obras que se clasificarían en este grupo, excepto eso sí, trabajos escultóricos relacionados con un concepto íntimamente relacionado con este Cálculo, el de ser una Superficie Mínima o de Curvatura Media Nula. Este tipo ha sido profusamente utilizado en la Escultura, como se podrá comprobar en el siguiente apartado, en el que describiremos el subgrupo de nuestra clasificación correspondiente a este concepto de superficie mínima.

Insistimos en que existen muchos ejemplos de obras escultóricas en las que en su diseño se ha utilizado casi todos los tipos de sólidos, desde los más sencillos como son la esfera, el cono, el cilindro, el prisma, la pirámide, a los más complicados poliedros irregulares o superficies descritas por ecuaciones matemáticas muy complejas. Si estas obras simplemente tenían las formas de estas figuras, las clasificábamos en el grupo Escultura Geométrica. Sin embargo, para que una escultura pertenezca al presente subgrupo, Escultura con Conceptos de Cálculo Diferencial, **tiene que ser muy evidente la utilización en su diseño o realización de un concepto, proceso o propiedad de esta área del Cálculo.**

7.2.2.1 Superficies Mínimas o de Curvatura Media Nula

Las superficies mínimas son superficies en las que el área local está minimizada; esto es, adopta la superficie de menor valor de área posible, para la curva frontera dada. Como hemos expuesto reiteradamente, este tipo de superficie ha sido profusamente utilizado en la Escultura Matemática por lo que hemos decidido crear un subgrupo específico en nuestra clasificación, el de Superficies Mínimas o de Curvatura Media Nula. En los capítulos anteriores ya hemos expuesto algunas obras de este tipo. De hecho, la escultura realizada por Brent Collins que hemos utilizado como portada para la introducción de la tesis, la figura 1, era también una superficie mínima.



El caso más sencillo, casi diríamos trivial, de este tipo de superficie es el de una porción de plano. La curiosa característica de adoptar la superficie de menor valor de área posible para una frontera dada, se ilustra en la figura 339, ya que una película de jabón es una superficie mínima.

Figura 339 (izquierda):
Ejemplo de superficie mínima o de curvatura media nula, formada por una película de jabón.

Uno de los ejemplos más típicos de superficie mínima es el de una de las cuádricas más utilizadas en el arte Matemático, el **paraboloide hiperbólico**, que como ya hemos comentado es simultáneamente una Cuádrica y una Superficie Reglada. Como será conocido es también una Superficie Mínima o de Curvatura Media Nula. El inconveniente que todo esto nos presenta es que en la clasificación que hemos propuesto existen grupos diferenciados correspondientes a cada uno de estos tres conceptos. Cuando ocurra esto en una Escultura Matemática, el que exista esta simultaneidad, intentaremos en cada situación concreta de obra o de tipo, clasificarla dentro de uno de los subgrupos de nuestra taxonomía. En el caso de obras con formas de paraboloide hiperbólico, ya dijimos que excepto que explícitamente en la escultura se mostrase la forma de la superficie reglada, la clasificaríamos como Cuádrica, como en el caso de la obra de la anterior figura 289, en la cual se podía ver una fotografía de la cubierta con paraboloides hiperbólicos del restaurante del Oceanográfico de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia. Su autor **Santiago Calatrava**, utiliza muy frecuentemente esta forma y las de otras superficies mínimas.

Hasta el siglo XIX, aparte de las anteriormente comentadas, pocas más formas de estas superficies eran conocidas, sin embargo se sabía que la catenoide y el helicoide lo eran. A finales del siglo XIX, y a lo largo del XX se descubrieron otros muchos tipos. En la Escultura Matemática se han utilizado muchos arquetipos y de gamas muy diferentes de **Superficies Mínimas, como son las de Scherk, Costa, Enneper**, etc., que han sido denominadas así en honor a los matemáticos que las estudiaron. Un ejemplo nuevo de trabajo, que clasificaremos en este subgrupo es la que se muestra en la figura 340 (debajo) realizada por **Brent Collins**. A este escultor matemático, lo mismo que a otros, le atrae mucho la forma de estas superficies y las ha empleado frecuentemente. Véase al respecto las ponencias de las anteriores referencias [30] y [38]. Otras obras ya expuestas que clasificaremos en este grupo son las de las figuras 210, 223, 238, 262 y 331.



Desde una visión matemática, las superficies mínimas presentan también la propiedad de que su **curvatura media es nula**. Por esta causa, creemos que puede ser útil recordar los conceptos relacionados con la curvatura. En cualquier caso, la idea de curvatura resulta muy intuitiva, por lo que no incluiremos su estudio algebraico en la tesis. Mostraremos este concepto de una forma práctica y para ello incluimos la gráfica de la figura 341, situada al principio de la página siguiente.

Es un ejemplo de una gráfica de una superficie, en la cual se representa su curvatura mediante una escala de colores. Esta imagen está extraída de la ayuda de Matlab, pero resulta bastante similar a otras representaciones que se pueden obtener con muchos de los programas informáticos de matemáticas habituales. Los más comunes ya los hemos comentado de forma muy breve en el apartado correspondiente.

Figura 340 (izquierda): Brent Collins. Gallery Fourth, Early Modular Surfaces, picture 5; (Galería Cuarta, Primeras Superficies Modulares, imagen 4). Madera. Fotografía de Phyllip Geller.

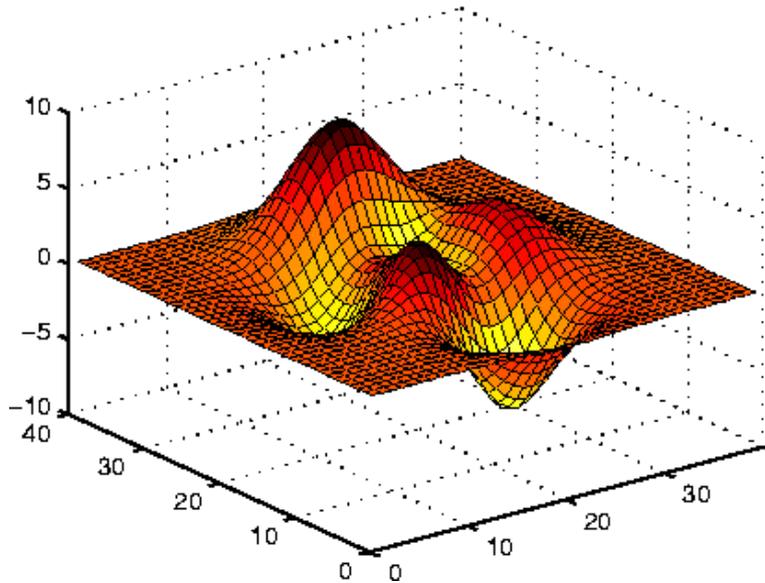


Figura 341 (arriba): Ejemplo de estudio de la curvatura de una superficie. Imagen extraída de la ayuda del programa Matlab.

Matlab dispone de los comandos adecuados para calcular el Laplaciano. Después, para representar la superficie, asocia la curvatura al color, mediante la graduación en función de una escala de colores. Con ello se puede estudiar de forma gráfica la curvatura de cada porción de la superficie. En el ejemplo de la imagen de la superficie de la figura 341, los colores más oscuros son los de curvatura convexa mirando desde arriba, y los colores más claros son los de curvatura cóncava. Las sentencias necesarias en Matlab para conseguir la representación gráfica de una superficie son muy sencillas, como se comprueba con las que se ha de introducir para la figura anterior, que incluimos debajo. En esta representación se utiliza la función de ejemplo que lleva implementada el programa y que está definida por el comando “peaks”, un modelo de superficie muy interesante.

```
P = peaks(40);
C = del2(P);
surf(P,C)
colormap hot
```

Entre las superficies mínimas también existen las que presentan formas con “agujeros”, como pueden ser las de Scherk y Costa, que enseguida estudiaremos. La superficie utilizada en la obra de **Brent Collins** de la figura 340, en la página anterior, ilustra estas formas.

El tema que acabamos de plantear **la existencia de superficies mínimas con “agujeros”**, nos provoca problemas a la hora de clasificar las obras que se basan en estas formas, ya que también se podrían incluir en otro de los grupos principales de nuestra clasificación, Esculturas Topológicas. En general estas esculturas las incluiremos en el presente subgrupo, excepto que presenten otras características más “acusadas” que la mencionada de ser superficie mínima. Para ilustrar estas formas incluimos un ejemplo muy claro, el de la figura 342 a la derecha, que corresponde a **la superficie mínima de Scherk más simple**.

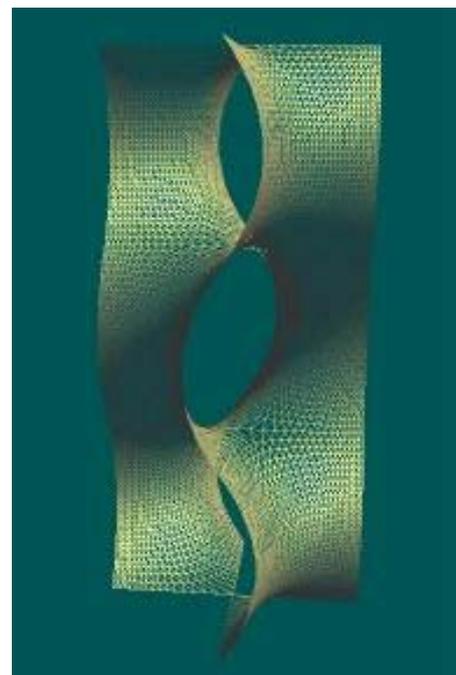


Figura 342: La superficie mínima de Scherk más simple.

Los programas de Matemáticas permiten dar información visual del valor de la curvatura de los puntos de las superficies en sus representaciones. Matlab uno de los programas de este tipo más conocidos, para realizar el análisis de la curvatura se basa en el estudio del signo del determinante de la matriz Laplaciana (Laplaciano).

Si utilizamos como ejemplos las ecuaciones de superficies, contenidos en la ayuda de este programa, el Laplaciano de una superficie es positivo para funciones como $x^2 + y^2$, y negativo para funciones como $-(x^2 + y^2)$.



Figura 343 (arriba): Imagen virtual utilizada en el diseño de la escultura de Brent Collins (en la figura 333 debajo): “Hiperbolic Hexagon, (Hexágono Hiperbólico)”.

Las superficies mínimas de Scherk, que los escultores de habla inglesa denominan, Scherk minimal surfaces, fueron descubiertas a mediados del siglo XIX, por el matemático **H. F. Scherk**. Su caso más sencillo es el que hemos mostrado en la figura 342, en el final de la página anterior.

Resulta fácil imaginar cómo se genera la superficie de esta figura. Para ello simplemente hay que disponer de dos bandas de un material deformable. Estas “tiras”, en intervalos regulares de los bordes y alternativamente, se giran 180 grados, un intervalo sí y otro no, enfrentando las caras opuestas conseguidas. Uniéndolas en esta posición se forma la superficie mínima de Scherk más simple que se denomina de segundo orden. Este proceso se puede realizar con **un número creciente de bandas, consiguiendo formar otras superficies mínimas de Scherk más complejas**. Éstas se denominan en función del aumento en el orden: tercera, cuarta, etc.

No resulta difícil imaginar el “efecto logrado” con mayor número de bandas. En cualquier caso, para observar las formas que se pueden conseguir, se puede observar la figura 221. En esta imagen situada en el apartado dedicado a la Informática y la Escultura Matemática, se observa la pantalla de trabajo de un programa para elaboración de escultura mediante ordenador. Este software denominado “**Collins Sculpture Generator**”, permite realizar superficies mínimas de Scherk y surgió de la colaboración entre Carlo Sequin y Brent Collins para el diseño de Escultura Matemática mediante ordenador. Para profundizar en el estudio de estas superficies es realmente interesante la ponencia del profesor de la universidad californiana de Berkeley **Carlo Sequin**, titulada *Computer augmented inspiration*, en la referencia [30], ya utilizada varias veces en esta tesis. Este profesor y escultor es uno de los mejores investigadores en Escultura Matemática.

Otra ponencia de Carlo Sequin que resulta sumamente interesante para profundizar en este estudio de las que denomina, “saddles surfaces” (superficies de silla de montar), es la titulada *Volution's Evolution*, referencia [49]. Ambas se encuentran en los libros de actas publicados por los congresos periódicos que celebra la asociación ISAMA, posiblemente los mejores del tema de la Escultura Matemática.

Como ya hemos comentado fruto de la colaboración entre Carlo Sequin y Brent Collins, fueron sus estudios sobre las formas logradas cuando las superficies mínimas de Scherk se deformaban hasta formar un anillo. Un ejemplo de obra escultórica con estas características se muestra en la figura 344 a la derecha.

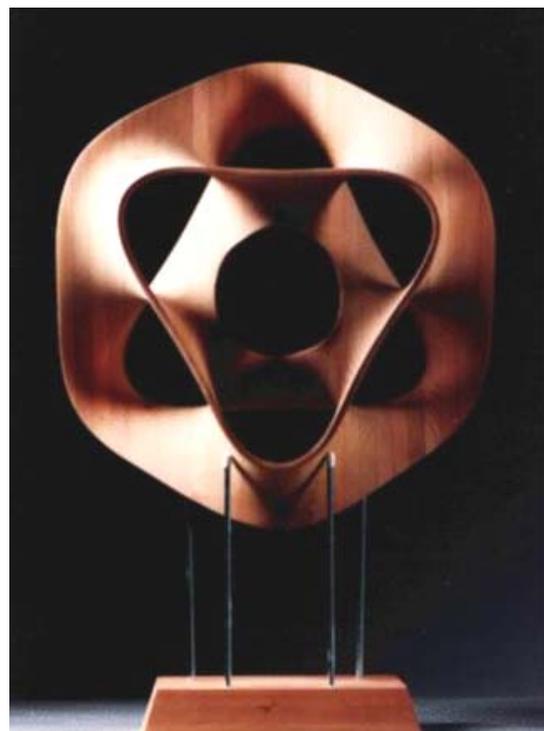


Figura 344 (derecha): Brent Collins, “Hiperbolic Hexagon, (Hexágono Hiperbólico)”. Madera; 1995.

En esta obra de **Brent Collins** de la fotografía del final de la página anterior, y según se comenta en el estudio de la referencia [30], ya mencionada, nos muestra una superficie mínima de Scherk formada por “seis pisos” dispuestos en forma toroidal. También estos investigadores han experimentado con diferentes configuraciones de estas “sillas en anillo”, variando el número de agujeros y el giro efectuado antes de “juntar” los dos extremos de la porción de superficie de Scherk utilizada. Este autor ha creado otras esculturas basadas en las superficies mínimas de Scherk de diferentes órdenes y dispuestas de diferentes formas, en torre, en cruz, etc. Otras superficies mínimas relacionadas son las de Costa, que estudiamos a continuación.

Las superficies mínimas de Costa reciben esta denominación en honor del matemático, **Celsoe Costa**, que fue el primer matemático que las estudió y el que formuló sus ecuaciones. Para imaginarlas se inspiró en el movimiento que describen las faldas de las bailarinas. Las teorías de este investigador brasileño, se aventuraron casi un siglo después que las de Scherk y supusieron un gran desarrollo en el estudio de las superficies mínimas que presentan agujeros. Otro matemático, **Hoffman**, a partir del trabajo de Costa, probó matemáticamente la existencia de una familia de este tipo de superficies.

El conjunto más sencillo de estas formas se puede entender como una composición de una catenoide y un plano, en la cual a lo largo de la línea circular de intersección entre las superficies se forma una combinación de “sillas y agujeros”, que resulta relativamente similar a la serie alternativa de éstos en la superficie mínima de Scherk de segundo orden. En el caso más simple hay una serie de “sillas y agujeros” de cuatro “pisos” en la superficie. Se pueden formar estructuras más complejas, incrementando el número de “pisos”. Este tipo de superficies también se podrían formar si se realiza la composición de la catenoide con paraboloides, y se sitúa en las líneas de intersección entre ellas cadenas de “sillas y agujeros”. Un ejemplo muy sencillo de su utilización en la Escultura Matemática es el de la figura 345, debajo, otra interesante obra de **Brent Collins** que resulta ser uno de los mejores escultores matemáticos que hemos encontrado.



Otro artista que está considerado uno de los más sobresalientes escultores matemáticos, el norteamericano **Helaman Ferguson**, tiene varias obras en esta línea de concepción. Algunos de sus mejores trabajos están basados en las superficies mínimas de Costa.

En la figura 210 ya expusimos un interesante ejemplo de una obra en la que Helaman Ferguson utilizaba un caso de este tipo de superficies. En las anteriores figuras números 238 y 262 presentábamos otras esculturas de este autor que también estaban basadas en las superficies mínimas de Costa. Todas estos trabajos nos sirven para ilustrar **las grandes posibilidades que poseen el tipo de las superficies mínimas para la realización de obras escultóricas.**

Figura 345 (izquierda): Brent Collins. “Costa Surface (Superficie de Costa)”. Gallery Fourth, Early Modular Surfaces, picture 4; (Galería Cuarta, Primeras Superficies Modulares, imagen 4). Año 1997. Fotografía de Phyllip Geller.

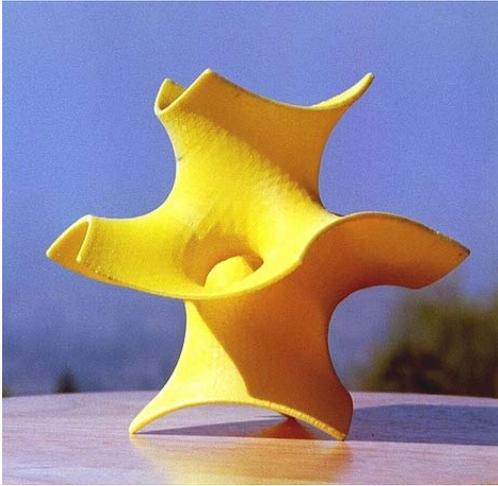


Figura 346 (arriba): Carlo Sequin. “Costa, 3ms; Costa’s minimal surface”. Modelo de superficie mínima o de curvatura nula de Costa.

Ya hemos mencionado reiteradamente, la página web del profesor y escultor **Carlo Sequin** (referencia [PW1]), ya que creemos que puede que sea la mejor de las webs dedicadas a la Escultura Matemática. También incluye un estudio realmente interesante de este tipo concreto de escultura que le atrae especialmente. Además incluye imágenes muy diversas para ilustrar su investigación en este campo. A continuación exponemos algunas de las que ha reunido en una colección de modelos matemáticos (ruta sequin/GEOM/MATHmodels), a la que se puede acceder desde su página principal.

Entre las fotografías de dicha colección se encuentra la figura 346, expuesta a la izquierda, un ejemplo que ilustra perfectamente las posibilidades de este tipo de escultura basado en las superficies mínimas de Costa que en este caso ha sido realizada por él mismo.

Otra escultura en la misma línea pero un poco más compleja, ya que ha aumentado el número de “pisos”, es la que mostramos en las figuras números 347 y 348, ambas situadas debajo. Estas dos fotografías son dos vistas de la misma escultura. En su ponencia ya referida *Volution’s Evolution*, referencia [49], este autor expone el profundo estudio geométrico y topológico que ha realizado acerca de estas obras.



Figura 347 (izquierda): Carlo Sequin. “Stack of two mirrored Volution 1; Costa’s minimal surface”. Modelo de superficie mínima o de curvatura nula de Costa. Vista I.



Figura 348 (derecha): Carlo Sequin. “Stack of two mirrored Volution 1; Costa’s minimal surface”. Modelo de superficie mínima o de curvatura nula de Costa. Vista II.

Hay otros tipos de estas interesantes superficies, como por ejemplo **las Superficies Mínimas de Enneper**, que también han servido de inspiración a algunos escultores matemáticos. En esta página mostramos dos ejemplos.

En la figura 349, derecha, se observa una sencilla forma basada en este tipo de superficie y titulada precisamente, “Enneper’s Minimal Surface”. Está realizada por un escultor que aparece por primera vez, **Stewart Dickinson**. Debajo en la figura 350, vemos otra obra de este tipo realizada en nieve por **Carlo Sequin**.



Figura 349 (arriba): Stewart Dickinson. “Enneper’s Minimal Surface (Superficie Mínima de Enneper)”.

Por último, comentaremos que existen otros tipos de Superficies Mínimas diferentes a las anteriores que también pueden ser usadas en la Escultura Matemática. Estas superficies se suelen denominar con el nombre del matemático que las descubrió o investigó, como las de: **Schwarz, Schoen, Stewart, etc.** Las superficies mínimas son unas formas que sorprenden muy gratamente al espectador, por lo que creemos que en el futuro se incrementará significativamente su aplicación en la Escultura Matemática. También hay que tener en cuenta que en la actualidad siguen siendo investigadas por algunos expertos en este campo de las relaciones Matemáticas-Arte, por lo que se descubrirán otros nuevos tipos de estas superficies que también se utilizarán en la Escultura.



Entre los últimos tipos de Superficies Mínimas que han sido investigados, se encuentran las que han sido denominadas “Sphere Eversions”. Para el estudio de este tipo concreto es muy interesante la ponencia de la referencia [50], en la que el profesor **John Sullivan** describe su trabajo con este sorprendente tipo de superficies. Este texto se titula *The Optiverse and Other Sphere Eversions*.

En el siguiente apartado de la clasificación describiremos el subgrupo Otros Conceptos de Cálculo Diferencial, en el cual hemos incluido obras en las que se utiliza la curvatura y algunas basadas en otros conceptos.

Figura 350: Carlo Sequin. “Enneper’s Minimal Surface (Superficie Mínima o de curvatura nula de Enneper)”. Realizada en nieve.

7.2.2.2 Otros conceptos de Cálculo Diferencial

Aunque ya hemos comentado que tal vez las Superficies Mínimas sean el campo del Cálculo Diferencial, cuya aplicación resulta más fecunda en Escultura Matemática, dada la gran diversidad de los temas que abarca hemos decidido incluir en nuestra taxonomía un subgrupo genérico en el que se clasificarán todas las obras que sean conceptualmente de Cálculo Diferencial, pero que no sean concretamente una Superficie Mínima, las del subgrupo específico anterior.

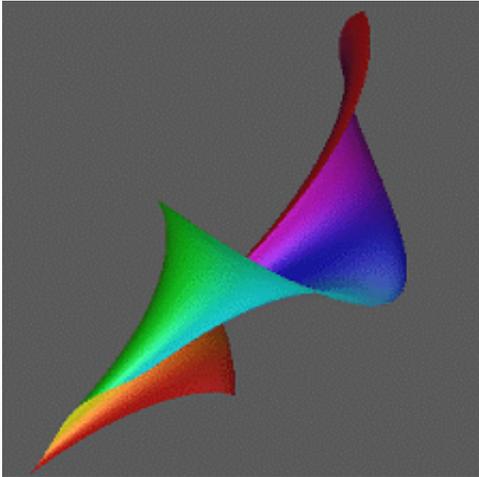


Figura 351 (arriba): Ejemplo virtual de una superficie con curvatura negativa la denominada de Dini. Realizado por Carlo Sequin.

Creemos que en la elaboración de Escultura Matemática también se pueden utilizar superficies que se caractericen por poseer una curvatura que resulte atrayente, aunque ésta no sea mínima. Un ejemplo puede ser las **superficies con curvatura negativa** como la pseudoesfera. En la figura 351, una imagen virtual, mostramos un caso concreto que se denomina **superficie de Dini**. Para conseguir esta forma hay que deformar una pseudoesfera mediante la aplicación de una torsión constante.

En el apartado de este capítulo dedicado a las Geometrías no Euclídeas, ya hemos estudiado la **pseudoesfera** y hemos incluido una imagen suya, la anterior figura número 318. En definitiva, pensamos que existen otras superficies que poseen curvaturas con grandes cualidades estéticas y por tanto creemos que presentan buenas perspectivas para su empleo en el diseño de Escultura Matemática.

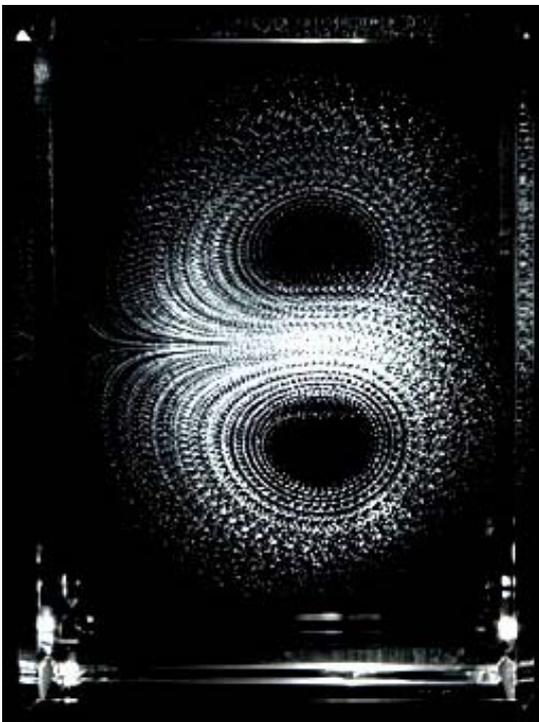


Figura 352: Bathsheba Grossman, “The Lorenz Attractor Cristal, (Cristal del Atractor de Lorent)”. Tamaño aproximado 6,5 x 6,5 x 8 cm. Vista de frente.



Figura 353: Bathsheba Grossman, “The Lorenz Attractor Cristal, (Cristal del Atractor de Lorente)”. Vista lateral.

Con respecto a la inclusión de una obra en el presente subgrupo, lo mismo que para su enclavamiento en el de Escultura con Conceptos de Cálculo, tiene que ser “evidente” que en su diseño se ha utilizado un método o concepto de Cálculo Diferencial o asociado a él. Como sucede otras veces algunas obras, al menos aparentemente, también se podrían clasificar en algunos de los subgrupos del grupo de Escultura Geométrica, ya que presentarán una forma geométrica concreta de cualquiera de las incluidas en sus subgrupos.

Aunque en este primer grupo de nuestra clasificación, Escultura Geométrica, ya hemos incluido un subgrupo específico dedicado a las Geometrías no Euclídeas y otro a la Geometría Fractal, creemos que hay obras escultóricas en las que lo que destaca es, no sólo estas geometrías sino los métodos o conceptos relacionados con el Cálculo Diferencial que han intervenido en su concepción. Debido a ello las clasificaremos en el presente subgrupo. La Geometría Fractal y las Geometrías no Euclídeas y su historia ya han sido explicadas de forma breve en los apartados mencionados correspondientes a sus subgrupos.

Los fractales han sido asociados a la Teoría del Caos, ya que algunas de estos objetos están estrechamente relacionados, aunque hay otros tipos de fractales que en nada tienen que ver con el caos. Como hemos visto, los primeros ejemplos de construcciones matemáticas fractales datan de finales del siglo XIX, mucho antes de que la Teoría del Caos fuese propuesta en la década de 1960. Aún así, ayudada por los increíbles avances tecnológicos de la Informática, esta teoría ha generado varios tipos adicionales de fractales. El Dr. **Edward Lorent**, del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés) es uno de los pioneros en el estudio del caos, a pesar de que Jules Henri Pointcaré ya había formulado el “Efecto Mariposa” en una fecha tan temprana como la década de 1830. Véase al respecto la obra que se muestra con dos vistas diferentes en las figuras 352 y 353, situadas en la parte de debajo de la página anterior.

Estrictamente hablando, la Teoría del Caos es el estudio de los sistemas no lineales, para los cuales el índice de cambio no es constante. Se caracterizan por su carácter impredecible. La climatología y el crecimiento poblacional son buenos ejemplos de sistemas no lineales. Ambos también son fractales. En sistemas no lineales cada estado del sistema está determinado por sus estados anteriores (iteración). Un minúsculo cambio en los valores iniciales puede tener dramáticos efectos en el resultado del sistema.

Gracias al descubrimiento de la Teoría del Caos, de la Geometría Fractal y al de sus posibles relaciones, los científicos han podido comprender cómo sistemas que anteriormente se creían totalmente caóticos, ahora exhiben patrones predecibles. Una de las contribuciones más significativas de la Geometría Fractal ha sido su capacidad para modelar fenómenos naturales tales como: las plantas, las nubes, las formaciones geológicas y los fenómenos atmosféricos. Esta teoría también ha contribuido a otros campos tan diversos como la Lingüística, la Psicología, las técnicas de compresión de imágenes digitales, la superconductividad y otras aplicaciones electrónicas.



Acerca de la utilización de los fractales en el Arte, recordamos que en el apartado correspondiente ya la hemos comentado. En cuanto a la utilización de la Geometría Fractal en las formas o en el diseño de obras de Escultura Matemática, también en dicho apartado, hemos desarrollado las diversas posibilidades e incluido como ejemplo alguna fotografía de las pocas obras existentes.

Figura 354 (izquierda):
Bathsheba Grossman, “Radiant Display”. Cristal y leds.

Sin embargo, existen otros trabajos escultóricos como el que se muestra a través de dos vistas diferentes en las figuras 352 y 353 anteriores, en el que creemos que lo que destaca son los conceptos de Cálculo Diferencial que han intervenido en su concepción, en este caso los relativos al Atractor de Lorent. Este es un trabajo de la escultora **Bathsheba Grossman** que precisamente ha titulado “The Lorenz Attractor Crystal. Esta completa artista matemática, de la cual ya hemos expuesto bastantes ejemplos y muy diversos, resulta francamente innovadora en algunas de sus obras de Escultura. Además en ellas utiliza muchos recursos técnicos, tanto relacionados con la informática, que es el campo preponderante en su formación, como con otras técnicas como la electrónica, la iluminación, etc.

Por último en la figura 354, situada al final de la página anterior, incluimos otro ejemplo de esta escultora Bathsheba Grossman bastante similar al que acabamos de comentar. Estas obras son iluminadas mediante “leds” que en el caso de esta última permiten colorearla de forma que vaya cambiando suavemente a lo largo del espectro visual. También este tipo de trabajo nos demuestra que **es posible desarrollar otra clase de escultura muy diferente a la tradicional**, y que este arte puede ser matemático. Por último, insistimos en que creemos que existen nuevos aspectos del Cálculo Diferencial que se pueden aplicar en el futuro en la realización de Escultura Matemática. En definitiva, las posibilidades en el futuro de esta escultura son realmente amplias.

7.2.3 Escultura con Conceptos de Cálculo Diversos

El primer inconveniente que se nos planteó en este subgrupo de la clasificación, fue su denominación. En él, queríamos incluir aquellas obras escultóricas en las que en su diseño estuviese fuertemente implicado el Cálculo, pero en las que no fuesen básicos los conceptos relacionados con sucesiones y series o con el Cálculo el Diferencial, ya que para estos dos tipos concretos de escultura hemos definido los dos grupos anteriores. Debido a estas premisas el presente subgrupo resultará muy heterogéneo.

A continuación, como primer ejemplo de las interesantes posibilidades que algunos métodos matemáticos relacionados con el Cálculo pueden tener para su aplicación en el diseño de obras de Escultura Matemática, sugerimos **la interpolación**. En la figura 355 situada a la izquierda mostramos un ejemplo visualmente muy sorprendente, en el que se ha utilizado interpolación aleatoria.

Esta imagen está extraída de la ayuda del conocido programa Mathematica. Aunque la interpolación es usada por algunos de los programas informáticos para el diseño o la fabricación de Escultura, comentados en el apartado del anterior capítulo, creemos que la **interpolación aleatoria** no ha sido utilizada prácticamente en la concepción de obras de Escultura Matemática.

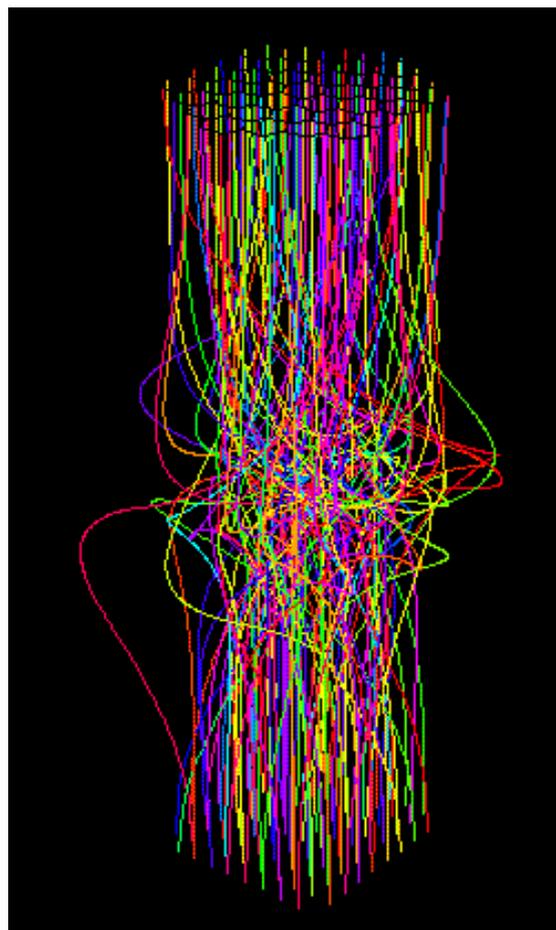


Figura 355 (arriba): Interpolación aleatoria. Ejemplo incluido en la ayuda del programa Mathematica.



Figura 356 (arriba): Ronald Brown; “Constructions in Wood, Moves in Chess: Knight, (Construcciones en Madera, Movimientos en el Ajedrez: Caballo).

Al menos no conocemos ninguna obra de Escultura Matemática que se haya diseñado basándose en la interpolación aleatoria. Sin embargo, este método matemático sí que ha sido utilizado en el diseño de algunas obras pictóricas. Al respecto de este tema se puede consultar el texto de la referencia [51] que se titula: *Beyond Geometry: Experiments in Form, 1940s-1970s*.

Este interesante texto ha sido escrito por **Lynn Zelevansky** y ha sido publicada por la prestigiosa editorial del MIT, Massachusetts Technological Institute (Instituto Tecnológico de Masachuset). En este ensayo se comentan diversas posibilidades que ofrece el desarrollo del Arte Matemático. Esta institución, además, edita otras publicaciones relacionadas con el campo de nuestra tesis.

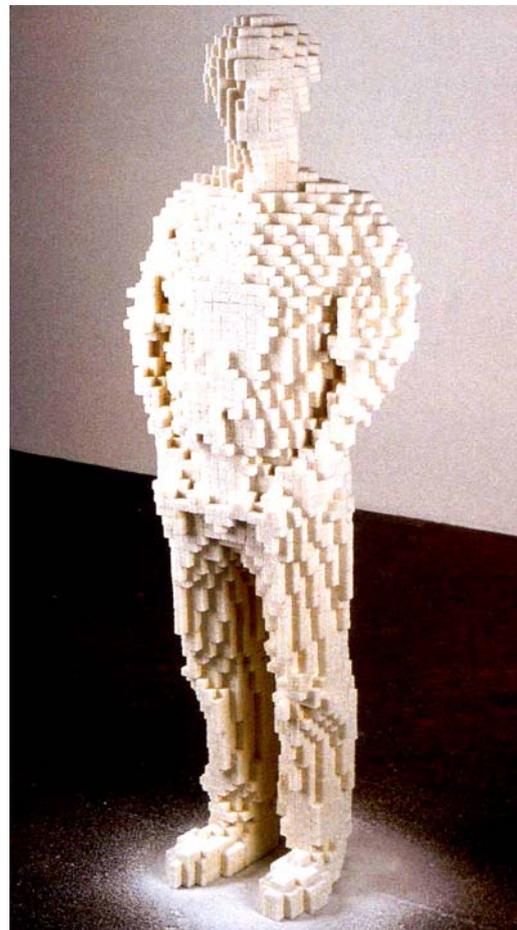
En este texto por ejemplo se estudia una obra de **François Morellet** realizada durante el año 1960, a la que tituló “Random Distribution of 40,000 Squares Using the Odd and Even Numbers of a Telephone Directory”. Esta distribución aleatoria con 40.000 cuadrados se compara con otra obra de **Béla Julesz**, “Random Dot Stereogram (RDS)”, esto es, Estereograma de Puntos Aleatorios. Ambos trabajos son un buen ejemplo de técnicas que pueden resultar muy interesantes para el futuro desarrollo de la Escultura Matemática.

En este subgrupo de la Escultura también se puede incluir algunas obras como la situada arriba, la figura número 256, una obra realizada por **Ronald Brown**. En este trabajo se visualizan los movimientos del caballo del ajedrez, mediante una construcción en madera.

En el presente subgrupo incluiremos también aquellas obras que estén relacionadas con el Cálculo Integral. Un ejemplo de su utilización en la Escultura puede ser la obra de la figura 357, situada a la derecha, que está realizada por el escultor **Ton Friedman** en 1999. Simplemente, utilizando terrones de azúcar consigue realizar una figura humana.

También en esta obra se logra vislumbrar alguna relación con las Matemáticas. Se podría considerar como una descomposición de la figura humana, considerando ésta como una superficie cerrada en el espacio, a la cual se le ha realizado una partición, con rectángulos elementales en vez de con cubos; tal como se haría si se pretendiese calcular su volumen mediante integración triple.

Figura 357 (derecha): Ton Friedman. “Sin título”. Obra realizada con terrones de azúcar. Año 1999. Tamaño 12 x 43 x 25 cm.



7.3 Escultura con Conceptos de Álgebra

En el capítulo dedicado a la introducción de la clasificación hemos aludido a la necesidad de incluir un grupo principal en el que se inscribirían aquellas esculturas en las que en su diseño predominasen los conceptos algebraicos. También hemos ya comentado que catalogaríamos cada caso de obra concreta por la característica que creamos que “domina en su concepción” y que esto afortunadamente sucedería con la mayoría de ellas, aunque en algunos casos su clasificación nos planteará dificultades. En este grupo, **incluiremos aquellas esculturas en las que en su diseño estén fuertemente implicados, algunos conceptos, procesos o métodos Algebraicos**. Éste, lo mismo que otros grupos principales, resulta verdaderamente heterogéneo, lo que es lógico dada la gran amplitud y diversidad de los temas que abarca esta parte de las Matemáticas.

Como también hemos mencionado prácticamente cualquier obra de Escultura Matemática, al menos aparentemente, siempre se podría clasificar en el primer grupo de nuestra taxonomía, Escultura Geométrica, ya que presentará formas geométricas. Aquellos trabajos que incluyamos en el presente grupo principal, Escultura con Conceptos de Álgebra, será porque en su concepción se haya utilizado algún concepto o propiedad de este campo, o el proceso de diseño se haya basado en algún método o procedimiento algebraico. Además estos habrán tenido que ser fundamentales en su desarrollo. Los subgrupos que hemos incluido en este grupo de nuestra clasificación son los siguientes: **Simetrías, Transformaciones, Esculturas Modulares y Operaciones Booleanas**.

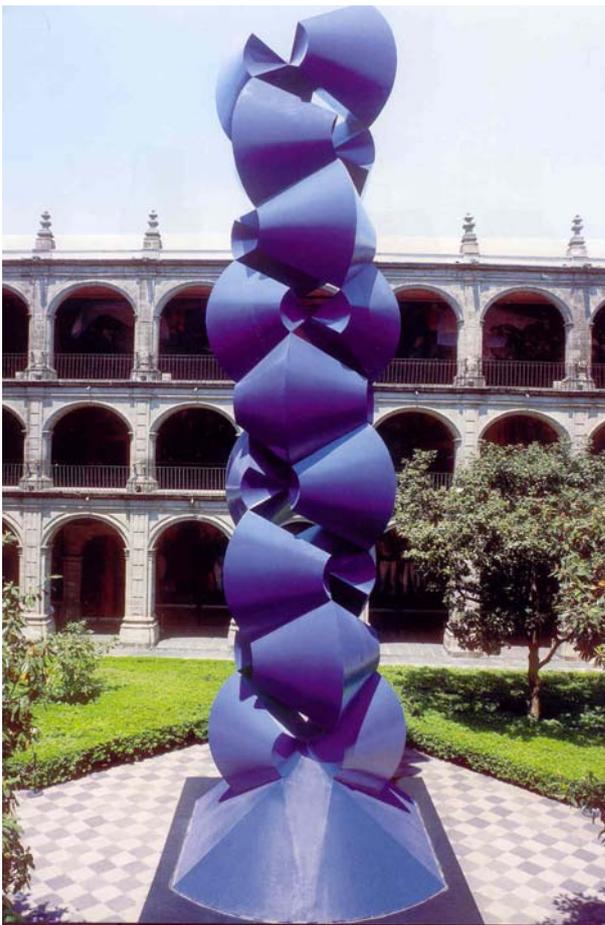


Figura 358: Sebastián, “Soberanita el Genoma Humano”, 2003. Hierro con esmalte acrílico. Altura 17 m.

Creemos que en la elaboración de Escultura Matemática, a veces, se utilizan de forma evidente conceptos, propiedades y métodos algebraicos. Dos Ejemplos muy claros son los siguientes, figuras 358 y 359, que muestran obras en las que en su concepción se ha utilizado muy patentemente el Álgebra.

En la primera de ellas la obra de fotografía de la figura 358, izquierda, se muestra una Escultura Matemática muy interesante de **Sebastián**. La ha titulado “Soberanita el Genoma Humano” y la realizó para la Exposición que organizó la universidad de Méjico capital. Se celebró desde abril a julio de 2004 en el Antiguo Colegio de San Ildefonso. Al respecto se puede consultar la referencia número [35], escrita por **Norman Biron** y otros autores. En esta obra el artista utiliza una única forma de pieza. Con transformaciones en su posición forma esa grandiosa composición. En ella además aparecen diversas simetrías.

En la segunda imagen, la de la figura 359 que está situada al final de la página siguiente, mostramos otra obra, en este caso del escultor matemático, **John Robinson**. Este trabajo se titula “Life” y en él se observan simetrías.

Antes de explicar este grupo de la Escultura Matemática, **resumiremos muy brevemente la historia del Álgebra**. Durante la mayor parte de la historia de las Matemáticas, el Álgebra se ha ocupado del estudio de las leyes correspondientes a los números y a los sistemas de numeración, así como de la resolución de las diversas ecuaciones numéricas o algebraicas o de los sistemas formados por varias de estas ecuaciones. A partir de 1800 el Álgebra amplió su dominio más allá de los números y de las ecuaciones y empezó a comprender teorías de carácter mucho más general, lo que ha permitido el gran desarrollo experimentado.

Algunos de los cálculos realizados por los antiguos egipcios y babilonios (c. 1700 a.C.), se pueden interpretar como los primeros intentos de resolver diferentes ecuaciones. Los egipcios, con su restringido sistema de numeración, resolvieron principalmente ecuaciones lineales o de primer grado, mientras que los babilonios, merced a un sistema de numeración más flexible, fueron capaces de resolver ecuaciones del segundo grado y algunas de grados superiores. Posteriormente los griegos (c. 500 - 300 a. C.) desarrollaron técnicas para la transformación de superficies que pueden considerarse como un tipo de “álgebra geométrica”. Aquí se pone de manifiesto de nuevo las profundas relaciones del Álgebra con la Geometría.

A finales de la edad antigua, Diofanto de Alejandría (c. 250 d. C.) hizo una importante contribución al Álgebra con su obra *Aritmética* que tuvo una gran influencia en los matemáticos posteriores. Por otro lado, los chinos investigaron diferentes cuestiones algebraicas, pero su labor tuvo escasa influencia en las matemáticas de Occidente. Por el contrario, el Álgebra y los estudios numéricos llevados a cabo por los hindúes influyeron de forma notable en la ciencia occidental, que adoptó de ellos el sistema de numeración decimal y su forma de colocar las cifras. Los árabes transmitieron a Occidente el sistema de numeración hindú y desarrollaron ampliamente el Álgebra. **AbūJa'far Muharnmad ibn Mūsa Al-Khwarizmi** (c. 800 - 850) contribuyó mucho a esta labor. Su tratado *Al-jabr wa'lMuqabala* incluía técnicas algebraicas básicas. **La palabra “Álgebra” deriva del árabe al-jabr, que significa “devolución” o “terminación”** y hace referencia a la transposición, al segundo miembro de la ecuación de los términos que aparecen con un signo negativo en el primero. El Álgebra floreció en la Europa occidental durante el Renacimiento. Se adoptó el sistema de numeración hindú-arábigo y se formularon el simbolismo algebraico y sus procedimientos. En Francia, **Nicolás Chuquet** (m.c. 1500) publicó su libro: *Triparty en la Science des Nombres* (1484), que aunque tuvo poca influencia contenía muchos estudios algebraicos.



Figura 359 (arriba): John Robinson, “Life: The Miracle of Replication (Vida: El milagro de la Repetición)”. Altura 40 cm. Acero Inoxidable pulido, 1994. Estudio del artista, Inglaterra.

En Italia, la obra del matemático **Luca Pacioli** (1445-1517), *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* (1494), eclipsó los textos escritos anteriormente sobre Álgebra. Al mismo tiempo que algunos matemáticos alemanes enunciaban técnicas algebraicas diferentes, **Robert Recorde** (1510-1558) en Inglaterra exponía sus conocimientos sobre Álgebra en el libro denominado *Whetstone of Witte* (1557).

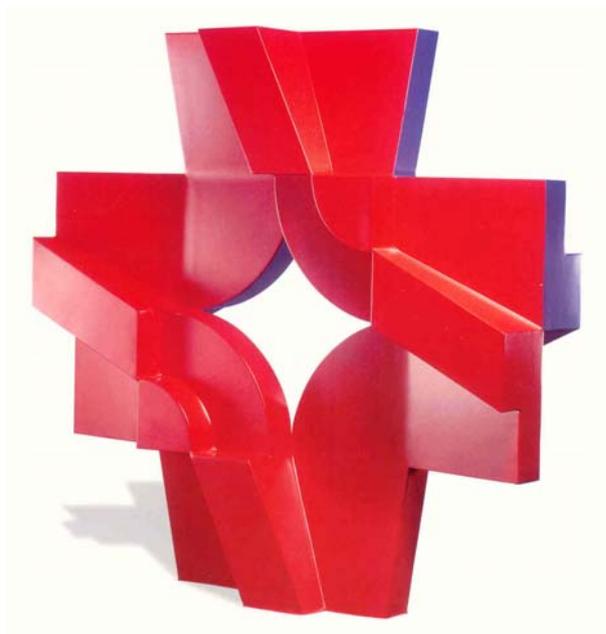
Por otra parte hay que mencionar a tres matemáticos renacentistas italianos: **Ludovico Ferrari** (1522-1565), **Scipione del Ferro** (c. 1465 – 1526) y **Niccolo Tartaglia** (c. 1500 - 1557) que de forma decisiva contribuyeron a la resolución de las ecuaciones generales de tercer grado y de cuarto grado. Por último, **Girolamo Cardano** (1501 - 1576) publicó dichos resultados en su *Ars Magna* (1545).

En los últimos años del siglo XVI, en Francia, **Francois Viète** (1540 - 1603) colaboró en el desarrollo de la teoría y notación algebraicas con su libro *In Artem Analyticem Isagoge* (1591). **René Descartes** (1596 - 1650) en su obra *La Géométrie* (1637) probó la utilidad del Álgebra en la resolución de problemas geométricos (Geometría Analítica), al mismo tiempo que formuló algunos símbolos nuevos. El simbolismo del Álgebra elemental quedó establecido, en su mayor parte, en tiempos de Descartes. Fue preciso que transcurriera algún tiempo para que se aceptaran las raíces negativas y complejas como soluciones válidas de las ecuaciones algebraicas. Sin embargo, en el último período del siglo XVIII los matemáticos se encontraron con la necesidad de probar el Teorema Fundamental del Álgebra que afirma que existe una raíz por cada grado de la ecuación. En realidad, la demostración de este teorema excede el campo propiamente algebraico.

Durante el siglo XIX los matemáticos impulsaron el Álgebra mucho más allá del dominio de los números y de la teoría de las ecuaciones e incluyeron en la misma teorías más generales. Los planteamientos para resolver las ecuaciones de quinto grado y de órdenes superiores, junto con la necesidad de abordar otros problemas, llevaron al establecimiento de las teorías de grupos y de campos, así como a la formulación de la **teoría de Galois**. A partir del año 1843 **William Rowen Hamilton** (1805 - 1865) desarrolló el álgebra de cuaternios. Posteriormente, se formuló la teoría de vectores y cuaternios. Durante este mismo siglo alcanzaron gran relevancia como **elementos algebraicos los determinantes y las matrices**. Antes de finalizar el siglo XIX ya existían gran variedad de estructuras algebraicas con importantes aplicaciones.

A principios del siglo XX los matemáticos consideraban las estructuras algebraicas desde un punto de vista abstracto y axiomático. La publicación en los años 1930 – 1931 de *Moderne Algebra* de **B.L. van der Waerden**, señaló un hito importante en el desarrollo completo del Álgebra en lo relativo al análisis de estructuras algebraicas tales como grupos, anillos, campos, mallas, y espacios vectoriales. Los matemáticos hemos proseguido estudiando el Álgebra de esta forma general y abstracta hasta el presente.

A lo largo de los anteriores apartados y capítulos de la tesis, especialmente en los que se han dedicado concretamente a la Escultura Matemática, ya hemos expuesto algunas otras obras que claramente se incluirían en este grupo, Escultura con Conceptos de Álgebra. Al respecto, se pueden observar las fotografías de las anteriores figuras números: 7, 181, 182, 196, 247 y 252. Incluimos un último ejemplo para caracterizar la escultura de este grupo, antes de pasar a explicar sus subgrupos, el que se muestra en la figura número 360, debajo, que es una sencilla escultura del artista mejicano **Sebastián** titulada “Xóchilt”. En esta obra claramente se observa simetría radial con respecto a los dos planos perpendiculares correspondientes a las dos diagonales.



A continuación vamos a mostrar y estudiar algunas obras escultóricas muy concretas que clasificaremos en este grupo, especificando en cada caso a qué subgrupo pertenecen. La mayoría de los trabajos que escogeremos habrán sido elaborados por algunos de los mejores escultores matemáticos, y nos servirán para tratar de caracterizar mejor estos subgrupos comprendidos en el principal de Escultura con Conceptos de Álgebra y para ilustrar las grandes posibilidades del Álgebra en el futuro de la Escultura.

Figura 360 (izquierda):
Sebastián, “Xóchilt”, 1989.
Hierro con esmalte acrílico.
Dimensiones: 194 x 81 x 61 cm.

7.3.1 Simetrías

Una de las propiedades algebraicas que **más influye en la creación de esculturas es la simetría**, nombre que hemos adoptado para este primer subgrupo. Lo incluimos en este grupo principal de nuestra tipificación, Escultura con Conceptos de Álgebra, y no en el primer grupo, Escultura Geométrica, ya que este primer grupo lo dedicábamos específicamente a la clasificación de obras de escultura en las que lo que predominaba era la utilización de una forma geométrica.



La utilización de los diversos tipos de simetrías en las diferentes artes plásticas es muy frecuente, especialmente en Arquitectura donde suelen ser muy notorias. En la Escultura Matemática la utilización de algunas de estas propiedades es también relativamente habitual.

Un claro ejemplo de utilización de las simetrías en la Escultura puede ser la obra de la figura 361, a la izquierda, una imagen de la obra de **Robert Longhurst “Arabesque”, la versión XXIX**, una de las que ha realizado con este título. En ella se observa una simetría radial con respecto a un haz de planos de eje perpendicular y con ángulos múltiplos de sesenta grados.

Figura 361 (izquierda): Robert Longhurst, “Arabesque, XXIX”. Dimensiones: 31 x 27 x 25 cm.

En el estudio del grupo anterior Escultura Geométrica, concretamente en el de los Poliedros, ya vimos que casi todos estos sólidos también presentaban simetrías de muy diversos tipos. Sin embargo, a pesar de la presencia de estas simetrías las obras que adoptan directamente la forma de un poliedro las hemos clasificado en dicho subgrupo.

En el presente grupo clasificaremos otros tipos de obras de Escultura Matemática. De éstas algunas presentarán simetrías planas y otras tendrán simetrías espaciales. Para no alargar en exceso nuestra tesis, no trataremos de forma teórica el tema de las transformaciones algebraicas, los movimientos y las simetrías del plano y del espacio, etc.



Figura 362 (arriba): Bathsheba Grossman. “Squares 2, (Cuadrados 2)”. Bronce y acero.



Con este fin de no extender la tesis y siguiendo con la filosofía que nos hemos propuesto en este texto de explicar visualmente los grupos de nuestra clasificación de la Escultura Matemática, acabamos el estudio de este tipo con dos últimos ejemplos. En la fotografía situada en el final de la página anterior, la figura 262, podemos ver un atractivo trabajo de la escultora **Bathsheba Grossman**, denominado “Squares 2 (Cuadrados 2)”. Esta obra también nos sirve para mostrar otras investigaciones muy interesantes sobre simetrías realizadas por esta escultora.

Anteriormente, concretamente en la figura número 219, ya se había mostrado otro sorprendente trabajo de esta excepcional artista matemática, Bathsheba Grossman, que también era un claro ejemplo de utilización de las simetrías. Sus obras son siempre muy interesantes desde un punto de vista matemático y en su diseño las suele dotar de una geometría y una topología bastante complicadas.

Figura 363 (izquierda):
Sebastian. “Custodia”. Plata,
2003. Tamaño 60 x 20 x 20 cm.

En la figura 363 situada arriba, vemos una obra de **Sebastián**, otro escultor matemático con trabajos realmente muy diversos. De este autor mejicano ya hemos incluido bastantes ejemplos en diferentes grupos de la clasificación. Este último es una Custodia realizada en plata, en fechas muy recientes, en el año 2003. Sus simetrías son muy interesantes. Su parte superior presenta una simetría plana central, mientras que el tronco la posee con respecto a cuatro planos axiales.

Recordamos que para ampliar los ejemplos de obras de Escultura Matemática de todos los grupos de la clasificación y también concretamente de este tipo de Simetrías, **son muy útiles las páginas web de dos prestigiosas organizaciones internacionales ISAMA y BRIDGES**. Estas dos entidades han sido mencionadas en varias ocasiones, ya que son posiblemente las dos más importantes de las dedicadas a este interesante campo de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Sin embargo, hay que resaltar que las obras mostradas en estas páginas no se encuentran clasificadas, por ejemplo en ninguno sitio se ha creado un grupo para las Simetrías. Insistimos en que no hemos encontrado ninguna estructura de tipología adecuada y en que nuestra clasificación es el primer intento de taxonomía exhaustivo de la Escultura Matemática.

Comentamos la ruta de la primera de estas páginas web la perteneciente a la organización internacional: The International Society of the Arts, Mathematics and Architecture (ISAMA), se puede ver en la referencia [PW25]. La segunda la de la organización BRIDGES, Sociedad para el Fomento de los “puentes” entre las Matemáticas, el Arte y la Música, en la referencia [PW26]. Estas organizaciones en sus congresos internacionales periódicos reúnen a algunos de los mejores expertos en estos temas y a muchos escultores matemáticos. Bastantes también poseen páginas web personales, cuyas **rutas se pueden consultar en el capítulo final de la tesis**.

7.3.2 Transformaciones

Existen algunas obras escultóricas que están formadas por un sólido o conjunto de sólidos matemáticos a los que se les ha aplicado alguna transformación algebraica, como por ejemplo **movimientos como rotaciones o traslaciones y que consideramos fundamentales en su concepción**. Para estas esculturas adoptamos este subgrupo con el nombre de Transformaciones. Sin embargo, para aquellas obras escultóricas que su forma geométrica presentaba una simetría muy evidente habíamos creado el subgrupo específico anterior y por tanto las clasificaremos en él.



Figura 364 (arriba): Daniel Buren, “Le Colonne (Columnas)”. Palais Royal, 1986. París.

En el presente subgrupo las transformaciones más usadas serán **las isometrías espaciales**, esto es, las transformaciones del espacio euclídeo que preservan la distancia entre dos puntos cualesquiera de la figura.

Los tipos de isometrías son los siguientes: rotación alrededor de una recta y con un ángulo conocido, traslación según un vector, reflexión especular y central. Además existen composiciones de estas isometrías anteriores, como son, el movimiento helicoidal, la reflexión rotatoria y la reflexión en deslizamiento.

Existen otros tipos de transformaciones algebraicas, que no conservan las distancias relativas de los puntos de las figuras. Los escultores matemáticos también han estudiado estas transformaciones en alguna obra. Otros temas relacionados que también podrían permitir diseñar escultura son las teselaciones espaciales y las inscripciones de cuerpos sólidos en otro. Otro campo que creemos que en el futuro se desarrollará es el de las redes poligonales, ya que también puede permitir realizar Escultura Matemática. Un estudio muy interesante en el que se muestran algunas posibilidades es el recogido en la ponencia de la referencia [46], escrita por **Patrick Labarque y Johan Verbeke**, y precisamente titulada *Polyhedral Grids composed of Regular Polygons*.

Presentamos un primer ejemplo de escultura incluida en este subgrupo en la figura situada arriba, la número 364. Es obra de **Daniel Buren**, y la ha titulado “Le Colonne”.

Figura 365 (derecha): Andrew Thompson, “In Stillness Moving, (En la Quietud del Movimiento)”. 16 piezas de Piedra de arenisca de Oamaru. Tamaño 140 x 140 x 35 cm. Catálogo n° 43 de la Exhibición Bondi (Exposición: Escultura en el Mar). Australia, 2001.



En esta escultura de la figura 364, mostrada en la fotografía situada en la parte superior de la página anterior, se puede considerar que el autor ha utilizado traslaciones en el plano horizontal en dos direcciones paralelas, para situar las piezas que componen esta construcción. Además ha variado la altura de las piezas, lo que también se podría entender como otra transformación. **En definitiva, creemos que en esta obra destaca son las transformaciones algebraicas, por lo que la incluimos en el presente subgrupo.**

Ya hemos mencionado anteriormente la página web; referencia [PW23], de la exposición internacional *Sculpture by the Sea* (Escultura en el Mar) que reúne a numerosos escultores de todos los tipos. Aunque no está específicamente dedicada a la Escultura Matemática, bastantes de las obras que se exponen son esculturas de este tipo. Eso sucede con el trabajo de una autor que aparece por primera vez en la tesis el que mostramos en la figura 365, situada en la página anterior, una escultura de **Andrew Thompson**, “*In Stillness Moving*, (En la Quietud del Movimiento)”. También se puede considerar que en esta obra ha utilizado traslaciones en el plano horizontal en dos direcciones paralelas para situar las 16 piezas de Piedra arenisca de Oamaru que la componen.

Con respecto a la búsqueda de información para ampliar este tema resulta muy interesante visitar la página web de referencia [PW27], *Modularity in Art*, realizada por **Slavik Jablan** uno de los principales expertos internacionales en las relaciones Matemáticas y Arte. En este texto nos describe sus investigaciones sobre **el uso de las “transformaciones y la modularidad” a lo largo de la Historia del Arte**. Como se puede comprobar este estudio es realmente muy completo y detallado e incluye numerosos ejemplos.



Figura 366 (arriba): Carl Zollo, “Split cube, (Cubo seccionado)”. Acero inoxidable y espejos, 1974. Dimensiones: 395 x 450 x 215 cm. Rochester Institute of Technology, Nueva York, Estados Unidos.

Por último, en la figura número 366 que está situada a la izquierda, incluimos un ejemplo muy diferente, el de otro tipo de obra escultórica en el que las transformaciones algebraicas se aplican a una figura o formas muy sencillas como un prisma o un sencillo poliedro, pero que resultan fundamentales en su concepción, por lo que también la clasificamos en este subgrupo.

Este interesante ejemplo “Split Cube” es un trabajo de un escultor que tampoco había sido mencionado antes, **Carl Zollo**. Es una obra de las más simples posibles, en la que la sencillez de la geometría de un cubo ha sido alterada, seccionándolo en dos partes que después se han rotado y trasladado.

También la obra de la izquierda se ha complementado con otros valores escultóricos como la textura, los colores, la iluminación y la forma de colocar las piezas, con lo que se ha logrado elaborar a partir de esta sencilla figura un precioso trabajo escultórico.

7.3.3 Esculturas Modulares

En este subgrupo clasificaremos **aquellas obras escultóricas en las que un motivo se repite sucesivamente**. Estos módulos pueden tener la forma de cualquier clase de figuras, aunque en general será la de un motivo sencillo que lógicamente se utilizará varias veces en la obra. Hemos decidido separar este subgrupo del anterior de Transformaciones, ya que aunque en general se podría considerar que los “módulos” que componen estas esculturas se encuentran “situados” en posiciones que se podrían obtener mediante transformaciones sencillas como giros y sobre todo traslaciones, en las que clasifiquemos en este subgrupo de Modulares, este tipo de estructura será muy evidente. Este tipo de composiciones “seriadas” se utiliza mucho en el Arte y en concreto en la Escultura contemporánea, aunque para clasificar una obra en este subgrupo le exigiremos más, el que sea conceptualmente matemática. Esto ocurre en la obra de la figura 367, situada debajo. Es de un escultor que aparece por primera vez en la tesis **Michael Waren** y se denomina “Pascua”. El autor utiliza un módulo que es un sector de corona circular y con él forma una “torre”. Esta obra se encuentra situada en el Campus de la Universidad Politécnica de Valencia.

Los “módulos” que los escultores utilizan en sus obras pueden ser figuras de formas muy diferentes. El escultor matemático, **Brent Collins**, también ha realizado diversas esculturas de este tipo, como las que denomina “espirales modulares”. Una de estas es la de la figura 368 en la página siguiente. Este autor repitiendo un determinado cuerpo y colocándolo adecuadamente alrededor de un eje vertical, consigue construir las que ha denominado “Espirales Modulares”.



En la escultura de la imagen referida, la de la figura número 368, este escultor **replica cinco veces un determinado sólido matemático**, limitado por una extraña superficie. Debido a esta utilización de un tipo determinado de superficies curvas, la obra anterior también se podría haber clasificado en el subgrupo específico de la Escultura Geométrica. Por otro lado, esta escultura resulta un estudio topológico muy interesante lo que permitiría circunscribirla en el grupo correspondiente de la clasificación. Sin embargo creemos que lo que más destaca en la obra de la figura 368 es la “modularidad”, debido a ello la incluiremos en este subgrupo.

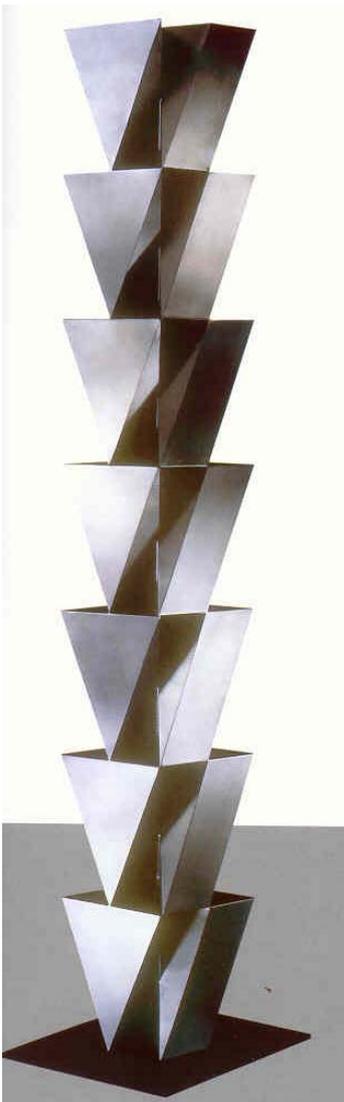
La Topología es un campo matemático muy atrayente para la Escultura, por lo que le dedicaremos específicamente, un grupo principal de la clasificación. En él incluiremos otras obras de este autor.

Figura 367 (izquierda): Michael Waren, “Pascua”. Dimensiones: 500 x 77 x 65 cm. Bronce; 2000. Jardín del Campus de la UPV (junto al Rectorado), Valencia.



A continuación, vamos a mostrar alguna obra más de este tipo de las Modulares, clase que resulta bastante común en la obra de otros escultores matemáticos. En primer lugar mostramos tres obras del mejicano **Sebastián** cuyas imágenes están extraídas del libro ya mencionado de la referencia número [39]. Este excepcional texto fue editado con motivo de la Exposición de este autor en el Antiguo Colegio de San Idelfonso celebrada de Abril a Julio del 2004 y presenta unas magníficas fotografías de sus obras, realizadas por **Enrique Bostelmann y Jesús Sánchez Uribe**.

Una serie de este artista es la que ha denominado “Torres” e incluye varias obras que se clasificarían en este subgrupo, como las dos situadas en la parte inferior de la página. La primera de ellas la figura 369, que se muestra debajo a la izquierda, es una imagen de la obra de Sebastián “Espiga”. El autor realiza esta escultura con un único módulo que posee una sencilla geometría y que repite, colocándolo verticalmente, consiguiendo forma. En la segunda, la de la figura 370 debajo a la derecha, sin embargo elabora dos tipos de módulos, igualmente con una geometría muy sencilla. También los repite pero los posiciona de forma diferente. A esta escultura la ha titulado “Pedernal”.



La última obra de Sebastián que mostramos en este subgrupo es la escultura de la figura 371, situada en el principio de la página siguiente. Es la “Puerta del Torreón”. Está incluida en otra serie de obras de este escultor, las “Puertas”, que se hallan en diversas ciudades.

Figura 368 (arriba):
Brent Collins;
“Sprint”. Madera.
Fotografía de Phillip
Geller.

Figura 369 (abajo a la
izquierda): **Sebastian.**
“Espiga”. Hierro con
esmalte acrílico, 1985.
247 x 55 x 45 cm.
Fotografía: Enrique
Bostelmann.

Figura 370 (abajo a la
derecha): **Sebastian.**
“Pedernal”. Hierro
con esmalte acrílico.
Año 2000. Tamaño
90 x 145 x 90 cm.
Enrique Bostelmann.



Figura 371 (arriba): Sebastian. “Puerta del Torreón”. Hierro con esmalte acrílico, 2003. Dimensiones: 120 x 100 x 80 cm. Fotografía: Jesús Sánchez Uribe.

Por último, mostramos un ejemplo interesante y muy diferente de este subgrupo, la escultura de la figura 372, situada debajo. Esta obra es un trabajo de **Sol Lewitt** al que denominó “Four Sided Pyramid, (Pirámide de Cuatro Lados)”. Está situada en el **Jardín de Escultura de la National Gallery of Art de Washington**. En ella el autor utiliza un único tipo de pieza, un simple “módulo” prismático, que repite muchas veces. Mediante la adecuada disposición geométrica de varios cientos de estas piezas construye una obra escultórica muy interesante.

Esta preciosa fotografía se incluye en la colección de imágenes ya mencionada, la de la página web perteneciente a la National Gallery (Galería Nacional de Arte de los Estados Unidos), referencia [PW22]. La colección del jardín de escultura de este museo, entorno en el cual están situadas varias de las obras que mostramos, resulta muy interesante para nuestra tesis.



Figura 372 (arriba): Sol Lewitt. “Four Sided Pyramid, (Pirámide de Cuatro Lados)”. Situada en el Jardín de Escultura de la National Gallery of Art, Washinton.

7.3.4 Operaciones Booleanas

Es el último subgrupo de este grupo principal de la clasificación, Escultura con Conceptos Algebraicos, y en él incluiremos las obras en las que en su diseño se puede interpretar que se ha realizado operaciones del **Álgebra Booleana** con uno o varios cuerpos o formas. Una operación Booleana es aquella en la que se cumplen las reglas del Álgebra Booleana. Como ya es conocido, los resultados posibles para estas operaciones son dos valores verdadero o falso. Esto aplicado a la Escultura se utiliza para describir de qué forma dos objetos se relacionan, formando otro volumen o produciendo vacío. **Todas las operaciones booleanas se pueden utilizar. Las elementales son: unión, intersección, inversión o complementario y exclusión.**

Para caracterizar este tipo de escultura en primer lugar incluimos dos sencillos ejemplos de **Eduardo Chillida**, autor que creemos que en muchos de sus trabajos utiliza este tipo de lógica. Éstas son las dos cruces de las figuras 373 y 374 situadas al final de la página. En la primera escultura se puede interpretar que la cruz que finalmente se muestra es el complementario de su forma, esto es el “negativo”. En la segunda que se ha excluido del bloque original determinadas partes para lograr formarla. También los trabajos de Chillida de las figuras 7 y 182 anteriores nos muestran dos esculturas en que también se vislumbran estas operaciones.

Antes de pasar a describir otros ejemplos de este subgrupo, resumimos muy brevemente la historia de estas teorías. **La Lógica de los últimos 150 años ha sido elaborada por matemáticos** y a menudo ha reflejado nuestros intereses de matemáticos y científicos, aunque las nociones de la lógica moderna pueden usarse para precisar el razonamiento ordinario. En el año 1847, **George Boole** (1815 - 1864), a cuyo nombre se debe el de esta álgebra, describió un sistema de traducción de argumentos simples a notación matemática, de manera que la corrección de un argumento podía verificarse a partir de la sola forma matemática, prescindiendo de su contenido. Anteriormente, **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 - 1716) y otros autores habían sugerido esta posibilidad, sin aportar ejemplos convincentes. Incluso los de Boole eran poco refinados. La misma idea, pero con una formulación más sofisticada, subyace en el análisis de **Abraham Robinson** (1918 - 1974), empleado para simplificar argumentos en Matemática pura, Economía Matemática y otros campos.



Figura 373 (izquierda): Eduardo Chillida, cruz de la iglesia de Santa Maria. San Sebastián.



Figura 374 (derecha): Eduardo Chillida, cruz de la iglesia del Buen Pastor. San Sebastián.

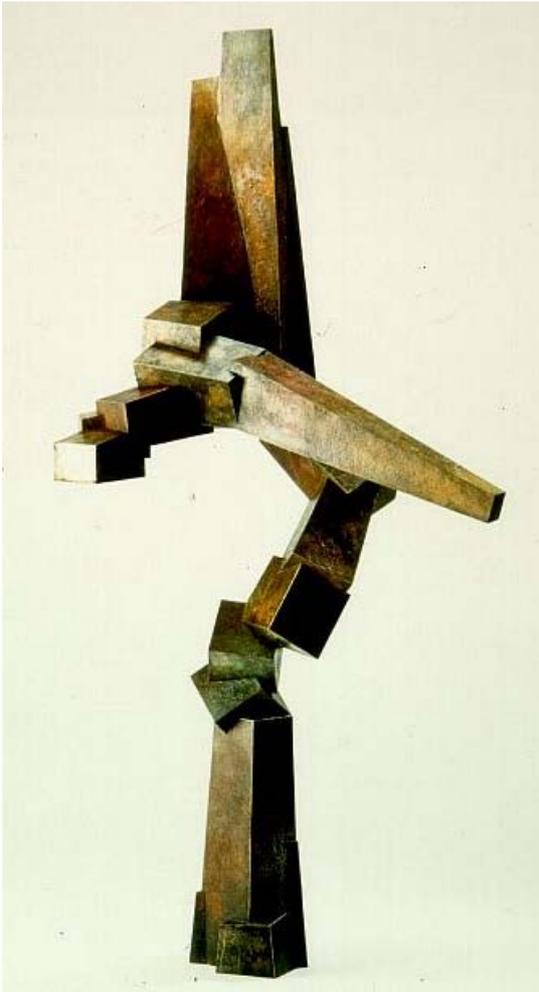


Figura 375 (arriba): Bruce Beasley, "Ally (Aliado)". Fundición en Bronce. Año 1997. Altura aproximada 155 cm.

Robinson demostró que siguiendo una argumentación matemática, podemos afirmar la existencia de los infinitesimales, esto es, de los números infinitamente pequeños que se rigen por las mismas leyes que los números reales. Si una conclusión relativa se puede enunciar de alguna forma, su corrección estará garantizada, independientemente de que los infinitesimales existan en realidad. La idea de Robinson se basaba en el trabajo de otros matemáticos y lógicos, como **Alfred Tarski** (1902; Teoría de la Verdad de Tarski).

El primer lógico que se sirvió de los razonamientos del moderno cálculo formal para sostener la teoría filosófica de que la Aritmética se compone de verdades necesarias, que son deducibles mediante principios de razón pura, fue **Gottlob Frege** (1848 - 1925). La sección del cálculo de Frege relativa a las nociones "y", "si", "entonces", "no" y "existe", etc., fue ordenada por **Gerhardt Gentzen** (1918 - 1974). También otros importantes matemáticos, **David Hilbert** (1862 - 1943) y **K. Gödel** (1906 - 1978), contribuyeron de una forma significativa a su desarrollo.

A continuación, para explicar este tipo de la Escultura Matemática y de acuerdo con nuestra filosofía incluiremos algunos ejemplos. Las primeras obras que ya hemos mostrado son las dos cruces de **Eduardo Chillida** anteriores. Creemos que este escultor en muchos de sus trabajos utiliza este tipo de lógica.

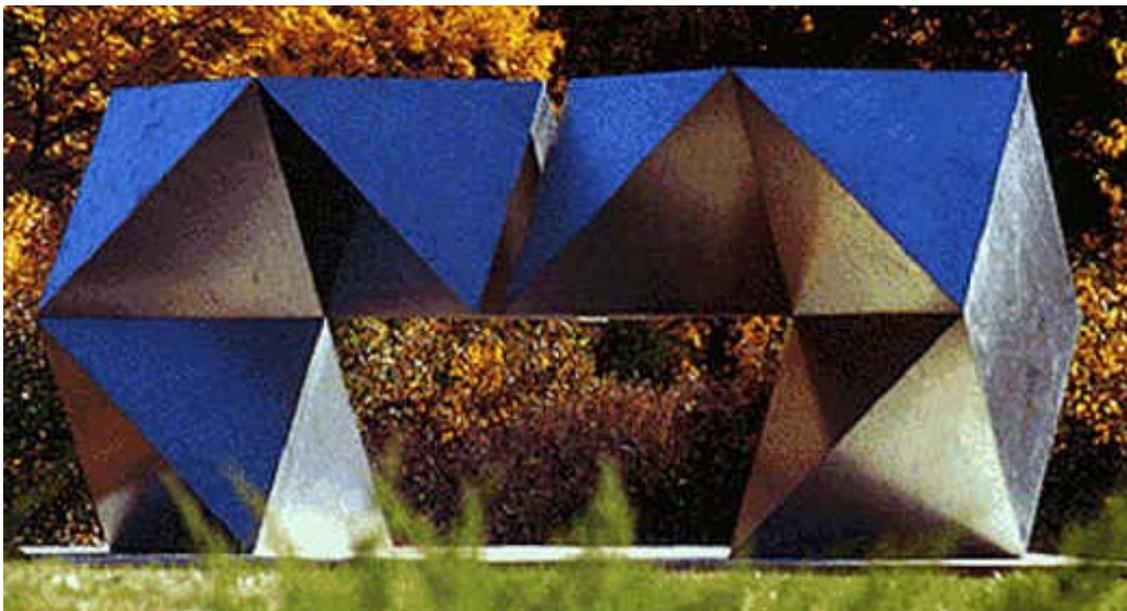
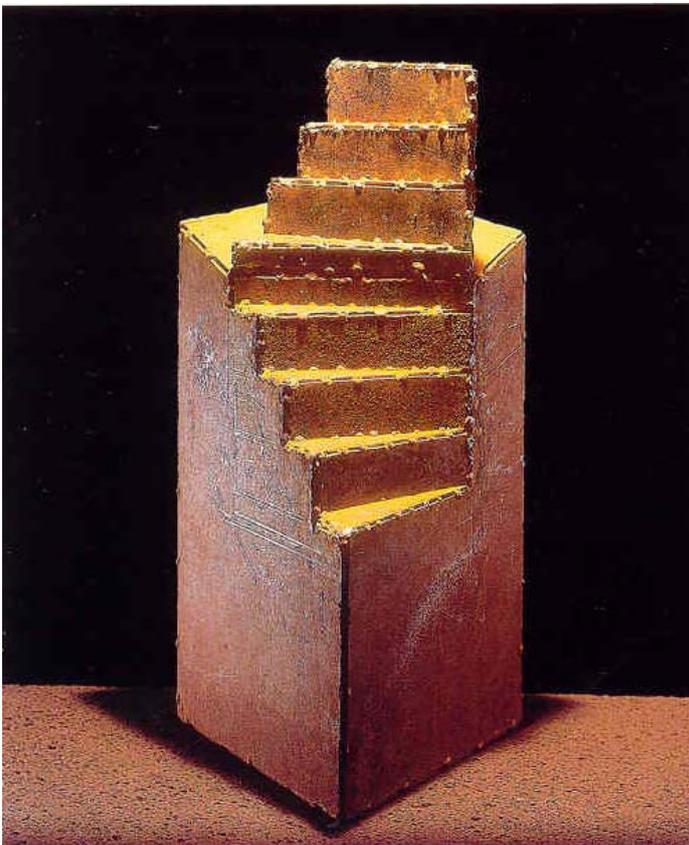


Figura 376 (arriba): Charles Perry, "Bisected Dodecahedron (Dodecaedro Seccionado)". Aluminio; 1986. Tamaño aproximado 7,10 m. Residencia Egelston; Bedford, Nueva York.

Esta importancia del Álgebra Booleana en la escultura de Eduardo Chillida se puede constatar si se tiene en cuenta que una de sus preocupaciones era el estudio de la diferencia entre “lo lleno y lo vacío”. Este autor nos dice al respecto: “En el proceso de mi trabajo se da siempre un diálogo entre lo lleno y lo vacío. Están los dos actuando en todas las obras. He llegado a pensar en algunas ocasiones que el diálogo entre lo lleno y lo vacío es un diálogo entre dos cosas la materia y el vacío y lo único que las diferencia es la velocidad. Quizás la diferencia no es sólo de peso, sino también de velocidad. La materia sería un espacio muy lento o el espacio una materia muy rápida”. Para estudiar a Eduardo Chillida y su escultura resulta muy útil la página web cuya ruta se indica en la referencia [PW28].

Otro caso de escultor que utiliza estas operaciones del Álgebra Booleana en su trabajo es **Bruce Beasley**. Un ejemplo claro podría ser la obra de la página anterior, figura 375. En ella se observa la complejidad adquirida a partir de la unión de sencillos prismas y cubos y al analizarla se deduce que se ha construido mediante operaciones booleanas. Resultaría interesante comentar el completo estudio geométrico que hace de las formas que utiliza en esta obra, referencia [53], pero no lo haremos para no alargar en exceso nuestra tesis. Las fotografías de esculturas de este autor de las anteriores figuras, números 199 y 252, muestran otras dos obras en que también se vislumbran estas operaciones. La de la figura 252 se titula precisamente “Intersections II”. Es de resaltar esta utilización de la palabra intersecciones. Para el estudio del trabajo **Bruce Beasley** y en general de este subgrupo de nuestra clasificación de la escultura, Lógica Booleana, resulta muy interesante su ponencia de referencia [53]. Este texto se titula *Polyhedral Sculpture with complex Intersections*.

Otro tipo muy diferente de obra que incluiríamos en este subgrupo es la que mostramos en la fotografía situada al final de la página anterior, la de la figura 376. Es de una escultura en la que en su diseño se ha partido de un dodecaedro pero se le ha efectuado una división en dos piezas iguales que, por tanto, resultan “complementarias”. Esta estética escultura también se podría haber clasificado con el subgrupo de las poliédricas, sin embargo la hemos situado en este subgrupo ya que en ella la división efectuada resulta fundamental. Esta obra está realizada por **Charles Perry**, y precisamente se denomina “Dodecaedro Seccionado”.



Sebastian es un escultor matemático del que ya hemos incluido muchos trabajos. También ha realizado alguna escultura que pertenecería a este subgrupo. Un ejemplo es la obra que mostramos en la figura 377 situada al lado izquierdo. También es de una obra en que parte de la forma un prisma y se le efectúa una división en dos piezas, que por lo tanto también resultan “complementarias”. Con este procedimiento este autor logra una sugestiva imagen que recuerda a una porción de una escalera de caracol, aunque con escalones de tamaño variable.

Figura 377 (izquierda):
Sebastian. “Sin Título”.
Exposición: “Las Obras de las
Obras”, pieza II. Hierro
oxidado de pequeño formato.
Fotografía de Enrique
Bostelmann Méjico D.F. 2003.



Figura 378 (arriba): Pablo Serrano, “Unidad Yunta”. Dimensiones: 240 x 400 x 200 cm. Escultura situada en el Campus de la UPV. Bronce, 1980, Valencia.

Inmediatamente arriba se encuentra la figura 378, en la que mostramos una última obra en la que también se utiliza esta filosofía del complementario. Se compone de dos partes. La más cercana de las de la imagen se podría insertar en la otra perfectamente. Es una escultura de **Pablo Serrano** titulada “Unidad Yunta” que está situada en el Campus de nuestra universidad, la UPV. Por último y para presentar el siguiente grupo de la clasificación, la Escultura Topológica, en la figura 379 incluimos una imagen de uno de los archivos incluidos en la página web de uno de los principales escultores matemáticos, **John Robinson**. Al respecto consultar la referencia [PW20].

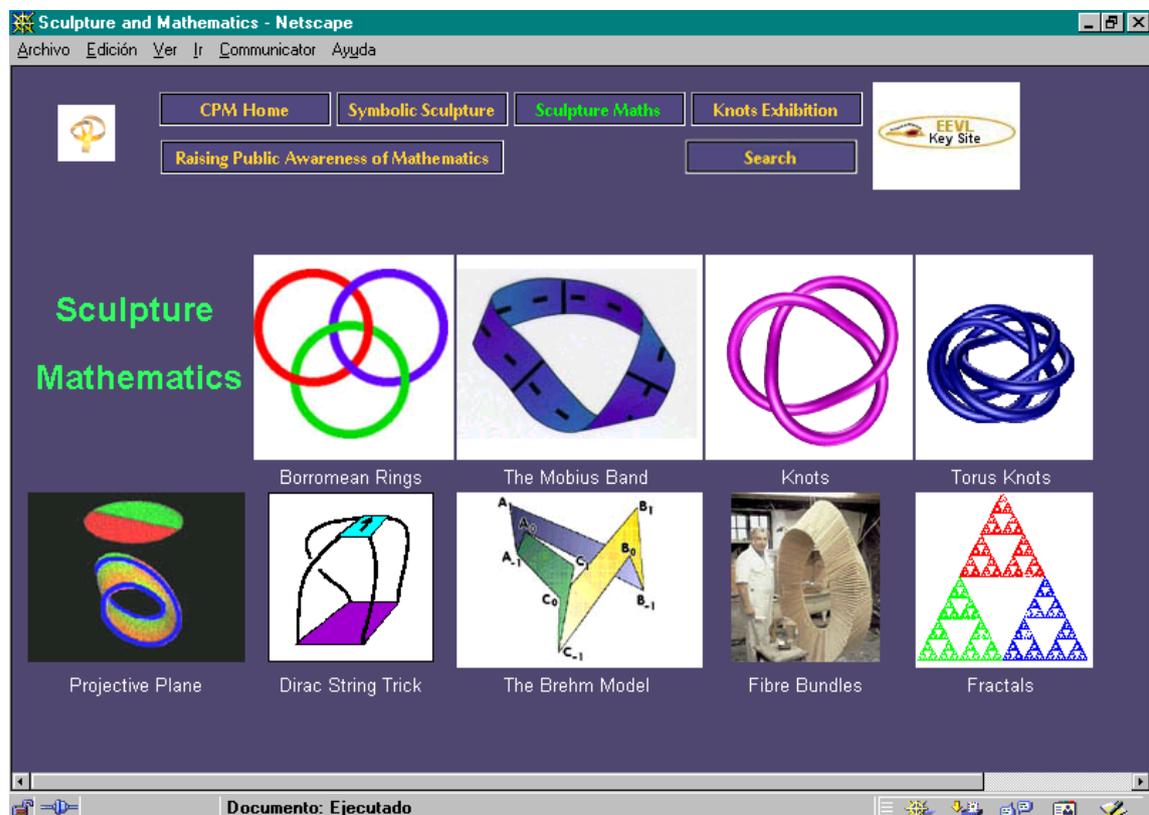


Figura 379 (arriba): Imagen de uno de los archivos incluidos en la página web del escultor matemático, John Robinson.

7.4 Escultura Topológica

Éste es el último grupo principal de la clasificación que se basa en un campo concreto de las Matemáticas la Topología, ya que el siguiente y último, Escultura con Conceptos Matemáticos Varios, lo definimos para incluir en él aquellas esculturas en las que ocurra sea esa “variedad”, lo que se expresa con la propia denominación del grupo. La figura 379 del final de la página anterior que muestra una imagen la página web del escultor matemático, **John Robinson**, nos sirve de ilustración sobre la escultura del presente grupo, Escultura Topológica. En ella se puede observar algunas figuras, que nos orientan sobre las posibilidades de esta Escultura y también se incluye el nombre de algunos de los conceptos matemáticos que darán lugar a diseños de obras de este tipo.

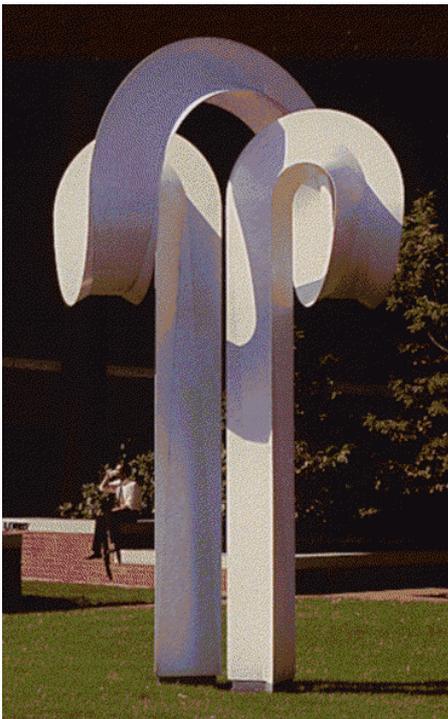


Figura 380 (arriba):
Charles Perry. “The Guardian, (El Guardián)”.
Aluminio; altura 580 cm.
Plaza Soundview,
Stamford, Connecticut,
Estados Unidos.

Figura 381 (derecha):
Carlo Sequin. “Knot Divided, (Nudo Dividido)”. Proyecto de la obra para el campeonato de escultura en nieve que se ha celebrado en Enero del año 2005 en Breckenridge, Estados Unidos.



En este grupo se incluyen, desde obras muy sencillas como la de la figura número 380 realizada por **Charles Perry** y titulada “El Guardián”, hasta otras más complejas como las que mostramos en las dos siguientes figuras. Nos referimos en primer lugar a la de la figura 381, “Nudo Dividido”. Esta imagen es de un proyecto de **Carlo Sequin** para una escultura a realizar en el campeonato de escultura en nieve del 2005. Este es un interesante evento para el desarrollo de la Escultura Matemática que se suele celebrar en USA y del que ya hemos mostrado alguna otra obra.

Los Nudos son uno de los principales temas de diseño de Escultura Topológica, como sucede en la escultura anterior y en la siguiente que mostraremos, la de la figura 382 en la página siguiente. Ésta es una obra que también está realizada por Carlo Sequin y que precisamente se titula “Lazos de Amistad”. Antes de explicar este interesante grupo de la clasificación, **comentaremos muy brevemente la evolución de la Topología**, una parte de las Matemáticas que inicio su desarrollo en el siglo XIX.



La Topología comenzó su desarrollo con el astrónomo belga **Augustus Möbius** (1790 - 1868), más conocido por su famosa “cinta”. Otros matemáticos, entre los que de nuevo se halla **David Hilbert** (1862 – 1943) el más conocido e importante de todos ellos, **Oswald Veblen** (1880 - 1966) y **Henry Whitehead** (1904 - 1960) fueron los que más contribuyeron a su evolución. Esta parte de las Matemáticas se ocupa de **las propiedades que no se alteran por deformaciones continuas**, tales como flexión, “estiramiento” y “torcimiento”.

Figura 382 (izquierda): Carlo Sequin. “Bonds of Friendship (Lazos de Amistad)”.

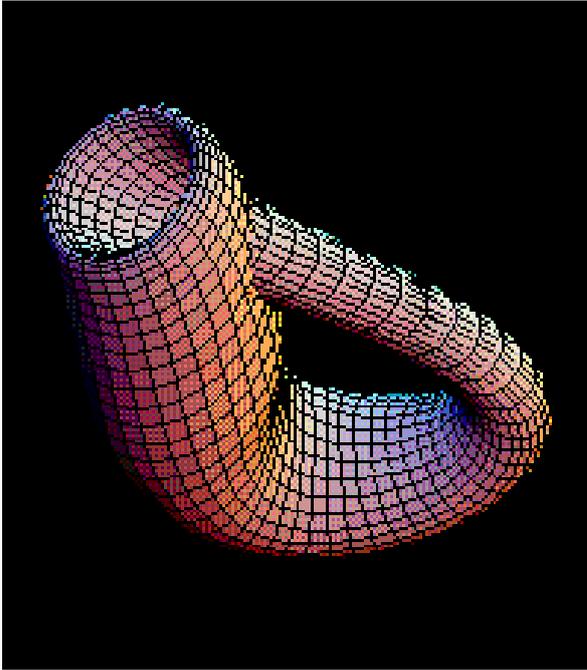
Otro campo de las Matemáticas que está muy relacionado con La Topología es el **Análisis Vectorial**, el cual como es conocido estudia las cantidades que poseen magnitud, dirección y sentido. De hecho, estos conceptos darán origen a uno de los subgrupos, el de Superficies no Orientadas, que incluiremos en el presente grupo de la clasificación. El subgrupo referido también se podría inscribir en el anterior tipo principal de Escultura con Conceptos de Cálculo, debido a que resulta evidente la simultaneidad de conceptos relacionados con ambos grupos. El concepto de orientación es conocido desde los tiempos de **Aristóteles**, pero fue a partir del siglo XVI, iniciadas por **Simón Stevin**, cuando estas teorías se desarrollaron. Concretamente se emitieron en la década de los ochenta de dicho siglo. Por último, debemos comentar que el Análisis Vectorial moderno data de principios del siglo XIX y hoy en día resulta fundamental en todas las ciencias.

A lo largo de la presente tesis, especialmente en los apartados que se han dedicado a la descripción de la Escultura Matemática **ya hemos expuesto bastantes fotografías de obras que claramente se incluirían en la Escultura Topológica**. Concretamente y sólo en la Introducción de dieciséis imágenes cinco eran de este tipo, las figuras: 1,3, 5, 8 y 16.

Además en los anteriores apartados se muestran bastantes esculturas que se clasificarían en este grupo, las figuras: 187, 194, 195, 210, 214, 219, 220, 223, 226, 227, 231, 240, 246, 247, 250 y 258. Como se constata es bastante **frecuente la realización de obras de este arquetipo** de la Escultura Matemática. Antes de pasar a describir sus subgrupos incluimos un último ejemplo, la figura 383.

Figura 383 (derecha): Keizo Ushio, “Oushi Zokei, 2000”. Granito, 130 x 130 x 60 cm. Catálogo Número 53 de la Exhibición Bondi (Exposición: Escultura en el Mar, Australia), 2000.





La fotografía de la figura 383, que se halla en el final de la página anterior, nos muestra un trabajo de uno de los escultores que ha realizado más obras de este tipo, el japonés **Keizo Ushio**. Se titula “Oushi Zokei, 2000”.

Esta escultura fue expuesta en el certamen de Escultura en el Mar, celebrado en Australia en el año 2000. Anteriormente ya hemos mostrado bastantes trabajos que se han exhibido en esta serie de importantes exposiciones periódicas que son celebradas en ese alejado país. Éstos han pertenecido a muchos tipos diferentes.

Figura 384 (izquierda): Imagen virtual de la Botella de Klein incluida en la ayuda del programa Mathematica.

La utilización de programas informáticos de diseño o de fabricación de Escultura Matemática es muy frecuente, como ya hemos comentado en el apartado del capítulo anterior. Estos programas permiten también la creación de formas con una interesante topología como la **Botella de Klein**, que todavía han sido poco utilizadas en esta escultura. Para ilustrarlo incluimos la figura 384, una imagen virtual de la ayuda del conocido programa Mathematica. Algunas formas topológicas, en concreto ésta creemos que hasta el momento han sido escasamente utilizadas en la Escultura Matemática. Sin embargo, pensamos que la Botella de Klein refleja las posibilidades que poseen estos conceptos, como el caso de la “no orientación” de una superficie, para su uso en el diseño de Escultura Topológica.

Los subgrupos en que hemos dividido el presente grupo son los siguientes: **Superficies no Orientadas, Nudos y Figuras Entrelazadas y Otros Conceptos Topológicos**. A continuación, vamos a mostrar otras obras muy concretas que se clasifican en los subgrupos de la de Escultura Topológica. Intentaremos según la filosofía de la tesis mostrar algunos de los trabajos de este tipo más importantes que habrán sido elaborados por algunos de los mejores escultores matemáticos. Incluiremos los suficientes para caracterizar mejor los subgrupos de la Escultura Topológica.

7.4.1 Superficies no Orientadas

Esta propiedad de la “no orientación” de una superficie es uno de los conceptos relacionados con la Topología, que ha sido **más utilizado en Escultura Matemática desde su inicio**. El trabajo, que hemos mostrado en la figura número 383 situada en la página anterior, está realizado por el escultor **Keizo Ushio** y nos sirve perfectamente como presentación del presente subgrupo de la Escultura Topológica, Superficies no Orientadas.

Figura 385 (derecha): Max Bill, “Ruban sans Fin, (Cinta sin Fin); Versión IV”, detalle. Granito; 1961. Medidas: 175 x 130 x 90 cm. Museo: Centro Pompidou. París.





Figura 386 (arriba): Cinta de Moebius.

Hemos utilizado la escultura de la figura 383, del escultor matemático japonés **Keizo Ushio** para iniciar el estudio de este subgrupo, debido a que utiliza, como es fácil comprobar, una superficie no orientada. La superficie más simple de este tipo es la denominada “**Cinta de Moebius**”, debido a Augustus Möbius que fue quien la estudió. Esta sencilla forma se puede observar en la figura número 386, situada a la izquierda. Si se parte de un punto cualquiera de una “Cinta de Moebius” y se la recorre longitudinalmente, siempre se llegará al punto inicial de partida. Dicho de la forma más sencilla posible, es la que se puede recorrer, a lo largo, de forma continua. Sucede que esta superficie sólo tiene una cara. En esta superficie tan simple resulta muy fácil de visualizar estas ideas

Desde el punto de vista topológico los objetos bidimensionales, esto es las superficies, son clasificadas en función de su orientación en dos clases que son totalmente diferentes, a saber, **las superficies orientables y las no orientables**. Las orientables son aquéllas que poseen dos lados (como es el caso del plano euclidiano). Las no orientables son las que sólo poseen un lado (“cinta de Moebius”, “botella de Klein”, etc).

Max Bill nacido en Suiza, es un artista completo y fundamental en el desarrollo del Arte Matemático. Como anteriormente hemos comentado, no sólo es un claro precursor de la escultura que hemos llamado Matemática sino que también lo es de la Topológica. En el anterior capítulo dedicado al estudio de la Escultura del Siglo XX hemos explicado brevemente su trabajo. Uno de los temas preferidos por Max Bill era el de las superficies no orientadas y especialmente la cinta de Moebius, ya que realizó bastantes esculturas basadas en ella. Anteriormente ya hemos expuesto algunas de sus esculturas con este tipo de diseño, en las figuras 8, 146 y 187. Mostramos otra de estas obras en la figura 284, en la página anterior. Este trabajo tiene precisamente por título, “Cinta sin Fin; Versión IV”. Son muy numerosos los estudios sobre este artista matemático. Conviene resaltar el interesante estudio efectuado por el profesor **Ton Marar**, en el que realiza un análisis topológico exhaustivo sobre una de las obras de Max Bill, la de la fotografía que hemos incluido en la figura 214. Véase al respecto la referencia [9]. También existe una interesante página web en español en la que se estudia su escultura y su pintura, en la referencia [PW29].

En esta página de Max Bill se resume su trayectoria con las siguientes palabras “Este artista, pintor, escultor, arquitecto y diseñador gráfico es uno de los exponentes más versátiles de los principios vanguardistas de la **Bauhaus**. Creada en Alemania tras el final de la I Guerra Mundial en el año 1918. Su insistencia en la utilización de **una base matemática para toda forma de arte** queda reflejada en sus pinturas y grabados, que se caracterizan por diseños con gran frecuencia geométricos y por su esmerada planificación de las relaciones tonales. Sus diseños industriales y gráficos presentan una marcada funcionalidad”.

Figura 387 (derecha): Brent Collins. “Pax Mundi (Paz Mundial)”. Bronce. Gallery Ninth, Ribbon Sculptures, picture 1; (Galería Novena, Esculturas de Cintas, imagen 1). Fotografía por Phillip Geller.





Con respecto a la Escultura Topológica de Max Bill, sigue el texto de la anterior página: “Entre los años 1935 y 1953 creó, en el campo de la Escultura, diferentes variaciones sobre el tema del lazo infinito en metal pulido (la cinta de Moebius). Ejerció gran influencia en el Arte y en el diseño industrial europeo como profesor y director de las escuelas de Zürich y Ulm, y como organizador de exposiciones de arte, en particular, las de Arte Concreto, término con que se refiere a las formas puramente geométricas, no figurativas, durante 1944 y 1960. También ha influencia en el arte de Argentina y Brasil, donde introdujo este concepto de Arte y ha sido fuente de inspiración de varios grupos de artistas”.

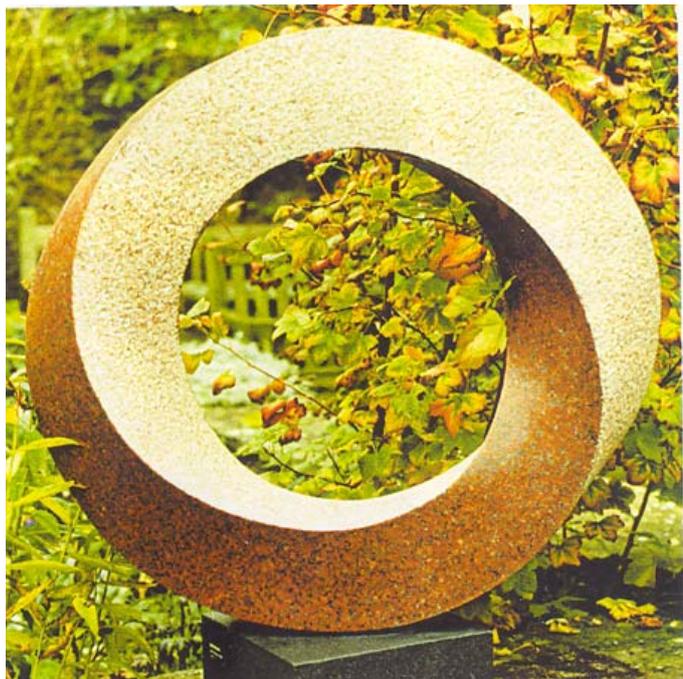
Brent Collins, un artista matemático del que ya hemos expuesto muchas obras que se clasifican en otros grupos, también ha realizado Esculturas Topológicas. En sus diseños y entre otros muchos temas de este tipo ha utilizado las cintas. De hecho tiene una serie que ha denominado “Ribbon Sculptures, (Esculturas con Cintas)”. En la figura número 387, al final de la página anterior, hemos mostrado una obra de éstas: “Pax Mundi (Paz Mundial)”. También se inscriben en este subgrupo, Superficies no Orientadas, las obras de su serie “Moebius Strip in Extremis, (Bandas de Moebius al Límite)”.

Figura 388 (izquierda): Brent Collins.. Madera. Gallery Second, Early Non-Orientable Surfaces, picture 2; (Galería Segunda, Superficies Tempranas no Orientables, imagen 2). Fotografía de Phyllip Geller.

El concepto de la orientación de una superficie es un tema que ha interesado mucho a Brent Collins uno de los escultores matemáticos con un trabajo más profundo, completo y extenso. Relacionado con este concepto de la orientación ha realizado otras dos series de esculturas que precisamente ha denominado “Early Non-Orientable Surfaces” y “Early Orientable Surfaces”, en las que sitúa las obras en que investiga estos temas. Encima, en la figura 388, incluimos una obra de la primera de estas series de esculturas, “Primeras Superficies no Orientables”. Anteriormente hemos comentado que muchas de las imágenes de sus trabajos que mostramos en esta tesis están extraídas de su completa y interesantísima página web, referencia [PW2].

Otro artista matemático **John Robinson** ha realizado también otras muchas Esculturas Topológicas. A la derecha en la figura 389 mostramos “Dependent Beings”. En este caso, y a diferencia de las anteriores obras con bandas de Moebius, no es una forma plana sino espacial. Esta obra se puede formar con un movimiento de rotación de su sección plana, un cuadrado, avanzando a lo largo del eje central de un toro circular. El ángulo total girado es de 180° , con lo que se consigue una superficie de dos caras, en vez de las cuatro posibles.

Figura 389: John Robinson, “Dependent Beings, (Seres dependientes)”. Piedra. Serie: “Univers, (Universo)”.



7.4.2 Nudos y Figuras Entrelazadas

Los matemáticos han estudiado los nudos durante muchos siglos. Esta categoría de objetos topológicos presenta grandes posibilidades para su utilización en la Escultura. Casi todos los escultores matemáticos la han empleado. De hecho, una de las primeras figuras incluido en la tesis la número 3, es precisamente una escultura de este tipo. Esta obra titulada “Siglo XXI” ha sido realizada por **Pepe Noja** y está situada en la entrada norte del Campus de la UPV.

Uno de los temas topológicos que van a dar origen a esculturas que incluiremos dentro de este subgrupo va a ser el **entrelazado de figuras**. Uno de los ejemplos más tópicos es el de **los anillos Borromeos**, esto es, tres circunferencias encastradas entre sí y que por tanto no se pueden separar. Éstos se llaman así, porque en el Renacimiento, en el siglo XV, los comenzó a utilizar como emblema la familia italiana del mismo nombre. Estos anillos son el típico ejemplo de figura geométrica que es imposible de realizar con estas figuras si son planas. Sin embargo, sí que es posible si se utilizan triángulos. El escultor matemático australiano **John Robinson** basándose en estas figuras ha realizado la escultura “Intuition” cuya fotografía se expone en la figura 391 situada en la parte inferior de la página a la izquierda. Estos triángulos topológicamente son equivalentes a los anillos Borromeos. Esta obra pertenece al conjunto de tres esculturas “Trylogy”.



Mostramos las otras dos obras pertenecientes a esta interesante serie escultórica. En la figura 390 situada a la izquierda, “Creation”, y en la figura 392 debajo a la derecha, “Genesis”. En estas dos obras en vez de triángulos, entrelaza cuadrados. En la primera de ellas, la figura 390 a la izquierda, tres, en la figura 392 debajo, cuatro. Todas las obras de esta serie son muy sencillas pero resultan muy interesantes desde un punto de vista topológico, por lo que las hemos utilizado como presentación de este subgrupo.

Figura 390 (izquierda arriba): John Robinson, “Creation (Creación)”. Grupo de tres esculturas “Trylogy”. Metal pulido. Serie: “Univers, (Universo)”.



Figura 391 (izquierda): John Robinson, “Intuition (Intuición)”. Grupo “Trylogy”. Metal pulido. Serie: “Univers, (Universo)”.

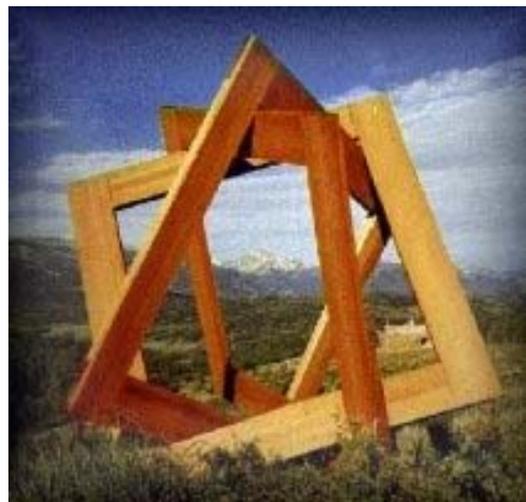


Figura 392 (derecha): John Robinson, “Genesis”. Grupo “Trylogy”. Madera. Serie: “Univers, (Universo)”.

El escultor australiano John Robinson, además de las obras topológicas ya expuestas, ha elaborado otras muchas, especialmente de las relacionadas con los nudos y los entrelazados de figuras que también se incluirán dentro del presente subgrupo de la clasificación. Para profundizar en estos temas resulta muy interesante la investigación realizada por **Slavik Jablan**, y recogida en su ponencia titulada *Geometry and Art of Knots*, referencia [55]. En general en sus estudios, y en particular en este texto anterior, este investigador realiza **un exhaustivo recorrido de la evolución de la utilización de los nudos en el Arte a lo largo de la historia** y de su utilización por civilizaciones muy diversas. Estas investigaciones están realizadas con gran rigor matemático. También trata este campo en su página web, *Modularity in Art*, citada en la referencia [PW27] que ya hemos mencionado anteriormente. En ella además de otros temas nos comenta la contribución del geómetra **Robinson Coxeter** al tema de los entrelazados de figuras.

Nathaniel Friedman, uno de los principales investigadores y expertos internacionales en Escultura Matemática, también ha estudiado el tema de la utilización de los nudos en la escultura. Ya hemos comentado anteriormente la página web de referencia [PW19] en la que se presenta un estudio muy interesante *Hyperseeing, Knots, and Minimal Surfaces*. En este texto nos habla de las relaciones entre los Nudos y las Superficies Mínimas, ambos subgrupos de nuestra clasificación de la Escultura. Además hace un estudio matemático bastante completo de estos temas. Para ilustrar los nudos comenta la posibilidad de realizarlos con cinta de aluminio lo que permite una clara visualización. En la figura 394 al final de la página, incluimos dos ejemplos de este tipo que nos propone Nathaniel Friedman.



En este subgrupo vamos a incluir otras obras basadas en **el entrelazado de figuras**. Las formas que se utilizarán ya no serán planas y como veremos serán realmente diferentes a las anteriores. Estos ejemplos nos servirán para describir este tipo de escultura. A la izquierda se puede observar la figura 393, un trabajo de **Benno Artmann**. En esta fotografía se puede apreciar el sorprendente efecto logrado al entrelazar sólo dos “toros”. Está incluido en la recopilación de modelos topológicos que nos muestra **Carlo Sequin** en su página web, referencia [PW2].

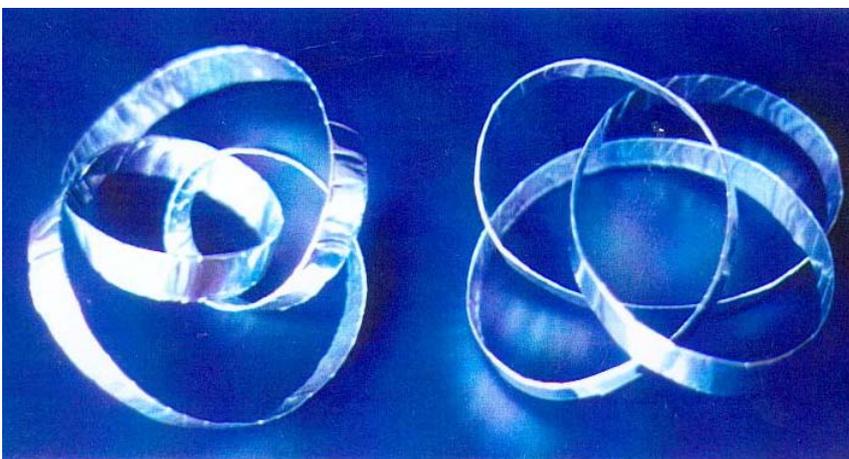


Figura 393 (arriba): Benno Artmann. Dos toros entrelazados. Topological Models, (Colección de modelos topológicos). Imagen II.

Figura 394 (debajo): Dos ejemplos de nudos realizados por Nathaniel Friedman con cinta de aluminio.

El escultor japonés Keizo Ushio, un apasionado de la utilización de la Topología en su trabajo, también ha realizado diversas obras escultóricas que se incluirán en este subgrupo de la clasificación. Anteriormente ya hemos mostrado alguna. En general, todas ellas son muy sencillas pero muy profundamente topológicas. A continuación vamos a estudiar el proceso de realización de una de estas esculturas. Nos referimos a la que mostramos en la fotografía de la figura 395, la primera de las que están situadas debajo. Este escultor la ha titulado “Oushi-Zokei, 1999” y en ella utiliza la forma de un toro, que ha sido seccionado en dos partes, pero realizándolo de una forma que consigue que las dos mitades en que divide la pieza queden entrelazadas. Esta escultura fue realizada “in situ” en San Sebastián, durante la celebración del congreso ISAMA del año 1999.

La siguiente figura, la número 396 situada debajo a la derecha, nos sirve para describir **el proceso de separación en dos partes de la escultura de Keizo Ushio** expuesta en la figura anterior. En ella se muestran las imágenes virtuales generadas por un programa informático. Por último, en la parte inferior de esta página se muestra como sería ese proceso, si la división del toro se hiciese en tres partes en lugar de en las dos de la escultura. De nuevo utilizamos dos imágenes generadas por ordenador, las figuras números 397 y 398. En definitiva, creemos que estos procesos de **separación de un sólido en diferentes formas que quedan entrelazadas**, pueden seguir siendo importante fuente de inspiración para la realización de Escultura Matemática que resulte francamente atractiva. Las posibles figuras a utilizar pueden ser muy heterogéneas.



Figura 395 (arriba): Keizo Ushio, “Oushi-Zokei, 1999”. (Escultura de un toro seccionado). Granito rojo de la India. 120 x 90 x 110 cm. San Sebastián, 1999.

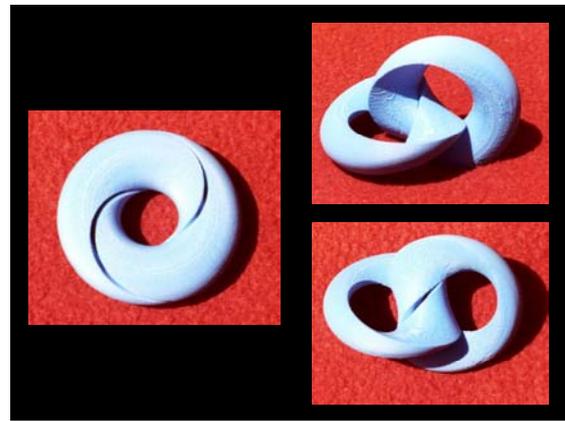


Figura 396 (arriba): Imágenes del proceso de separación de las dos partes, de la escultura de la imagen anterior.

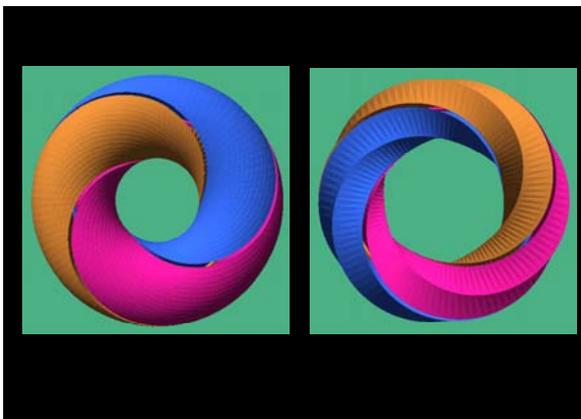


Figura 397 (arriba): Dos imágenes que muestran el proceso de una posible descomposición en tres partes de un toro o anillo, realizadas con ordenador.

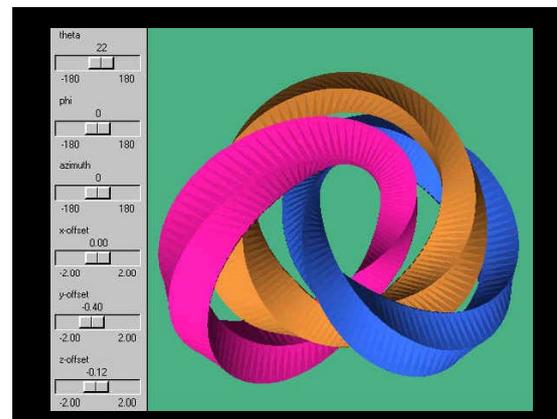


Figura 398 (arriba): Imagen del resultado de este proceso de descomposición del anillo, en tres partes.



Uno de los más reputados escultores matemáticos **Charles Perry**, en algunas de sus obras también ha utilizado el tema de los nudos. Un ejemplo de ello es la escultura que se muestra en la figura 399 situada a la izquierda, que precisamente ha denominado “Double Knot, (Nudo Doble)”.

Paul Bloch otro interesante escultor, aunque no tan conocido como el anterior, ha realizado diversas obras que clasificaremos en este subgrupo. En la figura número 400 situada debajo vemos una fotografía de la obra escultórica que ha titulado “Linked”. Esta denominación expresa perfectamente lo que sucede con las dos partes que componen esta obra, están “enlazadas”.

También entre los muy interesantes y variados trabajos del escultor matemático **Brent Collins**, hay alguno muy relacionado con los nudos y los entrelazados de figuras. Es el caso de los pertenecientes a su serie denominada “Self Intersecting Columns”.

Un ejemplo magnífico de una obra de esta serie de Brent Collins es la figura 401 situada al principio de la página siguiente. El autor en esta atractiva Escultura Matemática ha “jugado” con el recorrido de dos cordones que se enroscan y entrelazan, logrando un trabajo muy interesante desde un punto de vista topológico. Dado este tipo de diseño sin duda lo clasificaremos en este subgrupo. Muchas de las obras de este artista matemático están realizadas en madera, un material que le atrae profundamente y que les proporciona una gran belleza.

Por último, incluimos dos ejemplos del excepcional escultor matemático **John Robinson**, muy sencillos pero también muy seductores desde un punto de vista topológico. Nos referimos a las figuras, números 402 y 403, situadas al final de la página siguiente y que sin duda se enclavan en este subgrupo de la clasificación. Estas obras pertenecen a su magnífica serie denominada “Universe”. En esta interesante colección este autor describe figuradamente el universo utilizando conceptos geométricos, algebraicos, topológicos, etc.



Figura 399 (arriba): Charles Perry. “Double Knot (Nudo doble)”. Bronce, 82 cm. Residencia Seidler, Sidney, Australia.

Figura 400 (izquierda): Paul Bloch, “Linked”. Mármol Belga, 1996. Dimensiones: 35 x 72 x 35 cm.



Figura 401 (arriba): Brent Collins. “Gordian Knot, (Nudo Gordiano)”. Gallery Eleventh: Self Intersecting Columns, picture 5; (Galería Onceava: Columnas que se Intersectan, imagen 5). Museo de Arte Albrecht-Kemper. Fotografía de Phyllip Geller.

La anterior serie de esculturas de John Robinson, “Universe”, está formada por más de un centenar de piezas. De ella mostramos otras dos obras, la figura 402 que ha titulado “Bonds of Friendship, (Lazos de Amistad)”, debajo a la izquierda, y la de la figura número 403, “Immortality”, la situada a la derecha. Con anterioridad ya hemos mostrado alguna otra escultura de esta serie. En los trabajos de este artista matemático, como se ha puesto de manifiesto, predomina el metal, un material diferente a la madera de Brent Collins, pero que también les dota de belleza, aunque de otro tipo.

Una de las ponencias incluida en las actas de ISAMA, congresos internacionales ya mencionados, precisamente se titula *John Robinson’s Symbolic Sculptures, Knots and Mathematics*. Este texto está escrito por el mejor experto en el trabajo de este escultor, **Ronald Brown**. Véase la referencia [55]. Este matemático ha colaborado en alguno de los diseños de las obras de John Robinson. En el inicio de esta ponencia, nos dice:

“John Robinson es un escultor que expresa los grandes temas con una mirada interior en la que incluye desde la Ciencia a la Arqueología. Frecuentemente utiliza formas geométricas que son comprensibles intuitivamente, aunque también aplica profundos conceptos matemáticos”. Ello ha sido reconocido en los ambientes científicos internacionales, por lo que **este escultor tiene obras expuestas en varias de las más prestigiosas universidades del mundo**, como Oxford, Harward, Cambridge, etc. También se pueden encontrar esculturas de John Robinson en algunas facultades españolas como las de Barcelona y Zaragoza.



Figura 402 (izquierda): John Robinson, “Bonds of Friendship, (Lazos de Amistad)”. Metal pulido. Serie: “Universe, (Universo)”. (Ambas esculturas).



Figura 403 (derecha): John Robinson, “Immortality: Passing the Torch of Life, (Inmortalidad: Pasando la antorcha de la vida)”.

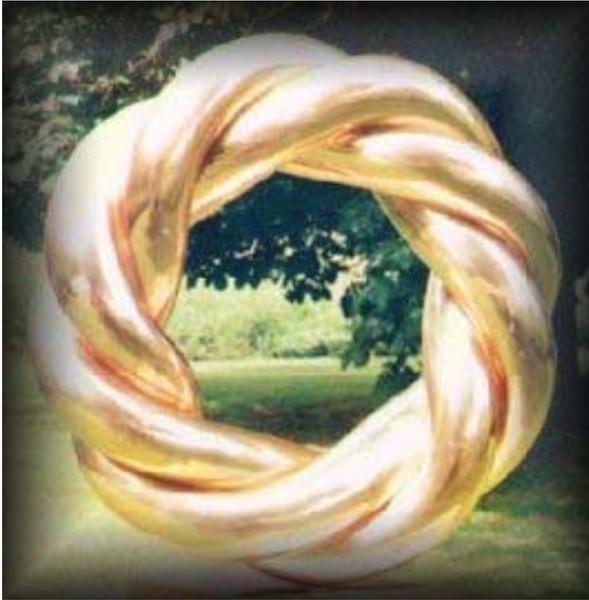


Figura 404 (arriba): John Robinson, "Gordian Knot, (Nudo Gordiano)". Bronce, 1982. Altura 1 m.

De hecho **John Robinson** considera un honor el que su escultura "Intuición", la que se ha mostrado en una figura anterior, haya sido situada en la entrada del Instituto Issac Newton perteneciente a la universidad de Cambridge. Debido a su gran prestigio, hemos utilizado a este escultor de modelo para la descripción de este tipo de escultura, como ya se ha podido constatar.

En el texto ya referido el profesor emérito del Departamento de Matemáticas de la universidad de Gales, **Ronald Brown**, analiza brevemente alguna de estas obras de John Robinson de la serie "Universe". En concreto también estudia las esculturas que acabamos de exponer, figuras números 402 y 403. Insertamos una última fotografía en la figura 404 situada a la izquierda. En ella se puede observar una escultura realmente interesante a la que ha titulado: "Gordian Knot, (Nudo Gordiano)".

Por último, dentro de este subgrupo vamos a incluir algunos interesantes trabajos de **Carlo Sequin** incluidos en la serie que ha denominado "Retrospective of Artistic Geometric Artefacts", la cual incluye las dos obras que se muestran en las imágenes siguientes, entre otras. Nos referimos a las de la figura 405, situada a la derecha, titulada "Tetra Tangle" y la de la figura 406 que se encuentra a la izquierda "Tight Chinese Button Knot (Nudo de Botón Chino)". En estas esculturas como se aprecia, en vez de con curvas como en las anteriores de John Robinson, se realizan los caminos topológicos con rectas. El profesor Carlo Sequin como ya hemos señalado es uno de los más reputados investigadores en Escultura Matemática, que en sus obras escultóricas también ha utilizado la Topología. Los ejemplos de estas dos figuras de debajo lo muestran con gran claridad.

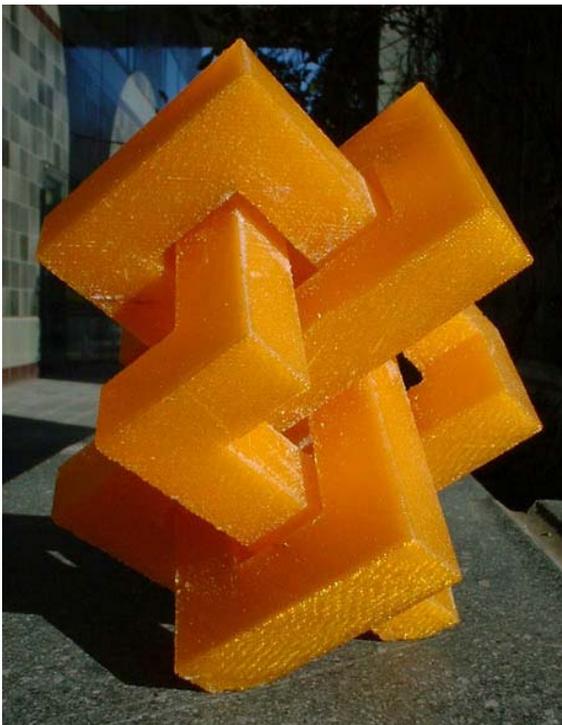
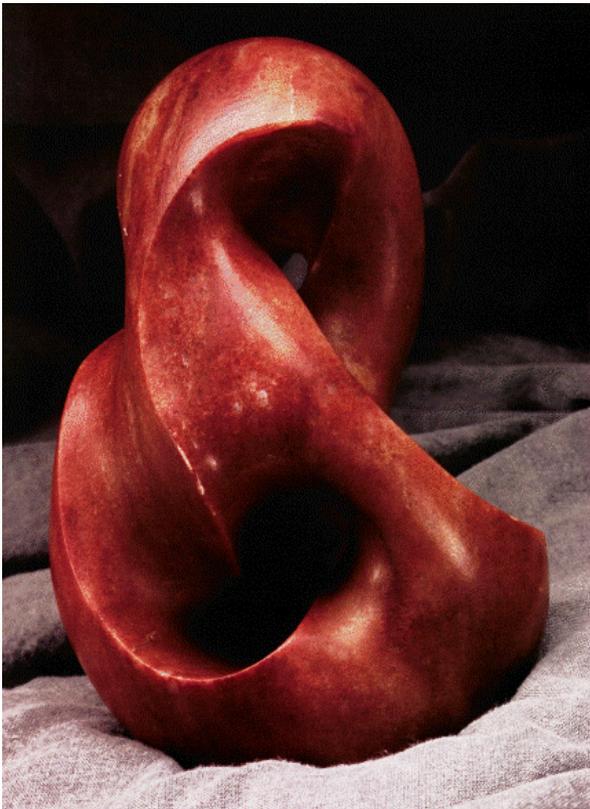


Figura 405 (debajo a la derecha): Carlo Sequin "Tetra Tangle", (Cuatro Figuras Entrelazadas). University of Berkeley; 1986.

Figura 406 (debajo a la izquierda): Carlo Sequin "Tight Chinese Button Knot, (Nudo de Botón Chino)". Año 2000.

7.4.3 Otros Conceptos Topológicos



Los primeros dos subgrupos en que hemos dividido el presente grupo son los de Superficies no Orientadas y Nudos y Figuras Entrelazadas. Reúnen a aquellos trabajos de Escultura Topológica que son caracterizados por estos conceptos, cuando éstos resultan realmente muy evidentes. Sin embargo, como se puede observar en las obras de esta página **hay esculturas en las que no predomina un único tipo de estos conceptos. Para ellas introducimos este subgrupo, Otros Conceptos Topológicos.**

Las obras del presente subgrupo serán **muy heterogéneas** pero todas ellas tendrán, una profunda influencia del área matemática reseñada, la Topología, como es lógico. Esto sucede en las esculturas de las figuras 407 y 408.

Figura 407 (izquierda): Helaman Ferguson “Escher on Double Torus (Escher en un Toro Doble)”. Alabastro, aproximadamente 15 cm.

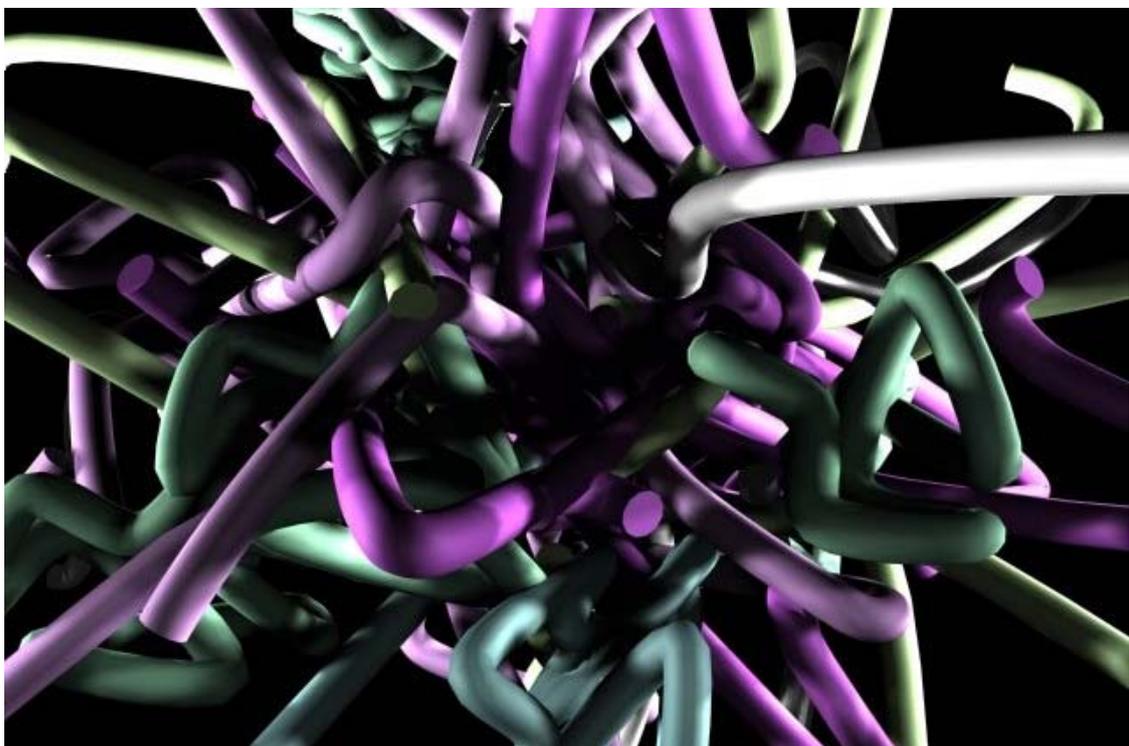


Figura 408 (debajo): Michael Leyton. Serie de imágenes virtuales: “The Mathematical Theory of Sculpture”.



A continuación vamos a comentar de forma breve las dos interesantes obras que hemos mostrado en la página anterior. La primera la de la figura 407 se titula “Escher on Double Torus (Escher en un Toro Doble)”, un título que nos pone de manifiesto su profunda concepción matemática, a pesar de que ésta no resulta tan evidente. En esta escultura uno de los mejores artistas matemáticos del momento, **Helaman Ferguson**, nos presenta la forma de una superficie matemática que resulta muy curiosa e intrigante.

Sin embargo, no la incluimos en el subgrupo correspondiente de la clasificación que sería el de Otras Superficies, sino que la ceñimos en el presente, este heterogéneo subgrupo llamado Otros Conceptos Topológicos. En su concepción este autor ha utilizado diversas propiedades topológicas, ya que este trabajo está basado en la forma de una superficie no orientada y cerrada y se ha inspirado en la maravillosa obra de uno de los artistas tópicos en el Arte Matemático, Escher. La segunda fotografía que hemos mostrado en la parte inferior de la página anterior, la figura número 408, a diferencia de la anterior, destaca por su compleja estructura. **Esta imagen es un trabajo virtual realizado por Michael Leyton.**

Figura 409 (izquierda): Brent Collins. Gallery Third: Early Orientable Surfaces, picture 5; (Galería Tercera: Primeras Superficies Orientables, imagen 5). Bronce con recubrimiento de Níquel. Museo de Arte Albrecht-Kemper.

Esta obra de la figura 408 pertenece a la serie de este autor titulada “The Mathematical Theory of Sculpture”. Esta serie de Michael Leyton, además de la utilización de conceptos topológicos, refleja la investigación que ha realizado en la Teoría de Grupos. En definitiva, ambas obras demuestran las posibilidades de este tipo de escultura.

Brent Collins, el excepcional y completo escultor matemático, vuelve a aparecer en este subgrupo de la clasificación Otros Conceptos Topológicos. En los diseños de una de sus series, en concreto en la denominada “Early Orientable Surfaces”, se aprecia la utilización de diferentes propiedades topológicas. Por ejemplo en la figura número 409, situada al principio de la página, que muestra una obra de esta serie se constata en la existencia de “agujeros” en su estructura, etc.

Figura 410 (derecha): Brent Collins. Early Modular Surfaces; Gallery Forth, picture 2, (Galería Cuarta, Primeras Superficies Modulares, imagen 2). Fotografía de Phyllip Geller.





Figura 411 (arriba): Bathsheba Grossman. “Noon, (Mediodía)”. Compuesto de bronce y acero.

En otras de las series de Brent Collins también podemos encontrar obras que se clasificarían en el presente subgrupo, como en Early Modular Surfaces, de la que hemos mostrado un ejemplo, figura 410 de la página anterior, y en las series Modular Spirals Modular Toroids y Atomic Flowers.

Bathsheba Grossman es otra escultora matemática excepcional y en la mayoría de sus obras se aprecia que son profundamente topológicas. En algunas de ellas, simultáneamente se presentan varias propiedades de este tipo. Entre los diversos trabajos ya expuestos de esta escultora, destacamos el titulado “Alterknot”, en la figura 258. En esta obra se puede observar la utilización de conceptos matemáticos pertenecientes a campos muy diferentes de esta ciencia, como es usual en esta artista. En dicha obra utilizó propiedades referentes a nudos topológicos, simetrías, superficies matemáticas, etc.

A pesar de la aparición en “Alterknot” de conceptos matemáticos pertenecientes a campos tan diferentes, creemos que se puede catalogar en el presente subgrupo de la clasificación, Otros Conceptos Topológicos, dada la preponderancia en su diseño de estos conceptos. Las dos figuras de esta página nos presentan otras dos esculturas de Bathsheba Grossman pertenecientes a este subgrupo. En la figura 411 situada arriba, una obra titulada “Noon, (Mediodía)”, creemos que lo que destaca son los conceptos topológicos, los cuales resultan incuestionables, aunque también tiene una evidente simetría. En la figura 412 que está situada debajo, mostramos otra obra de esta escultora denominada, “Nexus, (Nexo)”. Como se puede observar en ella también predominan este tipo de conceptos topológicos, entrelazados, conexiones, orificios, etc.

En esta escultura de la figura número 412 a la derecha, no resulta clara la utilización de una propiedad concreta de las que hemos utilizado para definir los anteriores subgrupos, por lo que la hemos enclavado en este heterogéneo subgrupo.

Bathsheba Grossman en estos trabajos utiliza procesos de diseño informático y fabricación automatizada. Al respecto, véase el apartado específico anterior. El material preferido de esta escultura es el bronce.



Figura 412 (derecha): Bathsheba Grossman. “Nexus, (Nexo)”. Compuesto de bronce y acero.

7.5 Escultura con Conceptos Matemáticos Varios

Por mucho que desarrolláramos nuestra clasificación y ampliásemos los tipos que definimos en ella, será imposible poder incluir todas las esculturas matemáticas dentro de sus categorías. También puede suceder que un trabajo concreto se pudiese inscribir en varios tipos al mismo tiempo y que no seamos capaces de decidimos por uno determinado, ya que creamos que **no “predomina” un concepto matemático único**. Para esos casos hemos creado este último grupo de la clasificación que será muy “mistilíneo” y sin ninguna uniformidad entre las obras que incluye. Por ejemplo la escultura de la fotografía de la figura 413, en el centro de la página, tiene muy poco que ver con la obra de la figura 414 en la parte inferior. En definitiva, este subgrupo será sumamente heterogéneo.

Como acostumbramos y antes de pasar a analizar este subgrupo de nuestra clasificación, lo presentamos con algunos ejemplos. Los primeros que hemos mencionado son las dos esculturas de las imágenes que se incluyen en esta página. Ambas son obras de **Helaman Ferguson**, uno de los principales escultores matemáticos, tal vez el más conocido internacionalmente. Su trabajo resulta un magnífico ejemplo de porqué hemos denominado a este tipo de Arte, Escultura Matemática.



La primera figura, la número 413 situada a la izquierda, nos muestra una obra realmente muy interesante desde un punto de vista matemático. Esta escultura además ha sido elegida como galardón del Premio Jaime Escalante.

En este trabajo, lo mismo que en muchos de los que realiza este escultor, intervienen conceptos matemáticos muy diversos, incluso pertenecientes a campos muy diferentes de las Matemáticas. Por ello, se podría clasificar simultáneamente en varios de los grupos principales de nuestra taxonomía. Sin embargo, creemos que lo que precisamente **la caracteriza es esta gran diversidad de propiedades**, por eso la incluimos en éste.

Figura 413 (arriba): Helaman Ferguson. “Mathematics of Salt, (Matemáticas de la Sal)”. Escultura elegida como galardón del Premio Jaime Escalante. Bronce de silicio pulido, 21 cm.

Figura 414 (derecha): Helaman Ferguson, “Snowflake Laplace-Dirichlet (Copo de Nieve de Laplace-Dirichlet)”. Bronce de silicio pulido. Dimensiones: 16 x 52 x 52 cm. Peso 16 kg.





Figura 415 (arriba): Carlo Sequin, “Fish Ball (Bola con Peces)”. Serie: “Escher Spheres”. Año 2000. Doce peces de cuatro colores.

Helaman Ferguson en la obra de la figura número 413, la primera de las dos situadas en la página anterior, ha utilizado conceptos matemáticos como el de superficie no orientada. También posee otra destacada característica, la ha embellecido con “matemáticas” dotando a su superficie de una especial textura. Para este fin ha utilizado el ordenador, rellenando todo el exterior de esta obra con una línea continua muy geométrica.

Otro ejemplo bastante similar es el que ya mostramos en la figura 224, “Umbilic Torus NC”. Ésta es una obra muy conocida en los ambientes del Arte Matemático También era una superficie no orientada y la había rellenado con un relieve, en el que utilizaba una versión de Hilbert de la curva de Peano. Esta obra también se clasifica este subgrupo.

La otra escultura de Helaman Ferguson, la que hemos mostrado en la figura número 414 de la página anterior, la denominó “Snowflake Laplace-Dirichlet, (Copo de Nieve de Laplace-Dirichlet)”, y como su nombre indica presenta una forma basada en un “copo de nieve”. Esta forma ha dado origen a una figura fractal, la **curva de Helge Koch**. Véase al respecto el apartado anterior de la tesis dedicado a la geometría fractal, donde mostramos imágenes para explicar su configuración. Esta escultura también se podría incluir en otros tipos de nuestra clasificación como el subgrupo, Otras Superficies, dado que presenta una acusada simetría radial plana en el tipo de Simetrías. Sin embargo, debido a su heterogeneidad la clasificamos en el presente subgrupo. Esta interesante escultura fue encargada a Helaman Ferguson por el profesor de Matemáticas de la Universidad de North Texas, John W. Neuberger. Éste y sus discípulos matemáticos Robert Renka, Michel Lapidus y especialmente Cheryl Griffith, procesaron con métodos numéricos las primeras cuarenta autofunciones de la **curva fractal del copo de nieve**.

La **décimo tercera autofunción** de dicha curva fractal presenta simetría radial, de ángulo 60 grados. Justamente la simetría tan característica que aparece en la obra “Copo de nieve de Laplace-Dirichlet”. Para ampliar el examen del trabajo de su autor, Helaman Ferguson, se puede consultar su interesante y completa página web, [PW6], ya referida anteriormente.

A continuación vamos a incluir dos trabajos del profesor y escultor matemático, **Carlo Sequin**. Pertenecen a un conjunto de obras que titula: “Retrospective of Artistic Geometric Artefacts”. Son los dos que se muestran en las dos figuras de esta página y resultan muy interesantes.

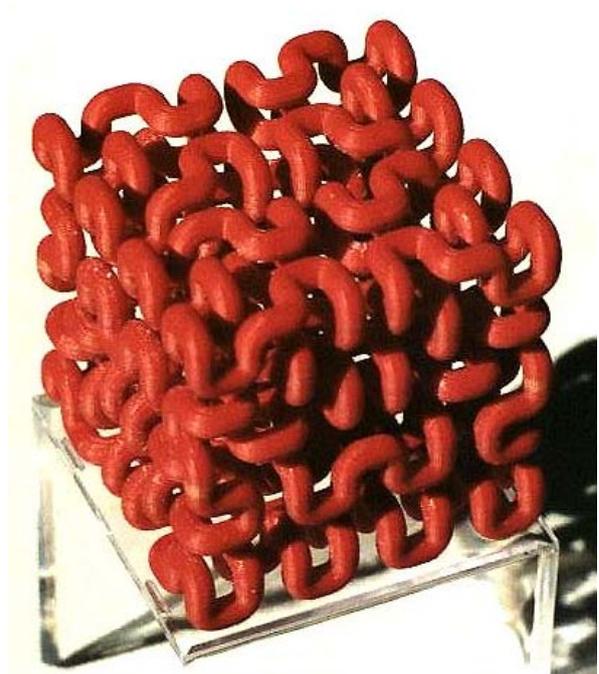


Figura 416 (derecha): Carlo Sequin, “Hilbert 512”. Año 1999.

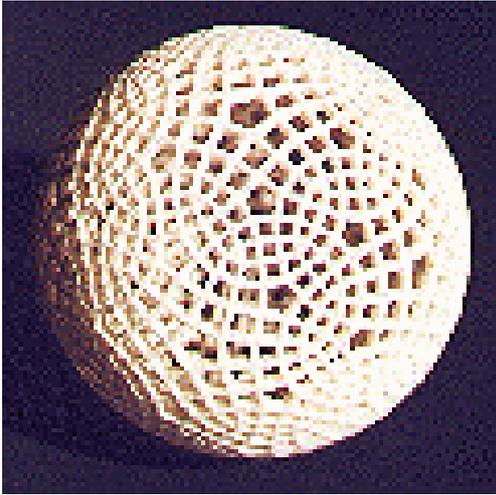


Figura 417 (arriba): George Hart, "Thumb-Gonads (Gónada mayor)"
Pertenece a la pareja Gónadas de los Ricos y famosos. Escayola.

En la primera de estas dos figuras de la página anterior, la figura 415, mostramos la obra de Carlo Sequin: "Fish Ball (Bola con Peces)". Ésta pertenece a su Serie "Escher Spheres". Su forma esférica está formada acoplando doce piezas con forma de pez y utilizando sólo cuatro colores. Este autor y experto en Escultura Matemática tampoco se ha podido escapar a la atracción del genial Mauricius Cornelius Escher, un artista fundamental en el desarrollo del Arte Matemático.

En la otra figura de la página anterior, la figura 416, se puede ver otra obra de Carlo Sequin muy atrayente desde un punto de vista matemático, "Hilbert 512". En este trabajo utiliza, lo mismo que anteriormente otros artistas matemáticos, **la curva de Peano, o de Hilbert**, cuya construcción hemos mostrado anteriormente en la figura 225. En este caso se presenta en una versión espacial.

Es interesante recordar que para profundizar en las investigaciones sobre la Escultura Matemática realizadas por **Carlo Sequin** se puede consultar su página web, la primera de la lista final [PW1]. Esta excelente página es realmente muy completa y es la mejor dedicada a este tipo de escultura que hemos encontrado, por lo que fue la primera que incluimos en las referencias. También recordamos que este profesor norteamericano de la universidad californiana de Berkeley es uno de los principales investigadores y expertos internacionales en este tema.

La siguiente obra de este subgrupo que mostramos es la de la figura número 417, situada al principio de la página, una escultura de **George Hart** denominada "Thumb-Gonads". Su forma está construida mediante una serie de curvas en el espacio con las que se consigue formar la superficie de la esfera. Este escultor matemático también ha aparecido en bastantes subgrupos de nuestra clasificación, como en los de la Escultura Geométrica. Ésta y alguna otra de las imágenes de sus obras que hemos utilizado en esta investigación están extraídas de su página web, [PW18].

En el presente subgrupo de nuestra taxonomía también incluiremos aquellas **esculturas que no sean tan "claramente matemáticas"**, como algunas de las anteriores. La siguiente figura puede servir para especificar este tipo de obras. Nos referimos a la fotografía de la figura 418 situada a la derecha. En ella se muestra un trabajo de un escultor **Thomas Gray** que aparece por primera vez. Está titulado "Tangle Bondi to Tammarama 2.26 km" y está realizado con cable de acero.

Esta obra de Thomas Gray se incluyó en la exposición anual Sculpture by the Sea, (Escultura en el Mar). Ya hemos mencionado la interesante página web [PW23] correspondiente.



Figura 418 (arriba): Thomas Gray, "Tangle Bondi to Tammarama 2,26 km."
Cable de acero, 75 cm de diámetro. Catálogo Número 4 de la Exhibición Bondi. Año 2000.



En esta exhibición artística anual y aunque no está específicamente dedicada a la Escultura Matemática, se han expuesto muchos trabajos de esta clase, “**no tan claramente matemáticos**”, pero en los que sin embargo creemos que se presentan suficientes indicios para incluirlos en nuestra clasificación de la Escultura. De esta exposición que se celebra todos los años en la costa Australiana ya hemos incluido alguna otra obra en nuestra tesis.

En el presente subgrupo también se puede clasificar algunos trabajos de artistas que a pesar de no poder ser considerados escultores matemáticos, han realizado esculturas que lo son, como el trabajo de la figura número 421 a la izquierda. Ésta titulada “Dos semicírculos” ha sido realizada por **Eusebio Sempere**. Otro claro ejemplo de obra que se incluirá en este tipo es la de la figura 420 que está situada al final de la página.

Este trabajo ha sido realizado por **Ruth Asawa**, una artista que al igual que en el anterior caso aparece por primera vez en nuestra tesis. Incluso en una escultura tan sencilla como la que se muestra en la imagen de la figura 420, se pueden observar conceptos y características relacionadas con campos muy diferentes de las Matemáticas. Con la Geometría plana, por ejemplo la utilización de formas poligonales, con el Álgebra, como las simetrías presentes, e inclusive con la Topología. Dado que esta simultaneidad de conceptos y propiedades de diferentes campos provocaría una indefinición en su tipificación, éste es un buen ejemplo de obra para demostrar la necesidad de incluir en nuestra clasificación un grupo principal tan **heterogéneo como el actual, Escultura con Conceptos Matemáticos Varios**.

Figura 419 (en el principio de la página): Eusebio Sempere. “Dos semicírculos”. Año 1972. Acero cromado. Altura total 0.55 m. Colección del artista, Madrid.

Figura 420 (derecha): Ruth Asawa, “untitled”, S 145 90. Cable de acero. Dimensiones: 122 x 23 cm.

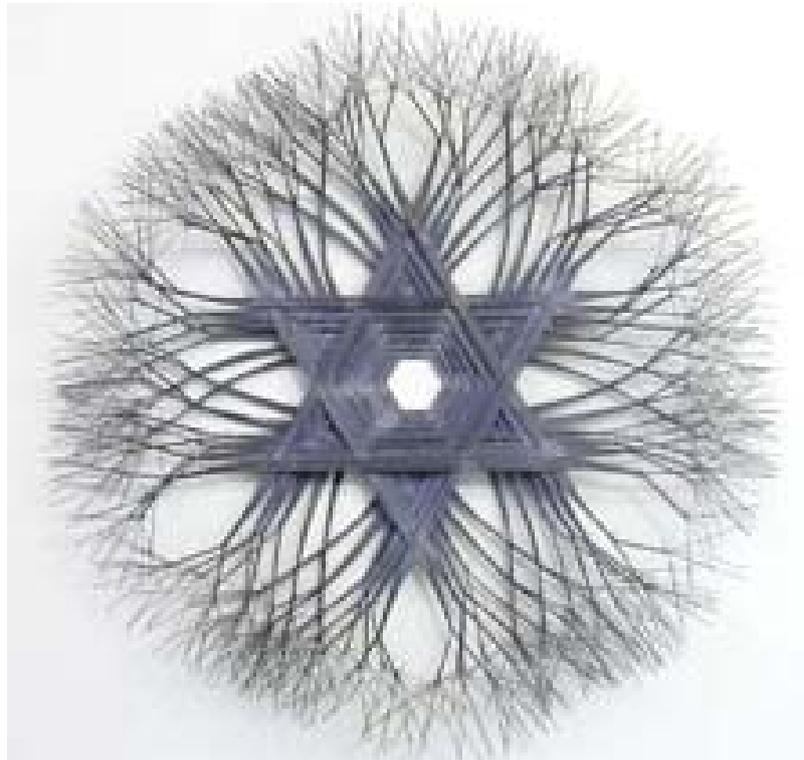




Figura 421 (arriba): John Robinson, "Pulse". Año 1996. Serie: "Univers, (Universo)".

Por todas estas circunstancias es por lo que esta escultura de la figura 421 la incluimos en el presente subgrupo. El autor en esta obra denominada "Pulse" nos transmite su idea sobre "la explosión e implosión" del universo, pero nos lo muestra de una forma muy geométrica e incluso matemática. Este escultor matemático John Robinson, como se ha podido comprobar por el gran número de obras y lo diferente de los grupos en que las hemos incluido, es uno de los mejores y más completos de este tipo de Arte Matemático.

Otra obra realmente diferente es la de la figura 422 situada debajo. En esta obra de **Irene Rosseau** denominada "Variable Planar Construction" su autora utiliza unos efectos visuales muy curiosos y que habitualmente se emplean en Pintura o en trabajos artísticos planos, como pueden ser los realizados mediante la superposición de hilos, los cuales **se podrían no considerar como Escultura, al menos en su forma tradicional**. Estos otros tipos de trabajos "escultóricos" no tradicionales, cuando sean conceptualmente matemáticos, también se incluirán en este grupo.

Ejemplos realmente claros de este otro tipo de trabajo "escultórico" son los casos mostrados en la página siguiente, muy diferentes entre sí. En el inicio de la página, en la figura 423, vemos un trabajo de **Eusebio Sempere**, un artista que ha practicado caminos diferentes en el Arte. Véase la figura número 419 de la página anterior. En esta obra este autor español utiliza "efectos visuales", precisamente los que acabamos de mencionar, que consigue mediante la superposición de líneas. Se encuentra expuesta en el museo de Arte Abstracto de la ciudad de Cuenca un emplazamiento muy interesante.

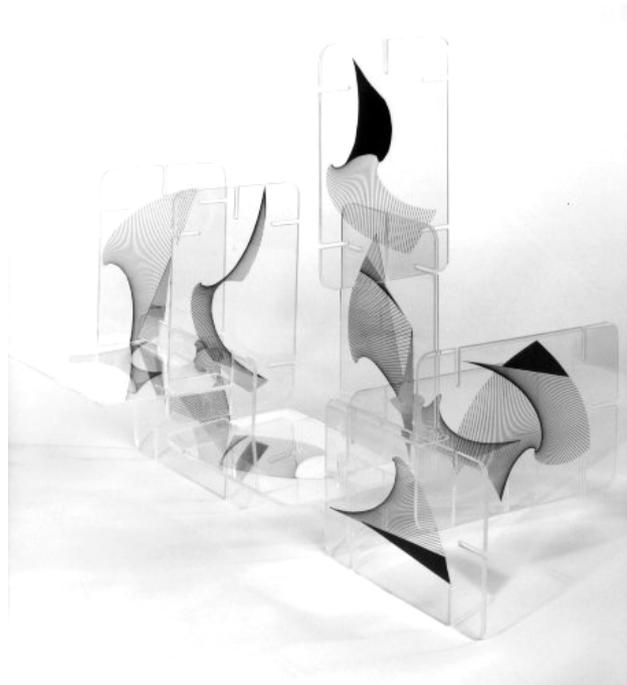
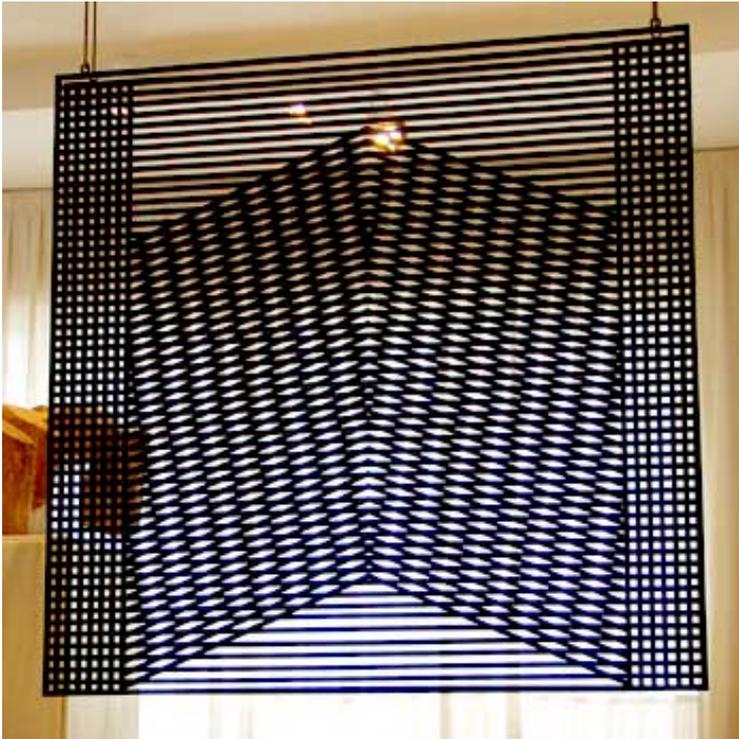


Figura 422 (derecha): Irene Rosseau, "Variable Planar Construction".

A continuación vamos a incluir un trabajo de Escultura Matemática que muy claramente se halla entre los que se podrían inscribir, **simultáneamente, en varios de los grupos principales de la clasificación**, y que no somos capaces de decidimos por uno determinado, pues creemos que en el diseño de esta obra "**no predomina**" un **único campo matemático**.

Nos referimos a la obra de la figura número 421, la imagen que está situada a la izquierda, y que ha sido realizada por **John Robinson**. En esta completa obra escultórica se puede encontrar conceptos y propiedades matemáticas que están relacionadas con la Geometría plana y con la espacial, como las formas poligonales que se han utilizado, con el Álgebra, como las simetrías existentes, e incluso con la Topología.



El museo en que se halla esta obra de Eugenio Sempere, el **Museo de Arte Abstracto de Cuenca**, es muy característico del arte abstracto español y resulta muy importante para conocer el Arte realizado en nuestro país, a lo largo del último siglo XX. Sin embargo, para nuestra tesis no lo es tanto, ya que posee pocas obras de Escultura. Esta colección tan interesante pertenece a la fundación Juan Marsh.

**Figura 423 (izquierda):
Eusebio Sempere;
"Latido". Museo de Arte
Abstracto de Cuenca.**

En este grupo de **trabajos artísticos que no son escultura en un sentido tradicional**, pero en los que sí se aprecia el uso de Matemáticas, se enclavan algunas obras de tipos como el de la escultura cinética, el de las esculturas que llevan asociadas hologramas, y otros muchos y diversos sistemas "novedosos". **Frank Malina** es un artista cinético que ha realizado obras de este tipo en las que se utiliza: mecanismos, circuitos electrónicos, etc.

Otro autor que ha realizado obras de tipo cinético es **Minako Takeno**. A la derecha en las figuras números 424 y 425 se observan dos interesantes ejemplos. En la página siguiente se muestran otras tres obras pertenecientes a este grupo de la clasificación. La primera es la figura 426 un trabajo de **Benno Artmann** que ha incluido en su colección de modelos topológicos. Debido a las características tan específicas que presenta, se situaría en el grupo Escultura Topológica. Por otro lado, esta obra también se podría incluir en el subgrupo de la Escultura Geométrica Otras Superficies. Ante esta indefinición la situamos en el presente grupo.

Figura 424 (derecha arriba): Minako Takeno. "Experiment of Shape Using Magnetic Fluid". Experimentos acerca de la forma usando fluidos magnéticos, imagen I.

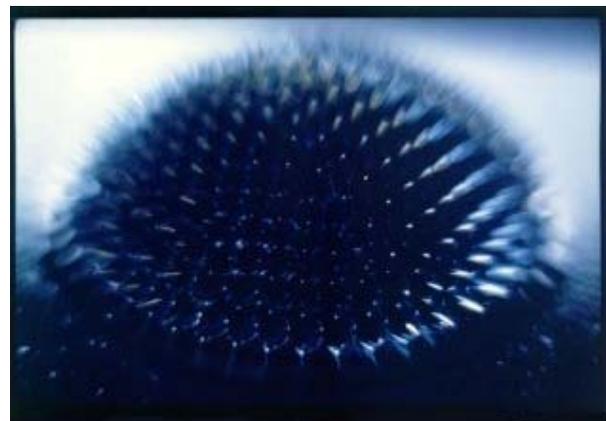


Figura 425 (derecha debajo): Minako Takeno. "Experiment of Shape Using Magnetic Fluid", imagen II.





Figura 426 (arriba): Benno Artmann. Topological Models, (Colección de modelos topológicos). Imagen I.

En definitiva, creemos que esta obra de la figura 426, situada a la izquierda; es otro claro ejemplo que justifica la creación de este grupo de la clasificación, ya que dada la gran variedad de conceptos matemáticos que intervienen en ella se podría clasificar en varios de nuestra taxonomía. El autor de esta obra es **Benno Artmann**, el cual aparece por primera vez en nuestra tesis. La colección de sus modelos matemáticos que ha denominado “topológicos” es realmente muy interesante.

Debajo mostramos otras dos obras de otro escultor que aparece por primera vez en esta tesis, **Ken Herrick**. Como se constata a lo largo de nuestra investigación acerca de la Escultura Matemática, siguen apareciendo o nuevos autores, o autores que anteriormente desconocíamos. Esto afortunadamente apoya **las buenas perspectivas que prevemos en el desarrollo de Escultura Matemática**. Estas obras de las figuras números 424 y 425, situadas debajo, tienen muy poco que ver con las que hemos expuesto en el resto de la tesis, lo que apoya la diversidad que se presentará en el futuro desarrollo de esta escultura.

Como hemos anticipado, en este grupo **clasificaremos los trabajos artísticos que aunque no se puedan considerar Escultura, al menos en su forma tradicional**, sí que creemos que en el fondo lo son. Esto también sucede con las dos obras de Ken Herrick ubicadas debajo. Dentro de este grupo también incluiremos las que se caractericen por conceptos novedosos en la Escultura Matemática como, los fractales, los atractores caóticos, etc., cuando se presenten simultáneamente con otras propiedades geométricas o matemáticas. También sucede con estas dos obras de debajo en las que en su concepción ha utilizado los fractales y otras características más tradicionales.

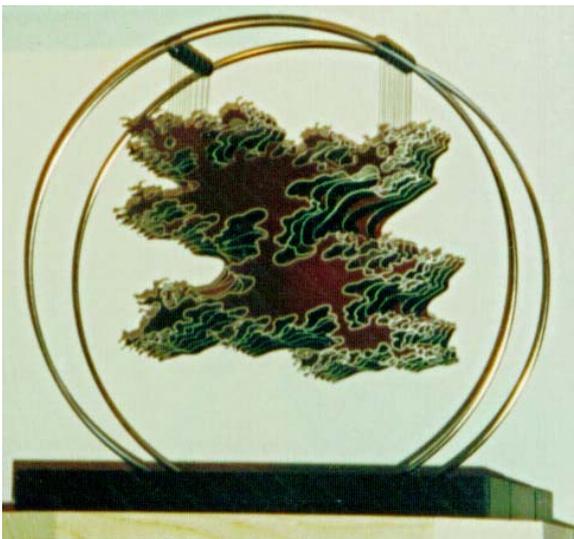


Figura 427 (izquierda): Ken Herrick, “Rocks (Rocas)”. Acero inoxidable y cristal.



Figura 428 (derecha): Ken Herrick, “Cloud (Nube)”. Acero inoxidable y cristal.

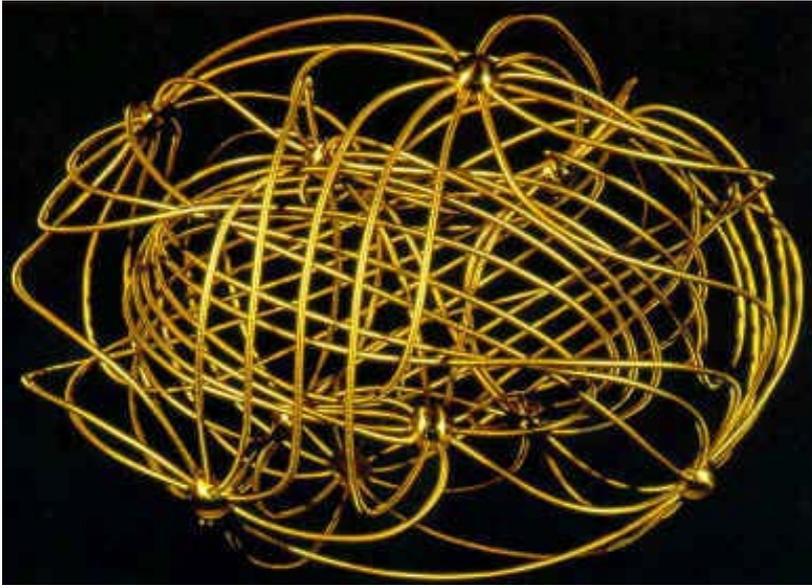
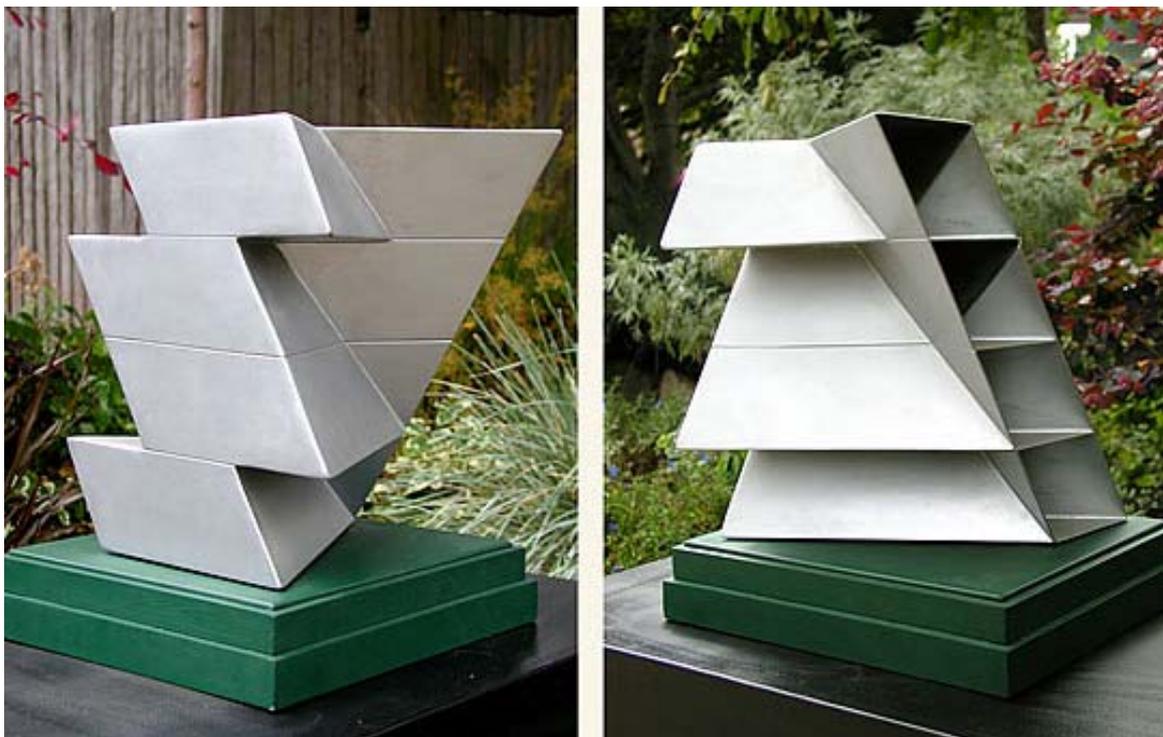


Figura 429
(izquierda): Modelo de un grafo de doce vértices completo realizado por el profesor Juergen Bokowski.

Figura 430: (al final de la página) Arthur Silverman. “Edifice, (Edificio)”. Aluminio gris mate. Galería: A New Leaf, Berkeley, California, Estados Unidos.

Los grafos es un campo que consideramos que presenta grandes posibilidades para su utilización futura en la Escultura Matemática. Para ilustrarlo en la figura 429, situada arriba de la página, mostramos una imagen de un grafo de doce vértices completo realizado por el profesor **Juergen Bokowski**. En los grafos intervienen conceptos matemáticos muy diversos, propiedades topológicas, características de tipo algebraico, como las simetrías, etc., por lo que las obras que los utilicen las clasificaremos en este grupo, Escultura con Conceptos Matemáticos Varios.

Este trabajo de la figura 429, es un modelo que podríamos considerar didáctico, pero que creemos que demuestra las grandes cualidades artísticas que ofrece este campo de las matemáticas para su empleo en esta escultura. Este modelo fue elaborado para ilustrar las características de este grafo concreto al profesor **Carlo Sequin**, que es quien nos lo presenta en una de sus colecciones de imágenes, en este caso la mostrada en la página web de la revista electrónica Visual Mathematics, referencia [PW9]. Ésta como ya hemos mencionado es una de las mejores publicaciones periódicas dedicadas al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte.





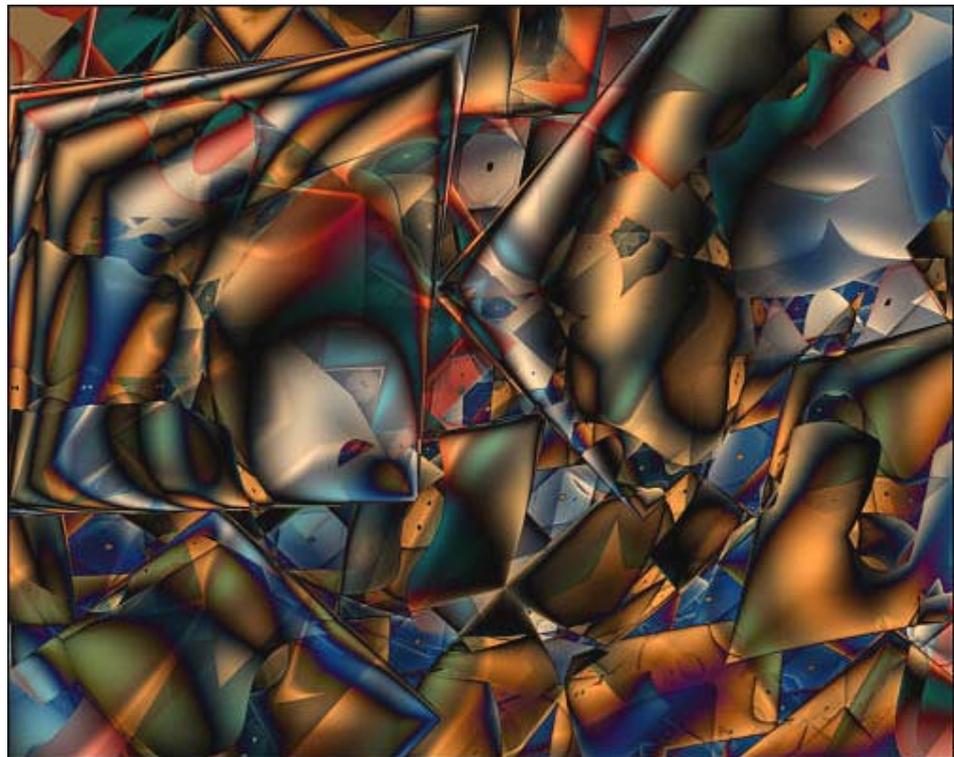
Arthur Silverman, aunque aparece por primera vez en esta tesis, es un escultor importante y que también realiza un trabajo que resulta muy geométrico y matemático. En las dos vistas de las fotografías de la figura número 430, en el final de la página anterior, se muestra su trabajo denominado “Edifice, (Edificio)”.

Este autor Arthur Silverman en esta interesante obra realiza lo que define como “**Arquitectura Escultural**”. En este trabajo tan sencillo y rítmico, el espacio se divide en varios niveles que se sitúan en zig-zag y se giran alrededor de un eje. En esta pieza se alternan planos diagonales y horizontales creando una obra escultórica muy sugerente geoméricamente. En este trabajo además de las formas poliédricas se utilizan algunos conceptos algebraicos y de cálculo, por lo que la clasificamos en este grupo, Escultura con Conceptos Matemáticos Varios.

En este grupo de nuestra clasificación también se incluirán algunas **obras en las cuales las características matemáticas no son tan evidentes**, pero que pensamos que a pesar de ello se pueden considerar Escultura Matemática. Un ejemplo muy claro es el conjunto de dos piezas de arriba, figura 431, realizado por **Brent Collins** y que ha incluido en serie que ha titulado: Balletic Suite (Suite de Ballet). Al respecto se puede consultar su completísima página web cuya ruta se encuentra en las referencias finales, [PW2] en la que presenta su excepcional trabajo escultórico clasificándolo en diferentes series. Anteriormente, en los capítulos de nuestra tesis dedicados al desarrollo del concepto de Escultura Matemática, hemos incluido algún otro ejemplo similar.

Figura 431
(arriba):
Brent Collins.
Gallery
Seventh,
Balletic Suite;
(Suite de
Ballet).
Fotografía de
Phyllip Geller

Figura 432
(derecha):
Janet Parke,
“Cubist;
(Cubista)”.
Imagen de
Arte Fractal.



Como ya se ha podido constatar, **los posibles tipos de trabajos que se clasificarán en el presente grupo, son increíblemente diversos**. Sugerimos algunos temas que creemos que no se han utilizado o por lo menos no tenemos conocimiento de ello. Un ejemplo que proponemos puede ser el de decorar las superficies de las formas geométricas de las obras con motivos matemáticos novedosos. Con ello se conseguirán obras que se podrían considerar Escultura Matemática. Una idea sería emplear **Arte Fractal**, además de otros conceptos. Para ilustrar esta posibilidad hemos incluido la figura 432, situada al final de la página anterior. En ella se muestra una imagen fractal realizada por **Janet Parke**, que ha titulado “Cubist (Cubista)”. Véase al respecto la página web de la revista electrónica Visual Mathematics, referencia [PW9], una de las mejores publicaciones periódicas dedicadas al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte, en la que entre otras se incluye una colección de los trabajos de Arte Fractal de Janet Parke.

Para estudiar este grupo de Escultura con Conceptos Matemáticos Varios, y dada la gama tan amplia de obras que comprende, es lógico que exista una variada bibliografía. Una interesante ponencia es *Form Space and Light* del profesor **Nathaniel Friedman** uno de los principales expertos en Escultura Matemática. Consúltese la referencia [56]. En este texto entre otros temas se comenta el concepto de la que hemos denominado “Arquitectura Escultural”. En las citas finales de esta tesis doctoral también se puede ver los datos relativos a otra ponencia la de **Maria Antonia Castro** titulada: *Fractals. A New Way to Understand design and Architecture*, referencia [57]. Ambas ponencias están incluidas en el repetidamente mencionado libro de actas de ISAMA 99.

Con respecto a la búsqueda de información para ampliar este tema también puede resultar útil consultar algunas páginas web como las siguientes. La página elaborada por una investigadora experta en geometría **Angela Vierling**, profesora en una universidad americana. Véase al respecto la referencia [PW30]. Otro tipo de páginas que pueden ser interesantes son las divulgativas de Arte, como la web diseñada por el Ayuntamiento de Barcelona que contiene una exhaustiva información de las esculturas situadas en las calles y jardines de esta ciudad. Además de una fotografía de cada una de ellas, incluye una breve descripción. Aunque la mayoría de las obras no son matemáticas, si que hay alguna que entraría en esta categoría, lo que en general sucede con estas páginas de tipo divulgativo. En el apartado dedicado a la Informática se amplió este tema.

Para acabar de describir este extenso grupo principal de nuestra clasificación, incluimos unos últimos ejemplos. Con ellos se apuntala nuestra idea de que las posibilidades de la utilización de las Matemáticas en Escultura son casi ilimitadas.

El primer ejemplo que nos sirve para finalizar nuestra descripción está realizado por **Javier Barrallo**, director de esta tesis. Es el precioso trabajo que se muestra en figura 433 situada a la derecha. En esta imagen se presenta otra obra de este autor “**exclusivamente virtual**”. En ella se aprecian muchas de las características que consiguen el que una obra sea matemática. En esta figura se han utilizado superficies y giros muy diversos. Además confluyen la Topología, el Álgebra y la Geometría.

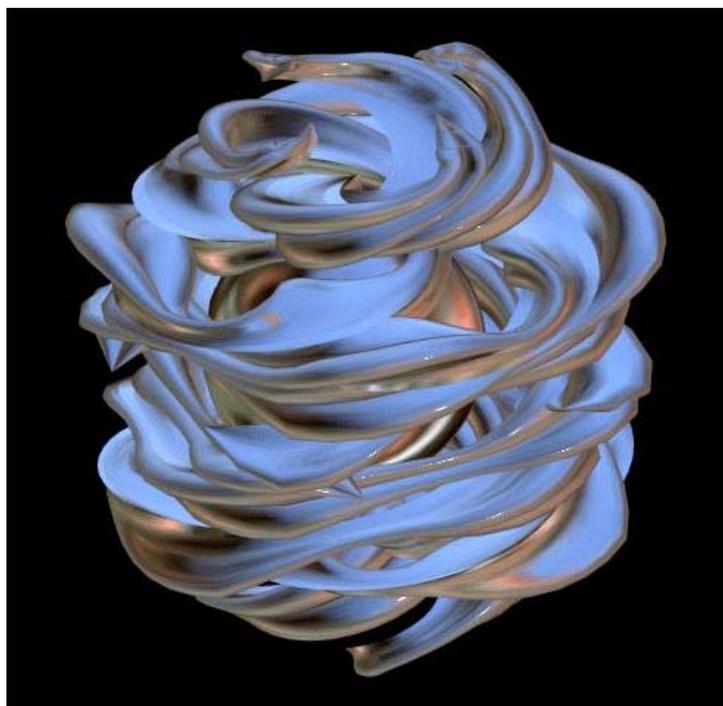
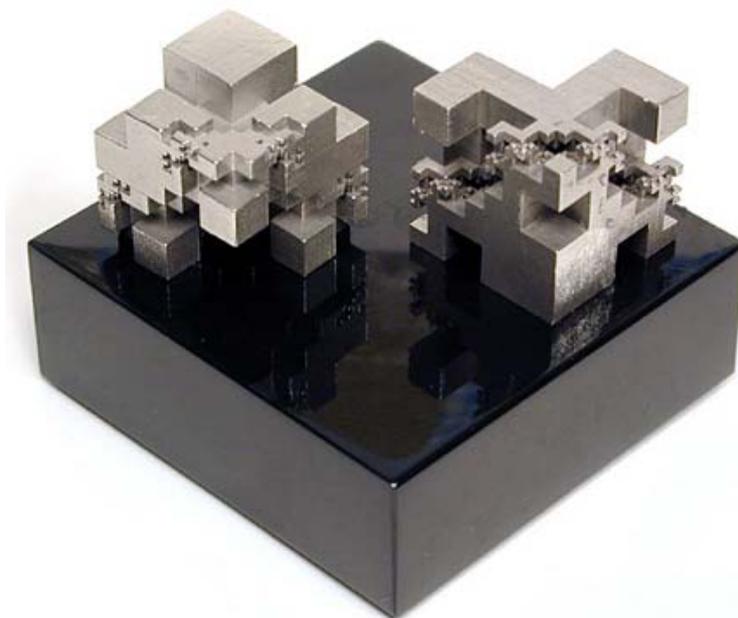


Figura 433 (arriba): Javier Barrallo. Escultura virtual número V, de la serie de título “Hyperescultura”. España, 1994.

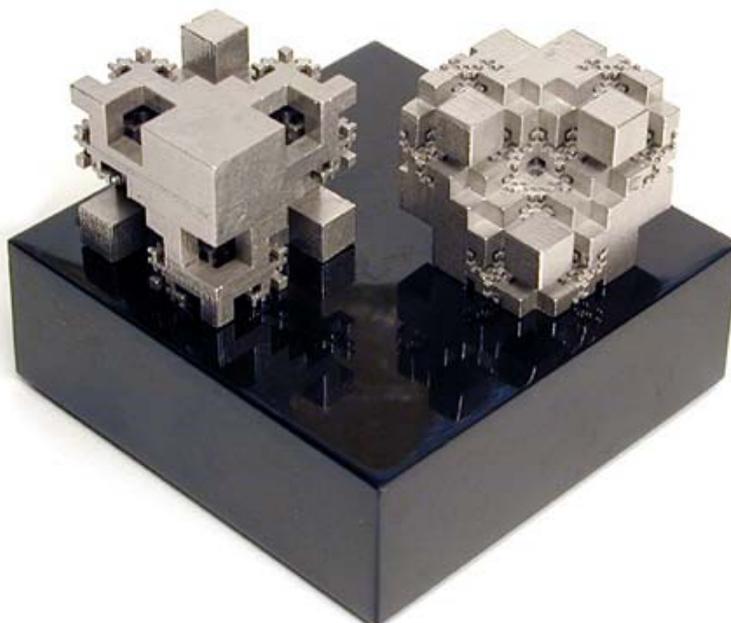
Para finalizar la descripción de este extenso grupo de nuestra clasificación, Escultura con Conceptos Matemáticos Varios, y como resumen final elegimos dos versiones de una magnífica obra de **Bathsheba Grossman**, “The Unit Cube”. Esta artista, posiblemente sea la mejor y más completa escultora matemática. Para completar la información acerca de su trabajo es interesante consultar la página de referencia [PW4], web en la que se muestra las imágenes de estas dos versiones de la obra anterior y de alguna otra que hemos incluido en nuestra tesis. Las rutas de esta web y de las otras páginas referidas a lo largo del texto, recordamos que se encuentran al final.

La primera de estas versiones es la que mostramos debajo en la figura número 434, la imagen superior. Esta escultora ha diseñado la obra a partir de un cubo, al que ha dividido en dos partes complementarias entre sí y que presentan formas fractales. Si ignorásemos el principio de exclusión de Pauli, podríamos comprobar que si las dos partes se juntaran se formaría el cubo original. La segunda es la de la figura número 435, la imagen inferior. Estas esculturas muestran dos interesantes diseños, algo diferentes, pero con la misma “filosofía”. **Este tipo de trabajo creemos que demuestra lo profundamente matemática que puede llegar a ser una escultura.**



Para ultimar también debemos recordar que en los apartados anteriores ya hemos mostrado algunos trabajos que se clasificarán en el grupo actual, los de las figuras: 16, 180, 188, 194, 195, 196, 197, 219, 224, 226, 231, 258, 259 y 263. Como se constata por su alto número es frecuente la realización de obras de este tipo en Escultura Matemática.

Por último resaltar que el presente grupo, Escultura con Conceptos Matemáticos Varios se extenderá, ya que en él también se clasificarán aquellas obras escultóricas que se caractericen por **conceptos “novedosos”, o relacionados con los futuros avances de las Matemáticas y en campos que no cubren los grupos específicos principales de nuestra clasificación.**



**Figura 434 (arriba):
Bathsheba Grossman.
“The Unit Cube”. Plata
y pedestal de mármol
negro. Tipo I.**

**Figura 435 (debajo):
Bathsheba Grossman.
“The Unit Cube”. Plata
y pedestal de mármol
negro. Tipo II.**

CONCLUSIONES



8 Conclusiones

En la presente tesis doctoral creemos que hemos logrado los dos objetivos principales que nos fijamos al inicio, **demostrar la existencia de un tipo de Escultura que es conceptualmente matemática y, clasificarla según conceptos matemáticos con una estructura sistemática en esta tipificación.** La organización de la clasificación de este tipo de Arte que hemos denominado, Escultura Matemática, entendemos que la hemos ido mejorando sustancialmente a lo largo del proceso de nuestra investigación, a pesar de los problemas que se nos han ido planteando. El progreso de la investigación se puede evidenciar con la aparición de sucesivas publicaciones de ponencias y artículos en los que han ido apareciendo nuestros resultados parciales. Para conocer con detalle las diferentes propuestas y la estructura de estos diseños de clasificaciones que hemos enunciado, tanto de las versiones previas como de la definitiva de esta tesis, se tiene que consultar el capítulo dedicado específicamente a la clasificación de la Escultura Matemática.

El primer planteamiento de taxonomía de la Escultura Matemática que hicimos fue un estudio preliminar, en el que formulamos una versión previa que presentamos como ponencia en el congreso internacional, **Meeting Alhambra ISAMA-BRIDGES 2003.** Este texto se citaba en la anterior referencia [7] que precisamente se titulaba, *Mathematical Sculpture Classification.* **Poco después enunciamos la versión que propuse en mi trabajo de investigación,** dirigido a la obtención de la suficiencia investigadora y del diploma de estudios avanzados del programa de doctorado para el que se ha realizado la presente tesis, el de Matemática Multidisciplinar de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). Consultar la referencia [58].

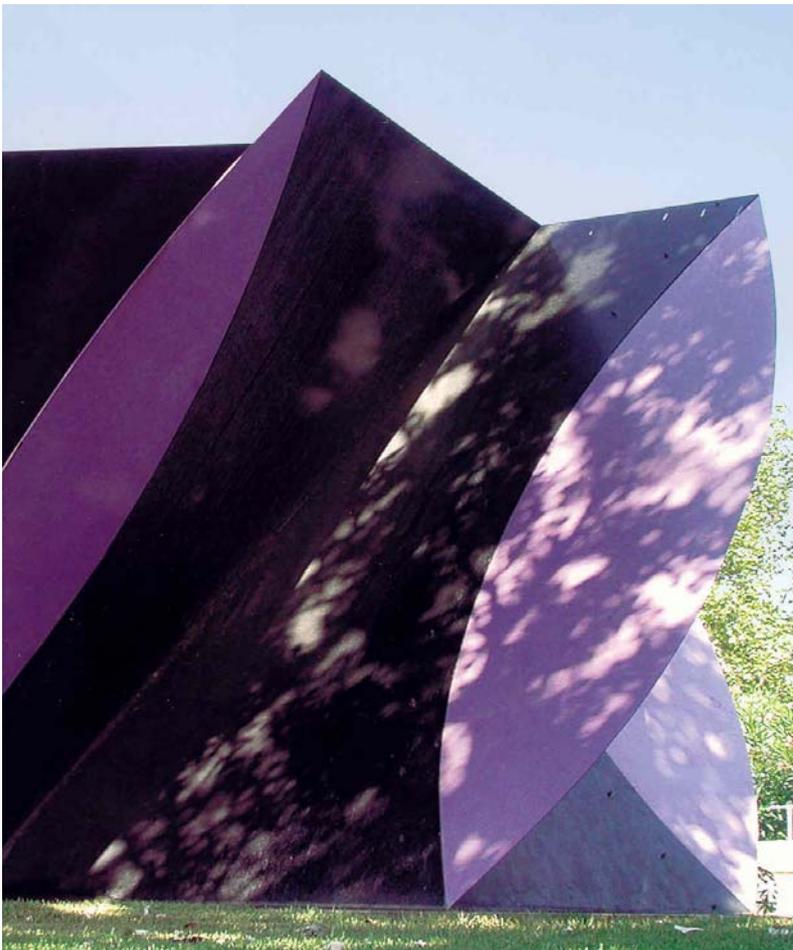


Figura 436 (en la portada de este capítulo, en la página anterior): Arthur Silverman, “Geo Dougnuts”. Aluminio. Dimensiones: 218 x 119 x 88 cm. Dos vistas diferentes de la misma escultura.

Figura 437 (derecha): Edgar Negret, “Sin Título”. Hierro con imprimación aerográfica; 1990. Dimensiones: 360 x 430 x 430 cm. Jardín de Arquitectura. Campus de la UPV. Valencia.



Las otras publicaciones que hemos indicado, pero que todavía no habíamos referenciado, en las que han aparecido los consecuentes resultados de nuestra investigación son las dos siguientes. El número de la revista Matemática *Sigma*, de Noviembre del pasado año 2004 en el que se incluía nuestro artículo: *Clasificación de la Escultura Matemática*. Al respecto se puede consultar la referencia [59]. Por último, mencionamos nuestro artículo en una publicaciones del campo de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte más prestigiosas y completas, la excelente revista electrónica: *Visual Mathematics*. Dicho texto citado en la referencia [60] se titula: *Classification of Mathematical Sculpture*.

Figura 438 (izquierda): Nathaniel Friedman, “Trefoil Torso, (Torso en Trébol)”. Piedra arenisca, colección privada, Estados Unidos.

Antes de iniciar la enumeración de las conclusiones finales de la tesis y siguiendo con nuestra filosofía de trabajo tradicional, vamos a mostrar como **resumen de tipo “gráfico”**, unas últimas imágenes de trabajos de Escultura Matemática muy concretos. Con respecto a este tema insistimos en que hemos creído que la mejor forma de explicar este tipo de Arte es visualmente y en que al menos en general hemos intentado separarnos del habitual lenguaje matemático, basado en una compleja formulación algebraica, y sustituirlo por la imagen de las obras, los croquis de su diseño, las gráficas matemáticas de las formas empleadas, etc. Incluimos un primer ejemplo en la figura 436, situada en la portada de este capítulo. Son dos vistas diferentes de una escultura realizada por **Arthur Silverman** titulada “GeoDoughnut”. Esta obra presenta lo mismo que todas las de este autor, no sólo unas formas geométricas muy acusadas, las poliédricas, sino también una concepción profundamente matemática.

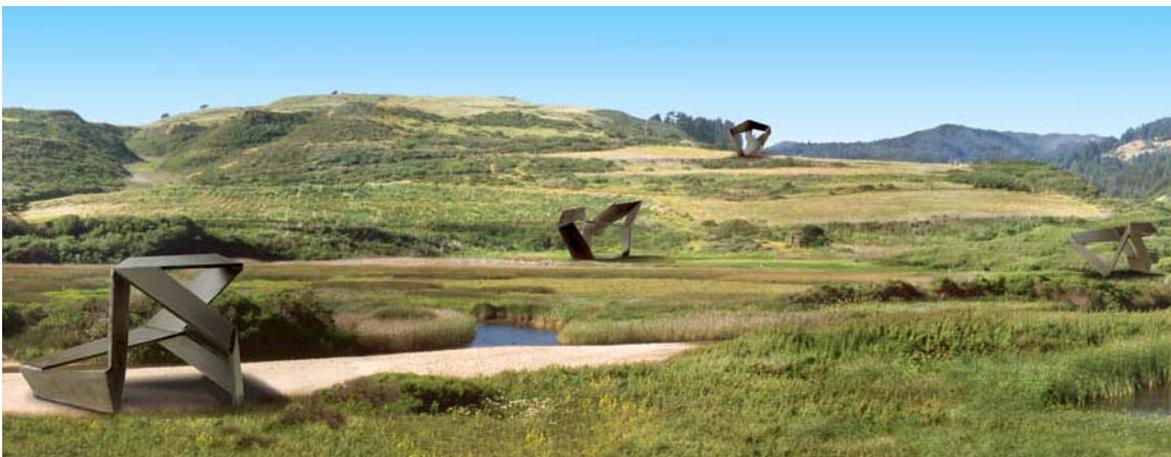
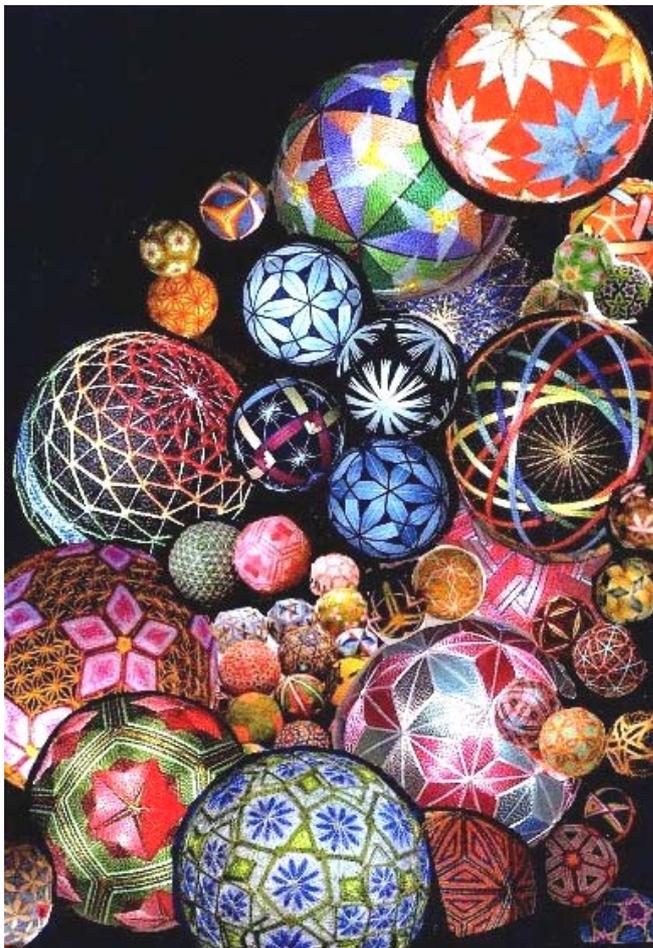


Figura 439 (al final de la página): Charles Ginnever. Exposición de escultura “Rashomon”, exhibición realizada en un entorno natural.

No queremos dejar de recordar la tremenda importancia que tuvo en la decisión de iniciar nuestra tesis sobre la Escultura Matemática, la contemplación de las numerosas obras escultóricas situadas en el Campus de nuestra universidad. En sus jardines se exponen trabajos de escultura muy diferentes realizados por autores contemporáneos muy diversos, muchos de los cuales son un magnífico ejemplo de la utilización de conceptos matemáticos en la Escultura. A lo largo de la tesis hemos mostrado bastantes fotografías de estas obras de nuestra universidad, las cuales nos sirvieron de inspiración para la realización de esta investigación.

Para el estudio detallado de todas estas obras puede resultar muy relevante consultar un texto muy atrayente y completo titulado precisamente: *Esculturas del Campus de la Universidad Politécnica de Valencia*, en la referencia [1]. Para recalcar la gran importancia que ha tenido es suficiente decir que fue la primera cita que incluimos en la tesis. Presentamos un último ejemplo de ellas en la figura 437 realizada por **Edgar Negret** que se muestra en la página antepenúltima. Posee unas características claramente geométricas. Se puede apreciar que consiste en la repetición de un sólido limitado por superficies suavemente curvadas, utilizando diversos tipos de simetrías con respecto a un plano, con respecto a un eje y con respecto a un punto. Esta característica es la predominante, por lo que se incluiría en el subgrupo, Simetrías. En definitiva, para conocer la obra de algunos de los más notables escultores españoles puede resultar muy interesante efectuar una visita a algunos de sus trabajos escultóricos situados en los jardines del Campus de la UPV.

A continuación en la figura número 438 situada en la parte superior de página anterior, hemos presentado una escultura muy diferente, no tan geométrica como las dos anteriores. Este es un trabajo de **Nathaniel Friedman**, que ha denominado “Trefoil Torso, (Torso en Trébol)”. Este escultor y profesor de matemáticas en la universidad norteamericana de Albany, como ya hemos expuesto reiteradamente es uno de los mejores investigadores en este campo de la Escultura Matemática y también realiza unas sencillas pero interesantes obras.



Esta escultura de la figura 438 anterior es un ejemplo que nos sirve para recordar que existen obras como ésta, que plantean dudas sobre su inclusión en la Escultura Matemática. A pesar de que su forma (torso) nos demuestra un origen de naturaleza, figurativo, el tratamiento que le ha dado el autor indica una concepción matemática. Se puede observar que la forma externa de esta obra es una superficie matemática sencilla y que también ha investigado en simetrías.

Además en la página anterior, en la figura número 439 justo al final, se puede observar un curioso ejemplo del trabajo de un autor que todavía no había aparecido en la tesis, **Charles Ginnever**. En esta imagen mostramos una exhibición de su escultura en un entorno natural. Es de su exposición titulada “Rashomon”, que consiste en quince unidades idénticas, situadas en quince posiciones estables diferentes.

Figura 440 (izquierda):
Frederick Flowerday. Imagen
virtual: “Tamari”.

En el final de la página anterior, en la figura 440, mostramos una imagen virtual realizada por **Frederick Flowerday** y titulada “Tamari”. Estas formas creemos que pueden ser utilizadas para el diseño de obras de Escultura Matemática. Esta figura está incluida en un artículo en el que este científico investiga temas de resistencia de materiales en determinadas estructuras que ha denominado “Synetic Structures”. Este texto ha sido publicado en la revista *Visual Mathematics* que ya ha sido citada repetidas veces en nuestra tesis. Consultar al respecto la página web de la referencia [PW9]. Como se ha constatado a lo largo del texto e incluso con las obras que acabamos de presentar en este capítulo de conclusiones, siguen apareciendo nuevos autores u otros que previamente desconocíamos. Esta circunstancia afortunadamente apoya las **buenas perspectivas que prevemos en el desarrollo de la Escultura Matemática**, aspecto éste se ha tratado en el apartado dedicado a este tema en el capítulo que se estudiaba el concepto de este tipo de Escultura.

A diferencia de lo que ocurre con estos últimos escultores, en la figura 441 de la página anterior, mostramos un trabajo de un autor del que ya hemos presentado bastantes esculturas, **Carlo Sequin**. Este escultor como ya hemos expuesto también es profesor en una universidad norteamericana, la de Berkeley, y creemos que es el mejor investigador de este campo. Esta obra se titula “Totem 3” y es un magnífico ejemplo de Escultura Matemática perteneciente a la serie “Tótem” de Carlo Sequin. Este trabajo es un ejemplo del paradigma que se presenta en un conjunto de obras de este tipo de escultura, los toroides de Scherk-Collins. La obra original de **Brent Collins** denominada “Hyperbolic Hexagon”, ya la hemos mostrado en la figura 344 anterior, que se incluía como ejemplo del subgrupo de la Escultura Matemática, Superficies Mínimas. Ésta era un caso de aplicación de la forma de una superficie mínima de Scherk de segundo orden, que se giraba 360 grados hasta lograr un toroide. También en el apartado dedicado a la Informática y la Escultura Matemática, en el capítulo que acabamos de mencionar, hemos estudiado el diseño de este tipo de obras que se realiza con el programa: “Sequin's Sculpture Generator I”.



Por último mostramos dos obras que nos sirven como colofón de esta tesis. La primera la imagen de la figura 442 en la página siguiente, en la que se puede ver una magnífica escultura de **Bathsheba Grossman**, que ha denominado con el nombre de la forma del objeto matemático que representa en ella, “Menger Sponge”. Esto es, el de la “Esponja de Sierpinski-Menger” que es una de las de las figuras fractales espaciales más sencillas e interesantes. Para obtenerla se divide un cubo en 27 pequeños cubos iguales y se “suprimen” los 7 centrales. El proceso se puede repetir infinitas veces. En la obra de la figura 442 se ha efectuado 4 veces.

Presentamos un último trabajo de Escultura Matemática, en las posteriores figuras 443 y 444. En ellas se muestra dos vistas diferentes de una obra que ha sido titulada “The 120 Cell (La celda 120)”. En ella han participado dos de los mejores escultores matemáticos, Georges Hart que la diseñó, y Bathsheba Grossman.

Figura 441 (izquierda): Carlo Sequin, “Totem 3”. Serie: “Tótem”. Bronce; altura 34 cm. Septiembre del 2004.

El diseño de esta obra que se muestra en las figuras números 443 y 444 situadas en la página siguiente, es exclusivamente de **Georges Hart** pero físicamente ha sido realizada por **Bathsheba Grossman**. La forma matemática que se presenta en esta escultura es la de un sólido en el espacio de cuatro dimensiones, proyectado en el espacio habitual de tres dimensiones. Este sólido es el análogo del dodecaedro en el espacio de cuatro dimensiones. Es denominado así por sus 120 caras dodecaédricas, cuyos bosquejos aparecen en la obra "The 120 Cell". Con este impresionante trabajo desde un punto de vista matemático finalizamos la exposición ejemplos de este tipo de escultura. Creemos que a lo largo de la tesis **hemos presentado muchas y muy diversas obras escultóricas de Escultura Matemática**, las suficientes para lograr sus objetivos.

A continuación vamos a resumir las conclusiones de esta tesis doctoral. Las primeras que enumeramos son justificaciones de tipo genérico y nos permiten fundar de forma adecuada las específicas de nuestro examen sobre la Escultura Matemática que posteriormente exponemos. Estas conclusiones generales de nuestra investigación acerca de las relaciones de las Matemáticas y el Arte son:

- **Existen relaciones entre el Arte y las Matemáticas desde los primeros tiempos de la humanidad.** Lógicamente el número y la intensidad de estos lazos han ido aumentando a lo largo de la Historia, según se han ampliado y mejorado los conocimientos matemáticos.
- **Estos vínculos se presentan en alguna medida en el Arte de prácticamente todas las civilizaciones.** En efecto, en cada caso el número de estas relaciones y su nivel de complejidad dependen del nivel cultural alcanzado por cada civilización concreta y sobre todo del alcance de sus conocimientos matemáticos. Esto se constata en lo evidentes que son estas relaciones en civilizaciones como la egipcia o especialmente en la griega.
- **Existe relación entre las Matemáticas y todas las ramas del Arte.** Es más, esta correlación se puede extender a la mayoría de las manifestaciones artísticas, tomando la definición de éstas en su sentido más amplio. Resaltamos que estas tres conclusiones iniciales las hemos obtenido basándonos en nuestra investigación previa sobre los antecedentes de estas correlaciones entre las Matemáticas y el Arte y su evolución a lo largo de la Historia, estudio que hemos detallado en el capítulo correspondiente de esta tesis.

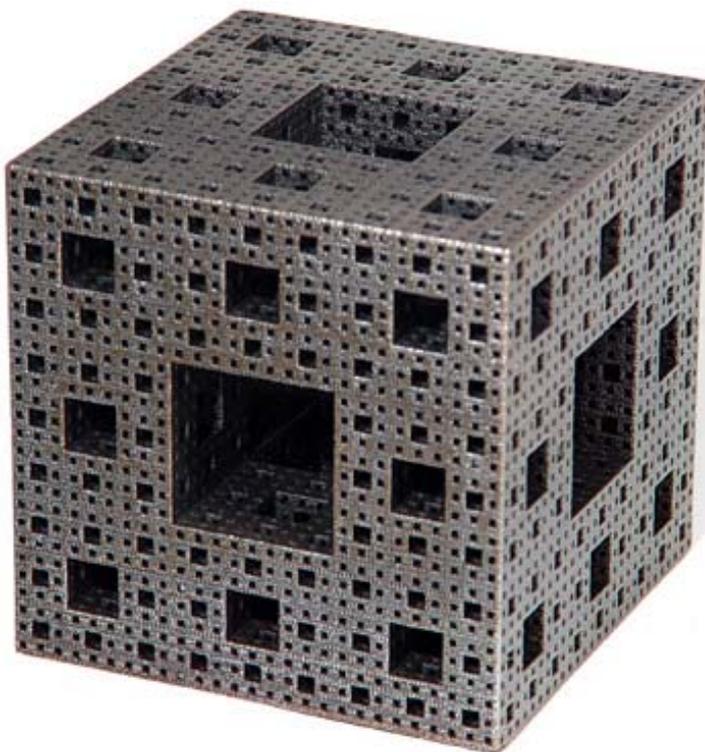


Figura 442 (izquierda): Bathsheba Grossman; "Menger Sponge". Bronce de silicio. Dimensiones: 8 cm. Escultura con la forma de la "Esponja de Sierpinski-Menger" una figura fractal en el espacio.

- **Los grandes avances de las Matemáticas han hecho posible la aparición de un Arte que se puede considerar conceptualmente matemático**, que se ha desarrollado fundamentalmente durante el siglo XX. Aquéllos empezaron durante la Edad Moderna pero especialmente son los que se han producido durante la Edad Contemporánea, los que han permitido esta irrupción.
- **Se debe fomentar la inclusión en todos los niveles de la enseñanza del estudio de temas relativos a las relaciones entre las Matemáticas y el Arte**. Esto se podría efectuar tanto en las asignaturas de Matemáticas de los distintos cursos como en otras de tipo artístico. Creemos que la explicación de estos temas conseguiría interesar un poco más a los alumnos por las Matemáticas, lo cual muchas veces resulta francamente difícil.
- **Se debe potenciar la implantación y presencia de asignaturas con este tipo de contenidos en concreto en los últimos niveles de enseñanza secundaria**. Al respecto debo recordar que actualmente se está impartiendo una asignatura optativa en segundo curso de Bachillerato, llamada: Matemáticas de la Forma. Sus contenidos desarrollan, fundamentalmente, este tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Su programación viene recogida en el BOE de la referencia [36]. También con relación a esta asignatura es interesante resaltar que he tenido la oportunidad de impartir un curso organizado por el Centro de Formación del Profesorado de nuestra universidad, la UPV de Valencia, que iba dirigido a los profesores de Bachillerato que imparten o impartirán esta asignatura de Matemáticas de la Forma.
- **Se debe fomentar la inclusión en los diversos niveles de la enseñanza universitaria de asignaturas con este tipo de contenidos**. Éstas son especialmente adecuadas para aquellas especialidades que se puedan inscribir en la rama técnico artística, como por ejemplo en los estudios de Arquitectura. De hecho, esto ya sucede en algunas universidades internacionales y incluso en España, donde algunas escuelas de Arquitectura como la de Valladolid y también la nuestra, la de la Politécnica de Valencia, ya imparten asignaturas sobre estos temas.
- **La Arquitectura es la rama del Arte que, en general, a lo largo de la Historia ha estado más relacionada con las Matemáticas**. Esta relación se manifiesta ya muy claramente en las obras arquitectónicas de la antigüedad clásica y aún en las épocas que precisamente no brillan por grandes avances científicos como la Edad Media, sigue estando presente. Por último, en muchas de las edificaciones actuales resultan totalmente evidentes estos vínculos.



Figura 443 (izquierda): “The 120 Cell”, (La celda 120). Diseño Georges Hart y realización de Bathsheba Grossman. Metal; 10 cm de diámetro. Vista I.

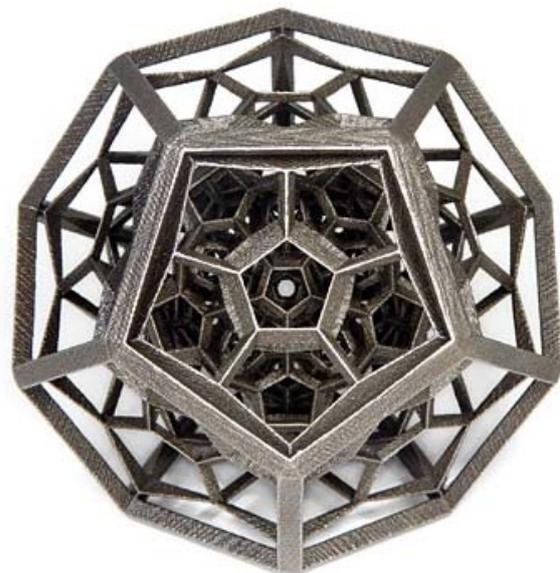


Figura 444 (derecha): “The 120 Cell”, (La celda 120). Diseño Georges Hart y realización de Bathsheba Grossman. Metal; 10 cm de diámetro. Vista II.

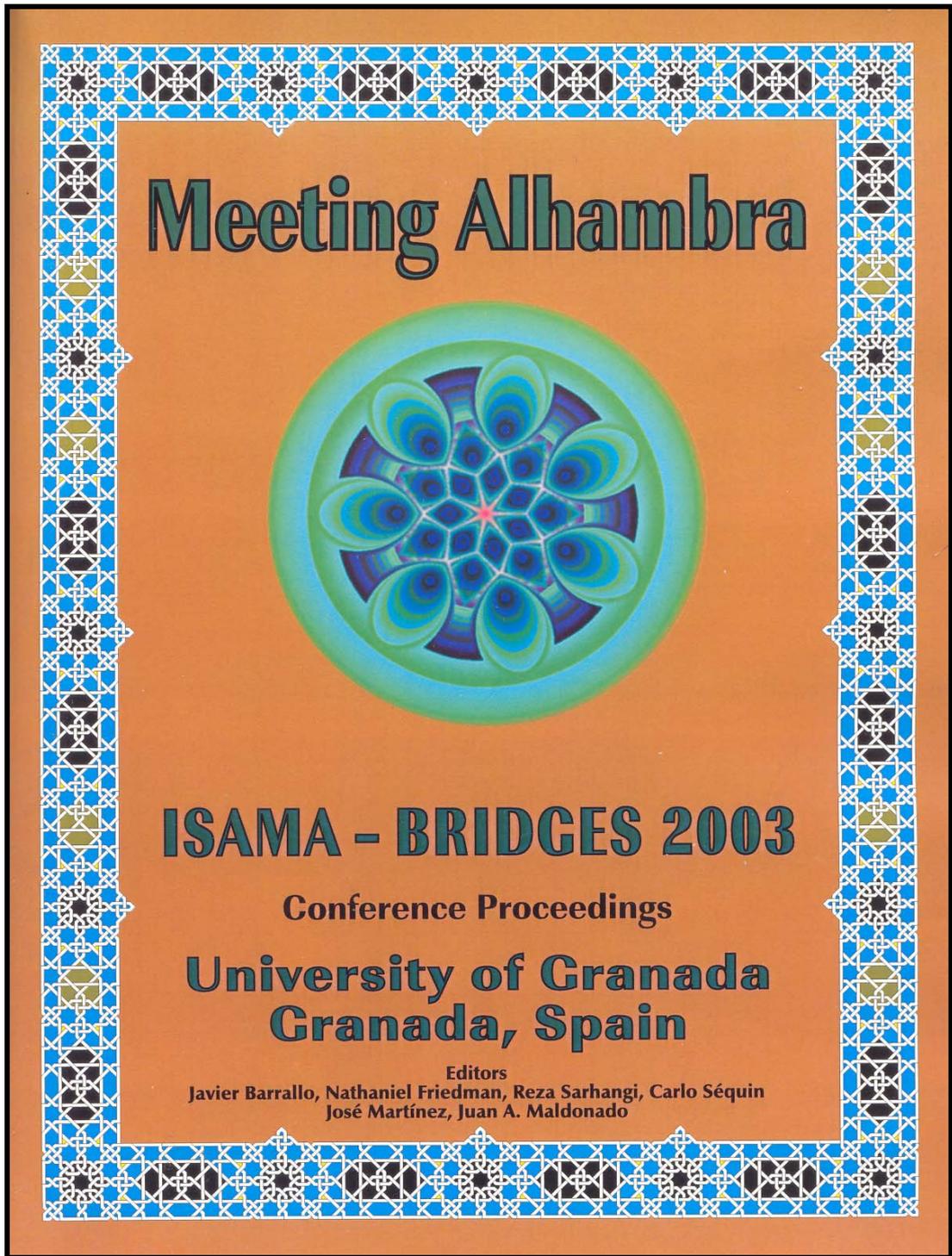
Después de estas conclusiones de tipo genérico sobre las relaciones de las Matemáticas y el Arte, **expondremos las específicas de nuestra investigación sobre la Escultura Matemática**, como culminación de esta tesis doctoral. Estas conclusiones son las siguientes:

- **La Escultura también está relacionada con las Matemáticas.** En las conclusiones generales anteriores hemos recordado que en esta tesis doctoral hemos justificado que existen relaciones entre las Matemáticas y todas las ramas del Arte y por tanto también con la Escultura. Estas correlaciones resultan mucho más acusadas en las obras realizadas durante el siglo XX y predominan en la mayoría de los trabajos escultóricos elaborados en la actualidad.
- **Es necesario profundizar en la investigación de estas relaciones.** Creemos que no existe ningún estudio que haya sistematizado totalmente esas correlaciones entre las Matemáticas y la Escultura. Nuestra tesis pensamos que es el primer intento riguroso de ello.
- **Existe un tipo de Escultura que se puede considerar conceptualmente matemática.** Como ya hemos expuesto a este tipo de arte le hemos denominado “Escultura Matemática”. En nuestra tesis creemos que hemos presentado suficientes ejemplos de escultores que elaboran este tipo de Escultura, y de obras que se podrían considerar dentro de este concepto del Arte. Al respecto véanse los dos clarísimos ejemplos de Escultura Matemática de las últimas figuras, la número 442, una obra escultórica de Arte Fractal y la número 443, que pertenecería a lo que podríamos llamar Arte del “Hiperespacio”.
- **Pensamos que resulta difícil dar una definición precisa y cerrada del concepto Escultura Matemática.** Este inconveniente está motivado porque la definición que hemos enunciado es algo imprecisa, debido a que en su expresión hemos incluido la palabra “fundamental”, un término que tiene cierta subjetividad. En cualquier caso pensamos que, a pesar de esta posible dificultad, en la gran mayoría de las obras no queda ninguna duda acerca de su pertenencia a la Escultura Matemática.
- **Creemos que únicamente se ha realizado verdadera Escultura Matemática a partir del siglo XX.** En esta investigación, y a pesar de que hemos tratado de abarcar toda la Historia del Arte, no hemos encontrado ni ejemplos de escultores que realicen este tipo de escultura, ni obras que se puedan considerar de concepción exclusivamente matemática realizadas antes del pasado siglo.
- **La Escultura Matemática ha alcanzado un nivel muy notable en la actualidad.** A ello evidentemente han contribuido, además del gran desarrollo técnico y matemático alcanzado por nuestra sociedad, el espectacular avance de la Informática y su generalización.
- **La Escultura Matemática está experimentando una franca expansión.** Ello es debido a las causas expuestas en el punto anterior y además al profundo interés que creemos experimentan por este nuevo tipo de Arte los artistas que lo realizan y a la incipiente curiosidad que está empezando a despertar en el público en general.
- **Preveamos buenas perspectivas en el próximo futuro para el desarrollo de la Escultura Matemática.** Esto además de por todas las razones anteriores, pensamos que es cierto porque cada vez existen más escultores que realizan este tipo de Arte lo que fomentará su desarrollo en un futuro próximo.
- **La diversidad de la Escultura Matemática es muy amplia.** También se debe resaltar que casi todos los campos de las Matemáticas han sido utilizados en la concepción de obras de escultura de este tipo.
- **Es posible clasificar este tipo de Escultura mediante conceptos matemáticos y hacerlo con una estructura ordenada de esta taxonomía.** Esto sólo resulta aplicable a la Escultura Matemática. En cualquier caso se debe resaltar, que creemos que no existe ningún trabajo en que se incluya un estudio que haya sistematizado totalmente esas relaciones entre Matemáticas y Escultura y menos aún, que haya conseguido clasificar la Escultura Matemática como hemos efectuado en la presente tesis.

- **Las mejores estructuras para tipificar la Escultura Matemática serán aquellas que tomen como modelo a las clasificaciones de las Matemáticas.** La última versión de clasificación que hemos propuesto en nuestra tesis, resulta un intento razonable de lograr este tipo de categorización.
- **Cualquier modelo de clasificación de la Escultura Matemática que se proponga no podrá ser totalmente exhaustivo.** Los límites entre los grupos de Escultura que se propongan serán imprecisos, lo cual no es de extrañar, dado que la misma división de las Matemáticas lo es en algunos casos. Existen conceptos relacionados con varias áreas, por lo cual podemos intuir que siempre habrá obras escultóricas que se podrían clasificar en varios tipos simultáneamente.
- **Pensamos que cualquier clasificación de Escultura Matemática que se enuncie tendrá que incluir uno o varios grupos de tipo muy genérico.** Por un lado, existen esculturas en las cuales se presentan a la vez conceptos y propiedades pertenecientes a campos muy diversos de las Matemáticas por lo que no resulta fácil decidirse por uno determinado, ya que no “predomina” un concepto matemático único. Por otro lado, habrá otros trabajos en los que su pertenencia a este tipo de Escultura no sea evidente porque no sean “claramente matemáticos”. Para esos casos en nuestra clasificación hemos creado el grupo Escultura con Conceptos Matemáticos Varios, que no presenta ninguna uniformidad entre las obras que incluye.
- **La existencia de esta clasificación de la Escultura Matemática facilitará la inclusión de su estudio en todos los niveles de la enseñanza.** En principio dentro de las asignaturas dedicadas específicamente al estudio de la relación Matemáticas-Arte. Incluso también se podría efectuar en las asignaturas de Matemáticas de algunos cursos o en otras materias de tipo artístico.
- **La existencia de esta clasificación, permitirá la inclusión de su estudio dentro de algunas asignaturas impartidas en la enseñanza universitaria.** Esto introducción será especialmente adecuada en aquellas titulaciones de tipo mixto, técnico y artístico. Incluso en algún caso, se podría pensar en llegar a proponer su estudio en una asignatura optativa independiente.
- **La clasificación que hemos propuesto debe ser objeto de mejora.** Esperamos mejorar y ampliar en el futuro la última versión de la clasificación que hemos enunciado en nuestra tesis. Además creemos que posiblemente también se podría mejorar su estructuración e introducir algunos conceptos y propiedades matemáticas que tal vez no hayamos contemplado.
- **Para mejorar esta clasificación se deberá contar con los pocos expertos que existen en este campo.** En el futuro, como ha sucedido a lo largo de la realización de nuestra tesis en la que hemos consultado a algunos de los mejores expertos en la investigación de estos temas, esperamos seguir contando con algunos de estos profesores universitarios. También creemos que para mejorar esta taxonomía puede resultar muy útil la colaboración de los escultores matemáticos más significados. En la tesis también hemos contado con los consejos de algunos de estos artistas matemáticos.

Figura 445 (en la página siguiente, portada del capítulo de referencias): Portada del libro de actas del congreso internacional, Meeting Alhambra ISAMA-BRIDGES 2003.

REFERENCIAS



9 Referencias

- [1] **Vicerrectorado de Cultura y Territorio de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV).** *Esculturas del Campus de la Universidad Politécnica de Valencia*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV; I.S.B.N.: 84-9705-117-3. Valencia, 2001.
- [2] **Barrallo Calonge, Javier.** *Matemáticas y Escultura*. Conferencia invitada a la sesión inicial de las Terceras Jornades d'Innovació Docent: L'ensenyament de les Matemàtiques i el Projecte EUROPA. Libro de actas publicado por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia; pp. 3-10. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV; Depósito legal: V-3857-2002. Valencia, 2002.
- [3] **Barrallo, Javier.** *Geometría Fractal: Algoritmos y Creación Matemática*. Conferencia invitada de las Cuartas Jornades de Investigació y Fomento de la Multidisciplinariad. Libro de actas publicado por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia; pp. 89-95. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV; Depósito legal: V-3858-2002. Valencia, 2002.
- [4] **Marar, Tom.** *Max Bill e a Matemática*. Conferencia invitada a las primeras Jornades de Matemáticas y Arte organizadas por la Universidad de Valencia. Valencia, 2004.
- [5] **Brown, Ronald.** *Les Escultures Simbòliques de John Robinson*. Revista Mètode; Universitat de Valencia. Número 37, Fons & Forma. Matemàtiques en la Creació Artística Actual; pp. 67-71. Editorial: Publicaciones de la Universidad de Valencia. Valencia, 2003.
- [6] **Varios autores.** *Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003 & University of Granada*. Libro de actas de los Congresos Internacionales simultáneos de las organizaciones, I.S.A.M.A y BRIDGES. Editado por Javier Barrallo, Nathaniel Friedman y otros autores y por la Facultad de Ciencias. Editorial: Universidad de Granada; I.S.B.N.: 84-930669-1-5. Granada, 2003.
- [7] **Zalaya, Ricardo y Barrallo, Javier.** *Mathematical Sculpture Classification*. Ponencia incluida en el libro de actas Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003; pp. 53-60. Véase la anterior referencia [6].
- [8] **Varios autores.** *Historia del Arte*. Volumen I, pp.: 10-13, 27-29, 47, 104. Volumen II, pp.: 10, 24-28, 107, 117, 122-123, 198. Volumen X, pp.: 32-33, 36-37, 39, 41, 46, 104-105. Volumen III, pp.: 74, 78, 197, 202-203. Volumen IV, pp.: 70, 82, 99, 138.141, 160-161, 181, 205, 216, 224. Volumen V, pp.: 11, 32-35, 76, 78, 237. Volumen VI, pp.: 1-3,42,51, 68, 157, 201. Volumen VIII, pp.: 7, 25, 62-75, 165, 205, 214, 220. Volumen IX, pp.: 1, 16, 29, 54, 62-73, 98-102, 118, 149, 173, 202-213, 222-233. Editorial: Planeta de Agostini; I.S.B.N.: 84-395-4831-1. Barcelona, 1996.
- [9] **Bynum, W.F.; Browne, E.J. y Porter, Roy** (coordinadores). *Diccionario de Historia de la Ciencia*. pp.: 26, 27, 32-34; 269-272 y 360-361. Editorial: Herder para la edición española; I.S.B.N.: 84-254-1470-9. Barcelona, 1986.
- [10] **Nagy, Dénes.** *(Dis)symmetry: Mathematics & Design. Euclidean versus. Vitruvian Mathematics*. Ponencia incluida en el libro, Mathematics & Design 98, actas del II Congreso Internacional editado por Javier Barrallo y por el Departamento de Matemática Aplicada, pp. 17-18. Editorial: Universidad del País Vasco; I.S.B.N.: 84-600-9459-6. San Sebastián, 1997.
- [11] **Tosca, Thomas Vicente.** *Tratado XIV de la Arquitectura Civil*, incluido en el *Compendio Matemático*. Tomo 5, folio 443. Madrid, 1727. Editorial del facsímil: Universidad Politécnica de Valencia; I.S.B.N.: 84-7721-950-8. Valencia, 1980.

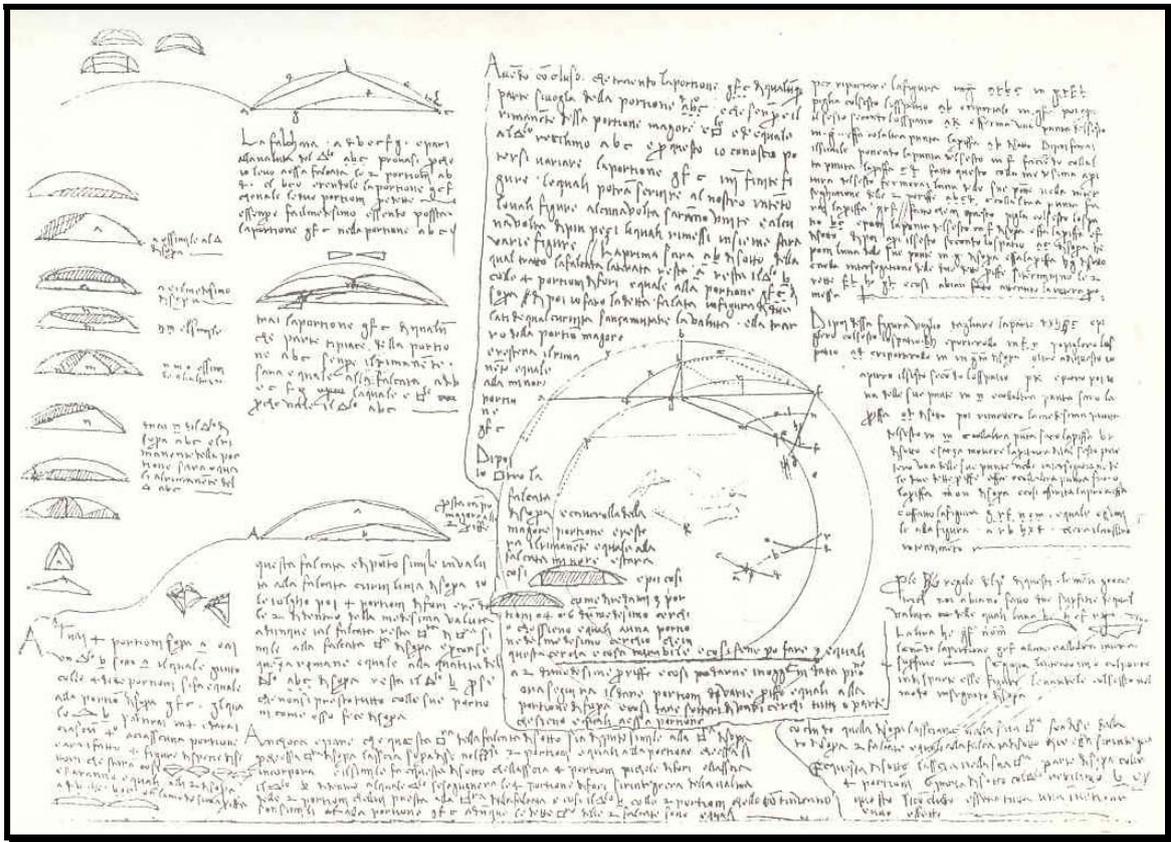
- [12] **Marani, Salma.** *Illumination and Geometry in Islamic Art: an Interdisciplinari Approach* Libro: ISAMA 99, The International Society of the Arts Mathematic and Architecture, actas del II Congreso Internacional editado por Javier Barrallo y por el Departamento de Matemática Aplicada, pp. 348-354. Editorial: Universidad del País Vasco; I.S.B.N.: 84-930669-0-7. San Sebastián, 1999.
- [13] **Alsina, Claudi & Pérez, Rafael.** *Gaudi and the Alhambra of Granada a Geometrical Perspective.* Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, The International Society of the Arts Mathematic and Architecture, actas del II Congreso Internacional, pp. 17-24. Véase la anterior referencia [12].
- [14] **De Azcárate, J. M^a.; Pérez, A. E. y Ramírez, J. A.** *Historia del Arte*; pp.: 1-3, 44, 76-78, 84-85, 95, 158, 168, 225, 243-244, 258, 283-286, 347, 360-363, 389-391, 420,, 443, 486, 509, 556-562, 575, 607-615, 640, 678, 690-994, 700, 741-743, 750, 773-783, 820-823, 836-844, 878, 892-897, 899. Editorial: Ediciones Anaya; I.S.B.N.: 84-207-1408-9. Madrid, 1980.
- [15] **Fatás, Guillermo y Borrás, Gonzalo M.** *Diccionario de Términos de Arte*; pp.: 20, 47, 100, 111 y 205. Editoriales: Alianza Editorial y Ediciones del Prado; I.S.B.N.: 84-7838-388-1993. Madrid, 1993.
- [16] **Gellert, M.; Küstner, H. y Hellwich, M.** (coordinadores). *Pequeña Enciclopedia de las Matemáticas*; pp. 181-183; 238-240, 360, 796-800; 832-839. Editorial del original alemán: Veb Bibliographisches Institut, Leipzig. Edición en español: Pagoulatos Publications. Atenas, 1981.
- [17] **Nicholson, Ben; Kaaprpraff, Jay & Hisano, Saori.** *A Taxonomy of Ancient Geometry Based on the Hhidden Pavements of Michelangelos's Laurentian Library.* Ponencia incluida en el libro Mathematics & Design 98; pp. 73-90. Véase la referencia [12].
- [18] **Blanco, M^a Francisca y Nieto, Elena.** *Morphological Interpretations of the Golden Rectangle.* Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, The International Society of the Arts Mathematic and Architecture, actas del II Congreso Internacional; pp. 53-54. Véase la anterior referencia [12].
- [19] **Giedion, Sigfried.** *Espacio Tiempo y Arquitectura*; pag. 134. Editorial: Hoepli. Cuarta edición. Barcelona, 1968.
- [20] **Bruneau, Philippe; Torelli, Mario; Barral, Xavier y otros autores.** *Sculture from Antiquity to the Present Day*; pp.: 708-709, 777, 781, 796-801, 837, 861, 867, 882, 903, 926-931, 942-946, 955-965, 989, 992-995, 1006-1012, 1025, 1039-1046, 1055, 1068 y 1102. Editorial: Taschen GmbH; I.S.B.N.: 3-8228-1662-0. Colonia, 1996.
- [21] **Raymond Cogniat y Antoine Terrasse.** *Los Impresionistas*; pp. 11-21. Editorial: Círculo de Amigos de la Historia; I.S.B.N.: 84-225-0198-8. Sevilla, 1978.
- [22] **Lucie-Smith, Edward.** *El Arte Hoy. Del Expresionismo Abstracto al Nuevo Realismo*; pp. 21, 187, 351-354, 363, 369-373. Editorial del original, Mondadori-Kodansha. Editorial de la versión española Cátedra; I.S.B.N.: 3-8228-1662-0. Colonia, 1996.
- [23] **Ghyka, Matila C.** *El número de Oro Volumen II. Los Ritos.* pp. 168-175. Editorial: Poseidón; I.S.B.N.: 84-85083-11-3. Barcelona, 1978.
- [24] **Blanco, F.; Reyes, E.; y Santamarina, C.** *Geometry in Dali's Painting.* Ponencia incluida en Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003; pag. 380. Véase la referencia [6].
- [25] **Grosenick, Uta & Riemschneider, Burhart.** *Art Now. 137 Artistas a Principio del Milenio*; pp. 104-107, 162-164, 560-571. Editorial: Taschen GmbH; I.S.B.N.: 3-8228-1933-6. Colonia, 2002.

- [26] **Borras Veses, Eliseo; Moreno Gómez, Pilar; Nomdedeu Moreno, Xaro y Albalat Salanova, Antoni.** *Ritmos: Matemáticas e Imágenes*; pp. 284-289. Editorial: Nivola Libros y Ediciones. I.S.B.N.: 84-95599-42-2. Madrid, 2002.
- [27] **Carvajal, Javier; Moreno Gómez, Pilar, Borrás Veses, Eliseo y otros.** *Forma y Número. Variaciones*; pp. de la introducción. Editorial: Fundación Bancaja; I.S.B.N.: 84-88715-47-I. Valencia, 1996.
- [28] **Ramírez, Juan Antonio y otros.** *Historia del Arte. El Mundo Contemporáneo*; pp. 325, 346 y 361-371. Editorial: Alianza Editorial; I.S.B.N.: 84-206-9484-3. Madrid, 1997.
- [29] **Perry, Charles O.** *Mathematical Sculpture*. Libro Mathematics & Design 98, actas del II Congreso Internacional editado por Javier Barrallo y por el Departamento de Matemática Aplicada; pp. 367-384. Véase la anterior referencia [10].
- [30] **Sequin, Carlo H.** *Computer Augmented Inspiraton*. Libro: ISAMA 99; pp. 419-428. Véase la anterior referencia [12].
- [31] **Ferguson, Helaman.** *Equations to stone sculpture*. Libro: ISAMA 99; pp. 161-171. Véase la anterior referencia [12].
- [32] **Cochan, D.** *Solid Freeform Manufacturing: Advanced Rapid Prototyping*; Manufacturing Research and Techonology. Editorial Elsevier. Amsterdam y Nueva York, 1993.
- [33] **Brisson, H. E.** *Aesthetic Geometry*. Ponencia incluida en el libro de actas del II Congreso Internacional: ISAMA 99; pp. 67-74. Véase la anterior referencia [12].
- [34] **Rosseau, Irene.** *Geometric Mosaic Tiling on Hyperbolic Sculptures*. Ponencia incluida en Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003; pp. 127-133. Véase la referencia [6].
- [35] **Real Academia Española.** *Diccionario de la Lengua Española*. Vigésima segunda edición. Editorial Espasa Calpe; I.S.B.N.: 84-239-6814-6. Madrid, 2001.
- [36] **BOE, 29 enero 1993, nº 25.** *Matemáticas de la Forma*; pp. 2426-2427. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 1993.
- [37] **Hart, George W.** *Sculpture from Symetrically Arranged Planar Components*. Ponencia de Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003 & University of Granada. Libro de actas; pp. 315-322. Véase la anterior referencia [6].
- [38] **Collins, Brent y otros.** *Whirled White Web: Art and Math in Snow*. Ponencia incluida en el libro de actas ISAMA-BRIDGES 2003; pp. 383-392. Véase la referencia [6].
- [39] **Norman Biron y otros.** *Geometría Emocional. Sebastian. Exposición en el Antiguo Colegio de San Idelfonso, de Abril a Julio del 2004*; pp. 5-22; 50-51; 77, 97, 111, 125, 134, 170 y 184. Editorial: Alianza Editorial; I.S.B.N.: 970-9075-03-9. Méjico 2004.
- [40] **Guillén, Gregoria.** *Poliedros. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje (Tomo 15)*; pp. 11-29 y 111-125. Editorial: Síntesis. Madrid 1990. ISBN: 84-7738-114-3.
- [41] **Hart, George W.** *Zonish Polyhedra*. Ponencia incluida en el libro de actas Mathematics & Design 98; pp. 653-660. Véase la anterior referencia [10]
- [42] **Romero Bauset, José. V.; Roselló Ferragud, M^a. Dolores. y Zalaya Báez, Ricardo.** *Fundamentos Matemáticos para la Ingeniería con MATLAB*; pp.: 12-18; 71-00 y 85-90. Editorial: Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). I.S.B.N. 84-9705-156-4. Valencia, 2002
- [43] **Friedman, Nathaniel.** *Hiperspace, Hiperseeing and Hipersculpture*. Ponencia incluida en el libro Mathematics & Design 98; pp. 297-301. Véase la anterior referencia [10].
- [44] **Wells, Benjamin.** *Mathematics and Esthetics-Science and Art in the Bay Area*. Ponencia incluida en Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003; pp. 307-314. Ver referencia [6].

- [45] **Barrallo C., Javier & Jones M., Damien.** *Coloring Algorihtms for Dynamicals Systems in the Complex Plane*; Ponencia incluida en el libro de actas del II Congreso Internacional: ISAMA 99; pp. 31-38. Véase la anterior referencia [12].
- [46] **Mandelbrot, Benoît.** *Los Objetos Fractales*; pp.: 13-18, 42-42 y 145. Editorial: Tusquets. Barcelona, 1987. ISBN: 84-7223-458-4.
- [47] **Gullberg, Jan.** *Mathematics from the Birth of Numbers*. Editorial: W.W. Norton & Company, New York 1997.
- [48] **Ferguson, Helaman.** *Artist Using Science&Tecnology: Helaman Ferguson*. Numero 10, volumen 22, Septiembre -Octubre del 2002. Revista YLEM; SSN 1057-2031.
- [49] **Sequin, Carlo H.** *Volution's Evolution*. Ponencia incluida en Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003; pp. 13-24. Véase la anterior referencia [6].
- [50] **Sullivan, John M.** *The Optiverse and Other Sphere Eversions*. Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, actas del II Congreso Internacional; pp. 471-479. Ver la referencia [12].
- [51] **Lynn Zelevansky, Ed.** *Beyond Geometry: Experiments in Form, 1940s-1970s*. Editorial: The MIT Press; ISBN: 0-262-24047-5. Cambridge, Massachusetts , 2004.
- [52] **Labarque, Patrick y Verbeke, Johan.** *Polyhedral Grids Composed of Regular Polygons*. Ponencia incluida en el libro de actas: Mathematics & Design 98, pp. 451-458. Véase la anterior referencia [10].
- [53] **Beasley, Bruce.** *Polyhedral Sculture with Complex Intersections*. Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, actas del II Congreso Internacional; pp. 45-52. Véase la referencia [12].
- [54] **Jablan, Slavik.** *Geometry and Art of Knots*. Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, actas del II Congreso Internacional; pp. 263-271. Véase la anterior referencia [12].
- [55] **Brown, Ronald.** *John Robinson's Symbolic Scultures, Knots and Mathematics*. Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, actas del II Congreso Internacional; pp. 75-81. Véase la anterior referencia [12].
- [56] **Friedman, Nathaniel.** *Form Space and Light*. Ponencia incluida en el libro: ISAMA 99, actas del II Congreso Internacional; pp. 197-203. Véase la anterior referencia [12].
- [57] **Castro, Maria Antonia.** *Fractals. A New Way to Understand Design and Architecture*. Ponencia incluida en las actas del II Congreso Internacional: ISAMA 99; pp. 105-111. Véase la anterior referencia [12].
- [58] **Zalaya Báez, Ricardo.** *Escultura Matemática: Antecedentes en la Historia del Arte y Clasificación por Conceptos Matemáticos*. Trabajo de investigación del programa de doctorado de Matemática Multidisciplinar de la Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 2003.
- [59] **Zalaya, Ricardo y Barrallo, Javier.** *Clasificación de la Escultura Matemática*. Artículo de la revista Matemática Sigma; pp. 187-203. Número de Noviembre del 2004. Editorial: Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco; ISSN: 1131-7787. Bilbao, 2004.
- [60] **Zalaya, Ricardo y Barrallo, Javier.** *Classification of Mathematical Sculpture*. Artículo incluido la revista electrónica Visual Mathematics. Volumen 6, Número 4, del año 2004. Véase en el capítulo siguiente la página web de referencia [PW9].

Figura 446 (Portada de la página siguiente): Página de un manuscrito de Leonardo da Vinci. Apuntes sobre el movimiento de la luna.

BIBLIOGRAFIA



10 Bibliografía

10.1 Bibliografía de Matemáticas

- [B.M.1] **Larson, R. E.; Hostetler, R. P. y Edwards, B. H.** *Cálculo y Geometría Analítica*. Volúmenes 1 y 2; I.S.B.N.: 84-481-2354-9. Editorial: McGraw Hill. Madrid, 1999.
- [B.M.2] **Apóstol, T. M.**; *Calculus*; Volúmenes 1 y 2. I.S.B.N.: 84-291-5156-7 y 84-291-5157-5. Segunda edición. Editorial: Reverté, Barcelona 1996.
- [B.M.3] **Sánchez Ruiz, Luis M.; Legua Fernandez, Matilde P.** *Cálculo Matemático con Aplicaciones*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). I.S.B.N.: 84-9705-052-5. Valencia, 2001.
- [B.M.4] **M. Gellert, H. Küstner y M. Hellwich** (coordinadores). *Pequeña Enciclopedia de las Matemáticas*. Editorial del original alemán Veb Bibliographisches Institut, Leipzig. Edición en español Pagoulatos Publications, Atenas, 1981.
- [B.M.5] **Morera Fos, José Luis y Aldeguer Carrillo, José.** *Cónicas y Cuádricas*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV; . I.S.B.N.:84-7721-533-2. Valencia, 1977.
- [B.M.6] **Bynum, W. F.; Browne, E. J. y Porter, Roy** (coordinadores). *Diccionario de Historia de la Ciencia*. Editorial: Herder para la edición española; I.S.B.N.: 84-254-1470-9. Barcelona, 1986.
- [B.M.7] **Vera López, A.; Galdón Monzo, P. y Mora Carbonell, M.** *Métodos Matemáticos*. Ediciones Antonio Vera, 1996.
- [B.M.8] **Marsden, J. E y Tromba, A. J.** *Cálculo Vectorial*. Editorial: Addison Wesley Longman. México, 1998.
- [B.M.9] **Mandelbrot, Benoît.** *Los Objetos Fractales*. Editorial: Tusquets. Barcelona, 1987. ISBN.: 84-7223-458-4.

10.2 Bibliografía de Informática Matemática

- [B.I.1] **Romero Bauset, José. V.; Roselló Ferragud; M. Dolores y Zalaya Báez, Ricardo.** *Fundamentos Matemáticos para la Ingeniería con MATLAB*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). I.S.B.N.: 84-9705-156-4. Valencia, 2002.
- [B.I.2] **Boigues Planes, Francisco J.; Vizcarro Villalonga, Genoveba y Zalaya Báez, Ricardo.** *Pràctiques per a un Laboratori de Càlcul amb DERIVE*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV. I.S.B.N.: 84-9705-265-X. Valencia, 2002.
- [B.I.3] **Hueso Pagoaga, J. Luis.** *Matemáticas Aplicada con MATLAB*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV. I.S.B.N.: 84-7721-810-2. Valencia, 1999.
- [B.I.4] **Llorens Fuster, J. Luis.** *Matemáticas Aplicada con DERIVE*.
- [B.I.5] **Stephen, Wolfram.** *Mathematica. A System for Doing Mathematics*. Editorial: Addison-Wesley Publishing Co. I.S.B.N.: 0-201-51507-4. Redwood City, California, USA, 1991.

10.3 Bibliografía de Arte

- [B.A.1] **Bruneau, Philippe; Torelli, Mario; Barral, Xavier y otros.** *Sculture from Antiquity to the Present Day*. Editorial: Taschen GmbH; edición española; I.S.B.N.: 3-8228-1662-0. Colonia, 1996.
- [B.A.2] **Vicerrectorado de Cultura y Territorio de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV).** *Esculturas del Campus de la Universidad Politécnica de Valencia*. Editorial: Servicio de Publicaciones de la UPV; I.S.B.N.: 84-9705-117-3. Valencia. Año, 2001.
- [B.A.3] **Varios autores.** *Historia del Arte*. Volúmenes I al X. Editorial: Planeta de Agostini; I.S.B.N.: 84-395-4831-1. Barcelona, 1996.
- [B.A.4] **De Azcárate, J. M^a.; Pérez, A. E. y Ramírez, J. A.** *Historia del Arte*. Editorial: Ediciones Anaya; I.S.B.N.: 84-207-1408-9. Madrid, 1980.
- [B.A.5] **Fatás, Guillermo y Borrás, Gonzalo M.** *Diccionario de Términos de Arte*. Editoriales: Alianza Editorial y Ediciones del Prado; I.S.B.N.: 84-7838-388-1993. Madrid, 1993.
- [B.A.6] **Tosca, Thomas Vicente.** *Tratado XIV de la Arquitectura Civil*, incluido en el *Compendio Matemático (tomo 5)*. Madrid 1727. Editorial del facsímil: Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia; I.S.B.N.: 84-7721-950-8. Valencia, 1980.
- [B.A.7] **Lucie-Smith, Edward.** *El Arte Hoy del Expresionismo Abstracto al nuevo Realismo*. Editorial del original, Mondadori-Kodansha. Editorial de la versión española Cátedra; I.S.B.N.: 3-8228-1662-0. Colonia, 1996.
- [B.A.8] **Grosenick, Uta & Riemschneider, Burhart.** *Art Now 137 Artistas a Principio del Milenio*. Editorial: Taschen GmbH; I.S.B.N.: 3-8228-1933-6. Colonia, 2002.
- [B.A.9] **Ramírez, Juan Antonio y otros.** *Historia del Arte. El Mundo Contemporáneo*. Editorial: Alianza Editorial; I.S.B.N.: 84-206-9484-3. Madrid, 1997.

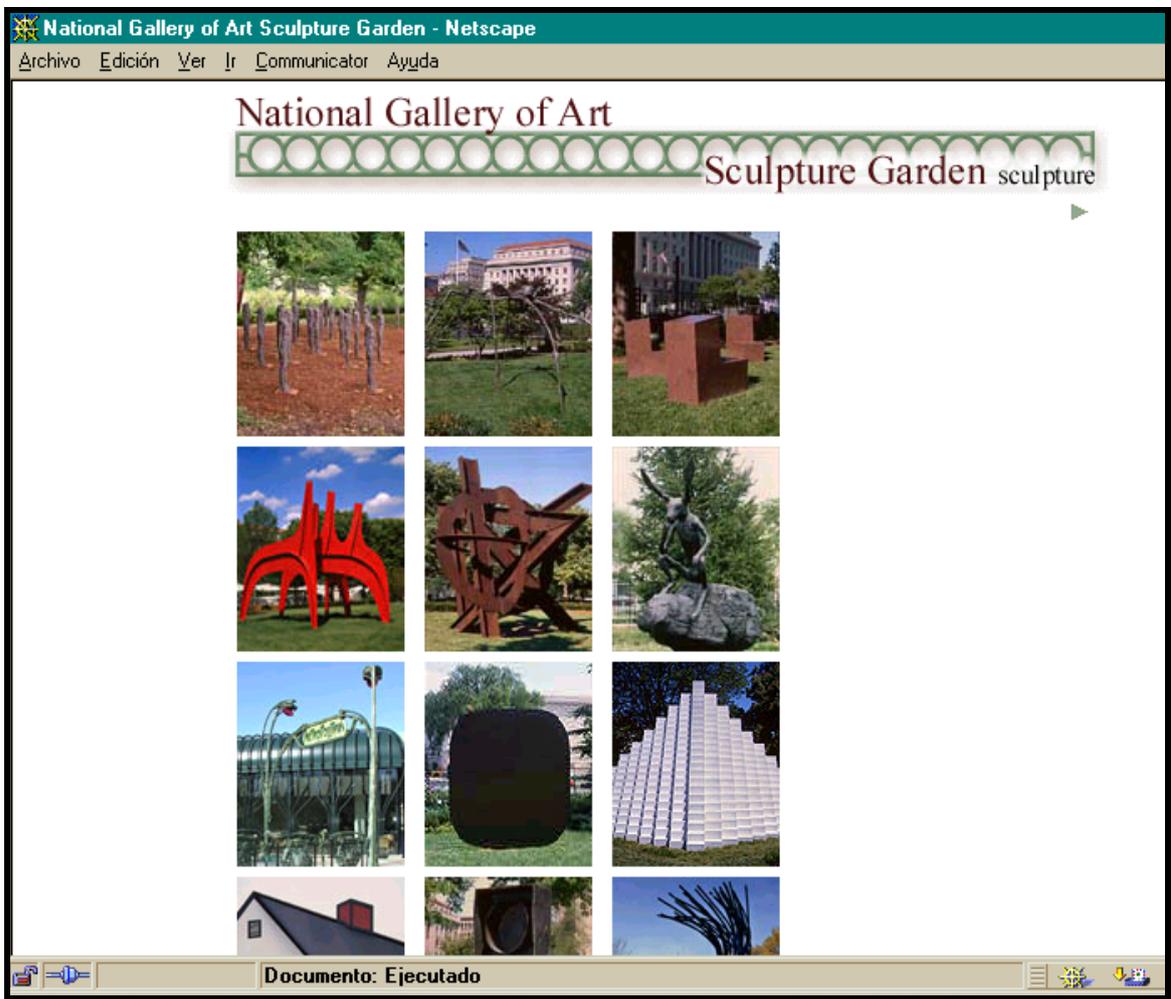
10.4 Bibliografía de las Relaciones Matemáticas Arte

- [B.M.A.1] **Varios autores.** *ISAMA 99. The International Society of the Arts Mathematic and Architecture*. Libro de actas del I Congreso Internacional de I.S.A.M.A. Editado por Javier Barrallo, Nathaniel Friedman y por el Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad del País Vasco. Editorial: Universidad del País Vasco; I.S.B.N.: 84-930669-0-7. San Sebastián, 1999.
- [B.M.A.2] **Varios autores.** *Mathematics & Design 98*. Libro de actas del II Congreso Internacional editado por Javier Barrallo y por el Departamento de Matemática Aplicada. Editorial: Universidad del País Vasco; I.S.B.N.: 84-600-9459-6. San Sebastián, 1997.
- [B.M.A.3] **Varios autores.** *Meeting Alhambra. ISAMA-BRIDGES 2003 & University of Granada*. Libro de actas de los Congresos Internacionales simultáneos de las organizaciones, I.S.A.M.A y BRIDGES. Editado por Javier Barrallo, Nathaniel Friedman y otros y por la Facultad de Ciencias de la Universidad. Editorial: Universidad de Granada; I.S.B.N.: 84-930669-1-5. Granada, 2003.

- [B.M.A.4] **Barrallo C., Javier.** *Fractal Geometry*. Editorial: Anaya Multimedia, Segunda edición; I.S.B.N.: 84-7614-452-0. Madrid, 1992.
- [B.M.A.5] **Alsina Catalá, Claudi.** *Matemáticas de la Forma. Materiales Didácticos. Optativas*. Ministerio de Educación y Ciencia y Editorial Edelvives. I.S.B.N.: 84-369-2420-7. Madrid, 1993.
- [B.M.A.6] **Alsina, Claudi; Pérez; Rafael y Ruiz, Ceferino.** *Simetría Dinámica. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. (Tomo 13)*. Editorial: Síntesis. I.S.B.N.: 84-7738-067-8. Madrid, 1989.
- [B.M.A.7] **Coxeter, H. S. M. y otros.** *M. C. Escher: Art and Science*. Editorial: North-Holland. New York, 1986.
- [B.M.A.8] **Ghyka, Matila. C.** *El Número de Oro* (tercera edición). Editorial: Poseidón. I.S.B.N.: 84-85083-11-3. Barcelona, 1978.
- [B.M.A.9] **Guillén Soler, Gregoria.** *Poliedros. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje (Tomo 15)*. Editorial: Síntesis. I.S.B.N.: 84-7738-114-3. Madrid, 1990.
- [B.M.A.10] **Grupo Beta, coordinador Luengo, Ricardo.** *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza. . Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje (Tomo 14)*. Editorial: Síntesis I.S.B.N.: 84-7738-088-0. Madrid, 1990.
- [B.M.A.11] **Stewart, Ian; Golubistky, Martin.** *¿Es Dios un Geómetra?. Las Simetrías de la Naturaleza*. Editorial: Grijalbo Mondadori. I.S.B.N.: 84-7423-383-5. Barcelona, 1975.
- [B.M.A.12] **Pedoe, Dan.** *La Geometría en el Arte*. Editorial: Gustavo Gili. I.S.B.N.: 84-252-0900-5. Barcelona, 1982.
- [B.M.A.13] **Lynn Zelevansky, Ed.** *Beyond Geometry: Experiments in Form, 1940s-1970s*. Editorial: The MIT Press. I.S.B.N.: 0-262-24047-5. Cambridge, Massachusetts , 2004.

Figura 447 (Portada de la página siguiente): Imagen de la página web de la National Gallery (Galería Nacional de Arte de Estados Unidos). En la tesis hemos mostrado algunas de las obras que posee, especialmente esculturas situadas en su jardín.

PÁGINAS WEB



11 Páginas Web

En primer lugar vamos a incluir aquellas que aparecen referenciadas a lo largo de la tesis. Entre los cientos de direcciones de la red relacionadas con el Arte Matemático que hemos visitado a lo largo de los últimos años, las que hemos consideramos más interesantes para el tema de nuestra tesis son precisamente éstas. Debido a ello en cada una incluimos un breve comentario. Como es conocido la ruta, los contenidos o la misma existencia de una página web puede variar. Especificamos su ruta a fecha de 17-12-2004, última actualización que hicimos. Son las siguientes:

[PW1] <http://www.cs.berkeley.edu/~sequin>

Página realmente excelente elaborada por uno de los principales investigadores y expertos internacionales en Escultura Matemática, Carlo Sequin, profesor de la universidad californiana de Berkeley. Además de una amplísima muestra de su trabajo de investigación, contiene una gran cantidad de información y nos acerca a numerosos escultores matemáticos. Por otro lado, contiene gran número de vínculos con otras páginas, y en concreto con la mayoría de las correspondientes a los mejores escultores matemáticos. En la tesis hemos incluido bastantes de las muchas fotografías de obras que se exponen en esta página.

[PW2] <http://www.sckans.edu/~bridges/bcollins/bcollins.html>

Página de uno de los principales escultores matemáticos, Brent Collins. Es uno de los más completos y prolíficos. Nos presenta de forma exhaustiva su trabajo, clasificándolo en diferentes series. También contiene información acerca de las características y el proceso de realización de sus esculturas. Varias de las fotografías de las obras que se exponen en esta página web las hemos incluido en la tesis en grupos diferentes de nuestra clasificación.

[PW3] <http://www.charlesperry.com>

Página de otro de los principales escultores matemáticos, Charles Perry. Este artista basa su trabajo escultórico en numerosos conceptos matemáticos y geométricos. Esta interesante web contiene información sobre su trabajo e imágenes de muchas de sus obras, bastantes de las cuales hemos utilizado.

[PW4] <http://www.Bathsheba.com>

Página de una artista que posiblemente sea la mejor escultora matemática, Bathsheba Grossman. De formación informática, utiliza ésta en su escultura. También nos muestra de forma muy extensa su trabajo y contiene información acerca del proceso de diseño y fabricación por ordenador utilizado en la realización de algunas de sus esculturas. Bastantes de las fotografías de las obras que expone las hemos incluido a lo largo de nuestra tesis.

[PW5] <http://www.paulbloch.com>

Página del escultor Paul Bloch. Este artista en muchas de sus esculturas utiliza diversos conceptos matemáticos. Algunas de las fotografías de los trabajos que se exponen en esta web también las hemos mostrado en nuestra tesis.

[PW6] <http://www.helasculpt.com>

Página de otro de los principales escultores matemáticos, Helaman Ferguson. Es uno de los mejores desde el punto de vista matemático. Muestra de forma extensa su trabajo y contiene información acerca de las características y el proceso de realización de sus esculturas. También esta web es una de las que más imágenes contiene, y muchas son obras de gran calidad, lo que nos ha permitido incluir bastantes de ellas y en categorías diferentes de la tesis.

[PW7] <http://www.sculptor.org>

Página de la organización: The International Sculpture Center Organization (Asociación Internacional de Escultores). Reúne a numerosos artistas de todos los tipos de Escultura. Aunque no está específicamente dedicada al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte, permite obtener información de él. Además tiene una gran cantidad de vínculos con otras páginas web.

[PW8] <http://www.asci.org/>

Página de la asociación internacional, Art & Sciences Collaborations Inc (ASCI). Está específicamente dedicada al tema de las relaciones entre las Ciencias y el Arte. Además tiene vínculos con otras webs.

[PW9] <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/>

Página de la revista electrónica Visual Mathematics, una de las mejores publicaciones periódicas dedicadas al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. En esta revista se encuentra publicado un artículo, sobre la clasificación de la Escultura Matemática, en el que se resumen nuestro trabajo hasta octubre del año 2004.

[PW10] <http://mitpress2.mit.edu/e-journals/Leonardo>

Página de la revista Leonardo una de las más prestigiosas de las dedicadas al interesante tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Está publicada por la editorial del MIT (Massachusetts Technological Institute). Esta institución el Instituto Tecnológico de Massachusetts edita otras muchas publicaciones relacionadas con nuestro campo de investigación. También edita el boletín electrónico Leonardo.

[PW11] <http://www.olats.org/home.shtml>

Versión francesa de la página de la asociación Leonardo, organización que edita el boletín electrónico Leonardo, revista dedicada al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. En esta versión francesa se presentan a veces algunos contenidos diferentes a los de la revista matriz americana.

[PW12] <http://www.ylem.org/flash/exhibits/past.html#>

Página de otra revista electrónica YLEM, también dedicada al tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte. Es una interesante publicación, aunque no tan conocida en este mundo del arte matemático como las anteriores. Desde ella se accede a una interesante colección de obras de nuevos artistas, algunas de ellas de tipo matemático.

[PW13] <http://www.msri.org/events/art>

Contenida en la Página principal del Mathematical Sciences Research Institute. En esta web del Instituto de Investigación en Ciencias Matemáticas se expone información de diversos eventos relacionados con Arte y Matemáticas.

[PW14] <http://www.nctm.org>

Página web perteneciente al National Council of Teachers of Mathematics (Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos). Desde esta web se puede acceder a una gran cantidad de información acerca de las relaciones Arte-Matemáticas.

[PW15] <http://www.anu.edu.au/newmedia/CNMA/html>

Página perteneciente al Center for New Media Arts (Centro para las Nuevas Artes). Es una institución dependiente de la ANU (Universidad Nacional de Australia). Tiene numerosos vínculos con el Arte Matemático en general y en concreto con fractales, teoría del caos, etc.

[PW16] <http://www.fractovia.org>

Página dedicada al tema de los fractales que es una de las pocas de esta lista que está escrita en español. Tiene una información muy completa de este interesante campo y enlaces con otras direcciones relacionadas con él. Esta página se denomina *Naturaleza de los Fractales* y ha sido desarrollada por Juan Luis Martínez.

[PW17] http://www.uv.es/~buso/escher/index_es.html

Página en la que se estudia la pintura de Mauricius Cornelius Escher, uno de los artistas fundamentales en el desarrollo del Arte Matemático. Contiene información sobre su trabajo e imágenes de varios de sus “grabados matemáticos”, algunas de las cuales hemos utilizado en esta tesis. Está elaborada por Alicia Escribano y Vicent Castellar.

[PW18] <http://www.georgehart.com>

Página de otro de los principales escultores matemáticos George W. Hart. Es también otro de los artistas que basa su trabajo escultórico en numerosos conceptos matemáticos o geométricos, como los denomina él. Esta web contiene información sobre su obra e imágenes de muchas de sus esculturas, bastantes de las cuales hemos utilizado en esta investigación.

[PW19] <http://arpam.free.fr/friedman.html>

Página web en la que se presenta un interesante estudio *Hyperseeing, Knots, and Minimal Surfaces* realizado por Nathaniel A. Friedman, uno de los principales investigadores y expertos internacionales en Escultura Matemática. Es profesor de Matemáticas en la universidad americana de Albany. En nuestra tesis hemos incluido algunas de sus conclusiones.

[PW20] <http://www.popmath.org.uk/sculpture/sculpture.html>

Página de uno de los principales escultores matemáticos, John Robinson. Es un artista que en su trabajo escultórico ha utilizado numerosos conceptos matemáticos. Esta web contiene información sobre su trabajo e imágenes de muchas de sus obras, algunas de las cuales exponemos en nuestra tesis. Además de tener una completa información, dispone de enlaces con otras páginas muy interesantes.

[PW21] <http://www.brucebeasley.com/home.htm>

Página de otro escultor matemático, Bruce Beasley, en la que se clasifica sus obras. En su trabajo escultórico se puede apreciar la influencia de las Matemáticas y sobre todo de la Geometría. Esta web contiene imágenes de muchas de sus obras, algunas de las cuales hemos utilizado como ejemplos en esta investigación.

[PW22] <http://www.nga.gov/home>

Página principal de la National Gallery (Galería Nacional de Arte de Estados Unidos). Contiene además de información genérica de muchos temas de Arte, una extensa descripción de sus colecciones. Resulta particularmente interesante la de su jardín de esculturas en el que se exponen algunas de las obras que mostramos en nuestra tesis.

[PW23] <http://www.sculpturebythesea.com/index.html>

Página muy interesante que muestra el catálogo de la exposición anual Sculpture by the Sea (Escultura en el Mar). Este evento celebrado en la costa australiana reúne a numerosos artistas de todos los tipos. Aunque no está específicamente dedicado a la Escultura Matemática, también se exponen esculturas de este tipo.

[PW24] <http://www.geom.uiuc.edu/>

Página de la organización denominada, The Geometry Center. Contiene una información de temas geométricos, muy completa y útil. Permite una gran interactividad al usuario. Tiene secciones especializadas en geometría diferencial, fractales, topología, geometría no-euclídea, etc. También muestra imágenes de numerosos modelos geométricos, algunas de las cuales hemos incluido en la tesis.

[PW25] <http://www.isama.com>

Página perteneciente a la organización The International Society of the Arts, Mathematics and Architecture (ISAMA). Esta prestigiosa asociación en sus congresos internacionales reúne a muchos de los mejores expertos en el campo de las relaciones Matemáticas y Arte. La página además de información de estos eventos, contiene información de otros temas relacionados.

[PW26] <http://www.sckans.edu/~bridges>

Página de la organización internacional BRIDGES, Sociedad para el Fomento de los “Puentes” entre las Matemáticas, el Arte y la Música, que reúne a algunos de los mejores expertos en el campo de las relaciones Matemáticas y Arte. Además de información de sus congresos internacionales, contiene otros temas relacionados.

[PW27] <http://members.tripod.com/~modularity/page.htm>

Página web en la que se presenta un interesante estudio: *Modularity in Art*, realizado por Slavik Jablan, uno de los principales expertos internacionales en las relaciones Matemáticas y Arte. Este investigador es el editor de la revista electrónica Visual Mathematics, una de las mejores publicaciones periódicas dedicadas a estos temas.

[PW28] <http://cvc.cervantes.es/actcult/chillida/>

Página muy interesante dedicada a Eduardo Chillida y enclavada dentro de una web dedicada a la Cultura y al Arte español, la perteneciente al Instituto Virtual Cervantes. Es una de las pocas de una gran calidad en nuestro idioma. En este completo archivo se estudia a Eduardo Chillida y su escultura. Es un artista que ha sido fundamental en el Arte del siglo XX. Contiene información sobre su trabajo e imágenes de muchas de sus esculturas, algunas de las cuales se pueden considerar matemáticas y por tanto las hemos utilizado a lo largo de la tesis.

[PW29] <http://www.epdip.com/pintor.php?id=2684>

Página web en español en la que se estudia la escultura y pintura de Max Bill, un artista completo y que ha sido fundamental en el desarrollo del Arte Matemático. Contiene información sobre su trabajo e imágenes de muchas de sus esculturas matemáticas, algunas de las cuales hemos utilizado a lo largo de este estudio.

[PW30] <http://math.bu.edu/people/angelav>

Página elaborada por una investigadora experta en geometría, Ángela Vierling, profesora de una universidad americana. Contiene gran cantidad de información y una extensa bibliografía del tema de las relaciones entre las Matemáticas y el Arte y también sobre Geometría.

[PW31] http://www.publicacions.bcn.es/Bcn_escultures/index.html

Página del Ayuntamiento de Barcelona que contiene una exhaustiva información de las esculturas situadas en las calles y jardines de esta ciudad. Además de una fotografía de cada una de ellas, incluye una breve descripción. Aunque la mayoría de las obras no son matemáticas, si que hay alguna que entraría en esta categoría.

A continuación vamos a incluir la ruta de otras páginas web, seleccionadas entre las que hemos visitado, y que también nos han parecido interesantes. Nuevamente resaltamos que la ruta, los contenidos o la existencia de las siguientes páginas puede variar. Especificamos también su ruta a fecha de 17-12-2004, última actualización que hicimos. Son las siguientes:

<http://www.media.mit.edu>
<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/exrob/rob1.htm>
<http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html>
<http://www.fractovia.org/es/index.htm>
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>
<http://www.msri.org/>
<http://nohung.math.uh.edu/~mike/>
<http://pages.prodigy.net/filje>
<http://www.dpgraph.com/index.html>
<http://www.ericstaller.com/contact/>
<http://members.tripod.com/vismath/mart.htm>
<http://www.novica.com/>
<http://www.eliaswakan.com>
<http://es.geocities.com/eucliteam/>
<http://www.math.arizona.edu/~models/>
<http://math.bu.edu/people/angelav/projects/models/summary.html>
<http://www.cis.ohio-state.edu/hipertex/faq/usenet/fractal-faq/faq.html>
<http://www.sfmoma.org/>
<http://www.nga.gov/onlinetours/index.shtm>
http://www.visitingdc.com/s_nga_calder.htm
<http://www.robertsmithson.com/index.htm>
http://www.sculpted.net/austin/fset_museum.html
<http://www.isama.org/prints/friedman/>
<http://www.iespana.es/esculturaurbana/>
<http://www.eduardo-chillida.com>
<http://www.hispanart.com/chillida/introduccion.htm>
<http://www.sculpturesite.com/index.html>
<http://www.base24.com/gallery>
<http://www.base24.com/gallery/GINNEVER/gin2a.htm>
<http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0963912100/isama>
<http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/LONGHURST/>
<http://http.cs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/herrick.html>
http://www.pimkey.com/~toilemet//cl/galerie/galerie_a.htm

http://www.pimkey.com/~toilemet//cl/sculpt/robosculpt_a.htm#chant
<http://www.re.org/tom/sculptures/sculptures.html>
<http://www.henry-moore-fdn.co.uk>
<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/art.html>
<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/escher.html>
<http://hansschepker.com/>
http://www.artcyclopedia.com/artists/serra_richard.html
<http://www.mathsyear2000.org/resources/slice/>
<http://www.aurhelion.net/research/research.htm>
<http://http.cs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/KEIZO>
<http://artscenecal.com/>
<http://artscenecal.com/Listings/WestHwd/ChacMoolFile/ChacMoolArtists/BVenet.html>
<http://www.versteegde.nl/>
<http://elart.uc.edu/derrick/dwoodham/piazza.htm>
<http://http.cs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/herrick.html>
<http://www.geocities.com/woodhad/>
<http://www.mos.org/sln/Leonardo/>
<http://www.ericjhellergallery.com/index.pl?page=gallery>
<http://torus.math.uiuc.edu/>
http://www.fas.harvard.edu/home/libraries_and_museums/museums.html
<http://math.albany.edu:8000/math/isama/selecta.html>