

# **La estática gráfica. Instrumento para el conocimiento estructural intuitivo y el diseño de los arquitectos**

JUAN GÓMEZ ACOSTA

EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



*Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.*

© Juan Gómez Acosta

Primera edición, 2013

© de la presente edición:

Editorial Universitat Politècnica de València

[www.editorial.upv.es](http://www.editorial.upv.es)

ISBN: 978-84-9048-039-7 (versión impresa)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.



**UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA**



**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE ARQUITECTURA  
DEPARTAMENTO DE  
CONSTRUCCIONES ARQUITECTÓNICAS**

**TESIS DOCTORAL**

**LA ESTÁTICA GRÁFICA. INSTRUMENTO PARA EL CONOCIMIENTO  
ESTRUCTURAL INTUITIVO Y EL DISEÑO DE LOS ARQUITECTOS**

**AUTOR: JUAN GÓMEZ ACOSTA. ARQUITECTO** \_\_\_\_\_

**DIRECTORES: FRANCISCO SEGADO VÁZQUEZ. DOCTOR ARQUITECTO  
JAVIER BENLLOCH MARCO. DOCTOR ARQUITECTO**

**CODIRECTORA: M<sup>a</sup> JESÚS PEÑALVER MARTÍNEZ. DOCTORA ARQUITECTA**

**VALENCIA 2012** \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMIENTOS:**

En primer lugar quisiera expresar mi gratitud al Profesor Benlloch Marco por la ayuda, el impulso y la dirección prestados desde los primeros momentos en que se inició esta Tesis.

Asimismo, agradezco al Departamento de Construcciones Arquitectónicas de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universitat Politècnica de València la acogida mostrada a este ilusionado investigador. En esta Escuela me formé como arquitecto y a ella vuelvo como doctorando.

Finalmente quiero expresar un especial agradecimiento al Profesor Segado Vázquez por haber sabido inculcar en muchos compañeros arquitectos, entre los que naturalmente me cuento, el interés por la Investigación.

Sus indicaciones y eficaces correcciones, junto a las de la Dra. M<sup>a</sup> Jesús Peñalver, han hecho posible, sin duda, esta Tesis Doctoral.

... A la memoria de mis padres, que tanto esfuerzo me dedicaron ...

Y a mi mujer, Mayte y mi hijo Juan, por el tiempo que no pude dedicarles...

## ABSTRACT

This doctoral thesis seeks to show the importance of the application of Physics and Geometry in the processes of architectural and structural design conception, in a study of the historical imbrication of Science, Art and Technique knowledge in the design and construction processes, framing the analysis that we present of the use of Graphic Statics since Karl Culmann (1821) until the past century, with a comprehensive recognition to his first concepts, from the Descriptive Geometry of Gaspard Monge, the contributions of Varignon with the New Mechanical, Poncelet and his Positional Geometry and the treaties of Culmann, Cremona, Favaro and Levy.

We delimit the appearance of the Graphic Statics as a true consequence of the application of the concepts that the Projective Geometry proposed as an alternative assumption to Euclidean Geometry, combined with the Vectorial Mechanical knowledge for the representation of power systems.

The duality, reciprocity and projectivity of the plane figures and in space, along with the focal systems of forces and the projective properties of the focal plane and its focus and reciprocal polyhedra or conjugated, led to the successful conclusion, exposed by Culmann and Cremona almost at the same time, that the funicular polygons and the polygons of forces are reciprocal figures. Starting point of practical applications that the Graphic Statics placed in the hands of the vast majority of architects and engineers since the last quarter of the nineteenth century until the last of the twentieth century.

Our research explores Graphic Statics explaining first of all the wonderful concepts of the New Geometry from where it comes, without skimping on the analysis of its amazing new statements at the time (19th century), because nothing is more interesting than the scientific pleasure of discovering where the spark occurred which made some abstract geometric concepts be used in a practical application and which obtained universal scientific and technical recognition.

With our analysis completed and determined that poorly explained so far leap to which we refer, we intend to show that, in the projectual process, the Graphic Statics studies can provide the balance or the behavior of the structure projected, help making decisions, structural and architectural concept that we design.

Architects such as Gaudi and his followers, or engineers such as Robert Maillart, used Graphic Statics in their structural architectural reflections and calculations and it is interesting to analyze, with the current means of graphical representation, the behaviors of some real simplified structures, in the light of their calculation by Graphic Statics.

## RESUMEN

Esta Tesis Doctoral pretende poner de manifiesto la importancia de la aplicación de la Física y de la Geometría en los procesos de la concepción y el diseño estructural arquitectónico, en un estudio de la histórica imbricación de los conocimientos de Ciencia, Arte y Técnica en los procesos de Proyecto y Construcción, enmarcando los análisis que exponemos, de la utilización de la Grafostática desde Karl Culmann (1821-1881) hasta el siglo pasado, con un reconocimiento exhaustivo a sus conceptos primeros, desde la Geometría Descriptiva de Gaspard Monge, las contribuciones de Pierre Varignon con la Nueva Mecánica, Jean Victor Poncelet y la Geometría de Posición y los tratados de Karl Culmann, Luigi Cremona, Antonio Favaro y M. Maurice Lévy.

Delimitamos la aparición de la Estática Gráfica como una consecuencia cierta de la aplicación de los conceptos que la Geometría Proyectiva había propuesto como postulados alternativos a la Geometría Euclídea, combinados con los conocimientos de la Mecánica Vectorial para la representación de sistemas de fuerzas.

La Dualidad, la Reciprocidad y la Proyectividad de figuras planas y en el espacio, junto con los sistemas focales de fuerzas y las propiedades proyectivas del plano focal y de su foco y los poliedros recíprocos o conjugados, condujeron a la feliz conclusión, expuesta por Karl Culmann, James Clerk Maxwell y Luigi Cremona casi al mismo tiempo, de que los polígonos funiculares y los polígonos de fuerzas son figuras recíprocas. Punto de partida de las aplicaciones prácticas que la Estática Gráfica puso en manos de la inmensa mayoría de los arquitectos e ingenieros desde el último cuarto del S. XIX hasta el último del XX.

Nuestra investigación se adentra en la Grafostática, explicando, en primer lugar, los maravillosos conceptos de la Nueva Geometría (más tarde llamada Geometría Proyectiva) de donde proviene, profundizando en el análisis de sus enunciados, que para muchos matemáticos de esta época (S.XIX), resultaban sorprendentes, o fruto de aventuras vanguardistas poco científicas.

Nada ha resultado más interesante que el placer científico de descubrir donde se produjo el chispazo que hizo que unos conceptos geométricos abstractos se utilizaran en una aplicación práctica que obtuvo el universal reconocimiento científico y técnico.

Con nuestro análisis concluido y determinado ese escasamente explicado hasta ahora, descubrimiento al que nos referimos, de Culmann, Cremona y Maxwell, se pretende demostrar que, en el proceso proyectual o en el análisis de construcciones ya realizadas, los estudios que la Grafostática puede aportar sobre el equilibrio y el comportamiento de la estructura de lo proyectado, ayuda a la toma de decisiones, bien sobre el objeto arquitectónico que diseñamos, la comprensión de las ideas de los

arquitectos que nos precedieron, o las causas de deformaciones, agrietamientos o fracasos del patrimonio construido.

Arquitectos como Antonio Gaudí y sus seguidores, en España, Rafael Guastavino en Norteamérica, o ingenieros como Robert Maillart, utilizaron la Grafostática en sus reflexiones arquitectónicas y cálculos estructurales. Y hemos recreado, con los medios actuales de representación gráfica, los parámetros mecánicos esenciales de algunas estructuras reales, convenientemente simplificadas, a la luz de su cálculo grafostático.

Nuestro trabajo investigador nos permite ofrecer, además, en esta Tesis Doctoral lo que creemos son dos interesantes aportaciones a la Grafostática:

La primera se corresponde con la comprobación de que los resultados que nos ofrece la mecánica vectorial para la determinación del Eje Central de un Sistema de vectores deslizantes en el espacio, coinciden exactamente con los que la Grafostática determina. Se ha realizado el cálculo analítico de la Ecuación de la recta Eje Central de un sistema cualquiera, y se ha representado en el espacio. A continuación se ha representado también en el espacio el mismo sistema de vectores y se ha dibujado las proyecciones diédricas de dicho sistema, comprobando que los ejes centrales de los sistemas proyectados coinciden con las proyecciones sobre los planos ortogonales del Eje Central determinado grafostáticamente en el espacio y con la solución analítica encontrada en primer lugar.

El itinerario es:

1. Definición de un Sistema cualquiera de vectores deslizantes. Componentes de los mismos y coordenadas de los puntos de aplicación.
2. Determinación analítica de la Resultante y el Momento resultante respecto a un punto.
3. Cálculo de la recta Eje Central del sistema.
4. Representación gráfica en perspectiva, en el espacio, de los resultados analíticamente obtenidos .
5. Cálculo grafostático de la Resultante del mismo Sistema en el espacio y proyecciones diédricas de la misma.
6. Cálculo grafostático del Eje Central del Sistema proyectado sobre los planos de proyección.
7. Comprobación de la exacta coincidencia de los resultados analíticos y grafostáticos.



La segunda, que podríamos llamar Cálculo Grafostático del Nucleo Central de cualquier sección, surge del estudio de la propia condición del Nucleo Central de una sección solicitada asimétricamente y de la coincidencia de la Fibra Neutra de la sección con la Recta Polar del punto de aplicación de la carga, respecto a la Elipse de Inercia de la Sección. Su aplicación práctica más importante es la de poder conocer de forma sencilla y gráfica la geometría del Nucleo Central de las secciones de sistemas, que exigen para su estabilidad que éstas no trabajen a tracción, como el caso de los arcos.

Definido el Nucleo Central desde el punto de vista resistente como el Lugar geométrico de los puntos de una sección donde debería actuar la fuerza resultante para que toda ella trabaje a compresión o a tracción (según la acción) y con la ayuda de la Geometría Proyectiva, como el Lugar geométrico de los Polos de las Tangentes a la Sección dada:

El itinerario es:

1. Cálculo grafostático del C.D.G. de la sección.
2. Cálculo grafostático de los Momentos de Inercia  $I_x$  e  $I_y$  y del Producto de Inercia  $P_{xy}$  respecto a dos ejes perpendiculares baricéntricos y sus respectivos Radios de giro,  $i_x$  e  $i_y$ .
3. Determinación de los Ejes Principales de Inercia, con ayuda del Circulo de Mohr para momentos de inercia.
3. Cálculo gráfico de la Elipse Central de Inercia de la sección.
4. Cálculo gráfico de los Polos de las rectas tangentes a la sección, respecto a la Elipse Central de Inercia, que determinarán el contorno del Nucleo Central.

Las dos aportaciones, se corresponden con conceptos que no han sido explicados en los tratados, que durante más de un siglo, han descrito otras múltiples aplicaciones prácticas de la Grafostática.

Pretendemos asimismo poner de manifiesto los invariantes presentes en los tratados investigados, desde Culmann y Cremona hasta las últimas publicaciones consultadas de finales del siglo XX y comienzos de nuestro XXI, para la determinación de los Patrones que serían imprescindibles en una Didáctica actualizada de la Estática Gráfica, con la idea de una utilización fecunda de sus conceptos y métodos más significativos.

Finalmente y como anexo, nos hemos permitido presentar, a modo de catálogo, la colección de libros de Estática Gráfica que hemos conseguido reunir a lo largo de años.

## ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA INVESTIGADORA</b> .....	15
<b>3. ESTADO DEL ARTE</b>	
3.1. LA GEOMETRÍA Y EL DIBUJO .....	36
3.2. LA EXPERIENCIA ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN SIN CÁLCULOS. APORTACIONES DE LA ESTÁTICA GRÁFICA .....	75
3.3. DEL PARALELOGRAMO DE FUERZAS A LA ESTÁTICA GRÁFICA DE KARL CULMANN .....	118
<b>4. ENCUADRE HISTÓRICO DE LA APARICIÓN DE LA GRAFOSTÁTICA</b>	
4.1. LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y LA FIGURA DE GASPARD MONGE .....	141
4.2. LAS CONTRIBUCIONES FRANCESAS DE VARIGNON, CAMUS Y PONCELET .....	150
4.3. LA FIGURA DE KARL CULMANN Y SU " <i>DIE GRAPHISCHE STATIK</i> " .....	156
4.4. DESPUÉS DE " <i>DIE GRAPHISCHE STATIK</i> ". OTROS TRATADOS Y AUTORES .....	185
<b>5. EL CÁLCULO GRÁFICO Y LA GEOMETRÍA DE POSICIÓN. ELEMENTOS NECESARIOS PARA LA ESTÁTICA GRÁFICA</b>	
5.1. PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS VERSUS GEOMÉTRICOS .....	218
5.2. EL CONOCIMIENTO DE LA GEOMETRÍA Y EL DIBUJO APLICADOS AL CÁLCULO .....	222
5.3. LA GEOMETRÍA PROYECTIVA	
5.3.1. LA APARICIÓN DE LA NUEVA GEOMETRÍA .....	227
5.3.2. FRANCIA. CUNA DE LA NUEVA GEOMETRÍA .....	231
5.3.3. LA DIFUSIÓN DE LA GEOMETRÍA DE POSICIÓN EN ESPAÑA .....	235
5.3.4. DE LA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA A LA GEOMETRÍA PROYECTIVA .....	247
5.3.5. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA PARA LA GRAFOSTÁTICA	
5.3.5.1. RECTA, PLANO Y ESPACIO PROYECTIVOS .....	261
5.3.5.2. DUALIDAD, POLARIDAD Y RECIPROCIDAD .....	265
5.4. DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS A LA ESTÁTICA GRÁFICA .....	274
<b>6. LA UTILIZACIÓN DE LA GRAFOSTÁTICA</b>	
6.1. LOS MÉTODOS DE ANTONIO GAUDÍ Y SUS COLABORADORES .....	289
6.2. KOECHLIN - EIFFEL. UNA TORRE CUYA FORMA SIGUE A LAS FUERZAS .....	309
6.3. GUASTAVINO COMPANY. COMPROBACIONES GRAFOSTÁTICAS .....	331
6.4. ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO DE ALGUNAS ESTRUCTURAS SIMPLIFICADAS	
6.4.1. ESQUEMAS SIMPLES. ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO. DECISIONES DEL ARQUITECTO .....	348
6.4.2. UNA IDEA DE PIER LUIGI NERVI. ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO .....	355
6.4.3. EL PUENTE DEL ALAMILLO DE SEVILLA .....	360
6.4.4. SALGINATOBEL Y MAGAZZINI GENNERALI EN CHIASSO DE ROBERT MAILLART .....	371

**7. PATRONES PARA UNA DIDÁCTICA ACTUAL DE LA GRAFOSTÁTICA**

7.1. REPRESENTACIÓN DE FUERZAS. SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES .....	387
7.2. CÁLCULO DEL EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE VECTORES. CORRESPONDENCIA ENTRE LOS RESULTADOS ANALÍTICOS Y GRAFOSTÁTICOS .....	391
7.3. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE C.D.G. DE LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES .....	399
7.4. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA .....	403
7.5. TRAZADO DEL CÍRCULO DE MOHR DE MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA .....	408
7.6. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA DE UNA SECCIÓN .....	410
7.7. DETERMINACIÓN GRAFOSTÁTICA DEL NÚCLEO CENTRAL DE UNA SECCIÓN .....	412
7.8. DETERMINACIÓN GRAFOSTÁTICA DE LOS ESFUERZOS CORTANTES, MOMENTOS FLECTORES Y FLECHAS EN VIGAS ISOSTÁTICAS DE DIRECTRIZ RECTA .....	415
7.9. CÁLCULO DE ENTRAMADOS RETICULARES PLANOS, APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS DE LUIGI CREMONA .....	421
7.10. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE UNA BÓVEDA DE MAMPOSTERÍA Y DE HORMIGÓN ARMADO .....	426
<b>8. CONCLUSIONES .....</b>	<b>434</b>
<b>9. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>437</b>
<b>ANEXO: COLECCIÓN DE TRATADOS DE ESTÁTICA GRÁFICA .....</b>	<b>470</b>

## 1. INTRODUCCIÓN

*“Cada material tiene una personalidad específica distinta y cada forma impone un diferente fenómeno tensional.*

*La solución natural de un problema -arte sin artificio- óptima frente al conjunto de impuestos previos que la originaron, impresiona con su mensaje, satisfaciendo, al mismo tiempo, las exigencias del técnico y del artista.*

*El nacimiento de un conjunto estructural, resultado de un proceso creador, fusión de técnica con arte, de ingenio con estudio, de imaginación con sensibilidad, escapa del puro dominio de la lógica para entrar en las fronteras de la inspiración.*

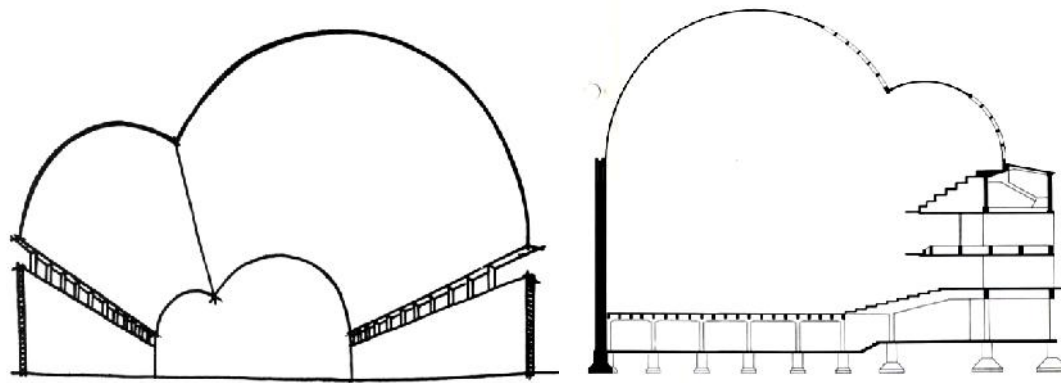
*Antes y por encima de todo cálculo, está la idea, moldeadora del material en forma resistente, para cumplir su misión.*

*A esa idea va dedicado este libro.”<sup>1</sup>*

---

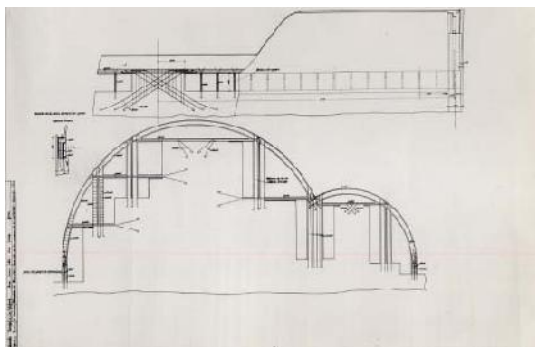
<sup>1</sup> Torroja Miret, Eduardo. *Razón y ser de los tipos estructurales*. C.S.I.C. Instituto E.Torroja. Madrid, 1984. Eduardo Torroja explica eficazmente, en el prólogo de esta obra, cómo el cálculo es sólo una herramienta de comprobación de lo pensado y diseñado. Lo fundamental es la idea.

Hemos querido comenzar esta introducción con la nota previa con la que Eduardo Torroja prologa su libro *Razón y ser de los tipos estructurales*, (Torroja, 1984: Prol.) en la que se sintetiza el maridaje entre arte, ciencia y técnica, que en proceso creador utiliza el arquitecto y cuya idea se corresponde con los argumentos con que se pretende demostrar en esta Tesis la utilidad de la Grafostática. Las fotografías de la estructura laminar de la cubierta del Frontón Recoletos de Madrid, ilustran la evolución del proceso creativo arquitectónico desde la Idea, los cálculos previos, entre los que hemos encontrado un diseño cuasi grafostático para las pruebas de carga a base de hilos y pesos colgados, incluso con maquetas y modelos a escala, el cimbrado, el encofrado, hasta la arquitectura construida. Todo lo producido desde la Idea son comprobaciones de que ésta es verosímil y realizable.

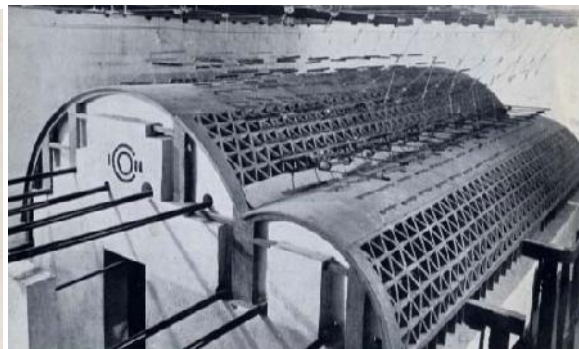


Esbozo de la idea.

Plano de la sección del edificio.

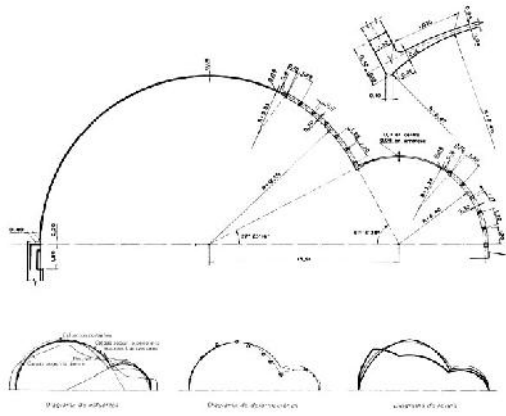


Plano de las estructuras sustentantes.

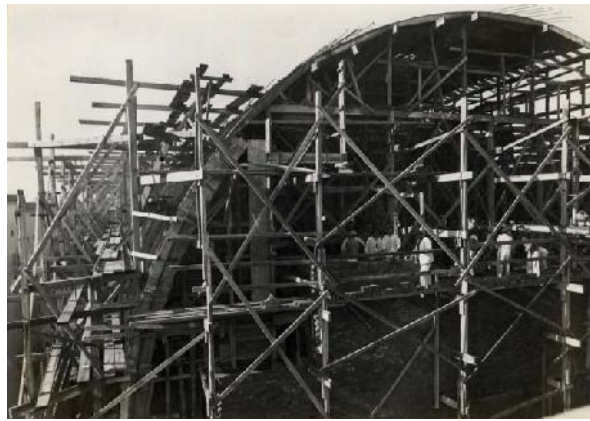


Modelo a escala para comprobación estructural.

Fig.1.1. Frontón Recoletos de Madrid. 1936. Secundino Zuazo y Eduardo Torroja. Fotografías del manuscrito original de Eduardo Torroja. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo. (CEHOPU). Madrid.



Planos de la lámina y diagramas de esfuerzos, hipotéticas deformaciones y rotura.



La cimbra construida.



Encofrados y disposición de armaduras con el entramado de nervios triangulares.



La Idea construida.

Fig. 1.2. Frontón Recoletos de Madrid. 1936. Secundino Zuazo y Eduardo Torroja. . Fotografías del manuscrito original de Eduardo Torroja. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo. (CEHOPU). Madrid.

El ejemplo mostrado en estas fotografías viene a servir de preámbulo de nuestra investigación, que, ir de la mano de alguien ha sido siempre una buena manera de adentrarse en un camino no recorrido. Y si además se trata de un maestro como Torroja, la ayuda resulta doblemente valiosa.

En el planteamiento general de su *Razón y ser de los Tipos estructurales*, Torroja (Torroja, 1984) resalta claramente aspectos de la Idea arquitectónica y los cálculos necesarios para su control y ejecución, que hacen referencia a lo que intentamos demostrar en esta Tesis:

*“...Los recursos del cálculo sólo sirven para afinar las dimensiones o para comprobar si están suficientemente afinadas. Todo lo demás no se puede obtener por métodos deductivos. Unos tanteos pueden servir, cuando más, para resolver el problema económico, determinando cuál de dos soluciones preestablecidas es la más barata; el resto queda, en gran parte, dentro de lo subjetivo y opinable, siempre sujeto a críticas y enjuiciamientos diversos.*

*Por eso, el proyectar, aun cuando sólo sean estructuras, si bien tiene mucho de ciencia y de técnica, tiene mucho más de arte, de sentido común, de afición, de aptitud, de delectación en el oficio de imaginar la traza oportuna, a la que el cálculo sólo añadirá los últimos toques con el espaldarazo de su garantía estático resistente...”<sup>2</sup>*

Y más adelante en la introducción a los fenómenos tensionales insiste:

*“...No es, ni con mucho, el complejo y abstruso desarrollo matemático el que puede inducir el espíritu a imaginar la estructura, ni guiar la mano al trazarla, sino el íntimo sentimiento de sus formas de trabajo, hecho tan propio que llegue a parecer que es la propia persona la que trabaja con aquélla y con cada uno de sus elementos como algo vivo y sensitivo. Como dirían los alemanes, se necesita llegar a un verdadero <<Einführung>> del proceso resistente, sentido a través de lo deformatorio que siempre va esencialmente unido a todo lo tensional...”<sup>3</sup>*

No trataremos, pues, en esta Tesis Doctoral de reivindicar la exactitud de los cálculos grafostáticos, ni su precisión, que claramente ha sido superada por los modernos métodos matriciales de cálculo, o los, cada vez más potentes y extendidos programas informáticos para cálculo de estructuras.

Antes por el contrario, lo que pretendemos demostrar es que, concebida nuestra idea arquitectónica, o en fase de concepción, la Estática Gráfica nos puede asistir, de forma sencilla y eficaz, a la ratificación o desestimación de aquella idea, bien porque su comportamiento estructural no resulta adecuado o porque las dimensiones que el equilibrio tensional que se deduce de nuestro tanteo grafostático, resultan incompatibles con las condiciones impuestas.

---

<sup>2</sup> (Torroja, 1984: 12)

<sup>3</sup> (Torroja, 1984: 13)

Nuestra Tesis Doctoral tiene su origen en la eficacia que ha tenido siempre el conocimiento del Dibujo, la Geometría y la Física, (en particular la Mecánica y en ella la Estática) como instrumentos que el arquitecto ha utilizado para la concepción, el cálculo y la representación de sus ideas y, sobre todo, desde que se nos descubrió el apasionante mundo de la Estática Gráfica, en la segunda mitad del S. XIX, con la utilización de los métodos gráficos para la determinación de la situación estructural de los objetos a construir.

Tomando como referencia *“form ever follows function”* (la forma sigue siempre a la función), entresacada del artículo *“The Tall Office Building Artistically Considered”* publicado por el arquitecto Louis Herry Sullivan en 1896: <sup>4</sup>

*“...And thus the design of the tall office building takes its place with all other architectural types made when architecture, as has happened once in many years, was a living art. Witness the Greek temple, the Gothic cathedral, the medieval fortress. And thus, when native instinct and sensibility shall govern the exercise of our beloved art; when the known law, the respected law, shall be that form ever follows function; ....”*

Donde Sullivan manifiesta que los nuevos rascacielos de oficinas tendrán su sitio en la arquitectura moderna, como lo tuvieron el templo griego o la catedral gótica, bajo una nueva ley que se ha hecho internacionalmente conocida y que ha constituido una de los principios que movió a la Bauhaus y a la Arquitectura Moderna.

Literariamente traducido, comentado y editado por el Arquitecto argentino Martin Lisnovsky en su *Selección de Textos Maestros*: <sup>5</sup>

*“...Cuando la función no varía, no varía la forma. Es una ley que penetra en todas las cosas orgánicas e inorgánicas, en todas las cosas físicas y metafísicas, en todas las cosas humanas y sobrehumanas, en todas las genuinas manifestaciones del cerebro, el corazón, la mente, y dictamina que la vida sea reconocible en su expresión, que la forma siga siempre a la función. Esa es la ley....”*

---

<sup>4</sup> Sullivan, Louis Herry. *The Tall Office Building Artistically Considered*. Lippincott's Magazine. LVII, March 1896: 403-09. Reimpreso en *Inland Architect and News Record* 27, May 1896: 32-34; *Western Architect* 31 January 1922: 3-11; y publicado como *“Form and Function Artistically Considered”* en *The Craftsman* 8, July 1905: 453-58.

<sup>5</sup> Lisnovsky, Martin, *La forma sigue a la razón de Sullivan*. Selección de TEXTOS MAESTROS. <http://www.arquitecturamashistoria.blogspot.com>. 2007.

Lisnovsky es arquitecto, Profesor de la Cátedra Brandariz de la Facultad de Arquitectura Diseño y Urbanismo de la Universidad de Buenos Aires. (Lisnovsky, 2007)



Tratamos de demostrar en esta Tesis Doctoral que, además de lo expresado por Sullivan, respecto a la función arquitectónica, también es cierto que desde el punto de vista estructural y formal: *“La forma sigue siempre a las fuerzas”*.

Entendemos que, para el arquitecto, el análisis de la idea arquitectónica de la que hablaba Torroja, significa comprender el funcionamiento estructural del juego de fuerzas intervinientes, sabiendo justificar el acuerdo entre sus componentes dirección y proporciones y aprovechar los principios de resistencia y estabilidad esenciales, en conjunción con las características de resistencia de los materiales seleccionados. Todo ello sin abandonar la simplicidad de los cálculos que la Grafostática puso a nuestro alcance, conduciéndonos a una aproximación natural concreta e intuitiva, que puede conllevar incluso a dimensionamientos, siquiera previos, que confirmen o desestimen la idea arquitectónica primitiva.

*“La forma sigue a las fuerzas”*. Esta manera de ligar el pensamiento constructivo y arquitectónico mediante la utilización de la mecánica y la geometría, responde a una ya vieja tradición que se remonta a Karl Culmann, padre de la Estática Gráfica, profesor en la Escuela Politécnica de Zürich (ETH) <sup>6</sup> en 1880.

La Tour Eiffel, ideada por Maurice Koechlin, antiguo alumno de Culmann en el mismo Politécnico de Zürich, bebe del mismo principio, en tanto en cuanto, su admirada forma es el resultado de un diseño capaz de resistir los momentos flectores debidos al viento, en cada una de las cuatro plataformas en que Koechlin dividió la torre en altura <sup>7</sup>.

Christian Menn, alumno de Robert Maillart <sup>8</sup> y profesor de Santiago Calatrava en el ETH, pertenece también a ese grupo de arquitectos e ingenieros de la misma tradición que hemos señalado y que manifiestan en sus concepciones estructurales aparentemente gratuitas desde el punto de vista formal, pero que responden a esa cadencia conceptual: fuerzas, equilibrio, forma.

---

<sup>6</sup> La *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH)*, Escuela Politécnica Federal de Zürich, ha sido durante sus más de 150 años de existencia una Universidad pública, vivero de grandes investigadores. Entre otros estudiaron en ella ingenieros como Karl Culmann, Maurice Koechlin y Robert Maillart, arquitectos como Hendrik Petrus Berlage o Santiago Calatrava y físicos como Albert Einstein.

<sup>7</sup> Tratamos este interesante diseño, analizado grafostáticamente en el Capítulo 6 de esta Tesis Doctoral.

<sup>8</sup> Los diseños de Robert Maillart, para sus puentes con tres articulaciones, constituyen un buen ejemplo de cómo el análisis de las fuerzas provocan la forma de las estructuras. Algo similar sucede con los *Magazzini generali di Chiasso* de 1920, también de Maillart. Ambas cuestiones son analizadas en el Capítulo 6 de esta Tesis Doctoral.



Fig. 1.3. Christian Menn. Leonard P. Zakim. Bunker Hill Bridge, construido en Boston, U.S. en 2002 y Sunniberg-Bridge contruido en Canton, China en 1999. Ambos puentes representan a día de hoy, un buen ejemplo de las construcciones que hemos señalado como correspondientes a esa tendencia derivada de las enseñanzas de la Politécnica de Zürich. (Christian Menn Consulting Engineer).

El control de la forma arquitectónica puede apoyarse en la utilización de la Estática Gráfica, de forma sencilla en la fase de diseño y concepción de la misma. <sup>9</sup> (Zalewski, 1997: 49)

Pensemos en un edificio de diez o doce plantas con una estructura de hormigón armado de planta rectangular y un núcleo central dedicado a escaleras, servicios, ascensores, etc., como el del croquis y una variación sobre la primera idea, que consista en el aumento de una planta, la supresión de los pilares del contorno, librando la práctica totalidad de la planta baja con el sólo núcleo central. (Fig. 1.4).

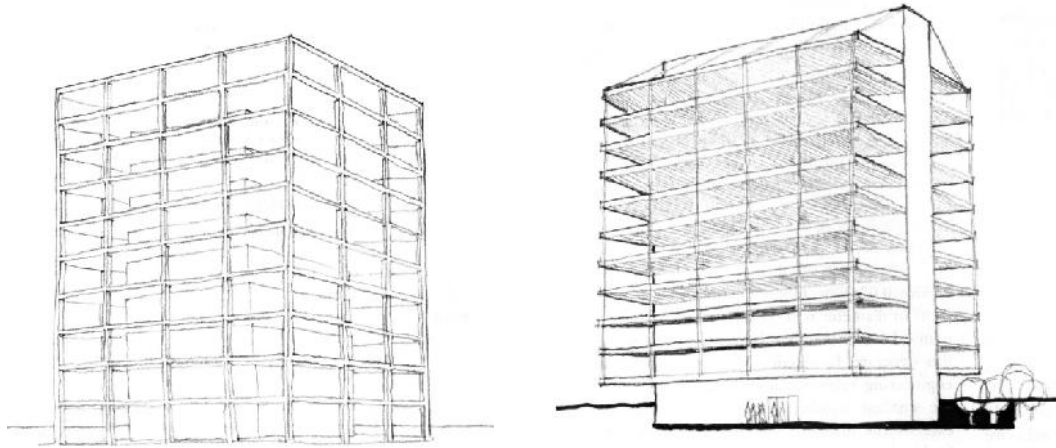


Fig. 1.4. Croquis de un edificio con entramado reticular de pilares de H.A. y una variación sobre la idea original suprimiendo los pilares de la fachada anterior y posterior. (Croquis de J. Iano para Zalewski, 1997)

La idea de sustentar elementos contruidos, colgándolos de cables y perfiles metálicos no es, naturalmente, nueva y la arquitectura moderna ha mostrado muchos ejemplos al respecto, tanto en el campo de los puentes como en la propia edificación, como se muestra en la Fig. 1.5. Pero yendo algo más allá en la capacidad de control sobre nuestras decisiones:



Fig. 1.5. Puente sobre el Lago Roosevelt en Arizona, en el que el peso del tablero y los vehículos es transmitido a los arcos metálicos por tendones también de acero. Edificio de la Empresa Arrow International en Reading, Pennsylvania, con la estructura de las plantas, colgada mediante perfiles metálicos.(Fot. De S. Rosenthal).

<sup>9</sup> Zalewski, Wactaw & Allen, Edward. *Shaping Structures Statics*. John Wiley & son, Inc.: New York. 1997.

Supongamos que avanzamos en la concepción y desarrollo de nuestra idea y reducimos aún más el elemento central, constituyendo un auténtico núcleo resistente de hormigón armado y liberamos totalmente el perímetro de pilares, colgando todo el contorno de los forjados mediante cables o platabandas de acero, como se muestra en el esquema de la Fig. 1.6.

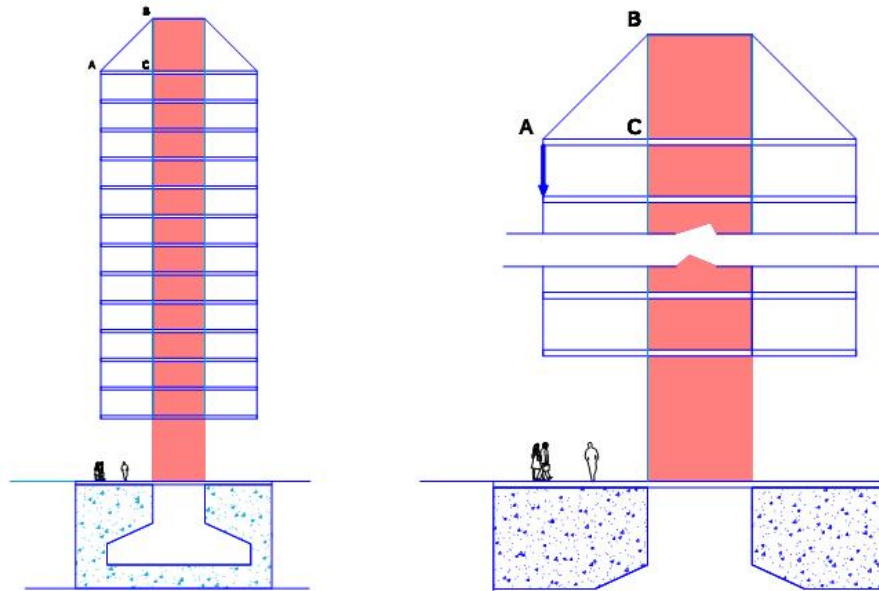


Fig. 1.6. Croquis del edificio cuya idea se analiza y modifica con ayuda de la Estática Gráfica. (Dibujos propios).

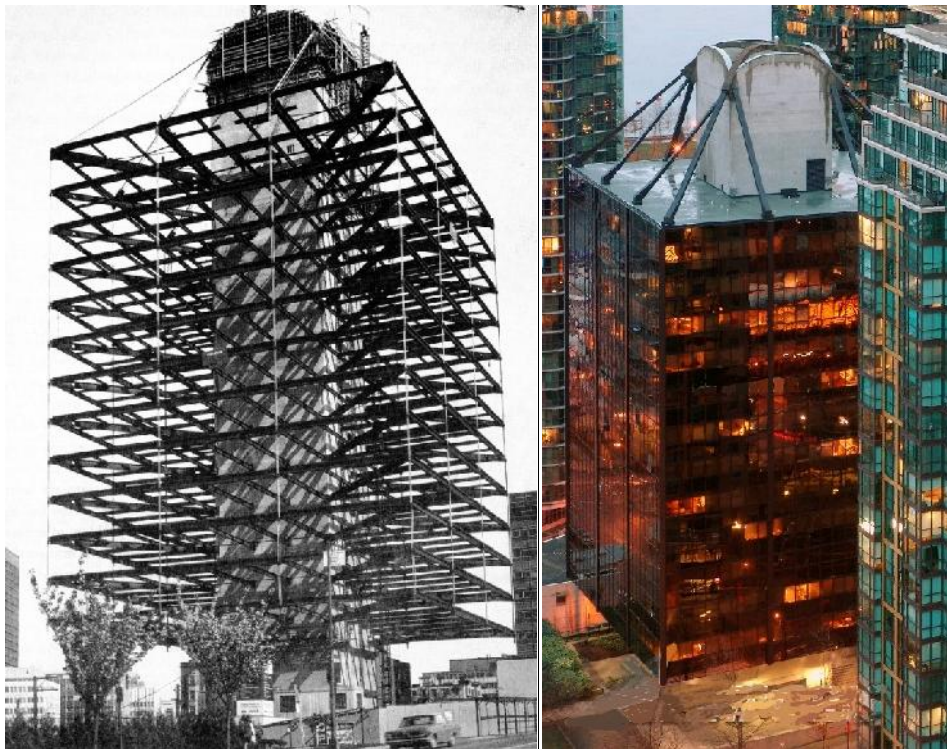


Fig. 1.7. Torre para Westcoast Transmission Company. Arquitectos Rhone & Iredale. Vancouver. La primera de las imágenes corresponde a la fase de construcción de la estructura. El edificio terminado. (Fot. de A. Ulyanov para Emporis).

Un somero análisis de cargas nos llevaría a estimar, con luces de 5,00 m y 12 plantas, una carga total por cada elemento metálico sustentante, de:  $25 \text{ m}^2 \times 800 \text{ kg/m}^2 \times 13 = 260 \text{ Tn}$  (Aprox. 2.6 MN). ( $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ Newton}$ )

Si por cuestiones de simplicidad en el ensamblaje de los tirantes metálicos, se determina una anchura de platabandas de  $b = 150 \text{ mm}$  y un espesor  $h = 10 \text{ mm}$  y establecemos una más que conservadora tensión admisible para el acero de las mismas de unos  $1.500 \text{ Kg/cm}^2$  (Aprox. 150 Mpa), podremos determinar el número de platabandas para cada elemento sustentante. Por ejemplo, para el tirante vertical que está sometido a 260 Tn, con un ancho de platabanda de  $150 \text{ mm}$ , necesitaríamos  $2,6 \times 10^5 / 1,5 \times 10^3 = 173 \text{ cm}^2$ , o sea,  $150 \text{ mm} \times 115 \text{ mm}$ , con lo que serían precisas 11 platabandas.

El equilibrio de fuerzas en lo que llamamos nudo (A), es posible mediante un Diagrama de Cremona o de las Figuras recíprocas, considerando el entramado triarticulado ABC de la figura, aunque por la simplicidad de dicho entramado, sería sencillo un estudio del equilibrio de fuerzas en el nudo, como muestran las figuras 1.8 y 1.9.

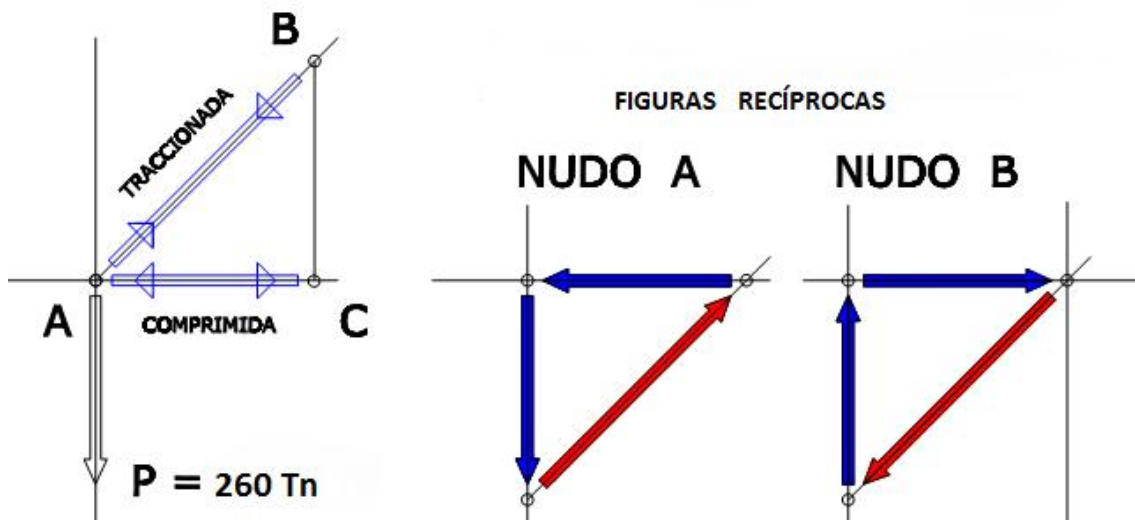


Fig. 1.8. Análisis grafostático de las tensiones en las "barras" que concurren en los nudos A, B y C de la hipotética estructura triarticulada, simplificación del extremo superior izquierdo de nuestro edificio, mediante los Diagramas de Cremona o de las Figuras Recíprocas. (Dibujos y cálculos propios).

De nuestro análisis deducimos que la hipotética barra AB está traccionada y sometida a un esfuerzo, que medido en el diagrama resulta  $T = 367 \text{ Tn}$ , siendo que del Nudo (A) hacia abajo, la platabanda o cable sustentante está traccionado con  $P = 260 \text{ Tn}$  y la barra AC se encuentra comprimida con una fuerza también de  $260 \text{ Tn}$ .

Si calculamos para la barra AB el número de platabandas necesario para el esfuerzo de  $367 \text{ Tn}$ , manteniendo el ancho de platabandas establecido, por continuidad constructiva, encontraremos que necesitamos una cantidad que hace imposible esa continuidad. En efecto,  $3,67 \times 10^5 / 1,5 \times 10^3 = 245 \text{ cm}^2$ , lo que con un ancho

$b = 150 \text{ mm}$  exigiría un espesor de  $163 \text{ mm}$ , que se correspondería con 16 platabandas, que alterarían la continuidad deseada.

Los resultados concuerdan, naturalmente con los de los sumatorios de fuerzas verticales y horizontales, aplicación directa de la Segunda Ley de Newton, en el equilibrio de fuerzas que se muestra en la Fig. 1.9.

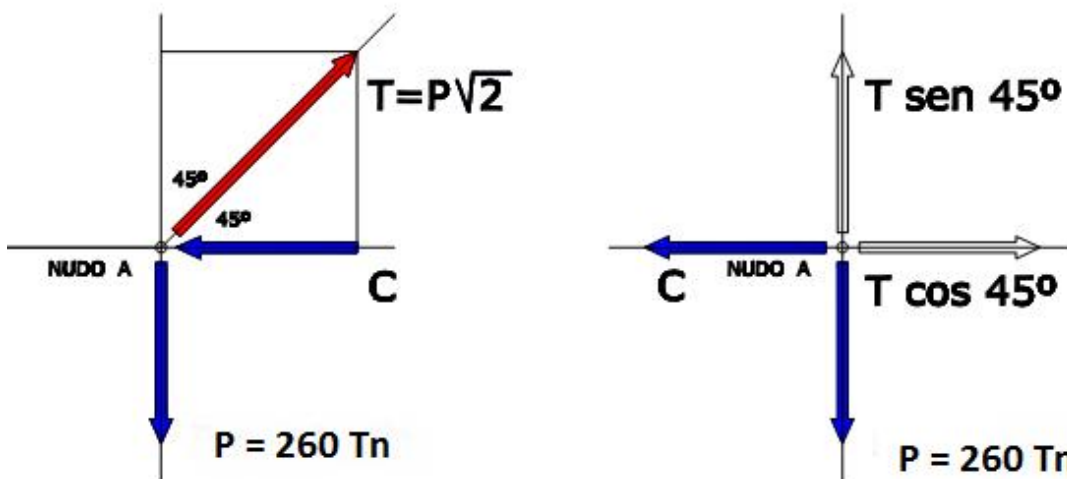


Fig. 1.9. Análisis de las fuerzas intervinientes en el nudo (A) de nuestra hipotética estructura, y su equilibrio. (Dibujos y cálculos propios).

Correspondientes a las conclusiones estructurales obtenidos, serán los elementos constructivos que debemos emplear, como es el caso de la barra AC que diseñamos con un perfil articulado en (C) como se muestra en el detalle de la Fig. 1.10. sometida a una compresión de  $260 \text{ Tn}$ .

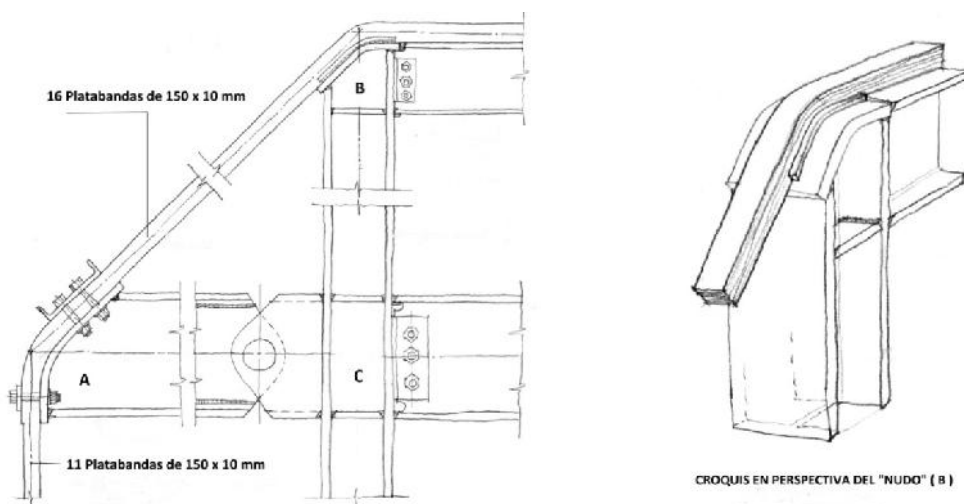


Fig. 1.10. Croquis de la estructura diseñada ABC y de las 16 platabandas en el nudo (B). (Croquis de J. Iano para Zalewski, 1997)

La solución estructural de reducir en el nudo (A) el número de platabandas descendentes, de 16 a 11, que son las estrictamente necesarias, puede resolverse de una manera constructiva más armónica, con ayuda de los conocimientos de la Estática Gráfica. En efecto, si analizamos los polígonos de fuerzas teóricos que cabe plantearse para una componente vertical de 256 Tn. y sus correspondientes figuras recíprocas, observamos que las tracciones en la barra inclinada AB y las compresiones en la horizontal, van disminuyendo cuando el ángulo es superior a 45° y aumentan cuando el ángulo es inferior a 45°, tendiendo a infinito cuando el ángulo tiende a cero.

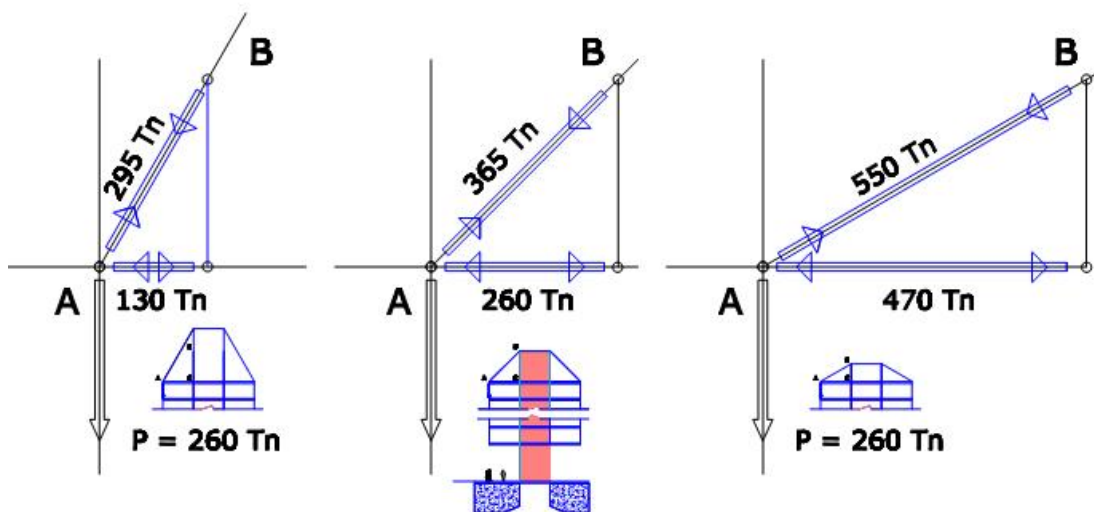


Fig. 1.11. Polígonos de fuerzas para distintas inclinaciones de la barra AB y sus consecuencias en los esfuerzos provocados en las barras y en los cambios originados en la geometría del remate del núcleo central del edificio. (Dibujos y cálculos propios).

Como se observa en los esquemas del remate del edificio, éste cambia cuando se intenta disminuir los esfuerzos, inclinando a 60° las barras AB. Finalmente, la Grafostática nos ayuda a encontrar una óptima solución, que incluso mantiene constante los esfuerzos en las barras y en las platabandas sustentantes. (Fig. 1.12).

Las opciones de que el arquitecto dispone para la solución final del diseño planteado, pasan por momentos de preponderancia del diseño arquitectónico, intentando la más brillante, como es natural, aunque puede que haya condicionantes económicos, (como en el caso del precio de ciertos materiales), e incluso por imposibilidades de resolución constructiva, cumplimiento de ordenanzas municipales, o exigencias derivadas de las capacidades resistentes de los materiales que pensemos emplear.

Las modificaciones introducidas sobre nuestra Idea, deben ser sopesadas para una buena solución. Es posible que parte de la geometría inicial se altere, o se vea condicionada. Es posible también que sin perder su cualidad esencial, se vea mejorada con una mayor adecuación a todo el conjunto de exigencias mencionadas.

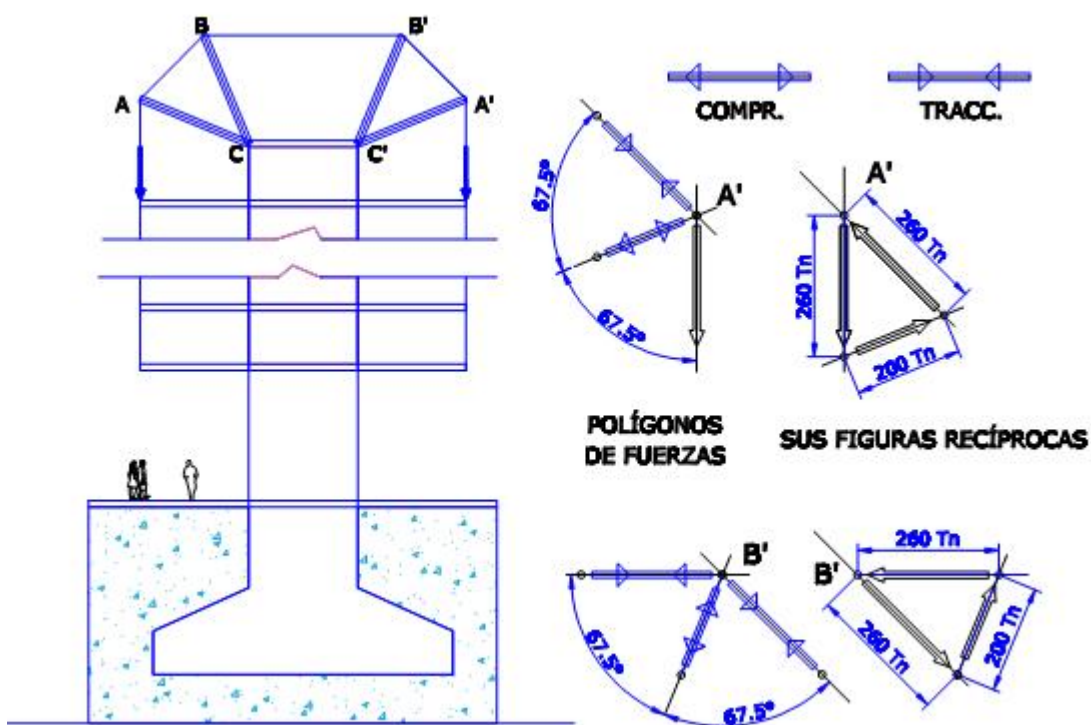


Fig. 1.12. Estudio de soluciones alternativas para la coronación del edificio proyectado, mediante el análisis grafostático de los esfuerzos en las barras AC, BC y BB' de la hipotética estructura articulada de barras y tirantes. (Dibujos y cálculos propios).

Eso hemos tratado de demostrar: que con la ayuda de la Estática Gráfica hay posibilidad, en la fase de diseño, de barajar soluciones, económica y estructuralmente viables, que pueden mejorar nuestra idea. En el modelo que hemos analizado, los arquitectos decidieron finalmente no añadir las barras que se muestran en la Fig. 1.12. y se puede apreciar en las fotografías de la Fig. 1.7., cómo se levantaron las barras con una inclinación aproximada a lo que hemos calculado en el segundo de los diagramas de la Fig. 1.11., es decir, las platabandas inclinadas AB se levantan un ángulo aproximado de  $45^\circ$  sobre la horizontal del último forjado, con un esfuerzo que originalmente habíamos estimado en 365 Tn. Los esfuerzos mayores corresponderán a las aristas en diagonal cuya magnitud se obtiene por un sencillo cálculo vectorial o geométrico, que expresamos como  $D^2 = 365^2 + 260^2$ , con lo que  $D = 448$  Tn.

La decisión no comportó, naturalmente, ninguna variación de la altura del núcleo central del edificio, que terminó sobreelevándose ligeramente para conseguir el paso de los tirantes de las diagonales. (Fig. 1.13). Asimismo se puede observar el cambio de sección entre las platabandas inclinadas y los tirantes verticales, que aparecen de menor espesor, al pasar el teórico nudo (A).



Otros modelos y ejemplos de la utilización de la Estática Gráfica en el control de los diseños de los arquitectos, son analizados en los distintos capítulos de esta Tesis Doctoral.



Fig. 1.13. Torre para Westcoast Transmission Company. Arquitectos Rhone & Iredale. Vancouver. 1969. (Fot. de Larry Henion para Emporis).

## 2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA INVESTIGADORA

Ha sido un tema habitual de debate entre los arquitectos, en los círculos próximos a las enseñanzas técnicas universitarias y muy a nuestro pesar, que las correspondientes a las ingenierías estaban dotadas de una mayor carga científica, entendiéndose que había en ellas una mayor profundidad conceptual en la práctica docente, mientras las escuelas de arquitectura ponían mayor empeño en los sistemas gráficos de representación y el conocimiento de la Teoría arquitectónica y el Diseño, en detrimento de aquel cientifismo relacionado con la Física, Matemáticas y sus derivaciones tecnológicas, siendo de uso común en la gran mayoría de las escuelas de ingeniería, los libros y temarios denominados Física para ingenieros,<sup>1</sup> (en general o particularizando esta o aquella ingeniería) y se ha generalizado también los de Física aplicada a la Arquitectura, con la sospecha de que éstos traen algo suavizada esa carga científica, a la que nos referíamos, por tratarse de ciencia para arquitectos.

*Todo es física. Es frecuente oír esta afirmación a muchos Ingenieros. Y tiene sentido, ya que el mundo tangible, el mundo que perciben los sentidos, el mundo que materializan los Ingenieros tiene mucho de físico.*

*La física es una de las ciencias más antiguas, como las Matemáticas, como la Filosofía, la Medicina o la Teología y, por tanto, es un cuerpo doctrinal acumulado que, seguramente, se cubriría varias veces la superficie de la Comunidad Valenciana, con todo lo escrito sobre Física.*

*Nuestro mérito, nuestra responsabilidad hoy, es extraer de esta montaña sagrada de conocimiento, la síntesis ideológica necesaria y suficiente, para que los Ingenieros de hoy entiendan el mundo que les toca vivir y hacer. Ese es el reto.<sup>2</sup>*

---

<sup>1</sup> Sanchís Sabater, Antonio. *Fundamentos físicos para ingenieros*. Vol. 1. Servicio de publicaciones de la Escuela Técnica Superior de I.I. UPV: Valencia, 1999.

<sup>2</sup> Justo Nieto Nieto, Rector de la Universidad Politécnica de Valencia 1986-2004 y Doctor Honoris Causa de la Universidad Politécnica de Cartagena (2005), hacía esta presentación del libro *Fundamentos físicos para ingenieros*. (Sanchís, 1999: 1) poniendo de relieve la importancia de la física en la formación de los ingenieros. Curiosamente, el libro presentado, contiene un pequeño capítulo dedicado a la Estática Gráfica, (Lección 7. Grafoestática). (Sanchís, 1999: 155-163)

**EL OBJETIVO PRIMERO** de nuestro trabajo investigador para esta Tesis Doctoral es poner de relieve la **vigencia de la Estática Gráfica**, una aplicación práctica de conceptos físicos y geométricos, dibujados, en los procesos de la concepción y el diseño arquitectónico. Nos gustaría que pudiera interpretarse como un estudio de la histórica imbricación de los conocimientos de Ciencia, Arte y Técnica en los procesos de Proyecto y Construcción, enmarcando los análisis que exponemos, de la utilización de la Grafostática, desde Karl Culmann <sup>3</sup> hasta nuestros días.

Se trata de demostrar que, en el proceso proyectual, los análisis que la Grafostática puede aportar sobre el comportamiento de la estructura de lo proyectado, puede ayudarnos en gran medida a la toma de decisiones, tanto estructurales como en propio concepto arquitectónico al que damos forma y lo hemos llamado Objetivo Primero por constituir el principal y originario motor que nos llevó a la investigación que contiene esta Tesis Doctoral.

Ya en la Introducción, Capítulo: 3 Estado del Arte, Capítulo 6: La utilización de la Grafostática y en el Capítulo 7: Patrones para una Didáctica actual de la Grafostática, exponemos numerosos ejemplos en los que el uso de los procedimientos grafostáticos vienen a auxiliar al arquitecto que intenta diseñar nuevos edificios o partes de ellos y comprobar, en construcciones ya edificadas, la seguridad y adecuación del conjunto o algunos de sus elementos resistentes más significativos.

**EL OBJETIVO SEGUNDO** trae causa de la laguna observada durante el análisis de las fuentes que hemos utilizado, enumeradas cronológicamente más adelante y consiste en **comprobar la coincidencia de los resultados analíticos** obtenidos mediante la Mecánica vectorial y **con el uso de los procedimientos gráficos** deducidos de la Estática Gráfica.

Los tratados de Mecánica vectorial <sup>4</sup> reconocen, en general, la existencia de antiguos “procedimientos gráficos” para el cálculo de los parámetros que determinan los Sistemas de vectores (en general representan sistemas de fuerzas) profundizando

---

<sup>3</sup> Culmann, Karl. *Die graphische statik*. Verlage von Meyer & Zeller: Zürich. 1866. (Escaneado por Google Bücher 2008. Formato de libre disposición informática)

Culmann, Karl. *Traité de statique graphique*. Trad. de la 10ª ed. Alemana Glasser (G.) Jaquier (J.) Valat (A). Dunot: Paris. 1880 (Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton. 2010)

<sup>4</sup> Gesto de Dios, Ramón. *Mecánica vectorial para arquitectos e ingenieros: Estática: Un enfoque estructural*. Aula Magis. Madrid. 2012.

Bedford, Anthony / Fowler Wallace. *Mecánica para ingeniería*. Quinta edición. Trad. Murrieta Murrieta (Jesús Elmer). Pearson Educación de México, S.A. de C.V.: Naucalpán de Juárez. Estado de México. 2008.

en el cálculo analítico que proporciona el álgebra vectorial y utilizan representaciones gráficas (dibujos) exclusivamente para una mejor comprensión de lo explicado, con ausencia total de cálculo gráfico.

Sensu contrario, todos los tratados de Estática Gráfica exponen los procedimientos de cálculo de los parámetros e invariantes de los Sistemas de fuerzas en el plano (representadas mediante Sistemas de vectores) profundizando en los procedimientos geométricos para la determinación de Resultante, Momentos, Eje central, etc., obviando los procesos analíticos que pueden conducir a los mismos resultados.

Hemos llevado nuestra investigación a intentar mostrar gráficamente, la correspondencia entre los resultados analíticos obtenidos para los sistemas de vectores deslizantes, su Resultante y la posición del Eje Central de dicho sistema del que hemos calculado la ecuación de su recta en el espacio y la representación espacial de los mismos y las proyecciones ortogonales sobre los planos de proyección. Se ha comprobado que la Grafostática, determina en los planos de proyección, Resultante y Recta Eje Central, cuya dirección coincide con la dirección proyectada del Eje Central. La metodología de la Grafostática aplicada a dichos sistemas planos de vectores, determina, pues, con toda fidelidad lo que la Mecánica vectorial fija, de forma analítica, para los sistemas en el espacio. Se desarrolla en los Puntos 7.1 y 7.2. de esta Tesis.

Culmann había esbozado una representación espacial del cálculo del Centro de Gravedad de cuatro masas puntuales afectadas de diferentes pesos en el Punto 53 *Der mittelpunkt paralleler kräfte* (El centro de fuerzas paralelas) de su *Die Graphische Statik* y realiza el cálculo grafostático de la posición de dicho Centro de Gravedad, mediante las proyecciones diédricas ortogonales sobre dos planos y el cálculo grafostático sobre cada uno de estos dos planos. (Culmann, 1866: 143, fig. 84). Hemos recreado y ampliado el análisis y el dibujo de Culmann en el punto 3.3. de esta Tesis.

En efecto, son muchos los tratados de Estática Gráfica que hemos revisado, siguiendo las Técnicas de investigación documental fundamentales, cuya trascendencia parece evidente para una investigación de calidad científica. Entendiendo la documentación como una estrategia de obtención de información (Vallés, 1999: 129)<sup>5</sup> y como tal, se trata de un proceso en que finalmente alcanzamos el conocimiento máximo marcado por nosotros mismos, hemos ido y vuelto sobre todos estos tratados intentando encontrar ciertas claves escondidas o poco evidentes, que nos permitieran

---

<sup>5</sup> Valles , Miguel S. *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Síntesis, S.A.: Madrid. 1999.

comprender cómo fue el proceso científico que llevó a Karl Culmann y a Luigi Cremona a la Estática Gráfica desde la Geometría Proyectiva, extremo éste, que ha supuesto una de las aportaciones relevantes de nuestro trabajo y que nos ha llevado a plantear el tercero de nuestros objetivos.

**EL OBJETIVO TERCERO** está relacionado con el comportamiento estructural de elementos que, como los arcos de fábrica, bóvedas, etc., deben trabajar exclusivamente a compresión. Es fundamental, pues, conocer la posición del Eje Neutro que originará tensiones de distinto signo a un lado y otro de sí mismo, en caso de cortar a la sección como en el caso de la recta (m-n) de la Fig. 2.1.

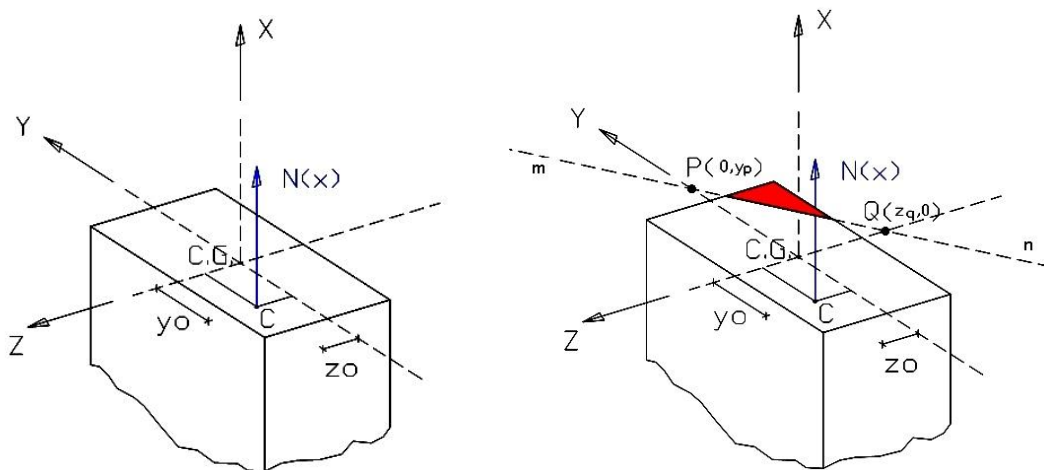


Fig. 2.1. Ubicación del eje neutro (m-n) en una sección rectangular, solicitada por una carga axial,  $N(x)$ , excéntrica, que origina en ella flexión compuesta. (Dibujos propios)

Nos hemos propuesto **la elaboración de un Procedimiento exclusivamente grafostático para la determinación del Núcleo Central de cualquier sección**, con el apoyo de los siguientes conceptos de la Mecánica, Resistencia de materiales y los de Polaridad respecto a una cónica de la Geometría Proyectiva:

- El Eje Neutro no pasa por el Centro de Gravedad de la sección.
- El Eje Neutro interseca los cuadrantes (Y-Z) donde no se ubica el punto ( C ) sollicitación, pudiendo ser interior, tangente o exterior a la sección transversal.
- Su posición depende del esfuerzo predominante en la tensión normal (  $\sigma_x$  ). Si predomina el esfuerzo axial, el Eje Neutro tiende a ubicarse fuera de la sección, mientras que el predominio del momento flector, lo sitúa en el interior.
- Cuando el Eje Neutro es exterior o tangente a la sección, las tensiones normales en todos los puntos de la misma son del mismo signo, o todas tracciones o todas compresiones.
- El Núcleo Central es un polígono convexo que tiene tantos lados como vértices tiene la sección transversal y su contorno es el lugar geométrico de los puntos

- ( C ) sollicitación, para que sus Ejes Neutros asociados sean tangentes a dicha sección.
- Los vértices del contorno del Núcleo Central, los obtendremos como los polos de las rectas tangentes al perímetro de la sección, respecto a la Elipse Central de Inercia de la sección transversal y como comprobaremos en el Capítulo 5 de esta Tesis (punto 5.3.5.3), los conceptos de la Geometría Proyectiva, (en tiempos de Culmann, Geometría de Posición), de Dualidad y Polaridad nos permiten afirmar que los lados (a, b,d y e) del Núcleo Central de la sección, son las rectas polares de los vértices (A,B,D y E) de dicha sección respecto a la Elipse Central de Inercia, cuyos semiejes son los Radios de Giro de la sección  $i_z = ( I_z / A )^{1/2}$  e  $i_y = ( I_y / A )^{1/2}$  . Se desarrolla con mayor profundidad en el Punto 7.5 de esta Tesis.

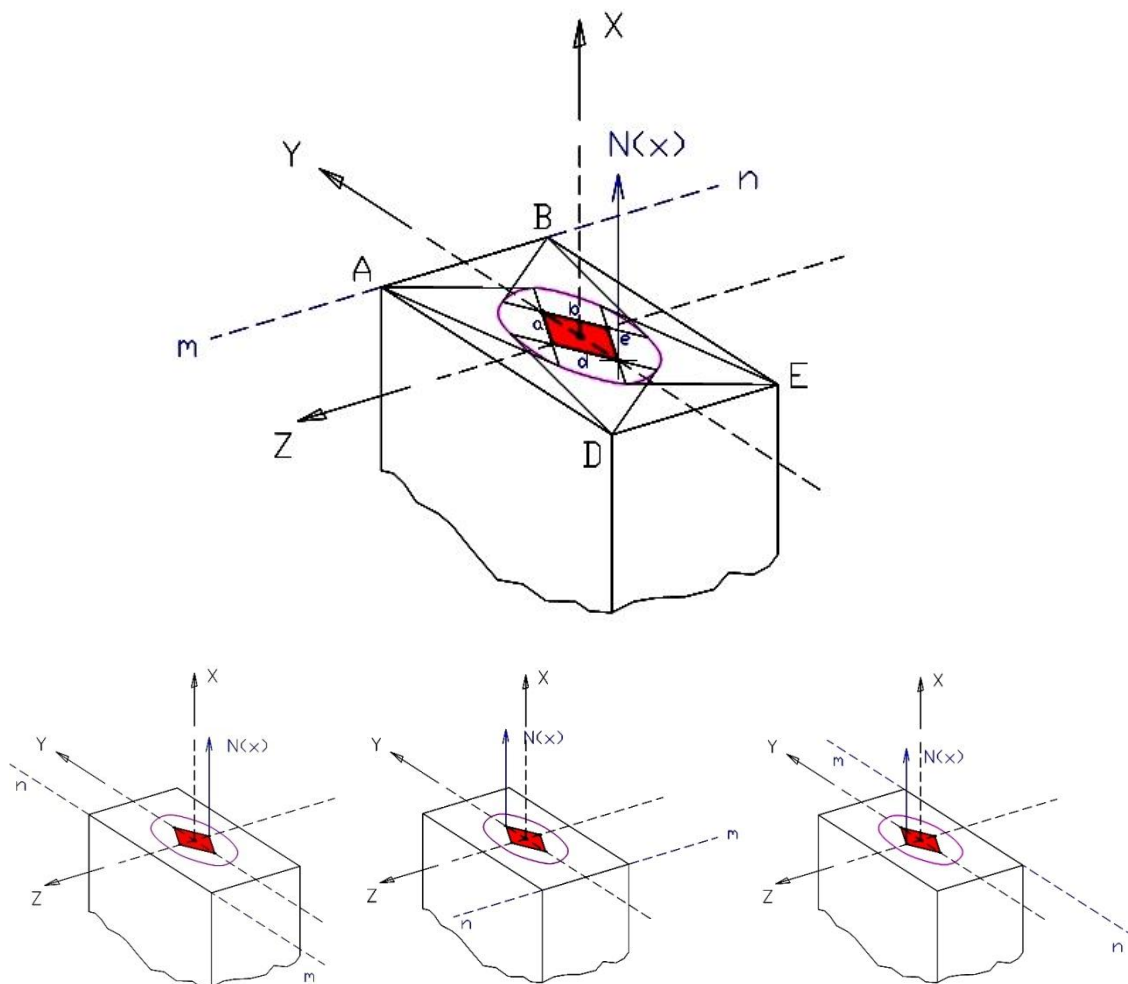


Fig. 2.2. Sección recta sometida a un esfuerzo axial ( $N_x$ ) aplicado en uno de los vértices del Núcleo Central de la sección. El Eje Neutro (recta m-n) se sitúa en la arista A-B de la sección, que coincide con la recta polar recíproca del punto de aplicación de la carga respecto a la cónica Elipse Central de Inercia. Se ha calculado previamente dicha Elipse determinando grafostáticamente los momentos de inercia  $I_z$  e  $I_y$  y sus correspondientes Radios de giro y mediante el Procedimiento alcanzado en nuestro Tercer Objetivo, hemos dibujado en perspectiva las rectas polares (a,b,d y e) de los cuatro vértices de la sección (A,B,D y E), rectas que configuran su Núcleo Central. En las tres figuras restantes se ha representado las distintas posiciones del Eje Neutro según los puntos de aplicación del axil en los vértices del Núcleo Central. (Dibujos propios)

Dadas las singulares características de los temas de nuestra investigación, que tienen más que ver con aplicaciones prácticas que con la pura teoría de la Mecánica o la Geometría, también ha sido especial nuestra metodología investigadora, máxime, atendiendo a la realidad de una Ciencia, como decimos práctica.

Nos hemos marcado, pues, unas pautas investigadoras dedicadas a la:

- Búsqueda de documentos, libros, artículos, comunicaciones a congresos y referencias de diversa procedencia, relacionados con la Estática Gráfica, más abundantes en último tercio del S.XIX, con la dificultad añadida de la localización de dichos documentos, la mayor parte descatalogados. Afortunadamente hemos contado con la ayuda inestimable de algunas entidades universitarias del Reino Unido, Alemania y EE.UU. que han publicado algunos escaneados de los tratados más importantes y que hemos podido adquirir vía Internet. Asimismo, nuestro interés por la Estática Gráfica desde hace muchos años ha contribuido a contar con una muy interesante colección de libros específicos, de todas las épocas, relacionados con ella y que han ido consiguiéndose en librerías de viejo de todo el mundo.
- Lectura y análisis de dichos documentos, orientados a los distintos objetivos, ya enumerados de nuestra tesis.
- Detección de los conceptos clave de nuestra búsqueda, intentando determinar aquellos que explican por un lado la eficacia de la Estática Gráfica en el conocimiento intuitivo del comportamiento estructural, por otro, su propio origen derivado de la Mecánica vectorial y la Geometría Proyectiva y finalmente de aquellos invariantes detectados en los documentos analizados que conducen a la enumeración de los Patrones determinantes de una Didáctica actualizada de la Grafostática.

En la mayor parte de los tratados consultados, editados en los primeros momentos de la existencia y aplicación de la Estática gráfica, incluso los de Culmann o Cremona <sup>6</sup>, no está claramente especificado el propio origen de la misma. Y en la gran mayoría de las obras posteriores con títulos como Lecciones de Grafostática, Tratado de Estática Gráfica, etc., algunas en castellano, más en francés, inglés e italiano y con distinta intensidad de contenidos, se describen directamente las aplicaciones de nuestro Objeto de investigación sin el análisis previo del origen. En la generalidad dichos textos comienzan con operaciones de cálculo gráfico o con la representación vectorial de fuerzas y la descripción común en todas ellas de la construcción del polígono de fuerzas y el polígono funicular correspondiente.

---

<sup>6</sup> Cremona, Luigi. *Les figures reciproques*. Trad. Bossut (Louis) Gauthier-Villars: Paris. 1885. Ed. Facsimil, Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010.

Nos propusimos, pues, como objetivo, entresacar de todos los consultados y releídos, unas trazas que nos indicaran el camino que condujo del conocimiento de la Geometría de Posición, que con el paso del tiempo llegó a denominarse Geometría Proyectiva, absolutamente novedosa desde que Poncelet editó su *Traité des Propriétés Projectives des Figures...*<sup>7</sup> a la aplicación de algunos de sus conceptos, como el de las figuras recíprocas, constituyéndose en una nueva ciencia-práctica como fue la Grafostática.

Una de las más importantes tareas de la investigación documental, es aquella secuencia de acciones que tiene que ver con recurrir a distintos tipos de documentos para tratar de conocer y comprender mejor el fenómeno que estamos estudiando. A catalogación, selección, organización, análisis e interpretación de cualquier tipo de documentos, se les identifica dentro del paquete técnico de la investigación documental esta serie de acciones y decisiones que tienen que ver con la búsqueda, descripción,. En el contexto de toda investigación, el manejo y la adecuada aplicación de este paquete, resulta crucial, pues es a través de él que se accede al complejo mundo de un tipo específico de memoria, que es la memoria objetivada. Ese tipo de memoria termina inevitablemente por ser construida con alguna subjetividad desde el momento en que uno toma decisiones en la selección del paquete documental.

El uso que hace todo investigador de la documentación disponible, debe ir acompañado de la correspondiente evaluación e interpretación del material documental. El uso ventajoso de esta singular fuente de información pasa, necesariamente, por el reconocimiento de sus límites. Depende de cuál sea el propósito del estudio y las decisiones de diseño que se adopten. Una vez más el diseño se presenta como la clave para sacar el máximo provecho de los siempre limitados recursos de la investigación. (Valles, 199: 131).

En este sentido, en nuestra investigación, se ha producido uno de esos episodios comunes a todo trabajo que a aquélla se refiere. En la búsqueda, catalogación, análisis e interpretación, creemos que si están bien hechas, el resultado, ya constituye de por sí un documento de valor intrínseco dentro del trabajo emprendido que supera muchas otras fórmulas empeñadas en dilatar, sobre-dimensionar y sobre-documentar las ideas. Pero un punto más allá del resultado y presentación de lo buscado, se

---

<sup>7</sup> Poncelet, Jean Victor. *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire: Paris. 1822. Escaneado por Ebooks de un original de la Universidad de Lausanne. (<http://books.google.com>). (pdf de libre disposición informática).



ha dado el resultado científico de la intuición y la comprensión (Wagensberg, 2008: 23).<sup>8</sup>

Comprender e intuir la realidad es inherente a todo científico, como a cualquier clase de artista, filósofo o pensador. Es caer en la mínima expresión de la máximo compartido, en lo común de lo diferente, llegando a la esencia de las cosas más o menos ocultas.

La intuición consiste en el contacto entre dos estados de la mente, entre la incertidumbre resuelta y la que está por resolver, entre lo percibido por primera vez y por segunda vez. Un roce entre lo comprendido y lo que está todavía por comprender o entre lo ocurrido y lo que ha de suceder y entre lo que se ha divulgado, (aun no siendo en su totalidad la esencia del saber creador primero) y lo que de verdad llega uno a conocer cuando el trabajo de análisis de lo divulgado desvela dicha esencia primera. Se trata, pues de una especie de iluminación en la compleja mente humana y se la reconoce por el gozo intelectual que trae consigo y tiene el mismo rango cognitivo que la comprensión.

Cuando los místicos explican sus vivencias próximas a un gozo inexplicable, como en el caso de los españoles místicos carmelitanos, hablan de noche oscura, así como de dar un ciego y oscuro salto de fe con la esperanza de que Dios se apiade y recoja el alma de sus siervos. Si Dios quiere, habrá una unión mística o éxtasis, experiencia más divina que humana que resulta de un placer inefable, esto es, intransmisible por entero, sino sólo en una parte muy pequeña, por medio de la palabra o cualquier otro medio de expresión.

En la búsqueda de una nueva comprensión o intuición derivadas del conocimiento previo asociado a la investigación científica, hay algo en la última de las fases de todo el conocimiento, que algo tiene que ver con esa satisfacción poco explicable, si no es mediante la vivencia personal, tras el trabajo emprendido y desarrollado durante largo tiempo.

---

<sup>8</sup> Wagensberg, Jorge. *El gozo intelectual. Teoría y práctica sobre la inteligibilidad y la Belleza*. Tusquets Editores: Barcelona. 2008.

Jorge Wagensberg es doctor en Ciencias físicas y profesor de los Procesos Irreversibles en la Universidad de Barcelona. Es un extraordinario investigador y sus debates sobre las ideas científicas son mundialmente reconocidos y es Premio Nacional de Pensamiento y Cultura Científicos.

En, *Y tú...¿innovas o abdicas?* (Nieto, 2008: 15)<sup>9</sup>, Justo Nieto explica, hablando sobre el progreso de la sociedad, que éste se da cuando cada uno de sus miembros incrementan el valor de lo que hacen y una forma inteligente de hacerlo es a través de la innovación.

*...La Innovación consiste en usar todo el conocimiento que se pueda conseguir, para construir un proceso que lleve a la meta de progreso deseada...la Innovación carece de método y el proceso hay que construirlo cuando, en apariencia, no hace falta, pues nunca se debe innovar bajo la presión de los achaques, sino sólo bajo la presión del reto a conseguir... Lo inteligente es preocuparse por la salud cuando se tiene buena salud...la innovación no solo "no hace daño" sino que representa una forma nueva de vivir, con una estética admirable y que puede ayudar a conseguir un proyecto de vida personal y colectiva con dignidad, transformando el conocimiento en pasión...*

En una primera fase predomina el estímulo, etapa, a veces desordenada y con falta de organización y formalidad, pero definitiva en cuanto que en ella decidimos lo que queremos conocer. Los estímulos sirven para pasar de un estado en el que uno está interesado en todo lo concerniente a un tema, pero sin especificar nada en concreto, (conocer todo lo relativo a la Estática Gráfica lleva o demasiado tiempo o a un trabajo inabordable) a otro en el que aparecen objetivos por los que uno se interesa especialmente, habiendo comprendido suficientemente el objeto global e intuimos objetos específicos por los que nos interesamos incluso con ansiedad. El origen de nuestra Estática Gráfica ha supuesto, una vez escrutado el suficiente conocimiento previo de sus técnicas y aplicaciones, ese objetivo naciente del estímulo intelectual que describimos. Lo mismo sucede con los otros temas marcados como objetivos de esta Tesis Doctoral.

Destaca en una segunda fase la conversación, que es más objeto de planificación y que se entrelaza con esas decisiones que hemos tomado con respecto a los objetivos específicos ya señalados. Conversamos, pues, con nuestros directores de tesis, con los colegas, con otros profesores y con alumnos en nuestro caso, al dedicarnos a la enseñanza universitaria y sobre todo conversamos con nosotros mismos, pensando y reflexionando. De modo que la conversación constituye el núcleo central de la adquisición de un nuevo conocimiento y nos ha servido para enfrentar una realidad con nuestras posibles comprensiones, para ordenarlas en un continuo coherente con los objetivos que nos habíamos marcado decidiendo entre las alternativas. En el caso

---

<sup>9</sup> Nieto Nieto, Justo. *Y tú..., ¿Innovas o abdicas?* Editorial de la UPV.: Valencia. 2008.

de nuestra Tesis, de esa conversación con otros y con nosotros mismos surge la decisión de ampliar objetivos, aportando extensión a nuestra investigación mediante el conocimiento de la original Geometría de Posición de Poncelet (Poncelet, 1822) y otros, como Antonio Favaro<sup>10</sup> y la aplicación que de sus conceptos hacen Cremona y Culmann.

La comprensión y la intuición ocurren en la última fase del proceso de toda investigación y así ha sucedido en nuestro caso. Se trata de una fase que podemos calificar de instantánea (aunque no se trata de una medida temporal) porque la comprensión y la intuición, el estar perdido en la abundancia de documentos y el mar de textos y citas concomitantes y encontrar un camino luminoso en la explicación de lo que se comprende e intuye es un proceso súbito (también sin cuantificar el tiempo). La sensación de “caer” en algo es el síntoma primero de que hemos intuido y comprendido. La idea de “comprensión súbita” es casi una redundancia y está acompañada de signos que la hacen inconfundible. La determinación de parámetros que confirman las hipótesis planteadas está en ese proceso instantáneo del hallazgo de la comprensión. (Wagensberg, 2008: 25-34).

Respecto a las hipótesis que hemos planteado en nuestro trabajo, queremos señalar una serie de principios fundamentales a los que nos hemos intentado someter y que exponemos:

- Que las hipótesis han de ser obligatorias, es decir, que sin ella no quede capacidad arbitraria de explicación del fenómeno sobre el que se está investigando.
- Que sea contrastable o comprobable o al menos sea razonable su comprobabilidad, porque las hipótesis no comprobables o que se sustraen a la observación o la experimentación, dejan los planteamientos sin resolver.
- Que sean fácilmente imaginables, es decir, traducibles al lenguaje físico y si es posible, como quería lord Kelvin, a puro mecanismo, (las hipótesis oscuras o demasiado abstractas corren el riesgo de constituir vacías explicaciones verbales)
- Que huyendo de propiedades ocultas y de esencias metafísicas, propendan a resolver las cuestiones de calidad en problemas de cantidad.

---

<sup>10</sup> Favaro, Antonio. *La Statica grafica nell'insegnamento tecnico superiore*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia. 1873.

Favaro, Antonio. *Leçons de Statique Graphique*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris. 1879. . Ed. Facsimil, Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010.

- Que sugieran, a ser posible, también investigaciones y controversias que, si no zanján la cuestión, nos aproximen, al menos, al buen camino, promoviendo nuevas y más felices concepciones (Ramón, 1898, Reed. 2010: 137).<sup>11</sup>

Aún siendo errónea, una hipótesis puede servir eficazmente al progreso con tal de que esté basada en nuevas observaciones y marque una dirección original al pensamiento científico. Y en todo caso, la explicación rechazada por falsa siempre tendrá una ventaja, la de restringir, por exclusión, el campo de lo imaginable, eliminando soluciones inaceptables y causas de error. Con razón decía el sociólogo y físico francés Gustave Le Bon (1841-1931)<sup>12</sup>, autor de *La evolución de la materia* que “quien rehúsa escoger una hipótesis por guía, debe resignarse a tomar el azar por maestro”.

Muchos sabios ilustres y singularmente el físico irlandés John Tyndall (1820-1893) han insistido sobre la importancia de las hipótesis en la Ciencia y acerca de la importancia de la imaginación en la creación de buenas y fecundas teorías.

Buena o mala, una conjetura, un intento de explicación cualquiera, será siempre nuestro guía, porque nadie busca sin un plan.

Aun los llamados hallazgos casuales se deben normalmente a una idea directriz que la experiencia no sancionó, pero que tuvo capacidad para conducirnos a un terreno poco o nada explorado. Como señala Santiago Ramón y Cajal en *Los tónicos de la voluntad* (Ramón, 1897, Reed. 2010: 138):

*“...En estas cosas sucede como con las personas conocidas, que aparecen en la calle entre la multitud de transeúntes en el preciso instante en que pensamos en ellas, por la razón bien sencilla de que, cuando en ellas no pensamos, pasan cerca de nosotros sin percatarnos de su presencia. Impulsados por la hipótesis, acaso ocurriría sorprender en los hechos diversa cosa de lo buscado; pero mejor es esto que no encontrar nada, que es justamente lo que le sucede al mero e impasible contemplador de los fenómenos naturales.*

<sup>11</sup> Ramón y Cajal, Santiago. *Reglas y consejos sobre investigación científica. Los tónicos de la voluntad*. 2ª Edición. Imprenta Fortanet. Madrid 1899. Reed. Planeta De Agostini: Barcelona. 2010

Con motivo de su ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la sesión del 5 de Diciembre de 1897, pronunció el discurso *Fundamentos racionales y condiciones técnicas de la investigación biológica*. Precisamente ese discurso de ingreso fue el germen del libro *Los tónicos de la voluntad. Reglas y consejos sobre investigación científica*, cuya primera edición fue en 1897.

<sup>12</sup> Le Bon, Gustave. *L'Évolution de la Matière*. Ernest Flammarion, Editeur: Paris. 1905. gallica.bnf.fr / Bibliothèque National de France.

<sup>13</sup> Tyndall, John. *Fragments of Science*. P.F. Collier: New York. 1905. Ed. Digital: University of California Libraries. <http://www.archive.org/details/fragmenoscience01tyndrich>.

*Como dice Peisse, el ojo no ve en las cosas más que lo que mira en ellas y no mira sino lo que está en idea en el espíritu. ....Inútil será recordar que todos los grandes investigadores han sido fecundos creadores de hipótesis.”*

En la ciencia, la objetividad lleva a que no debe haber nada en una hipótesis o en las preguntas que el investigador se hace que conduzcan al favorecimiento de una determinada respuesta. Se trata de uno de las desviaciones más usuales de un investigador. Sería el caso del científico que ve, orgulloso de la teoría construida, lo que la naturaleza no le deja ver.

Relata Jorge Wagensberg en su obra *El gozo intelectual*, (Wagensberg, 2008: 60) que nada menos que el padre de la genética, Gregor Mendel, no pudo ver en sus experimentos con guisantes lo que él aseguró haber visto, al ser sus resultados demasiado correctos. Tanta es la fe que el investigador tiene en sus propias ideas que atribuye a errores de observación u otras deficiencias experimentales las desviaciones que puedan darse, pero nunca a la propia teoría. Algo parecido sucedió también con el astrofísico británico Sir Arthur Stanley Eddington durante un eclipse de 1919. Los expertos que han recogido sus observaciones de campo, aseguran que seleccionó tendenciosamente los datos que favorecían su teoría omitiendo con algunas dudosas justificaciones los datos que no iban a corroborar su hipótesis relacionada con la Teoría de la Relatividad de Einstein, *Report on the relativity theory of gravitation (Informe sobre la teoría relativista de la gravitación)*. Lo que pasa es que en la Inglaterra posterior a la Primera Guerra Mundial, los avances científicos alemanes no eran demasiado conocidos y había cierta ansiedad en el mundo científico por una confirmación relativista elaborada por investigadores nacionales.

Eddington o Mendel es posible que pudieran modificar ligeramente observaciones en la fase que hemos descrito anteriormente de conversaciones con la realidad, aunque finalmente se confirmaran sus hipótesis. Tal es la fuerza de la convicción, que aunque, dos grandes disciplinas científicas como la genética o la relatividad general, nacieron con una cierta manipulación, un “pecadillo” dice Wagensberg, hoy están vigentes y plenamente consagradas. (Wagensberg, 2008: 61).

En cualquier caso, aunque haya existido cierta tendenciosidad en el desarrollo de una investigación y aunque pueda casi todo distorsionarse, como los casos que hemos visto, hay algo que se da o no se da y que cualquiera puede entender que ninguna mente puede crear de forma ficticia: el gozo intelectual. Ya hemos hecho hincapié anteriormente a él y es una especie de piedra de toque, porque cuando se favorecen unas preguntas más que otras o cuando se desarrollan unos experimentos más que otros para que encajen en nuestra teoría o se valoran mejor unos resultados que otros, no se produce la sensación intelectual en la que Wagensberg insiste:

....Pero el síntoma inconfundible (aunque sólo para la mente creadora, claro) es que la trampa, sea ésta suave, perdonable, gruesa o descarada, ¡nunca provoca gozo intelectual! Es la marca del límite. Podemos engañar a la propia mente de mil maneras y más o menos groseramente, pero nunca hasta el punto de poder experimentar un gozo intelectual. Podemos experimentar un gozo intelectual basado en un episodio erróneo o falso, pero nunca sobre un vicio consciente o semiconsciente de la conversación. La relación entre la mente y su gozo intelectual es en verdad íntima y honda.

Nuestro planteamiento de hipótesis en esta Tesis ha seguido el camino de que éstas sean verificables, descifrando la esencia de la teoría Grafostática mediante el análisis de las fuentes, la mayor parte primarias, salvando la dificultad de la traducción de las mismas, en especial del tratado en alemán de Culmann, cuyo idioma nos ha supuesto un mayor esfuerzo. Afortunadamente, del tratado de Karl Culmann en alemán, *Die Graphische Statik de 1866* del que hemos dispuesto de la edición digitalizada por Google, también disponemos materialmente del libro traducido al francés, de la segunda edición alemana, por los ingenieros franceses G.Glasser y J. Jacquier, con un prefacio del propio Culmann escrito en 1879 desde Zurich, en cuyo Politécnico impartía su Grafostática, en el que manifiesta que se trata una fidedigna traducción, lo que asegura una correspondencia con el original, impagable.

Del resto de documentos, todos originales, en francés, inglés e italiano hemos realizado nuestra propia traducción.

Sintetizamos el proceso metodológico en las etapas siguientes:

1.- Constitución del Corpus principal. Hemos seleccionado 30 tratados de Estática Gráfica correspondientes a las distintas épocas que van desde el origen de esta ciencia, con la primera edición de *Die Grafische Statik* de Karl Culmann en (Zürich, 1866), hasta la séptima edición de *Estática Gráfica* de Enrique Pansieri en (Buenos Aires, 1984). Se ha seguido, con los tratados de los que disponemos, un itinerario que recorre casi un siglo y medio. Años 1866, 1873, 1876, 1880, 1882, 1885, 1888, 1899, 1903, 1907, 1913, 1918, 1926. 1929, 1930, 1931, 1937, 1946, 1951, 1955, 1979 y 1984.

2.- Constitución de un Corpus secundario, relativo a los documentos originales de *Projet d'une Nouvelle Méchanique* de Pierre Varignon en (Paris 1687) y *Nouvelle Méchanique ou Statique*, obra póstuma de Varignon en (Paris 1725), siendo que la Nueva Mecánica supone la aplicación del álgebra vectorial a la mecánica tradicional. Y otro relativo a los conceptos originales de la Geometría de Posición y sus interpretaciones más modernas de la Geometría Proyectiva, desde el *Traité des*

*Propriétés Projectives des Figures* de Poncelet en (Paris 1865) a *Nociones de Geometría Projectiva* de Outerelo en (Madrid, 2009).

3.- Análisis del contenido de los textos, construyendo la base argumental de nuestra tesis en coherencia con los contenidos, siguiendo el hilo conductor de nuestras hipótesis, inmersos, como es natural y admitido en los aspectos subjetivos que hilvanan nuestros argumentos principal y secundarios.

4.- Finalmente, a la luz de los análisis realizados y como comprobación de nuestras hipótesis, (recordamos la necesidad de que una hipótesis debe ser fácilmente contrastable y susceptible, casi, de ser reproducible, como un experimento de laboratorio) hemos demostrado la utilidad de la Estática Gráfica, con su utilización en una serie de “experimentos”, si se nos permite el término, comprobando el equilibrio de elementos arquitectónicos, cuya estructura ha sido simplificada, para la observación inmediata del comportamiento estructural del objeto analizado.

A la selección de los documentos que constituye el Corpus de nuestra investigación, sigue el proceso de análisis de dichos documentos que hemos realizado identificando una serie de ítems, que detectamos como variables intrínsecas asociadas a los textos y que hemos recogido en las fichas elaboradas con la aplicación informática Excel 2007. En consecuencia, nos proponemos estudiar las referencias documentales que atañen a los siguientes ítems relativos a los orígenes y a la propia Estática Gráfica :

- La representación plana de figuras en el espacio. La Geometría Descriptiva.
- Conceptos básicos de la Geometría de Posición.
- Aplicación de los conceptos de reciprocidad a las figuras geométricas.
- Rectas conjugadas.
- Rectas dobles. Ejes de momento nulo y Eje Central.
- Sistemas focales. Propiedades proyectivas del plano focal y su foco.
- Poliedros recíprocos.
- Figuras recíprocas.
- Representación vectorial de fuerzas mediante sistemas de vectores deslizantes y operaciones habituales del álgebra vectorial.
- Invariantes de los sistemas de vectores deslizantes.
- Polígono funicular y polígono de fuerzas.
- Determinación del Eje Central en los sistemas de vectores deslizantes, representación de los sistemas de fuerzas.
- Cálculo de Centros de Gravedad de líneas, secciones planas y de sólidos, mediante la determinación del Eje Central.

- Principio de equivalencia. La equivalencia mecánica de dos sistemas de fuerzas aplicadas a un sólido rígido, corresponde a la equivalencia geométrica de los dos sistemas de vectores deslizantes que representan a los sistemas de fuerzas.
- Aplicaciones vectoriales a los conceptos mecánicos de equilibrio.
- Aplicaciones grafostáticas al cálculo y comprobación de la estabilidad de arcos y bóvedas.
- Aplicaciones grafostáticas al cálculo de los diagramas de momentos y cortantes en vigas.
- Momento respecto a un punto de un sistema de vectores deslizantes.
- Reducción de los sistemas a la Resultante y un Momento.
- Cálculo de momentos de segundo orden.
- Momentos y Producto de inercia. Trazado del Círculo de Mohr
- Elipse de inercia.
- Núcleo Central de una sección.
- Aplicaciones grafostáticas al cálculo de los diagramas de momentos y cortantes en vigas.
- Aplicaciones grafostáticas al cálculo de esfuerzos en entramados metálicos.
- Aplicaciones grafostáticas al cálculo de empujes sobre muros.

Con independencia de toda la Bibliografía que se recoge en el Capítulo ( 9 ) al final de esta Tesis y el Anexo, en que hemos reflejado, a modo de Exposición-homenaje a los autores, la colección de libros que sobre Estática Gráfica hemos ido reuniendo con los años, creemos de gran importancia la enumeración de los textos que han constituido el material directamente relacionado con la Geometría de Posición (más antiguos, incluida la primera Geometría Descriptiva), la Geometría Proyectiva (más modernos) y la Estática Gráfica, sobre el que hemos realizado nuestra investigación documental.

Insistimos, además, en la enumeración cronológica de estas fuentes, por considerar que puede ofrecer una visión temporal de la génesis y evolución del tema fundamental de nuestra Tesis, a la vez que desde el punto de vista científico, resulta especialmente útil la comprobación de los datos que muchas de estas obras muestran, de hacia qué tipo de estudiosos del tema en cuestión, van dedicadas y en otros muchos casos, qué cargos profesionales públicos o privados ostentaban sus autores en la fecha de las ediciones consultadas. (La Bibliografía final, no contiene más que el autor, editorial, ciudad y fecha de la edición, sin las particularidades que ahora exponemos).

La visión de los intervalos temporales de la aparición de unas y otras es, en algún caso, muy significativa para la comprensión de qué autor leyó primero a quién, o si es imposible que lo hiciera.



- 1.- **1697** *PROJET D'UNE NOUVELLE MÉCHANIQUE*, AVEC UN EXAMEN DE L'OPINION DE BORELLI SUR LES PROPRIETES DES POIDS SUSPENDUS PAR DES CORDES. M.DC.LXXXVII. **PIERRE VARIGNON**. Chez la Veuve d'Edme Martin, Jean Boudot & Estienne Martin. **Paris 1687**. (Escaneado por Google Ebookstore en 2008 de un original procedente de la Universidad de Lausanne. Formato de libre disposición informática)
  
- 2.- **1725** *NOUVELLE MÉCHANIQUE OU STATIQUE* DONT LE PROJET FUT DONNÉ EN M.DC.LXXXVII. Ouvrage posthume de **P. VARIGNON**, des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre et de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal et Professeur des Mathématiques au College Mazarin. Chez Clude Jombert. **Paris 1725**. (Libro adquirido a la reimpresora Kessinger Publishing's Legacy Reprints. La Vergne. TN USA 2010)
  
- 3.- **1803** *GEOMETRÍA DESCRIPTIVA*. LECCIONES DADAS EN LAS ESCUELAS NORMALES EN EL AÑO TERCERO DE LA REPÚBLICA POR **GASPAR MONGE**, DEL INSTITUTO NACIONAL. TRADUCIDAS AL CASTELLANO PARA EL USO DE LOS ESTUDIOS DE LA INSPECCIÓN GENERAL DE CAMINOS. IMPRENTA REAL. **Madrid. 1803**. (Ed. Facsimilar. Colección de Ciencias, Humanidades e Ingeniería nº 52. Colegio de Ingenieros CCP. Madrid 1996.)
  
- 4.- **1827** *GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE PAR G. MONGE*. CINQUIÈME ÉDITION AUGMENTÉE D'UNE THÉORIE DES OMBRES ET DE LA PERSPECTIVE, EXTRAITE DES PAPIERS DE L'AUTEUR PAR M. BRISSON. Ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur divisionnaire des Ponts et Caussées. BACHELIER (SUCCESEUR DE M<sup>ME</sup> V. COURCIER). **Paris 1827**. (Escaneado por Google Ebookstore en 2005 de un original procedente de la Harvard College Library. Formato de libre disposición informática)
  
- 5.- **1865** *TRAITÉ DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES*. OUVRAGE UTILE A CEUX QUI S'OCCUPENT DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET D'OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE TERRAIN. **JEAN VICTOR PONCELET**. Gauthier Villars. **Paris 1865**. (Reimpresora Kessinger Publishing's Legacy Reprints. La Vergne. TN USA 2010)
  
- 6.- **1866** *DIE GRAPHISCHE STATIK*. VON **KARL CULMANN**. PROFESSOR DER INGENIEURWISSENSCHAFT AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH. Mit 235 in den Text gedruckten Holzschnitten und 36 Tafeln. Verlage von Meyer & Zeller. **Zürich 1866**. (Escaneado por Google bücher 2008. Formato de libre disposición informática)

7.- **1873** *STATICA GRAFICA NELL'INSEGNAMENTO TECNICO SUPERIORE. ANTONIO FAVARO.* PROFESORE NELLA R. UNIVERSITÁ DI PADOVA. Tipografia Grimaldo E C. Venezia 1873.

8.- **1876** *SULLA STATICA GRAFICA.* DISSERTAZIONE PRESENTATA ALLA COMMISSINE ESAMINATRICE della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, da Domenico Cordella Da Saasari. Per conseguire il diploma de Laurea di INGENIERE CIVILE. G. Abello e Comp. Editore. Torino 1876.

9.- **1879** *LEÇONS DE STATIQUE GRAFIQUE PAR ANTONIO FAVARO,* PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ ROYALE DE PADOUE. TRADUITES DE L'ITALIEN PAR PAUL TERRIER, INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES. PREMIÈRE PARTIE. GÉOMÉTRIE DE POSITION. Gauthier Villars. Paris 1879. (Lightning Source UK Ltd. 2010)

10.- **1880** *TRAITÉ DE STATIQUE GRAPHIQUE. PAR CARL CULMANN.* PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRAL DE ZURICH. TRADUIT SUR LA DEUXIÈME ÉDITION ALLEMANDE PAR G. GLASSER ET J. JACQUIER. INGÉNIEURS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET A. VALAT. INGÉNIEUR CIVIL, ANCIEN SUPPLÉANT DE M. CULMANN A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE ZURICH. Dunot Éditeur. Paris 1880. (Lightning Source UK Ltd. 2010)

11.- **1882** *SULL'APPLICAZIONE DELLA STATICA GRAFICA ALLO STUDIO DEI PROGETTI DI NAVI.* STUDI dell'Ing. CESARE MODIGLIANO. Libero Docente nella R. Università di Pisa. Tip. Pieraccini Dir. P. Salvioni. Pisa 1882

12.- **1885** *LES FIGURES RECIPROQUES EN STATIQUE GRAPHIQUE PAR LUIGI CREMONA.* DIRECTEUR DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DES INGÉNIEURS À ROME. OUVRAGE PRÉCÉDÉ D'UNE INTRODUCTION DU D<sup>R</sup> GIUSEPPE JUNG, Professeur à l'Institut technique de Milan ET SUIVI D'UN APPENDICE EXTRAIT DES MÉMOIRES ET DES COURS DE STATIQUE GRAPHIQUE DE Ch. SAVIOTTI, Professeur à l'École des Ingénieurs à Rome. TRADUIT PAR LOUIS BOSSUT, CAPITAINE DU GÉNIE. TEXTE ET ATLAS. Gauthier-Villars. Paris 1885. (Lightning Source UK Ltd. 2010)

13.- **1885** *LEÇONS DE STATIQUE GRAFIQUE PAR ANTONIO FAVARO,* PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ ROYALE DE PADOUE. TRADUITES DE L'ITALIEN PAR PAUL TERRIER, INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES. DEUXIÈME PARTIE. CALCUL GRAPHIQUE. Gauthier Villars. Paris 1885. (Escaneado por Scribe 23.toronto.archive.org. University of Toronto. Formato de libre disposición informática)

14.- **1888** *ESTÁTICA GRÁFICA. PRIMERA PARTE: GEOMETRÍA PROYECTIVA . CARLOS MARÍA MOY.* Imprenta de Pedro Ortega. Barcelona 1888.

15.- **1899** *THE ELEMENTS OF GRAPHIC STATICS*. A Text-Book for Students of Engineering. **L. M. HOSKINS**. PROFESSOR OF APPLIED MACHANICS IN THE LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY. MACMILLAN & CO. LTD. **London 1899**.

16.- **1899** *CALCOLO GRAFICO ED APPLICAZIONI ALLA STATICA GRAFICA*. PROF. **CRISTOFORO ALASIA**. S. LAPI TIPOGRAFO-EDITORE. **Città di Castello. 1899**.

17.- **1903** *GRAPHIC STATICS WHIT APPLICATIONS TO TRUSSES, BEAMS, AND ARCHES* BY **JEROME SONDERICKER, B. S., C. E.**, Associate Professor of Applied Mechanics, Massachusetts Institute of Technology. CHAPMAN & HALL, LIMITED. **London. 1903**.

18.- **1907** *LA STATIQUE GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS* PAR **M. MAURICE LÉVY**. MEMBRE DE L'INSTITUT, INSOECTEUR GÉNÉRAL DES POMTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. TROISIÈME ÉDITION. **I<sup>er</sup> PARTIE. PRINCIPES ET APPLICATIONS DE STATIQUE GRAPHIQUE PURE**. TEXTE ET ATLAS. Gauthier-Villars. **Paris 1907**.

19.- **1913** *LA STATIQUE GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS* PAR **M. MAURICE LÉVY**. **II<sup>me</sup> PARTIE. FLEXION PLANE. LIGNES D'INFLUENCE. POUTRES DROITES**. TEXTE ET ATLAS. Gauthier-Villars. **Paris 1913**.

20.- **1918** *LA STATIQUE GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS* PAR **M. MAURICE LÉVY**. **III<sup>me</sup> PARTIE. ARCS, PONTS SUSPENDUS. CORPS DE RÉVOLUTION**. TEXTE ET ATLAS. Gauthier-Villars. **Paris 1918**.

21.- **1926** *ESTÁTICA GRÁFICA POR EL PROFESOR ING. OTTO HENKEL*. Profesor de la Escuela Técnica de Magdeburgo. Con 207 figuras. TRADUCIDO DIRECTAMENTE DEL ALEMÁN POR **J. ÁLVAREZ UDE**. Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid. EDITORIAL LABOR, S. A. **Barcelona 1926**.

22.- **1929** *EMPLEO DEL HIERRO EN LA CONSTRUCCIÓN POR EL PROF. DR. ING. C. KERSTEN*. Traducción de la última edición alemana POR EL PROF. DR. ARQ. B. BASSEGODA MUSTÉ. PUBLICACIONES DE ARQUITECTURA EDITORIAL CASONA. **Barcelona 1929**.

23.- **1930** *COURS DE STATIQUE GRAPHIQUE*. PROFESSEUR **M. GEORGES BAYLE**. Ingenieur des Arts et Manufactures. Ingenieur des Arts et Métiers. Professeur à l'École de Phisique et Chimie de la Ville de Paris. **CUATRIÈME ÉDITION. ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS. Paris 1930**.

- 24.- **1930 CORSO DI STATICA GRAFICA. ANSELMO CIAPPI.** Ordinario di Scienza delle Costruzioni nella R. Scuola di Ingegneria di Roma. **PARTE PRIMA. CALCOLO GRAFICO E NOMOGRAFIA.** Con 144 figure ed 1 tavola fuori testo. PAOLO CREMONESE EDITORE. **Roma 1930.**
- 25.- **1930 CORSO DI STATICA GRAFICA. ANSELMO CIAPPI.** Ordinario di Scienza delle Costruzioni nella R. Scuola di Ingegneria di Roma. **PARTE SECONDA. STATICA GRAFICA E STATICA APLICATA.** Con 198 figure. PAOLO CREMONESE EDITORE. **Roma 1930.**
- 26.- **1930 CORSO DI STATICA GRAFICA. ANSELMO CIAPPI.** Ordinario di Scienza delle Costruzioni nella R. Scuola di Ingegneria di Roma. **PARTE TERZA. TEORIA DEI MOMENTI D'INERZIA.** Con 55 figure. PAOLO CREMONESE EDITORE. **Roma 1930.**
- 27.- **1931 COMPENDIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y GRAFOSTÁTICA** POR D. **GERVASIO DE ARTIÑANO Y DE GALDÁCANO.** Catedrático de la Escuela Central de Ingenieros Industriales. Librería general de Victoriano Suárez. **Madrid 1931.**
- 28.- **1937 MECÁNICA. RESISTENCIA DE MATERIALES. GRAFOSTÁTICA. KARL KNEIP. GUSTAV WINZER. PAUL KILLMAN.** Traducción de la tercera edición alemana bajo la dirección de JOSÉ SERRAT Y BONASTRE. Ingeniero Jefe de la Maquinista Terrestre y Marítima. Ed. Labor, S.A. **Barcelona 1937.**
- 29.- **1946 ELEMENTOS DE ESTÁTICA GRÁFICA POR SIMÓN GOLDENHORN.** INGENIERO CIVIL. Jefe de los Trabajos Prácticos de Cálculo de las Construcciones en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (R.). Profesor titular de la Escuela Industrial de la Nación "Otto Krause". Talleres Gráficos Argentinos L. J. Rosso. **Buenos Aires 1946.**
- 30.- **1951 ELEMENTOS DE GRAFOSTÁTICA, INTEGRACIÓN GRÁFICA Y SUS APLICACIONES A LA CONSTRUCCIÓN.** POR I. RUBIO SANJUAN. Profesor numerario de Mecánica general y Mecánica aplicada en la Escuela Industrial de Valladolid. Con 279 figuras en el texto. Ed. Labor, S. A. **Barcelona 1951.**
- 31.- **1955 LECCIONES DE ESTÁTICA GRÁFICA. ING. HUMBERTO MEOLI.** EX PROFESOR TITULAR DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES. SEXTA EDICIÓN (CORREGIDA DE LA PRIMERA EDICIÓN DE 1936). LIBRERÍA Y EDITORIAL NIGAR S.R.L. **Buenos Aires 1955.**
- 32.- **1979 APPUNTI DI STATICA GRAFICA. CARMINE ATTAIANESE.** Edizione 1970 con appendice. Liguori Editore. **Napoli 1979.**

- 33.- **1984 ESTÁTICA GRÁFICA.** Curso elemental. **ENRIQUE PANSIERI.** ING. CIVIL. 7ª EDICIÓN. Editorial CONSTRUCCIONES SUDAMERICANAS. **Buenos Aires. 1984.**
- 34.- **1957 GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO.** Con nociones de **GEOMETRÍA PROYECTIVA.** Novena edición. Ed. Boch. **Barcelona 1957.**
- 35.- **1971 TEORÍA Y PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROYECTIVA.** **FRANK AYRES JR.** Ph. D. Traducción y Adaptación de Amaury Llamas Jimeno y Campo Elías Vezola Cantor, Profesor de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia y Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá. Libros McGRAW HILL. **Colombia. 1971.**
- 36.- **2001 GEOMETRÍA PROYECTIVA. CÓNICAS Y CUÁDRICAS.** **ÁNGEL MONTES-DEOCA DELGADO.** Dirección General de Universidades e Investigación. Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Gobierno de Canarias. **Tenerife 2001.**
- 37.- **2009 NOCIONES DE GEOMETRÍA PROYECTIVA.** **ENRIQUE OUTERELO DOMÍNGUEZ. JOSÉ MARÍA SÁNCHEZ ABRIL.** Ed. Sanz y torres, S. L. **Madrid 2009.**

Queremos poner de manifiesto, finalmente, que de los textos enumerados, que han constituido la base fundamental de nuestra investigación documental, no agotan los documentos de los que nos hemos servido en nuestro trabajo. Antes por el contrario, han sido de ayuda fundamental toda una serie de textos, tanto libros como artículos y comunicaciones a distintos congresos <sup>14</sup>, que de una u otra manera se refieren a la Estática Gráfica o la utilizan como instrumento para la comprobación del equilibrio de algún diseño o elemento estructural, como en el caso de los estudios de arcos y bóvedas, puentes, muros de contención y otros tipos de estructuras arquitectónicas y de los que hacemos referencia mediante citas bibliográficas y son relacionados en el capítulo final Bibliografía.

Las revistas de Matemáticas, tanto españolas <sup>15</sup> como francesas <sup>16</sup>, así como la Revista del Colegio de Ingenieros de Caminos han supuesto una valiosa apoyatura para el encuadre histórico, tanto de la Geometría de Posición como de la Estática Gráfica.

<sup>14</sup> Las Actas de los Congresos Nacionales de Historia de la Construcción, organizados por la Sociedad Española de Historia de la Construcción. Instituto Juan de Herrera, han constituido una fuente de inestimable valor para nuestro trabajo investigador.

<sup>15</sup> Las Revistas de Sociedades Matemáticas Españolas, (*BEIO, SUMA, UNO, BOLETÍN DE LA SEMA, MATEMATICALIA, NÚMEROS, EPSILON, UNIÓN o LA GACETA*) financiadas por la Real Sociedad Matemática Española y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, nos han sido de gran ayuda para los temas relacionados con la Geometría de Posición.

<sup>16</sup> La *Revue d'Histoire des mathématiques* es una revista francesa editada por la Société Mathématique de France que edita dos fascículos cada año y está dirigida a todos aquellos que se interesan por una reflexión sobre las matemáticas y su desarrollo.

Señalamos también que ninguna de las obras que hemos estudiado en nuestro Corpus documental correspondientes a los orígenes de las ciencias estudiadas, ha sido traducida al castellano, salvo la Geometría Descriptiva de Gaspar Monge que lo fue en 1803 y con cuya edición facsímil contamos, conseguida a través del Servicio de publicaciones del Colegio de Ingenieros de C.C.P.

Curiosamente, los primeros tratados escritos y editados en España, específicamente dedicado a la Estática Gráfica, que hemos encontrado en nuestra búsqueda en librerías bibliotecas nacionales, universitarias y de otro tenor, son los de: Carlos María de Moy, cuya edición de 1888 está prologada por Antonio Favaro, Rubio Sanjuan de 1931, *Grafostática y sus aplicaciones a la Construcción* y de Artiñano y de Galdácano del mismo año 1931, *Compendio de Resistencia de Materiales y Grafostática*.

Nos cuesta creer que no se escribiera en España ningún tratado más a finales del XIX y principios del XX, siendo que la aplicación de la Grafostática se había generalizado en nuestro país, como en todo el mundo, desde el último cuarto del S. XIX, aunque es posible que la existencia de libros editados en Sudamérica, en castellano, de autores de origen hispano o traducciones de otros tratados, franceses, suizos, alemanes o italianos, obviara la necesidad referida, sin embargo, en nuestra investigación bibliográfica tampoco hemos encontrado traducciones al castellano de ninguna de las obras originales de Poncelet, Varignon, Favaro, Cremona o Culmann.

Nuestro interés por el tema de esta Tesis, nos lleva a seguir investigando en esta búsqueda bibliográfica, al margen de considerar suficientemente representados los tratados de Estática Gráfica en la cadencia temporal que hemos expuesto.

### 3. ESTADO DEL ARTE

#### 3.1. LA GEOMETRÍA Y EL DIBUJO

Desde los orígenes de las construcciones hasta nuestros días, los arquitectos hemos utilizado un lenguaje común: La Geometría y el Dibujo. Desde Gudea en el XXI a.C. a Eiffel y Gaudí en XIX, Maillart y Torroja en el XX o Calatrava en el XXI, arquitectos e ingenieros hemos dibujado y nos hemos ayudado de construcciones geométricas para representar nuestras ideas.

Se conserva en el Museo del Louvre uno de los más antiguos testimonios gráficos, (unos 3.000 años a.d.C.) de la importancia del Dibujo. Una escultura dedicada a Gudea, Príncipe de Lagash, que muestra un Plano de un templo fortificado. (Fig. 3.1.)

Otros soberanos de la misma ciudad se habían hecho representar bajo distintas representaciones, como soberano, constructor (portando un capazo de materiales sobre su cabeza, como Ur-Nanshe ), Gudea se muestra también como arquitecto <sup>1</sup> mostrando un plano de un templo, que, como en la misma estatuilla se cuenta, los dioses, en sueños, le habían descrito la idea del edificio y cómo construirlo. (Perez, 2007: 135) <sup>2</sup>



Fig. 3.1. Gudea (2.150 a. c.), Príncipe de Lagash, mostrando el plano de una fortaleza. El atributo más valioso que el rey porta es el dibujo de su ciudad amurallada.

Relieve de Ur-Nanshe (2494-2465) en que se muestra a este otro rey de Lagash, cuatro siglos antes que Gudea, participando activamente en las tareas de construcción. Museo del Louvre.

<sup>1</sup> Sobresale este rey en su capacidad de construcción y rehabilitación de templos, pudiendo distinguir entre otros el de Eninnu, en Lagash, dedicado al dios Ningirsu, dios principal del panteón del estado de Lagash, aunque también podemos encontrar el de Eanna, dedicado a la diosa Inanna, el de Ninhursag, Baba, Geshtinanna, Gatumdug y Ningishzida. Su capacidad constructora puede verse reflejada en la escultura “*arquitecto del plano*”, donde Gudea aparece sentado con un plano arquitectónico entre sus piernas, que personifica al príncipe como arquitecto de su templo, el de Eninnu.

<sup>2</sup> Pérez Largadra, Antonio. *Historia antigua de Egipto y Próximo Oriente*. Akal, Madrid. 2007.

Los conocimientos constructivos, y documentos egipcios, (3.000 a. C) atrajeron a los griegos, auténticos padres de la Geometría, hacia Alejandría, en la que coincidieron Euclides, que con sus Elementos ha hecho llegar hasta nuestros días la Geometría que lleva su nombre, Arquímedes de Siracusa, ( S. III a.d.C.) o Apolonio de Pérgamo, cuyas construcciones geométricas relativas a las cónicas siguen siendo hoy objeto de estudio junto con la resolución de gran número de problemas de tangencias entre ellas, o el desarrollo de la Epicicloide, estudiada originalmente para la explicación del movimiento de los cuerpos planetarios. (Lozano, 2007: 30,31) <sup>3</sup>

Estudió Arquímedes con los discípulos de Euclides, cuya influencia sobre los aspectos matemáticos de su obra, que él consideraba los más relevantes, sólo empezaron a adquirir importancia con las traducciones al árabe en los siglos VIII y IX, inspirando gran parte de sus matemáticas, eclosionando finalmente a mediados del XVI con las traducciones directas del griego, por imprentas italianas y suizas, llegando al gran Galileo, Kepler, Newton, Descartes o Fermat.



Fig. 3.2. Un fragmento de Los elementos de Euclides hallado en Oxirrinco, datado hacia el año 100 a. c. el diagrama acompaña la proposición 5 del libro II. Portada de la primera edición castellana de los seis libros primeros de la geometría de Euclides.(D.P.)

Para ilustrar lo lejos que llegó Apolonio en su geometría, comparándola con los *Elementos* de Euclides, podemos considerar los resultados que se sabe estaban contenidos en su libro *Tangencias* o *Contactos*, en el que se describen los diez famosos casos de tangencias, que se enumeran a continuación:

*“Dados tres elementos geométricos planos, que pueden ser, cada uno de ellos, puntos, rectas o circunferencias, dibujar las circunferencias tangentes a los tres”.*

<sup>3</sup> Lozano Leyva, Manuel. *De Arquímedes a Einstein. Los diez experimentos más bellos de la Física*. De Bolsillo: Barcelona. 2007.



1. *Tres puntos*
2. *Tres rectas*
3. *Dos puntos y una recta*
4. *Dos rectas y un punto*
5. *Dos puntos y una circunferencia*
6. *Dos circunferencias y un punto*
7. *Dos rectas y una circunferencia*
8. *Dos circunferencias y una recta*
9. *Un punto, una recta y una circunferencia*
10. *Tres circunferencias*

Los dos primeros casos, los más sencillos, aparecen en el Libro IV de los *Elementos* de Euclides.<sup>4</sup> Los casos 3, 4, 5, 6, 8 y 9 están en el Libro I de la obra *Tangencias o (Contactos)* de Apolonio, mientras el 7 y el 10 ocupan el Libro II de esta obra.

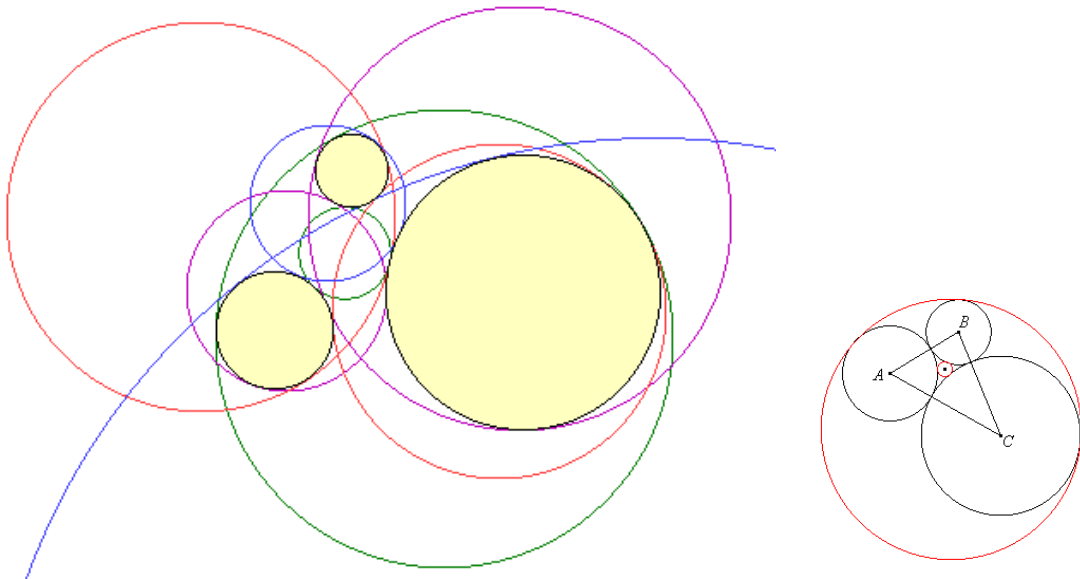
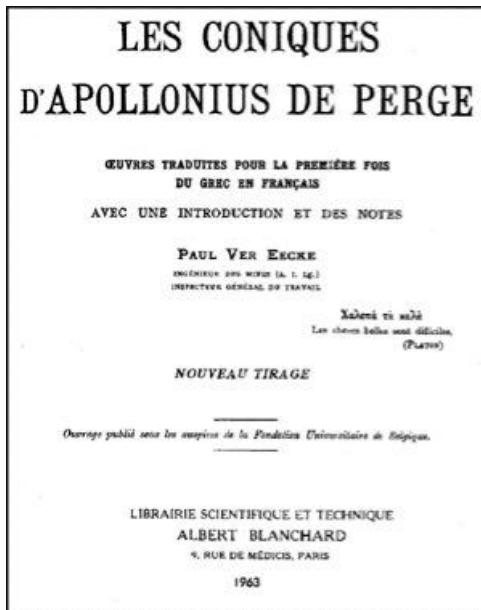


Fig. 3.3. Circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Caso general. (De los problemas de Apolonio). Caso en que las tres circunferencias dadas son tangentes entre sí. Las dos circunferencias de Soddy.<sup>5</sup>

<sup>4</sup> Euclidus Opera Omnia, I.L. Heiberg & H. Menge (editors).(1883-85) Nueva edición en griego e ingles, en <http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html>.

<sup>5</sup> El Premio Nobel de Química Frederick Soddy (1877-1956) encontró la relación entre los radios de las tres circunferencias dadas y los de las circunferencias solución:  $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2$  en la que  $\lambda_i = 1/R_i$  es decir las inversas de los radios de las circunferencias dadas y  $\lambda_4$  la inversa del radio de la circunferencia solución. Publicado por Soddy en junio de 1936 en *Nature* N° 137: 1021, con una especie de poema titulado "The Kiss Precise" reconsiderando el Teorema de los círculos de Descartes, enunciado por éste en 1643.

En el libro III de los *Elementos*, Euclides muestra cómo dibujar un círculo mediante tres puntos dados. En *Tangentes*, como acabamos de ver, Apolonio muestra cómo construir la circunferencia tangencial a tres líneas dadas. De forma más general muestra cómo construir la circunferencia tangente a tres objetos cualesquiera, sean puntos, rectas o circunferencias.



Esta magnífica versión de Paul Ver Eecke de la obra principal de Apolonio, publicada por *La Librairie scientifique et technique Albert Blanchard* de París es la primera traducción del griego al francés

La traducción al idioma francés de Ver Eecke de los siete Libros conservados de las *Cónicas de Apolonio* es literal, completa y fiel. Según el propio Ver Eecke.

«La traducción literal de las *Cónicas de Apolonio* que presentamos por primera vez en francés [Octubre de 1921] está basada sobre el texto griego de la edición crítica del gran helenista danés J.L. Heiberg (*Apollonii Pergaei quae exstant, cum commentariis antiquis edidit et latine interpretatus est*) J.L. Heiberg, Lipsiae, 1891-93, 3 vol. ....)en lo que concierne a los cuatro primeros libros, y sobre la versión latina de Halley, realizada sobre el árabe, en lo que concierne a los tres libros siguientes cuyo texto griego se ha perdido».

Fig. 3.4. Portada de las edición de Paul Ver Eecke de *Les Coniques d'Apollonius de Perge*. A. Blanchard. París, 1963.

Quizás más trascendente, desde el punto de vista del interés de esta Tesis por la Geometría Proyectiva, como origen de la Estática Gráfica, sea la obra de Apolonio dedicada a las cónicas. Apolonio representa la grandeza técnica especializada, el virtuosismo geométrico por excelencia. Es verdad que su obra hizo olvidar lo que antes de él se había escrito en el campo de su mayor brillantez, las cónicas, pero por su carácter tan especializado y tan difícil, ni siquiera esta obra maestra, *Las Cónicas*, se conoce hoy en su integridad y más de la mitad de ella permaneció oculta para el mundo occidental hasta que fue publicada por Edmond Halley en 1710. (Fried, 2011: 7-13).<sup>6</sup>

El desarrollo de la teoría de las cónicas debió ser muy rápido pues ya hacia fines del siglo IV a. de C. existieron dos obras importantes. La primera es de Aristeo, el *Libro de los lugares sólidos* (lugares planos eran los que daban lugar a rectas y círculos; lugares sólidos, aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos; lugares lineales eran otras curvas de orden superior no reducibles a las anteriores, como la cuadratriz o la concoide).

<sup>6</sup> Fried, Michael & Ungurus, Sabetai. *Apollonius of Perga's Conica. Text, context, subtext*. Brill: Leien, Boston, Köln. 2001

La segunda obra de interés, también perdida y ya comentada, fue de Euclides, en cuatro libros, cuyo contenido quizás fuese, (no hay certeza científica) en sus líneas fundamentales, el que se encuentra en los cuatro primeros libros de *Las Cónicas* de Apolonio, si bien menos general y menos sistemático. De modo que, al final del siglo IV a. de C., ya eran bien conocidas propiedades tales como la de las asíntotas de la hipérbola o de la ordenada de una elipse. (Fig. 3.5). Asimismo Menecmo pudo conocer las secciones de un cono rectángulo, llegando desde el concepto geométrico a lo que hoy expresamos como ecuación de la Parábola  $y^2 = 2px$ .

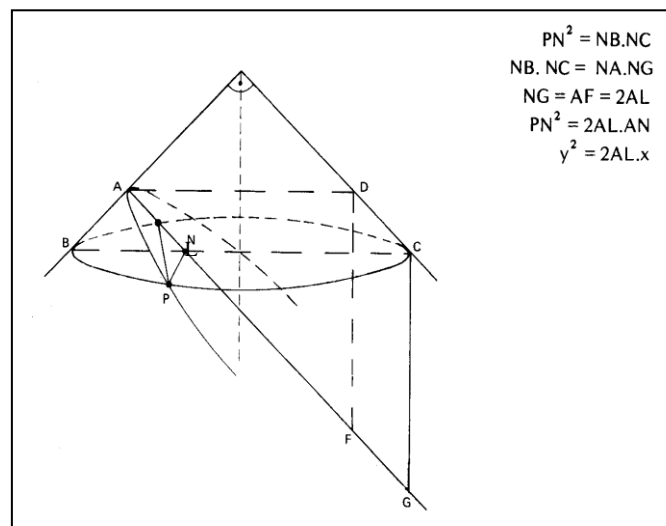
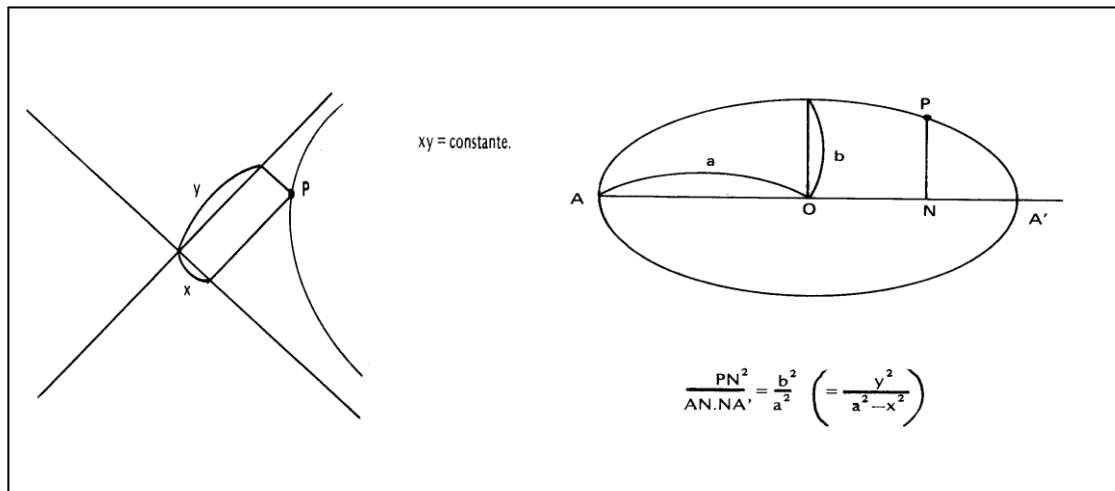


Fig. 3.5. Propiedad del Producto constante de las distancias de las asíntotas a la Hipérbola y Propiedad del cuadrado de la ordenada de un punto cualquiera de la Elipse. Parábola como sección de un cono rectángulo por un plano paralelo a una generatriz. (Tapia, 2002: 22) <sup>7</sup>

<sup>7</sup> Tapia Moreno, Fco. Javier. *Apolonio, el geómetra de la antigüedad*. Apuntes de Historia de las Matemáticas. Vol. 1, Nº 1. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora: México. 2002.

Apolonio fue también un importante fundador de la astronomía matemática griega, que utilizaba modelos geométricos para explicar la teoría planetaria. Ptolomeo en su libro *Sintaxis* introdujo sistemas de movimiento excéntrico y epicíclico para explicar los movimientos aparentes de los planetas a través del cielo. Y esto no es del todo cierto ya que la teoría de epiciclos parte de las ideas de Apolonio.

El estudio y análisis de las curvas cíclicas, que como hemos comentado, ocupó a los geómetras griegos, como Apolonio, por su intención de explicar el enigmático movimiento de los planetas, no comienza hasta 1634, en que el matemático francés Gilles Personne de Roberval mostró que el área de la región de un bucle de cicloide era tres veces el área correspondiente a la circunferencia que la genera. En 1658, el famoso Arquitecto y matemático británico, autor entre otras de la Catedral de San Pablo de Londres, Christopher Wren demostró que la longitud de la cicloide es igual a cuatro veces el diámetro de la circunferencia generatriz.

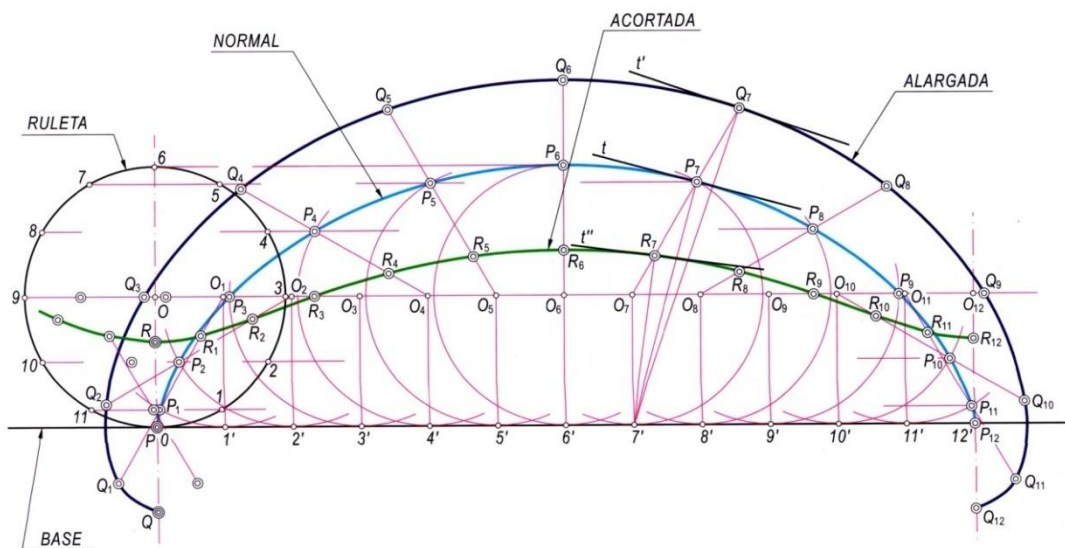


Fig. 3.6. Dibujo de una Cicloide. (Rodríguez, 2001: 68) <sup>8</sup>

Desde Platón la historia de la Ciencia será la búsqueda de un modelo geométrico; de esas leyes que controlan el funcionamiento del Cosmos; la búsqueda de ese orden inmutable capaz de explicar todos los fenómenos naturales. La comprensión y el dominio de la Naturaleza al alcance del ser humano. Aristóteles situará la Tierra en el centro del Universo y el frente de batalla entre el orden y el caos en la esfera celeste, perfecta, inmutable y perpetua, el reino del orden. (Crombie, 2006: 84-87) <sup>9</sup>

<sup>8</sup> Rodríguez de Abajo, Fco. Javier, / Álvarez Bengoa, Víctor / Gonzalo Gonzalo Joaquín. *Dibujo Técnico*. Ed. Donostiarra: San Sebastián. 2011.

<sup>9</sup> Crombie, Alistair Cameron. *Historia de la Ciencia: de San Agustín a Galileo*. Vol. I y II. Alianza Editorial: Madrid. 2006

Por debajo el mundo terrestre, constituido por los cuatro elementos Tierra, Agua, Aire y Fuego intercambiándose entre sí; un mundo imperfecto, cambiante e impredecible. El reino del caos.

Pero algo viene a romper esa armonía perfecta del mundo ideal por encima de la Luna. Los planetas conocidos describen órbitas erráticas sobre el fondo de estrellas fijas. De hecho el término planeta significa "errático" o viajero. A veces, incluso parecen retroceder en sus órbitas.

¿Cómo encajar estos hechos con un modelo geométrico ideal? Aristóteles recurre a un modelo físico basado en esferas de éter en las que se mueven los planetas. Estas esferas se van acelerando y frenando unas con otras. El complejo mecanismo necesitaría de 56 esferas distintas para poder explicar los movimientos aparentes de los planetas. (Crombie, 2006, I: 78)

Por desgracia para la Ciencia este modelo, basado en la esfera y el círculo, permanecerá intocable durante dos mil años. Los matemáticos y astrónomos tendrán que crear auténticas filigranas matemáticas para hacer encajar las observaciones del movimiento de los astros con el modelo aristotélico. Y al frente de esta tarea monumental se coloca Claudio Ptolomeo en el siglo II d. de C. Su obra "*Síntesis Matemática*" pasará a la historia con el nombre de la traducción árabe: "*El Almagesto*", que significa "el muy grande". (Mínguez, 1999: 17-35).<sup>10</sup>

Para explicar el movimiento de los planetas respetando la idea de que sólo se pueden mover en órbitas circulares Ptolomeo va a inventar un ingenioso modelo geométrico: los epiciclos y los deferentes.

A cada planeta, incluidos el Sol y la Luna, les asigna un círculo imaginario llamado deferente. La Tierra está en interior de este círculo, aunque no necesariamente en el centro. El planeta girará en un nuevo círculo llamado epiciclo cuyo centro será un punto del círculo deferente. A moverse el centro del epiciclo a lo largo de la deferente, al planeta se acerca o se aleja de la Tierra lo que explicaba a la perfección los cambios de brillo de un mismo planeta observados en distintos momentos del año. Ptolomeo pensaba que en realidad los planetas no se movían así, pero su modelo geométrico explicaba a la perfección lo que cualquier astrónomo veía en el cielo.

---

<sup>10</sup> Mínguez, Carlos. *El Prefacio al Almagesto de Ptolomeo*. La filosofía de los científicos. Universidad de Valencia: Valencia. 1999

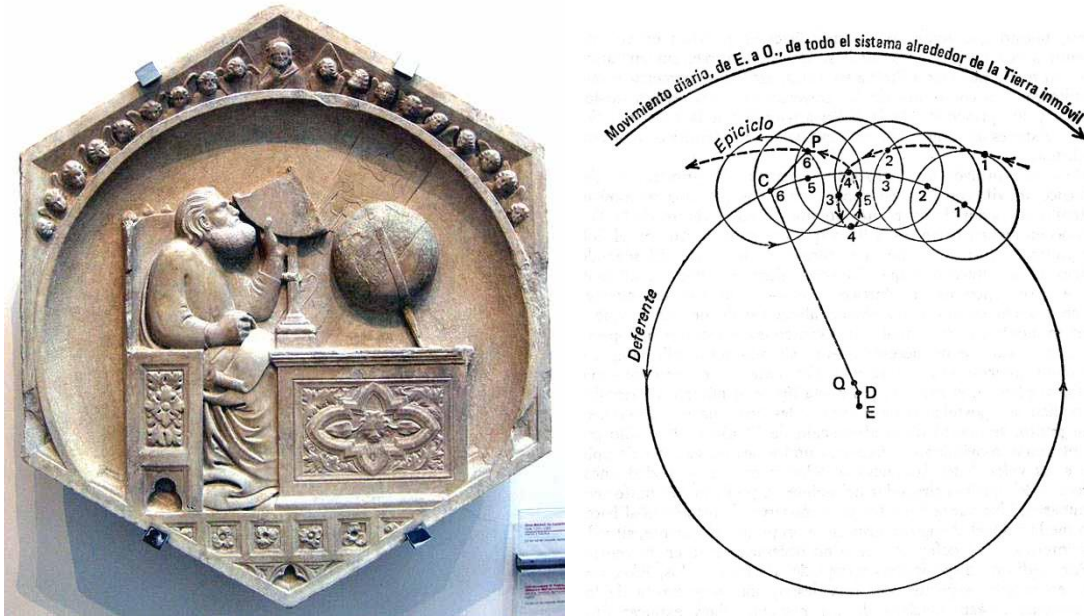


Fig. 3.7. Bajorrelieve de Andrea Pisano, representando a Ptolomeo como astrónomo. Museo dell'Opera del Duomo. Modelo geométrico del movimiento de los planetas descrito por Ptolomeo en el Almagesto. (Crombie, 2006, I: 84)

Aunque hoy nos parezca ingenuo el modelo geométrico de Ptolomeo, desde un punto de vista exclusivamente matemático, resulta de una riqueza increíble. La idea de hacer rodar círculos sobre círculos, nos abre las puertas a un sugerente mundo de curvas mecánicas generadas mediante el movimiento uniforme y que nos introduce en un paraíso de curvas. Astroides, cardiodes... y hasta elipses. Sí, aunque parezca increíble los epiciclos y deferentes de Ptolomeo pueden generar órbitas elípticas.

Lo que nos interesa, en cualquier caso, desde el punto de vista científico y por lo que hemos hecho mención a las curvas cíclicas, es el Dibujo. La Geometría de los griegos, de Euclides, Apolonio o el modelo astral de Ptolomeo, sólo son conjeturas filosóficas sin su representación gráfica. Sin sus dibujos.

Por eso es extraordinario que el Príncipe Gudea se haga representar hace 4.000 años mediante una escultura que contiene un plano. La representación gráfica de su fortaleza. El dibujo de la realidad pensada y construida. Y por eso es especialmente interesante que detengamos nuestra investigación sobre la Grafostática en los dibujos de los arquitectos. A fin de cuentas se trata de uno de los elementos en que se basa.

Los arquitectos hemos tenido siempre varias formas de comunicar nuestras ideas arquitectónicas: El lenguaje natural, el gráfico y el lenguaje arquitectónico, que se refieren a los escritos, los dibujos y las obras.

Hay arquitectos que han sido muy escuetos en sus manifestaciones escritas, como el caso de Alvar Aalto de quien se ha dicho que resultaba especialmente interesante precisamente por manifestarse casi exclusivamente mediante su obra. Mientras otros, sin tener prácticamente obra construida, han escrito mucho sobre Arquitectura sin materializarla, como Étienne Louis Boullée (Perouse, 1968: 9-17).<sup>11</sup>

Un magnífico ejemplo de arquitecto que se ha manifestado tanto de forma teórica como gráfica y con obra construida es Andrea Palladio<sup>12</sup>.

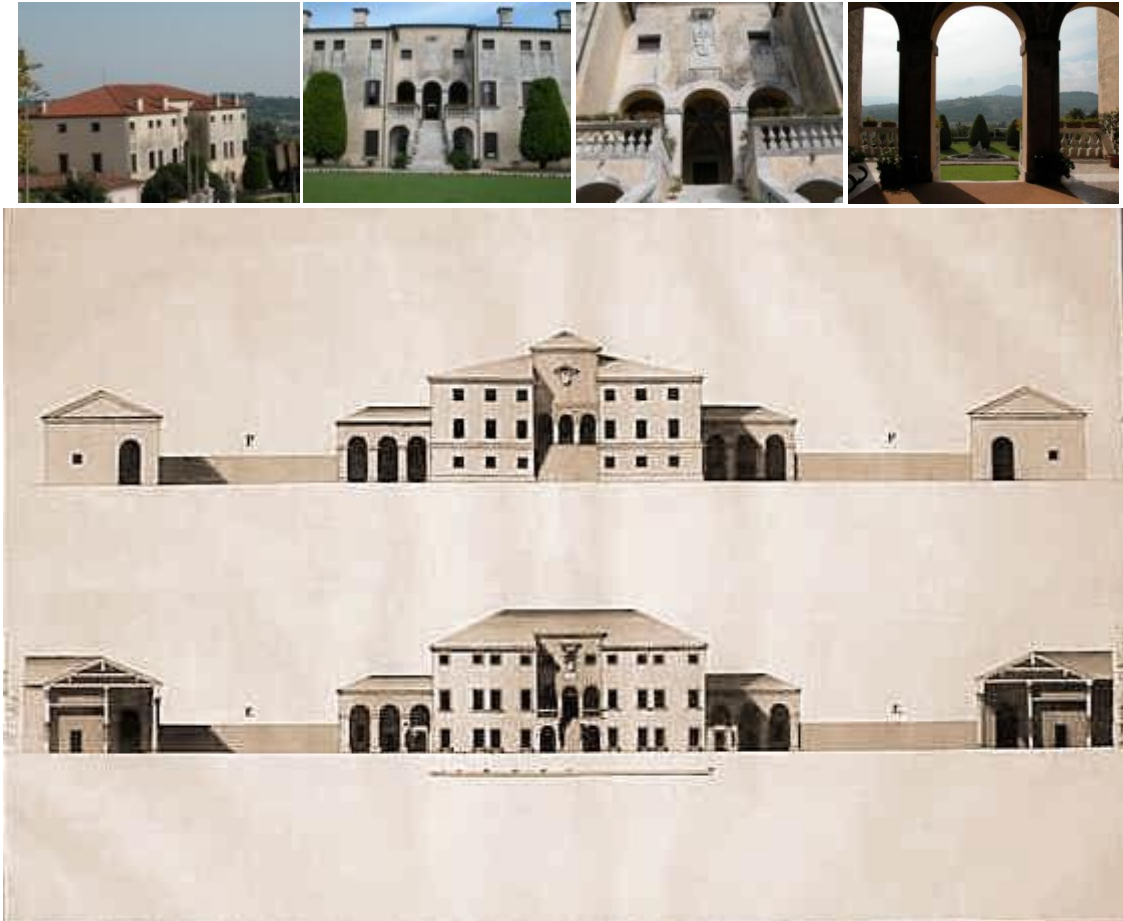


Fig 3.8. Villa Godi, de Andrea Palladio, en Lugo di Vicenza (Veneto). Fotografías y alzados. Universidad de Navarra. Historia de la Arquitectura. <http://www.unav.es/ha/006-VILL/pall-godi.htm>

<sup>11</sup> Pérouse de Montclos, Jean-Marie. *Presentation de Architecture: Essai sur L'art, de Étienne-Louis Boullée*. Col. Savoir sur l'art. Hermann: Paris. 1968.

<sup>12</sup> Ver Andrea Palladio, *I quattro libri dell'architettura*, Domenico de Franceschi: Venecia. 1570. Versión en castellano *Los cuatro libros de arquitectura*, traducción del Presbítero Don Joseph Francisco Ortiz y Sanz. Imprenta Real: Madrid. 1797.





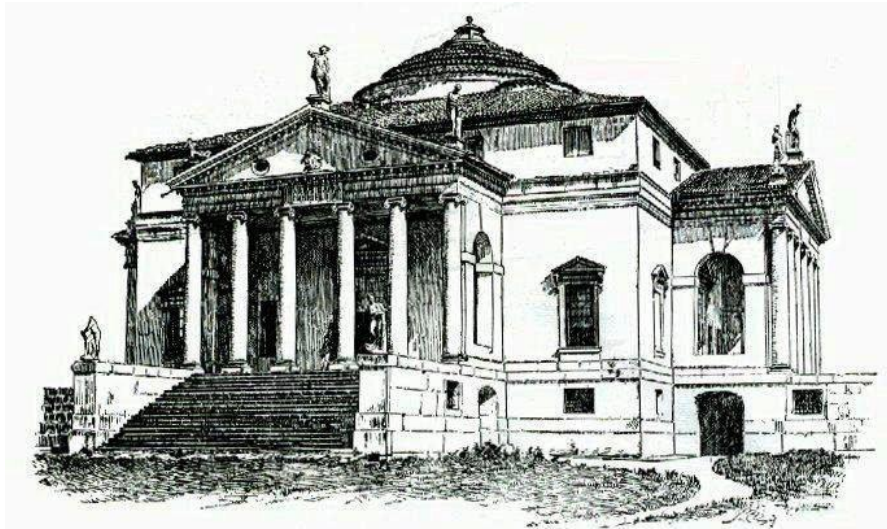
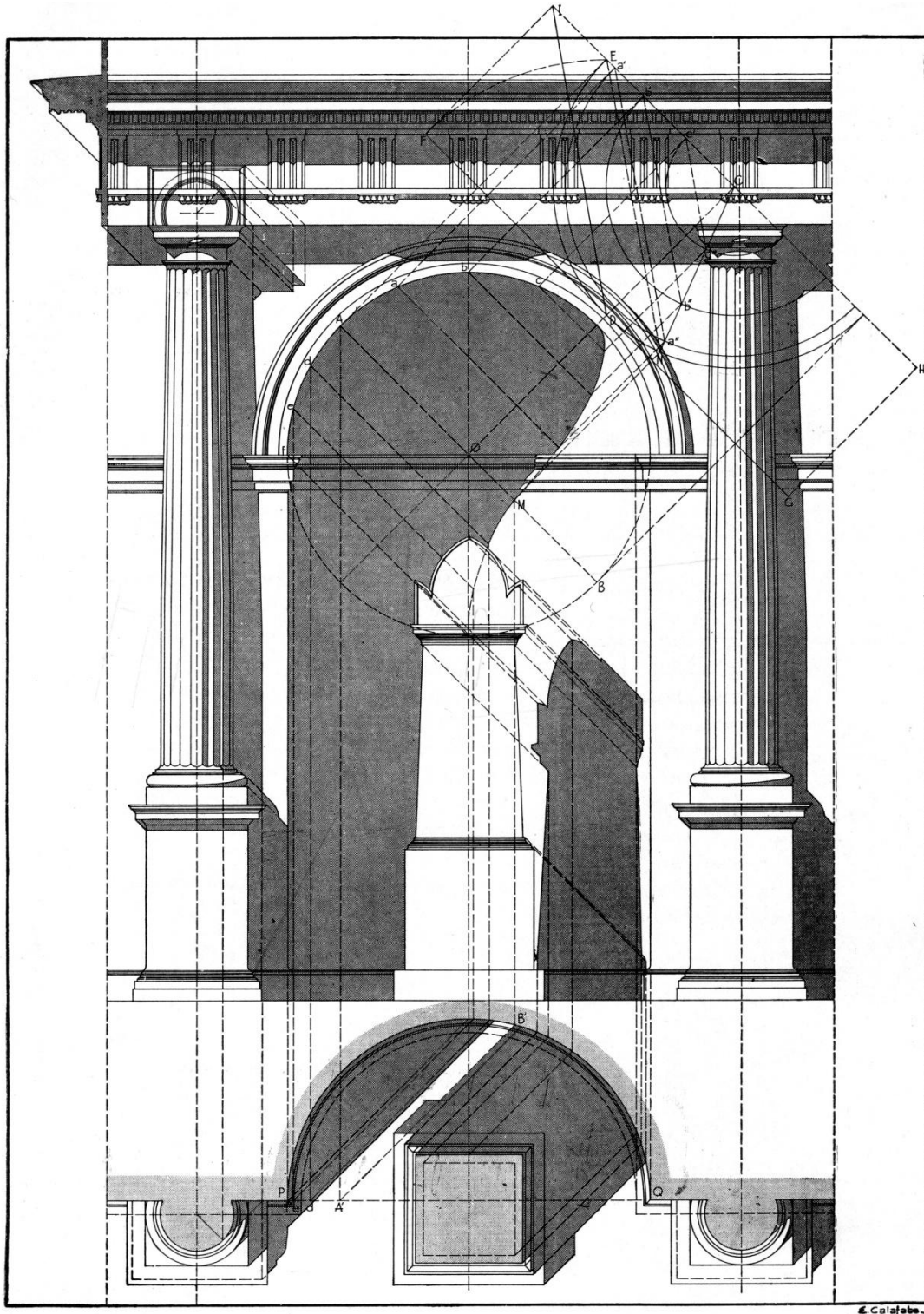


Fig. 3.10. Perspectiva de la Villa Rotonda. Russell Sturgis. *The Architecture Sourcebook*. Van Nostrand Reinhold. New York: 1984. (p.386). Fotografías de la villa antes y después de su última restauración. Estefan Bauer.

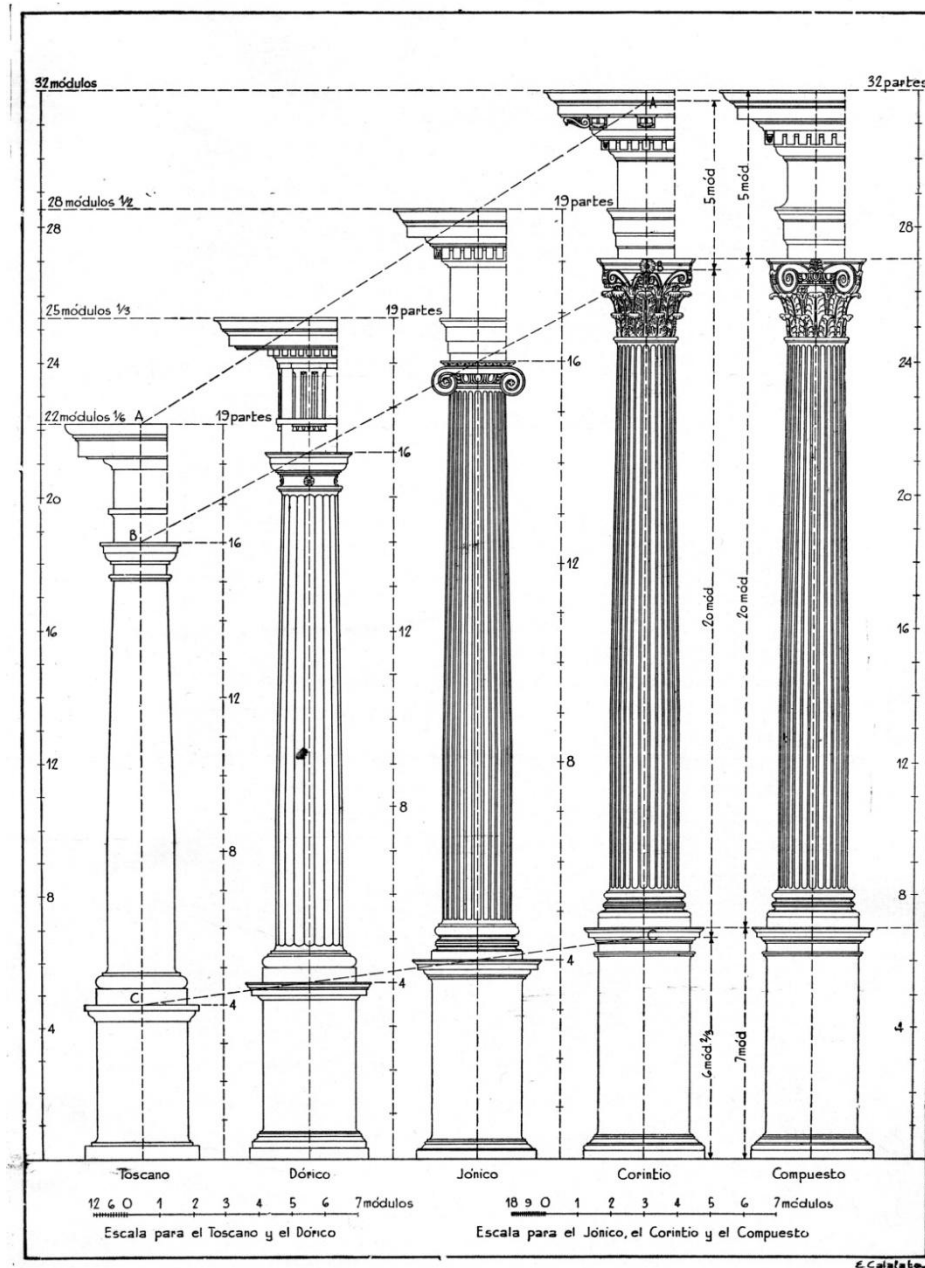
El uso del dibujo de Arquitectura como un medio para el análisis es una de sus aplicaciones más características, usando el propio instrumento de producción, documentación y expresión que tiene la Arquitectura como herramienta de investigación.



VIÑOLA — 49

Fig. 3.11. Estudio de las sombras de la arcada dórica con pedestal. Maravilloso análisis geométrico de las sombras proyectadas por un elemento arquitectónico. *Tratado de los cinco órdenes de Arquitectura*. (Viñola, 1961: 49)

Dando por hecho que los medios históricos, económicos o sociológicos son utilizados por los arquitectos en su actividad, no es menos cierto que ninguno de esos usos es comparable con el de los procedimientos gráficos. Todos ocupan un lugar secundario en relación con los análisis propiamente arquitectónicos realizados gráficamente, incluidos los estudios geométricos de proyecciones, sombras (Fig. 3.11), las proporciones, de las escalas (Fig.3.12), las comparaciones entre órdenes arquitectónicos, que podrían denominarse como dibujos de la Teoría de la Arquitectura, han sido especialmente cuidados en los Tratados.



VIÑOLA — 5

Fig. 3.12. Análisis arquitectónico mediante el dibujo de las escalas correspondientes a los distintos órdenes de Arquitectura. (Viñola, 1961: 5) Giacomo Barozzi da Vignola. *Regola dei cinque ordini di architettura*. Roma 1562. Primera versión castellana: *Regla de los cinco órdenes de arquitectura*. Antonio Mancelli. Madrid. 1593. Nuestra edición: Viñola. *Tratado de los cinco órdenes de arquitectura*. Ed. Construcciones sudamericanas. Buenos Aires. 1961.

El ejercicio de análisis arquitectónico mediante el dibujo, del que mostramos como ejemplo los estudios realizados por Vignola y Della Porta sobre la portada de la iglesia del Gesù de Roma, o las pruebas, bocetos, dibujos y como veremos más adelante, los cálculos, siquiera como tanteos previos, forman parte de la formación y la práctica de la Arquitectura.

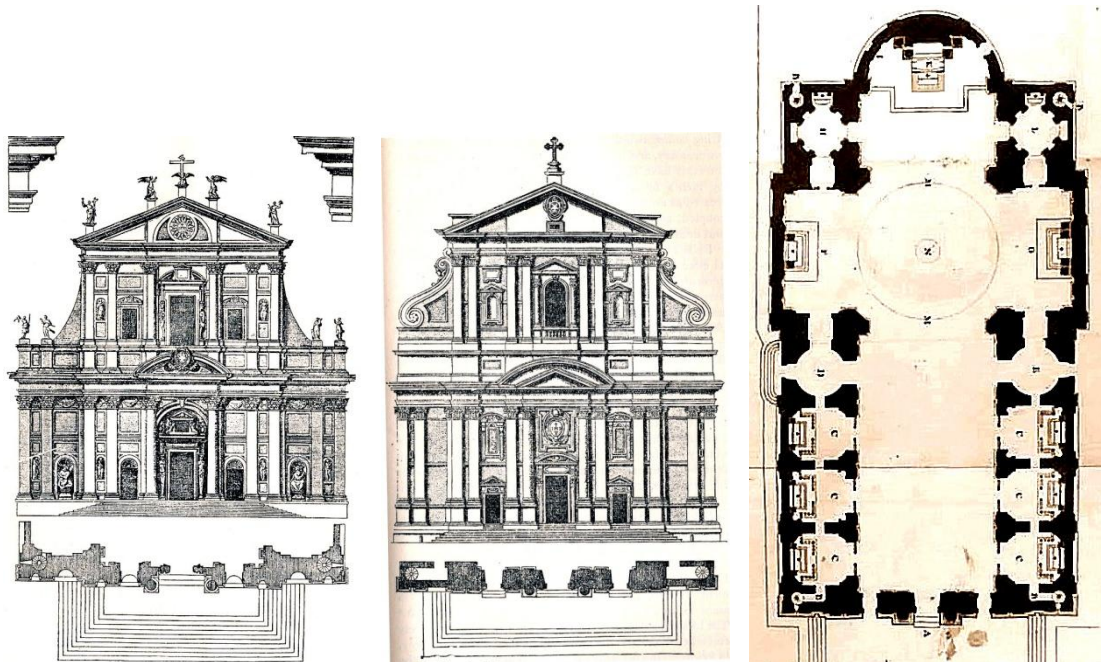


Fig. 3.13. Dibujos de la portada del Gesù de Roma de Vignola y Della Porta. Y de la planta de la misma iglesia.

Los esquemas son los primeros dibujos analíticos. Suelen estar compuestos de gráficos elementales, que ponen de manifiesto algunas cualidades que interesa destacar de la obra que se está diseñando o ya construída que se está estudiando. Los esquemas de Villar de Honnecourt (h. 1250) que se muestran en las Fig. 3.14 y 3.15 son un buen ejemplo de estos dibujos esquemáticos. En la primera se señala especialmente la formalidad del trifolio y los ventanales del abside de la catedral de Reims y el exterior de una de las capillas de la misma catedral.

En estos dibujos de Arquitectura, intenta representar lo que ve, consiguiendo, quizás sin proponerselo el efecto de las perspectivas a ras de suelo, en las que los elementos arquitectónicos aparecen representados desde abajo. Lo representado es los dos pisos superiores, con lo que es posible que sea lo que Villard estaba viendo. En cambio, en la figura de la derecha, al copiar el exterior de una de las capillas de la cabecera de la misma catedral de Reims, al invertir la construcción geométrica de la imagen, parece también una perspectiva desde el suelo, aunque era imposible la visión desde abajo.

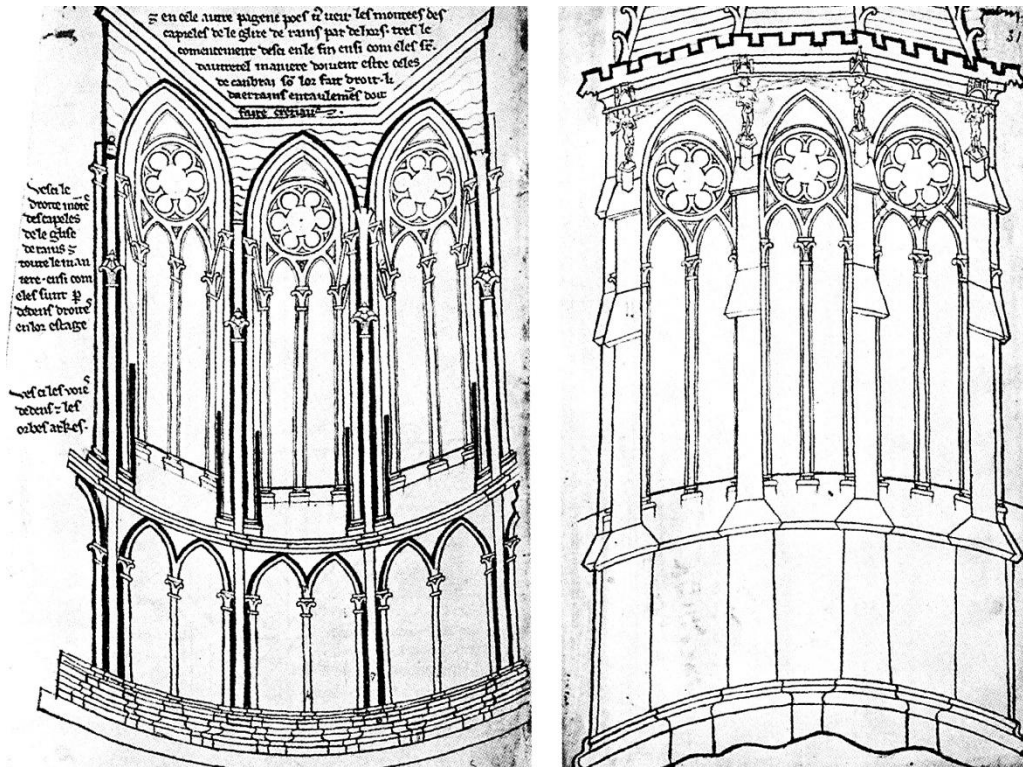


Fig. 3.14. Dibujos de algunas de las 33 láminas del *Livre de portraiture* del maestro de obras francés Villard de Honnecourt (1200-1250) en las que se muestran elementos arquitectónicos de distintas construcciones, recogidos en sus viajes. La imagen de la izquierda muestra el interior del ábside y la de la derecha, el exterior de una capilla de la catedral de Reims. Pluma y tinta sobre pergamino. (Bibliothèque National de París).

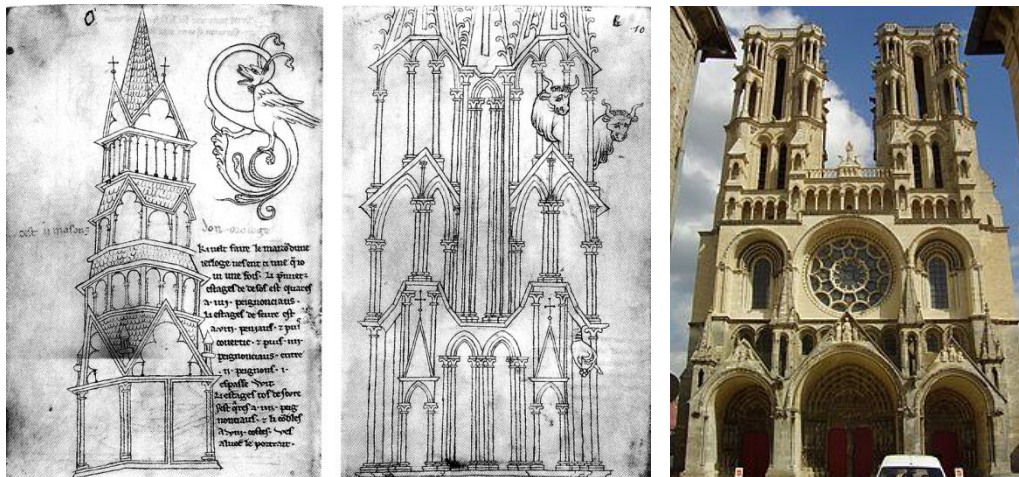


Fig. 3.15. Dibujos de algunas de las 33 láminas del *Livre de portraiture* del maestro de obras francés Villard de Honnecourt (1200-1250) Vistas pseudoperspectivas de una torre de reloj y de los tres niveles superiores de la torre de la catedral de Laon. (Bibliothèque National de París). Fotografía de la fachada principal de la catedral en la que se advierte la desaparición de las agujas de las torres, destruidas en 1793, en los comienzos de la Revolución francesa.

Lejos de considerarse actividades creativas independientes, Dibujo y Arquitectura comparten funciones y atribuciones recíprocas. No en vano, desde antiguo y sobre todo desde el Renacimiento, se recurre al medio gráfico para ilustrar las descripciones

literarias de los tratadistas y arquitectos. La simbiosis Dibujo-Arquitectura constituye, pues, una realidad histórica incuestionable.

Existe una cierta propiedad transitiva en el dibujo de arquitectura.<sup>13</sup> Se podría decir que si una imagen representa a otra imagen y ésta, a su vez, a un objeto arquitectónico, la primera imagen también representa a dicho objeto. (Ver Fig.3.10 sobre la Villa Rotonda). Tengamos en cuenta que la mayor parte de la actividad del arquitecto se realiza utilizando representaciones y sólo una pequeña parte sobre el propio objeto construido real. Jacques Guillaume lo expresa de la siguiente manera:

*“Este carácter transitivo está en la base de cualquier cultura iconográfica: pero, sobre todo, justifica el desarrollo indefinido de variaciones que llamaremos metafóricamente automórficas: el mismo tema iconográfico puede ser continuamente alterado en una serie de realizaciones icónicas donde la disposición de las trazas gráficas mantiene unos niveles de redundancia muy eficaces para el reconocimiento de las formas. Finalmente, esta tendencia de la figuración a re-figurar lo ya figurado, alterándolo dentro de ciertos límites, constituye la condición misma de las virtudes heurísticas de la figuración gráfica”.*<sup>14</sup>

El caso de la cúpula podría ser un buen ejemplo de la depuración tipológica que se va produciendo a lo largo de la historia, modificándose el concepto primitivo, desde el Panteón de Agripa a San Gaudencio de Novara de Antonelli o el Reichstag de Foster se puede observar las variaciones formales sobre la idea de un eje vertical que articula un espacio central, cubierto que lo circunda. (Sainz, 2009: 72)<sup>15</sup>



Fig. 3.16. Vistas de la cúpula del Panteón de Agripa (27 a.d.C), San Gaudencio de Novara de Antonelli, con 120m de altura (1876) y la del Reichstag de Norman Foster (2000).

<sup>13</sup> Como ejemplo de propiedad transitiva, la Aplicación ( ) “ser múltiplo de” es transitiva:  $18()9 \wedge 9()3 \rightarrow 18()3$

<sup>14</sup> Ver *Figuration graphique en architecture*. Ph Boudon, J. Guillaume, R. Tabouret. Atelier de recherche et d'études d'aménagement: Paris 1974.

<sup>15</sup> Sainz Avia, Jorge. *El Dibujo de Arquitectura: Teoría e historia de un lenguaje gráfico*. Reverté: Barcelona 2009.

Desde las academias hasta nuestros días, gran parte de los procesos básicos de las enseñanzas de Arquitectura se basan en la aplicación de esa propiedad transitiva de la representación gráfica. Se trata de estudiar los objetos arquitectónicos a través de sus dibujos haciendo las variaciones sobre esos mismos dibujos, como fundamento de los modelos didácticos centrados a la vez, o de forma alternada, en la dialéctica análisis-síntesis-análisis.

El arquitecto Teodoro de Anasagasti, que fue a principios del S.XX catedrático de Proyectos de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, propone hacia 1923, en una interesante ponencia, modificaciones al plan de estudios de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando. (Navascués, 1995: Introd.).<sup>16</sup> Algunas de sus notas sobre la enseñanza de la Arquitectura, desarrollan toda un reforzamiento del Dibujo como método para aprender la Arquitectura. Propone un deslinde intelectual en el enfoque de las asignaturas, en las que se incluyen sus críticas al dibujo academicista basado en la "copia no razonada". Sugiriendo a cambio, las observadas en otras escuelas de otros países, como la utilización del croquis como sistema para "pensar la arquitectura"; además de procurar definir distintos tipos de dibujo, su importancia y su historia.

Hay que señalar que más de la mitad del texto dedicado al tema de la enseñanza, Anasagasti lo centre en el dibujo; esto y que el autor, en sus propuestas para ajustar o modernizar el plan de estudios lo haga describiendo una "nueva visión del dibujo" como primera prioridad, indica, por una parte, la falta de resultados académicos que los estudiantes de la época demostraban en sus proyectos (ejemplificados con dramatismo por Anasagasti mediante trabajos de sus alumnos en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando) y, por otro lado, la permanencia del papel predominante, o de prestigio, de esta asignatura a principios de siglo en el ámbito de las academias y escuelas de arquitectura, a las que Anasagasti hace referencia.

Mucho más cercano en el tiempo y en el modelo académico, Víctor D'Ors director de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid entre 1969-1972, nos da alguna pista de la importancia que el Dibujo conservaba en la segunda mitad del S.XX en la Escuela. En su libro *arquitectura y humanismo* (D'Ors, 1967)<sup>17</sup>, desarrolla su discurso académico sobre la arquitectura-texturas, enseñanza y otros. Respecto al dibujo en la enseñanza de la arquitectura, D'Ors, en la parte más actual (por el lenguaje) de su texto, dice:

---

<sup>16</sup> Navascués Palacio, Pedro. *Enseñanza de la Arquitectura: cultura moderna técnico artística*. Instituto Juan de Herrera: Madrid 1995.

<sup>17</sup> D'Ors Pérez-Peix, Víctor. *Arquitectura y humanismo*. Labor: Barcelona 1967.

*“Repasando nuestros planes encontramos siempre un conjunto de insistencias internas, que los polarizan. Por un lado enseñanza historicista, vertebrada por la historia de la edificación. Por otro, la exigencia en torno a formar <artistas del orden> y <coordinadores técnicos>. Todo ello exige una sólida base humanística: filosofía y arte; matemática y ciencias físicas y música; y, naturalmente, por otro naturales; ecología y <cultura de vida>; y, también, mucho <vivir> las obras: una formación como la de ningún otro profesional. Hay que cultivar la intuición, la razón, y la sensibilidad y enriquecerse con la experiencia.*

*Pero en el centro de la formación de cualquier artista plástico se encuentra el dibujo. Desde hace algún tiempo se dirigen fuertes y más o menos intencionales lazadas contra este protagonismo o <divismo> del dibujo en la enseñanza de la arquitectura. Nada puede parecerme más dañino.*

*(...)Al proyectarse con plenitud un edificio, el proyectista debe de constituirse a la vez en arquitecto, en escultor y en pintor. Todos ellos tratan de <formalizar>. Entonces ese arquitecto edificador como no puede formalizar directamente, como suele hacer el pintor de cuadros y también el escultor de estatuas, sino que necesita concretar sucesivamente su proyecto edificatorio, como sabemos, en organigramas, croquis y planos con proyecciones, debe pasar fatalmente, más largamente, por el dibujo. Éste -que revela la <forma pura>- se convierte en su normal y casi único medio de expresión. Y si no en un lenguaje abundoso y bien dominado, ¿cómo podrá expresarse debidamente? ¿Qué diríamos de un pensador que no supiese bien hablar o escribir? El dominio profundo del dibujo no hay que confundido con lo que suele llamarse <el lápiz fácil>. Eso suele hacer propender a una superficialidad efectista <postalística>, equivalente a la verborrea charlatanesca.*

*Pero hay más: no es solo que, por el dibujo, muy principalmente, exprese el arquitecto sus ideas. Es que el propio dibujo en sí- cómo ocurre en la literatura con las palabras- es fuente incitante a la ideación; inspiradora, reveladora del profundo trascender de la plástica. Cuanto más géneros de dibujos domine, más amplio podrá ser su campo creador, ¿Cómo no iba a ser el dibujo importante para los arquitectos?...” (D'Ors. 1967: 118-120).*

En la actualidad las escuelas de Arquitectura siguen presentando en sus programas docentes asignaturas dedicadas a la formación de sus alumnos en el Dibujo. La ETSAM dedicaba en concreto, en el Plan de 1996 cinco asignaturas:



Dibujo, Análisis e Ideación I, II y III, Dibujo avanzado e Interpretación gráfica y Dibujo del natural. La Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia, en su Plan 2002, otras cinco entre Dibujo arquitectónico, Análisis de formas arquitectónicas, Análisis gráfico y cromático del Patrimonio Edificado, Levantamiento gráfico del Patrimonio Edificado y Paisaje Urbano dibujo a mano alzada. La ETSAS en el Plan 2011: Geometría y percepción, Procedimientos de Expresión y comunicación, Análisis gráfico.

A ésta última, Escuela de Arquitectura de Sevilla, pertenecen los dibujos que presentamos en la Fig. 3.17, 3.18 y 3.19 seleccionados de entre los realizados por sus alumnos en el último decenio en distintas asignaturas de dibujo, recopilados por profesor Dr. Arquitecto Juan Anguita Tuñón. (Anguita, 2011) <sup>18</sup>

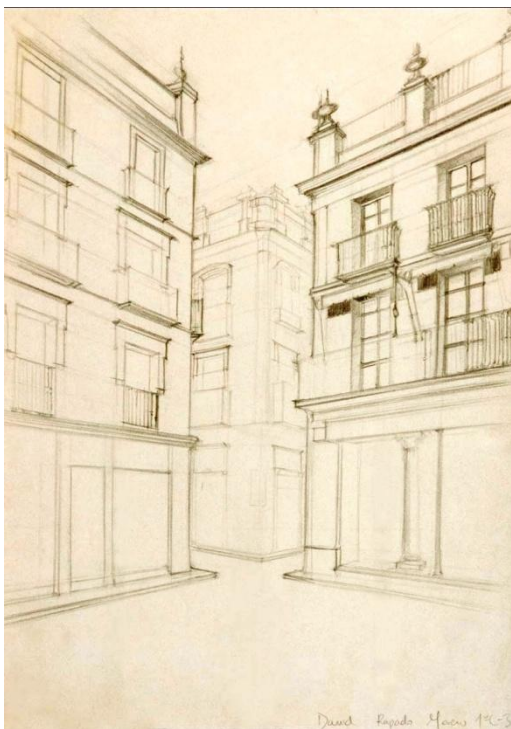


Fig. 3.17. Dibujos realizados por alumnos de la ETSAS en el área de Dibujo Arquitectónico, de distintas arquitecturas de la ciudad de Sevilla, recopilados por el profesor Anguita Tuñón. *“¿Cómo no iba a ser el dibujo importante para los arquitectos?...”* (D'Ors. op. cit)

<sup>18</sup> Anguita Tuñón, Juan. *Asignaturas en la red. 1985-2011. Dibujo Arquitectónico*. Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla. I.S.B.N. 978-84-693-8652-1. 2011.



Fig. 3.18. Dibujos realizados por alumnos de la ETAS en el área de Dibujo Arquitectónico, de distintas arquitecturas de la ciudad de Sevilla, recopilados por el profesor Anguita Tuñón. Antigua Real Fábrica de Tabacos, Teatro Lope de Vega, Parque de María Luisa.

*“¿Cómo no iba a ser el dibujo importante para los arquitectos?...” (D'Ors. op. cit)*



Fig. 3.19. Dibujos realizados por alumnos de la ETSAS en el área de Dibujo Arquitectónico, de distintas arquitecturas de la ciudad de Sevilla, recopilados por el profesor Anguita Tuñón. Antigua Real Fábrica de Tabacos, Universidad, Parque de Maria Luisa, Plaza de España, Iglesia del Salvador.  
*“¿Cómo no iba a ser el dibujo importante para los arquitectos?...”* (D'Ors. op. cit)

La Arquitectura moderna no ha sido ajena a la representación geométrica de las formas, aunque, naturalmente, las vanguardias han ido marcando representaciones diferentes para distintos modos de la concepción espacial de los arquitectos. Puntos y líneas adquieren en las nuevas formas de representación de las arquitecturas contemporáneas nuevos sentidos, quizás, incluso más sentido, expresando mucho más la idea que la forma, en una evolución que termina por señalar, como hace Juan Antonio Cortés, que, *La Geometría ha muerto. ¡ Viva la Geometría !*. (Cortés, 1998: 5-9)<sup>19</sup>



Fig. 3.20. Plantas, perspectiva y fotografía de Notre Dame du Haut en Ronchamp, de Le Corbusier. Nuevas formas arquitectónicas y nuevas geometrías, pero siempre presente el Dibujo.(D.P.)

<sup>19</sup> Cortés, Juan Antonio. *La Geometría ha muerto. ¡ Viva la Geometría !* Circo. 57. El curso de las cosas. Circo M.R.T. Coop.: Madrid 1998.

¿Geometría?, sí, y Dibujo también, pero transformándose con el tiempo las formas de representación. Tres proyectos de Enric Miralles, dos de ellos con Carme Pinós, nos muestran una arquitectura con formas dinámicas, manifestando esa forma organizada desde sus propios parámetros y dotada de una estructura geométrica interna flexible y abierta, que confiere estabilidad formal al edificio y una sorprendente adaptación al terreno circundante.

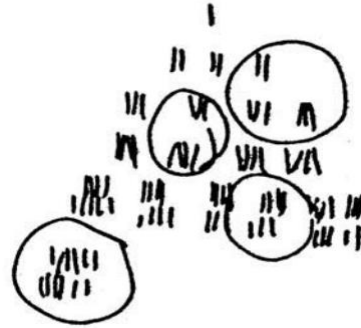
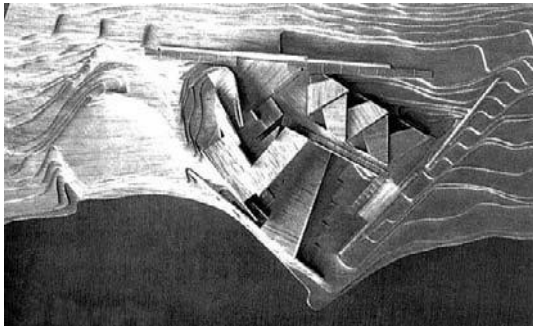


Fig. 3.21. Enric Miralles y Carme Pinós. Maqueta de la Escuela hogar en Morella (Castellón). Y esquema de formación para el Aulario de la Universidad de Valencia de Enric Miralles. (Cortés, op. cit.: 11, 8)

La Escuela Hogar de Morella sorprendió precisamente por esta última característica y el propio Rafael Moneo comentaba sobre la obra de Miralles:

*Obras tales como la Escuela de La Llauna en Badalona, el cementerio de Igualada y la Escuela de Morella (en colaboración con Carme Pinós) muestran ya lo que van a ser sus intereses y cabe hoy decir que encerraban todo un programa. El edificio se disuelve y se rompe en su afán de prescindir de los límites y de fundirse con todo lo circundante, bien sea el marco de lo ya construido, como en La Llauna, o el paisaje en Igualada y en Morella. El mundo arquitectónico de Enric Miralles es vibrante e intenso, agitado y exuberante. Diríase que su afán es activar el espacio evitando así toda sensación de quietud y estatismo. Su arquitectura se apodera del territorio en el que se instala con asombrosa energía. "De la abundancia del corazón habla la boca", dicen los evangelios. Las obras de Enric Miralles hablan elocuentemente de su generosa persona en aquel continuo desparramarse de elementos que no sabe de límites ni de fronteras. Un innato sentido para el manejo de los materiales, por otra parte, contribuye a dotar a sus obras de un bien definido perfil sensorial.*<sup>20</sup>

<sup>20</sup> Extraído de un comentario de Txema Uribe del 02/07/2010 en <http://cultura.elpais.com/del-tirador-a-la-ciudad>, a propósito del artículo de Anatxu Zabalbeascoa, *Diez años sin Enric Miralles*, publicado el 02/07/2010

El Aulario de la Universidad de Valencia se basa en la repetición de puntos. Los estudiantes son puntos, los pupitres se agrupan en otros puntos mayores, las aulas organizan la forma global. La agrupación de los pupitres responde a una trama de filas oblicuas formando romboides, cuyas bandas son giradas alternativamente y separadas por una pared o un pasillo. Las aulas, constan de dos bandas de filas de pupitres y un pasillo y tienen sus frentes alternadamente girados y se agrupan en bandas separadas paredes o corredores. El patrón ordenador se repite a distinta escala, en forma fractal, regenerándose a sí mismo.

Las circulaciones se manifiestan en curvas, que en el anterior proyecto definen una envolvente parcial de la estructura, son fundamentales en el Centro de gimnasia rítmica y deportiva de Alicante.

Los vestíbulos y rampas curvos del edificio, pueden ser como un reflejo correspondiente a las últimas curvas de nivel de la colina posterior (AV, nº 45-46, 1994: 152).<sup>21</sup>

Estos recorridos son un componente esencial del programa, conduciendo los movimientos de las personas entre las dos salas, la de competición y la de entrenamiento y entre el interior y el exterior.

Según Lynn, los planteamientos de estas dos últimas obras no cambian radicalmente el concepto tradicional, procesional, de la relación entre movimiento y arquitectura, una relación que se mantendría como una mera representación del movimiento en la que la arquitectura sería simplemente un marco inmóvil, aunque múltiple en el caso de la transparencia fenomenal para el movimiento del ojo. (Lynn, 1999: 55 sig).<sup>22</sup>

Greg Lynn es uno de los representantes más importantes de la “arquitectura BLOB”, que se concreta en formas biomórficas. Lynn propone algo más que una arquitectura estática, a la que se le añade movimiento. Sugiere la forma animada, un espacio en movimiento en el que la arquitectura se pueda modelar como un móvil inmerso en flujos dinámicos. Espacio dinámico sometido a unas fuerzas que cambian de dirección, consiguiendo estabilidad pero no estatismo. Sería el penúltimo peldaño en el proceso de control de la forma arquitectónica sujeta a las leyes, no de la Estática sino de la Mecánica General, en las que la Cinemática adquiere principal relevancia.

---

<sup>21</sup> Revista AV. Monografías 45-46. I-IV. Ed. Arquitectura Viva: Madrid 1994.

<sup>22</sup> Lynn, Greg. *Animate Form*, Nueva York: Princeton Architectural Press, 1999

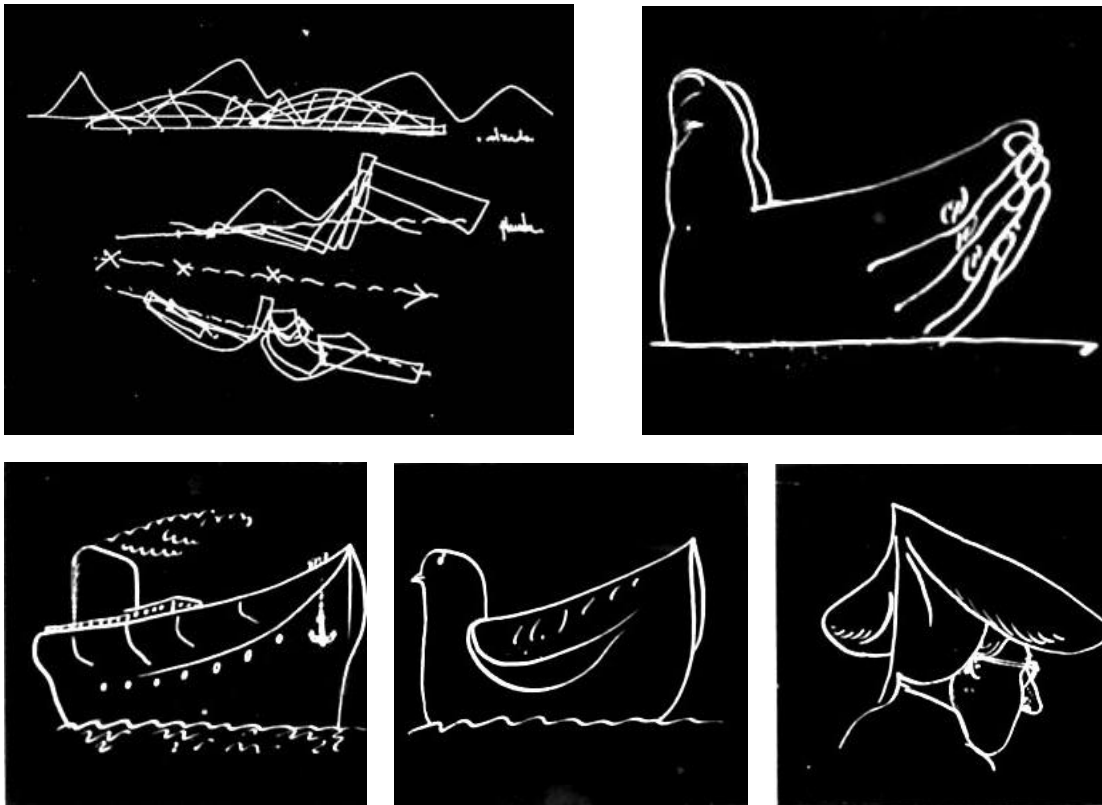


Fig. 3.22. Enric Miralles y Carme Pinós. Centro de gimnasia rítmica y deportiva. Alicante. Croquis de planta y de alzado.

Dibujos de Le Corbusier representando ideas, que sugieren formas que están presentes en la concepción arquitectónica de la capilla de Ronchamp. Incluso los procedimientos de representación de las ideas de Miralles o Le Corbusier, no están tan lejanas en el dibujo como en el tiempo.

En relación con el Dibujo y a propósito de la obra de Enric Miralles, es especialmente significativo un artículo de Rafael Moneo sobre la Tesis Doctoral de Miralles, que, por acuerdo del Tribunal, tubo que reescribir en 1987.

Escribe Moneo:

*Enric Miralles nos dice que quiere ver la arquitectura, o mejor todavía, hacerla con los instrumentos del dibujante y con una convencida vocación de lector. Ingres y Valéry. Picabia y Barthes. Klee y Eluard. “Indeterminación querida de las palabras al aparecer en papel”. Y en la ilustración de la página 8, un fragmento de su arquitectura como paradigma de lo que persigue el autor de la tesis (fig. 13). Enric, desde el dibujo, rastrea el origen de lo que son las cosas. Un dibujo que debería ser espontáneo y directo para poder ser considerado como “anotación”, y desde ella descubrir la solución a un problema arquitectónico específico. Benjamin Franklin y Thomas Jefferson como pretexto. Un dibujo de John Trumbull “Vista desde la ventana de Benjamin Franklin” (fig. 14) y un apunte autógrafa de Thomas Jefferson, dan pie –explican– las intuiciones acerca de la electricidad celeste de Franklin y el*

*trazado de la Universidad de Virginia de Jefferson (fig. 15). Enric se empeña en mostrarnos que es ahí –en los dibujos– donde se da una visión simultánea y múltiple de la realidad, que activa nuestra capacidad de anotar y en donde se encuentran las claves para construir.*<sup>23</sup>

Hacemos notar la enorme evolución conceptual de las formas de la reciente Arquitectura, para señalar que nuestro interés por el control mediante la Estática Gráfica de las estructuras moldeadoras de nuestras ideas arquitectónicas, no decae por la complejidad del problema. En esencia lo construido está sometido a fuerzas, y éstas deberán estar controladas. Sigue, pues, sin valer el diseño sin más, (sin control estructural), aunque la complejidad formal complique dicho control.

En este sentido, las complejas formas no son hijas de nuestro S. XXI, aunque la “moda” en Arquitectura se empeñe en anunciar lo último y más extravagante como lo más valioso. Arquitectos del XIX, como Frederick Kiesler (1890-1965) ya persiguieron la imagen de una arquitectura onírica inspirándose en exploraciones biomórficas. Como en muchos casos en la historia, Kiesler fue denostado en su tiempo y considerado como visionario, siendo ahora reconocido como creador de formas inspiradoras hasta la extenuación.

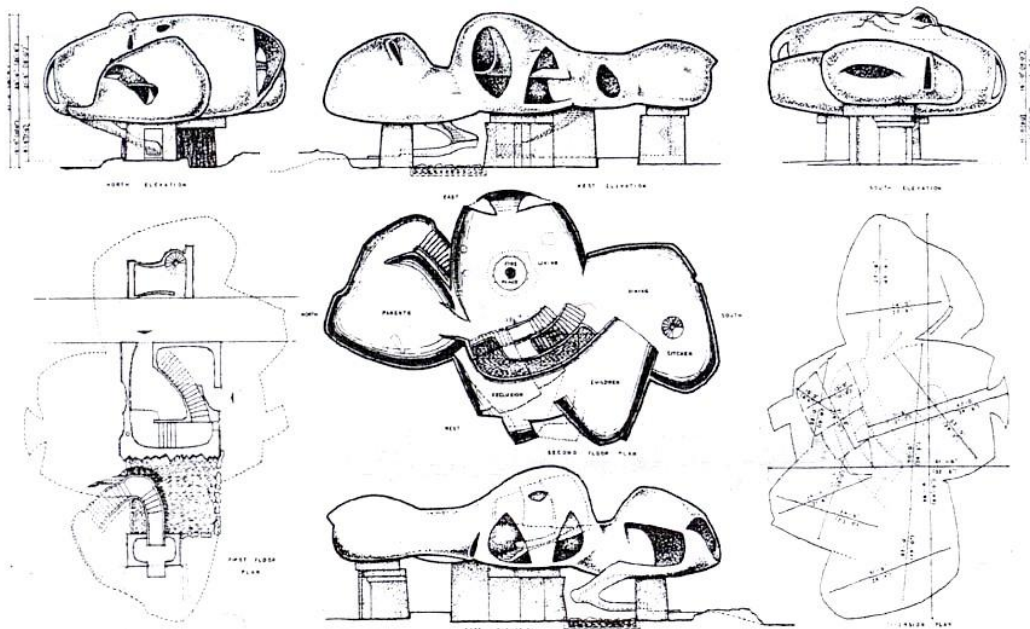


Fig. 3.23. Frederick Kiesler. Planos de La casa interminable 1959. (Fernández Galiano, El entorno de F. Kiesler. Arquitectura. Nº 52).

<sup>23</sup> Moneo Vallés, Rafael. Cosas vistas de izquierda a derecha (sin gafas). Un comentario a la Tesis Doctoral de Enric Miralles Moya, 1987. Graduate School of Design, GSD – Harvard. 2007.



Volviendo sobre el dibujo academicista basado en la “copia no razonada” versus dibujos para “pensar la arquitectura” citados por Teodoro Anasagasti (Navascués, op. cit.), señalamos aquí los dibujos que mediante la Estática Gráfica realizamos los arquitectos en el camino que conduce desde la Idea hasta la obra construida.

Las primeras manifestaciones, los balbuceos, si se quiere, de la antigua formación de los arquitectos del XIX, estaban basadas en aprender a calcular con ayuda de los dibujos, a elevar a potencias una cantidad, a resolver ecuaciones gráficamente y eran adiestrados en el manejo de los dibujos que analizan fuerzas en abstracto, su composición, análisis de los diagramas de momentos y cortantes en estructuras isostáticas y diversas aplicaciones relativas a los cálculos de Centros de Gravedad o Momentos de Inercia de líneas, secciones o volúmenes.

La mayoría de los tratados de Estática Gráfica que hemos analizado en nuestra investigación dedican los primeros capítulos al Cálculo Gráfico, proponiendo algunos de sus autores, como en el caso de Culmann (Fig. 3.24), padre de la Estática Gráfica, temas como *Multiplication und Division von Linien mit Verhältnissen* (Multiplicación y división mediante segmentos proporcionales), o *Potenzieren und Wurzelansziehen* (Potenciación y radicación) correspondientes al capítulo *Das graphische Rechnen* (El cálculo gráfico). (Culmann, 1866: 20-21).

Otros tratadistas como Favaro o Levy, e incluso Culmann en la edición francesa *Traité de statique graphique* de 1880, muestran gran interés por todos los instrumentos de cálculo gráfico, Reglas de cálculo, Planímetros y todo lo relativo a la Nomografía, considerada por todos ellos imprescindible en el conocimiento técnico.<sup>24</sup>

En la Fig. 3.24 se recogen sendos dibujos originales de Culmann. Ambos corresponden al capítulo dedicado al cálculo gráfico, *Das graphische Rechnen*, en los que aprovechando el conocimiento geométrico del Teorema de la Altura de un triángulo rectángulo (En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los segmentos que ésta determina sobre la hipotenusa como base) se determina la Raíz cuadrada  $\sqrt{a \cdot b}$ , o el concepto de Potencia de un punto a una circunferencia.

Con la aplicación directa del Teorema de Thales se utiliza la cantidad  $(m/n)$  como factor multiplicador con lo que se puede obtener gráfica y rápidamente cualquier cantidad  $x_i = \frac{m}{n} l_i$  y viceversa  $l_i = \frac{n}{m} x_i$ . (Culmann, 1866: 10-20)

<sup>24</sup> Ver *La Statica Grafica nell' insegnamento tecnico superiore* (Favaro, 1873: 80,88 y 146).  
*Corso di Statica Grafica. Parte prima. Calcolo Grafico e Nomografia*. (Ciappi, 1930)

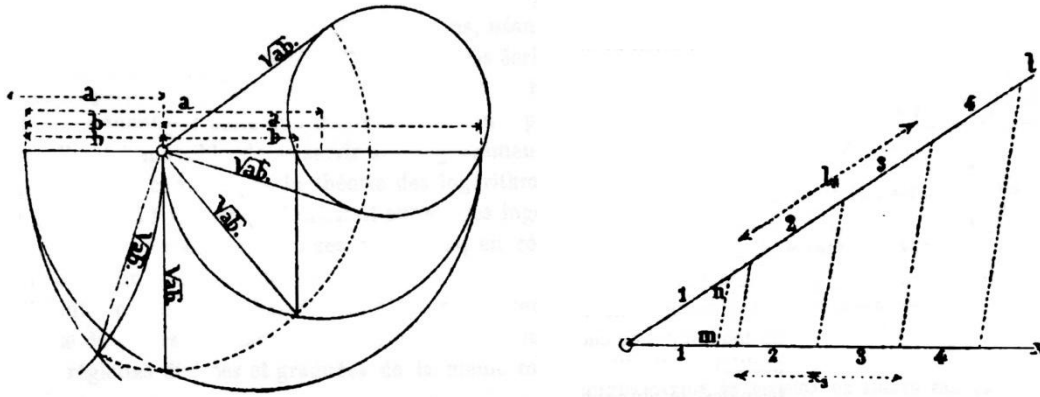


Fig. 3.24. Dibujos de *Das graphische Rechnen de Die Graphische Statik* de Carl Culman. (Culmann, 1866: 10-20)

En las figuras siguientes mostramos algunos de estos dibujos entresacados de varios libros de Estática Gráfica, fuentes de nuestra investigación, como muestra de reconocimiento a sus autores, reservando nuestros propios dibujos y cálculos para otros capítulos de esta Tesis Doctoral.

Algunos tratados investigados, muestran una metodología geométrica tradicional (previa a los conceptos de la Estática Gráfica, que suelen tratar a posteriori) de la búsqueda de la Resultante de dos Vectores (fuerzas) sin hacer uso del punto de intersección de las líneas de acción de los mismos. (Fig. 3.25)

El artificio consiste en trazar dos rectas por el punto I del primer vector  $P_1$ , una de las cuales corte en II al vector  $P_2$ . Descomponer  $P_1$  en dos vectores V y U, haciendo lo propio con  $P_2$ , descomponiéndola en  $-V$  y W. La intersección de las rectas de acción de U y W determinan la dirección de la Resultante de  $P_1$  y  $P_2$ .<sup>25</sup>

En definitiva se puede observar como las rectas de acción de U, W y V se intersecan en la figura de la derecha en un Polo O, constituyendo dichas rectas de acción los Radios polares del Polígono de fuerzas de la derecha, con lo que las propias rectas de acción de U, V y W constituirían los lados del Polígono Funicular, figura recíproca del Polígono de Fuerzas.

Toda esta construcción geométrica se explica sin hacer mención a los polígonos de fuerzas y funiculares, que aparecen desarrollados posteriormente como una consecuencia geométrica, pero no con el origen primigenio que Culmann o Cremona basaron en la reciprocidad de aquellos, derivada de los conceptos de la Geometría de Posición.

<sup>25</sup> Ver *Mecánica. Resistencia de materiales. Grafostática*. (Karl Keneip et al. 1937)

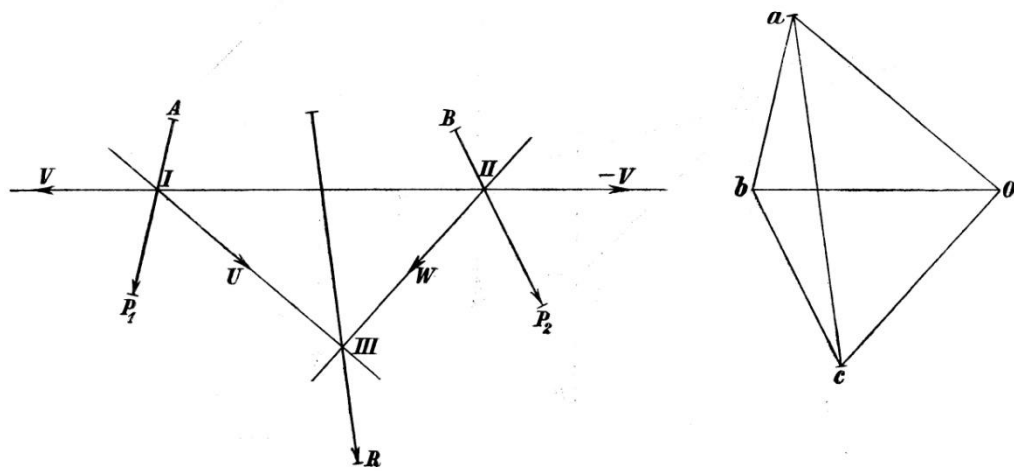


Fig. 3.25. Construcción geométrica para la obtención de la Resultante. El polígono Funicular y de Fuerzas no son descritos como tales, aunque se intuyen en la construcción. (Kneip, 1937: 457)

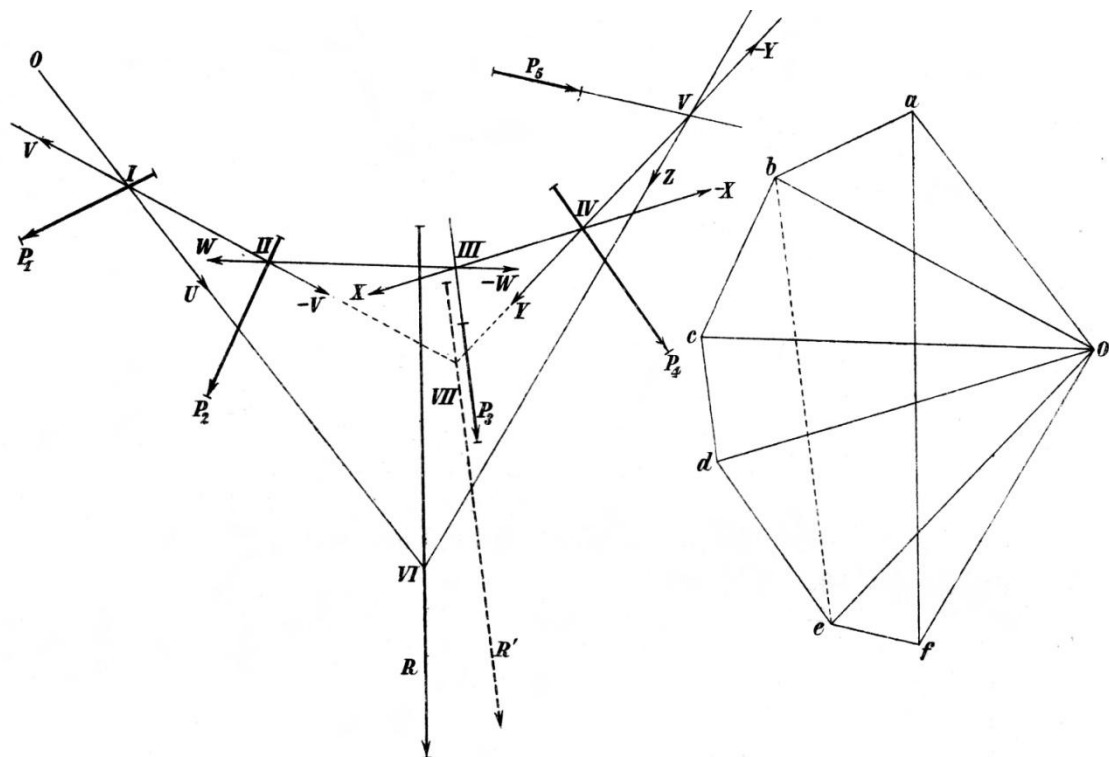


Fig. 3.26. Ampliación de la construcción geométrica de la Fig 3.25. Composición de más de dos fuerzas (caso de 5) con distintos puntos de aplicación, paso previo que Kneip propone antes de la introducción del uso del Polígono de Fuerzas y Funicular, casi como una consecuencia de su "construcción geométrica" (Op. cit.: 468)

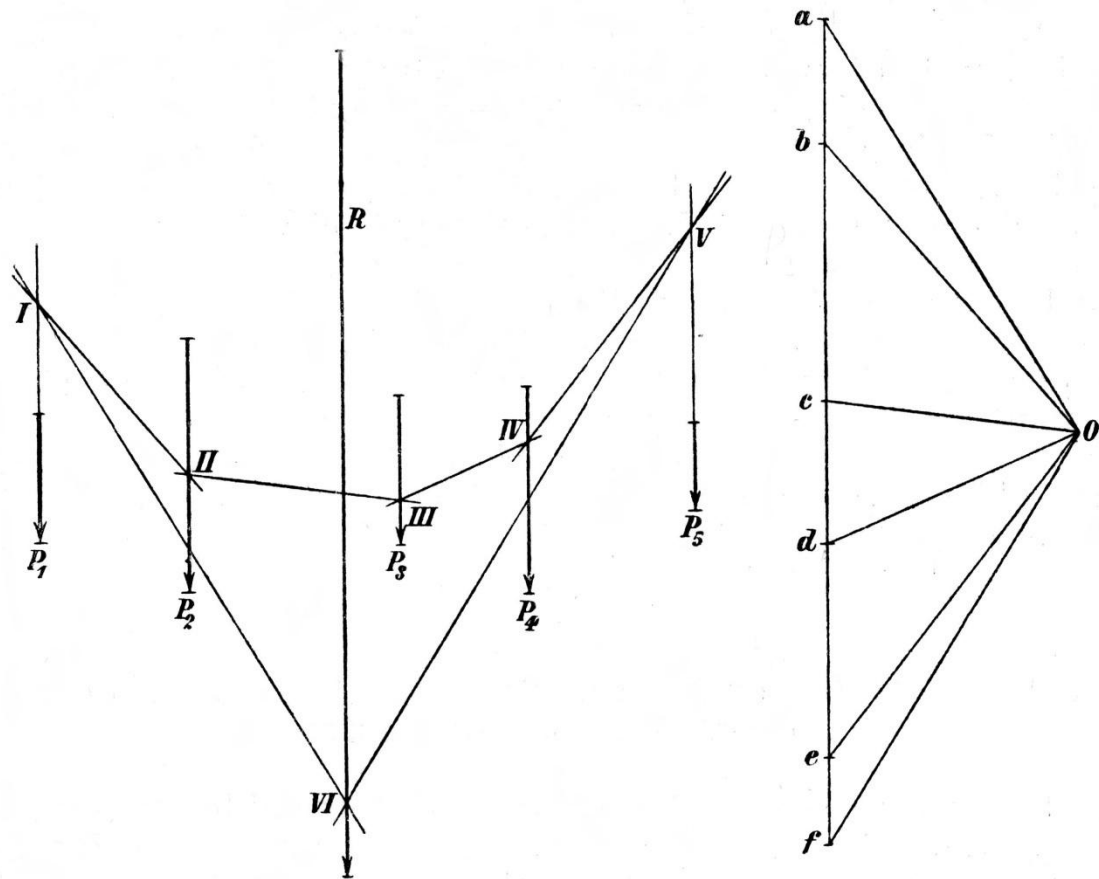


Fig. 3.27. Representación del Polígono de Fuerzas y Funicular, correspondientes a un Sistema de Vectores deslizantes paralelos. Todos los vectores tienen el mismo sentido. (Op. cit.: 469)

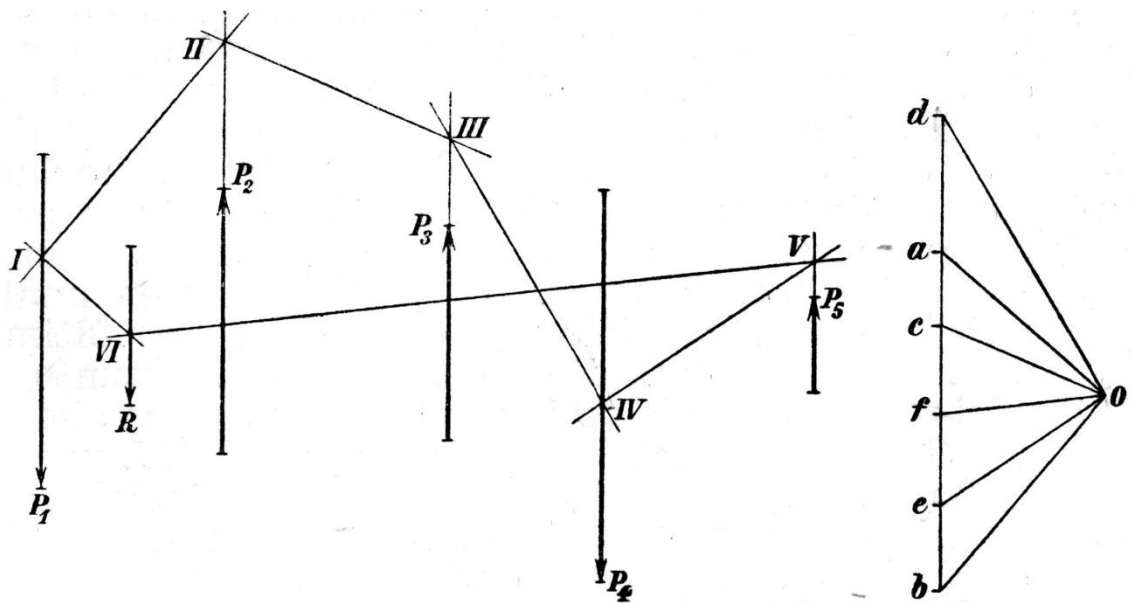


Fig. 3.28. Representación del Polígono de Fuerzas y Funicular, correspondientes a un Sistema de Vectores deslizantes paralelos. Vectores con sentidos distintos. Tanto en la figura 3.27 como en ésta, se muestra la posición de la Resultante del sistema sobre el Eje central, marcado por el punto intersección de los lados I-VI y V-VI del Polígono Funicular. (Op. cit.: 469)

De entre las aplicaciones que la Estática Gráfica puso en manos de los arquitectos, el cálculo y determinación de los Centros de Gravedad de las secciones de elementos estructurales, constituye una de las más universales.

Como consecuencia de dicha determinación, mostramos algunos ejemplos, como el de la Fig. 3.29 en el que se determina la posición del Centro de Gravedad del contorno de una bóveda, su linterna y el cupulín, como dato previo para el cálculo de la superficie de revolución, con la aplicación del primer Teorema de Pappus que relaciona dicha superficie con el producto de la longitud del contorno que gira por la longitud descrita en el giro de la circunferencia cuyo radio es la distancia del C.D.G. al eje de giro. En la Fig. 3.29.  $S_{Tot} = \text{longit.}(ABCDE F) \times 2\pi X_0$ , siendo, por otra parte la  $\text{longit.}(ABCDE F) = R$ , la Resultante del sistema de fuerzas establecido.<sup>26</sup>

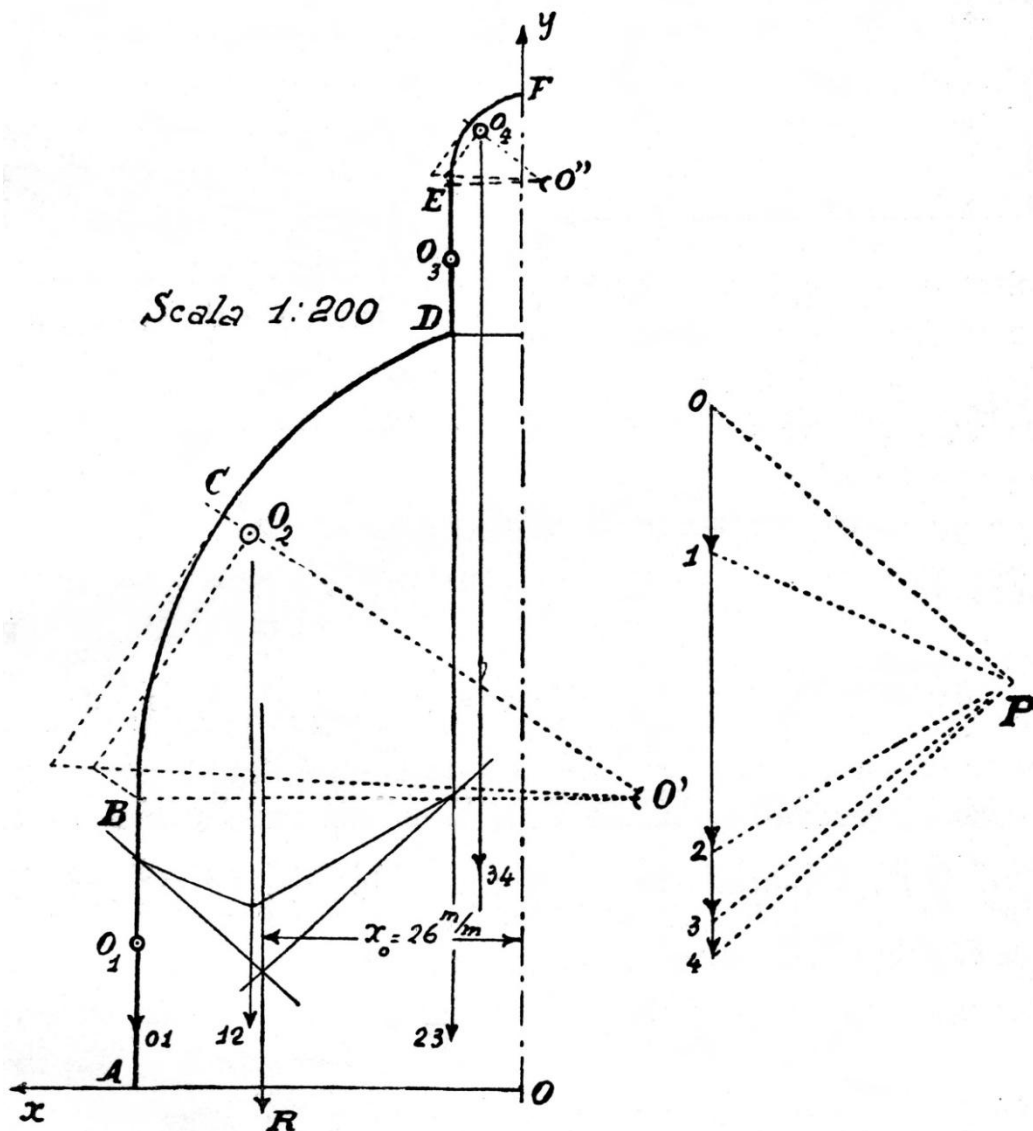


Fig. 3.29. Cálculo del D.D.G del contorno de una cúpula de revolución. (Ciappi, 1930: 129)

<sup>26</sup> Ciappi, Anselmo. *Corso di Statica Grafica. Parte Seconda. Statica teorica e Statica Applicata*. Paolo Cremonese: Roma 1930.

Otra de las aplicaciones del cálculo gráfico de Centros de Gravedad se presenta cuando queremos calcular el volumen engendrado al girar una superficie. Si en el caso de una bóveda, determinamos previamente el centro de masas de la sección mural, podremos aplicar el segundo Teorema de Pappus, similar al anterior, relacionando el volumen engendrado por la sección que gira sobre un eje.

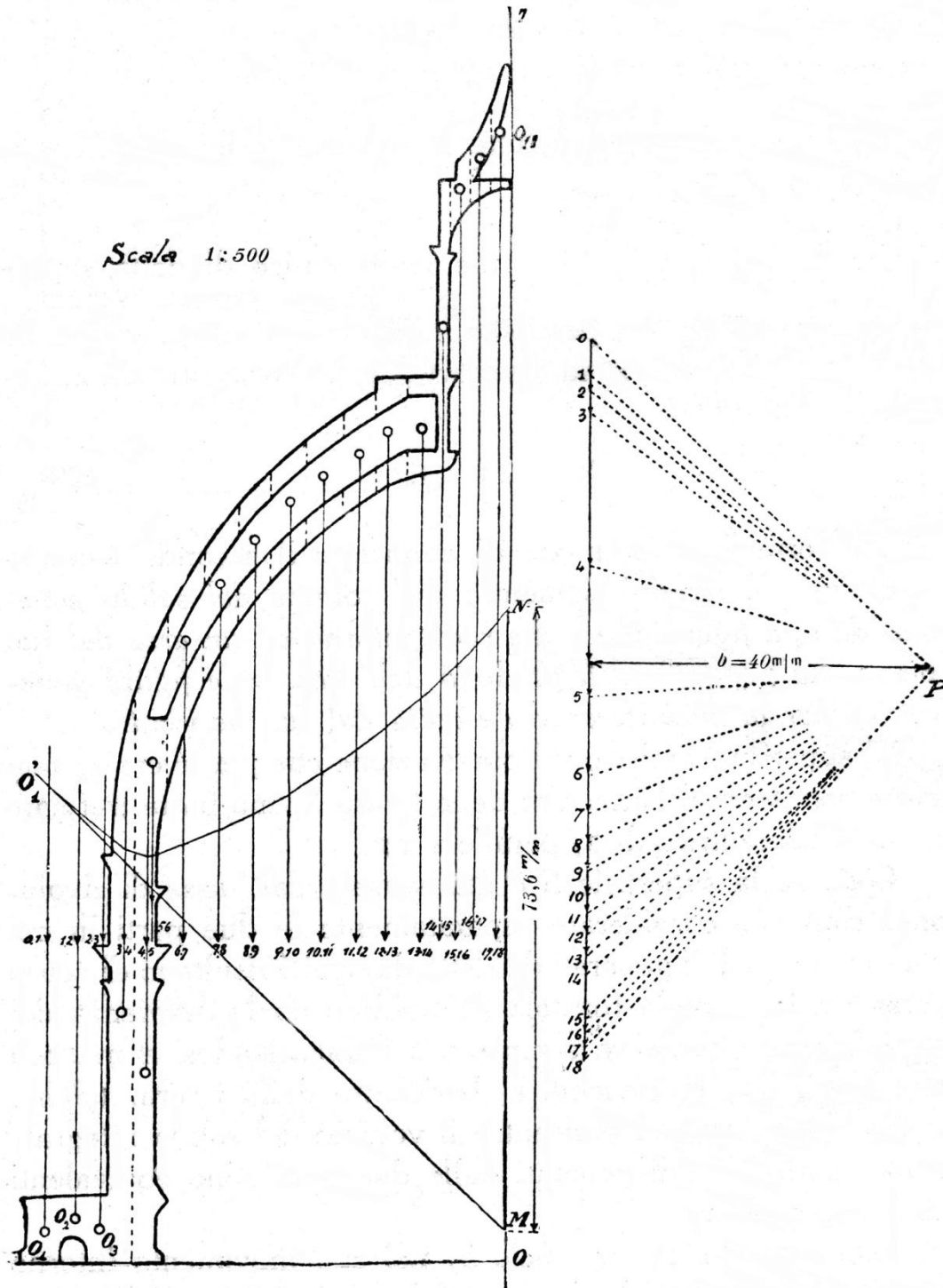


Fig. 3.30. Cálculo del D.D.G. de la Sección de una cúpula de revolución, para su aplicación al cálculo del volumen mural. (Ciappi, 1930: 132)

El cálculo de Centros de Gravedad de secciones planas es una de las aplicaciones prácticas más utilizadas por arquitectos e ingenieros para la determinación posterior de los Momentos de Inercia de las mismas, esencial en el conocimiento del estado tensional de los elementos estructurales que ensamblan nuestros diseños.

Siendo, pues imprescindible, el conocimiento de los Centros de Gravedad (Baricentro en muchos de los antiguos Tratados) de dichas secciones y dada la dificultad de su cálculo por los métodos de integración analítica, dado que se trata de un sumatorio de infinitos productos ( $\sum m_i \cdot y_i$ ), es decir de la ( $\int y \cdot dm$ ) cuando la geometría de la sección no es precisamente regular, como en el caso del perfil metálico correspondiente a un rail, o la sección en Z a la que se le ha sustraído una porción, de la Fig. 3.31, la *Estática Grafica* proporcionó una metodología de trabajo, muy sencilla, para ser manejada en los gabinetes de arquitectura e ingeniería, por cualquier profesional.

Si bien el conocimiento teórico, quedó para las escuelas de Arquitectura e Ingeniería, su aplicación práctica se generalizó en el mundo entero.

La metodología consiste en dividir en un número determinado de bandas la sección en cuestión (en el caso de la viga de la Fig. 3.31. las bandas son horizontales al conocerse que el C.D.G. estará sobre el Eje vertical, de simetría, de la sección) y crear un sistema de vectores paralelos determinando la posición de su Eje Central. El punto de intersección de dicha recta Eje Central, con el Eje de Simetría, es el C.D.G. buscado. El módulo de cada uno de estos vectores horizontales representa la superficie de la banda, por cuyo centro de gravedad parcial, pasa la recta de acción de dichos vectores. La construcción de Polígono de Fuerzas su Polígono Funicular recíproco, resulta imprescindible para la determinación del Eje Central Buscado. En el capítulo 7 Patrones para una Didáctica Actual de la Grafostática nos extendemos en la metodología de estos cálculos.

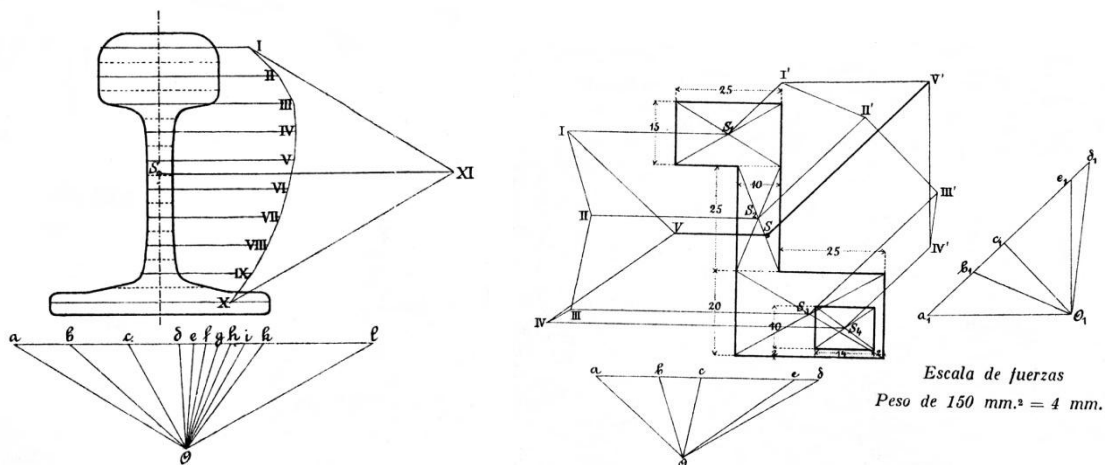


Fig. 3.31. Determinación grafostática de Centros de Gravedad de secciones planas. (Kneip, 1937: Lámina III)

El cálculo de Momentos de Inercia de secciones, constituye otra de las aplicaciones incuadas en todos los tratados de *Estática Gráfica*, como ya hemos señalado. Su aplicación fue universalmente empleada, por su simplicidad, contra la dificultad de los procedimientos de integración, de forma análoga a lo que sucede con el cálculo del Centro de Gravedad. La Fig. 3.32. muestra el cálculo del Momento de Inercia de la sección de una viga, respecto a un eje que pasa por su base, y respecto al eje paralelo al anterior que pasa por su C.D.G. Se ha utilizado en ella el conocido como Método de Culmann para ambos casos.<sup>27</sup>

El método de Culmann se basa en el cálculo grafostático del Momento de un Sistema de vectores deslizantes, representantes de las áreas parciales en que se divide la sección, respecto a los Ejes X e Y ortogonales que pasan por el C.D.G. de la sección. Ejes baricéntricos.

Como es natural, es preciso el cálculo previo de la posición del Centro de Gravedad, tal y como hemos reseñado anteriormente. En el Capítulo 7 de esta Tesis, se incluye además del Método de Culmann, el llamado Método de Mohr, algo más sencillo y preciso, en nuestra opinión, para el cálculo de Momentos de Inercia.

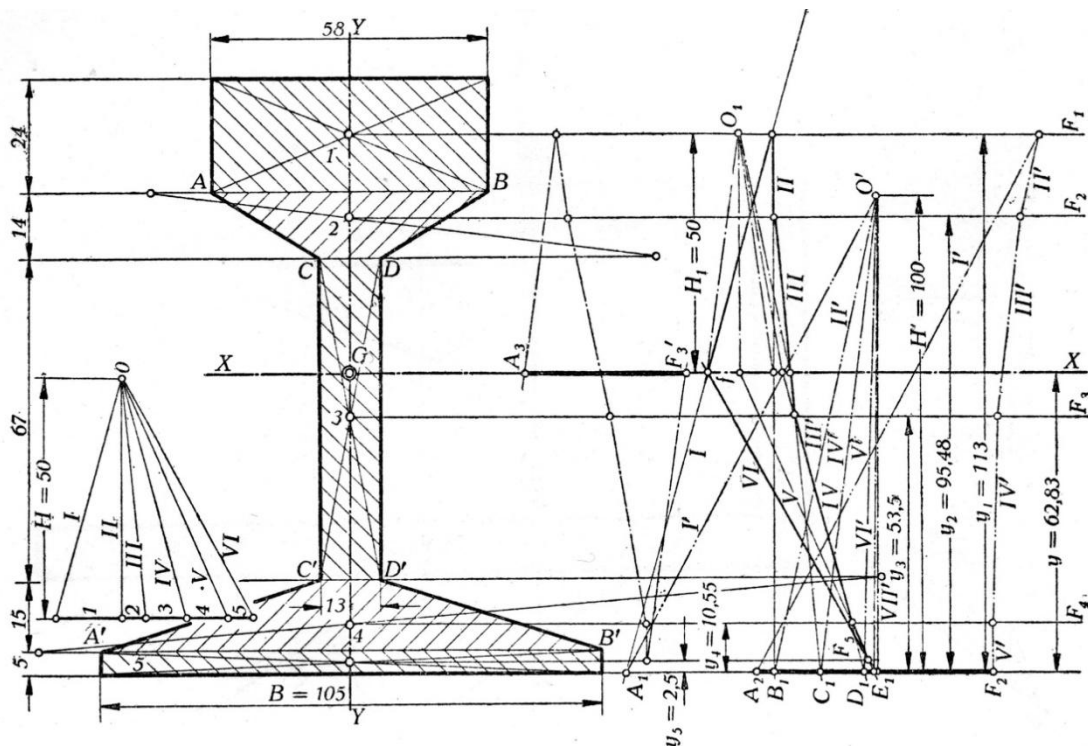


Fig. 3.32. Cálculo del Momento de Inercia de la sección de una viga. (Rubio, 1951: 39).

<sup>27</sup> Ver Momentos de Inercia de figuras planas en *Estática Gráfica*. (Henkel, 1926: 60-61) Henkel, Otto. *Estática Gráfica*. Trad. Álvarez Lide (G.) Labor: Barcelona. 1926.



El cálculo grafostático de los diagramas de momentos y esfuerzos cortantes de elementos estructurales y la determinación grafostática de la deformada, ha sido ampliamente expuesto en la mayoría de los tratados de Estática Gráfica. Los primeros son deducción directa del Polígono de fuerzas y del Funicular recíproco. La deformada es el resultado de la Integración gráfica de la curva de momentos.

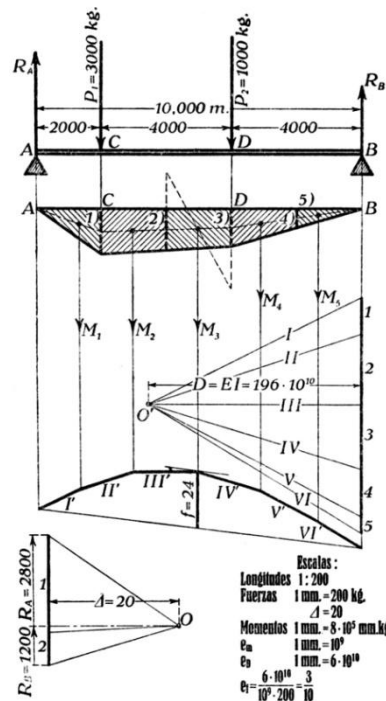
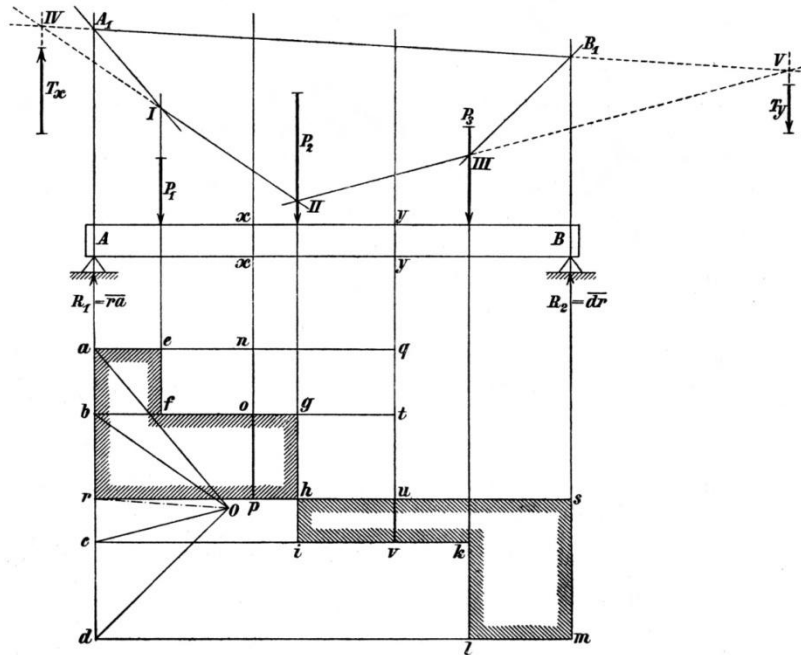


Fig. 3.33. Cálculografostático de los diagramas de momentos y cortantes de una viga biapoyada sometida a cargas puntuales y cálculo de la deformada de una viga también biapoyada con dos puntuales. (Rubio, 1951: 65).<sup>28</sup>

<sup>28</sup> Rubio San Juan, Isidoro. *Elementos de Grafostática*. Labor: Barcelona. 1951.



La Fig. 3.35. presenta el equilibrio de un Puente suspendido, con el funicular de las cargas como línea de los cables principales. Quizás lo más interesante del dibujo sea el control que puede hacerse de las tensiones extremas ( $t$ ) del Polígono de fuerzas, mediante la adecuada elección del polo ( $O$ ). Es evidente que el aumento de la distancia polar ( $Oa_5$ ) aumentará las tensiones, en particular las extremas, que, servirán para el cálculo de la sección del cable. Si la distancia polar disminuye, las tensiones extremas serán menores, pero los lados del funicular serán más inclinados, con lo que habrá que buscar un polo adecuado que concilie el gálibo de la navegación, las tensiones máximas y la estabilidad de las pilas.

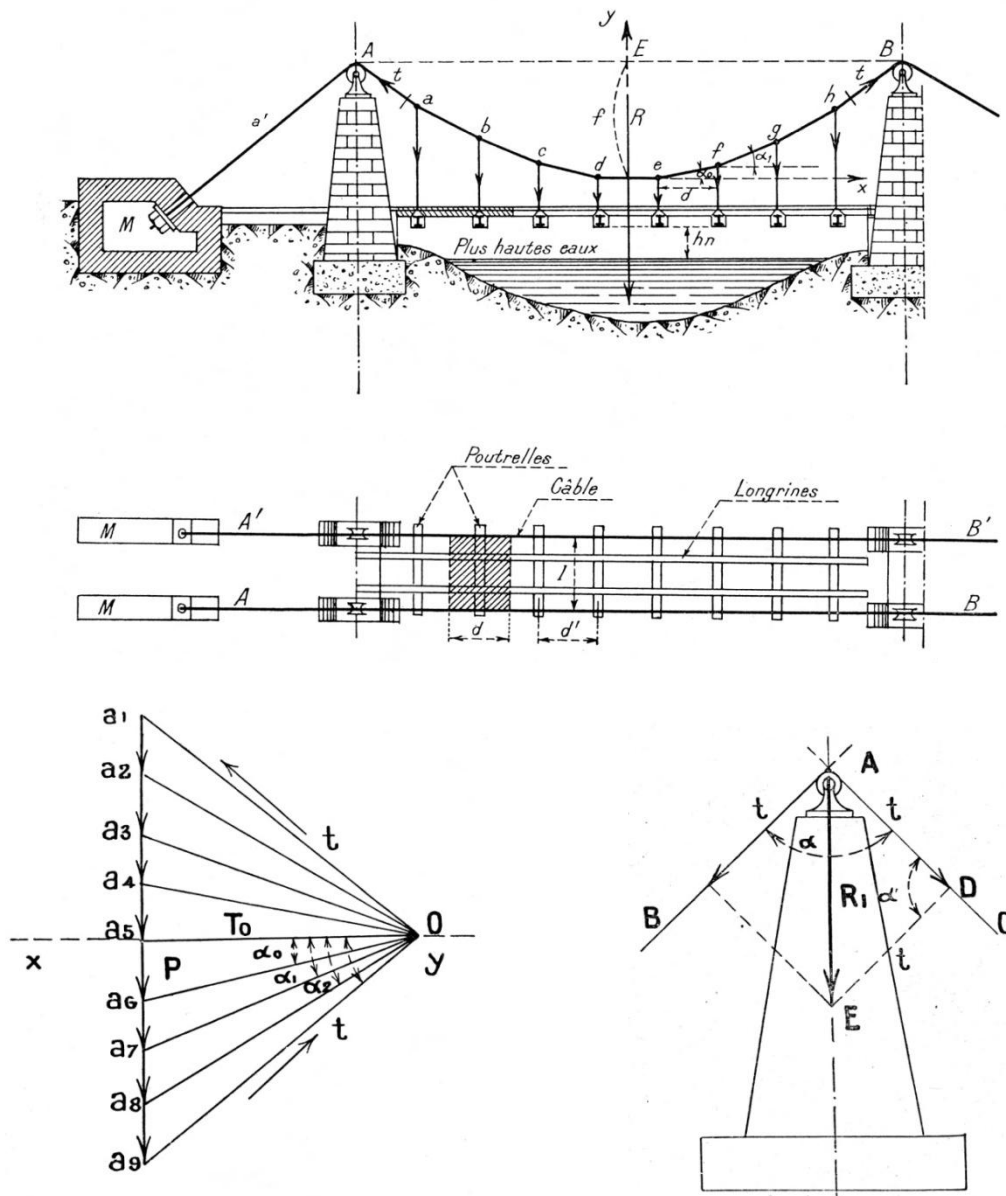


Fig. 3.35. Estudio de la estabilidad de un puente suspendido, con el análisis de la elección del Polo del Polígono de fuerzas para la conciliación de todas las variables que intervienen en el diseño. (Bayle, 1930: 49-55).<sup>29</sup>

<sup>29</sup> Bayle, M. Georges. *Cours de Statique graphique*. Ecole spéciale des travaux publics du bâtiment et de l'industrie: Paris. 1930.

De entre las aplicaciones más interesantes de la Estática Gráfica, una de las primeras que los arquitectos utilizaron ya en el XIX, fue el de los estudios del equilibrio de arcos y bóvedas, de los que se muestran en esta Tesis Doctoral numerosos ejemplos.

La comprobación de que la línea de empujes esté contenida dentro del espesor del arco crucero en las bóvedas de crucería y la necesidad de ajustar el peralte de dicha línea considerando un cierto empuje en la clave del crucero, fue una tarea desarrollada con ayuda de la Grafostática, desde que los arquitectos empezamos a conocer sus aplicaciones. Este es el caso que se muestra en las Fig. 3.36. y 3.37. , según un análisis de Cristian Körner.<sup>30</sup>

Se estudia el equilibrio de cada arco obteniendo la línea de empuje mínimo, que arranca tangente a la clave de cada arco. Las reacciones en los extremos de esas líneas de empuje mínimo de cada arco, son las cargas sobre las dovelas del arco crucero, analizado en la Fig. 3.37.

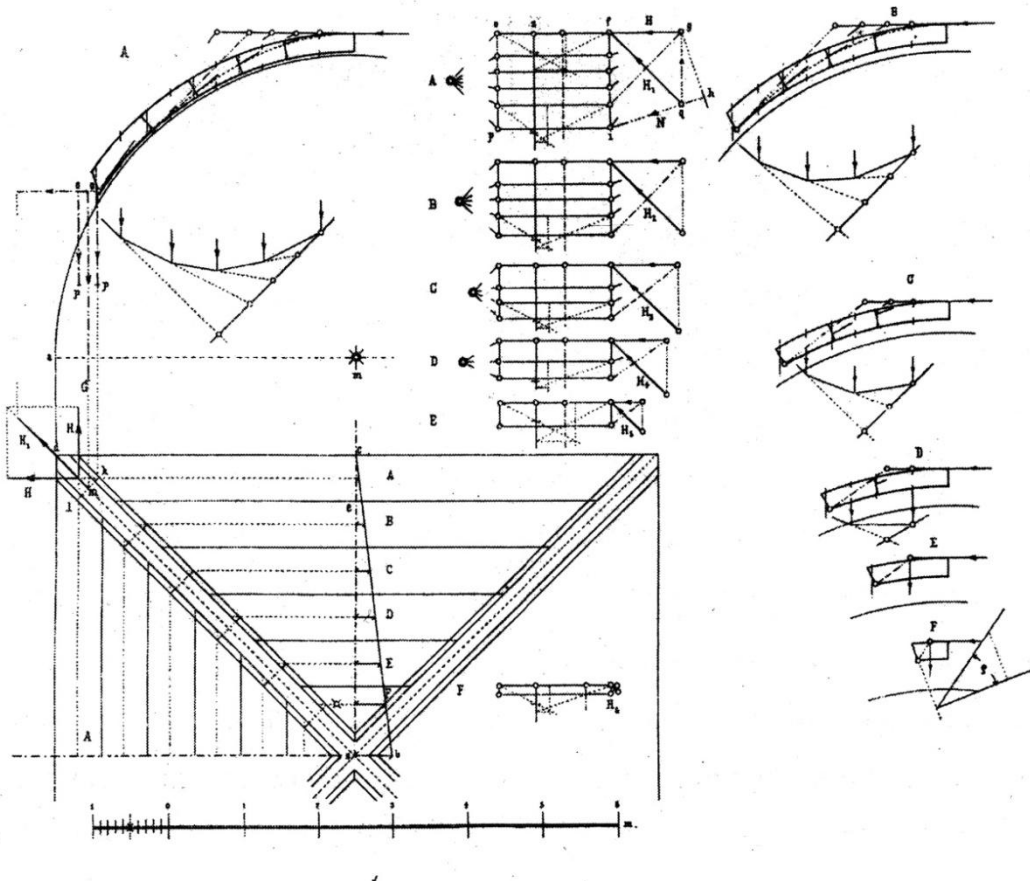


Fig. 3.36. Análisis de la estabilidad de una bóveda de crucería de cañones cilíndricos. En ésta se estudia la planta de la bóveda dividida en arcos perpendiculares y su conjunción con el arco crucero, con el cálculo de las líneas de empuje mínimo de cada uno de los arcos elementales. (Körner, 1921, citado por Huerta, 2004: 471).

<sup>30</sup> Körner, C. *Gewölbte Decken*. Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung. Stuttgart. 1921

Las reacciones obtenidas, son ahora cargas que se sumarán a los pesos de las dovelas del arco crucero. Las componentes horizontales se resuelven según la diagonal, ya que por simetría, todas las cargas deben estar en el plano del arco crucero.

La forma adoptada para el polígono de fuerzas muestra que las cargas son inclinadas, no siendo constante el empuje horizontal, sino que va creciendo hacia los arranques. Se muestra la línea de empuje mínimo, tangente a la altura de los enjarjes. Dicha línea no puede pasar por el arranque del arco crucero, cosa que sabían perfectamente los constructores góticos, que disponían los arbotantes a una cierta altura por encima de los arranques. (Huerta, 2004: 468-471)<sup>31</sup>

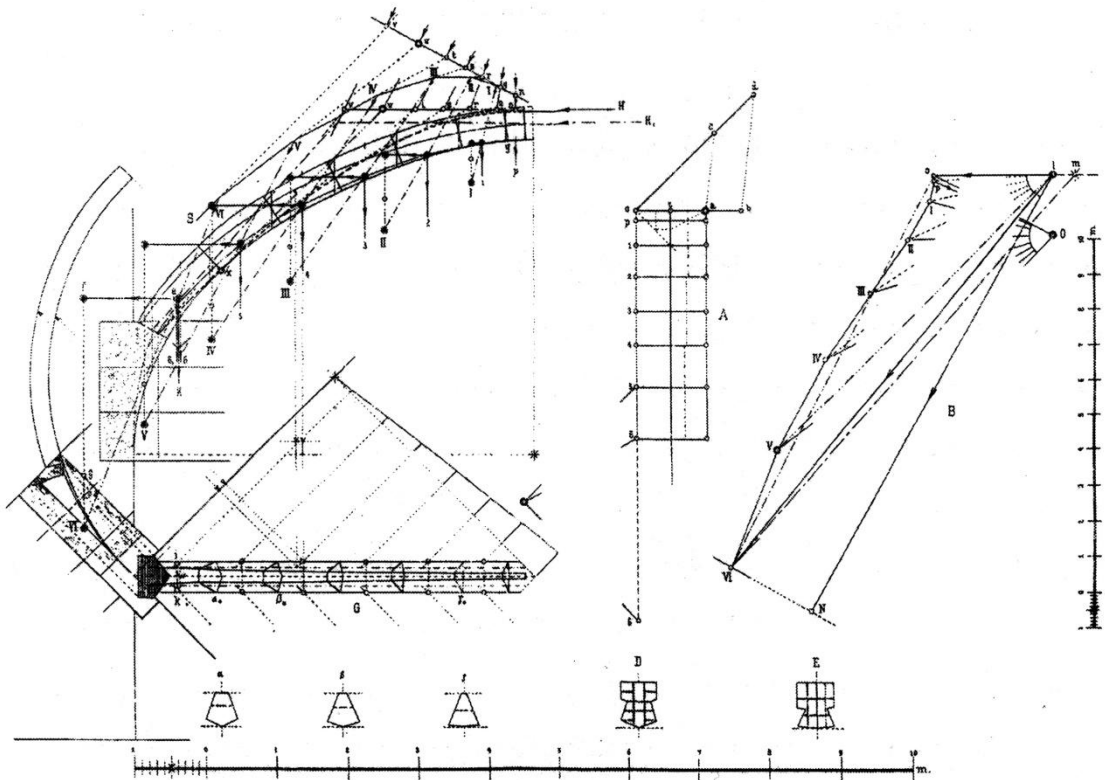


Fig. 3.37. Análisis de la estabilidad de una bóveda de crucería de cañones cilíndricos. Se estudia la línea de presiones del arco crucero, que soporta el peso de sus propias dovelas más el empuje inclinado, resultante de la línea de empujes de los arcos elementales que acometen contra el arco crucero. (Körner, 1921, citado por Huerta, 2004: 471)

<sup>31</sup> Huerta, Santiago. *Arcos, bóvedas y cúpulas*. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Instituto Juan de Herrera: Madrid. 2004.

### 3.2. LA EXPERIENCIA ESTRUCTURAL DE LA CONSTRUCCIÓN SIN CÁLCULOS. APORTACIONES DE LA ESTÁTICA GRÁFICA

Mucho antes de que existiera cualquier escuela o universidad, el conocimiento era transmitido a través de la palabra, fundamentalmente oral, casi nada escrita, de manera que en los oficios de canteros o maestros de obras, los aprendices eran instruidos por los maestros en las artes correspondientes. Las formas de cortar los elementos pétreos o de colocarlos, según las leyes que la experiencia había ido marcando, con los aciertos y errores inevitables, eran aprendidas mediante la expresión de viva voz.

Las estructuras de los edificios y su esqueleto resistente ha ido configurándose a lo largo de los tiempos con las transformaciones que les ha inducido el proceso experimental basado en la observación.<sup>32</sup> En los tratados pseudo-aristotélicos, como la *Mecanica Problemata* se ponían ya de relieve algunas inquietudes mecánicas experimentadas y concretamente en la 5ª *Cuestión mecánica*, se expresa:

*“ ¿Por qué un bastón se rompe más fácilmente con la rodilla si las manos lo cogen por los extremos, en lugar de si lo cogen cerca de la misma rodilla?. De forma análoga, si un hueco mantiene firme en el terreno un bastón, ¿por qué razón la mano consigue romperlo con más facilidad cogiéndolo lo más lejano del pie?. Quizás porque, en el primer caso, la rodilla y el pie en el segundo, constituyen una especie de centro y una cosa cualquiera se mueve con mucha más facilidad cuanto más lejana está del centro. Y para partir un objeto hace falta moverlo.”* (Vera, 2001: 24)<sup>33</sup>

O en el mismo tratado:

*“ ¿Por qué motivo las ramas son mucho más débiles cuanto más largas son? y ¿por qué estando derechas se doblan de tal manera que una pértiga larga y delgada, de dos brazas, se dobla menos que una pértiga gruesa de cien brazas de longitud.”*

Treinta siglos más tarde del enunciado de las cuestiones expuestas, comprendemos, con facilidad, la explicación mecánica de las mismas. Sin embargo, demostraban unas inquietudes físicas o científicas fruto de la necesidad de comprender lo experimentado. Quizás, incluso, los primeros intentos de construcción de los dinteles de madera de los primitivos edificios griegos, tenían presente la experiencia que conllevaba la observación de la flexión de la madera.

<sup>32</sup> Lurçart, André. *Architecture*. Collection: *Manifestations de l'esprit contemporain*. Au Sans Pareil. Paris. 1929.

<sup>33</sup> Vera Botí, Alfredo. *De los descubrimientos teóricos: Desde la construcción empírica al cálculo de las estructuras*. Catálogos de Arquitectura. Nº 9. Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia: Murcia. 2001.

Los maestros de obras y arquitectos antiguos no se resignaron ante el desconocimiento de las últimas causas del comportamiento de los elementos constructivos utilizados. El ensayo de distintos tipos y soluciones constructivas, fue apoyando una especie de selección o adecuación que hizo que se fueran decantando las mismas, en función del número de aciertos encontrados con unas y del número de fracasos de otras.

La mayor parte de las veces, la elección de materiales y soluciones se alejaron, con mucho, de las más “económicas”, a las que estamos acostumbrados con nuestros conocimientos de cálculo actuales. El resultado fue un habitual sobredimensionamiento que garantizara la seguridad estructural del conjunto.

Por otra parte, se modificaron las prácticas del S. XIII relativas a la transmisión del conocimiento, superando la descripción geométrica de los objetos a la importancia de la palabra escrita, siendo así que en los orígenes del Renacimiento, se constituye la consagración del Dibujo como el instrumento característico del conocimiento arquitectónico. Además, desaparecido el sistema gremial y no habiéndose creado aún las instituciones académicas, la formación de los arquitectos dependía de su capacidad para integrarse en un estudio-taller (bottega) de un maestro consagrado, en los que dada la gran cantidad de tareas que en ellos se realizaba, no quedaba garantizada la formación específica de calidad del aprendiz de arquitecto.

En los Tratados de Marco Vitruvio Polion, Leon Battista Alberti, Antonio Averlino (Filarete), Francesco di Giorgio, Sebastiano Serlio y Andrea Palladio, se pone de manifiesto la Teoría de la Arquitectura (Arnau, 1988)<sup>34</sup> con toda la carga conceptual y práctica que conocemos de los estudios de los mismos. Desde las descripciones Vitruvianas de qué consta la Arquitectura, (orden, disposición, simetría, distribución, etc.) a los diez libros de Alberti en los que preconiza, quizás por primera vez, que los lineamenta constituyen no solo diseño, dibujo (representación gráfica), sino son portadores del ingenio humano, capaz de dotar de forma la materia, apareciendo el carácter científico del conocimiento del arquitecto, reflejado en una forma ligada a una estructura.

En el norte de Italia surgen, en los comienzos del S. XV, corrientes innovadoras que cambiaron de forma sustancial las maneras de representar la arquitectura heredadas del Medievo. Por una parte, en el transcurso del S. XIV, la representación gráfica se desvincula de las tareas de cantería y albañilería finalmente a mediados del XV, se despojan del cariz de trabajo manual agrupándose con las artes liberales.

---

<sup>34</sup> Arnau Amo, Joaquín. *La teoría de la Arquitectura en los Tratados*. Tomos I (Vitruvio), II (Alberti) y III (Filarete, Di Giorgio, Serlio y Palladio). Tebar Flores: Madrid. 1988.

La tarea de aprendizaje comenzaba con el dibujo del natural o con la copia de algunos de los dibujos de los maestros como modelos, sistema heredado con posterioridad por las academias.

El trazado lineal sobre el papel termina llenándose de contenido, como consecuencia de los impulsos renovadores antes descritos, con los que la función de la representación gráfica acaba formando parte principal del quehacer del arquitecto. Con el dibujo bien consolidado en las tareas preparatorias de la construcción y en el propio desarrollo de la misma. Es el caso de los dibujos de los órdenes jónico y corintio representados en la Fig. 3.38. recreación de los correspondientes dibujos del Libro IV del Tratado de Sebastiano Serlio. (Anguita, 1996, Tomo 2 Ilustraciones: 7-IV, 9-IV)<sup>35</sup>

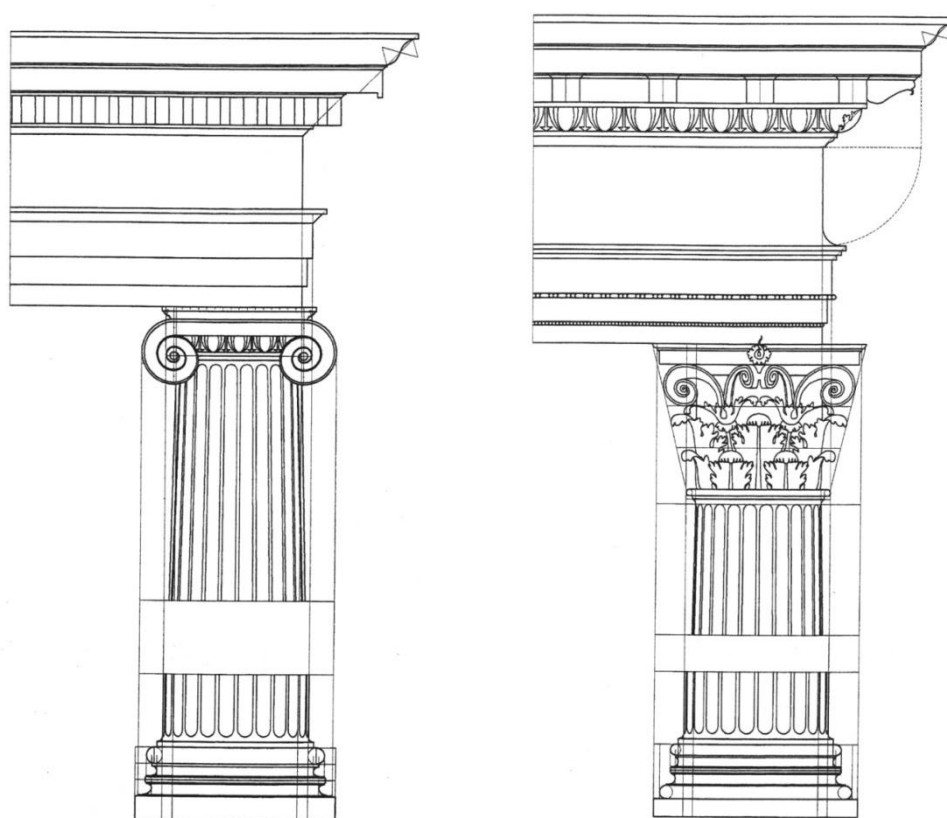


Fig. 3.38. Dibujo de dos columnas jónica y corintia reproducidas del libro IV del tratado de Sebastiano Serlio. ( Venecia, 1537 ) por el profesor de la ETSA de Sevilla, D. Juan Anguita Tuñón, en su T.D. ( Anguita, 1996 )

El arquitecto, astrónomo , matemático y sacerdote, padre Vicente Tosca, refiere en su Tratado de arquitectura, (parte de su Compendio matemático de 9 volúmenes) (1701-1715) que lo más sutil y primoroso de la Arquitectura es la construcción de todo género de arcos y bóvedas, cortando sus piedras y ajustándolas con tal artificio, que la

<sup>35</sup> Anguita Tuñón, Juan. *Sebastiano Serlio. Representación y Proyecto en el Libro IV. (Venecia, 1537) Una revisión de la edición castellana de Francisco Villalpando (Toledo, 1552)*. T.D. Dirigida por Gentil Baldrich, José María. ETASAS: Sevilla. 1996.



misma gravedad y peso que las había de precipitar a tierra, las mantenga constantes en el aire, sustentándose las unas a las otras en virtud de la mutua complicación que las enlaza, con lo que cierran por arriba las fábricas con toda seguridad y firmeza.

Un carácter eminentemente geométrico presidía las tradicionales reglas del diseño de las antiguas bóvedas y sus estribos estableciendo ciertas relaciones entre las dimensiones de sus elementos estructurales. El grosor del estribo debería ser una fracción entera de la luz de la bóveda. De igual manera que en la composición de plantas y portadas se utilizaban las proporciones de un “modelo” como en el caso de la Iglesia de la Congregación (Fig. 3.39), atribuida al padre Tosca, parece haberse utilizado, como en otras tantas iglesias, el modelo de Vignola para el Gesú de Roma.<sup>36</sup>



Fig. 3.39. Portada de la Iglesia de Santo Tomás y San Felipe Neri (Iglesia de la Congregación) en la Plaza de San Vicente Ferrer de Valencia. Construida entre 1725 y 1736 según trazas atribuidas al Padre Vicente Tosca .

Hasta que las teorías científicas de las estructuras basadas en la Mecánica y la Resistencia de Materiales no se desarrollaron, los arquitectos y maestros de obras utilizaron las reglas tradicionales que usando los artificios que cita Tosca, dieron bastante buenos resultados, aun sin conocer científicamente el porqué del comportamiento estructural. Es, pues, destacable el conocimiento intuitivo de aquellos

<sup>36</sup> Ver Fig. 3.13. en la que se muestran los dibujos de Vignola y Della Porta, para la construcción de la portada de la iglesia del Gesú de Roma.

arquitectos, que con sus extraordinarios conocimientos basados en la experiencia, levantaron magníficas obras como el Pantheon de Agripa en Roma o Santa Sofía o las catedrales góticas.

León Battista Alberti expone en su *De re aedificatoria* la complejidad y dificultad que entraña el aprendizaje incesante y el ejercicio del arquitecto en Mecánica, Lineamenta (Dibujo proyectual) y Aparejo o construcción de la idea pensada y dibujada, no exenta de la experiencia adquirida en el comportamiento de los materiales, según su resistencia y capacidad para constituir tal o cual elemento del conjunto edificado (Arnau, 1988 Tomo II:68).<sup>37</sup>

¿Es posible que las reglas geométricas y de unas determinadas proporciones no estuvieran tan lejos de la verdad que la ciencia estructural ha demostrado a posteriori?. En cualquier caso, es siempre interesante el análisis del comportamiento de arcos y bóvedas antiguos a la luz de nuestros conocimientos grafostáticos o los citados de la Resistencia de Materiales. En esta Tesis nos limitaremos al análisis de dichas estructuras teniendo en cuenta los procedimientos de la Estática Gráfica.

En la actualidad, los arquitectos estamos habituados a calcular las estructuras de nuestros edificios, o a analizar el estado de servicio de edificios antiguos de los que proyectamos su rehabilitación con los procedimientos de la Mecánica y la Resistencia de Materiales, en la que podríamos incluir a la Grafostática como un instrumento de primer orden, en tanto en cuanto, para la rehabilitación de determinadas estructuras puede constituir una ayuda impagable.

Reconociendo nuestra ignorancia sobre algunos de los procedimientos constructivos utilizados para la ejecución de algunas de aquellas, nos hemos afanado en plantear hipótesis tanto constructivas como de su comportamiento estructural y equilibrio.

Las directrices que ya Vitrubio nos daba en su Tratado, no conducían al dimensionado estructural correcto, en el sentido de que los órdenes arquitectónicos, comportaban secciones estructurales que crecían con el cuadrado del módulo utilizado, siendo que las cargas que aparecían sobre dichas secciones crecían con el cubo del módulo. Los colapsos estructurales derivaban fundamentalmente de esta relación Cuadrado-Cubo. Las secciones constructivas de los edificios, como las que se muestran en la Fig. 3.40. de un edificio medieval, manifiestan toda una serie de artificios destinados a aligerar o cargar para contrarrestar, en ausencia de conocimientos más precisos del comportamiento estructural. Lo que sucedía,

---

<sup>37</sup> Arnau Amo, Joaquín. *La teoría de la Arquitectura en los Tratados*. Tomo II (Alberti) Tebar Flores: Madrid. 1988.

afortunadamente, es que las tensiones de trabajo resultaban muy inferiores a los estados límite últimos de agotamiento resistente de los materiales que se utilizaban. El auxilio de arcos adintelados, arcos de descarga, y las vigas de madera de importantes secciones, hacían estables las construcciones aun con los errores que señalábamos.

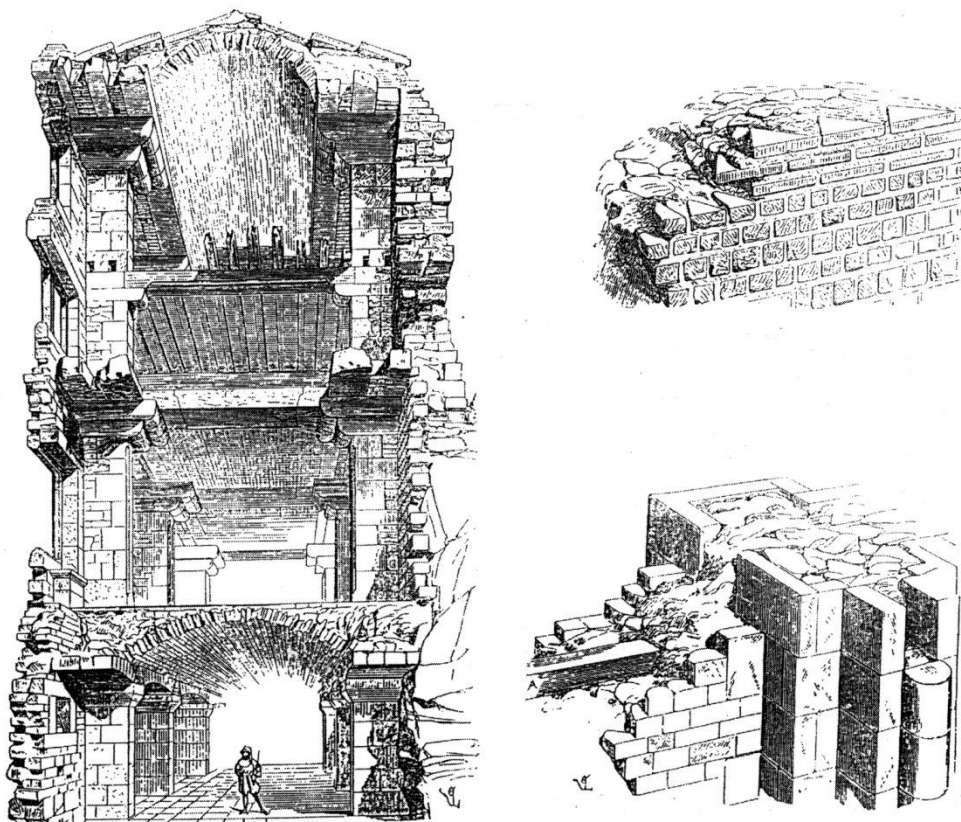


Fig. 3.40. Sección constructiva de un edificio medieval. Detalles de la construcción de muros romanos y medievales. La estructura interna se aprecia con claridad con rellenos de cascote con manifiesta irregularidad. (Viollet-le-Duc, 1854)<sup>38</sup>

Todos sabemos que ya no se construyen bóvedas, salvo en el caso de edificios históricos que se rehabilitan y la tradición de su ejecución se ha perdido, siendo pocos los arquitectos que han visto construir alguna, por sencilla que sea. Salvo experiencias vividas en determinados pueblos más o menos primitivos, carecemos del oficio y la experiencia de los antiguos maestros de obras que seleccionaban las piedras, dibujaban las plantillas para el corte adecuado de las mismas, construían las cimbras y controlaban el proceso de ejecución hasta el descimbrado definitivo.

<sup>38</sup> Viollet-le-Duc, Eugène Emmanuel. *Entretiens sur l'architecture*. A. morel et Cie. Éditeurs: Paris. Edición digitalizada por Harvard College Library.

En su Tratado de Arquitectura, Rodrigo Gil de Hontañón advertía hacia 1540,<sup>39</sup> tras la descripción de la construcción de una bóveda de crucería gótica, de la dificultad de comprender el proceso para quienes quisieran construirlas faltándoles la experiencia, la práctica, la profesión de la cantería, o haber estado presentes en el cierre de la crucería de dichas bóvedas.

Sin estar exactamente a nuestro alcance, a día de hoy, la construcción de una bóveda de crucería gótica, como la de la Fig. 3.41., si tratamos de comprender su comportamiento estructural y extraer consecuencias mecánicas y constructivas para posibles intervenciones, poniendo en práctica nuestros conocimientos grafostáticos.

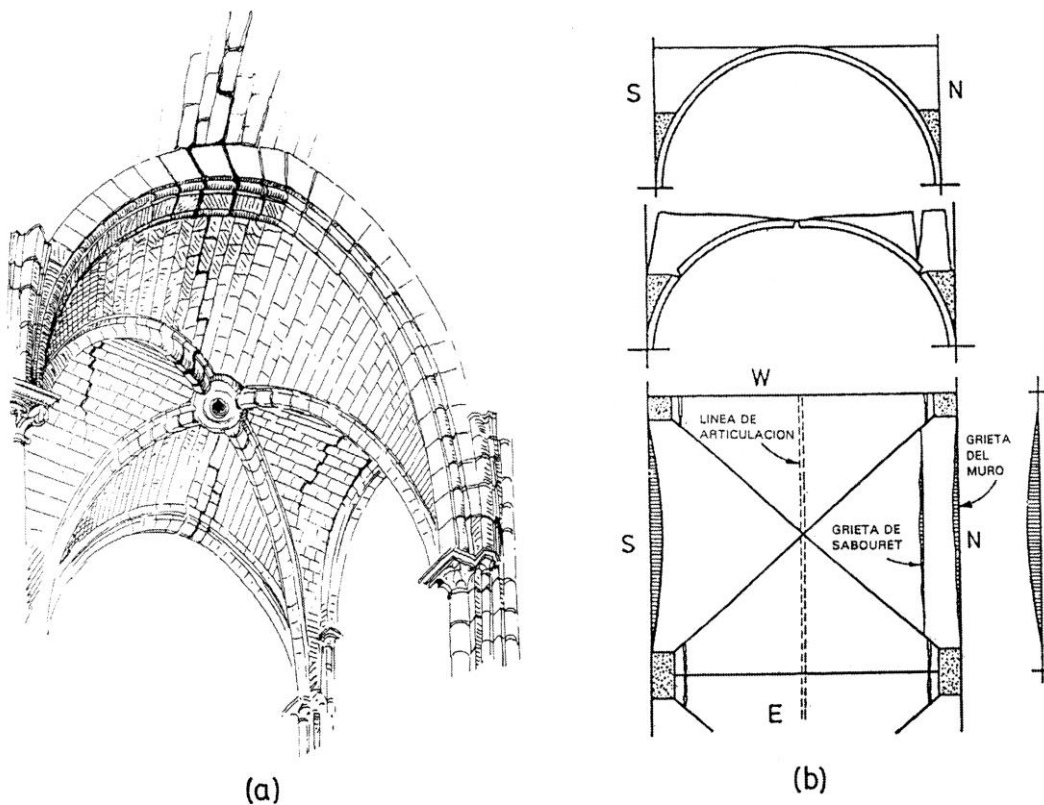


Fig. 3.41. Grietas en una bóveda de crucería cuatrimpartita gótica. Las grietas dividen la estructura en una serie de bloques que permiten los movimientos impuestos por el entorno. (Abraham, 1934)<sup>40</sup> Interpretación del agrietamiento. (Heyman, 1983).<sup>41</sup>

<sup>39</sup> Gil de Hontañón, Rodrigo. *Manuscrito*. 1540. (Recogido en todo o en parte en el manuscrito de Simón García *Compendio de Arquitectura y simetría de los templos*, 1681). Ed. facsimilar y transcripción. Colegio Oficial de Arquitectos, de Valladolid. Valladolid. 1991.

<sup>40</sup> Abraham, Pol. *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*. Vicent, Fréal et Cie: Paris.1934.

<sup>41</sup> Heyman, Jacques. *Chronic defects in masonry vaults: Sabourets cracks*. Monumentum.26: 131-141. (Traducido al castellano en Heyman 1995, 265-72)

Como es bien sabido, es fundamental en el estudio de las bóvedas el cálculo de los empujes que estas transmiten a los elementos sustentantes. Una cierta familia de planos de corte puede ayudar a dicho cálculo con ayuda de un esquema grafostático. Consideremos, por ejemplo una bóveda tardo-gótica española. Su geometría es parecida a la de una bóveda vaída, obtenida al cortar una semiesfera con eje vertical por cuatro planos proyectantes verticales. Sus nervios se encuentran, de esta manera, sobre una superficie relativamente esférica y los pliegues, en los que hay un cambio brusco de curvatura, se producen sobre los arcos perpiaños, que en estas bóvedas tienen un mayor espesor que los arcos de la crucería.

Si se corta la bóveda con una serie de planos verticales paralelos al eje mayor de la nave, los arcos elementales resultantes tienen forma semicircular y si consideramos una bóveda de peso y geometría equivalente, con espesor constante, incluyendo la plementería, las claves y los nervios, podemos deducir la distribución de cargas verticales sobre los arcos perpiaños desarrollando en vertical cada uno de los semiarcos, siendo que las componentes horizontales a cada lado del arco perpiaño se anulan entre sí. Salvo un incremento significativo en la zona de los arranques, podemos considerar una distribución uniforme de carga, si no tenemos en cuenta estos incrementos, que se producen en la zona de los enjarjes de la bóveda, que prácticamente pertenece por construcción a la pilastra.

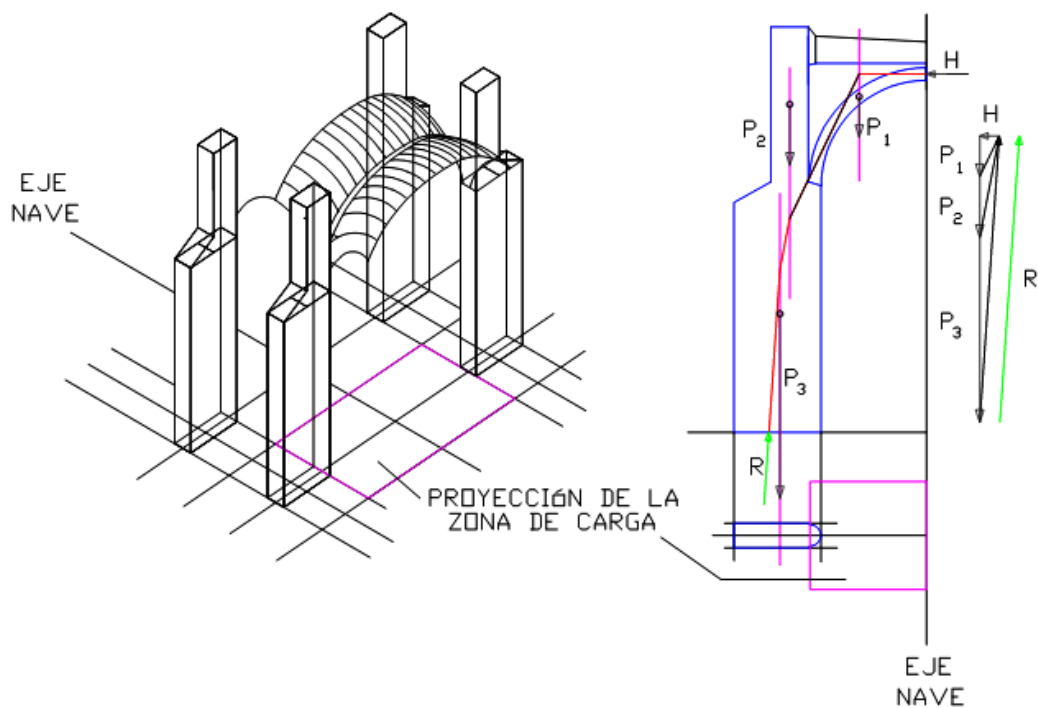


Fig. 3.42. Análisis del equilibrio de las bóvedas tardogóticas españolas como las del convento de Santo Domingo en Medina de Rioseco. Valladolid. El dibujo y cálculo grafostático de los empujes han sido realizados siguiendo una propuesta del profesor Santiago Huerta para Informes de la Construcción. (Huerta, 2005 ) (Dibujos y cálculos propios)

El peso de la bóveda es de un orden de magnitud mayor que el arco perpiaño, por lo que es posible comprobar la estabilidad del arco perpiaño, considerando una carga repartida uniforme, que se puede obtener dividiendo el peso total de la bóveda entre la luz del arco perpiaño.

No se ha tenido en cuenta en este cálculo del empuje de bóvedas del gótico tardío español, lo que aportan los muros entre los estribos, ya que existe, de hecho, algún tipo de conexión entre el muro y el estribo, parte del peso del muro debe contribuir a aumentar la estabilidad. Creemos, sin embargo que quedamos del lado de la seguridad, ya que en el análisis grafostático, se demuestra como la resultante pasa por el núcleo central de la sección (1/3).

En análisis reales realizados sobre estructuras de este tipo, se ha establecido que los coeficientes geométricos observados son más restrictivos que los obtenidos en nuestro cálculo de las bóvedas del gótico tardío español, llegando a estar el empuje contenido en el cuarto central de la sección de la pilastra.

En particular en el cálculo de los empujes de arcos y bóvedas, lo hacemos con las reglas que el conocimiento científico que la Resistencia de Materiales y la Mecánica nos ha dado, pero se trata de un conocimiento muy reciente en la historia de la Arquitectura, s. XVII, XVIII y como hemos ya apuntado, el XIX, con la aparición de la Grafostática, cuya validez aquí reivindicamos.

Pero resulta evidente, que Santa Sofía, su vecina mezquita azul en Estambul o el Panteón de Agripa de Roma fueron construidos y ahí están, dando testimonio de unos cálculos, que podríamos denominar, empíricos, fruto de la observación de lo ya construido o lo que estaban construyendo y naturalmente de algunos fracasos estructurales, que, comportaron experiencia y unas magistrales recetas, como las de los arquitectos romanos dando al tambor que soporta una cúpula un espesor de 1/7 de la luz de ésta, o los maestros de obras del gótico que dimensionaban los estribos que sustentaban las bóvedas de las naves centrales con 1/4 de su luz y durante el Renacimiento y el Barroco con algo más de 1/3 de la de sus bóvedas de cañón.

Comprobaremos mediante los cálculos grafostáticos que a continuación se muestran, varias de estas reglas (casi recetas maestras), como en el caso de estabilidad de arcos. Para ello, hemos hecho el ejercicio de comparar los resultados de los espesores de los estribos, derivados de la aplicación de las mismas con los obtenidos con nuestros cálculos grafostáticos, concluyendo que todas quedan del lado de la seguridad, con espesores bastante mayores de los estrictamente necesarios.



Fig. 3.43. Santa Sofía de Constantinopla. (Fotografía propia)

La iglesia de Santa Sofía es de planta cuadrada. Su gran innovación arquitectónica fue la de apoyar su inmensa cúpula central (de 32,6 metros de diámetro y 55 m de altura), sobre un sistema de cuatro pechinas, que la sostienen conjuntamente con los pilares de la planta y las dos grandes semicúpulas laterales, las cuales a la vez se sustentan en otras cúpulas periféricas y contrafuertes que transmiten los empujes a las naves laterales de la construcción.

Esta innovadora disposición, provoca la sensación de que toda la estructura parece contribuir a sustentar la cúpula central y produjo una verdadera revolución arquitectónica en la historia de las “recetas” constructivas, de las que los arquitectos y maestros de obras de la época y posteriores tomaron sin duda buena nota.

Construida por Isidoro de Mileto y Artemio de Tralles ( S.V) Su bóveda de media naranja se asienta sobre unos pequeños contrafuertes de anchura similar a la de las ventanas y gran espesor. Dichas ventanas iluminan su interior creando el efecto interno de estar flotando. La cúpula no tiene tambor. Dos semicúpulas laterales y dos enormes contrafuertes en los lados opuestos equilibran los empujes. Los minaretes fueron construidos con posterioridad a la caída de Constantinopla bajo el imperio otomano, de cuyo esplendor da muestra la mezquita azul, vecina en el espacio, no en el tiempo.

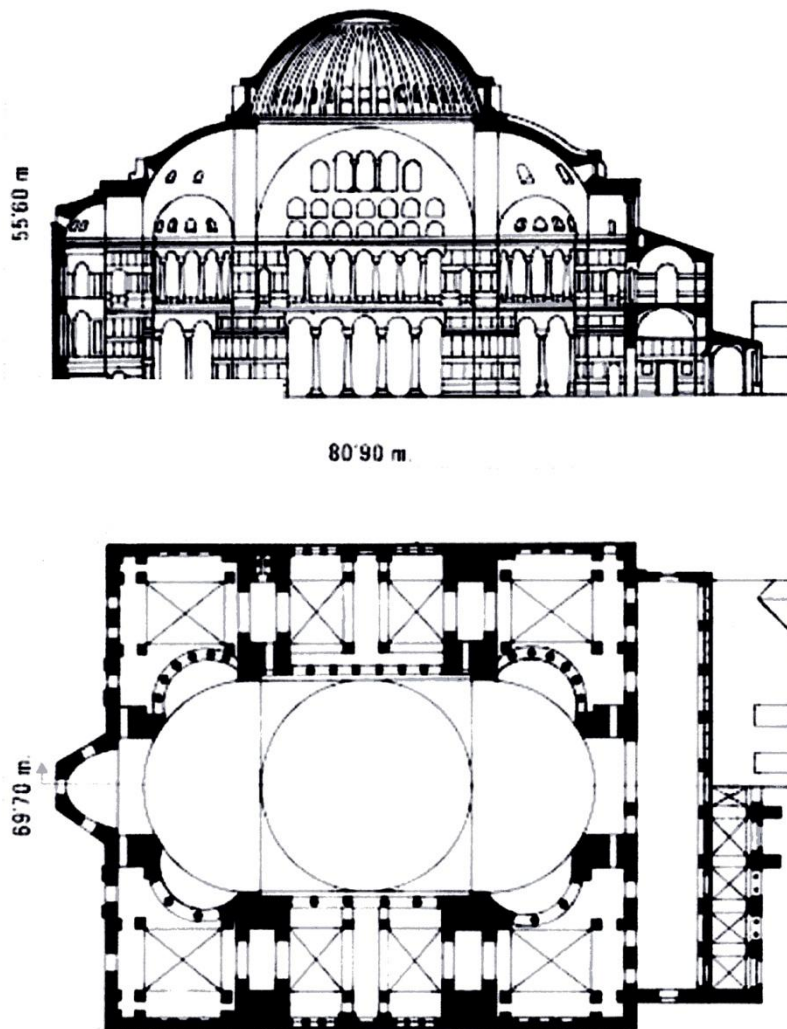


Fig. 3.44. Planta y sección de Santa Sofía. (D. P.)

Santa Sofía es un claro ejemplo de los conocimientos adquiridos por la experiencia, dado que se puso un interés especial en su construcción. Se cimentó sobre roca dura, con criptas abovedadas, pilares subterráneos y contrafuertes simétricos y con todo esto, la cúpula primera se vino abajo a los pocos años de su construcción, rehaciéndose al final del imperio de Justiniano, con una forma menos atrevida y con una bóveda cuyos empujes estuvieron mejor contrarrestados, fruto de la experiencia obtenida tras su primer intento. (Vera, 2001: 25).<sup>42</sup>

<sup>42</sup> Vera Botí, Alfredo. *De los descubrimientos teóricos: Desde la construcción empírica al cálculo de las estructuras*. Catálogos de Arquitectura. Nº 9. Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia: Murcia. 2001.



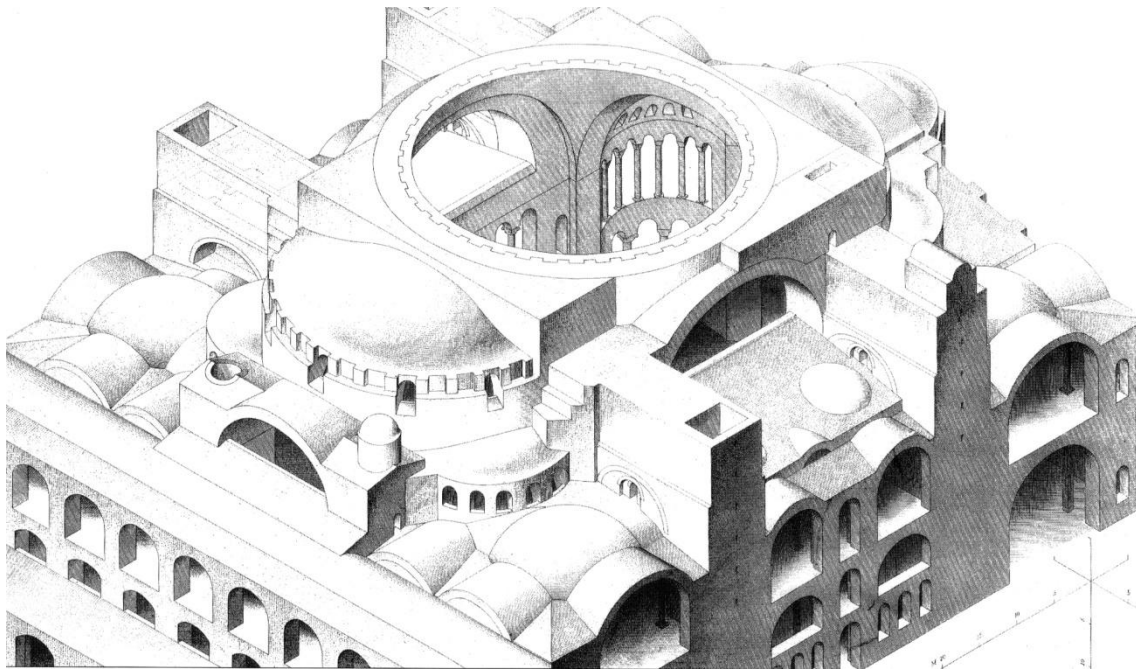


Fig. 3.45. Perspectiva axonométrica de Santa Sofía, mostrando el sistema de escalonamiento de los contrarrestos. Lámina XXIV de *L' Art de bâtir chez les Byzantins*, A. Choisy.<sup>43</sup>

Sobre la rotura y el hundimiento de la primera construcción de Santa Sofía, no tenemos datos suficientemente fiables, aunque a la luz de los conocimientos actuales, cabe hacer un breve análisis, en el que también la Estática Gráfica, nos puede orientar, siquiera con su contribución a la determinación de las líneas de empujes y el posterior razonamiento de la situación de las rótulas que condicionan la posible rotura.

Se pueden construir cáscaras de fábrica muy delgadas, siempre que se rebajen, o que a partir de la zona donde aparecen las tracciones, haya un escape a los empujes que a partir de ese punto se desviarán de la superficie media. Los constructores de la antigüedad debían tener conocimiento de esta propiedad o por lo menos la experiencia de los resultados de no tenerla en cuenta, por lo que reducían el espesor de las cúpulas que construían en su parte superior, regresándolo desde la zona aproximada de la mitad de su altura. Éste es el caso del Panteón de Agripa en Roma o de Santa Sofía en Estambul.

<sup>43</sup> Choisy, Auguste. *L' Art de bâtir chez les Byzantins*. (Texte et Planches) Librairie de la Société Anonyme de Publications Périodiques: Paris 1883.

Choisy, Auguste. *Histoire de l'architecture*. (T. I et II). Gauthiers –Villars: Paris 1899.

Es habitual el empleo de la idea de suponer una cúpula de fábrica, formada por una serie de semiarcos que se obtienen por el hipotético corte de la cúpula mediante planos correspondientes con los meridianos de la misma a modo de gajos de naranja. Dos semiarcos opuestos constituyen un arco completo y si podemos inscribir una línea de empujes en su interior, el arco será estable. Extendiendo el análisis a la totalidad de arcos iguales, comprenderemos el conjunto de la cúpula y por tanto la estabilidad de la totalidad de los arcos implicará la de la cúpula. (Fig. 3.46)

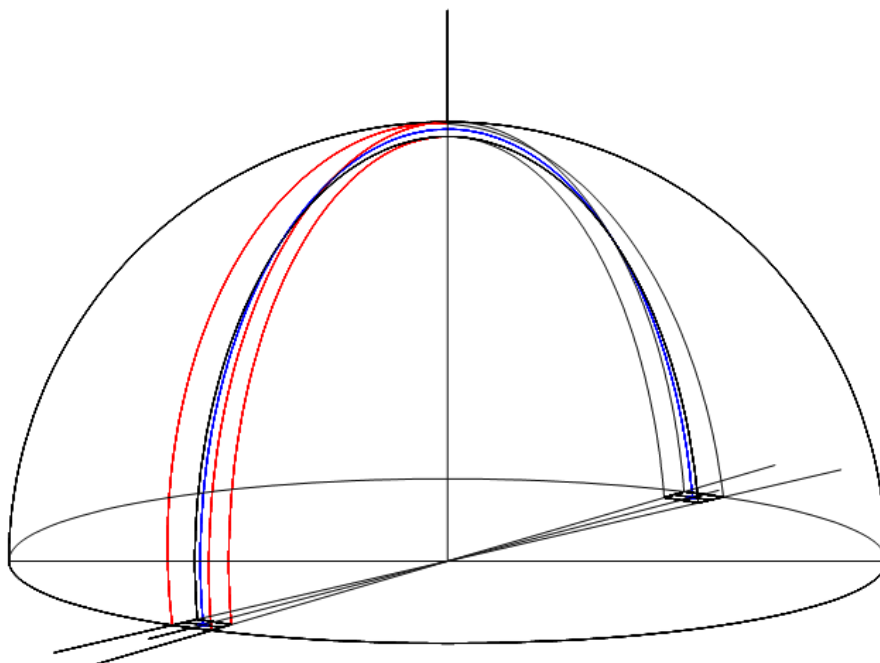


Fig. 3.46. Estudio del equilibrio a compresión de una cúpula de revolución, utilizando el llamado Método de los cortes. (Dibujo propio)

La gran ventaja de este tipo de análisis radica en la facilidad del estudio de la estabilidad de la cúpula reducida a la estabilidad de los arcos. El dibujo de las líneas de empuje se realiza de la misma manera que en el caso de los arcos, reduciendo el problema espacial a un análisis en el plano de los arcos correspondientes. (Huerta, 2004: 444) <sup>44</sup>

La Estática Gráfica nos permite comprender el funcionamiento del método explicado, con el cálculo de la línea de empujes de una cúpula de revolución maciza. El análisis que realizamos en la Fig. 3.47, consiste en determinar en primer lugar los Centros de Gravedad de las hipotéticas dovelas en que hemos dividido el arco virtual

<sup>44</sup> Huerta, Santiago. *Arcos, bóvedas y cúpulas*. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Instituto Juan de Herrera: Madrid. 2004.

correspondiente a uno de los “gajos” en que hemos dividido la bóveda, cortándola mediante planos meridianos. Se ha representado, además el procedimiento grafostático del cálculo del Centro de Gravedad de la primera de las dovelas de sección trapezoidal.

Las líneas 1', 2', ...8', son las rectas de acción de los vectores deslizantes del sistema, que corresponden con los pesos de las dovelas 1, 2, ...8. El polígono de fuerzas construido, con polo O a la izquierda del mismo, determina los radios polares cuyas paralelas haremos pasar consecutivamente por las rectas de acción 1', ... ,8', determinando el polígono antifunicular de las cargas ( $P_1 + L$ ) de la primera dovela más la de la linterna,  $P_2, \dots, P_8$ .

Las intersecciones de los lados del polígono antifunicular con los lados rectos de las dovelas, 1, 2, ..., 8, determina la Línea de Empujes. Su inclusión en el interior del espesor de la bóveda es determinante para la estabilidad de la misma. Obsérvese que la forma final de la línea de empujes, se separa de la línea media del espesor de la cúpula (sería la línea no dibujada que uniría los puntos C.D.G. de las dovelas), a uno y otro lado de ella, aproximándose a una ideal línea catenaria.

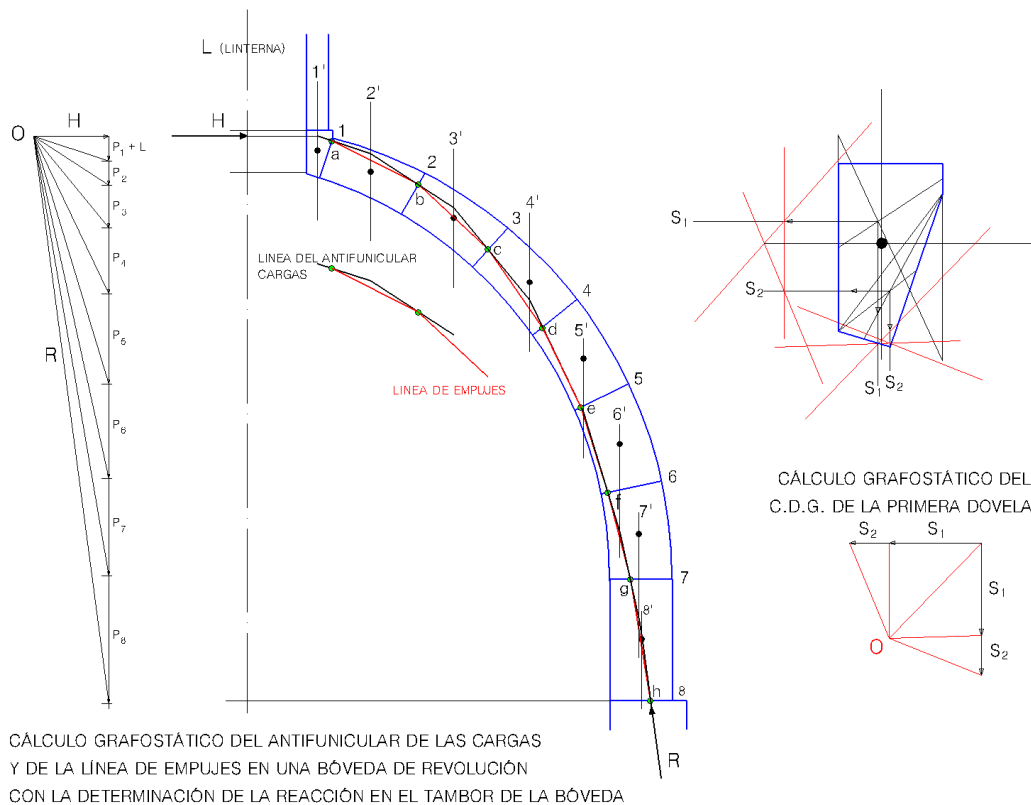


Fig. 3.47. Análisis grafostático del equilibrio de una cúpula de revolución, dividida en gajos, a su vez divididos en dovelas por los planos 1,2,...,7 y 8. Aparece dibujado el antifunicular de las cargas, con las líneas de corte en las verticales que pasan por los centros de masas de cada dovela, señalándose los puntos de la línea de empujes a, b,...,g y h, como intersección del polígono antifunicular con las secciones 1,2,...,7 y 8. (Dibujos y cálculos propios)

Resultan razonables este tipo de análisis desde el punto de vista de la seguridad. Pero hay razones mecánicas que justifican las divisiones descritas en el método de los cortes y tienen que ver con los agrietamientos habituales de las cúpulas de fábrica por pequeños movimientos. Al empujar la cúpula hacia afuera de forma radial, hace falta un contrarresto mediante algún sistema de estribo. No siendo éste infinitamente rígido, aparecerá un ligero cedimiento hacia afuera, con una distribución también radial y dada la simetría de la cúpula, aumentará la longitud de la circunferencia de la base. La cúpula tiende entonces a agrietarse con dirección de agrietamiento según los meridianos.<sup>45</sup>

Cuando las cúpulas no tienen linterna, las grietas desaparecen a una cierta distancia de la clave, quedando el casquete superior sin fisurar. La Fig. 3.48. muestra en el dibujo de la izquierda la cúpula fisurada, cuyo comportamiento puede corresponderse exactamente al estudiado en el método de los cortes. En el de la derecha se observa como el agrietamiento está determinado por la tangencia de la línea de empuje con el trasdós de la cúpula.

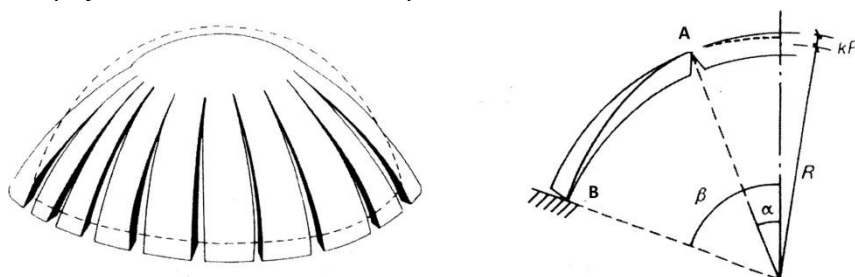


Fig. 3.48. Hipótesis de agrietamiento de una cúpula de fábrica, por el efecto de cedimientos uniformes de los contrarrestos. Trayectoria de la línea de empujes que llega a ser tangente al trasdós antes de alcanzar la clave, señalándose el agrietamiento de la zona inferior y permaneciendo sin agrietar el casquete superior. (Heyman, 1988).<sup>46</sup>

La línea de empujes se ha trazado, en el dibujo superior derecho, mediante el procedimiento grafostático descrito en la Fig. 3.47. mostrando el antifunicular de las cargas debidas al peso propio, apreciándose los puntos de tangencia B y A en el intradós y trasdós de la cúpula, respectivamente, lugares en los que comienzan y acaban las fisuras.

<sup>45</sup> Aunque la primera interpretación de los agrietamientos de las cúpulas de fábrica, debidos a los cedimientos de los contrarrestos, se debe a los tres prestigiosos matemáticos Tommaso Le Seur, Francesco Jacquier y Ruggiero Giuseppe Boscovich, con motivo del encargo de un informe sobre la cúpula de San Pedro del Vaticano en 1742, el ingeniero británico Jacques Heyman, ha incorporado el estudio de las grietas en sus trabajos sobre el análisis límite de las estructuras de fábrica. Ver (Heyman, 1995).

<sup>46</sup> Heyman, Jacques. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. Cambridge University Press: Bambridge. 1988. Heyman, Jacques. *Estructuras de fábrica*. Instituto Juan de Herrera: Madrid. 1995.

En relación con las fisuras producidas en las cúpulas, conviene tener un cierto conocimiento de la relación existente entre los desplazamientos horizontales producidos en la entrega y los descensos verticales de la zona superior del trasdós. Conociendo la apertura radial en el plano horizontal, se puede determinar el descenso del casquete de la clave de la cúpula. Se ha resumido este análisis para la cúpula de Santa Sofía. En la Fig. 3.49. se muestra la sección, ampliándose la zona de la cúpula, en la Fig. 3.50, para comprobar el trazado de la línea de empuje mínimo <sup>47</sup>, para la estructura sin deformar. se han señalado los puntos de tangencia A y B con el trasdós y el intradós, respectivamente, localizándose en ellos las rótulas del mecanismo. Cuando las deformaciones llegan a ser importantes, como las que se han representado, aparecerá una convexidad hacia abajo, en la zona de la primera rótula.

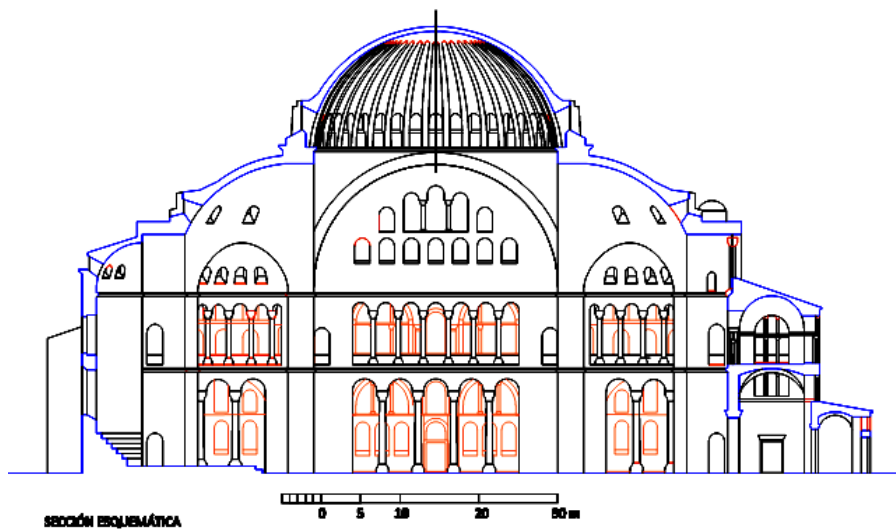


Fig. 3.49. Sección longitudinal esquemática de Santa Sofía de Estambul. (Dibujos propios).

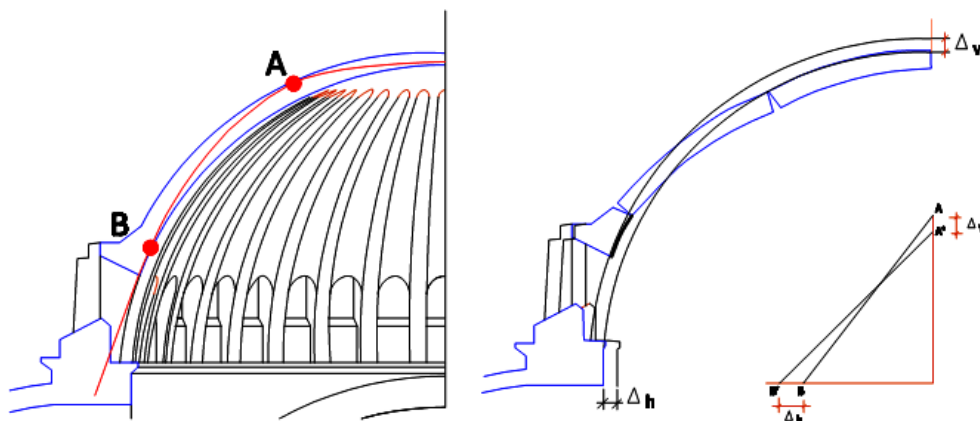


Fig. 3.50. Análisis del cedimiento del sistema de contrarrestos de la cúpula de Santa Sofía de Estambul. (Dibujos propios).

<sup>47</sup> La línea de empuje mínimo, se ha dibujado mediante el cálculo grafostático del funicular de las cargas correspondiente al peso propio de un sector circular. El empuje horizontal en la clave supera la línea del núcleo central de la sección, de igual manera que la resultante también lo hace en la entrega del "arco" al que se asimila el sector de cúpula.

. La mezquita azul de Estambul, obra del arquitecto Sedefhar Mehmet Ağa, alumno y ayudante principal del arquitecto Sinan fue mandada construir por Ahmed I (s. XVI). El documento que recoge la minuciosa descripción de la construcción (proyecto de ejecución) consta de ocho volúmenes y se encuentra entre los tesoros del palacio Topkapi de Estambul. La transmisión de los empujes se produce aquí mediante un sistema de medias cúpulas y exedras inferiores, aunque destaca la exagerada dimensión del diámetro de las cuatro pilastras principales, parece que sobredimensionadas para las dimensiones de la cúpula central, de unos 23m de diámetro.

La forma de contrarrestar los empujes es consecuencia de las experiencias constructivas aprendidas por los arquitectos y de una larga tradición en la arquitectura religiosa musulmana. En la arquitectura de las mezquitas, se repiten una serie de invariantes que se pueden apreciar en los planos de la mezquita Yesil Cami. (Kuran, 1968: 116).<sup>48</sup> Dejamos el estudio grafostático de su estabilidad para futuros trabajos.



Fig. 3.51. Vistas de la mezquita azul de Estambul. Contrarrestos exteriores. Interior con una de las pilastras principales. Vista aérea desde el sur, con el Bósforo al fondo. Interior de la cúpula principal y las semi cúpulas secundarias (Fotografías propias y de Sacred Destinations Images).

<sup>48</sup> Kuran, Aptullah. *The mosque in early Ottoman architecture*. University of Chicago Press: Chicago 1968.

En base a los análisis anteriores, podemos afirmar que los arquitectos y maestros de obras sabían manejar la disposición de las masas, los huecos, los espacios, la relación armónica entre ellos y el comportamiento de las fábricas que conformaban lo edificado. Para Viollet-le-Duc, los templos griegos no eran solamente perfectos en su forma, sino en cuanto a materiales y su disposición constructiva, que en contra de la teoría vitruviana, no habían sido traspasados de la madera a la piedra, sino concebidos directamente para ser construidos en ella.

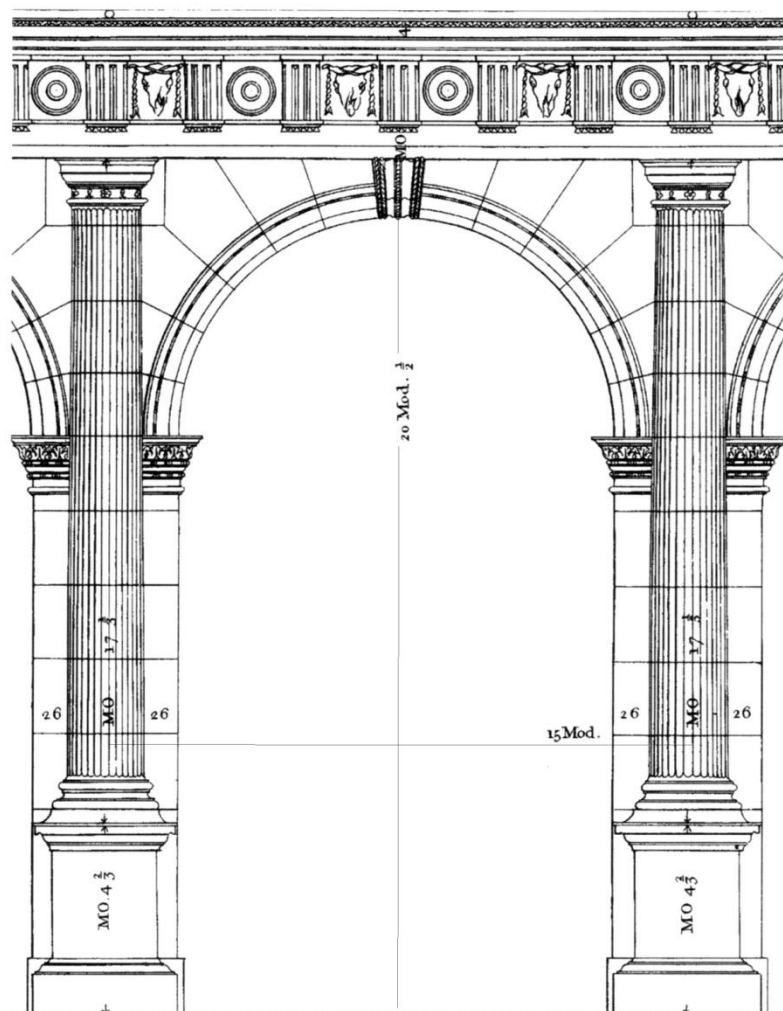


Fig. 3.52. El orden aplicado en combinación con arcos según Palladio. (D.P.).

Agrupados en gremios, los arquitectos y maestros de obras transmitían sus conocimientos, experiencias y reglas constructivas, de forma oral de maestros a aprendices, permaneciendo ocultos de manera que fuera del gremio no se conocieran, contribuyendo de esta manera a la estabilidad de su profesión, no exenta de cierto ocultismo, incluso algo misterioso. Recuerda Vera (Vera, 2001:26)<sup>49</sup> como el propio

<sup>49</sup> Vera Botí, Alfredo. *De los descubrimientos teóricos: Desde la construcción empírica al cálculo de las estructuras*. Catálogos de Arquitectura. Nº 9. Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia: Murcia. 2001.

Vitrubio, no establece en su Tratado métodos que nos enseñen a dimensionar los elementos estructurales que describe en el mismo, excepción hecha de la que implica la construcción de los órdenes arquitectónicos.

La Estática Gráfica nos ayuda a la comprensión del estable comportamiento de algunos de estos elementos estructurales, como en el caso de los arcos de la Fig. 3.52. anterior, cuya estabilidad analizamos en la siguiente, Fig. 3.53.

- Hemos comenzado esta comprobación de estabilidad haciendo las siguientes consideraciones:
- En base a su simetría, podemos suponer que las tensiones a que estará sometido el material que lo constituye, serán también simétricas, pudiendose estudiar solo la mitad del arco.
- Los esfuerzos en la clave del arco, también por su simetría, tendrán que ser horizontales.
- Las secciones verticales en que se ha dividido el arco, se corresponden con la intersección de planos verticales trazados por los puntos medios de los planos de contacto entre de las dovelas.
- Consideramos de arriba abajo las sobrecargas del arquitrabe, el peso propio del relleno sobre las dovelas y el peso propio del arco.
- Esto lleva a unas secciones variables de las dovelas, asimilando superficie con carga. O bien simplemente a considerar los vectores  $P_1$ ,  $P_2$ , ...,  $P_5$ , proporcionales a la carga total sobre cada dovela ficticia.

Con la construcción del antifunicular (Funicular 2) de las cargas que gravitan sobre las dovelas del arco con arranque horizontal, correspondiente al empuje  $H$ , dentro del nucleo central de la clave; se comprueba que la resultante  $R_B$  pasa por el tercio central de la entrega del arco, observando el paso de dicha línea de presiones por el nucleo central de las dovelas que garantiza sólo compresiones. El arco siguiente contrarresta la componente horizontal de dicha resultante, quedando condicionada la estabilidad a la resistencia a compresión de la pilastra.



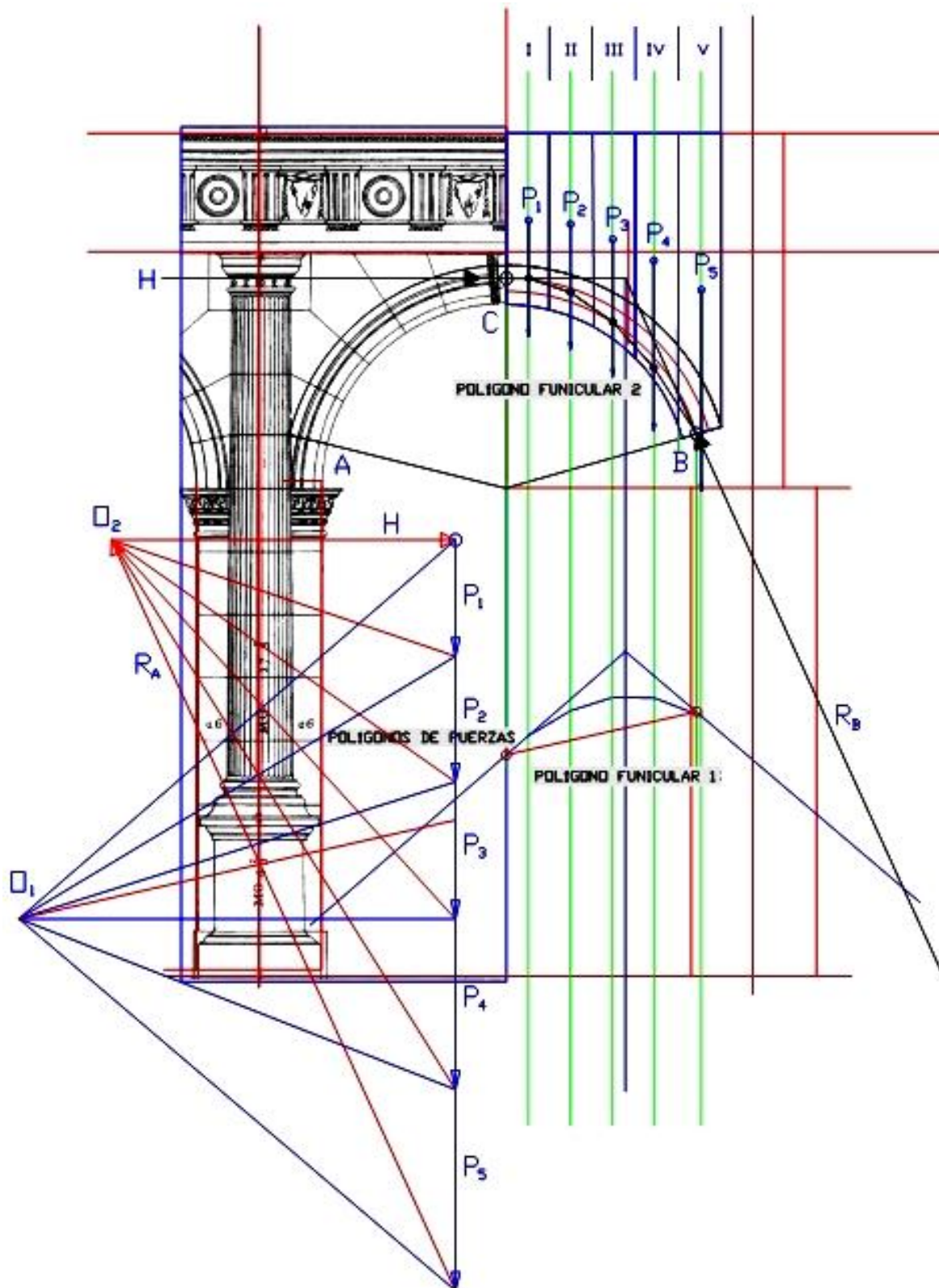


Fig. 3.53. Cálculo grafostático de la línea de presiones en el interior de uno de los arcos de la representación de Palladio. (Dibujos y cálculos propios sobre una lámina de Palladio).

La elección de un Polo arbitrario  $O_1$  conduce a un Polígono de fuerzas y a un Funicular (en la Fig. 3.53. grafiado en azul) que, como es natural, no tiene por qué tener el primer lado horizontal. Una vez construido este primer Funicular 1, es posible, con los conocimientos de la Estática Gráfica, construir el Funicular 2 que sí tendrá el arranque horizontal y que nos mostrará si la Línea de presiones se mantiene dentro de los márgenes de los tercios centrales de las dovelas o hay puntos en que los sobrepasa( como se muestra en la construcción realizada y finalmente si la Reacción RB termina fuera o dentro de estos márgenes.

Es importante tener en cuenta la trayectoria que la línea de presiones sigue a largo del desarrollo del arco y contar con el acercamiento o alejamiento de las líneas del tercio central, marcadas por los núcleos centrales de las dovelas. En la figura 3.54. de comprueba el efecto de una sobrecarga vertical sobre la clave y unos empujes adicionales en la zona de los arranques, manifestándose las posibles roturas.

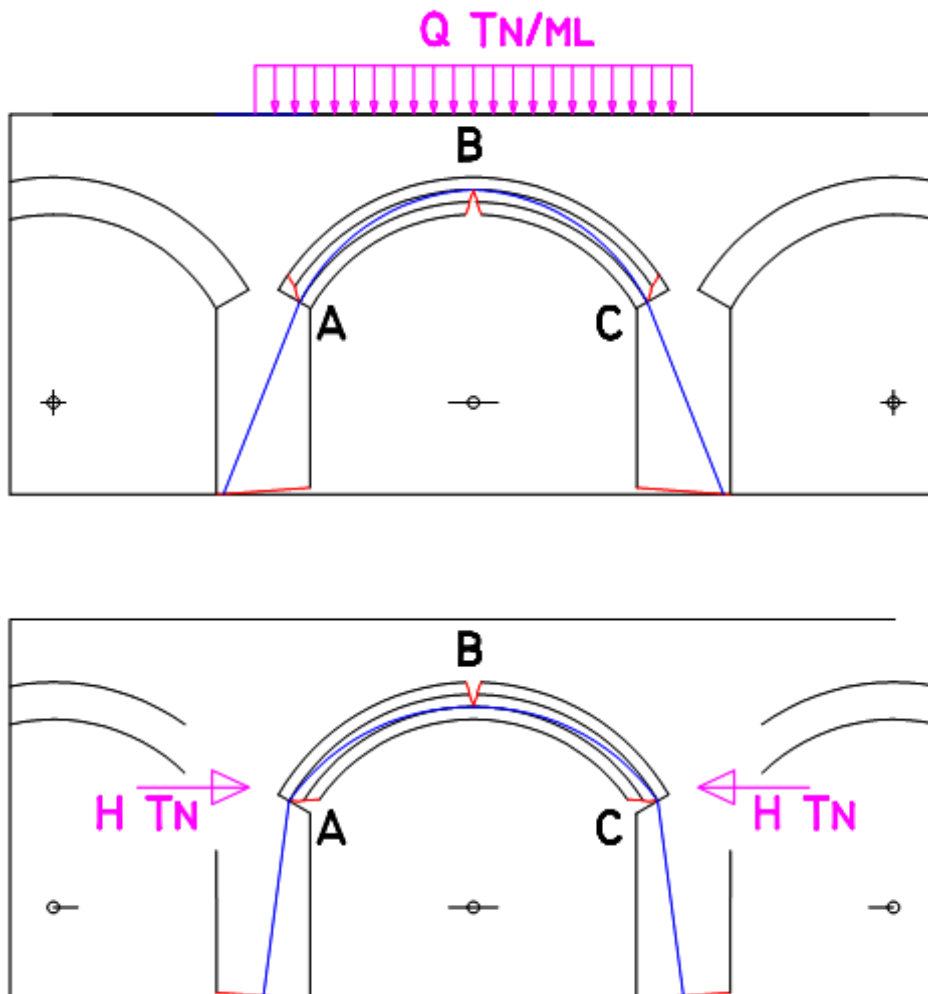


Fig. 3.54. Diagramas de rotura de arcos por sobrecarga vertical y por empujes horizontales en los arranques. (Análisis y dibujos propios).

El Panteón de Agripa constituye una de las estructuras de la antigüedad más interesantes desde el punto de vista del estudio de la estabilidad de las bóvedas. Fue construido fundamentalmente con Opus Caementicium, hormigón de cal con cascotes de más densidad en los muros que en la cubierta, en la que disminuye gradualmente el espesor con la proximidad al óculo, llegando a utilizarse piedra pómez en las zonas más elevadas de la cúpula, con la consiguiente disminución del peso. Los arcos y revestimiento de la cella fueron construidos con muro de ladrillo, empleando cascotes en el interior a modo de doble pared para encerrar masa suficiente y constituir un contrafuerte continuo que equilibrara el empuje de la cúpula.

Nuestro interés en esta Tesis Doctoral se centra en el análisis de la estabilidad de la cúpula, en cuya construcción debió utilizarse un soberbio andamiaje, probablemente de madera, para el vertido del material cementoso comentado y tras el fraguado, la transmisión de empujes, que analizamos esquemáticamente en la Fig. 3.55.

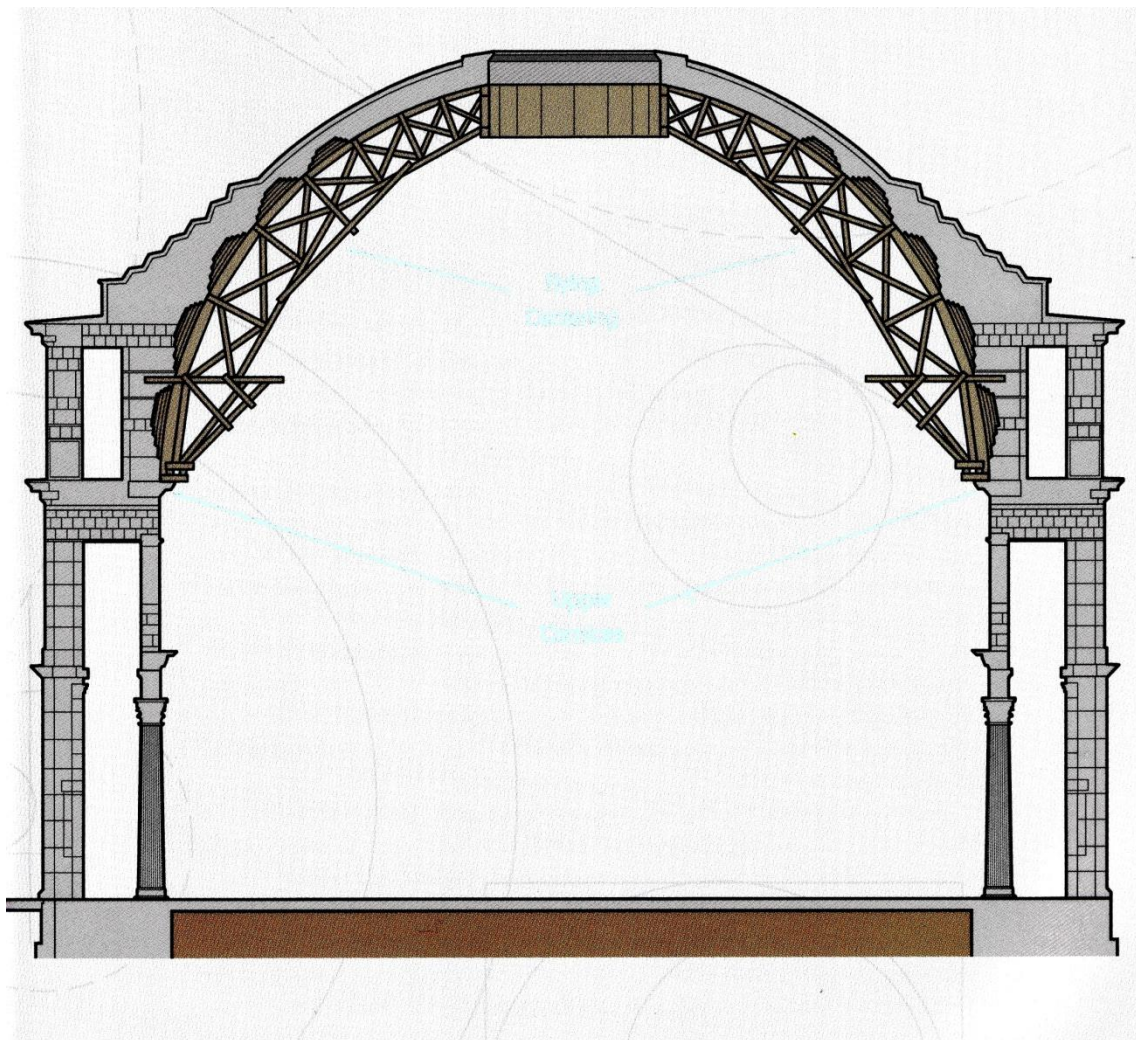


Fig. 3.55. Recreación de una estructura de vigas trianguladas de madera para el apeo del encofrado de los casetones del intradós de la cúpula, para el vertido y endurecimiento del hormigón. (Dutemple, 2003: 35).

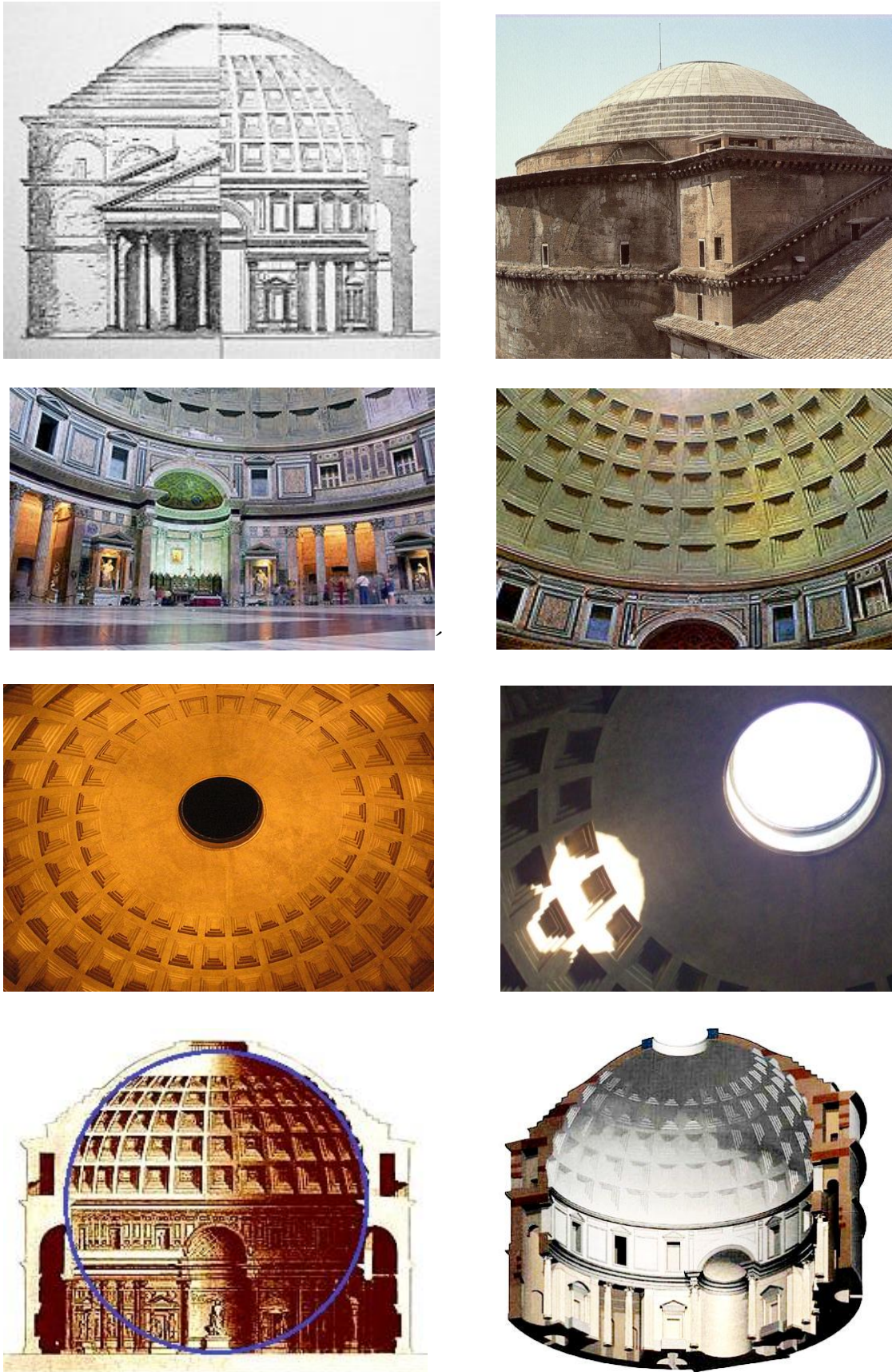


Fig. 3.56. Panteón de Agripa. Roma. Fotografías, alzados, secciones y perspectivas. (D.P. , MacDonald, 2002 y Dutemple, 2003)

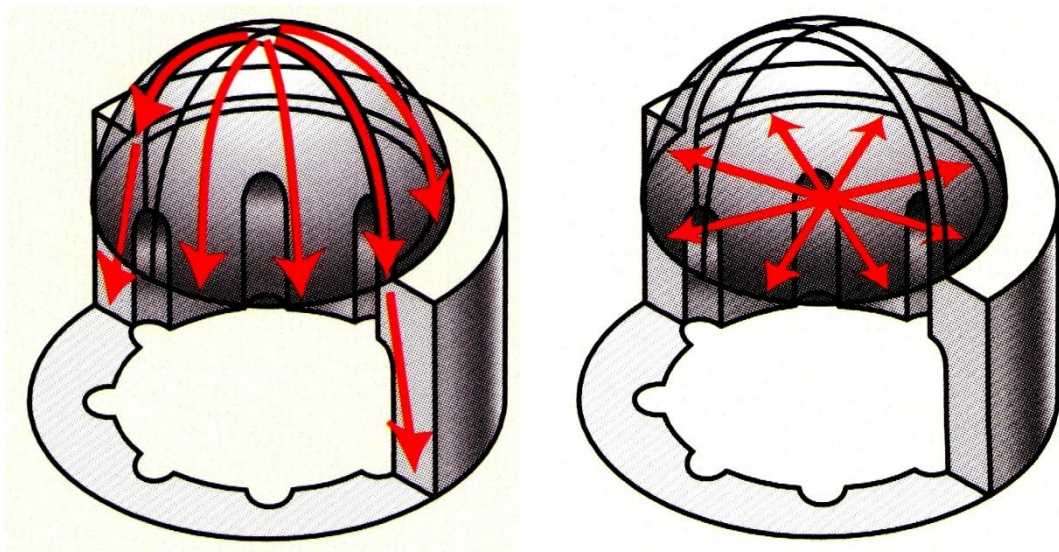
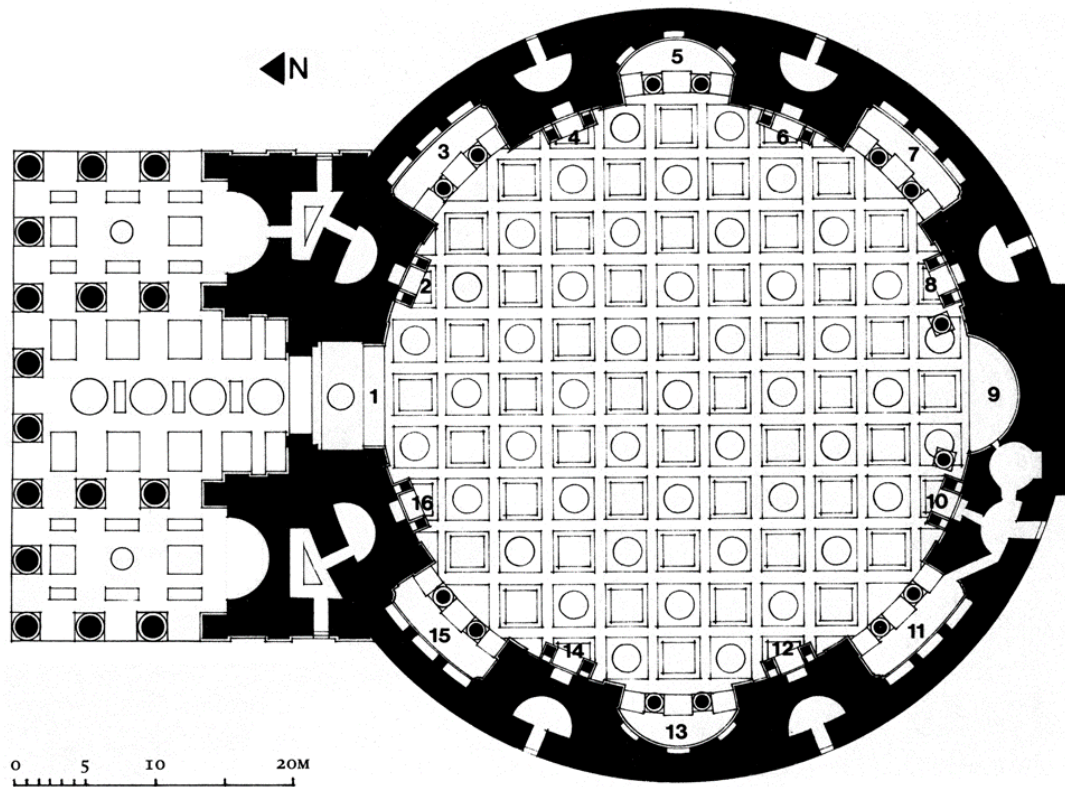


Fig. 3.57. Planta, sección para el análisis de la composición de los empujes de la cúpula del Panteón de Agripa. Roma. (MacDonald, 2002: 21 y Du Temple, 2003: 20).

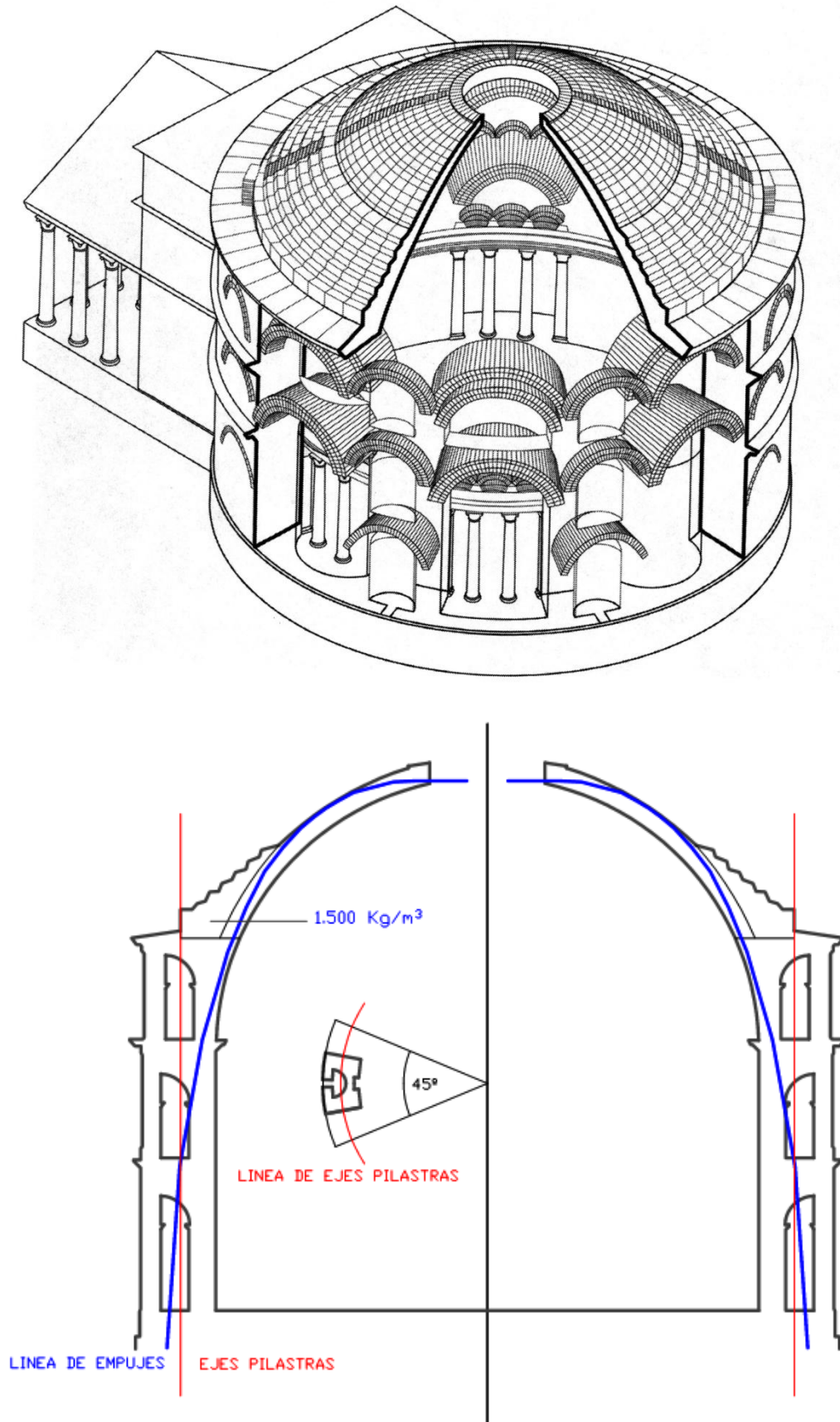


Fig. 3.58. Perspectiva axonométrica con sección al cuarto de la bóveda, mostrando los arcos de descarga de la misma. . (Dibujo de Lynne Lancaster )

Sección longitudinal esquemática por dos octantes con el cálculo grafostático de la línea de empujes. (Dibujo y cálculo propio)

Vemos, pues, como a lo largo de la historia de las construcciones, numerosas reglas han llevado a los arquitectos y maestros de obras a determinar las proporciones que debían tener los elementos constituyentes de las mismas para su garantía de estabilidad. Se trata en muchos casos de utilizar algo así como una razón de semejanza que hacía que si una construcción era estable con unas determinadas dimensiones, utilizando otras semejantes (en el sentido geométrico) deberían también serlo. Herón de Alejandría hacia el 60 d.C., escribió entre muchos tratados técnicos, uno específico sobre bóvedas, por desgracia desaparecido, al que hace referencia Artemio de Tralles, arquitecto de Santa Sofía. (Gillispie, 1970, Entradas: Herón y Artemio de Tralles).<sup>50</sup>

Desde la caída del Imperio Romano trajo consigo la pérdida de la perfección en las aplicaciones geométricas a la construcción que romanos y bizantinos habían utilizado y no es hasta la aparición del gótico, cuando de nuevo vuelve un mejor manejo de la Geometría, coincidiendo quizás con la primera traducción de la *Geometría* de Euclides en Europa hacia 1120 por Alejandro de Bath y la construcción de Saint Denis, que podemos considerar como la transición del románico al gótico.



Fig. 3.59. Vistas exterior e interior de Saint Denis. Paris. (D.P.)

Los procedimientos geométricos están muy presentes en la mayoría de los métodos de traza góticos, desde las generales de las edificaciones hasta las plantillas para el corte de los elementos de cantería y se continuó con su uso a lo largo de los siguientes siglos contando con numerosos “reglas” geométricas góticas para el cálculo de estribos, citadas por fuentes renacentistas y barrocas. Es el caso de las publicadas por

<sup>50</sup> Gillispie, Charles Coulston. *Dictionary of Scientific Biography*. Charles Scribner's Sons. New York. 1970-1980.

el arquitecto francés François Derand <sup>51</sup> en su tratado de estereotomía. En la Fig. 3.60. se reproduce La Regla geométrica nº 1 de dicho Tratado, consistente en dividir la longitud del intradós del arco perpiaño del tramo de bóveda correspondiente, en tres partes iguales y unir la primera parte con el arranque; prolongando el segmento correspondiente una longitud igual a la obtenida, su extremo señala el contorno exterior del estribo.

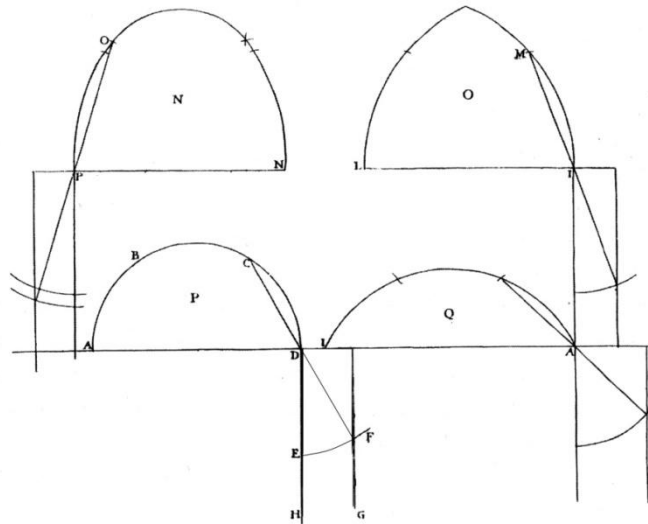


Fig. 3.60. Dibujo de la Regla geométrica nº1 para distintos tipos de arcos del tratado de Derand de 1643.

En la Fig. 3.61. hemos dibujado el cálculo de un estribo siguiendo en primer lugar (dibujo de la izquierda) la regla geométrica que aparece en varias partes del manuscrito de Hernán Ruiz el Joven, escrito hacia 1560 y que se conserva en la Biblioteca de la ETSAM. (Navascués, 1974: Láminas XXIII-XXV). <sup>52</sup>

Consiste en dividir el trasdós del semiarco en dos partes iguales y trazar la tangente en dicho punto a la curva, hasta encontrar la horizontal que une los arranques del arco. En el dibujo se señala el espesor ( $D_1$ ) así obtenido.

En el dibujo central se ha seguido la regla ya descrita de Derard, con un arco, también de medio punto, con las mismas dimensiones, hallándose una anchura ( $D_2$ ), bastante inferior a la primera.

Finalmente a la derecha hemos realizado el estudio a la luz de la Estática Gráfica, con un resultado intermedio, o sea,  $D_1 > D_3 > D_2$ . El cálculo grafostático se ha realizado, imponiendo que la reacción en el arranque del arco pase por el tercio central de la sección del estribo. Dibujado el funicular de las cargas correspondiente a

<sup>51</sup> Derand, François. *L'architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes*. Sebastian Cramoisy: Paris 1643.

<sup>52</sup> Navascués Palacio, Pedro. *El libro de la Arquitectura de Hernán Ruíz, el joven*. ETSAM de Madrid: Madrid. 1974.



los pesos de las dovelas y calculada la línea de empujes como antifunicular de dichas cargas, con arranque horizontal en la línea superior del núcleo central de la clave. La intersección de la línea de empujes con la horizontal trazada por los arranques del arco, marca la vertical que deberá estar contenida en el tercio central de la anchura del estribo. La construcción geométrica inferior nos da la dimensión total.

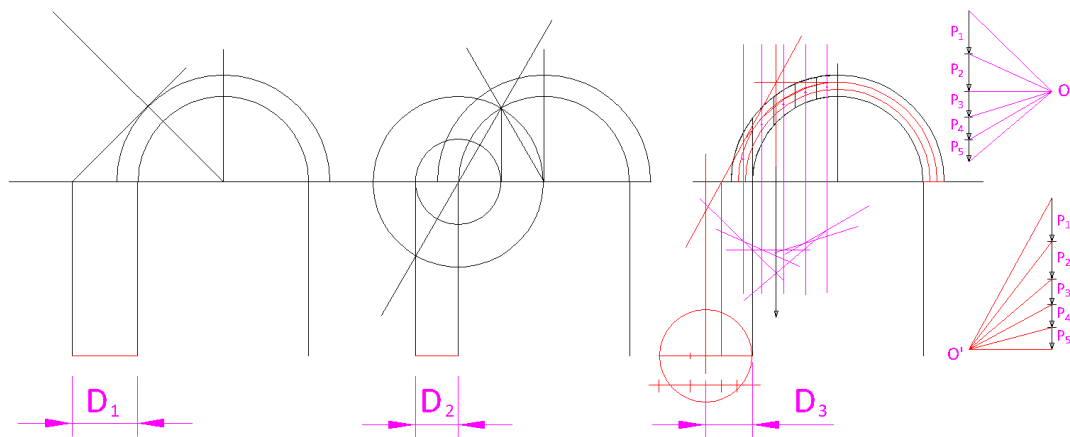


Fig. 3.61. Cálculo de los estribos de un arco de medio punto sometido a su peso propio. Regla de Hernán Ruíz el Joven. Regla de Derard. Cálculo grafostático de la anchura de los estribos del mismo arco de medio punto. (Dibujos y cálculos propios)

Podemos constatar, por tanto, como la Estática Gráfica proporciona una inestimable herramienta para el análisis del equilibrio de arcos y bóvedas. Las iglesias típicas góticas están constituidas por una nave central de altura considerable y otras dos laterales de menor altura. Las comprobaciones a realizar, resulta evidente que consisten en que el empuje de la nave central se contrarreste con el peso del muro que gravita sobre los pilares de ésta y con la trasmisión a los estribos exteriores mediante los arbotantes.

Son los arbotantes elementos clave para estos equilibrios a estudiar. Se trata de arcos por tranquil, rampantes o carpaneles, con los apoyos a distinto nivel y constituyen la evidencia de aquella expresión, que utilizábamos al comienzo de esta Tesis, de que la *“forma sigue siempre a las fuerzas”*.

Ya hemos visto cómo se puede determinar el empuje de una bóveda, por lo que, dicho empuje se transmitirá desde la misma a los estribos exteriores a través del arbotante. En la Fig. 3.62. mostramos algunas fotografías de arbotantes bien conocidos, así como varios dibujos del maestro Viollet-le-Duc, de cuyo análisis hemos tomado nota, por su especial significación en relación con nuestra propuesta de estudio de fuerzas generadoras de formas.

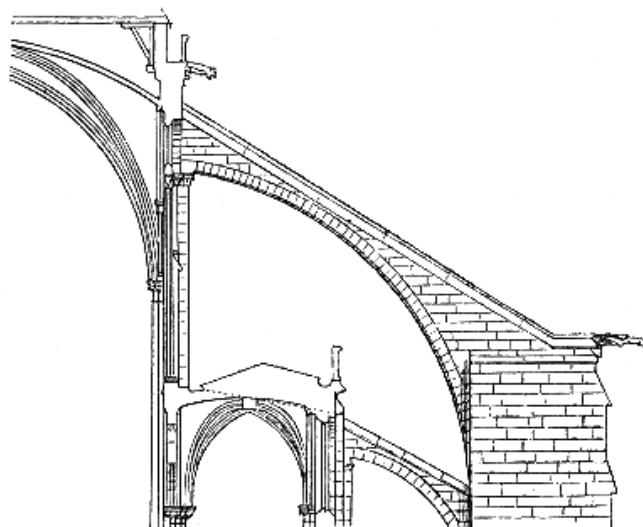
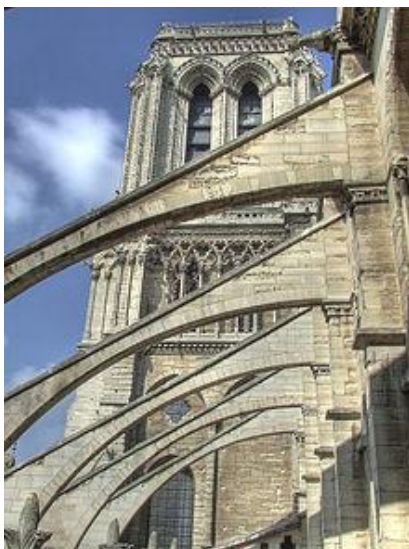
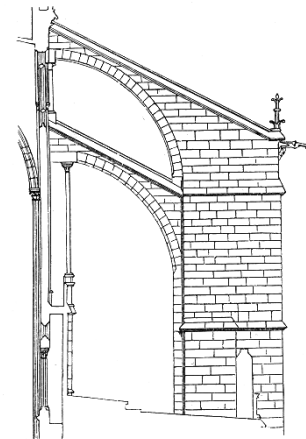
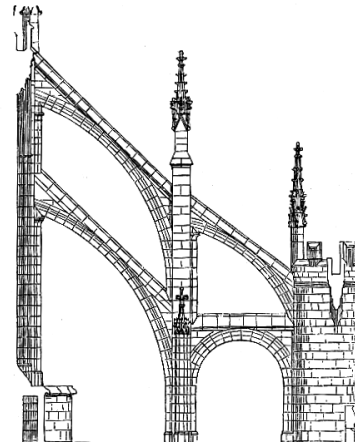


Fig. 3.62. Fotografías de la Catedral de Narbonne, Iglesia de Saint Denis y Catedral de Notre Dame en Paris. (joriablis.com). Dibujos de algunos de sus arbotantes extraídos de *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI<sup>e</sup> au XVI<sup>e</sup> siècle*. Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc. (Paris. 1854) (D.P.)

En su afán de búsqueda de las causas estructurales por encima de cualquier otro interés por elementos envolventes o decorativos, el apreciado por unos y denostado por otros, arquitecto parisino Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc, gran conocedor del gótico, expone en algunos de sus numerosos escritos, la esencia de lo que considera las intenciones constructivas de los maestros góticos: el equilibrio de fuerzas. Los distintos elementos del sistema estructural se mantienen verticales, por la neutralización de todas las acciones oblicuas intervinientes.

*"Tous leurs efforts (des constructeurs gothiques) tendent, en effet, à équilibrer les forces, à ne plus considérer les points d'appui que comme des quilles maintenues dans la verticale non par leur propre assiette, mais par la neutralisation complète de toutes les actions obliques qui viennent agir sur elles."*

*"Si les constructeurs gothiques avaient connu la fonte, "ils se seraient emparés avec empressement de ce moyen sûr d'obtenir des points d'appui aussi grêles que possible et rigides" <sup>53</sup>*

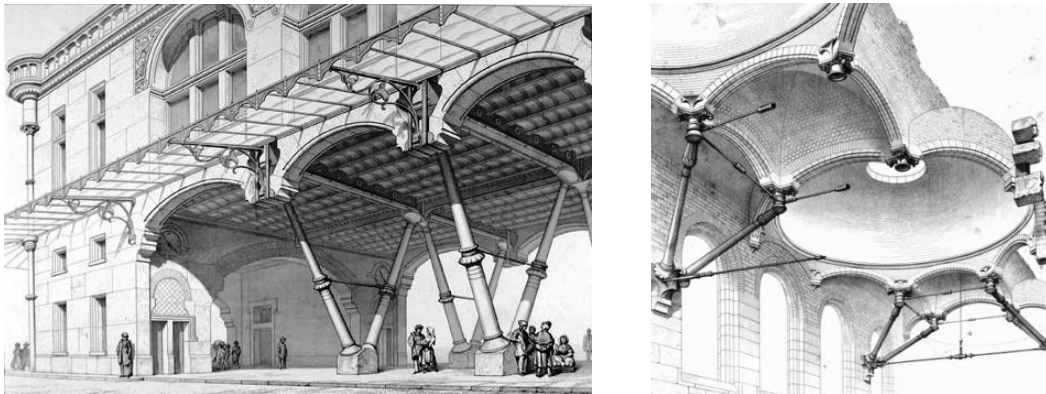


Fig. 3.63. Dibujos de Viollet-le-Duc. Entretiens sur l'architecture. Planchas XXIV y XXV del Atlas. 1863.

De sus investigaciones estructurales se derivaron numerosos estudios relativos al empleo de estructuras metálicas para la solución de algunos de los problemas observados, que la construcción tradicional no podía resolver, disponiendo ingeniosos sistemas metálicos articulados.

Al margen de estos experimentos estructurales de Viollet-le Duc y volviendo a las aplicaciones grafostáticas para el estudio de las transmisiones de empujes por los arbotantes, mostramos algunos análisis de estabilidad de los mismos, basados en los trabajos del arquitecto alemán Georg Gottlob Ungewitter sobre las construcciones góticas. (Ungewitter, 1890: Tabla XLI, 162-163).<sup>54</sup>

<sup>53</sup> Del *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI<sup>e</sup> au XVI<sup>e</sup> siècle*. Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc. Paris 1854. Vol. 4. Article: "Construction", p. 57.

<sup>54</sup> Ungewitter, Georg Gottlob. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann. 3<sup>a</sup> Ed. T.O. Weigel Nachfolger: Leipzig. 1890.

Ungewitter escribió *der Gothischen Konstruktionen* (Ungewiter, 1890) como un manual sobre el gótico y sus construcciones, con intención de difundir el empleo del gótico en la arquitectura. La situación arquitectónica que habían ya propiciado las nuevas tendencias no era exactamente propicia a mediados del siglo XIX en Europa para tales reminiscencias, aunque los historicistas aceptaran de buen grado la revisión neogótica de algunos nuevos edificios.

Es uno de los tratados sobre construcción gótica más importantes en el contexto centroeuropeo, escrito de forma similar a la que Viollet-le-Duc había ya utilizado en la revisión de la historia de dichas construcciones en Francia. En 1875 se publicó una segunda edición, once años después del fallecimiento de su autor. (Pliego de Andrés, 2009: 1081)<sup>55</sup>

En 1890 Mohrmann publicó una tercera edición en la que se reescribió el texto, y se reincorporaron las figuras, que en las ediciones anteriores aparecían como láminas en un volumen aparte. La aportación más importante que esta edición de 1890 contiene, a los efectos de nuestra Tesis Doctoral es la incorporación los métodos de la Grafostática al análisis de las estructuras góticas.

Nos detenemos en el primero de los análisis que Ungewitter realiza en la Fig. 3.64, el que se indica con el 124. *Konstruktion der Drucklinie*, (Construcción de la línea de presiones) En su apartado 124 a, se presenta la construcción del polígono de fuerzas; las cargas (según la escala de fuerzas representada 124 b) son de unos 200kg por dovela, un vano de 4m de luz y con un espesor del arco de unos 50cm. En el apartado 124 b, se analiza el polígono funicular, que transcurre por el interior del tercio central de las dovelas del arco, es decir, caso de que fuesen de sección rectangular, por el núcleo central de las mismas, estimando que en los puntos de tangencia con las dos paralelas de ese tercio central, (124 c) pueden producirse las roturas, hacia el interior en la parte superior y hacia el exterior en la zona inferior.

Las correcciones que cabe introducir, (Ungewitter no habla de ellas en su exposición, pero creemos que son fundamentales) a la vista de los resultados grafostáticos que observamos, pasan por inclinar los radios vectores VI y VII del polígono de fuerzas, lo que se conseguiría disminuyendo la intensidad de los vectores (cargas 5 y 7), a la vez que aumentando las 3 y 9 para mantener la línea de empujes dentro del tercio en los riñones del arco. Cosa que coincide con lo que ya sabían los antiguos constructores góticos para los arcos apuntados. Corregimos el trazado de la línea de presiones mediante los mecanismos que se explican en la Fig.3.65.

---

<sup>55</sup> Actas del Sexto Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Valencia, 21-24 octubre 2009. Instituto Juan de Herrera: Madrid. 2009.

## Konstruktion der Drucklinie.

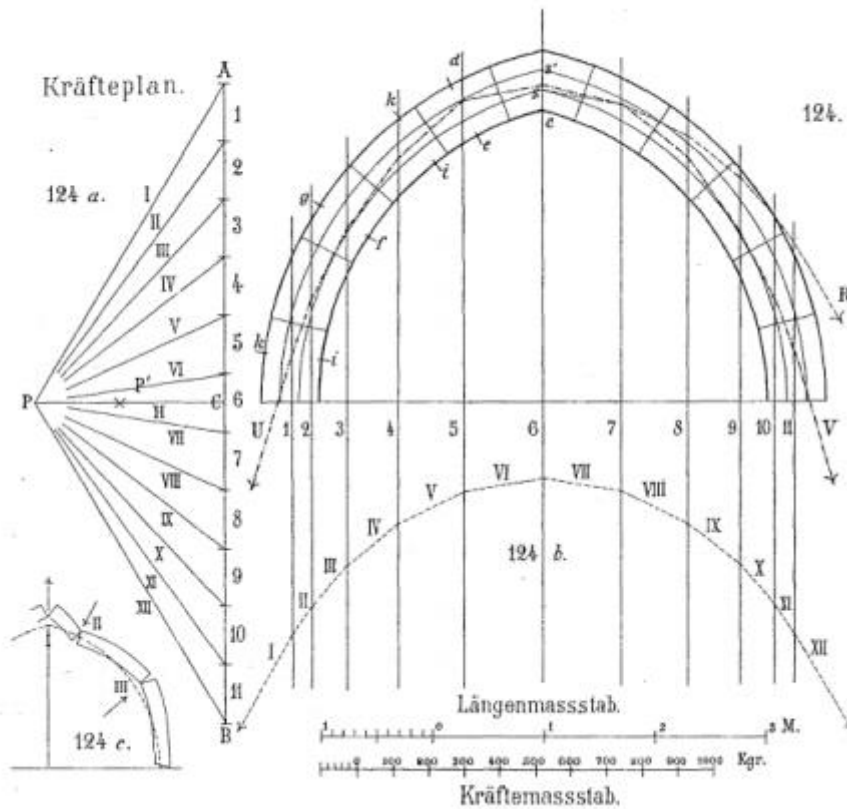


Fig. 3.64. Construcción grafostática de la línea de empujes en un arco apuntado. (Ungewitter, 1890: Láminas XVI) Ungewitter, Georg Gottlob. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann. 3ª Ed.* T.O. Weigel Nachfolger: Leipzig. 1890.

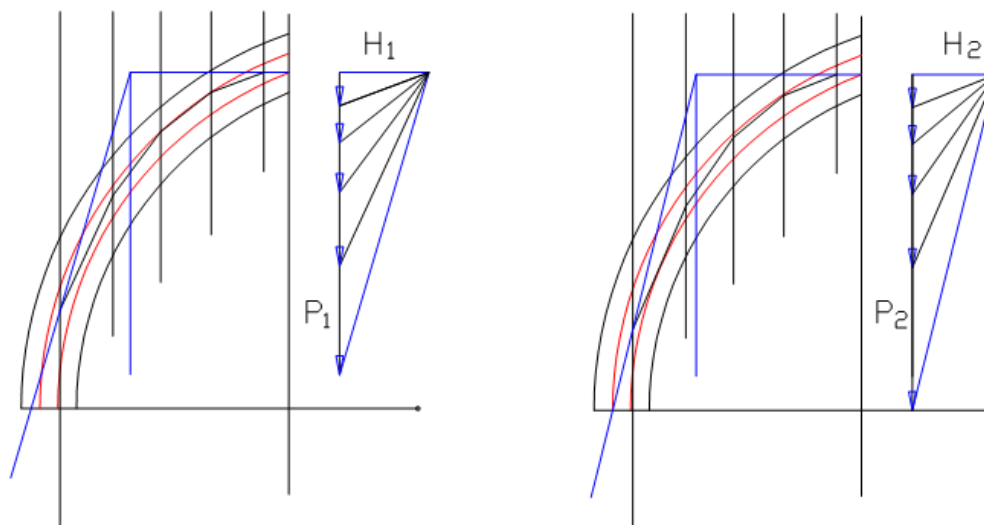


Fig. 3.65. Construcción de la línea de presiones de un arco similar al de la lámina de Ungewitter. El incremento de la carga  $P_2 > P_1$  consigue que la resultante en el arranque del arco esté en el interior del tercio central. Y una mínima disminución del empuje horizontal en la clave  $H_2 < H_1$  aleja la línea de empujes del punto de tangencia de la línea superior del tercio central, introduciéndola, siquiera mínimamente en el núcleo. (Dibujos y cálculos propios)

En la Fig. 3.66. se muestra un arbotante compuesto por un arco inferior sobre el que hay un buen muro de sillería, encima del cual se ha construido una canal de evacuación de aguas hacia la gárgola correspondiente. Se han dibujado dos polígonos de fuerzas y sus correspondientes polígonos funiculares, así como las líneas de empujes. Una de las líneas está contenida dentro del arco, correspondiéndose con una mala calidad del muro superior o que éste estuviera calado por una tracería débil. Para la otra línea de empujes se ha supuesto una buena sillería para el muro, dando como resultado un trazado de dicha línea fuera del arco. En este caso, las líneas de empujes posibles, pueden moverse en todo el ámbito del arbotante.

Dado que el empuje en el arranque puede tener distintas inclinaciones y que es posible trazar dentro del arbotante una línea recta, llevándonos el polo  $O_2$  hacia el infinito, el valor del empuje máximo podría ser tan grande como el valor máximo que pudiera alcanzar la fábrica hasta su rotura a compresión. Coincidimos con lo expresado por el profesor Huerta al respecto de los análisis de Ungewitter.<sup>56</sup>

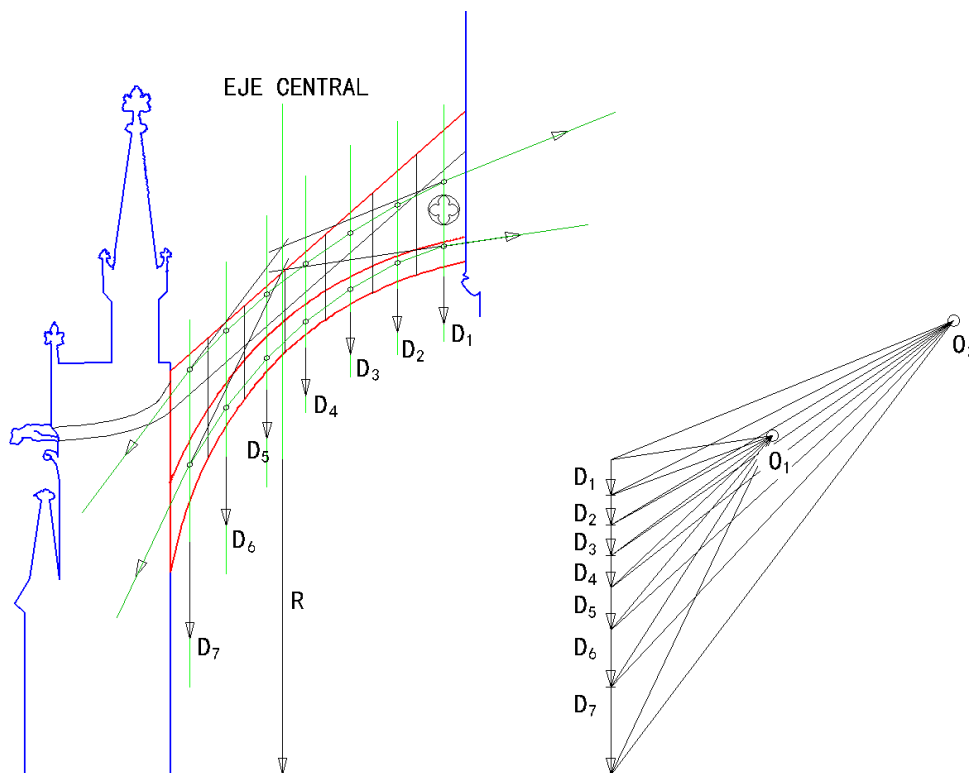


Fig. 3.66. Construcción de los polígonos de fuerzas de polos  $O_1$  y  $O_2$  para los pesos  $D_1, D_2 \dots D_7$ , de la sillería del arbotante y sus correspondientes funiculares. El correspondiente al polígono de fuerzas con polo  $O_2$  provoca un funicular con trazado exterior al propio arco. Dibujos y cálculos propios, siguiendo una idea expuesta por Georg Gottlob Ungewitter. (Ungewitter, 1890: Lámina XLI: 162-163).

<sup>56</sup> Ungewitter, Georg Gottlob. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann.* 3ª Ed. T.O. Weigel Nachfolger: Leipzig. 1890. Citado por Huerta, Santiago. *Arcos, bóvedas y cúpulas.* Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Instituto Juan de Herrera: Madrid. 2004.

En la Fig. 3.67 se ha dibujado la línea correspondiente al empuje mínimo y otra con empuje horizontal en la cabeza. Demostramos como la Estática Gráfica puede ofrecernos soluciones alternativas que nos permiten un cierto control estructural, tanto en el análisis de estructuras existentes como si se trata de un nuevo diseño. En la especialidad de la Restauración Monumental, tiene, como se ha ido mostrando en esta Tesis, un valioso protagonismo.

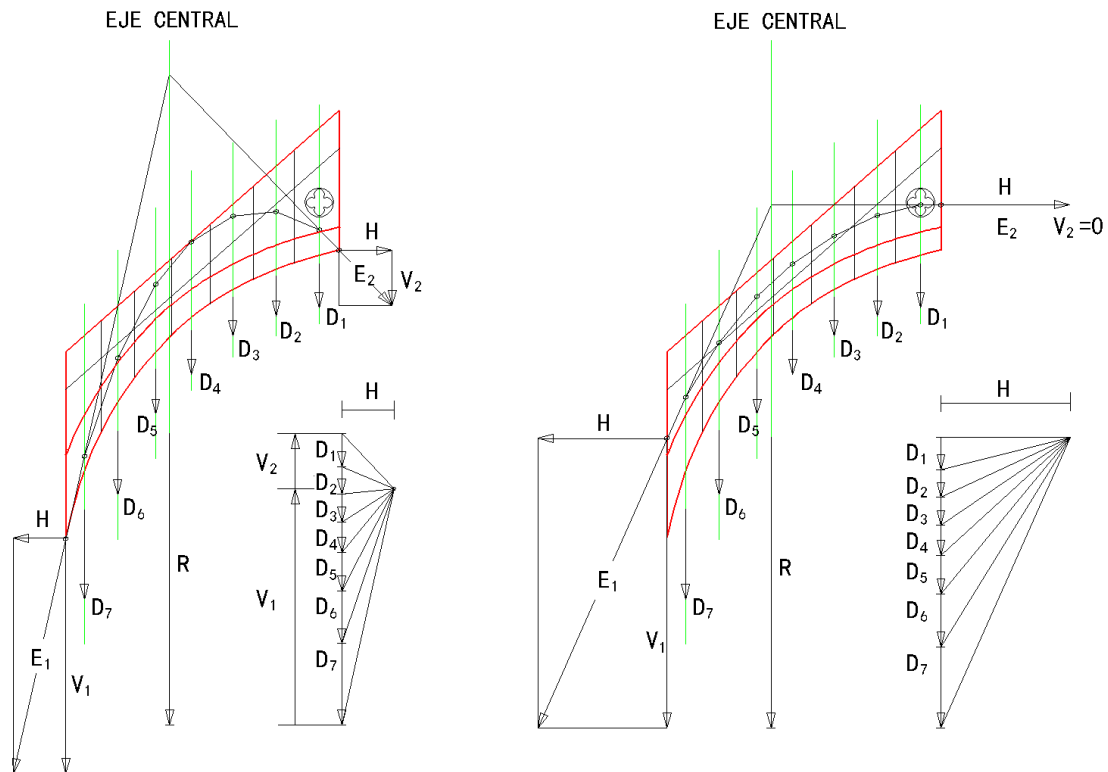


Fig. 3.67. Dibujo de dos arbotantes iguales en los que se estudia la influencia de las componentes verticales y horizontales en los arranques. (Dibujos y cálculos propios).

La utilización de un exclusivo empuje horizontal en el arranque superior, conlleva, en efecto, la eliminación de la componente vertical  $V_2$ , a la vez que aumenta la componente  $V_1$  en el arranque inferior. Asimismo se tantea en la siguiente Fig. 3.68. distintas formas en que pueden convertirse los empujes  $E_1$  y  $E_2$ .

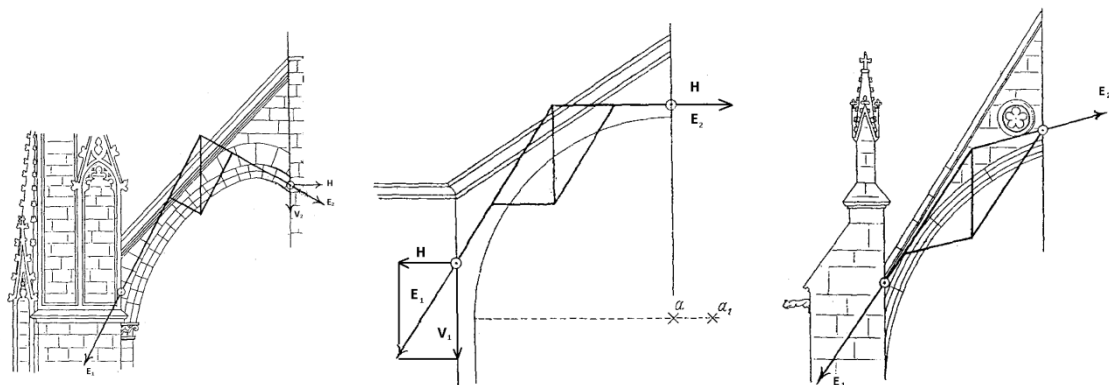


Fig. 3.68. Dibujo de distintas inclinaciones de los empujes en un arbotante. (Ungewitter, 1890: Lámina XLI: 162-163).

Viollet-le-Duc había ya enunciado en su *Dictionnaire*,<sup>57</sup> como todo edificio está constituido por un esqueleto interno, que se convierte en estable por la contraposición de esfuerzos oblicuos y cargas verticales, a la vez que está revestido de una camisa: No es más que un armazón de piedra, independiente de la vestimenta que lo cubre.

*"Tout édifice, à la fin du XIIe siècle, se compose d'une ossature rendue solide par la combinaison de résistances obliques ou de pesanteurs verticales opposées aux poussées, et d'une enveloppe, d'une chemise qui revêt cette ossature.*

*Tout édifice possède son squelette et ses membranes: il n'est plus qu'une charpente de pierre indépendante du vêtement qui la couvre."*

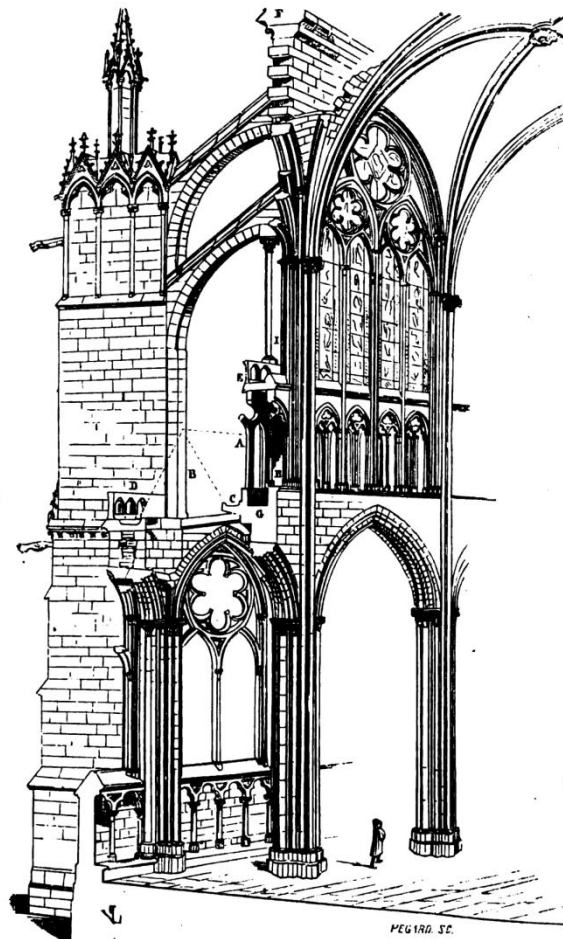


Fig. 3.69. Dibujo de Viollet-le-Duc, explicativos de la transmisión de empujes de una nave central gótica a través del sistema de arbotantes.

<sup>57</sup> Del *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI<sup>e</sup> au XVI<sup>e</sup> siècle*. Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc. Paris 1854. Vol. 4. Article: "Construction":127.



Del Tratado de Ungewitter ya citado, hemos considerado tres ejemplos de transmisión de empujes y cómo se puede controlar el equilibrio entre nave central, naves laterales y arbotantes, con distintas inclinaciones de los empujes extremos de éstos. (Fig. 3.70).<sup>58</sup>

En el primero de los casos, el empuje  $B_1$  del arbotante de la derecha se ha considerado, de forma que no quede equilibrado completamente el empuje  $W_1$  de la nave central. La resultante parcial  $R_1$  entre el empuje del arbotante y el peso del muro  $P_1$ , al componerse con el empuje de la nave central  $W_1$  determina una resultante parcial  $R_2$ , que compuesta con el peso  $P_2$ , determina  $R_3$ , cuya componente horizontal se compensa con el empuje de la nave lateral  $W_2$ . Finalmente  $R_4$  y  $P_3$  dan por resultante una  $R_5$  que tiende al centro del cimiento, ayudada también por el peso propio del mismo.

En el esquema central se ha tomado un arbotante derecho con empuje horizontal  $B_1$  que compensa la componente horizontal de la nave central  $W_1$ , quedando de esta manera una resultante  $R_2$  perfectamente vertical. La composición con el empuje  $W_2$  de la nave lateral y los pesos propios  $P_2$  y  $P_3$ , que como es natural, también son verticales dirige a la resultante  $R_3$  hacia el centro de la cimentación, con una resultante bien centrada en la misma.

En el esquema de la derecha, se analiza un último caso en el que los empujes  $B_1$  y  $B_2$  de los arbotantes de la derecha no son capaces de equilibrar el empuje principal de la nave central  $W_1$ . La resultante  $R_3$ , compuesta con  $P_2$  sigue teniendo componente horizontal hacia la derecha, que finalmente es compensada por el empuje de la nave lateral derecha  $W_2$ . La resultante  $R_4$  queda en este caso completamente centrada en el eje de la cimentación.

Ungewitter utiliza para sus análisis unos esquemas ideales, aunque realmente expresan un comportamiento razonable de la estructura considerada. Reajustes automáticos podrían darse si la bóveda central incrementara los valores de los empujes  $W_1$ , apareciendo nuevos  $B_1$  en los arbotantes, mientras exista capacidad en los mismos para el incremento de sus reacciones o posibilidad de cambio de dirección de los empujes equilibradores.

Un estudio más extenso es el realizado por Eberhard Zorn,<sup>59</sup> que analizamos a continuación.

---

<sup>58</sup> Se ha dibujado y calculado un caso similar al mostrado en una de las láminas de G.G. Ungewitter. (Ungewitter, 1890: Lámina XLI: 162-163).

<sup>59</sup> Zorn, Eberhard. *Statische Untersuchung der St. Martinskirche in Landshut*, Ph. D. Dissertation, Universität München, Germany, 1933.

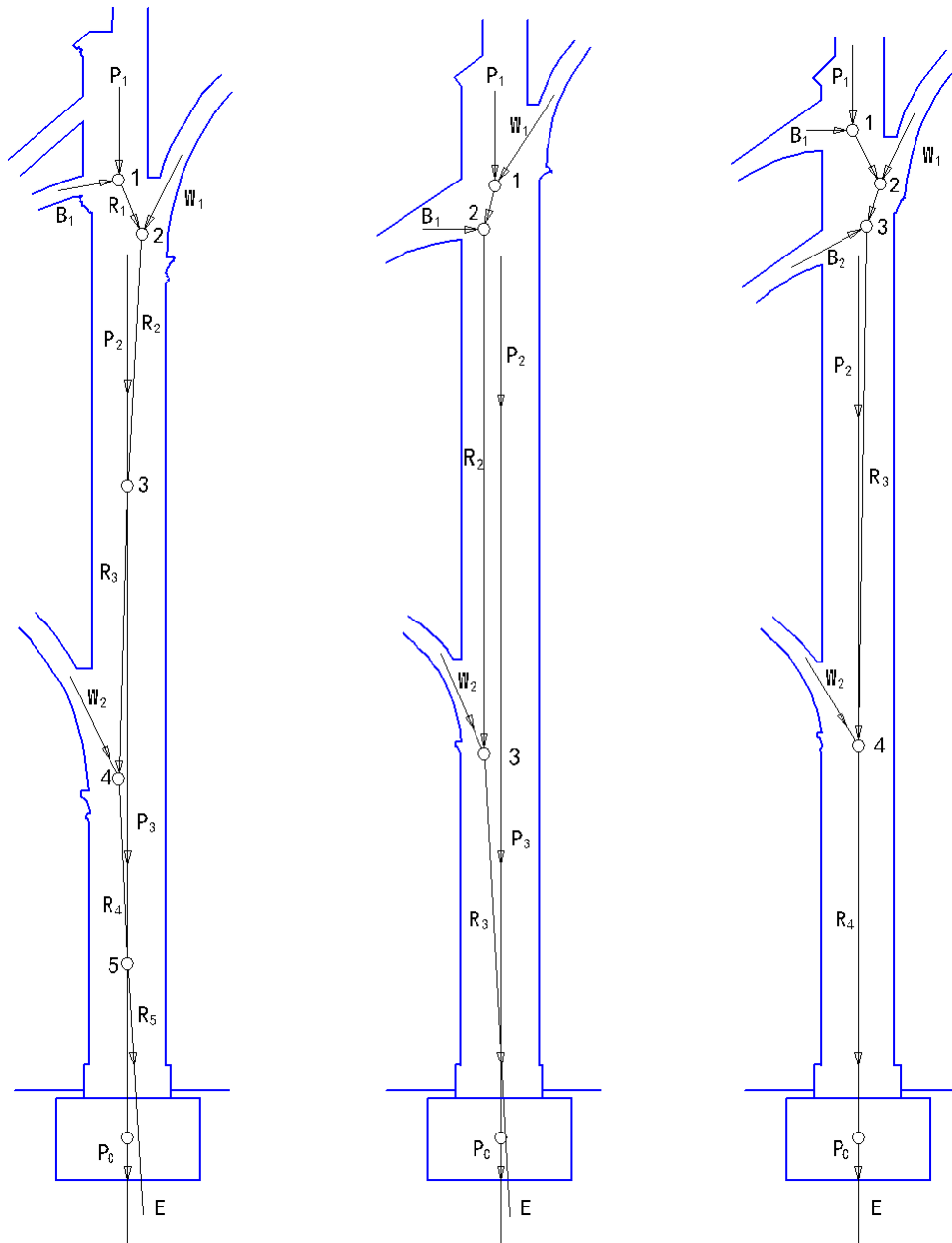


Fig. 3.70. Esquemas de los equilibrios entre muro y pilar central de una iglesia gótica. En los tres casos se trata de analizar cómo terminan siendo las resultantes que acometen a la cimentación, mediante la aportación de los empujes de los arbotantes situados a la derecha, con la intervención, también del empuje correspondiente de una nave lateral. (Dibujos propios basados en unos esquemas de Ungewitter, 1890: Lámina XLI: 162-163).

El arquitecto e ingeniero alemán Eberhard Zorn realizó en 1933 un valioso análisis del equilibrio de la iglesia gótica de San Martín en Landshut (Alemania). La iglesia dispone de una nave central y dos laterales, de extraordinaria esbeltez, con una anchura en la nave central que duplica la de las laterales alcanzando la misma altura. El empuje de la nave central doblará prácticamente al de la nave lateral, habiéndose conseguido el equilibrio con la disposición de importantes muros de sillería sobre los arcos perpiaños de las naves laterales, además de las cargas verticales correspondientes a la gran techumbre de la iglesia. En el análisis de Zorn se puede observar las grandes cargas que gravitan sobre la semibóveda lateral, incrementando

la componente vertical del empuje de ésta, consiguiendo el contrarresto del empuje de la nave central y que la carga que baja por las pilastras es sensiblemente vertical.

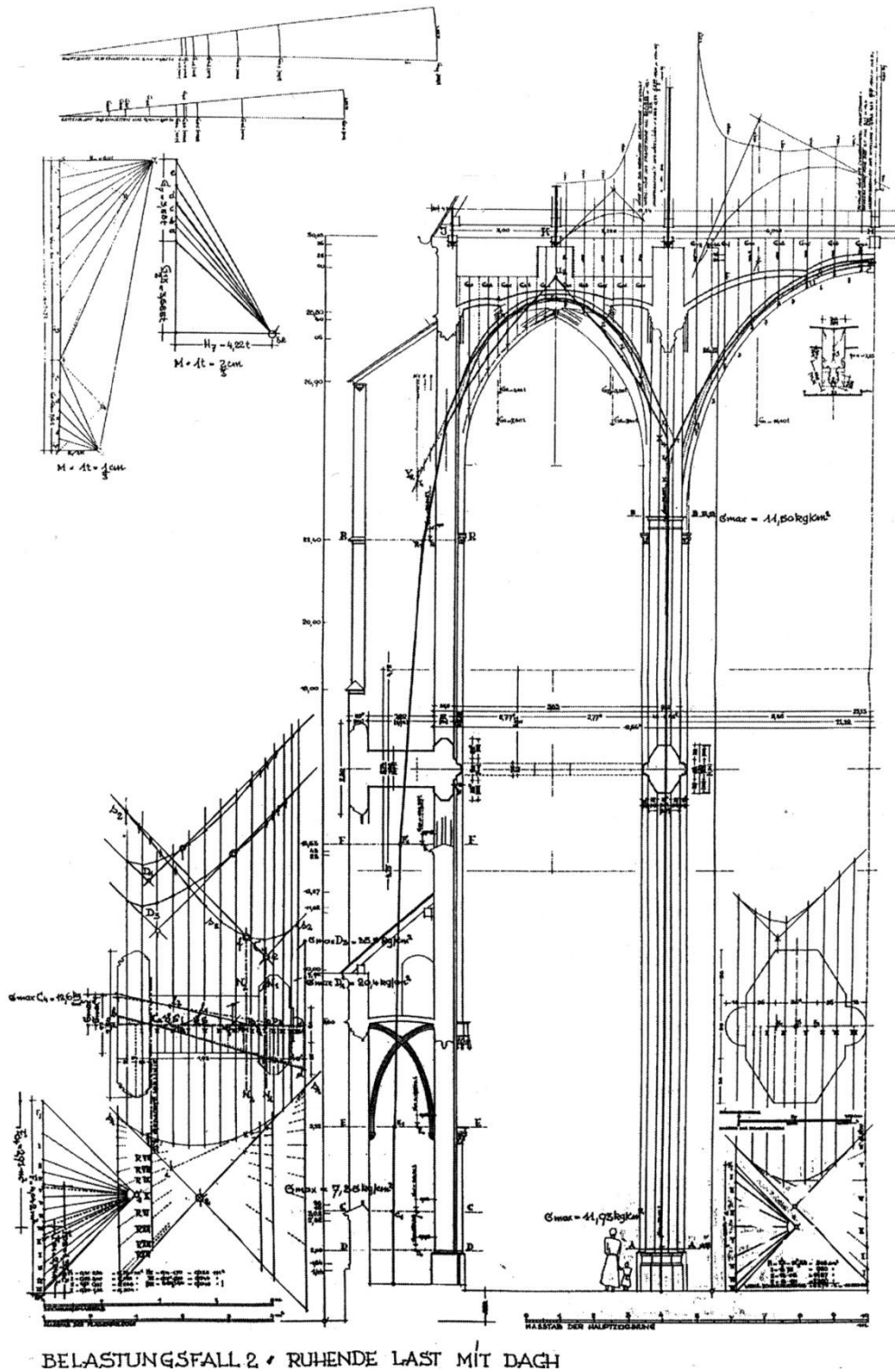


Fig. 3.71. Estudio del equilibrio de empujes de las bóvedas central y lateral en la iglesia de St. Martin en Landshut (Alemania) realizado por Eberhard Zorn. ( CONSIDERACIONES CASO 2. CARGA DEBIDA AL PESO PROPIO ) La imagen ha sido escaneada de *Statische Untersuchung der St. Martinskirche in Landshut*, Ph. D. Dissertation, Universität München, Germany, 1933.

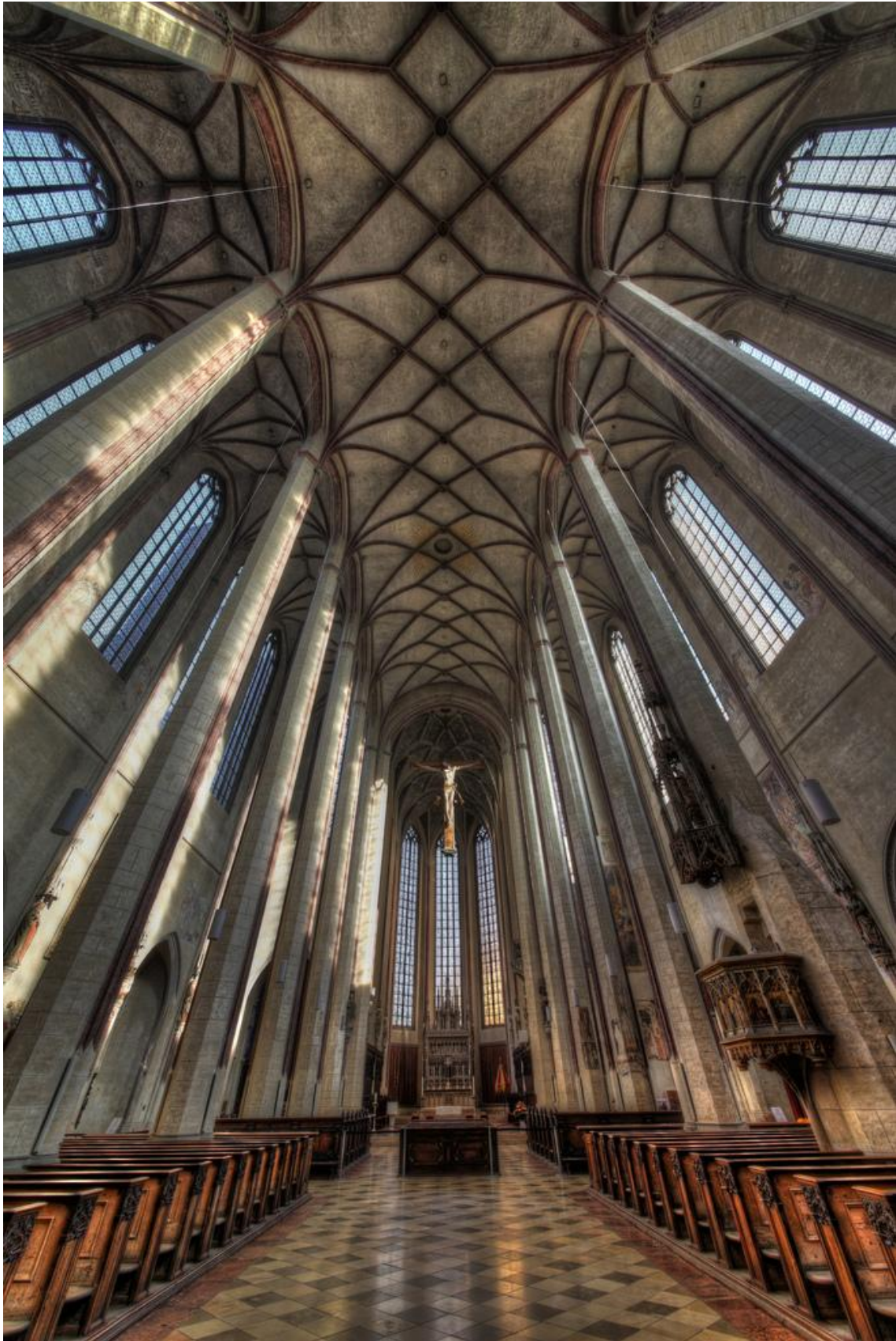


Fig. 3.72. Interior de la iglesia de San Martin en Landshut (Alemania). Obsérvese la imponente altura de las naves central y laterales, así como proporción entre las luces de ambas bóvedas. (Fotografía de Getty Images).



Fig. 3.73. Vista aérea de la iglesia de San Martín de Landshut. Donde se aprecia la enorme altura de la torre así como las proporciones de la cubierta de las naves. Vista lateral con el detalle de los contrafuertes.

Finalmente mostramos en la Fig. 3.74. el estudio grafostático realizado por Zorn para la misma iglesia, considerando la carga vertical gravitatoria y la acción horizontal debida al viento, actuando por la derecha. El efecto del viento desplaza, como es natural, la resultante hacia el límite del contrafuerte de la izquierda, más teniendo en cuenta la enorme envergadura de los testeros de la iglesia.

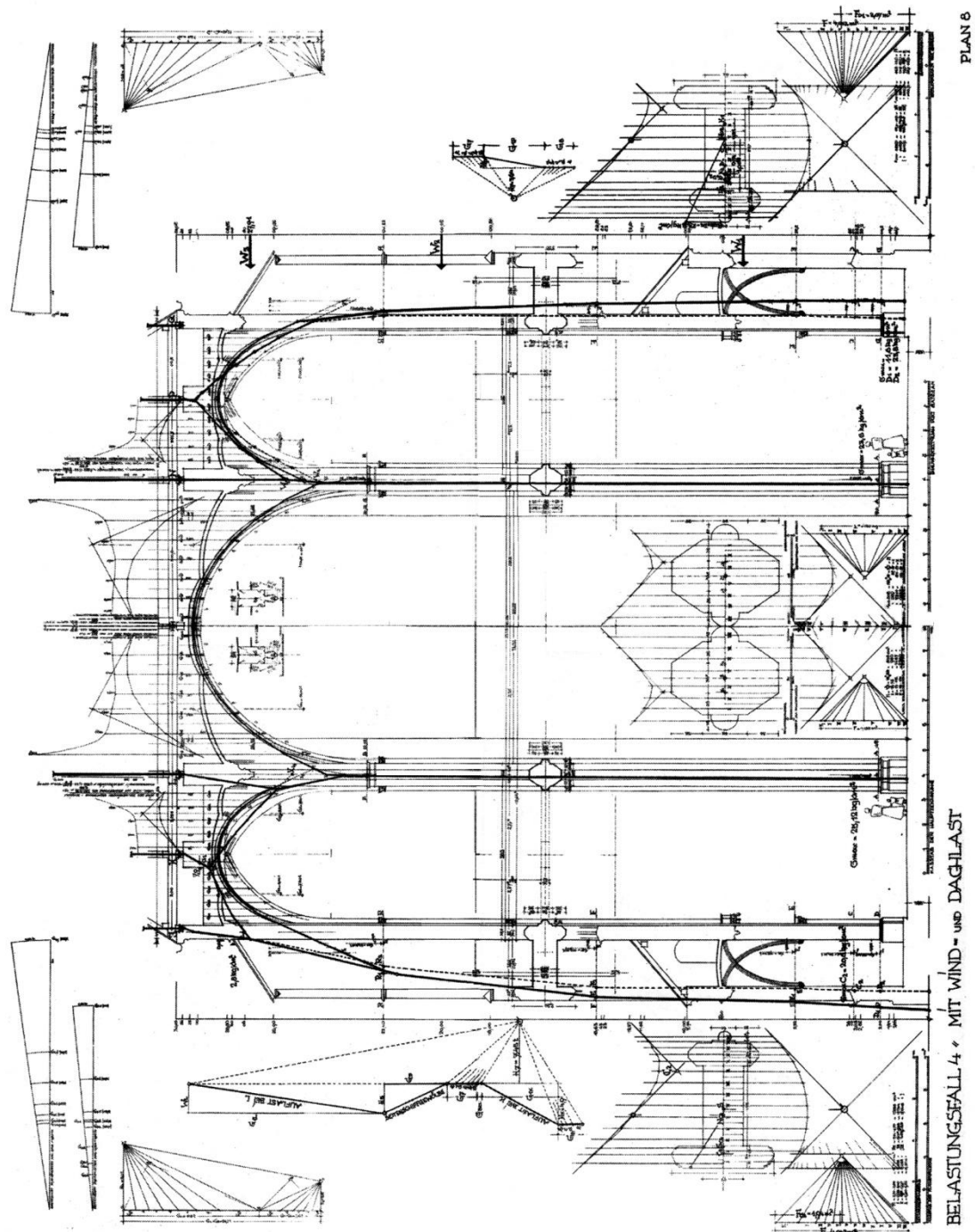


Fig. 3.74. Estudio del equilibrio de empujes de las bóvedas en la iglesia de St. Martin en Landshut (Alemania) realizado por Eberhard Zorn. ( CONSIDERACIONES CASO 4. CARGA DEBIDA AL PESO PROPIO Y AL VIENTO) La imagen ha sido escaneada de *Statische Untersuchung der St. Martinskirche in Landshut*, Ph. D. Dissertation, Universität München, Germany, 1933.

El extraordinario interés de este brillante análisis de Eberhard Zorn, además de su conocimiento del manejo de la Estática Gráfica, radica, como señalamos, en la comprobación de los efectos de la presión del viento sobre elementos esbeltos, como es el caso del muro lateral derecho.

La revisión comparada de las líneas de empuje, de ambos estados de carga, (sólo gravitatoria Fig. 3.71) con la correspondiente al de las acciones combinadas, (gravitatoria más viento de la Fig. 3.74), nos hacen reflexionar sobre la importancia de tener en cuenta todas las acciones posibles, en la interpretación de las causas que pueden generar determinados efectos incontrolados. Zorn sitúa tres cargas horizontales W1, W2 y W3, aproximadamente a los tercios de la altura del testero lateral derecho, cuya interacción con las cargas gravitatoria reconduce las líneas de empuje, desplazándolas de sus posiciones iniciales. El efecto producido se concreta especialmente en las entregas de las enormes pilastras exteriores, siendo en el caso del lateral izquierdo, todavía más acusado, llegando a salir la línea de empujes del perímetro de la pilastra. (Imagen derecha de la Fig. 3.75)

Es nuestra intención, para futuros trabajos de investigación, el análisis grafostático de casos similares al tratado por Zorn, así como el cálculo grafostático del Núcleo Central de la sección de la pilastra exterior de la iglesia de St. Martin en Landshut, que creemos completaría la información de lo estudiado por Zorn.

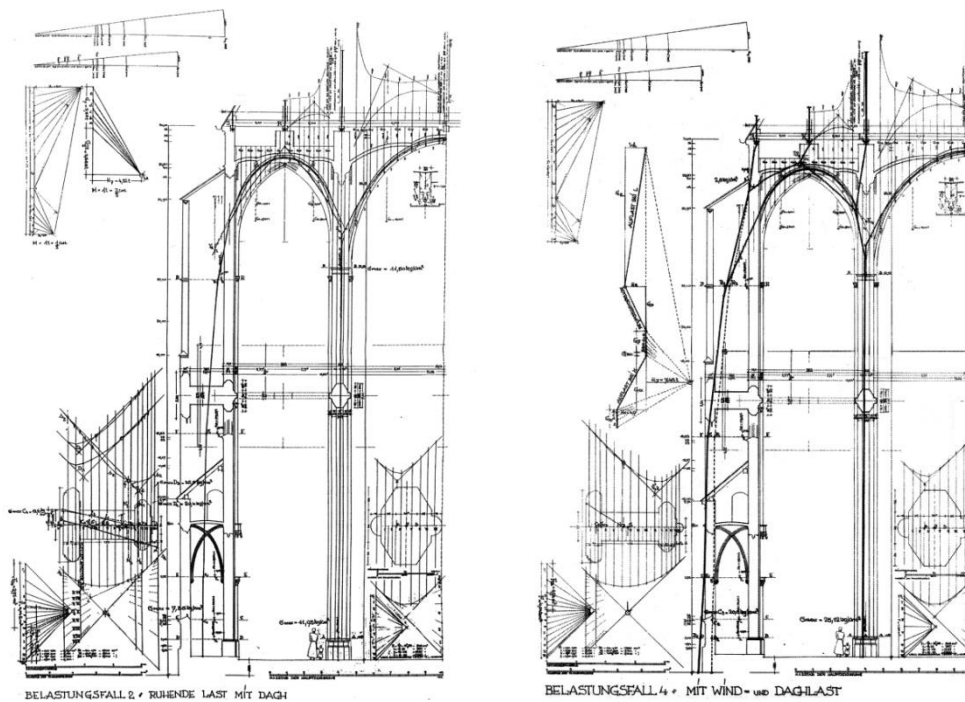


Fig. 3.75. Estudio del equilibrio de empujes de las bóvedas en la iglesia de St. Martin en Landshut (Alemania) realizado por Eberhard Zorn. ( COMPARATIVA LÍNEAS DE EMPUJE. Izda: CARGA GRAVITATORIA. Drcha: CARGA GRAVITATORIA MÁS VIENTO POR LA DERECHA ) Las imágenes han sido escaneadas de *Statische Untersuchung der St. Martinskirche in Landshut*, Ph. D. Dissertation, Universität München, Germany, 1933.

Creemos que análisis grafostáticos sencillos, como los que mostramos en la Introducción o algunos más complejos como los que hemos presentado en este Capítulo y que hace referencia a elementos o conjuntos del Patrimonio Histórico construido, justifican plenamente la Investigación que ha conducido a esta Tesis Doctoral.



### 3.3. DEL PARALELOGRAMO DE FUERZAS A LA ESTÁTICA GRÁFICA DE KARL CULMANN

La Grafostática, tal como fue concebida por Karl Culmann, tiene tres raíces: el Dibujo, la Estática y la Geometría Proyectiva, resultando indispensable para poder calcular a través del dibujo, las proyecciones diédricas ortogonales, que la Geometría descriptiva había ya presentado a arquitectos e ingenieros de la mano de Gaspard Monge.

El camino que conducía de la Estática a la solución gráfica se había manifestado mucho tiempo antes de la aparición de la Grafostática a través del paralelogramo de fuerzas.

La primera aproximación a la suma geométrica de vectores, que representan fuerzas, se remonta a Leonardo da Vinci, el cuál utilizaba dos fórmulas para estudiar las fuerzas de interacción. Leonardo, por un lado, observa el equilibrio entre dos masas situadas sobre dos planos inclinados, aunque llega a un resultado equivocado, y es que los dos pesos sólo quedarán inmóviles cuando sus valores sean inversamente proporcionales a la tangente del ángulo de inclinación, es decir, cuando el peso 1 sea al peso 2 como el segmento 2 al 1. (Deducción Fig. 3.77)

En segundo lugar, Leonardo estudió una masa colgada a dos cuerdas de diferente longitud. A través del equilibrio de momentos llega al correcto valor de la tensión de las cuerdas. En el tercer dibujo,  $T \cdot EB = T' \cdot GB$  ( $\sum M_B = 0$ ), con  $T \cdot \sin A + T' \cdot \sin D = P$  que supone ( $\sum F_y = 0$ ) y  $T \cdot \cos A = T' \cdot \cos D$  que supone ( $\sum F_x = 0$ )

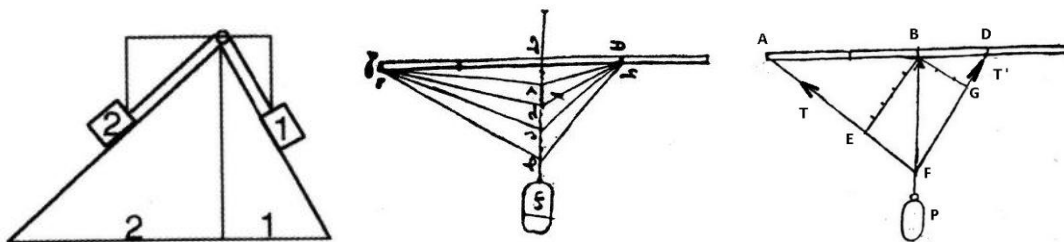
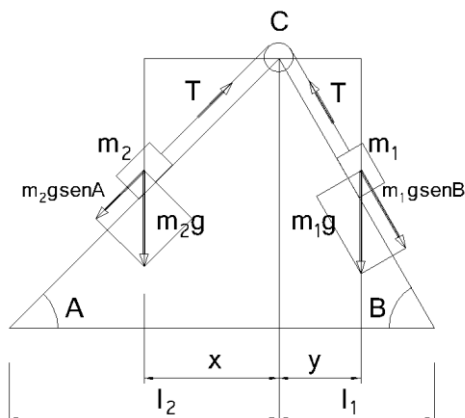


Fig. 3.76. Aproximación a la idea de Leonardo del equilibrio de masas sobre un plano inclinado y masas suspendidas de hilos. Hemos retocado algo los dibujos primero y tercero de Leonardo en aras de una mejor comprensión.



La condición de Equilibrio de  $m_2$  y  $m_1$  exige

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\rightarrow m_2 \cdot g \cdot x = m_1 \cdot g \cdot y \rightarrow \\ \rightarrow \frac{m_2}{m_1} &= \frac{y}{x} \quad (\text{y como}) \quad \frac{x}{l_2} = \frac{y}{l_1} \\ &(\text{por el semejanza de triángulos}) \end{aligned}$$

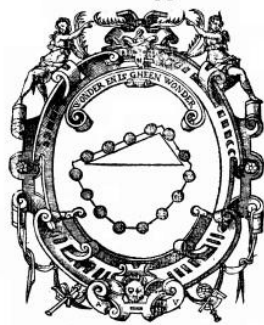
Resulta finalmente que  $\boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_1}{l_2}}$

Fig. 3.77. Comprobación del equilibrio de las masas  $m_1$  y  $m_2$ , con el cálculo de momentos respecto al punto C. El cálculo de la tensión T de la cuerda es inmediato con la condición de equilibrio de fuerzas,  $\sum F = 0$ .

Aproximaciones más complejas fueron descubiertas en primer lugar por el holandés Simon Stevin (1548-1603). Se imaginó una cadena cerrada formada por bolas del mismo tamaño, que colgaba sobre dos planos inclinados.

Inicialmente, determinó que esta cadena permanece en equilibrio por sí misma. Del mismo modo, la cadena conservará dicho equilibrio si se le corta la parte de abajo. Así demostró Stevin, que sobre planos inclinados de la misma altura dos cuerpos conectados entre sí están en equilibrio cuando sus pesos se comportan según la inclinación del plano; o como el seno del ángulo sobre la horizontal. Ésta es básicamente la ley del paralelogramo de fuerzas.

DE  
BEGHINSELEN  
DER WEEGHCONST  
BESCHREVEN DVER  
SIMON STEVIN  
van Brugghe.



TOT LEYDEN,  
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,  
By Françoys van Raphelinghen.  
c1o. 1o. LXXXVI.

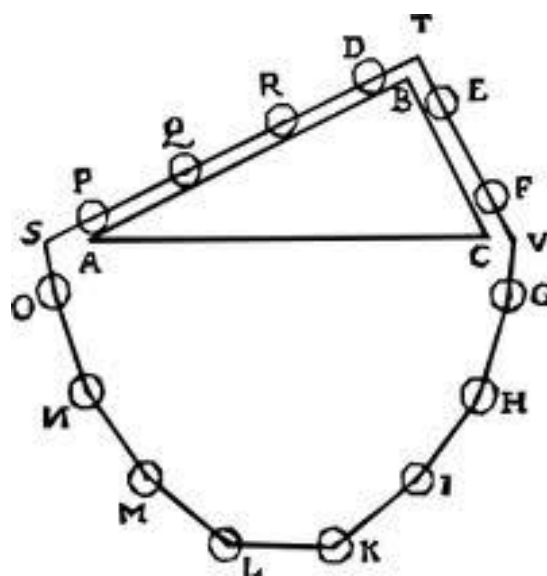


Fig. 3.78. Portada del libro de Stevin y modelo utilizado para su comprobación de equilibrio.

Sólo falta un pequeño paso para ver que un peso atado a dos cuerdas hace visible el principio de la composición de fuerzas. Sin embargo, Stevin no estuvo interesado en ilustrar fuerzas mediante segmentos. Sus croquis servían como ilustraciones de las soluciones calculadas. Aunque en algunos, parece intuirse una cierta intención de señalar los hilos que posteriormente se convirtieron en los lados de los polígonos funiculares.

La mayor parte de los cálculos de Stevin tiene mucho que ver con la aplicación de la bien conocida ley de la balanza. No en vano su obra más conocida *De Beghinselen der Weeghconst*,<sup>60</sup> cuyo título podría traducirse como La estática o el arte de pesar, está plagada de artilugios y esquemas para calcular fuerzas en general; pesos en particular.

<sup>60</sup> Stevin, Simon. *De Beghinselen der Weeghconst*. Françoys van Raphelinghen: Leyden 1586. Digitalizado por Google eBook de un original de la Biblioteca Estatal de Baviera. 2009.

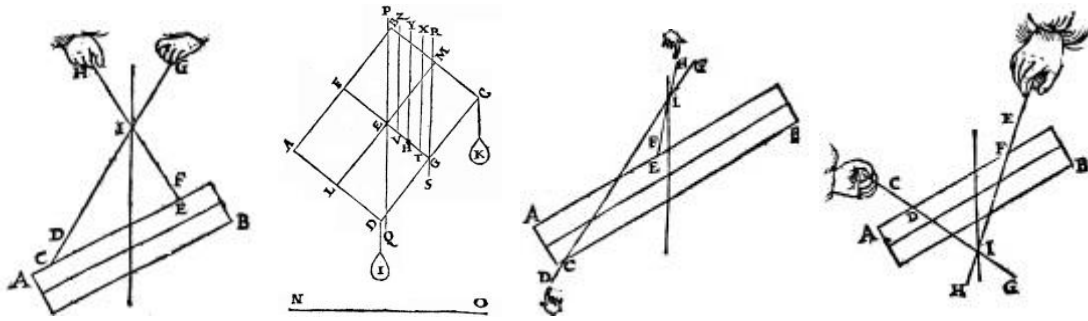


Fig. 3.79. Ilustraciones del libro de Stevin en las que se intuyen las rectas de acción de las fuerzas presentes.

Pierre Varignon (1654-1722) avanzó mucho más en el estudio del polígono de fuerzas. Después de su muerte apareció uno de los trabajos más importantes para el desarrollo de la grafostática: la *Nouvelle mecanique ou Statique*,<sup>61</sup> que había escrito en 1687. Varignon convirtió la idea de la cuerda de Leonardo en un auténtico método. Con su “*corde lache & parfaitement flexible*”, la cuerda suelta y perfectamente flexible, consiguió analizar sistemas con diferente número de fuerzas en situación de equilibrio.

Estudió la relación entre la geometría de las cuerdas y la magnitud de las fuerzas. Si se introduce una escala, como que 1Kg : 1 cm (un kilogramo corresponde a un centímetro), se podría leer del dibujo la magnitud de las fuerzas que actúan sobre los dos puntos de apoyo A y B. Con su proceso, Varignon podía, de manera puramente gráfica, determinar la distribución de las fuerzas (fuese cual fuese el número de fuerzas) sobre la cuerda de la que cuelgan unos pesos.

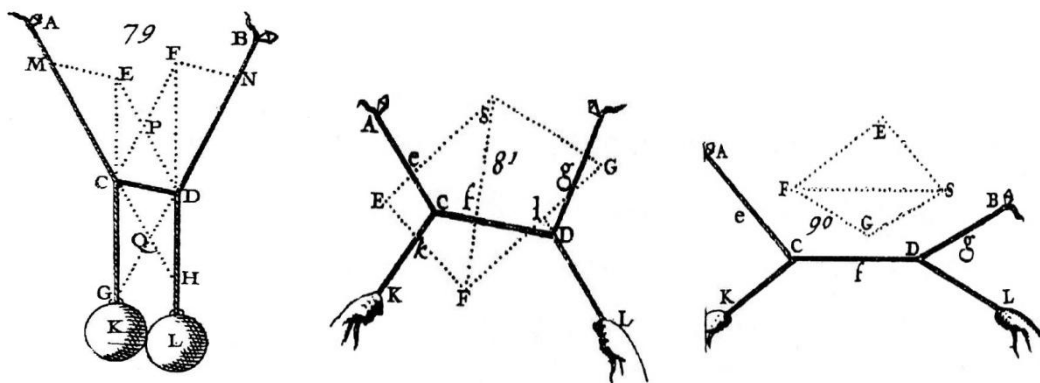


Fig. 3.80. Dibujos de Varignon mostrando la composición y descomposición de fuerzas. (Varignon, 1725)

<sup>61</sup> Varignon, Pierre. *Nouvelle Mecanique Ou statique*. Claude Jombert: Paris.1725. Facsimil La Vergne. TN. USA.2010. También en: Varignon, Pierre. *Projet d'une Nouvelle Méchanique, avec un examen de l'opinion de Borelli sur les proprietes des poids suspendus par des cordes*. Chez la Veuve d'Edme Martin, Jean Boudot & Estienne Martin: Paris. 1687 (Escaneado por Google Ebookstore en 2008 de un original procedente de la Universidad de Lausanne. Formato de libre disposición informática).

La construcción del polígono de fuerzas a partir del polígono funicular es más fácil de entender si observamos los dos dibujos que se muestran en la Fig. 3.81. Aparece el dibujo de un polígono funicular con cuatro cargas y sobre él, el dibujo del polígono de fuerzas. La vertical en el polígono de fuerzas es la suma gráfica de las líneas de fuerza correspondientes a las cargas que cuelgan de la cuerda. La cuerda se divide en secciones, cada una de las cuales corresponde a la descomposición de las fuerzas de cada una de las cargas. La carga K de la izquierda puede ser representada a través de las dos fuerzas AC y CD. El tramo AC para la carga K se traslada como tramo ES hacia arriba sobre el polígono de fuerzas. Para la carga L ocurre lo mismo con el tramo CD y así sucesivamente.<sup>62</sup>

Cuando se dibuja a escala, se constata que los tramos ES y RS (Fig. 3.81) constituyen la fuerza con la que toda la cuerda debe ser aguantada. En el dibujo de la derecha, se ha girado el polígono de fuerzas noventa grados a la izquierda dibujado sobre el polígono funicular. No parece que esté muy proporcionada la representación de las masas K,L,M,N, o al menos no hay una correspondencia visual entre las fuerzas relativas a los pesos de dichas masas y los volúmenes de las esferitas.

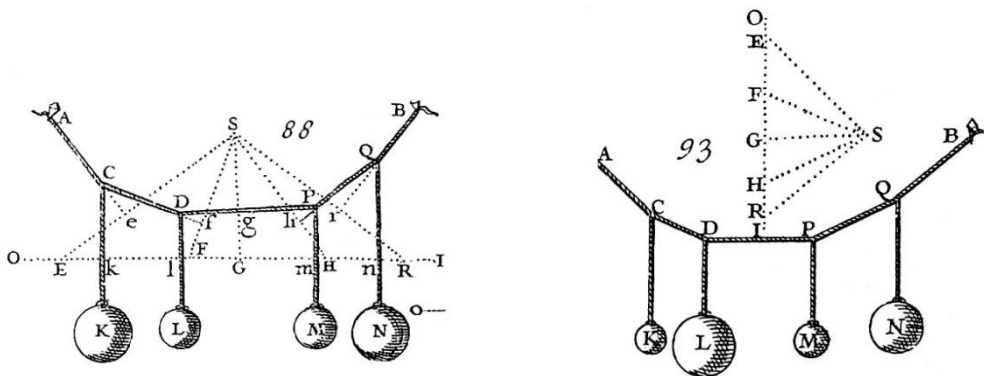


Fig. 3.81. Polígono funicular y polígono de fuerzas superpuestos. Polígono de fuerzas sobre el funicular que forman los pesos gravitando sobre el hilo. (Varignon, 1725)

De la misma manera se pueden construir polígonos de fuerzas para cargas sea cual sea la dirección en la que actúen. A partir del polígono funicular también se puede construir directamente la línea de acción de la resultante.

Ésta pasa a través del punto de corte T (Fig. 3.82) Debido a que el sistema se encuentra en equilibrio, las fuerzas de soporte en A y B tienen que mantener el equilibrio con la resultante, es decir, las líneas de actuación tienen que cortarse en un punto. Las líneas a través de G y T son sus líneas de acción. Sin embargo, en todas

<sup>62</sup> Ver en las Fig. 3.25. y 3.26. las construcciones geométricas, descritas por Varignon y tratadas en Kneip, Karl et al. *La escuela del técnico mecánico III. Mecánica. Resistencia de materiales. Grafostática*. Labor: Barcelona. 1937.

estas figuras y sus correspondientes principios no se trata de definir las fuerzas, aunque sería posible hacerlo de manera inmediata, ( $\sum F_i = 0$ ) y ( $\sum M_i = 0$ ).

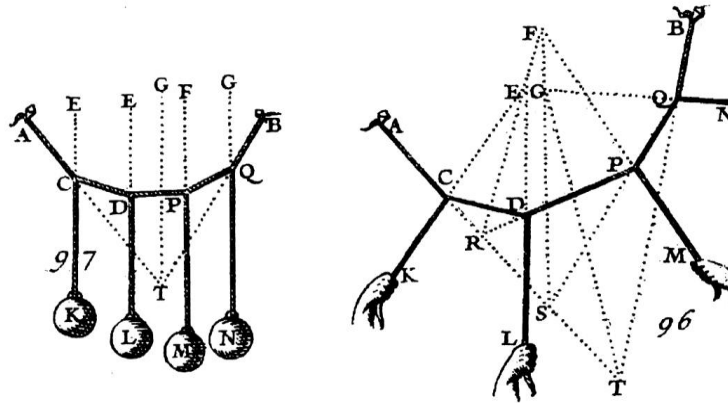


Fig. 3.82. Obtención de la línea de acción de la Resultante de los pesos K,L,M,N, de un sistema de fuerzas paralelas y de un sistema de fuerzas cualesquiera en el plano.

En el segundo volumen del libro de Varignon<sup>63</sup> se encuentra el fundamento de otro método gráfico que Culmann tratará más adelante en su Grafostática. Más tarde fue conocido como el Método de las tres fuerzas y es uno de los principios fundamentales de la Estática.

Cuando, una de las tres fuerzas es conocida (en este caso Q), (Fig. 3.83) también lo es la línea de acción de la segunda fuerza (aquí cuerda y mano FR) y en tercer lugar, se conoce un punto de la línea de acción de la tercera fuerza (en este caso, la mano P), si el sistema está en equilibrio, se pueden determinar las magnitudes de la segunda y la tercera fuerza gracias a que las tres líneas de acción se cortan en un mismo punto (A). El cálculo de las fuerzas desconocidas se realiza con apoyo de las relaciones geométricas triangulares de las líneas de acción de las fuerzas.

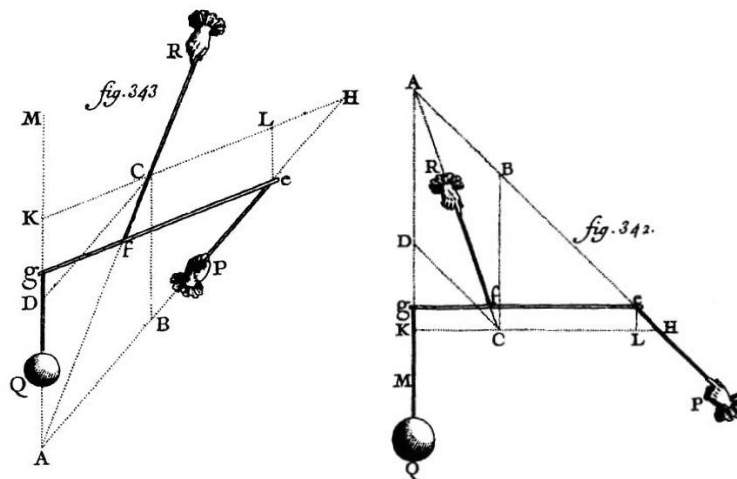


Fig. 3.83. Descomposición de fuerzas según direcciones convenientemente dispuestas. Del *Cours de mécanique appliqué aux machines*, 1826. De Jean Victor Poncelet.

<sup>63</sup> Varignon, Pierre. *Nouvelle Mécanique Ou statique*. Claude Jombert: Paris. Ed. Facsimil La Vergne. TN. USA.2010.

Pero de nuevo hay que destacar que Varignon no buscaba una solución constructiva a los problemas estáticos. Sin embargo, con sus polígonos de fuerzas y funicular prepara los elementos que constituyen una de las claves de la Grafostática.

El método de Varignon fue acogido por diferentes científicos y enseñado en diversas universidades. Hay que destacar a Jean-Victor Poncelet (1788-1867), el cual, en su curso de *Mecanique Industrielle* para el cálculo estático de bóvedas y puentes utilizó los polígonos funicular y de fuerzas.<sup>64</sup>

Aquí, Poncelet descompone la fuerza R en dos componentes, las cuales se encuentran en la dirección de las cuerdas CB y CD. Lo mismo se puede hacer para la fuerza Q. En este caso, las componentes que se encuentran en dirección CB o BC se anulan mutuamente.

Después estudió mediante los polígonos funicular y de fuerzas, las tensiones de una cadena, cuyos resultados aplicaría a los puentes sustentados por ellas. (Fig. 3.84)

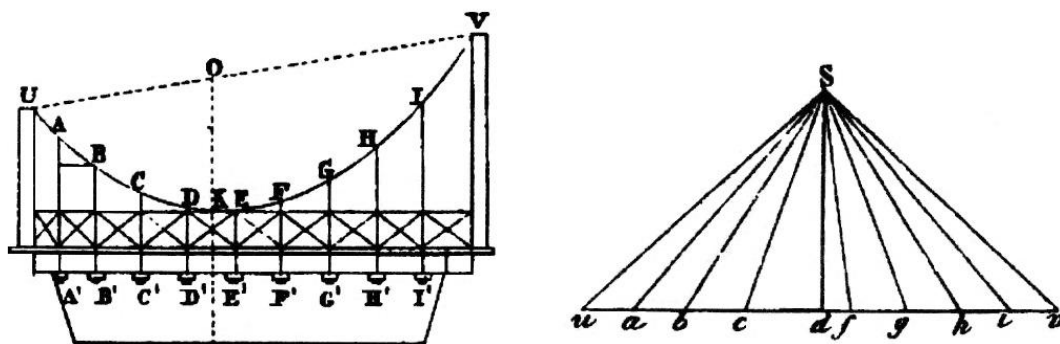


Fig. 3.84. Utilización de un polígono de fuerzas y un funicular, para el diseño de un puente colgante, con apoyos de la cadena a distinto nivel. Del *Cours de mécanique appliquée aux machines*, 1826. De Jean Victor Poncelet.

*La estática de los cuerpos sólidos* de Brix del año 1831<sup>65</sup> es considerada la primera obra de un autor alemán que utiliza los polígonos funicular y de fuerzas. Pero existe un segundo alemán, C.H.A. Kayser que fue profesor de mecánica de Culmann en Karlsruhe. A partir de 1836 basa sus clases en su propio tratado en el que se refiere a

<sup>64</sup> Poncelet, J.V. *Introduction a la mécanique industrielle Physique ou Expérimentale*. Troisième Édition. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris 1870. (<http://books.google.com>)

Poncelet, J.V. *Cours de mécanique appliquée aux machines: professé en 1825 et 1826 à l'Ecole royale de l'artillerie et du génie*. (Versión de 1836, impresa por X. Kretz): Paris 1836.

<sup>65</sup> Brix, Adolf F. W. *Lehrbuch der Statik fester Körper, in elementarer Darstellung mit besonderer Rücksicht auf technische Anwendung*. C. Reimarus: Berlin 1849. (Diditalizado de un original de la University of Michigan por googlebooks. Las Figuras 137-153 de las Planchas XII y XIII contienen los esbozos de los futuros Polígonos de Fuerzas y Polígonos Funiculares.

la estática. En él Kayser utiliza en el apartado dedicado a la estática de los cuerpos sólidos un polígono funicular para obtener la ecuación de una catenaria. (Kayser, 1836: 583-641)<sup>66</sup>

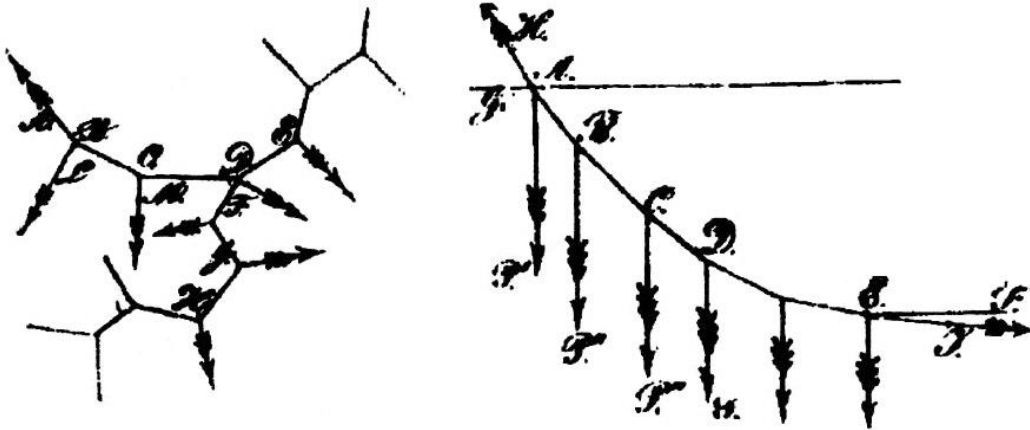


Fig. 3.85. Composición de fuerzas a modo de polígono funicular para la determinación del trazado de una catenaria. De *Handbuch der Statik mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höheren Analysis*. (Kayser, 1836: 590)

Sin embargo, el libro de Kayser está orientado analíticamente. No contiene métodos gráficos. En el capítulo “*Von dem Gleichgewicht der Holz- und Metall-Construktionen*” (del equilibrio de las construcciones de madera y metal), somete a modo de ejemplo una lista de estructuras de apoyo, entramados y cimbras a un estudio estático.

El capítulo está organizado como una colección de ejercicios. Kayser antepone a los ejemplos dos procedimientos de solución. El primero lo describe de la siguiente manera:

*“ Cuando una viga está en contacto con el plano de otra viga o con un pilar de tal manera que se apoya y se puede resbalar sobre la misma hacia todos los lados, la dirección de la fuerza sobre el plano de contacto es perpendicular; si no, en la mayoría de los casos, la dirección es desconocida.*

*La mayoría de las veces se puede reemplazar una fuerza desconocida, que actúa en una dirección desconocida, por dos o tres fuerzas desconocidas que actúan sobre direcciones conocidas; [...] Después de haber construido muchos sistemas unitarios de esta manera, como las vigas están disponibles, se establecen las ecuaciones para el equilibrio según las normas de la*

<sup>66</sup> Kayser, Carl Heinrich Albert. *Handbuch der Statik mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höheren Analysis*. G.Braun: Karlsruhe. 1836

*estática general. Pero si tenemos disponibles vigas que están en contacto o se apoyan en más de dos puntos, entonces, con el método anterior no se obtienen tantas ecuaciones como incógnitas. Entonces hay que tener en cuenta el comportamiento del reparto de las presiones sobre los puntos de apoyo según la teoría de los cuerpos flexibles, y de esta manera, obtener nuevas relaciones entre las fuerzas y nuevas ecuaciones.”*<sup>67</sup>

Esto no es más que la aplicación de las teorías de las celosías. El apartado contiene el método del corte libre, diferencia entre soportes univalentes y bivalentes y la sujeción fija. Trata tanto casos estáticos determinados como indeterminados. El concepto se aplica, entre otros, a los entramados representados.

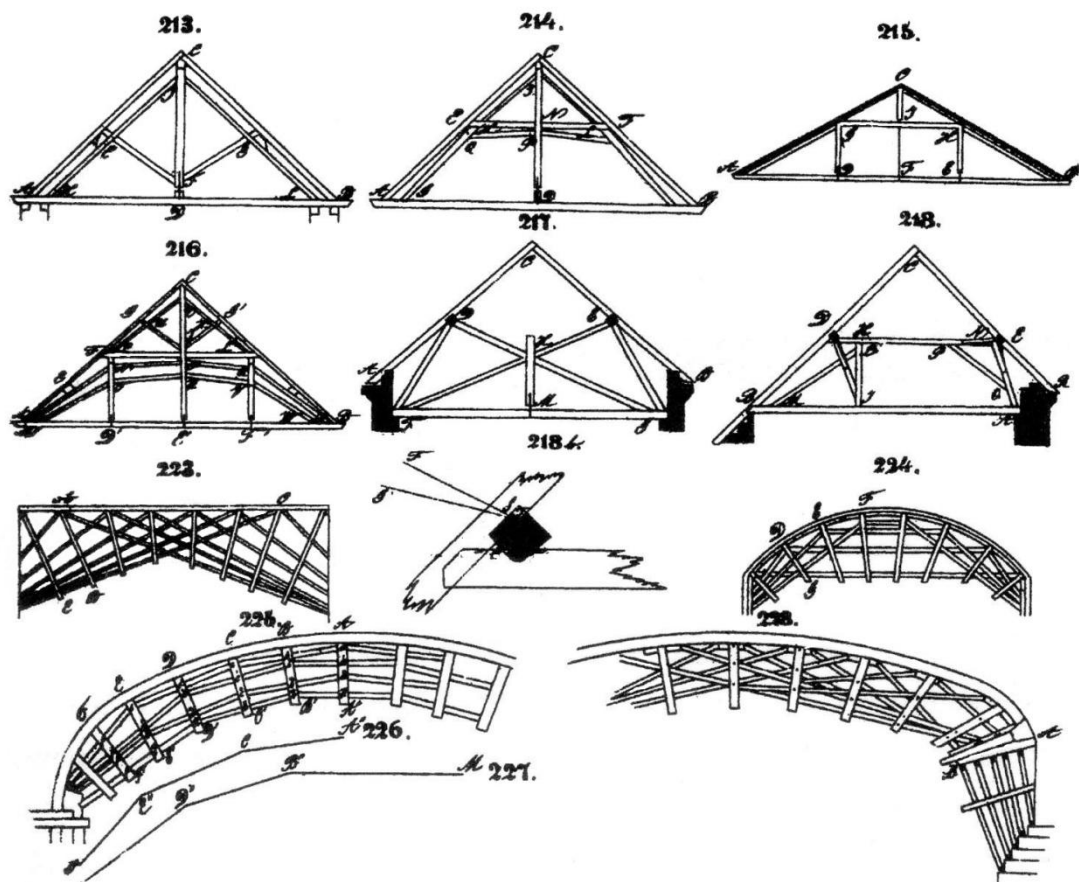


Fig. 3.86. Distintos modelos de los entramados cuya construcción explica Kayser en el Capítulo 14 de *Handbuch der Statik mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höheren Analysis*. (Kayser, 1836: 621)

<sup>67</sup> Traducido de *Handbuch der Statik mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höheren Analysis*, de Carl Heinrich Albert Kayser. 1836. (Manuscrito de la estática en referencia a su utilización y con especial consideración a su representación sin utilización de análisis más complejos). Ver Lehman, C. & Maurer, B. *Karl Culmann und die graphische Statik Zeichnen, die Sprache des Ingenieurs*. Ernst & Sohn: Berlin 2006.



Las iniciativas reseñadas hasta ahora de la utilización de rectas de acción de vectores, que representan fuerzas, la composición de las mismas, e incluso como hemos visto en el caso de Poncelet o Kayser, con análisis de estructuras trianguladas de madera (cerchas), no alcanzan todavía la categoría de cálculos grafostáticos a la que Karl Culmann elevó su compendio teórico práctico. Falta aún una componente esencial, que es la intervención de los conceptos de la Geometría de Posición, que como veremos más adelante, supone el apoyo necesario para la generación definitiva de la Estática Gráfica.

Sin embargo analizaremos a continuación algunas contribuciones más, que creemos forman parte de este itinerario y que resultan interesantes, porque en ellas se basa también parte de la Estática Gráfica.

Ya hemos referido la importancia de la Geometría y el Dibujo en la historia de la Arquitectura y la Construcción, sin embargo, no fue hasta el siglo XVIII, cuando las experiencias y los resultados se sistematizaron formando una disciplina matemático-geométrica independiente: la Geometría Descriptiva. Su fundador indiscutible es Gaspard Monge (1746-1818). En 1794 publicó "*Leçons de géométrie descriptive*"<sup>68</sup> y sentó, así las bases para que los objetos arquitectónicos proyectados sobre planos ortogonales se convirtiera en un lenguaje reglado para arquitectos e ingenieros.

Los primeros en usar los polígonos funicular y de fuerza para estructuras estáticas descritos anteriormente fueron Gabriel Lamé (1795-1870) y Benoit Clapeyron (1.799-1864] dos ingenieros franceses, que en los años veinte y treinta del siglo XIX dieron clase en la Escuela de Travaux Publics, en San Petersburgo. Sus responsabilidades incluyeron la evaluación técnica de los proyectos de urbanismo, por lo que tuvieron que realizar un peritaje para la reconstrucción de la cúpula de la catedral de San Isaac en San Petersburgo.)<sup>69</sup>

Lamé y Clapeyron preconizaron que la línea media del desarrollo de una cúpula debe ser como una catenaria invertida, idea que se había utilizado en 1748 cuando Giovanni Poleni reconstruyó la cúpula de la Basílica de San Pedro en Roma. Pero a diferencia de sus muchos predecesores, los dos franceses utilizaron en San Petersburgo el polígono funicular y el de fuerzas para la construcción de la línea de empujes de las bóvedas. Jean Victor Poncelet asumió los planteamientos de sus dos compatriotas y escribió

---

<sup>68</sup> Monge, Gaspard. *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales l'ane 3 de la République.* (1794). Baudouin, imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national: Paris 1898. gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5783452x

<sup>69</sup> Kurrer, Karl-Eugen. *Auf der Suche nach der wahren Stützlinie.* Humanismus und Technik, 34, 1991: 21-54. (*En busca de la verdadera línea de apoyo.* Humanismo y Técnica)

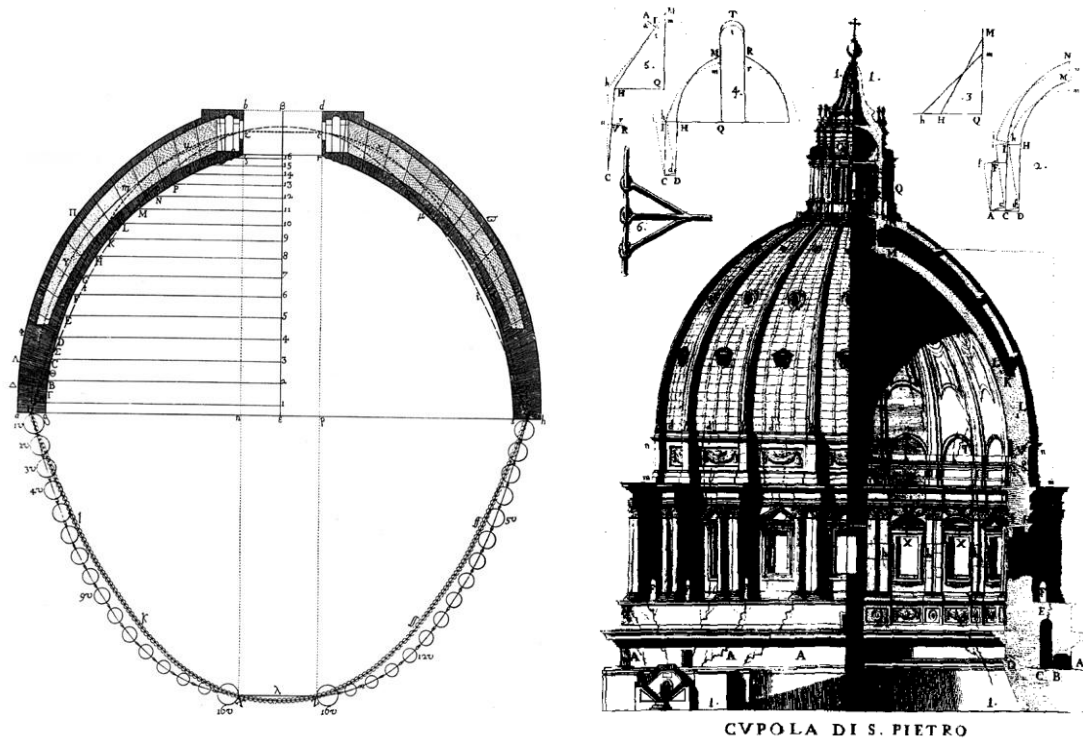


Fig. 3.87. Cúpula de San Pedro. Dibujo de Poleni (1748) dividiendo el arco en 16 partes y cargando con pesos proporcionales. El "antifunicular" de las cargas se encuentra en el interior del arco. (Heyman, 1995: 46)<sup>70</sup>  
 Parere de tre matematici (1743): Descripción de la cúpula y análisis de las causas de los agrietamientos. (López, 1998: 286)<sup>71</sup>



Fig. 3.88. Catedral de san Isaac en San Petersburgo. En ella Lamé y Clapeyron utilizaron polígono de fuerzas y funicular de las cargas para el diseño de la cúpula. El ingeniero español Agustín de Betancourt diseñó el mecanismo para el transporte e izado de las columnas.

<sup>70</sup> Heyman, Jacques *Estructuras de fábrica*. Edición y traducción íntegra de la edición original: *The Stone Skeleton*. Cambridge University Press: Cambridge. 1995 Instituto Juan de Herrera: Madrid. (1ª Reimpresión, Madrid 2005)

<sup>71</sup> López Manzanares, Gema. *La estabilidad de la cúpula de San Pedro: el informe de los tres matemáticos*. Actas del Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción, A Coruña, 22-24 octubre de 1998. I. Juan de Herrera: Madrid 1998.

dos obras, las cuales convertían los métodos gráficos en parte fundamental de la ciencia de la construcción. Una de ellas, de 1835, trata sobre la estabilidad de las bóvedas <sup>72</sup> y la otra, de 1840, sobre la presión de terrenos sobre muros. <sup>73</sup> Ambos eran temas de gran importancia práctica, difíciles de entender teóricamente, que llevaban a soluciones muy complejas de calcular. <sup>74</sup>

El primero de los referidos trabajos de Poncelet no contiene grandes aportaciones conceptuales que añadir a la teoría de las bóvedas, (1835), aunque sí muestra algunas peculiaridades relacionadas con el cálculo gráfico y en particular con la integración gráfica de funciones.

La explicación de la construcción geométrica que aporta Poncelet y que mostramos en la Fig. 3.90. para el análisis de la estabilidad de una bóveda, requiere una introducción previa relativa a ciertos cálculos gráficos que en ella se emplean y que, por otra parte pasaron a formar parte de la mayoría de los tratados de Estática Gráfica.

Aunque dedicamos un punto específico de nuestra Tesis a dichos procedimientos de integración para el cálculo de Diagramas de Esfuerzos Cortantes, Momentos Flectores y La Deformada de una Viga, nos parece interesante explicar aquí, de forma breve, las bases de dicha integración gráfica, apoyándonos en la obra del ingeniero belga Junius Massau (1852-1909), considerado como el creador de la Integración Gráfica. <sup>75</sup>

---

<sup>72</sup> Poncelet, Jean Victor. *Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes*, Mémorial de l'officier du génie, 12. Imprimerie Royal: Paris 1835, p. 151–213.

<sup>73</sup> Poncelet, Jean Victor. *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*. Bachelier: Paris 1840.

<sup>74</sup> Sobre la complejidad matemática de la Mecánica Analítica, Luis A. Godoy explica en su obra (*Estabilidad de Estructuras: Una Perspectiva Histórica*) que con la Mecánica Analítica, las figuras, que antes eran necesarias para la aclaración de ciertos conceptos, desaparecieron a la vez que entraron más ecuaciones y como durísima anécdota, cabe señalar que en la Mecánica Analítica de Lagrange <sup>76</sup> no aparece ni una sola figura.

Godoy, Luis A. *Estabilidad de Estructuras: Una Perspectiva Histórica*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE): Barcelona 2010.

<sup>75</sup> Massau, Junius. *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications*. Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand, 2 (1878), p. 13–55, 203–281 ; 7 (1884), p. 53–132 ; 10 (1887), p. 1–535.: Bruxelles

<sup>76</sup> Lagrange, J. L. *Mécanique Analytique*. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. M<sup>me</sup> V<sup>e</sup> Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques: Paris 1815.

Carlo Saviotti, profesor de Estática Gráfica en l'École d'application des ingenieurs de l'université de Rome, había publicado en 1882 y 1883 sendos escritos, en Roma, en italiano el primero y en Lieja, en francés el segundo,<sup>77</sup> que podemos traducir como "Nota sobre los métodos gráficos de integración", que explica claramente la relación entre la utilización que hace Culmann del Polígono funicular y un nuevo método de integración, que denomina "método del haz funicular", que no es otro que el mismo que utiliza Massau (op. cit).

En general, utilizaban el método de los trapecios los convencidos de las bondades de los métodos gráficos de cálculo, que para sucesivas integraciones, conduce a una solución aproximada, mientras la metodología de Massau lleva a soluciones exactas. La Fig. 3.89 muestra el procedimiento de integraciones sucesivas. Se parte de una función escalonada  $A_0AB_0BC_0C$ :

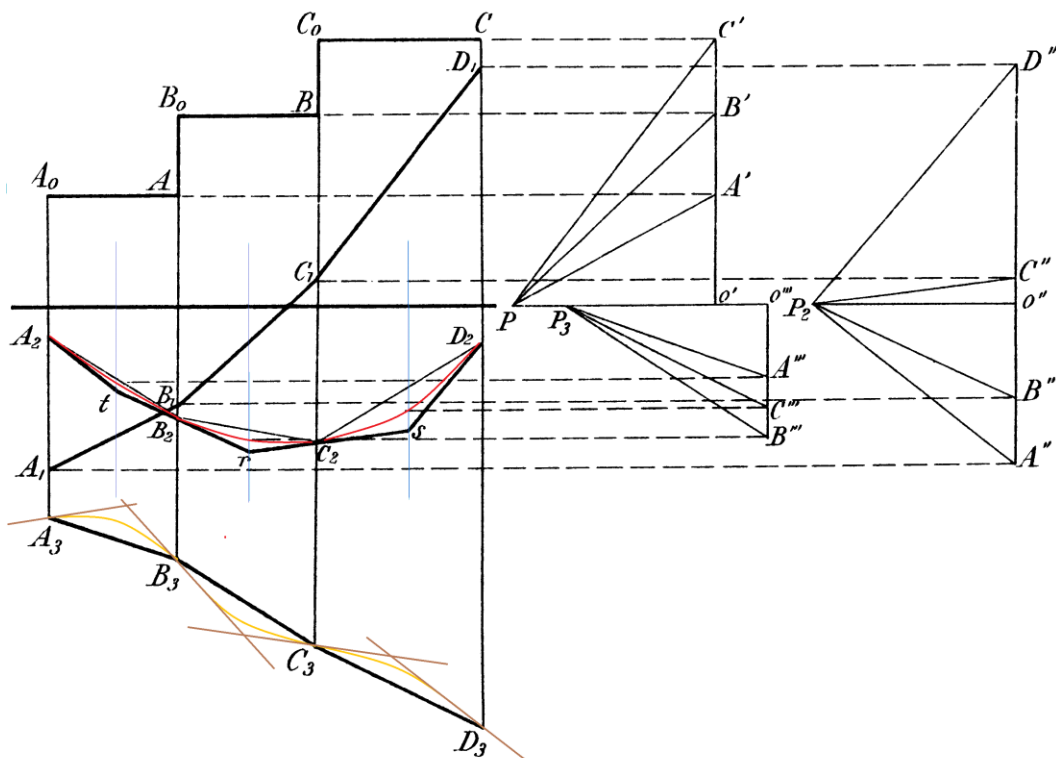


Fig. 3.89. Cálculo de las funciones primitivas sucesivas de la función escalonada  $A_0AB_0BC_0C$ . Hemos marcado en azul las abscisas medias, necesarias para la determinación de la segunda integración y señalado en rojo los arcos de parábola  $A_2B_2$ , con tangentes extremas  $A_2t$  y  $tB_2$  ...  $C_2D_2$  con tangentes  $C_2s$  y  $sD_2$ . Asimismo hemos señalado la curva integral tercera en dorado y sus tangentes extremas en marrón. (Dibujos y cálculos propios sobre el esquema de Massau 1878-1887. Livre I, Planche I)

<sup>77</sup> Saviotti, Carlo. Sui metodi grafici d'integrazione con applicazioni, *Giornale del Genio civile*, 20 (1882), p. 172-193. Tip. ET Lit. Del Genio Civile di Roma. 1882.

Saviotti, Carlo. *Note sur les méthodes graphiques d'intégration*. *Revue universelle des mines*(2), 13 (1883), p. 483-511. Institut National de l'Industrie Charbonnière Liège. Association des Ingenieurs sortis de l'École de Liège: Liège. 1883.

Una primera integración por el método de las ordenadas medias (que naturalmente coinciden con las de los puntos  $A_0$ ,  $B_0$  y  $C_0$ ), con polo en P y punto inicial arbitrario  $A_1$ , nos lleva a la primera función primitiva  $A_1B_1C_1D_1$ , de la función escalonada previa.

Esta segunda integral está formada, efectivamente, por arcos de parábolas, determinados por sus dos extremos y sus tangentes en esos puntos extremos. Una segunda integración mediante el polo P2 y el punto de partida  $A_2$ , en este caso mediante la utilización de las abcisas medias, conduce a una segunda integral representada por el polígono circunscrito  $A_2tB_2rC_2sD_2$ . Con esos datos se puede construir cualquiera de los puntos de estos arcos con exactitud, quedando determinada totalmente la curva integral (dibujada en rojo en la Fig. 3.89).

La tercera integración precisa de las ordenadas medias de los arcos de parábola, que se consiguen con los centros de gravedad de los triángulos  $A_2tB_2$ ,  $B_2rC_2$  y  $C_2sD_2$  formados por las cuerdas y las tangentes. Con un polo P3 y el punto de partida  $A_3$  se obtiene un polígono  $A_3B_3C_3D_3$  inscrito en la curva integral tercera (dibujada en marrón en la Fig 3.89). Para proceder a una cuarta integración, se determinarán las tangentes a la curva anterior y las ordenadas medias de cada arco parabólico de 3<sup>er</sup> grado, a partir de sus dos extremos y las tangentes en esos puntos (dibujadas en marrón).

Las funciones  $A_0AB_0BC_0C$ , la  $A_2B_2C_2D_2$  y la  $A_3B_3C_3D_3$ , recuerdan a la función de Esfuerzos Cortantes, de Momentos Flectores y la Deformada de una viga recta cargada con cargas puntuales perpendiculares a la directriz de la viga en las verticales de los puntos A y B. La función de los Cortantes es la derivada de la de Momentos flectores, siendo la Deformada la primitiva de ésta, como sabemos de la Resistencia de Materiales y a cuyo Cálculo Grafostático dedicamos un punto de esta Tesis Doctoral.

Introducidos los rudimentos de la Integración Gráfica, volvemos a la interpretación de la construcción que supone la aportación de J.V. Poncelet al comportamiento y estabilidad de las bóvedas de la Fig. 3.90.

El profesor Carlo Saviotti señalaba al respecto en su nota en francés de 1883, ya reseñada, como las soluciones de Poncelet remiten a la Estática Gráfica e insistía en lo ingenioso de las soluciones geométricas adoptadas por él, en una época (añadimos nosotros) en que aún no había sido desarrollada:

*“La lecture des mémoires du général Poncelet, qui se rattachent à la statique graphique, et particulièrement de celui qui traite de la solution des principales questions de la stabilité des voûtes, appelle l’attention sur la grande ingéniosité que ce savant géomètre apportait dans l’application des méthodes graphiques à ces différents problèmes”* (Saviotti, 1883: 483).

En la memoria de Jean Victor Poncelet a la que Saviotti hace alusión (Poncelet, 1935: 151-213) se estudia la estabilidad de una bóveda, descomponiéndola en dovelas ficticias de las que calcula el peso, estableciendo así un sistema de vectores paralelos de los que calcula el momento respecto a la clave de la bóveda. Se determina a continuación el posible punto de ruptura correspondiente al empuje máximo admisible,<sup>78</sup> marcando también la línea de empujes mínimos. Los pesos y los momentos son las integrales de las funciones que ellas mismas han ido definiendo al dibujar las verticales correspondientes a cada uno de dichos pesos y momentos (Fig. 7) de la Fig. 3.90.

Al margen del cálculo de los empujes, que aún no corresponde con los conceptos grafostáticos que ya hemos mostrado anteriormente, nos interesa también el método seguido para la determinación de las integrales de pesos y momentos. Utilizaremos la descomposición en franjas verticales y horizontales en la exposición del cálculo de Centros de Gravedad y Momentos de Inercia de forma exclusivamente grafostática.

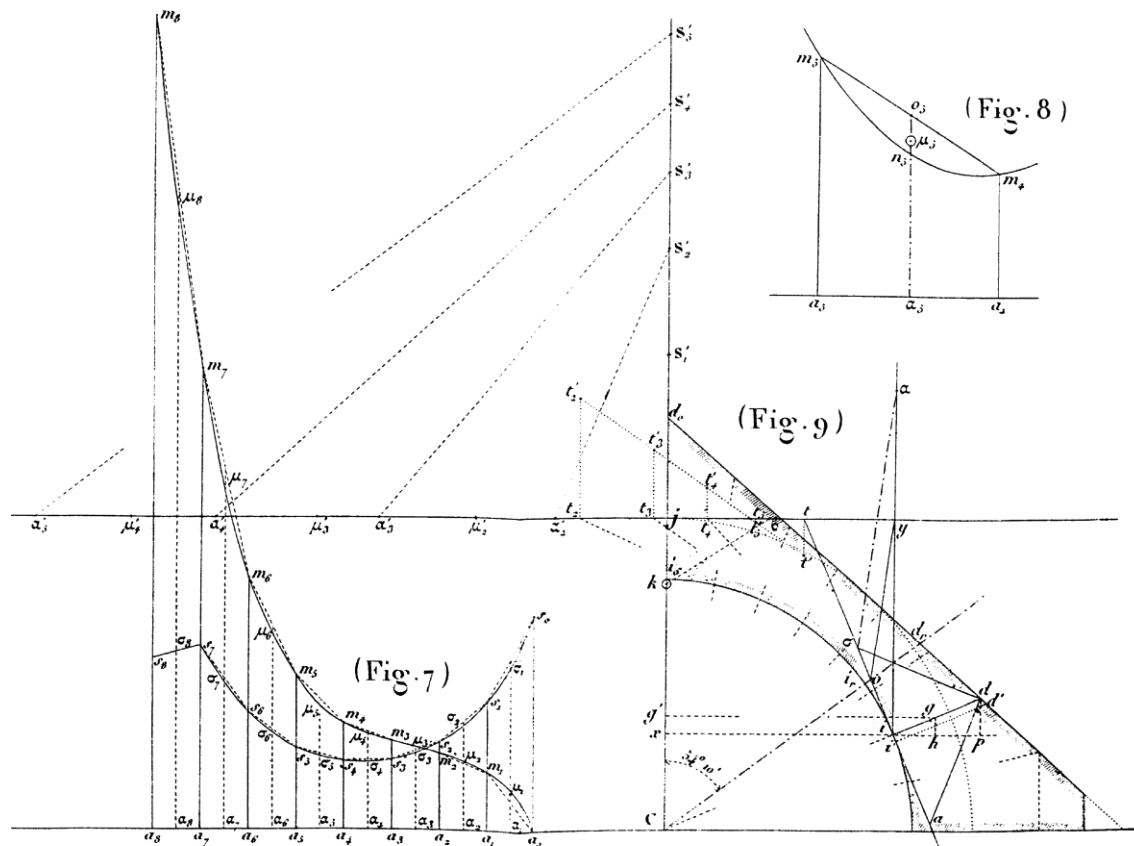


Fig. 3.90. Cálculo de las cuadraturas de las funciones de Pesos y Momentos de los pesos de las dovelas de la cúpula respecto a la clave de la misma. (Poncelet, 1835: Planche III)

<sup>78</sup> Recordamos que las líneas de empuje máximo y mínimo son obtenidas por procedimientos grafostáticos, haciendo coincidir el arranque horizontal en el trasdós o intradós de la bóveda, respectivamente, en el trazado del polígono funicular.

Se trata de la expresión gráfica de uno de los métodos de cuadratura de funciones, en concreto del Método de Simpson (Simpson, 1743: 109-154)<sup>79</sup>, que ayuda al cálculo aproximado del área encerrada bajo una función, el eje de abscisas y las ordenadas en los extremos del intervalo, o mejor expresado, al cálculo de la integral definida, mediante otra función  $P(x) = Ax^2 + Bx + C$  que es una función polinómica de segundo grado (una parábola) para cada intervalo de cálculo.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

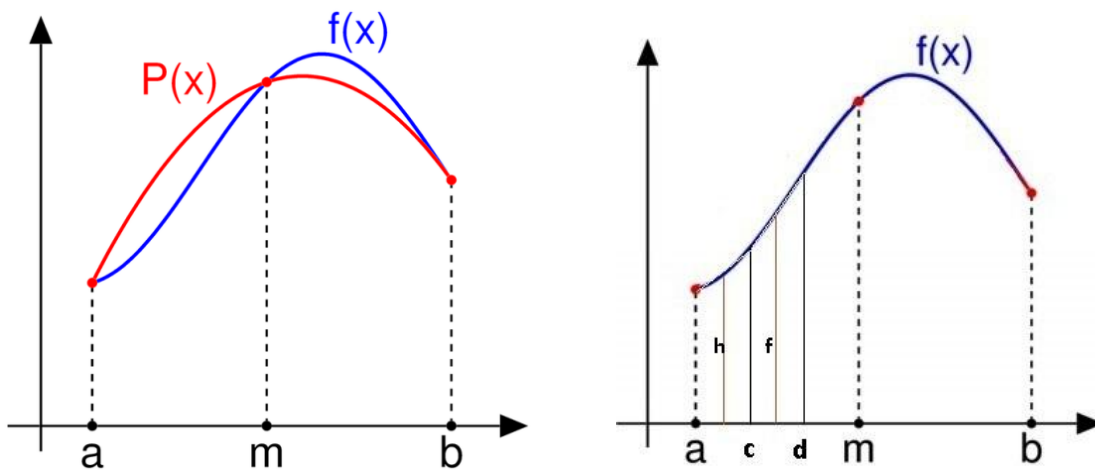


Fig. 3.91. Aplicación del Método de cuadratura de Simpson para el cálculo del área encerrada a,  $f(x)$ , b, a. Y la utilización (menos exacta pero bien eficaz) de la suma del área de los trapecios  $\int f(x) dx = ac \cdot h + cd \cdot f + \dots$ . Con las abscisas a, c, d,.... suficientemente juntas, es decir, con intervalos pequeños, se puede alcanzar una precisión más que suficiente para cualquier cálculo.

Sin embargo, para los cálculos grafostáticos habituales de los que hacemos uso y que nos interesan en especial para los objetivos de nuestra Tesis, la precisión de las cuadraturas utilizadas por Poncelet, supera sobremedida la que consideramos necesaria. La pequeña imprecisión que se comete al calcular el área de los trapecios multiplicando la diferencia de abscisas por la ordenada media, es compensada por la simplicidad de este cálculo, proporcionando una medida suficientemente aceptable.

<sup>79</sup> Simpson, Thomas. *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*. T. Woodward, at the Half-Moon between the two Temple-Gates in Fleetstreet. 1743. <http://books.google.es>. Simpson presenta en el capítulo titulado *Of the Areas of Curves by Approximation* la Proposition I y siguientes, (pp. 109-154) en las que plantea su conocido método de cuadratura.

La cuestión sobre cómo deben ser los muros de contención según las masas de tierra, preocuparon a los arquitectos durante mucho tiempo, sobre todo en la construcción de fortalezas. Durante el siglo XVII se desarrollaron diversos enfoques de cómo calcular la presión lateral del terreno. El más útil de ellos es de Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) del año 1773.<sup>80</sup>

Coulomb supone que en el derrumbamiento de un muro construido en un talud se crea una cuña (prisma) que se desliza. La supuesta línea de deslizamiento transcurre sobre el terreno.

Coulomb hablaba del "Prisma de mayor presión", más tarde se habló del llamado "Principio del Prisma deslizante de mayor presión" y finalmente "El principio de Coulomb", que gozó de una gran popularidad hasta principios del siglo XX. El propio Culmann en su *Die Graphischen Statik* asume dichos principios (Tetmajer, 1882: 9)<sup>81</sup>

Al trabajo de Coulomb le siguieron, a principios del siglo XIX una serie de extensiones o continuaciones que en la mayoría de los casos llevaban a fórmulas complicadas y pesadas de utilizar. De nuevo Jean Victor Poncelet<sup>82</sup> tiene el mérito de haber sido el primero en utilizar medios geométricos y gráficos para el análisis de los empujes del terreno contra un muro de contención. De nuevo trata de simplificar el método de cálculo, con una aproximación gráfica a los métodos analíticos de cálculo.

Culmann comenta en su *Die Graphischen Statik* las intenciones de Poncelet:

*“Qué se puede hacer con todas esas teorías, [...] que nos permiten, a costa de tiempo y esfuerzo, resolver tareas individuales, pero que son demasiado engorrosas como para ser utilizadas en la práctica en cada caso particular que pueda aparecer [...], es una pregunta que, sin duda alguna, le pasaba por la mente a Poncelet, mientras se esforzaba en idear soluciones geométricas para las diferentes tareas que se pueden presentar en la ingeniería.*

---

<sup>80</sup> Coulomb, Carles Augustin de. *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Vol. 7 (1776) pp. 343-382. 1776.

<sup>81</sup> Tetmajer, Ludwig von. *Über Culmanns bleibende Leistungen*. Ein Vortrag gehalten in der naturforschenden Gesellschaft in Zürich: Zürich. 1882.

<sup>82</sup> Poncelet, Jean Victor. *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*. Bachelier: Paris. 1840.



*Las soluciones de Poncelet sólo eran traducciones de expresiones analíticas desarrolladas anteriormente. Poncelet sabía que esto supone un rodeo y que el diseño geométrico se memoriza con mucha menor facilidad cuando al utilizarlo hay que tener en mente una fórmula analítica desarrollada, cuya derivación a lo mejor ya no está presente, en vez de que la estructura de líneas dada por la propia tarea constituya la base a partir de la cual se desarrolla la solución, geoméricamente y de manera sencilla.*

*Por ello estudiaba geometría con afán, en cierto modo intuyendo, qué beneficios podía aportar.” (Culmann, 1864-66: IV)*

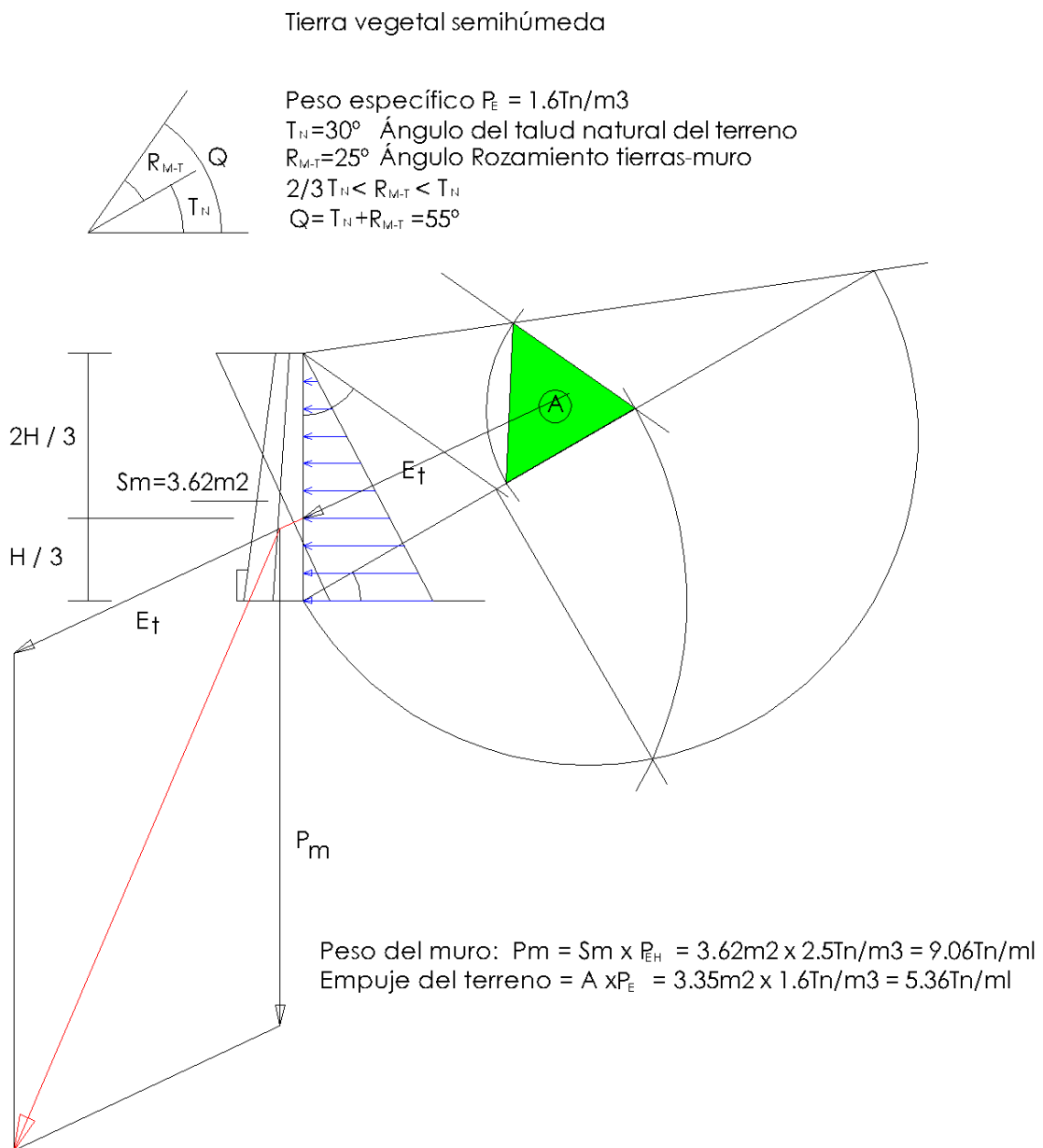


Fig. 3.92. Cálculo del empuje de un terreno vegetal semihúmedo sobre un muro de contención y valor de la Resultante Empuje-Peso del muro. Reinterpretación del método gráfico de Jean Victor Poncelet. (Cálculos y dibujos propios)

A comienzos del siglo XIX se hizo evidente el carácter modélico de la geometría. La geometría euclidiana no se corresponde con lo que ven nuestros ojos, que tienen forma esférica. Los griegos ya sabían que, para hacer que parezcan rectas a los ojos de los espectadores, las columnas de los templos tenían que tener unas turgencias y que las rectas de la parte inferior del frontón se tenían que curvar hacia arriba. Y nada es tan obvio a nuestros ojos, como el concepto desarrollado por la geometría euclidiana de que dos rectas se cruzan en el infinito. Los carriles paralelos o las calles se juntan a lo lejos si los seguimos con la mirada. Y como sabemos que nunca podremos llegar al punto en que se cruzan, deducimos que tiene que estar en el infinito.

Se podría pensar entonces, que los artistas del Renacimiento habrían encontrado la expresión exacta con la perspectiva cónica y con los puntos de referencia en los que se cruzan las rectas. Pero la Perspectiva Cónica tampoco se corresponde exactamente con lo que vemos, ya que nosotros no vemos rectas. Si colocamos segmentos de línea recta en la lejanía utilizando únicamente nuestros ojos, éstos acabarán siendo hiperbólicos. De esta manera, la geometría euclidiana es un sistema de reglas sobre la superficie plana que poco tiene que ver con nuestra experiencia visual. Las geometrías elípticas e hiperbólicas que surgen en los años treinta del siglo XIX, se acercan más a la realidad de nuestra visión, aunque nos parezcan inimaginables, ya que suprimen el postulado de paralelas de la geometría euclidiana. De esta manera, sobre un plano hiperbólico, por ejemplo, a través de un punto fuera de una recta, no sólo hay una sino ninguna o infinitas paralelas. La suma de los ángulos formados por los lados de un triángulo está por debajo de  $180^\circ$  grados. Los hexágonos pueden tener seis ángulos rectos, y así sucesivamente.<sup>83</sup>

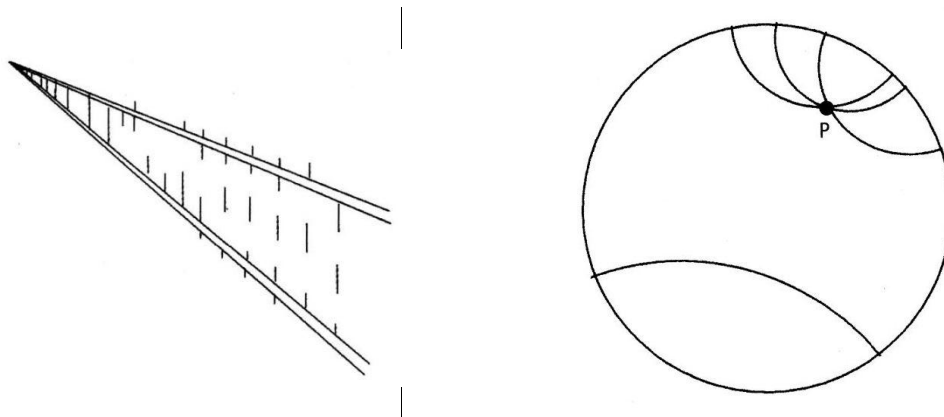


Fig. 3.93. Dibujo del contacto de rectas paralelas en el infinito. Por un punto exterior a una recta de un plano hiperbólico pueden existir infinitas paralelas.

La coexistencia de varias geometrías a principios del siglo XIX, dejó claro que la geometría no es una ciencia del espacio empírica, sino una teoría.

<sup>83</sup> La influencia de la Geometría proyectiva en la aparición de la Estática Gráfica se analiza con amplitud en el Capítulo 4 de esta Tesis.

El interés de Culmann por los métodos gráficos se remonta a sus primeras publicaciones, como su “Fachwerktheorie” (Teoría de la celosía) del año 1851. Aunque ésta obra aún es analítica, ya contiene algunos procedimientos gráficos.

En el segundo capítulo de su cuaderno de viaje, Culmann trata la teoría de los puentes de celosía e intenta hacer la estática de la celosía comprensible a través de transformaciones gráficas. El método analítico es apoyado por experimentos ilustrativos. Podemos suponer que para Culmann, el entendimiento estaba estrechamente unido a la visión. Explicar significa por tanto enseñar o dibujar. La explicación a través de lo visual se convirtió finalmente en un método de cálculo. El método gráfico sirve aquí sólo para la explicación visual del cálculo estático. Culmann aún no explica que con su visualización tiene ya una solución gráfica.

Culmann emplea en el tercer capítulo de su cuaderno, la teoría de las celosías para analizar la capacidad portante de algunos puentes. También examina puentes en arco, entre ellos el puente en cascada de madera del ferrocarril Erie-Eisenbahn de 1845 con una espectacular crujía de casi cien metros. “No puedo dejarlo”, escribió emocionado en su informe, “aquí tenemos otra vez la belleza, facilidad y la practicidad de la construcción”. (Lehman et al., 2006: 111)<sup>84</sup>

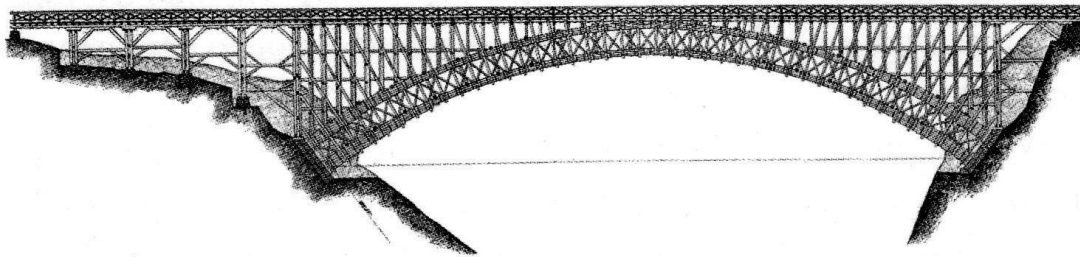


Fig. 3.94. Puente Cascada Erie-Eisenbahn de 1845. Culmann.

Culmann trata el puente como si fuera una bóveda y analiza la estática del arco de manera aproximativa. Una buena oportunidad para utilizar las teorías gráficas de bóvedas de Poncelet. La meta: sencillez, claridad y visualización: (Culman, 1851: 120)

*“El cálculo de las líneas medias y de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el arco lleva a cálculos extremadamente largos. Pero al ser la sencillez el principal resultado de fórmulas y operaciones a las que se debe el técnico, he utilizado aquí métodos gráficos de Poncelet ya que éstos al mismo tiempo ofrecen una imagen clara y fácil de visualizar de las fuerzas que afectan al sistema y de su crecimiento y decrecimiento.”*

<sup>84</sup> Lehmann, Chistine & Maurer, Bertram. *Karl Culmann und die graphische Statik. Zeichnen, die Sprache des Ingenieurs*. Ernest & Sohn: Berlin 2006.

Faltaba todavía en esta etapa de la obra de Culmann su aproximación a la Geometría de Posición, para que se produjera el impulso definitivo a la Estática Gráfica, con la utilización de la dualidad (reciprocidad) entre el polígono de fuerzas y el funicular.

En la Geometría de Posición surge el plano proyectivo del plano euclidiano a través de la extensión a elementos infinitamente alejados. En otras palabras: rectas paralelas se cortan en el infinito. De forma que, cada conjunto de rectas paralelas se corresponde con un punto infinitamente lejano o irreal. Todos los puntos del infinito reciben el nombre de recta proyectiva. Y una cantidad de estas rectas recibe el nombre de plano proyectivo.

En la geometría proyectiva cada afirmación se corresponde con una afirmación dual, la cual se obtiene cuando se reemplazan por todos lados rectas por puntos y puntos por rectas. Si una afirmación es cierta, también lo será la correspondiente afirmación dual. En los tiempos de Culmann, la dualidad recibía el nombre de reciprocidad.

Culmann se dedicó intensivamente al trabajo de Poncelet y sus seguidores, por ello, la geometría proyectiva, también llamada geometría de ubicación o nueva geometría, le era familiar. Esta geometría llevaba, en el caso de las secciones cónicas, a que resultados conocidos se presentaran de manera más abstracta y así se pudieran descubrir nuevas situaciones.

La idea de Culmann era que con la Geometría Proyectiva se podían representar los métodos gráficos de manera más compacta y llegar así, a nuevos resultados aunque su objetivo era la aplicación. Pero era de la opinión de que la manera más productiva de desarrollar aplicaciones era a través de la utilización de los medios matemáticos más profundos. Es decir, no iba probando métodos aleatoriamente, sino que buscaba conceptos de nivel superior que eran aplicables en muchas áreas. Culmann esperaba que con la geometría proyectiva, la ingeniería fuera elevada al nivel de ciencia. Y de esta manera acaba su prólogo de la primera edición de una forma algo patética:

*“Y finalmente ¡vete!, me hubiera gustado haberte convertido en el fundamento de una práctica de ingeniería construida sobre una base científica. Sólo me queda la esperanza de encontrar suficiente fuerza en mí para reconvertir toda esta extensa asignatura: se trata de una obra que se cierne antes mis ojos, como una de esas catedrales medievales se levanta ante el artista que la diseñó, que no puede abandonar la esperanza de verla terminada. Pero puede que otros te utilicen y te sigan construyendo, y lo que yo no pueda, lo acaben mis estudiantes.”*

Culmann desarrolló el concepto de Dualidad por cuenta propia e independientemente a estos análisis, estudiaron también las figuras recíprocas William John Macquorn Rankine (1820-1872)<sup>85</sup> y James Clerk Maxwell (1831-1879).<sup>86</sup>

Los estudios de Maxwell se explican en síntesis de la siguiente manera: En primer lugar se tienen dos poliedros recíprocos. En éstos, los vértices se transforman en caras, las aristas en aristas y los caras en vértices (poliedros de la izda. de la Fig. 3.95). Estos dos diagramas pueden representar un polígono de fuerzas y su correspondiente polígono funicular y también un polígono funicular y su correspondiente polígono de fuerzas (esquemas central y de la derecha de la Fig. 3.95.)

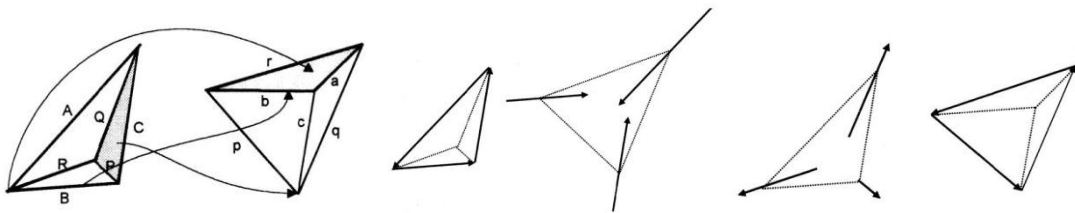


Fig. 3.95. Diagramas recíprocos de Maxwell. (Esquemas similares a los de Maxwell, 1872: plates I)

La dualidad de Culmann, por el contrario, no trabaja con poliedros, es decir relaciones espaciales. Consiste en que a través de medios proyectivos, las dos figuras se proyectan en el plano y se puedan representar una sobre otra. Era requisito que todas las fuerzas del polígono funicular pasen por un punto. Como veremos en el capítulo dedicado a la Geometría de Posición, la reciprocidad puede darse también para sistemas de vectores no concurrentes en contra de la condición impuesta por Culmann.

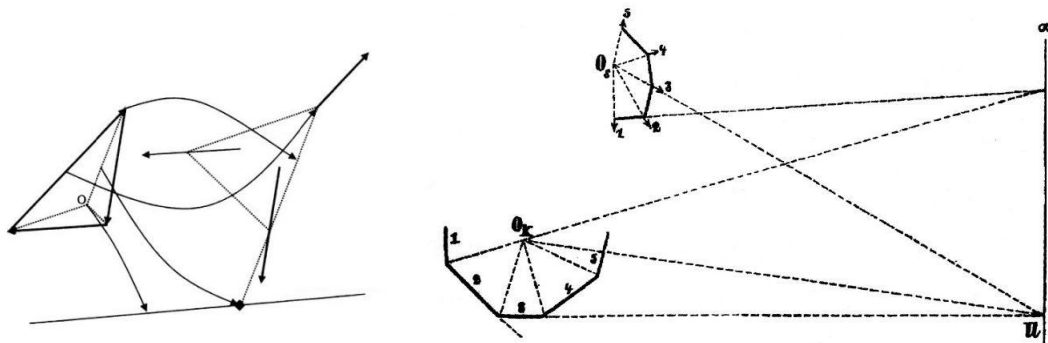


Fig. 3.96. Diagramas recíprocos según la interpretación dual de Culmann. Dibujo del propio Culman de la segunda edición de su *Graphischen Statik*.

<sup>85</sup> Rankine, William John Macquorn. *Frames of roofs*. The Engineer, vo I. 33, p. 114. Feb. 1872: London.

<sup>86</sup> Maxwell, James Clerk. *On reciprocal figures, frames and diagrams of forces*. Trans. Roy. Soc. Edinburgh Vol. 26. pp. 1-40, plt. 1-4 Edinburgh. 1872.

Aquí, el lado del polígono de fuerzas (la fuerza) pasa a ser el ángulo del polígono funicular (o sea el punto de aplicación). El ángulo del polígono de fuerzas pasa a ser el lado del polígono funicular. El lado con el extremo en el punto 0 pasa a ser el punto en el infinito S y el polo 0 pasa a ser la recta en el infinito. Culmann ilustra esta relación de su puño y letra, en la segunda edición de su *Graphischen Statik*.

El italiano Luigi Cremona (1830-1903),<sup>87</sup> arquitecto, ingeniero, matemático y profesor de las facultades de Bolonia, Milán y Roma, recurrió en 1872 a las fórmulas de Maxwell en un artículo que tuvo gran difusión, concretado más tarde en *Le figure reciproche nella statica grafica* publicado en 1879. En última instancia, integró la dualidad de Maxwell en el concepto de la Estática Gráfica de Culmann.

Como analizamos en el capítulo 4 de esta Tesis, Culmann acogió con entusiasmo los desarrollos de Cremona en la segunda edición de su Estática Gráfica y en su edición francesa.

La Fig. 3.97. muestra una estructura triangulada plana sustentada por lo que podrían ser dos cables situados en los extremos superiores izquierdo y derecho.

La técnica depurada por Luigi Cremona, consiste en considerar que, como las barras están articuladas, solo están sometidas a esfuerzos normales de tracción o compresión. El equilibrio al que se supone que está sometida exige que las cargas verticales que gravitan sobre el cordón superior, ( $P_1, P_2, \dots, P_8$ ), más las que cuelgan del inferior, ( $P_{10}, P_{11}, \dots, P_{16}$ ), han de ser compensadas por las dos Resultantes, que se corresponden con las Tensiones en los cables sustentantes, ( $T_9$  y  $T_{17}$ ).

El gran hallazgo de Cremona fue considerar que los esfuerzos a que se ven sometidas las barras de la estructura tienen que ver, o son de alguna manera proporcionales, con la geometría de unas líneas que combinan las intensidades de los vectores que representan las cargas con las direcciones de las propias barras, considerando el Equilibrio Estático de cada nudo de la estructura. Como cada nudo está en equilibrio, su diagrama vectorial será cerrado y como cada barra une dos nudos, cada barra participa en dos diagramas de equilibrio de dos nudos distintos. Los distintos diagramas de equilibrio de nudos, se terminan enlazando y cerrando todos, dando lugar a estas conocidas figuras como la que se muestra en la parte inferior de la Fig. 3.97.

---

<sup>87</sup> Cremona, Luigi. *Les figures reciproques*. Trad. Bossut (Louis) Gauthier-Villars: Paris. Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010. 1885.

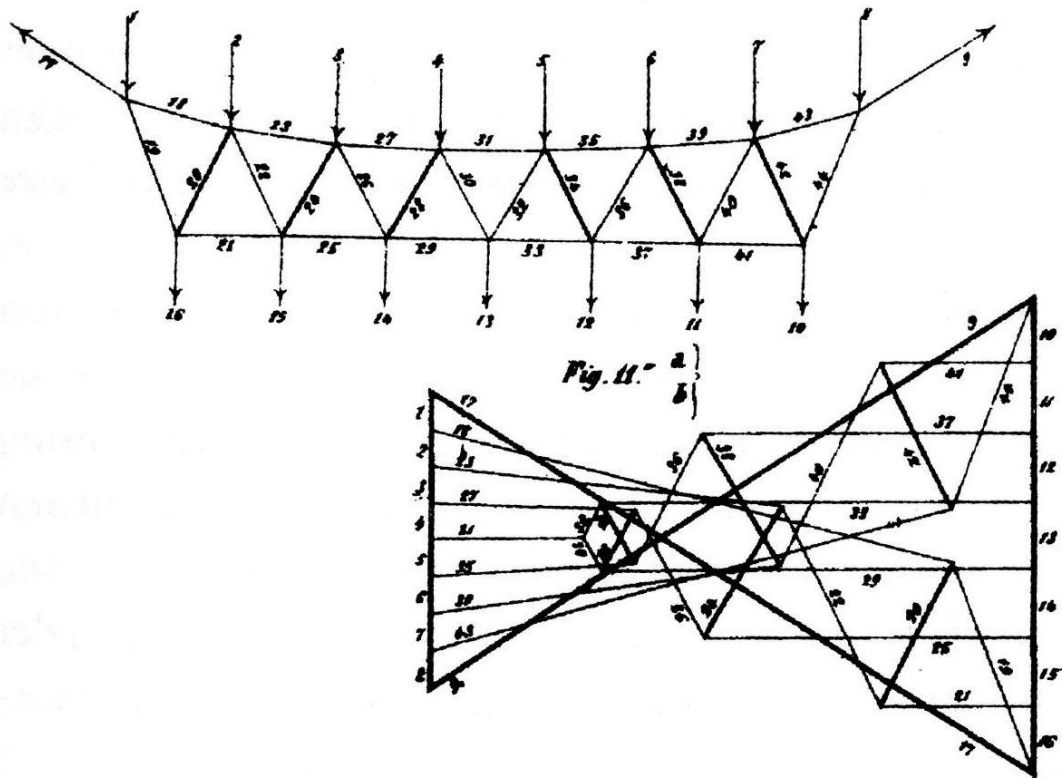


Fig. 3.97. Dibujos de Cremona y Culman (son exactamente iguales) para el cálculo de los esfuerzos en las barras mediante el método ideado por Luigi Cremona de Las Figuras Recíprocas. (*Le figure reciproche nella statica grafica*. Cremona, 1879 y *Die Graphische Statik*. Culman, 1866).

El método de cálculo de estructuras trianguladas ideado por Luigi Cremona, ha resultado ser uno de los métodos grafostáticos más universalmente conocidos y utilizados en todas las escuelas de Arquitectura e Ingeniería del mundo, desde el último cuarto del S. XIX al correspondiente del S. XX.

La importancia del análisis de los conceptos de la Geometría Proyectiva para la comprensión del nacimiento de la Estática Gráfica, es evidente y a ese análisis se dedica el Capítulo 5 de esta Tesis Doctoral.

## 4. ENCUADRE HISTÓRICO DE LA APARICIÓN DE LA GRAFOSTÁTICA

### 4.1. LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y LA FIGURA DE GASPARD MONGE

Durante los últimos años del s. XVIII y las primeras décadas del XIX, París se convirtió en el lugar donde ocurrieron acontecimientos históricos que señalaron el devenir de Europa y el mundo entero.<sup>1</sup> Con la caída de Napoleón y la restauración borbónica, parece que los ciudadanos creen y dejan de creer con la misma facilidad con que, quienes les gobiernan imponen unas leyes salvajes o las suprimen. Con las revueltas de julio de 1830 el reciente rey abdica, en Luis Felipe cuya liberalidad y hasta republicanismo parecían estar contrastados. En 1848 se proclama la Segunda República, pasándose en muy poco tiempo a un gobierno de nuevo imperial, nombrando al sobrino de Napoleón emperador de Francia en 1851.<sup>2</sup>

Hubo, en lo que a esta Tesis concierne, un denominador común a toda esta época y es que desde un Napoleón a otro, todos los gobernantes fueron especialmente sensibles a las ciencias y sus aplicaciones, creándose en esta etapa las grandes escuelas, como la Normal Superior, la de Minas y la Politécnica, e instituciones de carácter científico como la Oficina de Longitudes, dedicada a la astronomía, la geografía y la navegación, o el Conservatorio de Artes y Oficios, favoreciéndose a científicos e investigadores, como nunca se había hecho hasta entonces.

Gaspar Monge nació en Beaune en 1746, hijo de un comerciante de la Alta Saboya y de la hija de un cochero. Estudió en un colegio de los oratorianos de su ciudad natal, completando sus estudios en un centro de la misma orden de Lyon, pasando de ser alumno a profesor en un solo año académico. En 1764 participó con un compañero en el levantamiento de un plano de Beaune, siendo gracias a este trabajo, contratado como auxiliar de la Real Escuela Militar de Mézières, dedicándose a la ejecución de dibujos de cantería y maquetas para los cadetes, siendo imposible su acceso al grado de oficial por su origen plebeyo. En 1766 resolvió, de forma distinta de la académica un problema de artillería, llamando la atención del catedrático de la Escuela, pasando a ser su ayudante, centrándose en el estudio de cuestiones matemáticas propias del momento, en particular en los relativos a la sistematización geométrica de la representación del espacio y la definición matemática de curvas y superficies. Se dedicó, después de ser ministro de Marina, a la organización de las enseñanzas oficiales, especialmente de l'École Normale y l'École Centrale des Travaux Publics, después École Polytechnique. Asumió además de la redacción de los programas y las tareas de dirección, la enseñanza directa de la Geometría Descriptiva, auxiliado por Jean-Nicolas Hachette.

---

<sup>1</sup> Michelet, Jules. *Histoire de la Révolution Française*. Gallimard: Paris 1952

<sup>2</sup> Saint-Amand, Imbert de. *Le règne de Napoléon III*. Librairie Dentu: Paris 1861.



Tras la caída del régimen napoleónico, fue desposeído de todo cargo y apartado de toda actividad muere en París en 1818.<sup>3</sup>

Gaspard Monge explica por primera vez su geometría descriptiva en 1795, casi simultáneamente en los dos centros citados, conociéndose con precisión lo explicado en l'École Normale gracias a las publicaciones que de sus lecciones se hicieron y que afortunadamente fueron muy pronto traducidas al castellano, siendo, pues, conocida la geometría descriptiva de Monge y muy pronto estudiada en España.

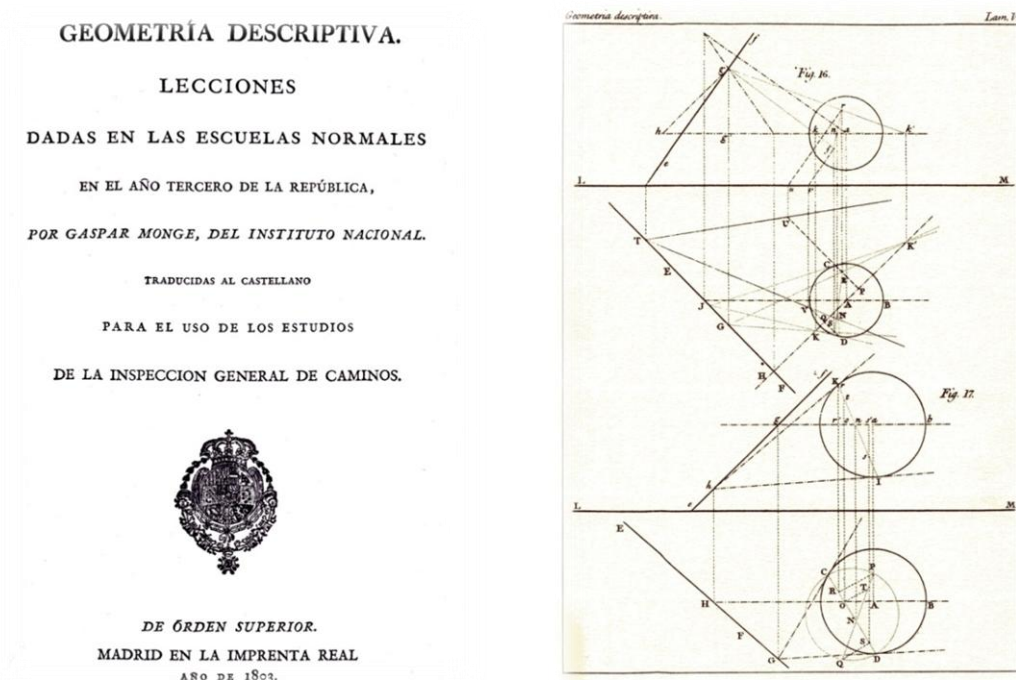


Fig. 4.1. Portada de la reproducción facsimilar del original, traducido en su día por Agustín de Betancourt, publicada por el Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos en 1996 con autorización de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando y dibujo de uno de los problemas resuelto por Monge, mediante dos métodos, del trazado, por una recta dada, de un plano tangente a la superficie de una esfera.<sup>4</sup>

Agustín Betancourt, uno de los más grandes ingenieros españoles de todos los tiempos, traduce las palabras de Gaspard Monge en las que define los objetivos que persigue con su Geometría descriptiva y que son la causa del interés con el que Culmann define la Grafostática como la aplicación de la Geometría Descriptiva para la realización de cálculos accesibles al campo de la Arquitectura y la Ingeniería, encontrando soluciones relativamente sencillas a los problemas del equilibrio de los objetos sometidos a un sistema de fuerzas exteriores.

<sup>3</sup> [www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Monge.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Monge.html)

<sup>4</sup> Monge, Gaspard. *Geometría Descriptiva*. Ed. Facsímil del Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos: Madrid 1996.

*“Este arte tiene dos objetos principales.*

*El primero es representar con exactitud sobre los diseños de dos dimensiones los objetos que tienen tres, y que son susceptibles de una determinación rigurosa.*

*Bajo este punto de vista es una lengua necesaria al hombre de genio que concibe un proyecto, á los que deben dirigir su ejecución y en fin á los artistas que por mismos deben ejecutar sus partes diferentes.*

*El segundo objeto de la geometría descriptiva es deducir de la descripción exacta de los cuerpos todo quanto se sigue necesariamente de sus formas y de sus posiciones respectivas. En este sentido es un medio de investigar la verdad; ofrece ejemplos continuamente del paso de lo conocido a lo desconocido, y porque se halla siempre aplicada á objetos susceptibles de la mayor evidencia, es necesario que entre en el plan de la educación nacional. No solamente es á propósito para ejercitar las facultades intelectuales de un gran pueblo; y por lo mismo contribuir á la perfección de la especie humana, sino que también es indispensable á todos los obreros, cuyo objeto es dar a los cuerpos ciertas formas determinadas; y los progresos tan lentos de nuestra industria se deben atribuir á que los métodos de este arte se han difundido hasta ahora muy poco, o casi se descuidaron enteramente.*

*La educación nacional pues recibirá una dirección ventajosa familiarizando nuestros jóvenes artistas con la aplicación de la geometría descriptiva a las construcciones gráficas que son necesarias al mayor número de artes, y haciendo uso de esta geometría para la representación y la determinación de los elementos de las máquinas, por medio de las cuales el hombre, poniendo en contribución las fuerzas de la naturaleza, no se reserva, por decirlo así, en sus operaciones otro trabajo que el de su inteligencia.*

*No es menos ventajoso derramar el conocimiento de los fenómenos de la naturaleza, que pueden convertirse en provecho, de las artes.”<sup>5</sup>*

---

<sup>5</sup> La primera edición como libro independiente de *La Géométrie Descriptive*, fue la impresa en el año 1799 por Baudouin, preparada por Niclas Hachette, al encontrarse Monge en una expedición a Egipto, siendo ésta la traducida en 1803 en España. En su anteportada se advertía de la incompleción de materias impartidas en l’Ecole Normale. Los elementos de máquinas serían los publicados por Lanz y Betancourt en 1808 en que murió Monge.

*La Géométrie Descriptive* contiene algunas cuestiones que no tienen que ver exactamente con la representación gráfica, como las últimas páginas donde el autor desarrolla su teoría sobre líneas de curvatura, materia sobre la que tenía un especial interés por su aplicación a distintas materias, como el correcto despiece del aparejo de las bóvedas de piedra. Monge dice buscar el cumplimiento de una condición deseada en todo despiece de cantería, como es que los ángulos de los sillares sean rectos y no agudos. Así ocurre con las superficies regladas, cuya labra se guía y comprueba con una regla. Es decir, que en condiciones ideales, las superficies de las juntas entre piezas deben ser regladas, preferiblemente desarrollables y encontrar siempre ortogonalmente la superficie del intradós aparente. Al contrario de lo que sucede con una superficie de revolución, si la superficie fuera un elipsoide e intentáramos buscar el mismo aspecto que en una esfera, encontraríamos graves dificultades, en especial la imposibilidad de encontrar siempre piedra con ángulos rectos.

Para Monge, la Geometría Descriptiva pertenecía más al dominio de la Técnica que de la Ciencia, pudiéndose delimitar en lo que él mismo denominaba Matemática Aplicada.

Curiosamente, por tanto, las enseñanzas de Monge, tienen una importancia todavía mayor en el desarrollo de las matemáticas puras, elevando el “honor” de los métodos geométricos, caídos en el descrédito a finales del S. XVIII, restauración que iba a ponerse más de manifiesto con la Geometría Proyectiva del S. XIX y el nacimiento de la Geometría Moderna.<sup>6</sup>

En la Fig. 4.2. se muestran dos de las representaciones de la Descriptiva de Monge. La primera correspondiente a las primeras explicaciones, en la que se muestra una recta AB contenida en un plano proyectante horizontal que, naturalmente, se proyecta sobre la traza del propio plano sobre el horizontal de proyección insinuando el proceso de abatimiento del plano vertical sobre el horizontal, para la definitiva exposición de proyección vertical sobre la línea de tierra y bajo ella la proyección horizontal. La otra figura representada muestra la intersección de dos superficies cilíndricas con curva directriz no regular.

Una de las ideas más fecundas de Monge, es el estudio de superficies a partir de su modo de generación. Podría considerarse como una teorización de una práctica habitual de la estereotomía de la piedra. Consideremos, por poner un ejemplo sencillo, la talla del fuste de una pilastra de piedra. Para engendrar en un bloque de piedra

---

<sup>6</sup> Belhoste, Bruno. *Gaspard Monge. Urgences révolutionnaires et utopie*. Les Cahiers du M.U.R.S. nº 17, 3<sup>ème</sup> Trimestre 1989. Science et Devenir de l'Homme. 1989-17-55. Paris (Las siglas M.U.R.S. corresponden a: Mouvement Universel de la Responsabilité Scientifique) 1989.

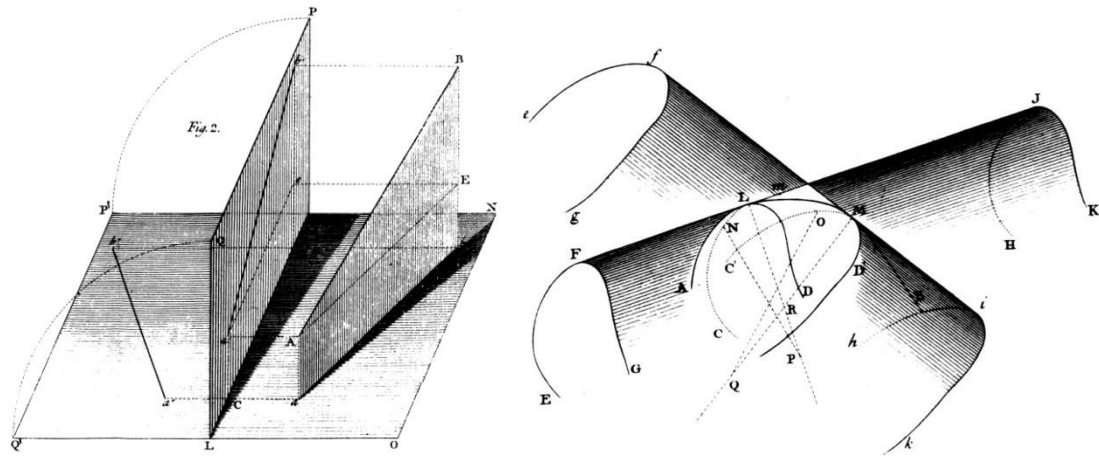


Fig. 4.2. Representación espacial de la proyección de una recta contenida en un plano, sobre los planos de proyección y el abatimiento del plano vertical e intersección de dos superficies cilíndricas. Fig. 2 de la Lámina I y Fig. 48 de la Lámina XXIV de la Geometría descriptiva de Gaspard Monge.

vertical la superficie cilíndrica de la columna, el cantero trazaría un círculo sobre la superficie superior y después desbastaría la piedra verticalmente a lo largo de ese trazo. Geométricamente, esto significa que un cilindro recto de base circular, es engendrado por el desplazamiento de una recta vertical, paralelamente a ella misma, a lo largo de un círculo situado en el plano horizontal.

Naturalmente, este modo de generación de superficies, no es exclusivo de los cilindros de directriz circular. Se generan por el desplazamiento de una recta paralelamente a sí misma siguiendo una curva directriz cualquiera. Si se extiende como muestra Monge a una recta desplazándose a sí misma sobre otra recta, se generaría un simple plano, pero si se apoya sobre una segunda curva, se generan conoides, paraboloides, hiperboloides, etc.

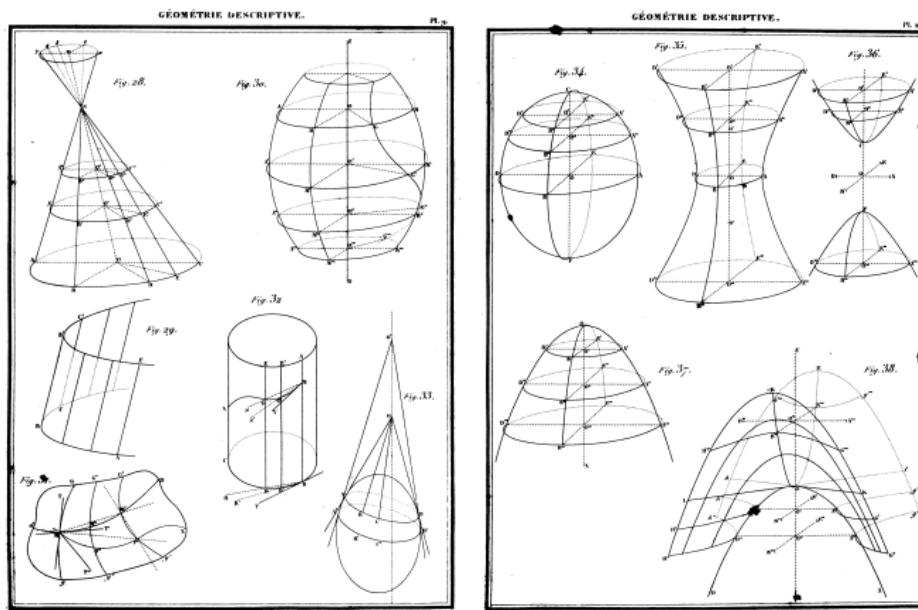


Fig. 4.3. Superficies engendradas por generatrices rectas y cónicas a la manera descrita por Monge, generando conoides, elipsoides, paraboloides, hiperboloides, etc. Planche 9 y 10 de *Géométrie Descriptive*. Leroy. (Ver <sup>9</sup>)

Este modo de generación de superficies que constituyen la expresión gráfica de ecuaciones analíticas bien complejas, son el punto de partida de las investigaciones de arquitectos como Félix Candela, considerado el gran maestro de las cubiertas o cascarones de hormigón armado. La complejidad matemática de estas estructuras laminares contrasta con la belleza y sencillez de sus formas, su economía, gran resistencia y ligereza con pequeños espesores.

La vocación científica del arquitecto Félix Candela se puso de manifiesto, entre otras cuestiones, por su dominio de la Geometría Descriptiva, a cuyo creador, Monge, dedicamos este apartado de nuestra Tesis.

En la obra de Candela se pueden apreciar todos los ejemplos de construcciones laminares: en forma de cúpula, cilíndrica, reglada e hiperbólicos o hyper.

En su escrito *La estructura veloz*,<sup>7</sup> Josemaría Churtichaga explica cómo Félix Candela (1910-1997) y Emilio Pérez Piñero (1935-1972) fueron dos de esos arquitectos que, extraordinarios concedores de la ciencia estructural, marcaron una trayectoria de especial repercusión en la historia de la Arquitectura.

En la obra de Félix Candela podemos apreciar todos los ejemplares de construcciones laminares: en forma de cúpula, cilíndrica, reglada e hiperbólicas o hyper. Por su conocimiento de la Geometría Descriptiva y por el desarrollo de esas superficies regladas que ya definía Gaspard Monge, es por lo que mostramos aquí algunas de esas estructuras precisa y preciosamente resistentes, recordando uno de los “lemas” inspiradores de esta Tesis : “La forma sigue siempre a las fuerzas”. Buen ejemplo son las superficies mostradas en la Fig. 4.4. que recuerdan al maestro Gaudí en la singularidad de la transmisión de las cargas, siguiendo a las fuerzas.

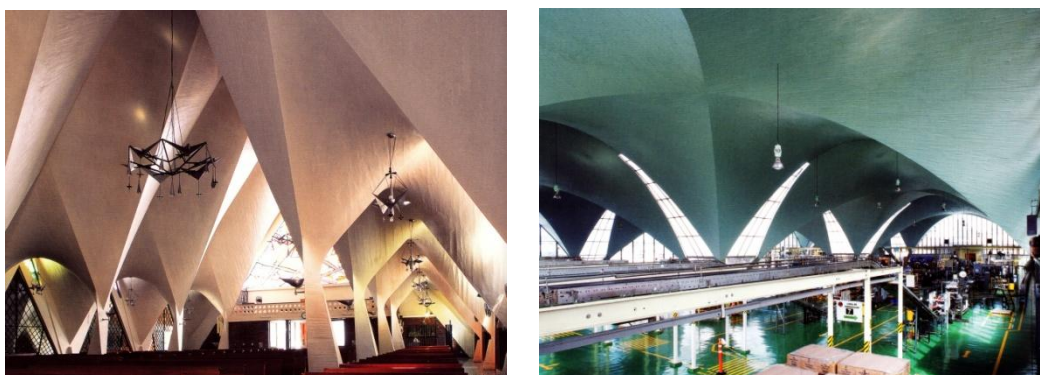


Fig. 4.4. Interior de la Iglesia de la Virgen Milagrosa, Narvarte y de la Planta embotelladora de Bacardí en Tultitlán en el Estado de México. (Anda Alanis, Enrique X. de. Félix Candela 1910-1997. El dominio de los límites. Taschen: Köl 2008 )

<sup>7</sup> Churtichaga, Josemaría. “ *La estructura veloz*” en *Félix Candela y Emilio Pérez Piñero* . Arquitecturas ausentes del siglo XX. Editorial Rueda, S.L.: Madrid 2004.

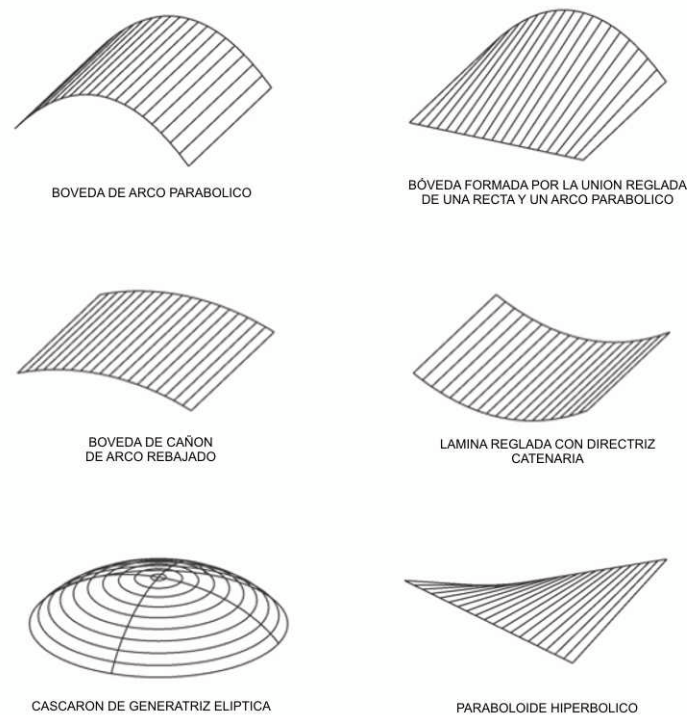


Fig. 4.5. Diversos tipos de superficies regladas empleadas por Félix Candela y ya definidas por Gaspard Monge. (Actas del VI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. INGEGRAF: Toledo 1994.)

Quizá la más famosa de las bóvedas por arista con hypars sea el cascarón del restaurante Los Manantiales, en Xochimilco, de planta octogonal, formada por la intersección de cuatro hypars. Esta es la estructura que Candela considera como su trabajo más significativo. La estructura de Xochimilco es una bóveda por arista octogonal, compuesta por la intersección de cuatro hypars. Diseñado para reemplazar a un restaurante destruido por el fuego, se levanta en un pequeño promontorio en los jardines flotantes, rodeado por canales y chalupas adornadas con flores y situado al sur de la ciudad de México, en el D. F. de Xochimilco, construido en 1958.<sup>8</sup>

El cascarón presenta un diámetro máximo de 42,7 m con los apoyos inscritos en un cuadrado de 30 m de lado. La altura en el centro de la construcción es de 5,8396 m mientras que en los puntos más altos alcanza los 9,9332 m.

<sup>8</sup> Andrés Martín, Francisco Ramón & Fadón Salazar, Fernando. *Análisis Gráfico de obras emblemáticas de Félix Candela*. Actas del VI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. INGEGRAF: Toledo 1994.

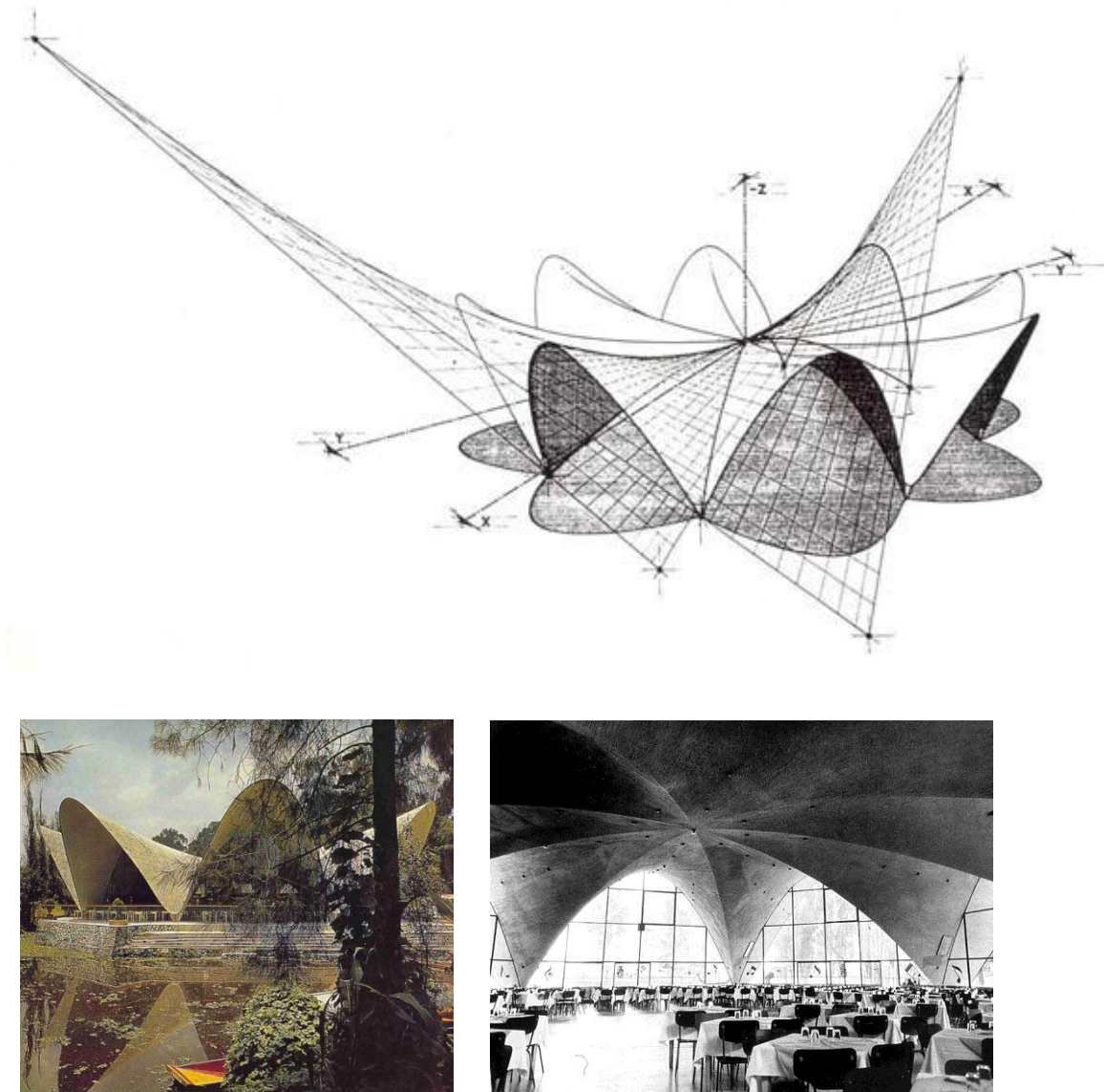


Fig. 4.4. Dibujo en perspectiva y fotografía de los hipars, exterior e interior del restaurante Los Manantiales. Xochimilco. Al sur de la ciudad de México. Construido en 1958.  
[http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Archivo:Los\\_Manantiales](http://es.wikiarquitectura.com/index.php/Archivo:Los_Manantiales)

Concluimos este apartado dedicado a la contribución de Gaspard Monge a la Estática Gráfica, con las palabras del científico español, exiliado político en Chile, Andrés Antonio de Gorbea y Gancedo, (1792-1852) físico, matemático e ingeniero militar, fundador y primer Decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Gorbea había traducido al castellano el *Traité de Géométrie Descriptive* de Charles François Antoine Leroy<sup>9</sup> y justificando ante el ministro Manuel Montt de aquel país, la

<sup>9</sup> Leroy, Charles François Antoine. *Traité de Géométrie Descriptive*. Suive de la Méthode des Plans Cotés et de la Théorie des Engrenages Cylindriques et Coniques avec une collection d'Épures composée de 69 Planches. Seconde Édition (1842), révue et augmentée. Bachelier, Carilian-Goeury et Dalmont: Paris (Digitalizado por googlebooks).





#### 4.2. LAS CONTRIBUCIONES FRANCESAS DE VARIGNON, CAMUS Y PONCELET

Pierre Varignon nació en Caen en 1654 hijo de un contratista de obras. Él mismo comentó que la única cosa que recibió de su familia era de conocimiento técnico. Estudió en la Universidad de Caen, donde se graduó en septiembre de 1682. En marzo del año siguiente se convirtió en un sacerdote de la parroquia de Saint Ouen en Caen. Murió en París en 1722.

Su vida cambió cuando, por casualidad, a través de la lectura de *Los elementos* de Euclides.<sup>10</sup> Volcado a las matemáticas por la lectura de Euclides y la *Géométrie* de Descartes,<sup>11</sup> se dedicó a las ciencias matemáticas. Por supuesto como un jesuita, la orden facilitó que Varignon fuese capaz de dedicar el resto de su vida a la enseñanza. En 1686, junto con su amigo Charles Castel, abad de Saint-Pierre, Varignon viajó a París e inmediatamente contactó con matemáticos y científicos de la capital francesa.

En 1687 Varignon publicó *Projet d'une nouvelle mécanique*<sup>12</sup> estudiando la composición de fuerzas y la aplicación del cálculo diferencial de Leibniz en el estudio de la mecánica. Dedicó esta obra a la Academia de las Ciencias, para la que fue elegido en ese mismo año. También en 1688 se convirtió en profesor de matemáticas en el Collège Mazarin, una cátedra recién creada, donde empezó a enseñar matemáticas. En 1704, además de la Cátedra de Collège Mazarin, se convirtió en profesor de matemáticas en el Collège Royal. Sus conferencias en el Collège Mazarin fueron publicadas como *Éléments de mathématiques*.<sup>14</sup> Sus contribuciones fueron fundamentales para la grafostática y para la mecánica. Desde las primeras de sus publicaciones como *Projet d'une nouvelle mécanique* 1687, reconoce el valor del Cálculo Diferencial de Leibniz (1646-1716).<sup>13</sup>

<sup>10</sup> Euclides de Alejandría. *Euclidus Opera Omnia*, Heiberg, I.L. & Menge, H. (editors) Teubner (1883-85). Nueva edición en griego e inglés, en <http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html>. Ver también Euclides: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos, Madrid, 1996.

<sup>11</sup> Descartes, René. *La geometría*. Trad. e introd. por Pedro Rossell Soler. Espasa Calpe: Buenos Aires, 1947.

<sup>12</sup> *Projet d'une Nouvelle Méchanique, avec un examen de l'opinion de Borelli sur les proprietes des poids suspendus par des cordes*. Chez la Veuve d'Edme Martin, Jean Boudot & Estienne Martin. Paris. 1687 (Escaneado por Google Ebookstore en 2008 de un original procedente de la Universidad de Lausanne.

<sup>13</sup> Arana Cañedo-Argüelles, Juan. *Escritos científicos*. Colección Obras filosóficas y científicas de Gottfried Wilhelm Leibniz. Editorial Comares S.L.: Granada.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) protagonizaron, casi al mismo tiempo, uno de los acontecimientos más significativos en la historia de las matemáticas. El desarrollo del cálculo infinitesimal. Los conceptos de, Función, Infinitésimo, Función derivada e integral, corresponden a ambos, sin que sus cartas con recíprocos reproches de plagio hayan aclarado la autoría primera. La cuestión es que Newton era enemigo de publicar sus descubrimientos mientras Leibniz lo hacía habitualmente. Leibniz escribía (ds/dt) para expresar la derivada de s con respecto a t. Newton utilizaba (ḡ) para el mismo concepto al denominaba "fluxiones"

<sup>14</sup> Varignon, Pierre. *Eléments de Mathématiques*. Chez François Canguion: Amsterdam. 1734. Googlebooks.

Sucedió esto poco después de que Leibniz publicara dos artículos sobre el nuevo cálculo diferencial en el *Acta Eruditorum* en octubre de 1684 y junio de 1686. Aunque Varignon no hiciera importantes contribuciones matemáticas, desarrolló la dinámica analítica mediante la adaptación de Leibniz al cálculo inercial de la mecánica de Newton, siendo uno de los primeros eruditos franceses en reconocer el poder y la importancia del cálculo. Mientras que aquellos que como Huygens (1629-1695)<sup>15</sup> admiraban a Newton como un matemático, no aceptaban, por el contrario, una teoría física basada en acciones a distancia. Varignon deja de lado esas preocupaciones filosóficas y comenzó a reelaborar grandes capítulos de la obra de Leibniz desde el enfoque del cálculo diferencial e integral. Es curiosa la relación entre este autor y Newton. Durante algún tiempo fueron amigos y Huygens fue un fiel seguidor de Newton a pesar de ser 13 años mayor y un respetable científico cuando Newton empezó a ser conocido. Huygens fue crítico con la Teoría de la Gravedad de Newton y puso pegos a la acción a distancia entre cuerpos celestes que se deducía de ella. Esa acción era contraria al mecanicismo de Descartes dentro del cual sólo los fenómenos mecánicos y sólo el contacto físico y la continuidad física entre distintos cuerpos tenían sentido.

El polígono funicular ocupa un lugar importante en la *Nouvelle mécanique*<sup>16</sup> del matemático y físico mecánico Varignon, obra publicada a título póstumo en 1725. Emplea la expresión “polígono funicular” para designar una cuerda tensada por pesos o por fuerzas que no son verticales, utilizando métodos gráficos para definir las condiciones de equilibrio de este objeto material, analizando las tensiones internas de las cuerdas. (Fig. 4.5) Sus construcciones gráficas son retomadas por otros autores del s. XVIII sobre los que ejerce gran influencia; pero es el matemático Camus (1699-1768), académico y profesor de varias instituciones militares, alumno de Varignon, el que ofrece el tratado más completo desde el punto de vista gráfico, proponiendo de forma explícita un método de cálculo gráfico para las tensiones de las cuerdas que componen el objeto, en su *Cours de mathématique*. (Camus 1751: 3<sup>e</sup> partie, t.2, Livre III, ch.2).<sup>17</sup>

<sup>15</sup> Huygens, Christiaan. *Oeuvres Complètes*. Société Hollandaise des Sciences. Martinus Nijhoff: La Haye 1934.

<sup>16</sup> Varignon, Pierre. *Nouvelle Mécanique Ou statique*. Claude Jombert: Paris 1725 Ed. Facsimil La Vergne. TN. USA.2010. Esta obra, publicada después de su muerte, resume y extiende su proyecto de Mecánica anterior, de 1687.

Varignon, Pierre. *Projet d'une Nouvelle Méchanique, avec un examen de l'opinion de Borelli sur les propriétés des poids suspendus par des cordes*. Chez la Veuve d'Edme Martin, Jean Boudot & Estienne Martin. Paris 1687. (Escaneado por Google Ebookstore en 2008 de un original procedente de la Universidad de Lausanne. Formato de libre disposición informática).

<sup>17</sup> Camus, Charles-Étienne-Louis. *Cours de mathématique, 3<sup>ème</sup> partie: Éléments de mécanique statique*, t. 2. Imprimerie Royale: Paris 1751.

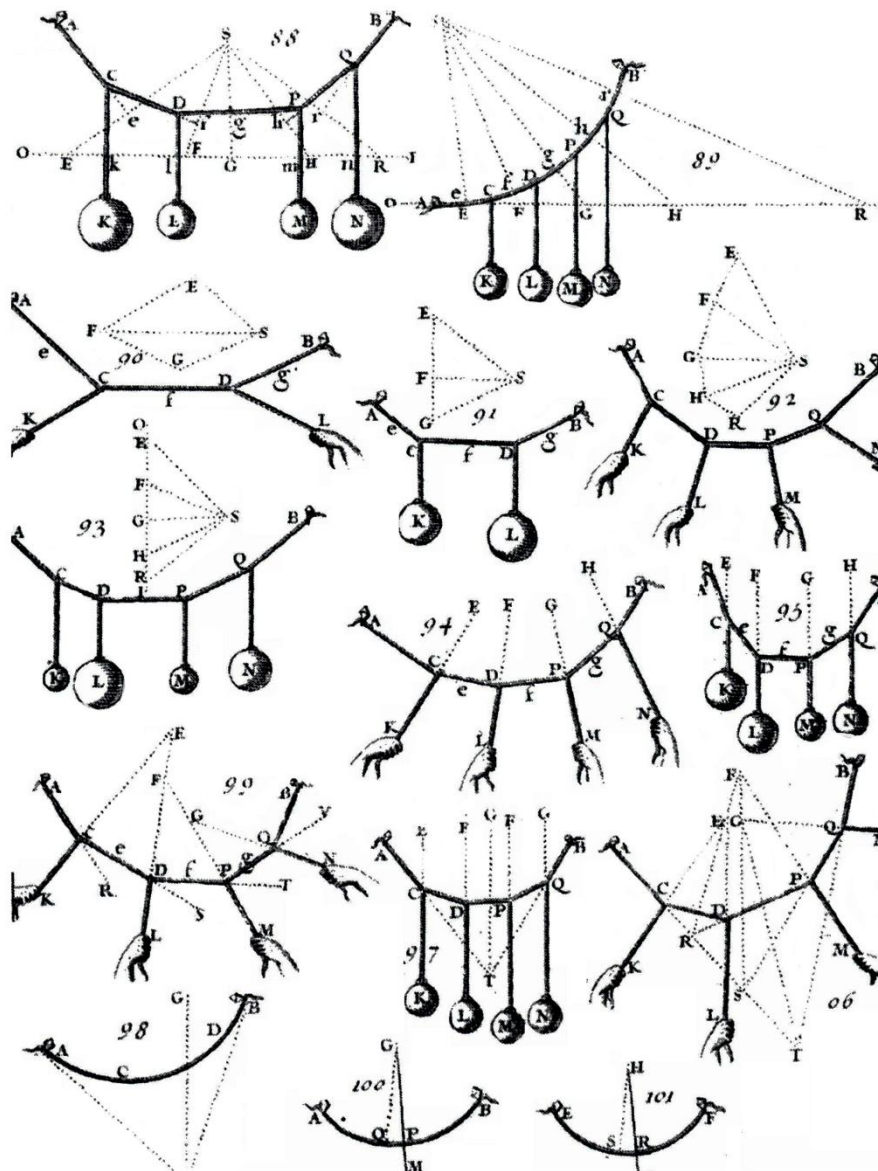


Fig. 4.5. El polígono funicular en la *Nouvelle mécanique* de Pierre Varignon (1725). Además de sus contribuciones puramente matemáticas, Varignon comienza a utilizar los rudimentos grafostáticos. Son las líneas de acción de fuerzas, polígonos funiculares incipientes, señalados por hilos tensos y sus polígonos de fuerzas correspondientes.

En cierto sentido, la futura *Estática Gráfica* está contenida, en potencia, en las demostraciones y las construcciones gráficas de esta obra, aunque el funicular es todavía, como en todas las obras del XVIII, un objeto material; concretamente, un hilo o una cuerda, al que se le somete a una serie de fuerzas exteriores, representadas por manos que tiran mediante otras cuerdas y no un concepto físico o matemático, instrumento para ser empleado en el cálculo de estructuras concebidas por el arquitecto, como vigas o arcos.

En el *Cours de mathématique, 3<sup>ème</sup> partie: Éléments de mécanique statique* de Camus, (op. cit. <sup>17</sup>) éste muestra en el primero de los libros que constituyen la obra, la manera de representar fuerzas, su composición y descomposición al modo vectorial

que más tarde conoceremos, pero que aquí está aún incipiente. Se ocupa también del cálculo de Centros de Gravedad y del cálculo de momentos de las fuerzas que representan los pesos de las masas, (Fig. 4.6) cuyo Centro calcula. Asimismo, en otros capítulos se ocupa de la representación de bóvedas, generadas por líneas que se desplazan a lo largo de una recta directriz.

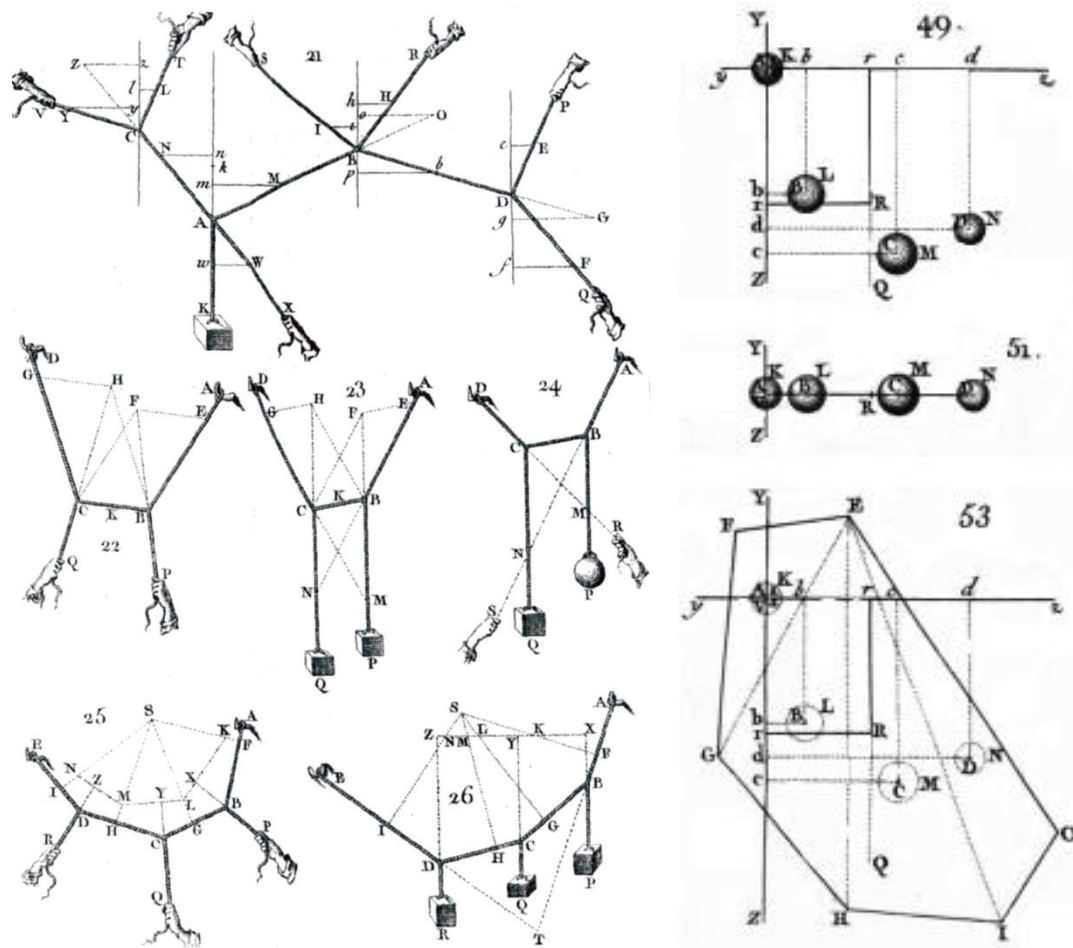


Fig.4.6. Antecedentes del polígono funicular y del cálculo de Centros de Gravedad en el *Cours de mathématique* de Camus (1751).

En el primer capítulo del segundo libro de la obra, explica Camus la representación de fuerzas cualesquiera, que pueden ser reducidas a un plano. En el segundo capítulo va un paso más allá con la representación y estudio de fuerzas que actúan sobre superficies o sólidos según rectas de acción en el espacio, en los casos en que no pueden reducirse a un mismo plano. Este apartado nos interesa de forma especial, ya que Camus no puede todavía utilizar la Geometría Descriptiva, como es natural, cuyas primeras lecciones impartirá Gaspard Monge en 1794. De forma que cuando intenta reducir a un plano las componentes de fuerzas cualesquiera del espacio, realiza complicadas construcciones geométricas y concluye que no se pueden reducir a un plano, como muestra la Fig. 4.7.

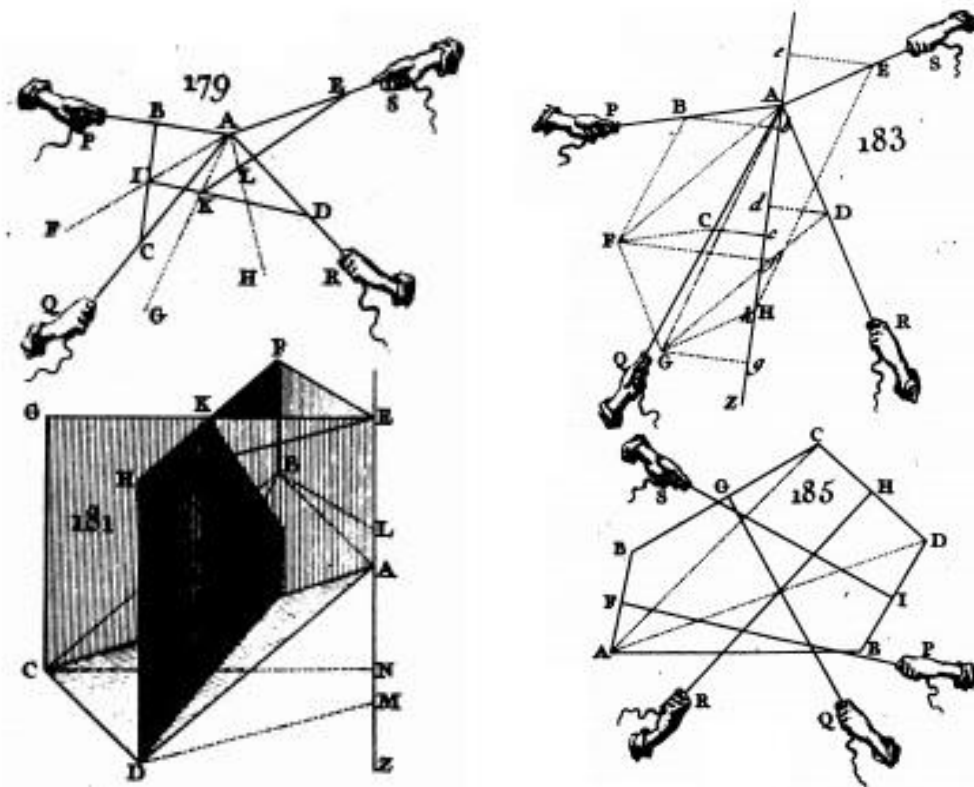


Fig.4.7. Construcciones geométricas para la reducción de fuerzas cualesquiera en el espacio, a un plano. Dibujos extraídos de la Planchas XXIV y XXV de *Cours de mathématique, 3<sup>ème</sup> partie: Éléments de mécanique statique*, t. 2. Imprimerie Royale: Paris 1751.

En el prefacio para la traducción al francés *Traité de statique graphique*, (Culmann, 1880) de su *Die Graphische Statik*, (Culman, 1866), se tributa un homenaje a los ingenieros, matemáticos y físicos franceses, por considerar que habían resuelto con bastante anterioridad algunos problemas relacionados con la Grafostática que ahora él presentaba de forma novedosa. En especial, se refiere al polifacético Poncelet y a los múltiples trabajos gráficos expuestos por éste en sus teorías sobre bóvedas y muros de contención, precisando:

*Poncelet n'a cependant pas fait usage, pour déterminer les resultants, du polygone funiculaire (...), et il était reserve à son successeur à l'Ecole de Metz, M, Michon, d'en faire le premier l'application à la détermination des centres de gravité des vousoirs, dans sa Théorie des voûtes.* (Culman 1880: IX-X)

En realidad, Poncelet hace referencias varias al polígono funicular en sus trabajos sobre bóvedas; pero en el sentido estrictamente grafostático, es decir, como

instrumento para calcular resultantes de sistemas de fuerzas actuantes sobre un objeto, y analizar su equilibrio, todo parece haber empezado con Varignon.

Si durante el XVIII se utiliza el polígono funicular para las resoluciones gráficas que hemos indicado, será durante el XIX, cuando se tratará de forma analítica, estando en relación con la fundación de l'Ecole polytechnique en 1794, que origina la aparición de la figura del ingeniero, al que se instruye en el conocimiento del cálculo diferencial e integral. Asimismo aparece l'Ecole des ponts et chaussées.

Parece, pues, que el tratamiento grafostático cae en desuso hasta que durante un curso impartido por Poncelet, éste reinterpreta las construcciones que había creado Camus y que habían dejado de explicarse. Poncelet instruye a sus alumnos sobre cuestiones relacionados con las máquinas industriales, prescinde totalmente de los cálculos infinitesimales y aborda el equilibrio y la estabilidad de los cuerpos. Años más tarde en un curso de mecánica física y experimental, impartido en la Sorbonne de 1838 a 1848, Poncelet ofrece una solución gráfica para un polígono funicular solicitado no solo por pesos (fuerzas verticales paralelas) sino con un sistema de fuerzas con direcciones cualesquiera, concluyéndose que viene a coincidir con las construcciones de los trabajos de Varignon y Camus. En cualquier caso, su "*Traité des propriétés projectives des figures*" de 1822,<sup>18</sup> viene a suponer un primer avance continuado por Culmann.

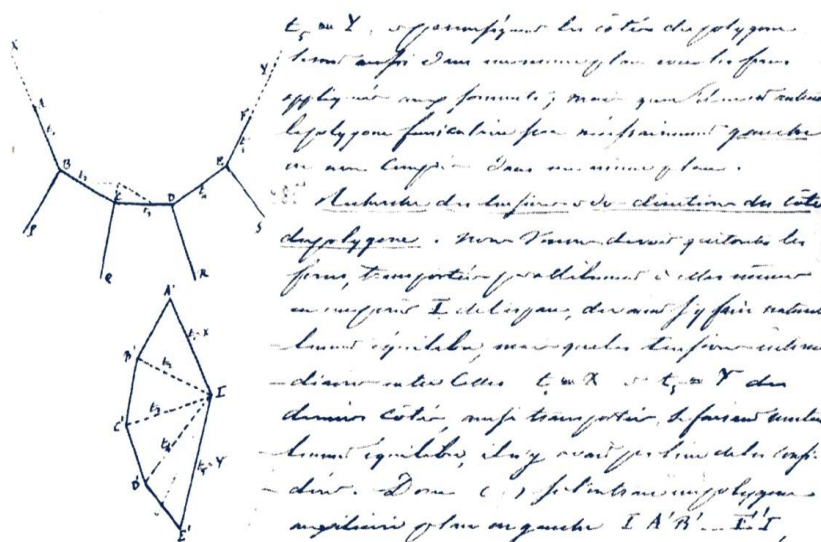


Fig. 4.8. El polígono funicular en el curso inédito de Poncelet en la Sorbonne (1840-1841). *Revue d'histoire des Mathématiques*. Société Mathématique de France. Tome 10 Fascicule I. p.15. 2004.

<sup>18</sup> Poncelet, Jean Victor. *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire: Paris. 1822

### 4.3. LA FIGURA DE KARL CULMANN Y SU "DIE GRAPHISCHE STATIK"

Karl Culmann nació en Renania en 1821 (Alemania) y murió en Zurich (Suiza) en 1881. El tío de Karl, Friedrich-Jakob, ingresó en la Escuela politécnica de París, adquiriendo la nacionalidad francesa y llegó a ser profesor de Matemáticas y Física en la Escuela de Artillería y Aplicaciones de la Ingeniería de Metz, determinando una decisiva influencia científica sobre Culmann.

Tras sus intentos de preparación para la politécnica de París y debido a una epidemia de cólera, finalmente estudia en el Instituto politécnico de Karlsruhe en Alemania. Al finalizar sus estudios trabaja en los ferrocarriles de Baviera y se interesa por cuestiones relacionadas con los diseños ingleses y americanos relativos a las locomotoras y trazados de dichos ferrocarriles y en particular con los radios de curvatura de dichos trazados. En 1850 los fundadores de la Escuela Politécnica Federal de Zurich (ETH) quienes había conocido, le proponen ser profesor de dicha escuela, en ella formará a un gran número de ingenieros entre los que destacarán August Ritter, Emil Winkler, Heinrich Weber y Maurice Koechlin, éste último considerado como el padre de la idea estructural y el diseño de la torre Eiffel.

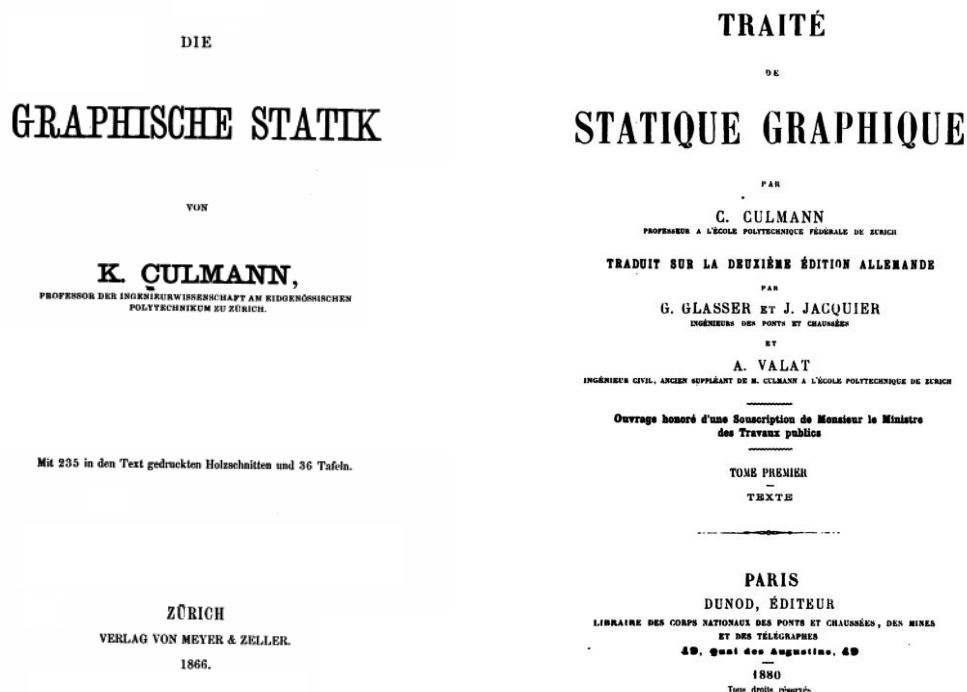


Fig. 4.9. Portada de la edición en alemán de Verlag von Meyer & Zeller de Dunot (Zürich 1866) y de la traducción al francés (Paris 1880) de G. Glasser y J. Jacquier (Ingenieros de caminos) y A. Valat (Ingeniero civil) y ayudante de Culmann en la Politécnica de Zurich.

Su *Die Graphische Statik* aparece en 1864, con una edición posterior aumentada en 1866 y una traducción al francés (*Traité de Statique Graphique*) de la segunda edición alemana, en 1880, en las que aparece por vez primera todo un tratado sistematizado de cálculo y técnicas constructivas, aunque presenta en la primera parte

un buen número de capítulos y subcapítulos dedicados, desde el manejo de la regla de cálculo a los dibujos de curvas y diversos cálculos geométricos incluidos las potencias y raíces. (Culmann, 1880).<sup>20</sup>

En el prefacio de Culmann de la edición en francés de 1880, el propio autor especifica el origen de su obra, que después de los reconocimientos a Monge y Poncelet, a los que atribuye las primeras ideas sobre funiculares, sitúa en 1855, cuando comienza sus clases en la Politécnica de Zürich como profesor de construcción, introduciendo los métodos gráficos de Poncelet, intentando suplir algunas lagunas de los alumnos, que todavía carecían de algunos conocimientos de mecánica analítica.

*Telle fut l'origine de la Statique graphique. Les cours de construction (ponts et chemins de fer) qui rentraient plus particulièrement dans notre spécialité, et celui de statique, se trouvant ainsi réunis dans un même enseignement, nous fûmes fréquemment amené à donner aux élèves des explications complémentaires sur les parties qu'ils n'avaient pas parfaitement comprises. Dans ces circonstances nous avons toujours trouvé qu'il était bien plus facile de rappeler des théorèmes de géométrie de position, dont la démonstration pouvait se faire à l'aide des lignes mêmes de l'épure, que de recourir à des calculs analytiques dont les développements exigeaient l'emploi d'une feuille de papier séparé.*

*C'est ainsi que nous fûmes amené, pour ainsi dire irrésistiblement, à remplacer autant que possible l'algèbre par la géométrie de position. Pendant les premières années, les connaissances des élèves, dans cette matière, laissaient, il est vrai, un peu à désirer mais depuis qu'un cours spécial de géométrie de position professé par M. Fiedler (auquel la Géométrie descriptive de cet auteur avait déjà préparé les élèves), a été introduit dans le programme des études, nous n'avons plus éprouvé aucune difficulté dans notre enseignement.* (Culman,1880 :XI)

Culmann aclara que en numerosas ocasiones recurría, durante sus clases a teoremas de la Geometría de Posición, bien conocida por él, desde el *Traité* de Poncelet,<sup>21</sup> cuyas demostraciones se podían resolver con ayuda de croquis, sin tener que recurrir a farragosas demostraciones analíticas que exigían una hoja de papel aparte, sustituyendo así el Álgebra por la Geometría de Posición, aunque sus alumnos estaban más preparados en Geometría Descriptiva que en la de Posición.

<sup>20</sup> Culmann, Karl. *Die graphische statik*. Von Meyer & Zeller: Zürich. 1866. (Escaneado por Google bücher 2008).

Culmann, Karl. *Traité de statique graphique*. Trad.de la 10ª ed. Alemana Glasser (G.) Jaquier (J.) Valat (A). Dunot: Paris. 1880 (Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes. 2010).

<sup>21</sup> Poncelet, Jean Victor. *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire: Paris 1822.



La primera publicación en Zürich de Culmann salió a la luz en 1856 y trataba sobre las condiciones de equilibrio de las masas de tierra.<sup>22</sup> Temáticamente, siguió la pista de Poncelet y metódicamente, se mostró como su discípulo: derivación analítica y traducción gráfica, simplemente por eso, porque los cálculos son demasiado complicados:

*“Las fórmulas sobre las condiciones de equilibrio de las masas de tierra están entre las más complicadas de la estática, y aunque el resultado se pueda expresar de una forma muy sencilla, la derivación del mismo suele ser extremadamente larga. [...Por ello, la meta es] conocer una derivación directa y muy sencilla de la presión lateral del suelo, que además de la sencillez también tiene la ventaja de mantener siempre evidentes las fuerzas que están actuando, y en el que estas mismas fuerzas nunca son extraídas a través de un laberinto de deducciones algebraicas de la perspectiva directa.”*

Una vez más, los dos motivos básicos: simplicidad y visualización. Además, se les une ahora la derivación gráfica en lugar de cálculos complicados. De esta manera, Culmann formula la filosofía de sus métodos gráficos. No sólo deben tener una importante utilidad pragmática, deben, ante todo hacer evidente un problema estático.

Culmann deseaba que hubiera un usuario de los métodos gráficos, que no se diera de manera confiada a la mecánica del dibujo, sino que fuera consciente de los problemas de estática de su construcción. La construcción está constituida al mismo tiempo por métodos para la solución y la comprensión de los medios necesarios para ello.

Utiliza, en todos sus trabajos sobre el estudio de la presión lateral del terreno y de la estabilidad de muros de contención el principio de Coulomb del Prisma deslizante de mayor presión.<sup>23</sup> La primera parte de su tratado de 1856 se limita a la estabilidad de los terraplenes amontonados que no están apuntalados a través de muros. Culmann parte del “talud natural”, el talud con la mayor inclinación posible que permanece estable, y comprueba que con este ángulo se puede acumular material tan alto como se desee.

---

<sup>22</sup> Culmann, Karl. Ueber die Gleichgewichtsbedingungen von Erdmassen. Zürcher & Furrer: Zürich 1856. Weitere Kollektionen Wissenschaftshistorische Bestände (ETH-Bibliothek)

<sup>23</sup> Coulomb de, Charles Augustin. *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Vol. 7 (1776) pp. 343-382.

Si el talud es de mayor inclinación que el talud natural entonces permanece estable hasta una altura concreta. Sin embargo, cuanto más inclinado es el talud, menos material se puede terraplenar sin que todo se deslice. Para determinar la relación entre el ángulo del talud y la altura de terraplenado o para estimar la máxima longitud de un talud de este tipo, expone Culmann “Fórmulas para el equilibrio de masas de tierra”. A diferencia de Coulomb y Poncelet, Culmann tiene en cuenta no sólo el rozamiento, sino también las fuerzas de cohesión. Sus resultados calculados matemáticamente los interpreta de manera geométrica:

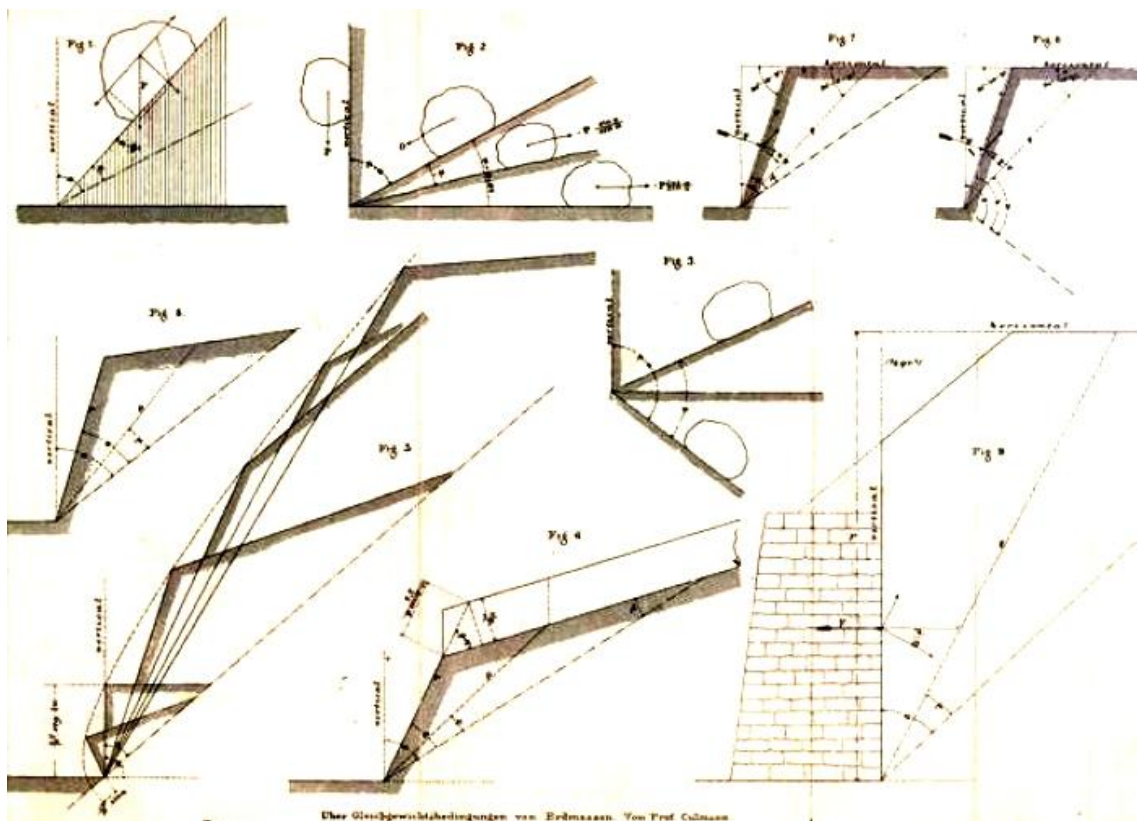


Fig. 4.10. Única plancha del libro *Ueber die Gleichgewichtsbedingungen von Erdmassen*. Zürcher & Furrer: Zürich 1856, de Culmann. ( Sobre el equilibrio de muros de contención de tierras )

*“Por ello se construye sobre el talud natural del terreno, el cual forma con la vertical un ángulo  $\alpha$ , una parábola. Como la presa del talud es considerada como su foco, para todos aquellos perfiles cuya esquina de arriba esté sobre la parábola, cuyo plano límite converge con el talud, el esfuerzo del prisma de mayor presión está en equilibrio con la resistencia debida a la cohesión.”*

La inclinación del plano superior es voluntaria, pero tiene que ser menor que la del talud natural.

Un año más tarde, en 1857, Culmann escribe una nueva obra, siguiendo las investigaciones de Poncelet. La obra trataba sobre la presión de bóvedas de cañón circulares sobre sus cimbras. En ella manifiesta sobre los procedimientos de cálculo:

*“Mucho se ha trabajado recientemente sobre la estabilidad de las bóvedas y los trabajos de Bauernfeind,<sup>24</sup> Carvallo<sup>25</sup> y Villaraceau,<sup>26</sup> que trataron este asunto de manera analítica, y luego los de Poncelet y Michons,<sup>27</sup> que lo trataron de una bella forma gráfica, le han sacado casi todo el partido que se le puede sacar a este objeto de estudio teniendo en cuenta la incertidumbre de los datos, que en la mayoría de los casos estaban basados en suposiciones.”*

Culmann encontró otra pregunta importante que todavía quedaba por contestar. A diferencia de los nombrados anteriormente, él no se ocupa de las bóvedas terminadas, sino de las que están en construcción. Es importante determinar las fuerzas a las que las cimbras, sobre las que descansan las piedras y los arcos, tienen que oponer resistencia. Se trata de nuevo de facilitarle el trabajo al arquitecto, mediante los métodos gráficos. Fig. 4.11.

*“Lo largos que pueden ser los cálculos iterativos, lo sabe cualquiera que alguna vez los haya realizado en la escuela para no volver a utilizarlos posteriormente en la práctica, en la que las cimbras se realizan sólo según la impresión o patrón de esqueletos ya construidos. Quiero intentar definir la presión que las bóvedas de cañón circulares ejercen sobre su cimbra y mostrar cómo a través de la representación gráfica, al menos la presión de una bóveda cargada uniformemente se puede calcular de forma rápida y sencilla.”<sup>28</sup>*

---

<sup>24</sup> Bauernfeind, C. M. *Die Pauli'sche Gewölbetheorie, analytisch bearbeitet von Ingenieur Bauernfeind*, "Eisenbahn-Zeitung", Bd. 4, 1846, pp. 293-302.

<sup>25</sup> Carvallo, J. *Étude sur la stabilité des voûtes*, Mallet-Bachelier, Paris 1850.

<sup>26</sup> Villaraceau, A. J. F. Y. *Sur l'établissement des arches de pont envisagé au point de vue de la plus grande stabilité*, Mallet-Bachelier, Paris 1853.

<sup>27</sup> Michons, Pierre-Félix. *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*, Lithographie de l'École d'Application. Metz 1857.

<sup>28</sup> Traducciones propias de los textos en alemán de Culmann, citados en (Lehmann, 2006: 105-115).

No está perfectamente documentado cuándo empezó exactamente Culmann a tratar métodos gráficos en sus clases. Jean Meyer<sup>29</sup> escribió en 1882:

*“En el año 1859 empezó, por primera vez, una introducción a la estática gráfica en el verdadero sentido. Impartió la aplicación de los polígonos recíprocos de fuerzas y funicular sobre la teoría de los arcos metálicos y sobre la determinación de momentos flectores de las vigas. Para ello tuvo que aportar gran parte de lo que no encontró en sus alumnos: preparación matemática y sobre todo suficiente geometría, incluso parte de aquello de lo que él mismo todavía no había encontrado y clasificado, pero para lo que también él estaba preparándose durante la formación de sus alumnos.... En el año 1860 comenzó un curso regular sobre gráfica estática.”*

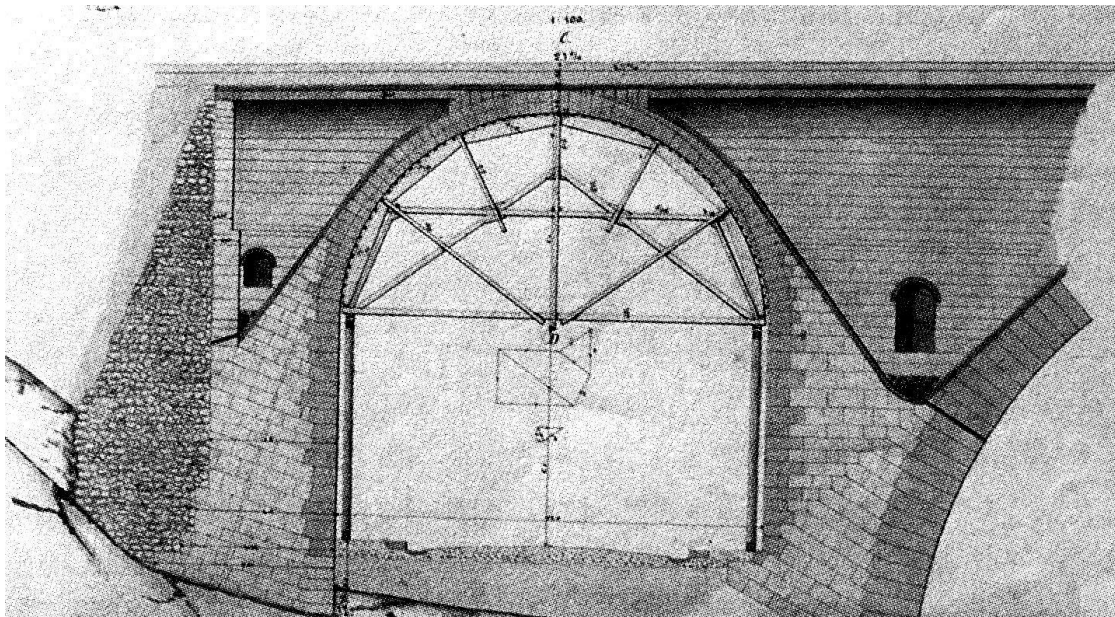


Fig. 4.11. Cálculo gráfico realizado por Culmann, de los esfuerzos transmitidos por un arco de medio punto de un puente a su cimbra. Bajo el centro del arco se puede apreciar algo parecido a un diagrama de Cremona, puesto que aunque las figuras recíprocas aun no habían visto la luz, si parece que el cálculo de Culmann tiene en cuenta la reciprocidad entre los esfuerzos y la geometría de las barras de la cimbra.

En el programa que el Politécnico de Zürich (ETH) elaboró para el segundo semestre del curso 1860/61 se introdujo una clase de dos horas con el título *“Tratamiento gráfico de diferentes tareas del ámbito de la arquitectura”*. En él, Culmann ofreció una clase con el título *“Estática Gráfica”*.

<sup>29</sup> Meyer, Jean. Le Dr. Charles Culmann ingénieur et professeur a l'école polytechnique fédéral a Zürich. Notice biographique. Tirage spécial pour la Société des anciens élèves de l'école polytechnique: Lausanne 1882. ETH-Sig.:92466.

Por tanto, el programa de la Escuela Politécnica Federal Suiza en Zürich es el lugar en el que el término Estática Gráfica aparece impreso por primera vez. Finalmente podemos concluir que fue Culmann el primero en acuñar dicho término entre las dos clases impartidas en los inviernos de 1860/61 y 1861/62.

Un manuscrito de Culmann, con fecha de 1860, todavía no cuenta con este título, sino con el de *“Cálculo mediante trazos o tratamiento gráfico de algunas cuestiones del ámbito de la construcción.”*

En la introducción, Culmann evoca la importancia del dibujo como lenguaje del ingeniero, dejando, lamentablemente a los arquitectos en una especie de limbo artístico, frente a la contundencia de la exactitud ingenieril :

*“No hay ninguna especialidad en la que el dibujo exacto con compás y regla sea tan utilizado como en la ingeniería. También a los arquitectos les gusta dibujar. Sólo, que estos profesionales están más instruidos artísticamente, ... y en la evaluación de un plano o de un dibujo, tienen más en cuenta el efecto que la exactitud.*

*De manera más exacta llevan sus pensamientos al papel los constructores de máquinas. Necesitan casi únicamente la ubicación de los puntos principales y del eje de una máquina, así como las dimensiones de las diferentes partes de la misma con cálculos previos.... También a ellos les está permitido un menor rigor que a los ingenieros, para los que la marcación topográfica de una región, las longitudes bien aplicadas y las secciones transversales constituyen el único fundamento para la elaboración de la documentación, que de nuevo son en su gran mayoría de naturaleza gráfica.( Los ingenieros de caminos).... En estas circunstancias uno debe preguntarse por qué no se utilizan en nuestro campo con mayor frecuencia los métodos gráficos, ya sea para solucionar tareas aritméticas o estáticas.”*<sup>30</sup>

Culmann debía conocer el tratado de Cousinery: *Le Calcul par le trait*. de 1939,<sup>31</sup> y otros relativos al cálculo gráfico, fundamentalmente los de Poncelet, a quien dedica en el Prefacio de su obra *Die Graphische Statik*, unos comentarios de mérito,

---

<sup>30</sup> Traducción propia del texto en alemán de Culmann: *Reissrechnen*, 1860. (Cálculo mediante trazos) conservado en la Biblioteca del Politécnico de Zürich.

<sup>31</sup> Cousinery, Barthélémy Édouard. *Le calcul par le trait, ses éléments et ses applications: à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, à l'interpolation graphique et a la détermination pour l'épure de l'épaisseur des murs de soutènement et des murs de coulées des voûtes*. Chez Carilian- Goeury et VR Dalmont: Paris.

reconociendo el valor de sus publicaciones en el *Mémorial de l'officier de génie (1835 y 1840)*.<sup>32</sup> A este tema dedica la primera parte de su *Die Graphische Statik* en alemán (1866) o *Traite de Statique Graphique* en francés (1880), traducido de la segunda edición alemana por G. Glasser y J. Jacquier, ingenieros de caminos y A. Valat, ingeniero civil y suplente de Culman en el Politécnico de Zürich. La fidelidad de la traducción al francés, viene avalada por los comentarios del propio Culmann al respecto en su prefacio.

La idea de Culmann de escribir un tratado que refundiera los cálculos gráficos con las aplicaciones de la Geometría de Posición, con las que experimentaba continuamente, le llevaron a mostrar, la reciprocidad existente entre su polígono de fuerzas y el funicular correspondiente, base de todos los desarrollos grafostáticos contenidos en su obra.<sup>33</sup> Asimismo, su concepción espacial de la Mecánica, en contraposición con el habitual tratamiento plano, hasta ese momento, le lleva, con la ayuda de la Geometría Descriptiva, al análisis de los sistemas de fuerzas en el espacio.<sup>34</sup>

Nos detenemos en la combinación de ambos conceptos, analizando el Capítulo II de la Tercera parte del Tratado de Culmann. Se trata del cálculo de Centros de Gravedad, (C.D.G. en adelante) en general y de determinadas figuras, tanto planas (rectas, curvas, etc.) como volúmenes. Culmann utiliza diversos métodos gráficos para encontrar dicho C.D.G., como descomposición en triángulos, trapecios y sus combinaciones, etc. cuya localización es inmediata, pero no utiliza los sistemas de vectores deslizantes paralelos correspondientes a las áreas de figuras elementales y la determinación del Eje Central de dicho sistema. Sin embargo sí utiliza algo parecido para lo que denomina "*Centre des Forces Parallèles*" Fig. 4.12. y 4.13. (Culmann, 1880: 196-200)<sup>35</sup>

---

<sup>32</sup> Poncelet, Jean Victor. *Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes*. Mémorial de l'Officier du Génie. Vol. XII. Pp. 151-213. Imprimerie et Fonderie de Fain: Paris 1835. Hathi Trust. Digital Library. <http://babel.hathitrust.org>.

<sup>33</sup> Las relaciones proyectivas entre el polígono de fuerzas el polígono funicular son tratadas en el Capítulo IV de la Segunda parte de *Traité de Statique Graphique*. (Culmann, 1880: 261-295) y en su correspondiente en francés.

<sup>34</sup> El estudio de fuerzas en el espacio es desarrollado en el Capítulo III de la Segunda parte de *Traité de Statique Graphique*. (Culmann, 1880: 196-258).

<sup>35</sup> En la Fig. 4.12. hemos reproducido la Fig. 121 del *Traité de Statique Graphique* de Culman y la hemos reinterpretado en la Fig. 4.13. para una mejor comprensión.

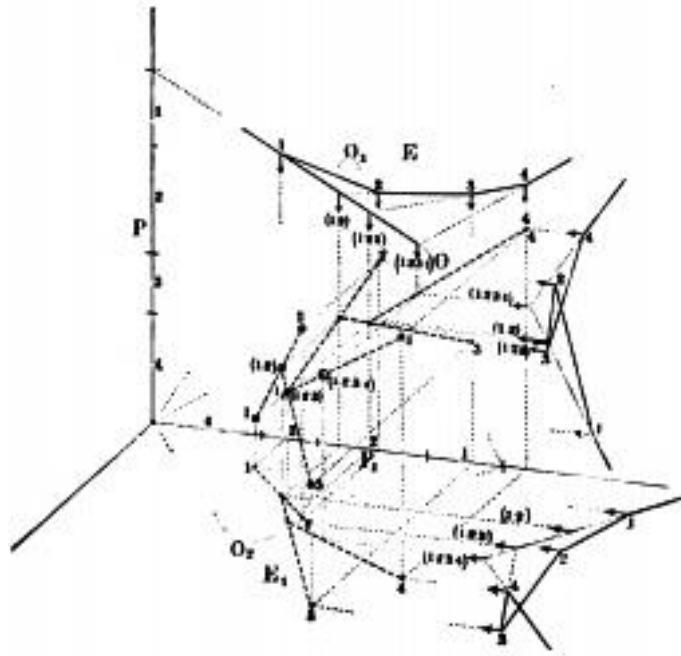


Fig. 4.12. Figura (121) del capítulo III de la Traducción francesa de su *Die graphische Statik, Traite de Statique Graphique*.

Culmann trata las fuerzas en el espacio. Como ya había comentado en el prefacio de dicha traducción, sus alumnos ya estaban adocotrados con las suficientes nociones de Geometría Descriptiva, como para comprender lo que explica este dibujo, que representa las proyecciones sobre dos planos ortogonales de un diedro de un sistema de fuerzas en el espacio, constatando que lo que sucede con ellas en el espacio, merced a la proyectividad, sucede también con las proyecciones de dichas fuerzas en los planos de proyección. El Eje Central de dicho sistema en el espacio, es proyectado en los planos de proyección, resultando también dichas rectas Ejes Centrales de las fuerzas coplanarias proyectadas. Se puede, pues, trabajar con lo que ahora llamamos proyecciones diédricas ortogonales de los sistemas de fuerzas.

Culmann define el Centro de Fuerzas:

*“Si fuerzas paralelas de intensidad cualquiera y de sentidos también cualesquiera giran en el espacio alrededor de un punto fijo, quedando siempre paralelas entre sí, sin cambiar de intensidad, la Resultante de estas fuerzas girará también alrededor de ese punto llamado Centro de Fuerzas”* <sup>36</sup>

<sup>36</sup> Culman, Karl. *Die Graphische Statik*. . Verlage von Meyer & Zeller: Zürich 1866. p. 197. Traducción propia.

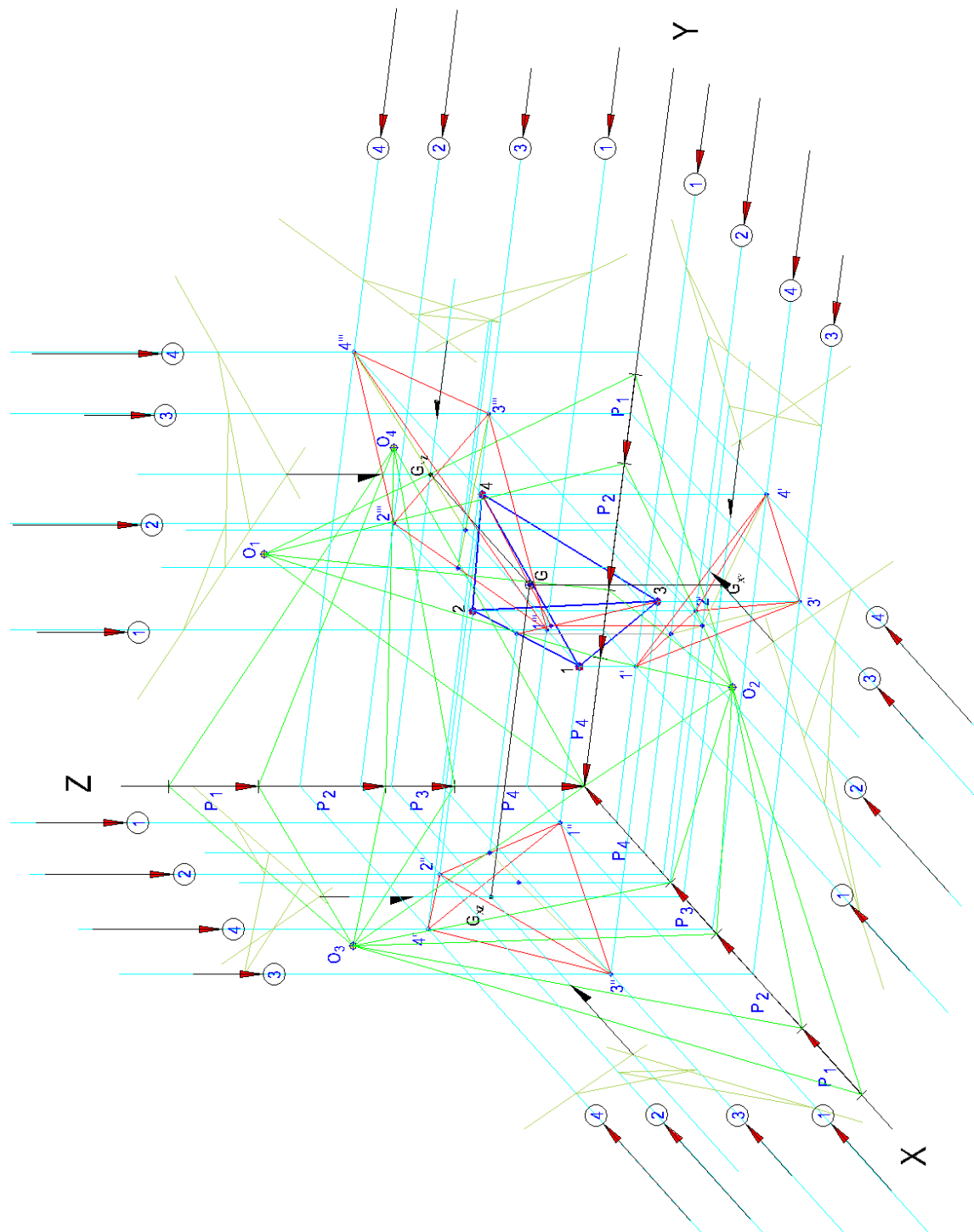


Fig. 4.13. Reinterpretación del cálculo del Centro de Fuerzas Paralelas en el espacio, como el Cálculo del C.D.G. de un sistema discreto de 4 masas situadas en los puntos 1,2,3 y 4, cuyos pesos constituyen el sistema de vectores paralelos del que se calcula el Eje Central. Calculamos el Eje Central de cada uno de los sistemas planos, proyección del sistema P1, P2, P3 y P4 sobre los planos del triedro. (Cálculos grafostáticos y dibujos propios) paralelos del que se calcula el Eje Central. Calculamos el Eje Central de cada uno de los sistemas planos, proyección del sistema P1, P2, P3 y P4 sobre los planos del triedro. (Cálculos grafostáticos y dibujos propios)



El cálculo mediante los procedimientos de la Estática Gráfica de Culmann de Centros de Gravedad de líneas, superficies y volúmenes es uno de los temas que adquirió especial relevancia, por su simplicidad incluso en elementos especialmente complejos.

En la teoría, las coordenadas  $X_G, Y_G, Z_G$  del C.D.G. de cualquier sistema, discreto o continuo, no ofrece ninguna dificultad, siendo  $X_G = \sum m_i \cdot x_i / \sum m_i$  para los sistemas discretos, o bien,  $X_G = \int x \cdot dm / \int dm$  para sistemas continuos. La dificultad surge cuando por su geometría, las masas elementales ( $dm$ ) son difíciles de determinar, o los límites de integración pertenecen a contornos igualmente complicados.

Aunque no es el caso de la superficie de un semicírculo, pues es bien conocida la posición de su C.D.G., por los procedimientos ya indicados de integración,  $Y_G = 4 R / 3\pi = 0.85 \text{ cm}$ , con  $X_G = 0$  por la simetría de la figura; si nos parece interesante mostrar en la Fig. 4.14. cómo la aplicación directa de los conceptos grafostáticos presentados por Culmann relativos al "Centre de Forces" y ampliado en esta Tesis, como Cálculo grafostático del Eje Central de un Sistema de Vectores deslizantes paralelos, determina con precisión la posición del C.D.G.

En el Sistema de vectores deslizantes creado,  $S_1, S_2, \dots, S_8$ , el módulo de cada uno de ellos representa, a escala, la superficie de cada una de las "fajas" en que se ha descompuesto la superficie total del semicírculo.

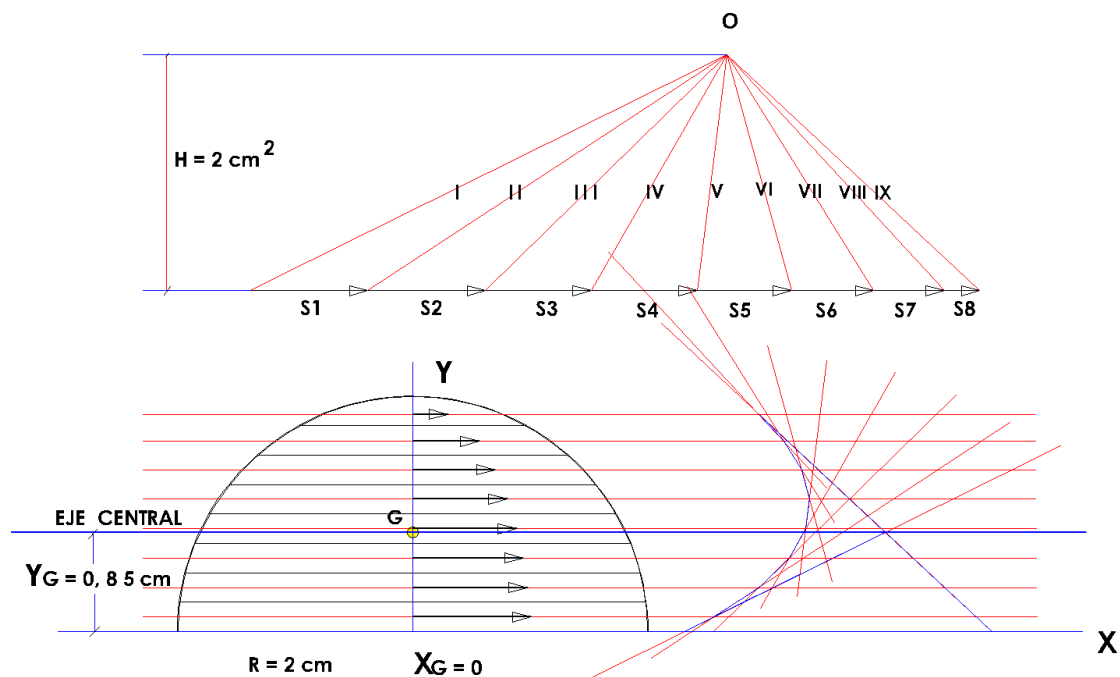


Fig. 4.14. Determinación grafostática del Centro de Gravedad de la superficie de un semicírculo con centro en el origen de coordenadas y radio  $R = 2 \text{ cm}$ . (Dibujos y cálculos grafostáticos propios).

Como es obvio, en la precisión del cálculo de la posición de  $Y_G$  es determinante la precisión en la medida de las superficies que corresponden a cada una de las rebanadas en que se divide el área total (módulo de cada uno de los vectores  $S_i$ ), así como la posición de los C.D.G. de cada una de ellas, puesto que determinan las rectas de acción de cada vector, influyendo finalmente en la construcción del funicular.

También en este proceso nos viene a auxiliar el Cálculo Gráfico, en el que Culmann se extiende en el Capítulo II de la III Parte de su Tratado, dedicado a los C.D.G. En concreto, se trata de determinar, con ayuda de la por él bien conocida Geometría, el Baricentro de los triángulos  $G_{T1}$  y  $G_{T2}$  en que se puede descomponer el trapecio  $A'B'C'D'$ . La intersección de la línea que une  $G_{T1}$  y  $G_{T2}$  con MN y que une los puntos medios de  $B'C'$  y  $A'D'$ , bases del trapecio, determina la posición de G. (Dibujo inferior de la Fig. 4.15) Otra posibilidad (dibujo superior de la misma Fig.) es llevar la longitud de la base mayor a un lado de la base menor,  $C'Q$  y viceversa,  $A'P$ . La intersección de PQ con MN determina también la posición de G. (Culmann, 1880: 351)

Cuando la superficie total, del elemento de que se trate, semicírculo en nuestro caso, es dividida en un número suficiente de franjas, los trapecios que así se obtienen, tienen los dos laterales oblicuos curvilíneos muy pequeños, por lo que la aproximación de considerarlos rectos es suficientemente buena para el cálculo de la posición de G. Aún con todo, cabe una mayor aproximación sustituyendo las líneas curvas AB por otras rectas  $A'B'$  algo desplazadas para conseguir que el área total del trapecio  $A'B'C'D'$  coincida exactamente con la del ABCD, pues las áreas amarillas y negras del dibujo de la derecha se compensan. Estas aproximaciones resultaban innecesarias, en el origen de la Estática Gráfica, época en que la imprecisión de los útiles de Dibujo las hacía inútiles. El uso del dibujo asistido actual, permite mejores resultados, aunque no es su exactitud, el objetivo que esta Tesis persigue.

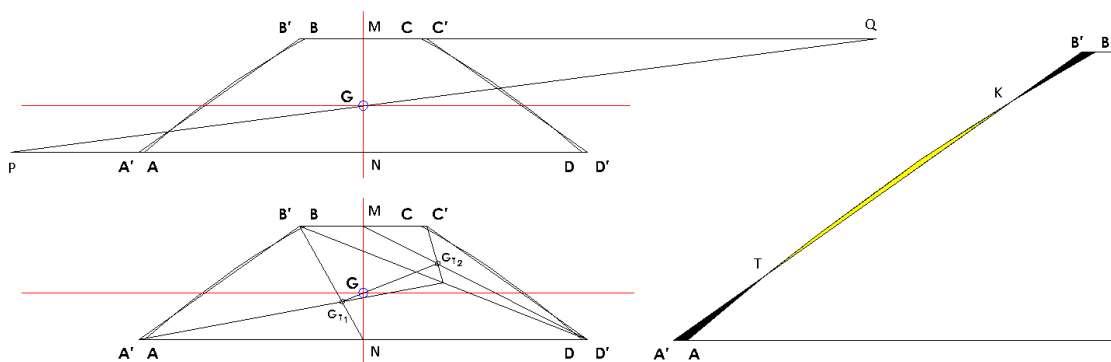


Fig. 4.15. Cálculo de los C.D.G. de los trapecios “rebanadas” (acortados para simplificar el dibujo) en que se divide la superficie total del semicírculo. Se ha dibujado también a la derecha, la aproximación utilizada para convertir el trapecio curvilíneo ABCD en otro rectilíneo  $A'B'C'D'$  mediante una secante  $A'B'$  de la curva AB que iguala la superficie en amarillo con la de los triángulos en negro. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

Los nuevos métodos gráficos de Culmann fueron a menudo utilizados en las aulas de construcción de la Escuela de Ingeniería y encontraron adeptos también en otros departamentos, como los de Arquitectura del Politécnico de Zürich. Sobre todo por el entonces profesor de industriales, Franz Reuleaux (1829-1905)<sup>37</sup> que utilizó, en la Escuela matemático-técnica la Estática Gráfica.

Así ocurrió, que la primera obra publicada en 1864 con la designación del nuevo área “Estática Gráfica” no fue de Culmann, sino de Reuleaux. Éste fue profesor en el politécnico de Zürich hasta 1864 y después se trasladó a Berlin. El título de su tratado era: *La aplicación de la Estática Gráfica en la ingeniería industrial. Según las ponencias del profesor Reuleaux*, editado y publicado por la Sociedad del Politécnico de Zürich.

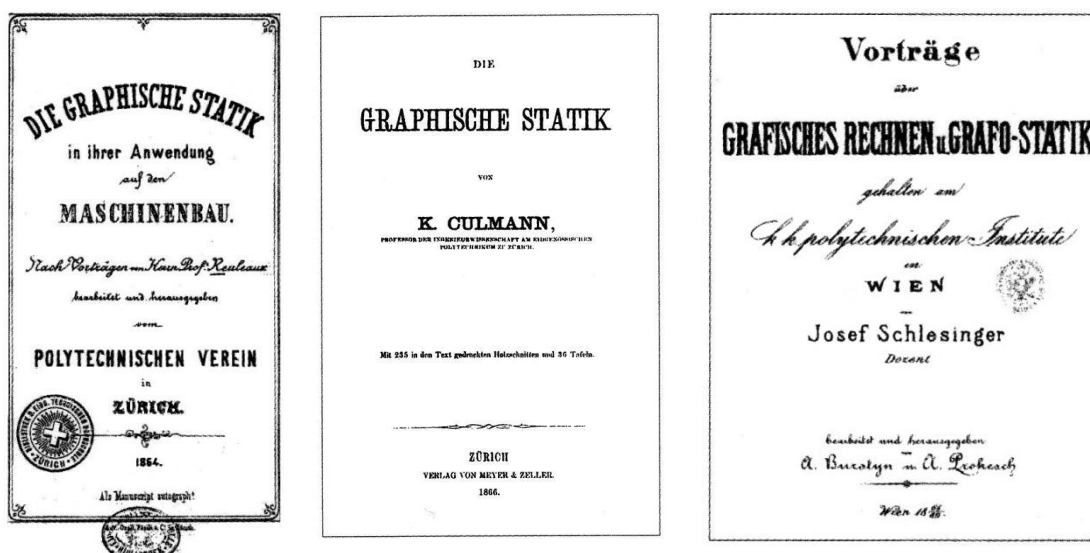


Fig. 4.16. Portadas de las publicaciones *Die Graphische Statik* de Reuleaux (Zürich 1864), *Die Graphische Statik* de Culmann (Zürich 1866) y *Graphisches Rechnen u Grafo-Statik* de Schlesingers (Wien 1868-69).

Es muy posible que esta publicación se llevara a cabo por iniciativa de los estudiantes, que en 1863 habían fundado la “Sociedad del Politécnico”.

Los apuntes de Reuleaux aparecen en 1864, como también los dos primeros apartados de la Grafostática de Culmann aparecieron en 1864: *El Cálculo gráfico* y *la Estática Gráfica*.

Por entonces era muy común publicar una obra por partes y Culmann tenía una razón especial para hacerlo así y la explica en el prefacio de su edición completa:

<sup>37</sup> Reuleaux, Franz. *Die grafische Statik in ihrer Anwendung auf den Maschinenbau*. Nach Vorträgen von Herrn Prof. Reuleaux berbeitet und und herausgegeben von Politechnischen Verein. Als Manuscript autographirt: Zürich 1864.

*“La obra en general construye el contenido de los dos primeros apartados del Cálculo Gráfico y la Estática Gráfica. En la primera entrega de 1864 ya se publicaron estos apartados, pues, los métodos que contenían podían encontrar diversas aplicaciones fuera de la escuela de ingeniería y nos interesaba documentar sus origen.”(Culmann, 1864-1866).*

En otras palabras, Culmann se sintió obligado a aclarar quién fue el verdadero inventor de la Estática Gráfica. El por entonces estudiante Jacob J. Weyrauch <sup>38</sup> sacó, diez años después un balance provisional de la Estática Gráfica, de la que se deriva que, en efecto, Reuleaux se le adelantó a Culmann.

En la Estática Gráfica de Reuleaux, que sólo tiene 24 páginas, no aparece ni una sola vez el nombre de Culmann, apareciendo sin embargo algunas ampliaciones del procedimiento del polígono funicular desarrolladas por Culmann, expuestas también en sus clases. No es absurda la posibilidad de que Reuleaux no nombrara a Culmann porque no consideraba importante su aportación a los métodos gráficos. A partir de la tercera edición de su obra *Der Constructeur* <sup>39</sup>, Reuleaux nombra en una nota a Culmann y lo llama “Significado coleccionista de ejemplos aplicados”. Además, Reuleaux reemplaza la denominación “Estática Gráfica” introducida por Culmann por el término “Grafostática”. Sobre el término acuñado por Reuleaux, que llevaba mucho tiempo dando clase en Berrín, Culmann polemizó diez años después, llegando a comentar que el término “Grafostática” no era muy utilizado. Sin embargo, se equivocó, porque ambos términos serían utilizados sin distinción de contenido.

El término aparece también en 1868/69 en el escrito “*Clases sobre cálculo gráfico y Grafo-Stática*” del profesor vienés Josef Schlesingers, <sup>40</sup> uno de las obras más tempranas de la Estática Gráfica, la cual no se encuentra en la biblioteca del Politécnico de Zürich, ETH, debido a que Culmann legó su biblioteca privada a otras entidades. Se puede concluir que no conocía esta obra. Desde entonces, el significado exacto del término Grafostática va variando, unas veces denota técnicas de poco valor científico, y otras, partes muy teóricas.

En España, se ha utilizado y se sigue usando Estática Gráfica y Grafostática, indistintamente con los mismos significados, que le dio Culmann en origen.

---

<sup>38</sup> Weyrauch, Jacob J. *Über die graphische Statik. Zur Orientierung. Separatausgabe. Vermeh durch Zusätzen in capitel X, sowie durch das Capitel. “Literatur über graphisque Statik” Leipzig 1874.*

<sup>39</sup> Reuleaux, Franz. *Der Constructeur : Ein Handbuch zum Begrauch beim Maschinen-Entwerfen.* Verlag von Friedrich Voeweg und Sohn: Braunschweig 1872.

<sup>40</sup> Schlesingers, Josef. *Vorträge über Graphisches Rechnen u Grafo-Statik.* A. Burotyn u A. Proesch: Wien 1868-69.

Reuleaux dio una amplia difusión de la Estática Gráfica, ya que en su publicación, *“La Estática Gráfica y su aplicación a la ingeniería industrial”*, se limita a recetas simples y prescinde ampliamente de derivaciones matemáticas. Era la variante fácil de estudiar de una complicada materia. Y así ocurre un curioso caso, y es que apareció antes la versión popular que su correspondiente obra de referencia. Esto explica, que hayan sido poco conocido el Cálculo Gráfico de Culmann, frente a la mayor difusión del resto de su obra. <sup>41</sup>

Junto con el cálculo de los Centros de Gravedad que hemos expuesto, y tras su análisis, Culmann se ocupa en su Tratado del Cálculo de Momentos de Inercia en el Capítulo III de la III Parte y en los siguientes, hasta el final, de los elementos básicos para una Teoría de la Elasticidad.

Al igual que en el caso de los Centros de Gravedad, el Cálculo Integral, resolvía los problemas de cálculo de momentos de inercia, no sin algunas complicaciones, que la Estática Gráfica vino a eliminar con procedimientos similares a los anteriormente expuestos del uso del Polígono de Fuerzas y el Funicular correspondiente.

La teoría efectivamente no ofrece más dificultad que la del dominio de los procedimientos de integración. En el caso de sistemas discretos puntuales, el Momento de Inercia respecto a un Eje cualquiera  $I_x = \sum m_i \cdot x_i^2$  donde  $x_i$  representa la distancia de la masa  $m_i$  al eje respecto al que queremos calcular el momento de inercia. Para sistemas continuos  $I_x = \int x^2 \cdot dm$  donde  $x$  es la distancia del elemento diferencial ( $dm$ ) hasta el eje en cuestión. Como en el caso del cálculo de C.D.G. la dificultad no es otra que la solución de algunas de estas integrales o los perímetros de los elementos considerados que pueden complicar enormemente la definición de los límites de integración.

Consciente Culmann de la necesidad del cálculo de los momentos de inercia para el conocimiento de la Elasticidad y Resistencia de Materiales, implica los postulados de su Estática Gráfica en dichos cálculos. La teoría explicada por Culmann se basa en la extensión del concepto del Momento Estático simple de un sistema de vectores paralelos (fuerzas paralelas en el lenguaje de la época) al concepto de Momentos de segundo orden. El módulo del Momento de un vector deslizante respecto a una recta cualquiera no es más que el producto del módulo del vector por el brazo de palanca, es decir, por la perpendicular trazada desde la recta de acción del vector a la recta en cuestión. El Momento de segundo orden se obtendría por el producto de ese módulo por el brazo de palanca al cuadrado. Explicamos en las Fig. 4.17. y 4.18. los métodos que la Estática Gráfica de Culmann nos proporciona para su cálculo sencillo.

<sup>41</sup> Maurer, Bertram. *Karl Culmann und die graphische statik*. Geschichte der Naturwissenschaft und der Technik: Berlin, Diepholz, Stuttgart 1998.

En la Fig. 4.17. se determina grafostáticamente el Momento de Inercia de un sistema de fuerzas paralelas  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  respecto al eje  $YY$  de la misma dirección que las fuerzas. El Método de Culmann comienza por la definición de un polígono de fuerzas  $AE$ , un polo cualquiera  $O$ , que determina los radios polares 1, 2, 3, 4 y 5 y el trazado del polígono funicular recíproco, de lados 1-2-3-4-5, cuyos lados cortan al eje  $YY$  en los puntos  $a, b, c, d, y e$ . Los triángulos  $S_1ab, S_2bc, \dots, S_4ed$ , formados por cada uno de los lados sucesivos del polígono funicular con el eje  $YY$ , son como se observa, semejantes a los correspondientes triángulos de fuerzas  $OAB, OBC, \dots, ODE$ , y de esta semejanza, si hemos llamado  $H$  a la distancia polar, Culmann deduce las siguientes relaciones:

$$x_1 / ab = H / P_1, \quad x_2 / bc = H / P_2 \dots \text{resultando, de ello que } P_1 \cdot x_1 = H \cdot ab, \dots \text{ Y por tanto } \sum P \cdot x = H (ab + bc + ce + de) = H \cdot ae \text{ con lo que } \sum P \cdot x = H \cdot y$$

Culmann preconiza a continuación, (Culmann, 1880: 367-373) que si se quiere conseguir un Momento de segundo orden con esas fuerzas, hay que construir un nuevo polígono funicular, considerando los momentos de primer orden obtenidos como fuerzas. Construido el nuevo polígono de fuerzas con resultante  $ae$ , polo  $O'$ , y considerando que las nuevas fuerzas actuaran sobre las mismas rectas de acción que

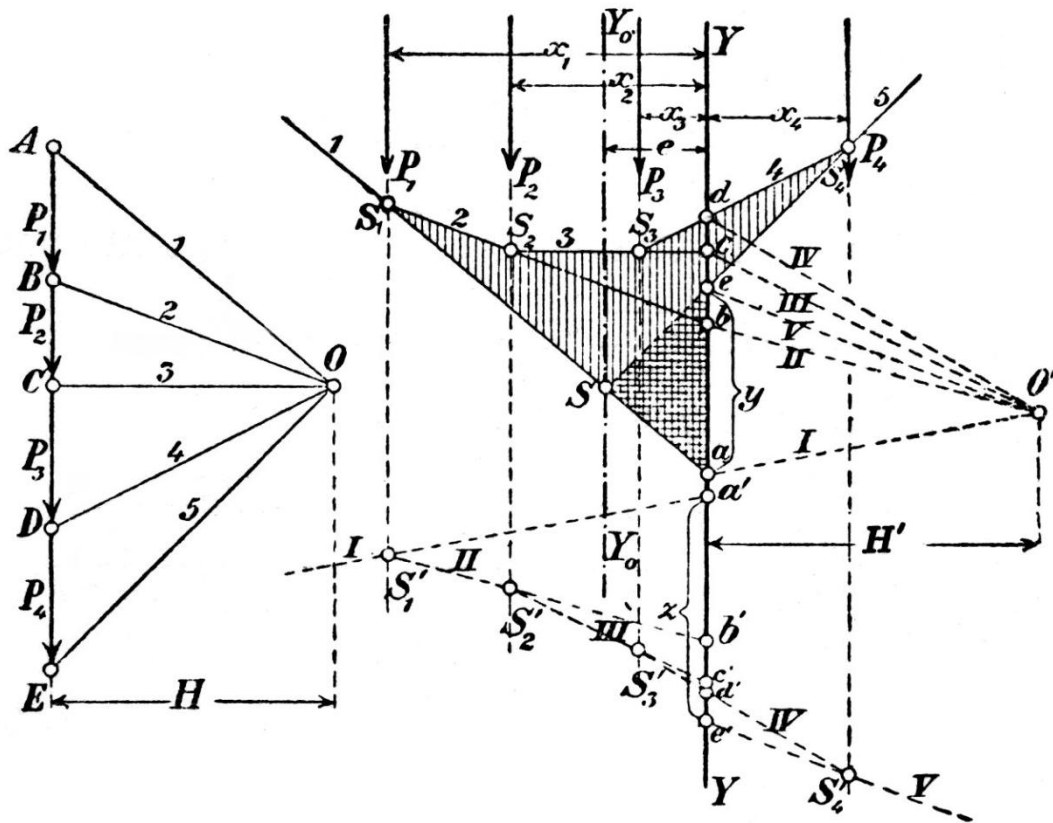


Fig. 4.17. Cálculo del momento de inercia de un sistema de fuerzas paralelas  $P_1, P_2, P_3, P_4$  respecto a un eje  $YY$ , paralelo a la dirección del sistema. Reproduce fielmente el proceso expuesto por Culmann en (Culmann, 1880: 367-373) ( Henkel, Otto. Estática Gráfica. Labor: Barcelona 1926 )

las  $P_i$  procedemos al trazado del nuevo polígono funicular de lados I, II, III, IV y V, naturalmente paralelos a los nuevos radios polares I, II, III, IV y V. Los lados de este nuevo funicular cortan al eje YY en los puntos  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$ .

Considerando ahora la proporcionalidad de los nuevos triángulos  $a'b'S_1'$ ,  $b'c'S_2'$ ,... semejantes a los de fuerzas  $abO'$ ,  $bcO'$ ,..., y designada la nueva distancia polar  $H'$ , dicha semejanza de triángulos lleva a las siguientes proporciones  $x_1 / a'b' = H' / ab$ ,  $x_2 / b'c' = H' / bc$ , .... O bien las:

$x_1 \cdot ab = H' \cdot a'b'$ ,  $x_2 \cdot bc = H' \cdot b'c'$ ,..., pero como del primer polígono funicular hemos deducido que  $P_1 \cdot x_1 = H \cdot ab \rightarrow ab = P_1 \cdot x_1 / H$ ,  $bc = P_2 \cdot x_2 / H$ , ..... con lo que  $P_1 \cdot x_1^2 = H \cdot H' \cdot a'b'$ ,  $P_2 \cdot x_2^2 = H \cdot H' \cdot b'c'$ , .....

Sumando  $P_1 \cdot x_1^2 + P_2 \cdot x_2^2 + \dots = H \cdot H' \cdot (a'b' + b'c' + c'd' + d'e')$  que finalmente podemos concluir con la expresión:  $I_Y = \sum P_i \cdot x_i^2 = H \cdot H' \cdot z$

*“El Momento de Inercia de un sistema de fuerzas paralelas respecto a un eje es igual al producto de las dos distancias polares por el segmento que los lados extremos del segundo polígono funicular determinan en el Eje respecto al que calculamos el Momento de Inercia”.* (Henkel, 1926: 58)

Culmann, introduce a continuación el cálculo del Momento de Inercia respecto a un eje paralelo al anterior, conociendo el ya calculado para ese eje.

Resulta extraño, sabiendo que Culmann debía conocer la obra de Jacob Steiner (1796-1863)<sup>42</sup>, no lo menciona en estas demostraciones:

*“Variations des Moments d’Inertie pour des déplacements parallèles des Plans Coordonnés”* (Culmann, 1880: 370-373), que no son más que la aplicación directa del conocido Teorema de Steiner o de los Ejes paralelos:

*“El momento de inercia de un sistema de fuerzas paralelas respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia del mismo sistema respecto al eje paralelo a aquel, trazado por el Centro del Sistema, mas el producto de la Resultante por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes”.* (Henkel, 1926: 60)

<sup>42</sup> Sobre el Teorema de Steiner consultar: Bedford, Anthony & Fowler, Wallace. *Mecánica para ingeniería*. Quinta edición. Trad. Murrieta Murrieta (Jesús Elmer). Pearson Educación de México, S.A. de C.V.: Naucalpán de Juárez. Estado de México 2008.

Como aplicación directa de los conceptos desarrollados por Culmann en *Die Graphische Statik* relativos al cálculo de Momentos de Inercia, mostramos en la Fig. 4.18. el cálculo grafostático del Momento de Inercia un semicírculo, respecto a su diámetro, que hemos situado en el Eje de abscisas, con las mismas dimensiones del que empleamos en el cálculo del C.D.G. (ver Fig. 4.14.). Empleamos también el mismo Sistema de vectores deslizantes paralelos S1, S2, ..., S8, correspondientes a las superficies de las rebanadas en que hemos dividido la superficie total, rebanadas paralelas a la dirección del eje respecto al que calculamos momentos (Eje de Momentos en los términos de Culmann)

Se ha realizado también el cálculo por el Método de Mohr,<sup>43</sup> consistente en medir el área encerrada por el polígono funicular y el eje respecto al que se calcula el Momento de Inercia (A<sub>2</sub> en el dibujo). El doble de esta área multiplicada por la distancia polar ( H ) es el Momento de Inercia buscado.

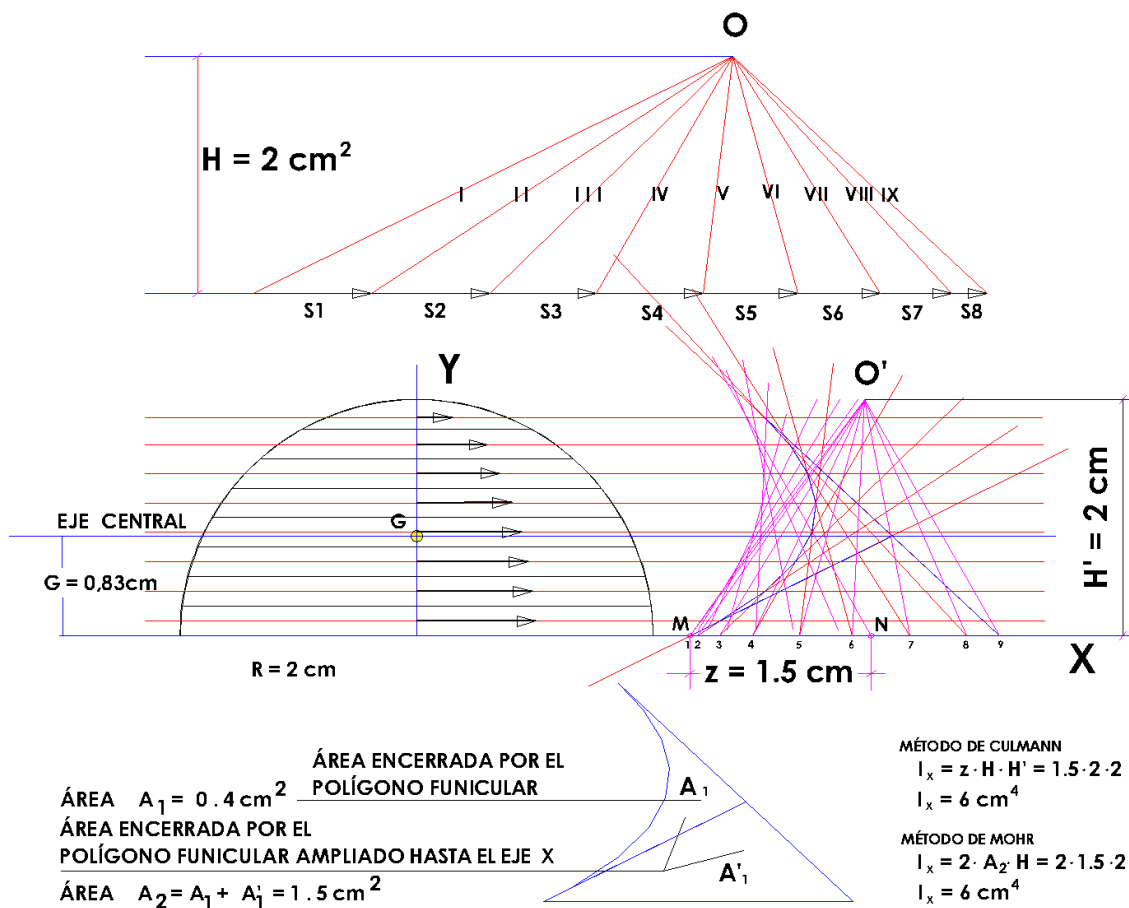


Fig. 4.18. Cálculo del Momento de Inercia de un semicírculo de radio 2 cm, respecto a su diámetro, situado en el eje X, mediante el método expuesto en *Die Graphische Statik* por Karl Culmann y mediante el método de C. Otto Mohr, del Área encerrada entre el funicular y el Eje de Momentos. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

<sup>43</sup> Mohr, Christian Otto. *Die Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks*. Ernst: Berlin 1916.



Culmann, consciente de la importancia del conocimiento de los momentos de inercia de una sección a los efectos del desarrollo de la teoría elástica, dedica varios capítulos a su cálculo y a las características geométricas de las secciones de los cuerpos que sometidos a acciones exteriores, experimentan en éstas, tensiones y deformaciones que dependen directamente de dichas características. Es así que además de instruir en el cálculo de los momentos de inercia de líneas y superficies, introduce los conceptos de Elipse de Inercia, Elipse Central de Inercia, Fibra neutra, y Núcleo Central de Inercia de una sección.

Aunque dedicamos varios apartados a estos conceptos, en el Capítulo 7 de esta Tesis, (Patrones para una didáctica actual de la Grafostática), queremos finalizar el seguimiento de las aplicaciones inmediatas de los conceptos que Culmann desarrolla en los capítulos mencionados de su *Die Graphische Statik*. Calcularemos, pues, la Elipse Central de Inercia y el Núcleo Central de la sección semicircular que hemos elegido.

En la Fig. 4.19. mostramos el cálculo del Momento de Inercia de nuestro semicírculo de radio 2 cm, en este caso, con respecto al Eje de ordenadas, que por simetría es un Eje Principal de Inercia. El procedimiento es análogo al descrito para el cálculo del Momento de Inercia ( $I_x$ ) respecto al Eje de abscisas, en cuanto a la definición de un sistema de vectores paralelos, ahora con la dirección del Eje de ordenadas, vectores verticales  $S_1, S_2, \dots, S_8$ , a la izquierda del Eje Y y  $S_9, S_{10}, \dots, S_{16}$ , a la derecha. Como es obvio, por la simetría de la sección, el Eje Central del nuevo sistema coincide con el Eje de Simetría  $Y_G$ , no insistiendo más en el procedimiento de cálculo sucesivo de dos polígonos de fuerzas y dos funiculares recíprocos ya reseñado.

Es evidente que el Producto de Inercia, que en los sistemas continuos, como es el caso de la superficie de nuestro semicírculo, se define como:  $I_{XY} = \int x \cdot y \cdot dm$  debe ser nulo por la simetría indicada, pues siempre habrá elementos ( $dm$ ) a izquierda y derecha del Eje Y cuyas abscisas serán de signo contrario, anulándose el sumatorio de todos los productos. Los ejes ortogonales Baricéntricos  $X_G$  e  $Y_G$  son, por tanto, Ejes Principales de Inercia, al ser nulo el Producto de Inercia de la sección.

Por la aplicación del Teorema de Steiner o de los Ejes Paralelos determinamos, fácilmente el Momento de Inercia respecto al otro Eje Baricéntrico  $X_G$ , paralelo al Eje de abscisas, que pasa por el Centro de Gravedad, ( $G$ ) calculado:

$I_x = I_{X_G} + S \cdot y_G^2$  donde  $S = \pi/2 \cdot r^2$  (Superficie del semicírculo),  $I_x$  es el Momento de Inercia ya calculado respecto al eje de abscisas,  $I_{X_G}$  es el Momento principal de Inercia que nos queda que calcular e  $y_G$  es la distancia que separa los dos Ejes horizontales X y  $X_G$ . En nuestro ejemplo  $I_{X_G} = I_x - S \cdot y_G^2 = 6 - (\pi/2 \cdot 2^2) \cdot 0.83^2 \text{ cm}^4$   
 $I_{X_G} = 1.67 \text{ cm}^4$ .

Como ya hemos indicado, Culmann no aplica en su Tratado el Teorema de Steiner, limitándose en el *Chapitre III de la Troisième Partie, § 99, Variations des Moments d’Inercie pour des déplacements parallèles des Plans Coordonnés* (Culmann, 1880: 370) al cálculo de los nuevos valores que tendría un Momento de Inercia ya calculado, cuando se desplaza paralelamente el sistema de referencia.

Entendemos nosotros, aunque Culmann no lo explica, que bastaría situar el nuevo sistema de referencia en el Baricentro de nuestro sólido, superficie o línea, para tener aplicado el Teorema de Steiner planteado al revés. Así, en el *Chapitre III de la Troisième Partie, § 101, Ellipse Centrale* (Culmann, 1880: 377-381) expone, antes de ocuparse de la definición del concepto de Elipse Central de Inercia de una sección y de su importancia para calcular Momentos de Inercia respecto a Ejes que formen ángulos cualesquiera con los baricéntricos:

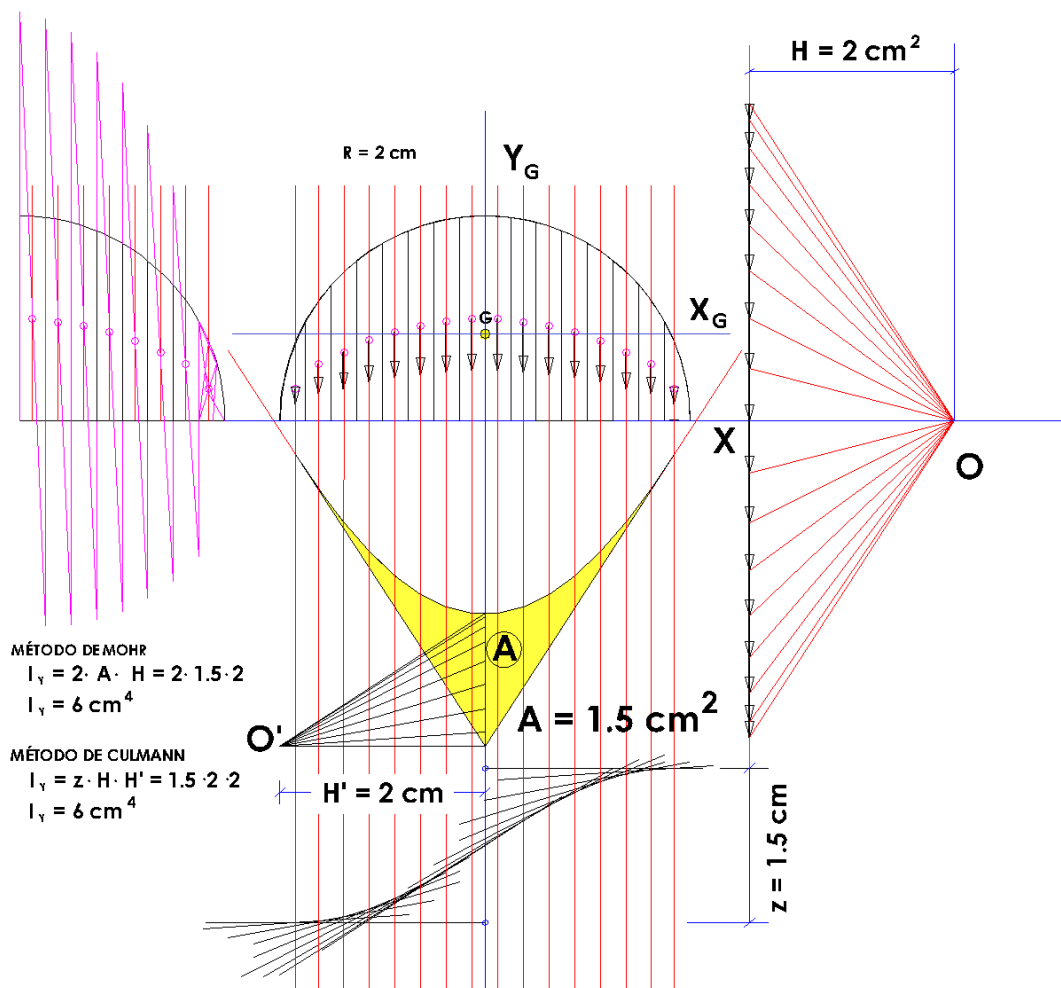


Fig. 4.19. Cálculo del Momento de Inercia de un semicírculo de radio 2 cm respecto a su Eje de Simetría, mediante el método expuesto en *Die Graphische Statik* por Karl Culmann y el método de C. Otto Mohr del Área encerrada entre el funicular y el Eje de Momentos. Se ha resuelto en la parte izquierda el cálculo de los C.D.G. de cada una de las rebanadas verticales en que se ha dividido la sección. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

*“Les constructions développées dans le numéro précédent sont générales et s’applient à des points quelconques. Si, en particulier, on les effectue pour le centre de gravité, on pourra, d’une manière très simple, d’après les règles du § 99, passer des moments déterminés par rapport à des axes quelconques, passant par le centre de gravité, aux moments par rapport à des axes parallèles. En raison des facilités que donne la construction de l’ellipse d’inertie pour la détermination des moments quelconques, on commence toujours par construire cette ellipse, qui porte le nom d’ellipse centrale” (Culmann, 1880: 377).*

En efecto, siguiendo con nuestro ejemplo del semicírculo, y calculados sus Momentos Principales de Inercia, mostramos en la Fig. 4.20. la construcción de su Elipse Central de Inercia, que tiene por Semiejes los Radios de Giro correspondientes a los Momentos referidos.

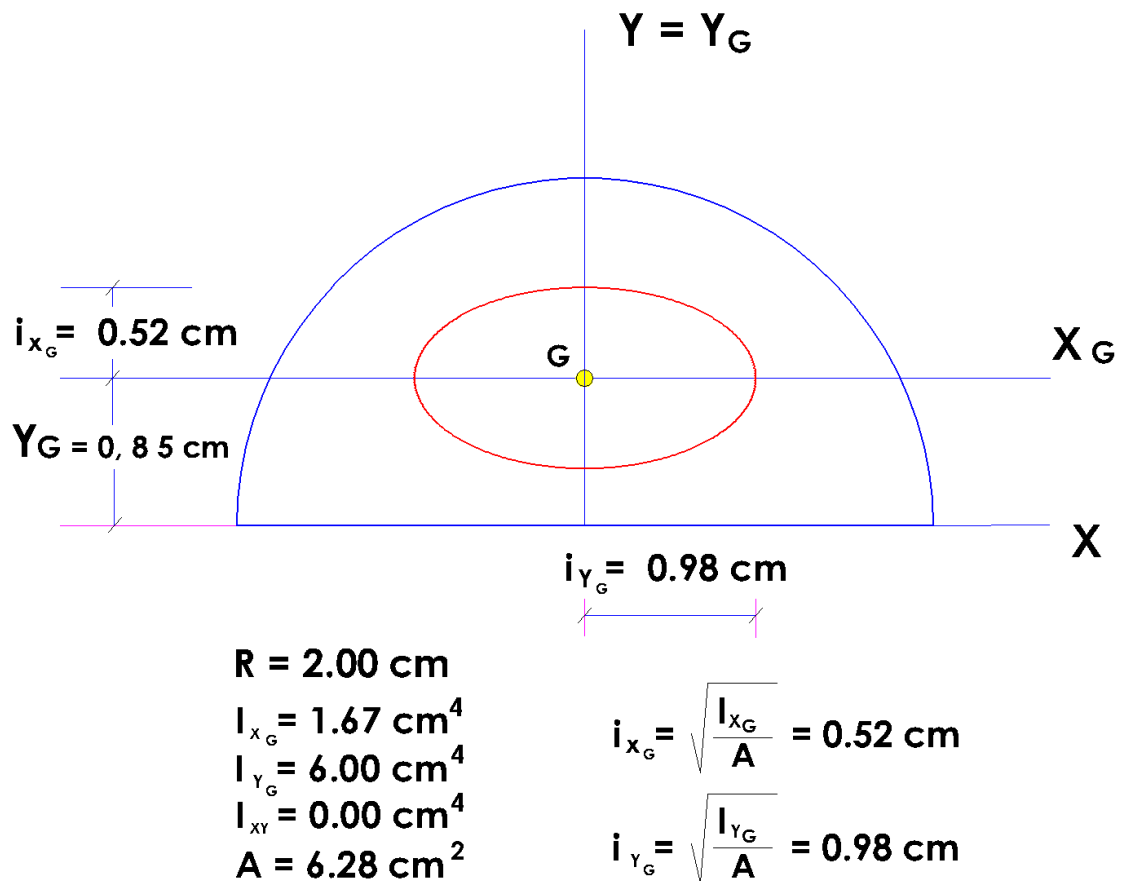


Fig. 4.20. Cálculo de la Elipse central de Inercia de un semicírculo de radio 2 cm. Los semiejes de la Elipse coinciden con los Radios de Giro,  $i_{x_G}$ , cuyos cuadrados son  $i_{x_G}^2 = I_{x_G} / A$  e  $i_{y_G}^2 = I_{y_G} / A$ . (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

Karl Culmann, dedica el Capítulo IV de su *Traité de Statique Graphique*, traducción de su obra en alemán *Die Graphische Statik* al cálculo y construcción de las elipses centrales y núcleos centrales de figuras planas. En la obra en alemán, este tema se desarrolla en *Zweiter Abschnitt, Achtes Kapitel. Construction der Centralellipse, des Centralellipsoids und des Kerns. (Sección segunda, Octavo Capítulo. Construcción de la Elipse Central, elipsoide Central y Núcleo Central)*. Ya hemos comentado que la paginación y numeración de los capítulos de la obra en alemán y la traducción francesa no se corresponden, aunque sí los contenidos y materias tratados.

El tratamiento que Culmann da al cálculo de la Elipse Central y Núcleo Central, es especialmente complejo en cuanto a que desarrolla en exceso de forma analítica, a nuestro juicio, las ecuaciones de los Elipsoides de inercia y de la Elipse Central, perdiéndose la comprensión mecánica y gráfica del estudio abordado.

Él que había señalado en la introducción, los innumerables beneficios del Dibujo como lenguaje del ingeniero ( y más de los arquitectos ) deja algo de lado esta expresión gráfica, insistiendo más en la configuración analítica de los Lugares Geométricos de los que hablamos.

Hacemos notar que hemos tratado de construir un proceso lógico en el seguimiento de los distintos temas de la Estática Gráfica de Culmann. La práctica totalidad de los demás tratados que siguieron a su *Die Graphische Statik* a través de los años no hacen más que recoger parte de sus contenidos, haciendo más o menos hincapié en este o aquel tema, por lo que, salvo en el caso de Luigi Cremona con su teoría de Las Figuras Recíprocas <sup>44</sup> para el cálculo de entramados reticulares, la extensión de Antonio Favaro <sup>45</sup> sobre la Geometría de Posición y la enorme recopilación del conocimiento de principios del S. XX sobre Grafostática, Elasticidad y Resistencia de Materiales de Maurice Lévy, <sup>46</sup> no hemos detectado en nuestra investigación nuevas cuestiones no contempladas por Culmann.

---

<sup>44</sup> Cremona, Luigi. *Les figures reciproques*. Trad. Bossut (Louis) Gauthier-Villars: Paris 1885. Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010.

<sup>45</sup> Favaro, Antonio. *Leçons de Statique Graphique*. Première partie. Géométrie de position, trad. de l'italien par Paul Terrier. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris 1879.

Favaro, Antonio. *Leçons de Statique Graphique*. Deuxième partie. Calcul graphique, trad. de l'italien par Paul Terrier, avec appendice et notes du traducteur. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris.

<sup>46</sup> Lévy, M. Maurice. *Principes et applications de statique graphique pure*. I Tomo. Gauthier-Villars: Paris 1907. Lévy, M. Maurice. *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites*. II Tomo. Gauthier-Villars: Paris 1913. Lévy, M. Maurice. *Arcs. Ponts suspendues. Corps de revolution*. III Tomo. Gauthier-Villars: Paris 1918.

Dicho esto y siguiendo ese proceso lógico de concatenación, en la Fig. 4.21. mostramos el cálculo del Núcleo Central de nuestro ya conocido semicírculo, que explicamos brevemente, calculada con anterioridad la Elipse Central de Inercia.

Se trata de uno de los temas que abordamos con mayor entusiasmo, por ser éste, uno de los que menos desarrollo gráfico ha tenido en ningún tratado. Como explicábamos en la Introducción de esta Tesis, las propiedades de reciprocidad de algunos elementos geométricos respecto de las cónicas, nos resuelven precisamente el Cálculo del Núcleo Central de una sección cualquiera. Hemos encontrado, como es natural, en varios de libros y escritos, las características de este Lugar Geométrico e incluso más o menos complicadas ecuaciones, para el cálculo de las rectas que definen su contorno en los casos más sencillos como el de secciones rectangulares.

Nuestra intención ha sido seguir el proceso, guiados por los capítulos de la obra de Culmann con una sección (hemos elegido un semicírculo por no tener doble simetría y por no contar con un contorno totalmente recto). Hemos buscado los Polos de las rectas tangentes al contorno de la sección ( $T_i \rightarrow N_i$ ) para tangentes cualesquiera a la circunferencia. Son especialmente significativas  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ . Los polos  $N_1$  y  $N_2$  marcan la transición de la zona elíptica superior a la zona rectilínea inferior que converge en  $N_{1-2}$  del Núcleo Central, punto que es el polo de la recta 1-2, Diámetro del semicírculo.

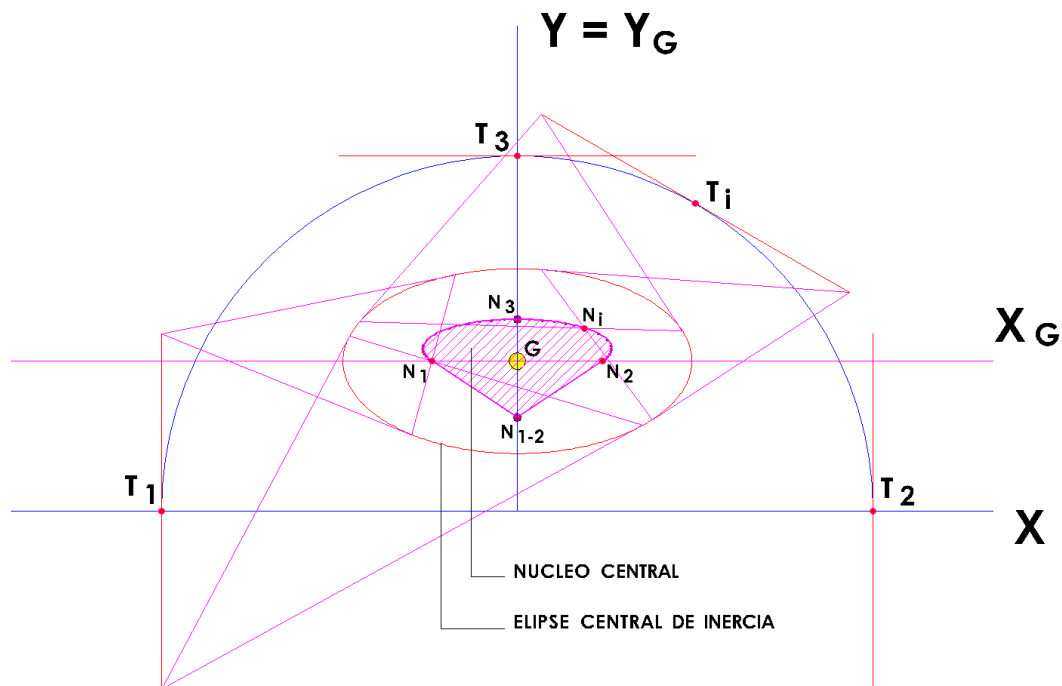


Fig. 4.21. Cálculo del Núcleo Central de de la sección semicircular de de radio 2cm. Los puntos del Núcleo han sido obtenidos mediante el cálculo de los Polos recíprocos, respecto a la Elipse Central de inercia calculada previamente, de las rectas tangentes al perímetro de la superficie. Cada recta tangente tiene por polo recíproco respecto a la elipse, un punto del Núcleo Central. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

Por otra parte, el punto  $N_3$ , es el polo de la recta  $T_3$ , tangente horizontal al semicírculo. Fig. 4.22.

Las relaciones de reciprocidad estudiadas en la Geometría de Posición y puestas en práctica por Culmann, nos llevan al planteamiento de calcular el Polo y la recta Polar de forma recíproca. Por ejemplo en la Fig. 4.22. hemos determinado  $N_2$  como Polo de la tangente  $T_2$ , trazada por el extremo derecho del diámetro del semicírculo y hemos calculado la recta  $N_2N_{2-1}$  como recta polar del polo 2, extremo derecho de dicho diámetro y la recta  $N_1N_{2-1}$  como recta polar de su extremo izquierdo. Hemos hecho girar la tangente  $T_3$  desde la horizontal superior, pasando por  $T_i$ , hasta la vertical  $T_2$ , consiguiendo tantos polos  $N_3, N_i, \dots, N_2$  como tangentes queramos trazar. Aprovechando la rapidez del Dibujo asistido por ordenador, hemos trazado tangentes de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  para la parte superior de la elipse del Núcleo y de  $5^\circ$  en  $5^\circ$  para la zona de menor radio de curvatura.

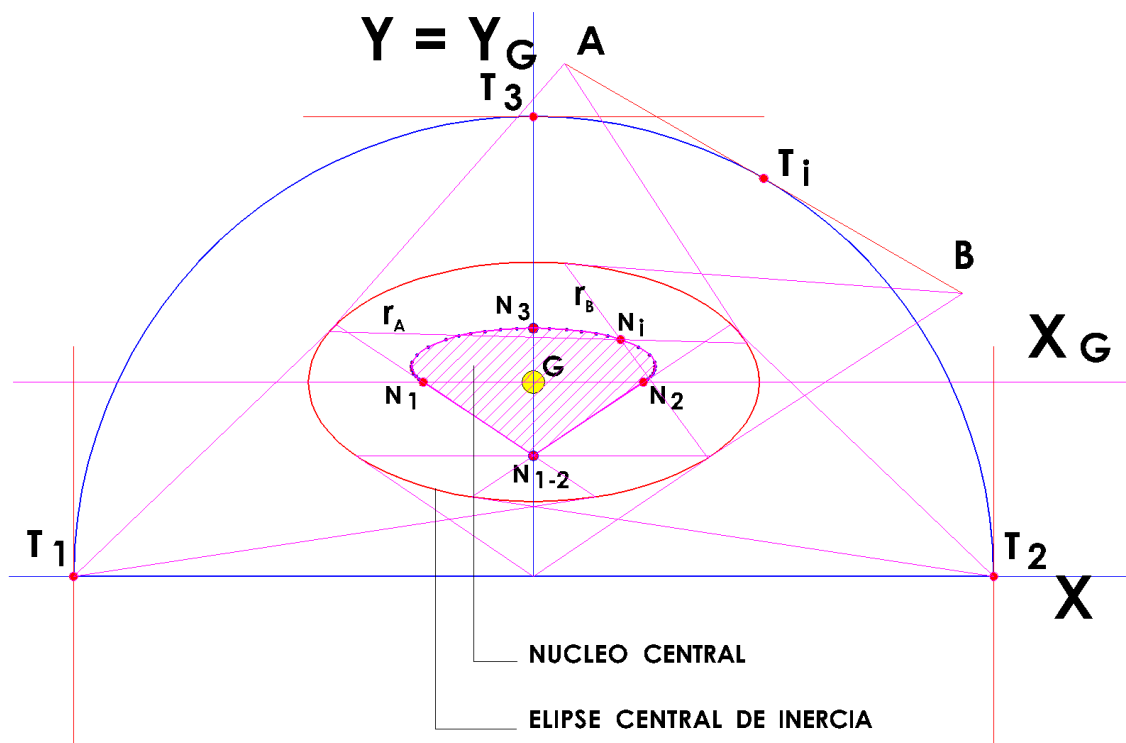


Fig. 4.22. Detalles del trazado de la tangente  $T_i$  y el método grafostático para encontrar el polo recíproco de la recta  $AB = T_i$ . También se muestran las Rectas polares  $N_1-N_{1-2}$  y  $N_{1-2} - N_2$ , elementos duales o recíprocos de los Polos 1 y 2, extremos del diámetro del semicírculo. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

Como vemos, en los ejemplos descritos, los postulados de la Geometría Proyectiva, originariamente llamada Geometría de Posición, se encuentran especialmente ligados a la Teoría Grafostática y sus aplicaciones. Es por ello que dedicamos el Capítulo 5 de esta Tesis Doctoral a plantear que en el origen de la Estática Gráfica se encuentra el Cálculo Gráfico y la Geometría de Posición.

La Estática Gráfica adquirió con Culmann categoría científica, por sus aportaciones al cálculo estructural, la construcción en Ingeniería y la Arquitectura. Pero hay un campo en el que el conocimiento de la Grafostática sorprende especialmente y con el que queremos terminar este párrafo dedicado a la figura de Culmann.

Relata el especialista en anatomía ortopédica Julius Wolff (1836-1902)<sup>47</sup> cómo el propio Culmann le manifestaba que nunca se había sorprendido tanto con sus trabajos científicos, como cuando descubrió la maravillosa coherencia entre la naturaleza y los resultados obtenidos de sus estudios grafostáticos. Wolff había enunciado tras sus estudios sobre la estructura interna de los huesos, que:

*“La forma y estructura de los huesos en crecimiento y de los adultos, depende del esfuerzo y la tensión a los que están sometidos. Alterando las líneas de tensión, la forma de los huesos puede ser cambiada.... Las deformidades óseas se deben a adaptaciones mecánicas de los huesos, se traducen en alteraciones de sus capas de hueso cortical -cambio estructural- según una ley matemática.... Si un hueso normal es cargado -esfuerzo- en una nueva dirección, su estructura y forma cambia con su nueva función.... Si un hueso deforme, es rectificado y se restaura su función normal, toda su estructura retorna a su forma original normal”<sup>48</sup>*

Lo que embelesó y alegró tanto a Culmann en el verano del 1866 fue el descubrimiento de que la naturaleza, en la construcción de los huesos, también parecía estar de acuerdo con lo que su Estática Gráfica preconizaba en cuanto a las líneas de presión en las estructuras cargadas. El anatomista Hermann von Meyer<sup>49</sup> en 1850 estudiaba el empalme de la cadera y estaba particularmente interesado en la forma de la cabeza del fémur y cómo proporcionaba una gran gama de movimientos en los planos apropiados. (Fig. 4.23)

También observó que la cabeza del fémur era un enrejado minúsculo de huesos llamados trabécula. Meyer estuvo de invitado en la Sociedad de Investigación de la Naturaleza de Zürich y presentó muestras de huesos. Enseñó a los participantes, entre los que se encontraba Culmann, cortes a través de diferentes huesos, que naturalmente tienen que soportar un peso.

---

<sup>47</sup> Wolff, Julius. *Die innere Architektur der Knochen*. Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medizin 50 (3) : 389-453 (1870). Springer: Berlin, New York.

<sup>48</sup> Ceballos Mesa, Alfredo. Epónimos: La ley de Wolff. Julio César Hernández Perera. Centro de Investigaciones Médico Quirúrgicas: La Habana 2011.

<sup>49</sup> Meyer, Georg Hermann von. *Statik und Mechanik des menschlichen Knochengengerüsts*. Wilhelm Elgelmann: Leipzig. 1873

En estos huesos, la cavidad interna está rellena de médula, vasos sanguíneos y otros tejidos. Entre estos tejidos se distingue un fino entramado de pequeñas y entrelazadas laminillas óseas , que forman el llamado tejido esponjoso.

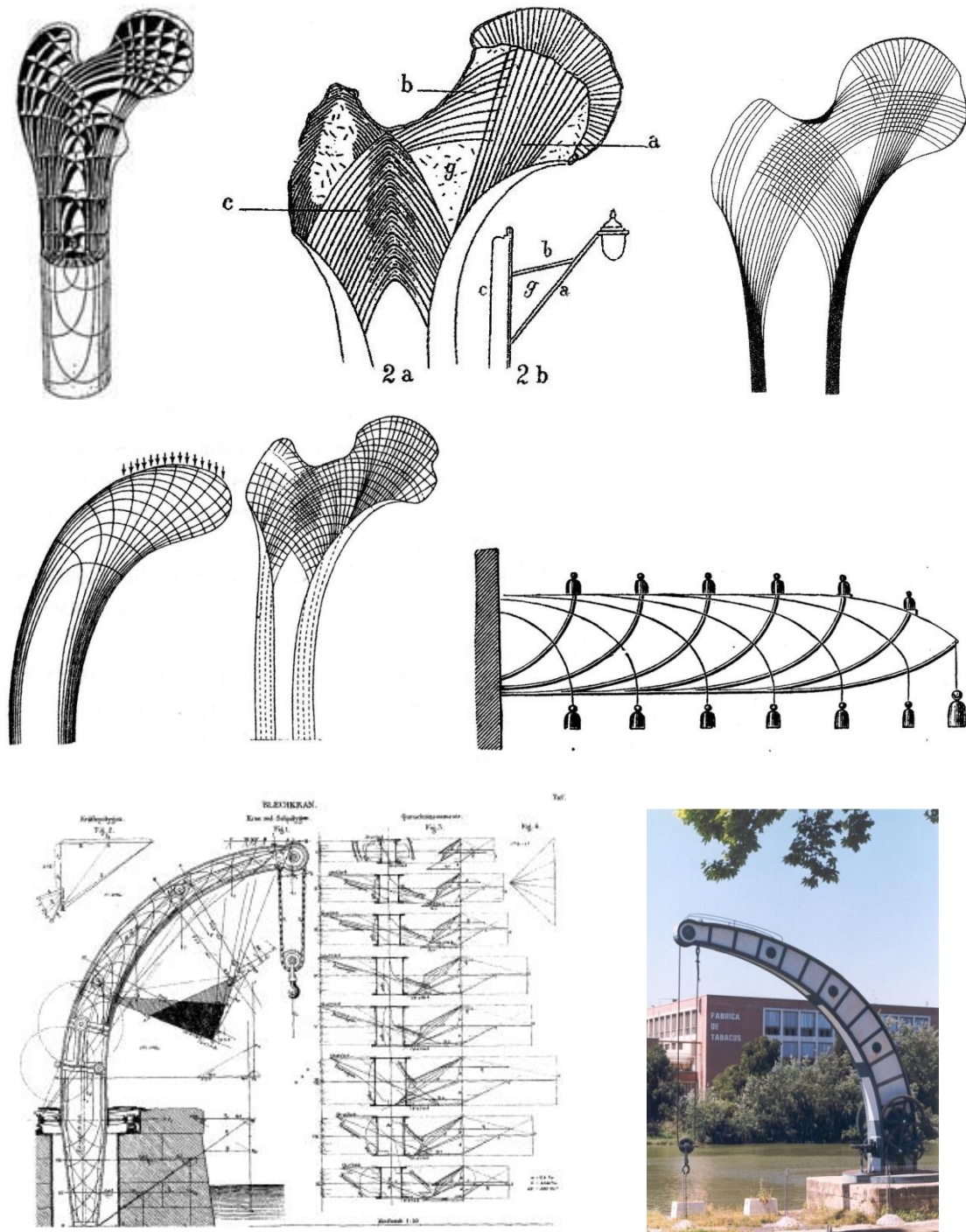


Fig. 4.23. Distintos dibujos de la cabeza de un fémur, donde se representa la estructura interna, congruente con las líneas de compresión y tracción pura de una estructura en voladizo, sometida a carga vertical. Estructura de una grúa Fairbairn con los cálculos realizados por Ritter de los distintos estados tensionales y las distintas secciones de chapa necesarias para soportar los momentos correspondientes y las tensiones normales derivadas. (Bertram, 2006: 127-129). La grúa Fairbairn de 60 Tn de peso y 40 Tn de carga, que se instaló en 1904 en el muelle de Triana en Sevilla. Hoy situada en la cabecera sur del Muelle de Delicias. (Patrimonio Histórico Portuario. Puerto de Sevilla).



Culmann se dio cuenta, en un artículo de Meyer de 1867,<sup>50</sup> de que la dirección de los sistemas de plaquitas situados en las cabezas del primer metatarso, representan las mismas líneas que la Resistencia de Materiales denomina (curvas de máxima compresión y máxima tracción). Estas son las líneas que definen la dirección en las que compresiones y tracciones se presentan sin mezcla de esfuerzos cortantes. Culmann ve en dicho sistema estructural, una presentación en la Naturaleza de las curvas de compresión y tracción estudiadas por él en su Estática Gráfica.

Culmann no descubrió la analogía por primera vez con un fémur, como se comenta en algunos escritos, sino con un metatarso del pie humano. En el artículo de Meyer esta analogía sólo se presenta, no se muestra y sus dibujos de los tejidos esponjosos son defectuosos, de la misma manera que no mostraba que las trayectorias de las curvas fuesen ortogonales.

Un estudio más exacto sobre las trayectorias fue realizado en 1869/70 por el entonces, profesor de la universidad de Berlin, Julius Wolff (1836-1902),<sup>51</sup> que utilizó la trayectoria de las líneas de la Estática Gráfica para analizar la arquitectura de un hueso, un trabajo que redactó con ayuda de Culmann, que hizo que, su por entonces asistente Harlacher, le preparara a Wolff un dibujo de una grúa de Fairbairn en el contorno de un fémur. Culmann tenía un vivo interés por los estudios de Wolff, en ellos veía nada más y nada menos que una prueba para sus métodos gráficos. ¿Qué podría ser más convincente para todos los incrédulos que en la Naturaleza se identificaran conceptos de la Estática Gráfica?. A comienzos de 1869, escribió Culmann a Wolff:

*“No tengo nada más que comentar sobre sus conclusiones sobre los huesos, más que las mismas me parecen como llegadas desde el alma y que me alegra mucho, que la construcción de los huesos haya resultado ser una obra de arte tan eficaz y ejemplar.... La construcción de la esponjosa en los huesos confirma de forma irrefutable la teoría sobre la distribución de fuerzas en el interior de una viga. Y si ésta es correcta, entonces también tienen que serlo las de las celosías, las de las bóvedas, etc. y podemos hacer notar los resultados de nuestras investigaciones, con mayor insistencia a los viejos y oxidados practicantes.”*<sup>52</sup>

---

<sup>50</sup> Meyer, Georg Hermann von. *Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüsts*. Wilhelm Elgelmann: Leipzig 1867.

<sup>51</sup> Wolff, Julius. *Die innere Architektur der Knochen*. Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medizin 50 (3) : 389-453. Springer: Berlin, New York. 1870.

<sup>52</sup> Wolff, Julius. *Das Gesetz der Transformation der Knochen*. Zum Autor Dieter Wessinghage : Berlin 1892. Reimpresión: D. Wessinghage. Vorwort von Heinz Mittelmeier 1991.

Culmann le pidió a Wolff que le enviara una fotografía del corte longitudinal de un hueso, para utilizarla en la instrucción de la teoría de la mecánica. Podemos imaginar la gran felicidad de Culmann al tener una imagen así en la mano, con la que enseñar, que la Naturaleza misma hace visibles las fuerzas que actúan en el interior de los huesos, dejando crecer médula ósea a lo largo de las líneas de fuerza. Por este descubrimiento que se produjo de manera casual, Culmann es, todavía hoy conocido por historiadores de biología y medicina. Meyer y Wolff se dieron cuenta sin limitaciones la prioridad de Culmann en el análisis de los tejidos óseos, aunque Culmann mismo nunca publicara nada al respecto. Esto quedó reservado para su sucesor, Wilhelm Ritter, el cual, en el primer tomo sobre la aplicación de la Estática Gráfica, trataba la estática de los huesos.<sup>53</sup>

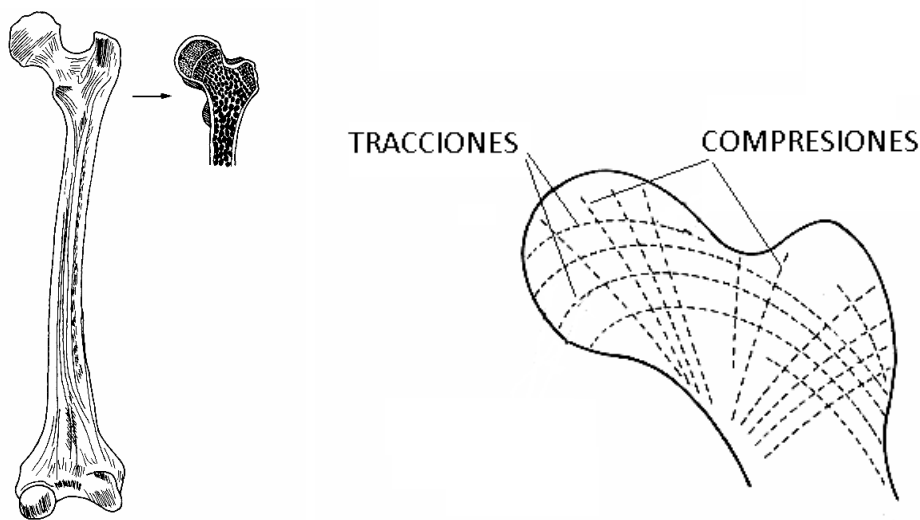


Fig. 4.24.(a) Dibujo de un fémur humano con la sección de la cabeza mostrando el tejido esponjoso y líneas de tracción y compresión en el interior de la cabeza del hueso. <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia>



Fig. 4.24.(b) Detalle de las secciones de la cabeza del fémur humano. ([http://galerias.educ.ar/v/anatomia/articulaciones\\_y\\_huesos/seccion\\_del\\_femur.html](http://galerias.educ.ar/v/anatomia/articulaciones_y_huesos/seccion_del_femur.html)).

<sup>53</sup> Ritter, Wilhelm. *Anwendungen der graphischen Statik. Nach Professor K. Culmann. Erster Teil. Die im Innern eines Balkens wirkenden Kräfte*. Verlag von Meyer & Zeller: Zürich. 1888.

Finalmente, mostramos en la Fig. 4.24(c), la Plancha XII del libro de Julius Wolff: *Über die innere Architektur der Knochen und ihre Bedeutung für die Frage vom Knochenwachstum*, donde se muestran los esquemas de Culmann relativos a las trayectorias de las líneas isostáticas de tracciones y compresiones de una pieza sometida a flexión, que ya hemos comentado, aunque nos ha llamado especialmente la atención, la asimilación del pequeño esquema nº 3, abajo a la derecha, donde tras situar una carga repartida, en la parte superior (n), que correspondería en el esquema nº 1 a la zona de carga A-B, analiza unos pequeños diagramas de tensiones y deformaciones, estas últimas mostrando un doble diagrama triangular con la deformación nula en la fibra neutra.

Naturalmente, para cada sección de la pieza (1) que es la que se asimila al fémur (2) aparece un diagrama diferente, que se analiza en la zona central.

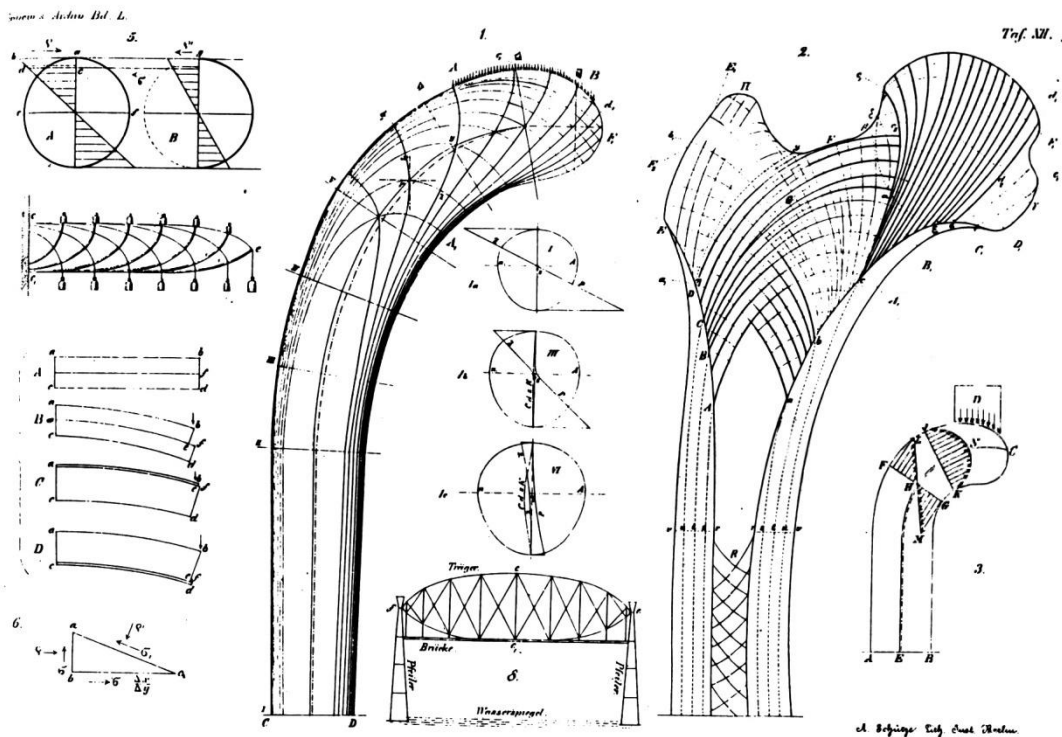


Fig. 4.24(c), la Plancha XII del libro de Julius Wolff: *Über die innere Architektur der Knochen und ihre Bedeutung für die Frage vom Knochenwachstum*. ([www.elsevier.com/locate/bone](http://www.elsevier.com/locate/bone))

#### 4.4. DESPUÉS DE "DIE GRAPHISCHE STATIK". OTROS TRATADOS Y AUTORES

La Estática Gráfica de Culmann fue acogida por el mundo de la Ciencia de manera muy cautelosa. Se le reconocía el haber ampliado el conocimiento y manejo de los polígonos funicular y de fuerzas a un método con una aplicación mucho más versátil, pero se consideraba poco útil la utilización de tantos conceptos de la Geometría Proyectiva. Así Otto Mohr escribía en 1868:

*“El señor profesor Culmann se ha puesto la tarea en su Estática Gráfica de resolver, con ayuda de la nueva geometría, tareas no pertenecientes a la ingeniería pero accesibles a tratamientos geométricos. Los resultados interesantes y útiles en la práctica, que dicha obra contiene, hubieran encontrado aceptación general (estamos convencidos), si no hubiera sido porque el aparato erudito de la Nueva Geometría ha disuadido a muchos ingenieros del estudio de este objeto.”*<sup>54</sup>

En la *Revista de la Asociación de Ingenieros Alemanes* no apareció hasta dos años después una reseña, y en la de *Ingeniería Civil*, un año más tarde, se señaló un artículo con las palabras:

*“En la reunión del año 1866 ..... aparecieron obras excelentes, pero ciertamente difíciles de entender..... En cualquier caso, la crítica se queja de que la Estática Gráfica es demasiado poco conocida como para que alguien competente se manifieste sobre ella. Pero cualquiera que la haya tratado a fondo, reconocerá, que es, en efecto, el fundamento de una nueva práctica científica de ingeniería.”*<sup>55</sup>

El autor del artículo era un desconocido alumno de Culmann. Podía haber sido Rudolf Harlacher, catedrático y adjunto en la escuela de ingeniería o Jacob Weyrauch, compañero de Culmann o también Wilhelm Ritter, cuya Estática Gráfica cita a Culmann hasta en el título.<sup>56</sup>

Ya en 1866 Wilhelm Frankel presidió en Dresden una conferencia sobre la Estática Gráfica y en 1871 escribió en una reseña en el libro, *Principios del Cálculo Gráfico y de la Estática Gráfica*, de Karl von Ott<sup>57</sup>:

<sup>54</sup> Mohr, *Beitrag zur Theorie der Holz und Eisenkonstruktionen*. ZAV (Instituto Politécnico): Hannover 1868.

<sup>55</sup> Civilingenieur 15. (1869) *Literatur und Notizblatt*. p.9. Arthur Felix: Leipzig 1869.

<sup>56</sup> Ritter, Wilhelm. *Anwendungen der graphischen Statik. Nach Professor K. Culmann. Erster Teil. Die im Innern eines Balkens wirkenden Kräfte*. Meyer & Zeller: Zürich.1888.

<sup>57</sup> Ott, Frank von. *Die Grundzüge Des Graphischen Rechnens Und Der Graphischen Statik*. Ed. corregida y aumentada J. G. Calve'sche K.K. Hof: Prag 1879. Reimpresión Nabu Press. 2010.

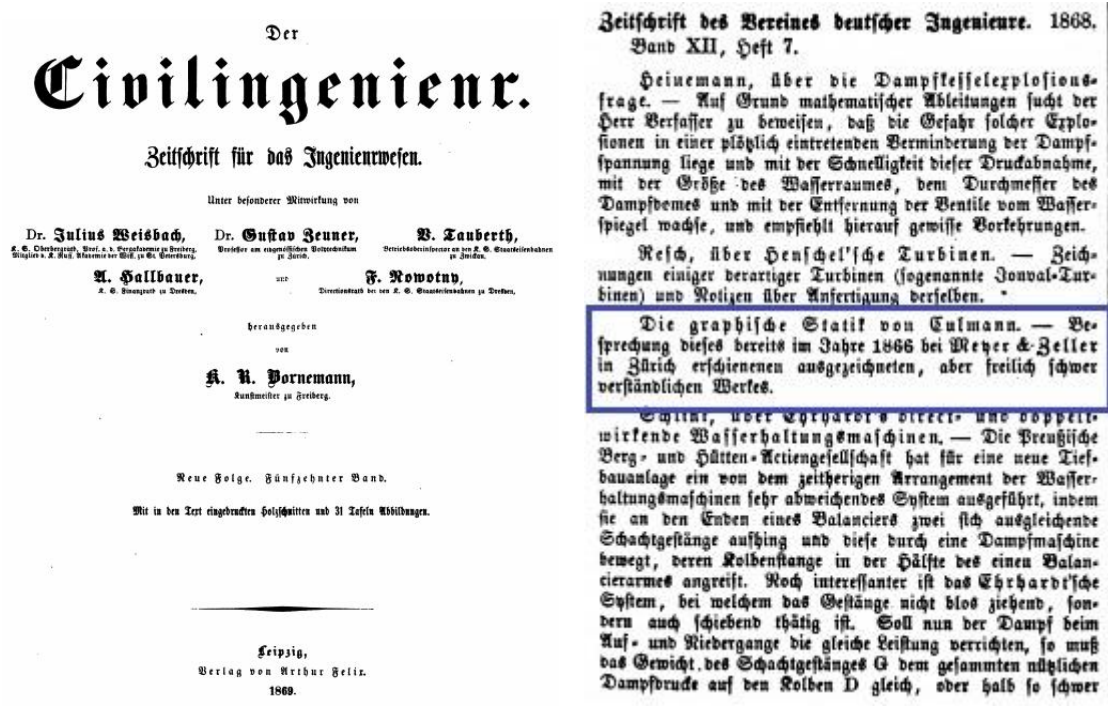


Fig. 4.25. Portada y página 9 del nº 15 (1869) de la publicación de los ingenieros civiles alemanes: *Civilingenieur*, en la que aparece por primera vez una reseña de Die Grafische Statik de Culmann, tres años después de su publicación. (<http://books.google.de/books>)

*“La nueva disciplina de la gráfica estática, fundada por primera vez por el profesor Culmann, se enseña hoy en día en la mayoría de las escuelas politécnicas y es utilizada de manera ventajosa por gran parte de los practicantes más jóvenes... Muchos de los colegas no están en condiciones de llevar a cabo un curso metódico, en el que primero se exponga la Geometría de Posición como preparación a la Estática Gráfica y luego la propia Estática Gráfica...”* (Wilhelm, 1871)

El primer catedrático de Cálculo Gráfico y Estática Gráfica fuera de Zúrich, fue probablemente Josef Schlesinger (1831-1901) en Viena. En 1866 solicitó la habilitación para esta especialidad y dio conferencias durante tres años sobre estos dos temas. Una recopilación de esta conferencia apareció como manuscrito litográfico y fue, junto con los libros de Reuleaux y Culmann, el tercer libro sobre gráfica estática.<sup>58</sup>

La portada (Fig. 4.26.) es la evidencia más temprana del término “Grafostática”. Sin embargo, Schlesinger prescinde de la Geometría Proyectiva. Esto es tanto más sorprendente cuanto Schlesinger fue uno de los representantes más activos de la transformación proyectiva de la Geometría Descriptiva. Parece que incluso Schlesinger, considera que

<sup>58</sup> Schlesinger, Josef. *Grafisches Rechnen u Grafo-Statik*. A. Burotyn u A. Proesch: Viena 1868-69.

los medios proyectivos de Culmann son innecesarios o constituyen un estorbo en la constitución del corpus doctrinal de la Estática Gráfica.

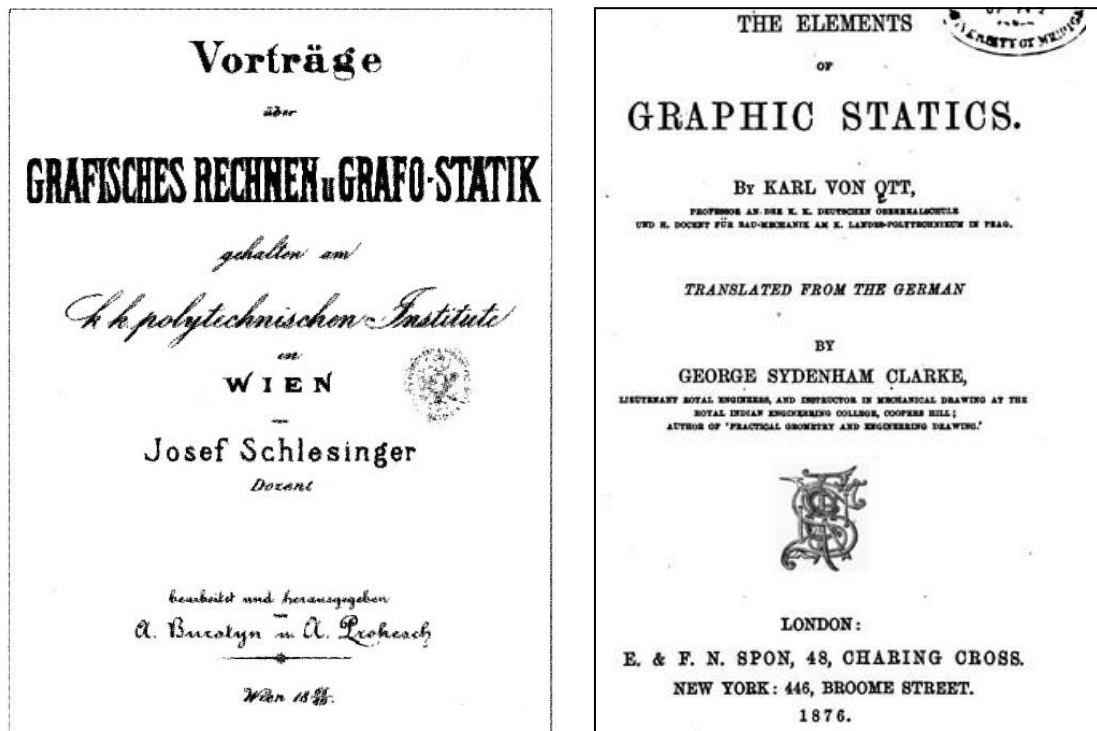


Fig. 4.26. Portada de *Grafisches Rechnen u Grafo-Statik* de Josef Schlesinger. Primera obra en que aparece el término *Grafostática* impreso, y Traducción del libro de Frank von Ott al inglés de 1876.

Más de cinco años después apareció un libro de casi cincuenta páginas de Karl von Ott,<sup>59</sup> profesor en Praga, que estaba dirigido a estudiantes y también a todos los ingenieros o técnicos de la construcción. Estos estudiantes suyos se encontraban más bien en las escuelas secundarias, ya que desde 1868, Harlacher, el alumno de Culmann, dio conferencias de Estática Gráfica en Praga. Ott señalaba:

*“La propagación rápida y general de la obra nombrada anteriormente puede haberse visto afectada por la circunstancia de que Culmann exige que se tengan unos conocimientos previos de Geometría Descriptiva y recomienda también como estudio previo a su obra la nueva geometría moderna de Staudt.”*<sup>60</sup>

<sup>59</sup> *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*. IX. Programm der Oberreal Schule besonders abgedruckt: Praga 1871. ( Libro digitalizado por Google de la New York Public Library y descarga vía Internet ).

<sup>60</sup> Staudt, Georg Karl Christian. *Geometrie der Lage*. Friedr. Korn'schen Buchhandlung: Nürnberg. (<http://www.archive.org/details/geometriederlage00stauoft>)

Ott prescinde consecuentemente de las demostraciones generales referidas a la Geometría Proyectiva. La dualidad del polígono funicular y de fuerzas no aparece y la dependencia de la ubicación del polo no se estudia.

Su escrito experimentó más ediciones ampliadas. En *Archiv der Mathematik und Physik* (1872)<sup>61</sup> apareció una reseña elogiosa sobre el libro de Ott, que al mismo tiempo arremetía contra Culmann:

*“Ya hemos manifestado en ocasiones anteriores, que, en nuestra opinión, se ha hablado demasiado de éste cálculo gráfico y demás: incluso divulgándose como un nuevo descubrimiento una y otra vez. Ya que, el que posee conocimientos profundos de la matemática elemental estará, ciertamente, en situación de descubrir con gran facilidad métodos gráficos para la representación de expresiones aritméticas sencillas, ya que esto es en, efecto una cosa muy antigua y sólo sirve en determinados sistemas. No tenemos intención de desmentir que se puedan utilizar en la práctica de manera ventajosa y con suficiente exactitud métodos gráficos en lugar de cálculos. Pero para dar instrucciones generales para tal propósito, realmente no son necesarios libros voluminosos, es suficiente con una exposición corta de 49 páginas como en el presente pequeño libro y mucho mejor. Por lo que queremos llamar la atención sobre el mismo. En las matemáticas hay mucho más que hacer que leer voluminosos libros sobre estas cosas, en parte triviales, las cuales se le presentan a uno fácilmente por sí mismas. El que no pueda resolverlas por sí mismo, no es un matemático.”*<sup>62</sup>

Culmann tuvo por lo tanto la mala suerte de que los practicantes, consideraban su libro muy teórico, y los matemáticos, demasiado banal.

Johann Bauschinger hizo a Culmann más popular que Karl von Ott. Bauschinger tomó en Munich la cátedra que se le había ofrecido a Culmann. En el prefacio de su libro, de 1871, *Elemente der Graphischen Statik*,<sup>63</sup> Bauschinger no ahorra en elogios a Culmann, sin embargo, comenta:

---

<sup>61</sup> *Archiv der Mathematik und Physik* nº 54 (1872) *Literarischer Bericht*. Nr.213, p.5. C.A. Coch: Leipzig 1872.

<sup>62</sup> Traducción de la reseña en alemán sobre el libro de Ott. En *Archiv der Mathematik und Physik* nº 54 (1872) *Literarischer Bericht*. Nr.213, p.5. C.A. Coch: Leipzig 1872.

<sup>63</sup> Bauschinger, Johann. *Elemente der Graphische Statik*. R. Oldenbourg: München 1871.

“...la modesta difusión, que la aplicación de la Estática Gráfica de Culmann ha encontrado hasta ahora entre los ingenieros, se debe fundamentalmente a la circunstancia de que falta un libro sistemático propiamente dicho para la nueva ciencia... A lo mejor las cualidades de mi libro pueden aportar algo a aumentar la difusión, ya que para su entendimiento, no son necesarios conocimientos de la llamada Nueva Geometría, aunque durante la elaboración no prescindí de ella.”

El libro de Bauschinger, del que contamos con una primera edición, no deja de ser, a nuestro juicio, un muy buen libro de Estática Gráfica, que además responde a los planteamientos previos que el propio autor manifiesta sin ambages en su introducción. Es eminentemente práctico y por tanto prescinde, como la gran mayoría de las estáticas gráficas posteriores, difundidas en todos los idiomas, de la carga teórica relativa a la Geometría Proyectiva, que por su novedad y profundidad, hicieron muy enojoso el estudio análisis y divulgación de *Die Graphische Statik* de Culmann. Como es natural, éste, profundamente entusiasmado con los “sublimes” principios de la Geometría Proyectiva y convencido de que una Ciencia, como él quería que fuese, necesitaba de esa carga teórica, se sintió molesto de que un compañero, publicase una obra que contenía gran parte de sus aplicaciones prácticas sin el fundamento teórico.

La Fig. 4.27. muestra la portada y la primera de la Planchas del libro de Bauschinger,

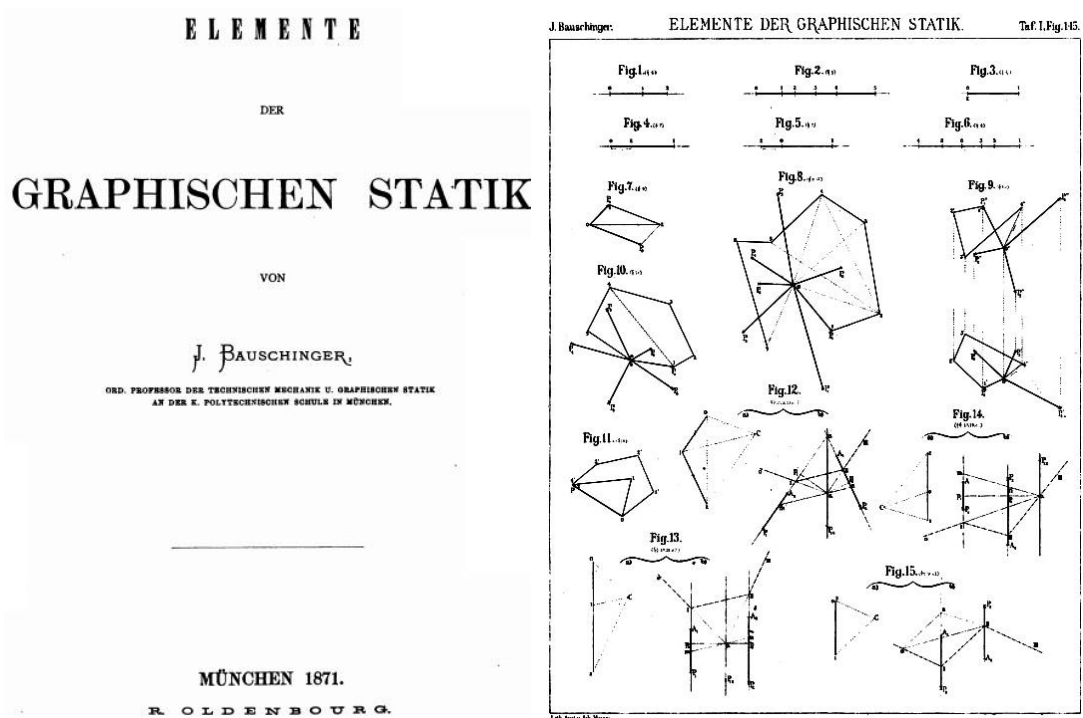


Fig. 4.27. Portada y Plancha nº 1 del libro de Johann Bauschinger, *Elemente der Graphische Statik*, de 1871, cuyo Prefacio tan mal sentó a Culmann.



en la que se nos muestra los rudimentos de la construcción del Polígono de fuerzas y el Funicular correspondiente para sistemas de fuerzas concurrentes y paralelas. En ella, efectivamente, se prescinde de los principios de la Geometría de Posición, haciendo más hincapié en la construcción geométrica con la ayuda de la Geometría Descriptiva.

Culmann reaccionó sumamente enfadado y cuatro años después, en el prefacio de su segunda edición de *Die Graphische Statik*, de 1875<sup>64</sup> arremete contra el “señor profesor Bauschinger” a quien la obra de Culmann no le parecía suficientemente elemental.

Para Culmann, el prefacio de Bauschinger, fue doloroso por diversos motivos. Por un lado, Bauschinger hablaba de su trabajo aplicándole carácter de libro de texto y deja entrever que la Geometría Proyectiva complica artificialmente la gráfica estática. Por otro lado, la crítica provenía de un hombre que estaba en posesión de un puesto que fue originalmente creado para Culmann mismo. Y la crítica venía de Múnich, su ciudad, con la que Culmann tenía una estrecha relación emocional.

En nuestra opinión, en el ambiente de los profesionales a los que la Estática Gráfica se dirigía, primaba más la utilidad práctica que el conocimiento teórico, siendo por tanto, muy a pesar de Culmann, más apreciados los libros que contenían las aplicaciones prácticas que los enunciados teóricos de derivados de la Mecánica combinada con la Geometría Proyectiva. Culmann se equivocaba al considerar que la potencia de las demostraciones de lo mecánico con principios proyectivos iba a entusiasmar a ingenieros y arquitectos, a los que consideraba inmersos en una formación técnica, pero auténticamente científica, sin embargo, pudo más el entusiasmo por la agilidad que los cálculos grafostáticos imprimían a su tarea, que el planteamiento científico de búsqueda del origen de dichos cálculos.

Un claro ejemplo lo muestra el ingeniero civil M. Maurice Lévy (1838-1910), profesor de Física, Matemáticas, Mecánica y miembro de l'Académie des Sciences francesa. Autor de un extenso tratado, con más de 1.300 páginas, recopilatorias de la Estática Gráfica y sus aplicaciones a la Construcción, pero que no contiene referencias a los orígenes proyectivos de esta ciencia.<sup>65</sup>

---

<sup>64</sup> Culmann, Karl. *Die graphische statik*. 2ª Ed. Von Meyer & Zeller (A. Reimann): Zürich 1875.

<sup>65</sup> Lévy, M. Maurice. *La Statique Graphique et ses Applications aux Constuctions*. Troisième Édition. Gauthier-Villars: Paris.

I Partie: *Principes et aplicatons de statique graphique pure*. 1907.

II Partie: *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites*. 1913.

III Partie: *Arcs. Ponts suspendues. Corps de revolution*. 1918.

Como vemos, la Estática Gráfica fue adoptada, muy rápidamente como especialidad y estudiada en las universidades y escuelas técnicas de habla alemana, aunque no de manera predominante, como Culmann se había imaginado.

En la segunda edición de la Estática Gráfica de 1875, (Culmann, 1875: V) deja claro, que lo que le importa, sobre todo, es la difusión del espíritu de la Estática Gráfica, constatando que sin duda encontraba en Italia un terreno más favorable. (Culmann, 1875: VI)

De hecho, la respuesta más importante, la encontró la obra de Culmann en Italia, aunque su difusión por las diferentes universidades fue algo más lenta. Las fuerzas impulsoras correspondieron al matemático Luigi Cremona y el también matemático e historiador científico Antonio Favaro.

Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona nació en Pavía en 1830 y murió en Roma en 1903. Fue uno de los máximos artífices del renacimiento de los estudios geométricos en Italia, no sólo por haber difundido en este país los más recientes resultados obtenidos en el campo de la geometría pura en Alemania, Francia e Inglaterra, sino por haber realizado notables investigaciones originales. Se le debe también una gran parte de la reforma de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias y superiores italianas, en la que hizo incluir la Estática Gráfica y la Geometría Proyectiva.<sup>66</sup>

A los dieciocho años, Luigi Cremona tomó parte en las batallas de 1848/49 contra Austria como miembro del movimiento liberal italiano. Después estudió ingeniería en Pavía. Debido a su participación en el movimiento independentista italiano, no recibió su primera contratación en una Escuela Superior hasta el año 1860, con treinta años. Su primer puesto consistió en una cátedra en la Universidad de Bolonia. Seis años después se trasladó a la Escuela Técnica Superior en Milán como profesor de Estática Gráfica y Geometría Superior. Allí escribió para sus alumnos los apuntes de un curso sobre la Estática Gráfica.<sup>67</sup>

En 1873 tomó la dirección de la Escuela Superior Técnica de Roma, la cual reorganizó por completo. En 1877 fue profesor en la Universidad de Roma y finalmente, dos años después también miembro del Senado romano y ese mismo año publica "*Elementi di Geometria Proiettiva*".<sup>68</sup>

---

<sup>66</sup> La vida y obra de Luigi Cremona fue recogida en *Luigi Cremona. Opere*. 3 Vol. Ulrico Hoepli: Milano 1914-1917. En concreto, su obra se encuentra en el Vol. III.

<sup>67</sup> Veronese, G. *Commemorazione del Socio Luigi Cremona, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 12, 1903, pp. 664-678. 1903.

<sup>68</sup> Cremona, Luigi. *Elementi de Geometria Proiettiva*. G.B. Paravia: Roma-Torino-Milano-Firenze. 1873.

Cremona buscó unificar las escuelas superiores técnicas con las universidades para promover el intercambio de conocimientos. Esto también se correspondía con el deseo de Culmann, ya que veía en la separación de lo técnico y las ciencias puras, es decir escuelas técnicas superiores y universidad, el motivo por el que su visión bajo la óptica de la Geometría Proyectiva de la Estática Gráfica, no terminaba de imponerse.

Cremona fue considerado un brillante orador y escritor con un lenguaje claro. Él entendió que, en su mencionado estudio sobre la dualidad, tanto la práctica, como también los aspectos teóricos debían seguir desarrollándose, pensando en la integración de la dualidad de Maxwell y Culmann.

En 1874, el *Elementi di calcolo grafico* de Cremona fue acogido con gran ovación. Un año después apareció el libro traducido al alemán y Culmann lo presentó en la Sociedad de Investigadores de la Naturaleza de Zurich. Sin embargo, más que sus publicaciones fue su trabajo como político de la educación y reorganizador de la Escuela Técnica Superior de Roma lo que más aportó a la difusión de la Estática Gráfica.<sup>69</sup>

Los importantes descubrimientos sobre las transformaciones de curvas y superficies tridimensionales, que suponen el nacimiento de la moderna geometría descriptiva, le valieron la concesión del premio Steiner, *ex aequo* con Rudolf Sturm. Las transformaciones de Cremona se han utilizado en el estudio de superficies racionales, en la resolución de las singularidades de curvas planas y espaciales y en el estudio de integrales elípticas y superficies riemannianas.<sup>70</sup>

En 1859 fue elegido profesor en el Liceo St. Alexandre de Milán, en 1860 de la Universidad de Bolonia, y en 1867 fue nombrado profesor del Instituto politécnico de Milán, institución de la que fue catedrático en 1872. Durante su estancia en Milán desarrolló una intensa actividad investigadora en campos como teoría de cónicas, curvas planas, superficies de tercer y cuarto grado, Estática y Geometría Proyectiva,

---

<sup>69</sup> Sobre la figura de Cremona ver: Edizione Nazionale Matematica Italiana. Scuola Normale Superiore. Centro de Ricerca Matematica Ennio de Giorgi.

<sup>70</sup> Sobre el carácter topológico de los métodos de Riemann, es interesante ver: Riemann Bernhard. *Teoría de las funciones abelianas*, donde aparecen las “superficies riemannianas” formadas por hojas planas superpuestas, en número igual al grado de una ecuación algebraica, unidas por líneas de transición, que unen los puntos críticos. Riemann, B. *Riemanniana Selecta*. José Ferreirós: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid 2000.

que como sabemos condujeron a su tratado sobre *Les figures réciproques en Statique Graphique* (Cremona, 1885)<sup>71</sup>.

Sus principales investigaciones matemáticas se refieren a la curva cúbica, a los cuadros inscritos en una desarrollable de 4ª clase y a las cónicas inscritas en una desarrollable de 3ª clase. Dedicó dos importantes memorias al estudio de las transformaciones geométricas de las curvas planas, que recibieron, precisamente de él, el nombre de transformaciones cremonianas. Sus trabajos científicos *Introducción a una teoría geométrica de las curvas planas*, *Preliminares de una teoría geométrica de las superficies* y *Sobre una transformación birracional de sexto grado* fueron reunidos en una edición completa publicada en Milán en 1914-17.<sup>72</sup>

Tal vez sea, dentro de los tratadistas que analizamos en nuestra investigación sobre la importancia de la Grafostática, el que haya alcanzado en todo el siglo XX mayor relieve, merced a una de las aplicaciones más utilizadas por todos los arquitectos e ingenieros que hemos manejado los procedimientos de aquella disciplina: el método de cálculo de solicitaciones en los entramados triangulares de las figuras recíprocas que lleva su nombre. Método de Cremona.

Ya en el prefacio de la edición, traducida al francés por Louis Bossut, Capitán de Ingenieros, de Gauthier-Villars de 1885, es decir, diez años después de la segunda edición alemana del tratado de Culmann, Cremona expresa su satisfacción y honor por la acogida que del “opúsculo” *Le figure reciproche nella Statica grafica*, había hecho aquél y añade, cómo un gran número de autores habían escrito sobre las aplicaciones de las figuras recíprocas a las ciencias de la construcción:

*Je serai satisfait si, en encourageant cette publication, j'ai contribué à confirmer cette vérité proclamée bien haut par Culmann, que la Géométrie moderne (Géométrie de position, Géométrie projective) est un élément essentiel et puissant pour le développement de l'art de l'ingénieur.*

*Du reste, l'appliation des figures réciproques aux travures réticulaires n'est que l'un des Chapitres de la Statique graphique, de cette Science don't le Traité le plus complet est encore celui de Culman....* (Cremona, 1885: VIII)

Manifestándose satisfecho, si su obra contribuía a la confirmación de la “verdad” que Culmann había proclamado bien alto, de ser la Geometría Proyectiva es un potente y esencial elemento para el desarrollo del arte de la ingeniería.

<sup>71</sup> Cremona, Luigi. *Les figures réciproques en Statique Graphique*. Trad. Bossut (Louis) Gauthier-Villars: Paris. Ed. FacsimilLighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010.

<sup>72</sup> Luigi Cremona. *Opere*. Vol. III. Ulrico Hoepli: Milano 1914-1917.

A pesar de la intención de Cremona de considerar de un orden menor las aplicaciones de sus Figuras recíprocas al cálculo de estructuras, no ha habido libro, tratado ni programa de ninguna escuela de arquitectura o ingeniería que, durante más de un siglo, no haya incluido la Grafostática en general y el método de cálculo de las Figuras Recíprocas de Cremona en particular.

Incluimos algunas de las láminas del Atlas del tratado de Cremona, tremendamente ilustrativas, en el sentido de la aplicación de los conceptos proyectivos, ya en la primera de las planchas de su Atlas. Fig. 4.28.

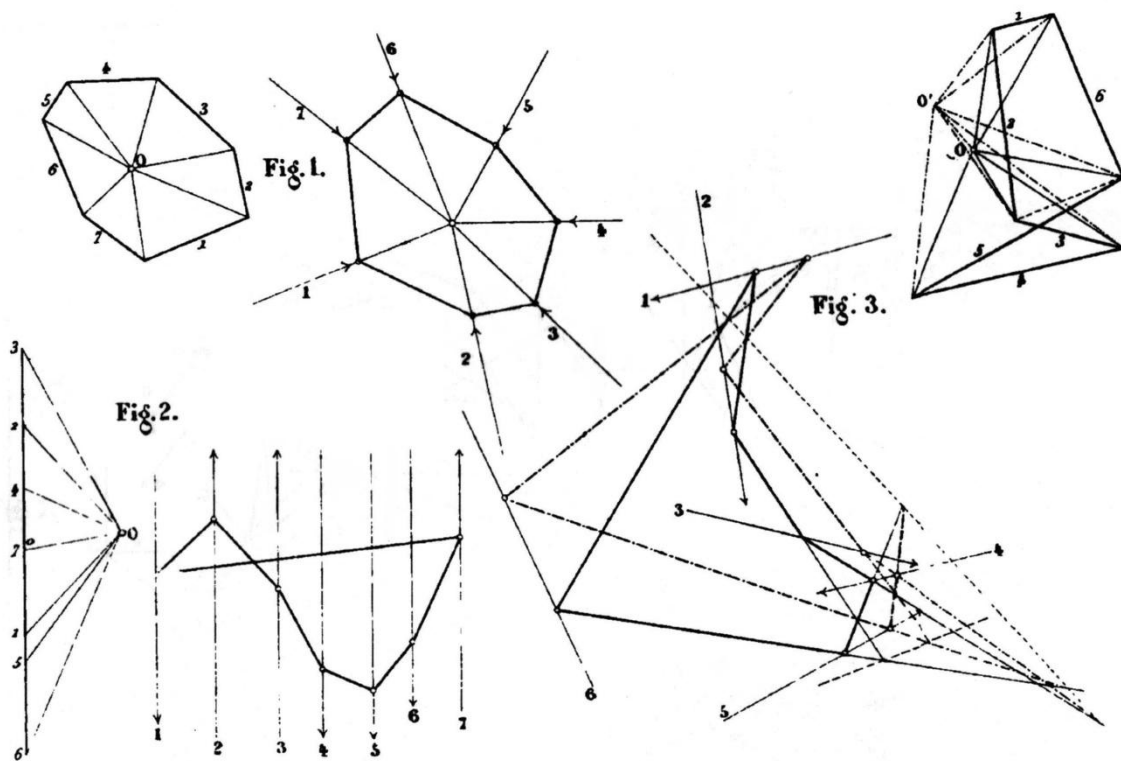


Fig. 4.28. Cremona, Luigi. *Les Figures Réciproques en Statique Graphique*. Gauthier-Villars: Paris 1885. Atlas: Pl. I

El polígono de fuerzas y el polígono funicular pueden reducirse a dos diagramas recíprocos.

- 1) Caso de fuerzas concurrentes. Los dos diagramas presentados son recíprocos porque los dos polígonos pueden ser considerados como proyecciones ortogonales de dos pirámides de ángulo poliedro de (n) caras. (En la Fig.1, de la plancha I, de 7 caras)
- 2) Caso de fuerzas paralelas. El polígono de fuerzas se reduce a una recta, que corresponde al caso de que la base de la primera pirámide es perpendicular al plano de proyección y donde el vértice de la segunda está en el infinito. (Fig. 2 de la plancha I)

3) Caso de fuerzas cualesquiera. Examinemos ahora el caso general, en el que las fuerzas no concurren en un punto. (Fig. 3 de la plancha I, Fig. 4.28) y (Fig. 5 de la plancha II de Cremona, que se muestra en nuestra Fig. 4.29)

Tomemos el polo O, un segundo polo O' y juntemos O y O', vértices del polígono de fuerzas, construyamos un segundo polígono funicular correspondiente a este nuevo polo, O'. Es decir, un polígono cuyos lados sean paralelos a los rayos nacidos de O' y del cual los vértices estén situados en las líneas de acción de las fuerzas. En las Fig. 3 de la plancha I y Fig. 5 de la plancha II de Cremona, que se muestran en nuestras Fig. 4.28 y 4.29. se han representado discontinuos los rayos nacidos del segundo polo y los correspondientes lados del funicular.

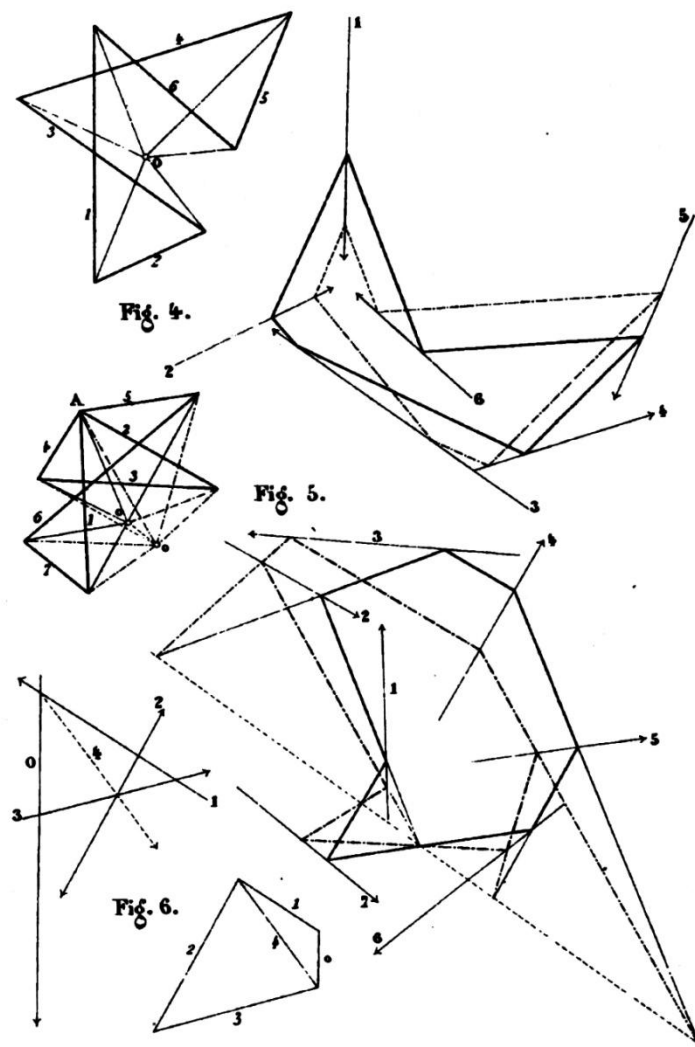


Fig. 4.29. Cremona, Luigi. *Les Figures Réciproques en Statique Graphique*. Gauthier-Villars: Paris 1885. Atlas: Pl. II.

El diagrama formado por el polígono de fuerzas y los rayos proyectantes salidos de los polos O y O', por una parte y el diagrama formado por los dos polígonos funiculares y las líneas de acción de las fuerzas, por otra, son dos figuras recíprocas. El primero es la proyección de un poliedro formado por ángulos poliedros de (n) caras, cuyas

intersecciones forman un polígono gaucho <sup>73</sup> de (n) lados y el segundo es la proyección de un poliedro comprendido entre dos polígonos planos de (n) lados, tales que los lados del uno interceptan a los lados correspondientes de otro. Es evidente que si aquel polígono gaucho de (n) lados se convierte en una curva continua, el polígono de fuerzas y los polígonos funiculares se convierten en curvas de fuerzas y curvas funiculares de un sistema continuo plano de fuerzas.

Es importante señalar que los puntos de encuentro de los lados correspondientes de los dos polígonos funiculares están situados sobre una línea recta paralela a la línea que une los polos O y O', esta propiedad es fundamental en los desarrollos de Culmann y fue llamada en casi todos los tratados posteriores al de Cremona "*Recta de Culmann*". Fig. 4.30.

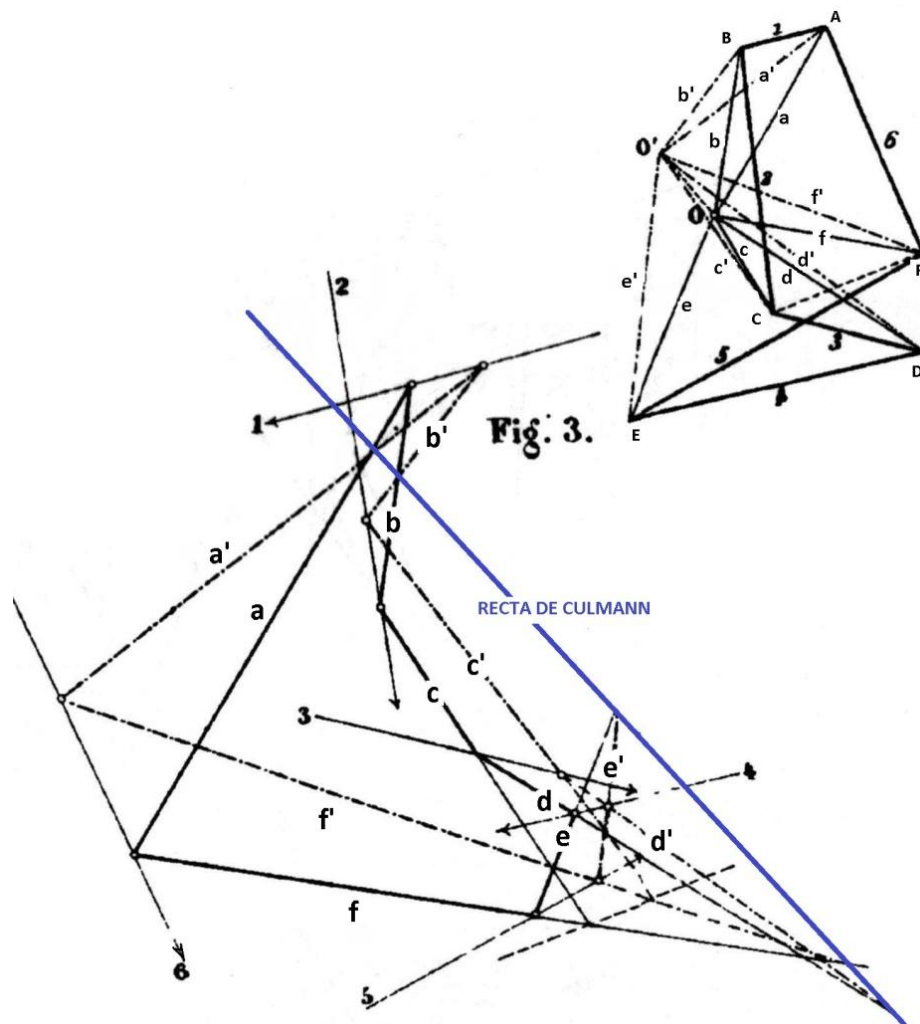


Fig. 4.30. Dibujo de la Fig. 3 de la Plancha II de *Les Figures Réciproques en Statique Graphique* de Cremona. Se han grafiado los vértices de los polígonos de fuerzas correspondientes a los polos O y O' y los lados correspondientes de los funiculares. Asimismo se ha marcado en color la llamada Recta de Culmann.

<sup>73</sup> En el lenguaje de la Geometría Proyectiva y por extensión en las estáticas gráficas de los autores que la tienen en cuenta en sus explicaciones, un polígono gaucho es el formado por rectas que se cruzan en el espacio, es decir, no plano. Sería el caso del formado por las aristas intersección de las caras de los poliedros cuya proyección son los polígonos de fuerzas con polos O y O' en la Fig. 4.29.

Desde el punto de vista de la Geometría Proyectiva, (no olvidemos que Cremona sí considera primordial su intervención en el desarrollo de la Estática Gráfica), la recta que en el espacio une los vértices de los dos ángulos sólidos de  $(n)$  caras del primer poliedro es conjugada de la recta intersección de los dos planos de base del segundo poliedro.

El llamado Teorema de la recta de Culmann, resulta de lo anterior y de la propiedad que tienen dos rectas conjugadas de proyectarse ortográficamente siguiendo dos rectas paralelas, de manera que si consideramos dos lados correspondientes  $a$  y  $a'$ ,  $b$  y  $b'$ , ...,  $f$  y  $f'$  de dos polígonos funiculares, como los generados por los polígonos de fuerzas de polos  $O$  y  $O'$ , estas se cortan sobre una recta fija paralela a la recta que une los polos  $O$  y  $O'$ .

Cremona expone bien claramente en los apartados (§ 8 y 10) de "*Le Figure reciproche nella Statica Grafica*"<sup>72</sup> y en § VII y VIII de *Les Figures Réciproques en Estatique Graphique*<sup>73</sup> que la teoría geométrica de los diagramas recíprocos se debe especialmente al físico escocés James Clerk Maxwell.<sup>74</sup> cuyo, Teorema preconiza:

*" Si se aplican fuerzas, que representan en magnitud los lados de una figura, entre los extremos de los lados correspondientes de su figura recíproca, los puntos de esta última, estarán en equilibrio bajo la acción de este sistema de fuerzas".*

La demostración del teorema resulta evidente si se considera que las fuerzas aplicadas en un nudo cualquiera del segundo diagrama son paralelas y proporcionales a los lados del polígono cerrado correspondiente al primer diagrama.

El teorema es particularmente útil para la determinación gráfica de las fuerzas internas que se desarrollan en los entramados reticulares. En la Fig. 4.31. se ha dibujado la aplicación del Teorema de Maxwell para dos triángulos recíprocos  $ABC$  y  $A'B'C'$ . (Se ha omitido el cálculo del triángulo recíproco  $A'B'C'$  del inicial  $ABC$ , que mostramos en el punto de esta Tesis dedicado específicamente a la Geometría Proyectiva, origen de la Estática Gráfica.

<sup>74</sup> Cremona, Luigi. *Le Figure reciproche nella Statica Grafica*. Terza Edizione. U. Hoepli: Milano. ([http://www.bma.arch.unige.it/PDF/cremona\\_le\\_figure\\_reciproche.pdf](http://www.bma.arch.unige.it/PDF/cremona_le_figure_reciproche.pdf).)

<sup>75</sup> Cremona, Luigi. *Les figures réciproques en Statique Graphique*. Trad. Bossut (Louis) Gauthier-Villars: Paris. Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010.

<sup>76</sup> Maxwell, James Clerk. *On reciprocal figures, frames and diagrams of forces*. Trans. Roy. Soc. Edinburgh Vol. 26. pp. 1-40, plt. 1-4 Edinburgh. 1872.



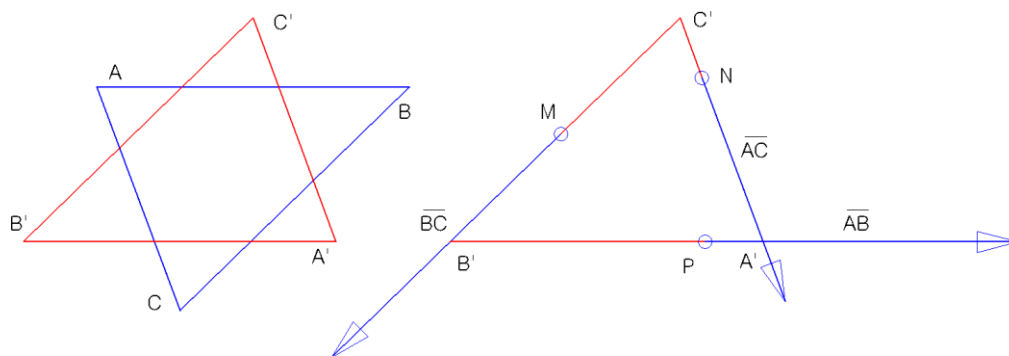


Fig. 4.31. Dibujo de la aplicación del Teorema de Maxwell a dos triángulos recíprocos ABC y A'B'C', aplicando la fuerza AB en el punto P situado sobre el lado A'B', recíproco del AB. En el punto M sobre el lado B'C', recíproco de BC se aplica el vector BC de módulo igual a la longitud del lado y el vector AC se aplica en el punto M sobre el lado B'C', recíproco de BC. El sistema A'B'C' permanece en equilibrio bajo este estado de cargas. (Cálculos gráficos y dibujos propios)

Los diagramas recíprocos, que se obtienen proyectando ortográficamente dos poliedros recíprocos, se insertan directamente en el estudio de la Estática Gráfica, junto con otra relevante contribución debida al físico e ingeniero escocés William John Macquorn Rankine (1820-1872),<sup>77</sup> cuyo Teorema, que exponemos a continuación, forma parte de los primeros gérmenes de esta teoría desarrollada por Cremona y Culmann fundamentalmente y se encuentran en las propiedades del Polígono de fuerzas, cuyos lados representan (vectorialmente, diríamos en módulo y dirección) un sistema de fuerzas en equilibrio aplicadas en un mismo punto y en las construcciones geométricas que permiten encontrar las tensiones a través de los lados de un polígono funicular plano.

Es Rankine, efectivamente, a quien se debe la aplicación a las estructuras trianguladas, quedando esto claramente demostrado en su extraordinario tratado de Mecánica, "*Manual of applied Mechanics*" de 1858 y del que en 1876 se publicó una traducción al francés.<sup>78</sup>

El estudio de las consideraciones de Rankine nos otorga los últimos elementos básicos para comprender el mecanismo de Las Figuras Recíprocas, que Luigi Cremona ideó para el cálculo de entramados reticulares "Frameworks".<sup>79</sup>

<sup>77</sup> Rankine, William John Macquorn. *A manual of applied mechanics*. Charles Griffin & Company: London and Glasgow 1858.

Fue profesor de Ingeniería civil y de Mecánica en la Universidad de Glasgow y más conocido, quizás, como físico que como ingeniero, por sus estudios sobre la Naturaleza ondulatoria de la luz y la Termodinámica.

<sup>78</sup> Rankine, William John Macquorn. *Manuel de Mécanique Appliée*. Traduit de l'Anglais sur la Septième Édition. Dunot Editeur: Paris 1876. (Ejemplar obtenido a través de <http://gallica.bnf.fr/ark>).

<sup>79</sup> *Framework* es el término inglés relativo a las estructuras trianguladas articuladas, en francés, travures.

. En la Sección de Teoría de las Construcciones, § 148 y ss. de su *Manuel de Méchanique Appliée*, Rankine presenta con precisión las bases para su famoso Teorema, que dividimos en dos análisis: Primero para una estructura de tres barras y Segundo, su extensión a una frame poligonal cualquiera.

En la Fig. 4.32. se representa una estructura triangular compuesta de tres barras A,B,C, articuladas en los nudos 1, 2, 3. Sobre el nudo 1 se aplica una fuerza  $P_1$  en una dirección cualquiera, con las reacciones en 2 y 3,  $P_2$  y  $P_3$ ; las líneas de acción de dichas fuerzas pueden ser paralelas o encontrarse en un punto, como indica la Mecánica.

En virtud de que acciones exteriores y reacciones han de estar en equilibrio para que el sistema lo esté, se pueden representar las fuerzas proporcionales a los tres lados de un triángulo ABC, en el que CA representa a  $P_1$ , AB a  $P_2$  y BC a  $P_3$ .

Como se trata de una frame de dos barras, la fuerza exterior  $P_1$  aplicada en 1 provoca, naturalmente esfuerzos en las dos barras C y A que se articulan en ese punto, siguiendo dichos esfuerzos las direcciones de las barras correspondientes, por lo que podemos representarlos según los lados de un triángulo, respectivamente paralelos a dichas direcciones y de intensidad la magnitud de dichos lados, o sea, los lados OC y OA, paralelos a las barras C y A. OC y OA representan los esfuerzos en las barras C y A.

Asimismo BO representa el esfuerzo en la barra B. Las tres rectas CO, AO, BO, se cortan en el mismo punto O, porque las fuerzas exteriores aplicadas en los extremos de una barra, originan componentes dirigidas según la dirección de dicha barra, iguales y opuestas.

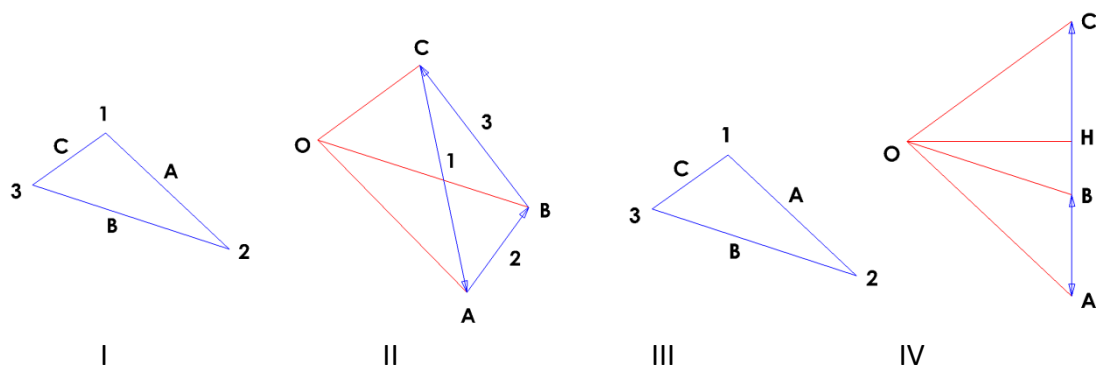


Fig. 4.32. Dibujo de los esquemas de una frame triangular solicitada en el nudo 1 por una fuerza  $P_1$  y las reacciones  $P_2$  y  $P_3$  en los respectivos puntos 2 y 3. A la derecha se ha representado el caso en el que la acción  $P_1$  y las reacciones  $P_2$  y  $P_3$  tienen la misma dirección, es decir, son paralelas entre sí. Es el caso de una cercha con cargas verticales y naturalmente reacciones en los apoyos también verticales. (Dibujos propios, según los conceptos expresados en (Rankine, 1876: 136-150)

El enunciado del Teorema I, resumen de lo expuesto para una estructura triangular, sería:

*“Si tres fuerzas están representadas por los tres lados de un triángulo ( ABC esquema II de la Fig. 4.32. ) y se proyecta desde un punto ( O ) una recta a cada uno de los vértices de este triángulo ( OC, OB, OA ); una estructura triangular cuyas barras sean paralelas a esas tres líneas concurrentes ( 1, 2, 3 del esquema I ) estará en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas, dadas, estando aplicada cada una de estas fuerzas en el nudo donde se juntan las barras que son paralelas a las dos líneas concurrentes que abarcan dicha fuerza ( la fuerza 1 del esquema II aplicada en el nudo 1 del esquema I, etc. ). Las longitudes de las tres líneas concurrentes ( en el punto O del esquema II ) representan los esfuerzos en las barras a las que son respectivamente paralelas.”<sup>80</sup>*

Cuando las tres fuerzas exteriores son paralelas, como sucede habitualmente en los entramados apoyados en los extremos, (cerchas) sometidos a cargas verticales, con reacciones en los apoyos, también verticales, el triángulo de fuerzas ABC (esquema II de la Fig. 4.32) se convierte en una línea recta ABHC (esquema IV) dividido en dos segmentos por el punto B. Si se proyectan rectas OA, OB, OC desde el punto O, y se aplican fuerzas, verticales en este caso, a un entramado triangular 123 (esquema III) con lados paralelos a los OA, OB, OC, las fuerzas BC y AB, serán respectivamente las reacciones en los extremos del entramado 3 y 2, respectivamente y las longitudes OA, OB y OC, serán los esfuerzos en las barras A, B y C.

El Teorema I de Rankine, antes expresado, no es más que el caso más sencillo del Teorema general, relativo a entramados poligonales, con un número cualquiera de barras.

En efecto, sea el entramado A,B,C,D,E, (esquema I de la Fig. 4.33.) compuesto por cinco barras, aunque la demostración es válida para cualquier número. Proyectemos desde el punto O las rectas OA, OB, OC, OD, OE, paralelas a las direcciones de las barras del entramado en lo que podría denominarse “Diagrama de Fuerzas”.

Sobre estas rectas tomamos desde O longitudes cualesquiera, que a determinada escala ( por ejemplo  $E_F: 1\text{cm} / 1\text{Tn}$  ) no sobrepase el esfuerzo máximo que admite el

<sup>80</sup> Hemos realizado la traducción del texto de Rankine, introduciendo notas aclaratorias relativas a la Fig.4.30. El texto original tanto en inglés como en francés, sin las figuras, resulta confuso por repetición de los términos, además de llamar a los esfuerzos en las barras “acciones moleculares” muy propio de la época, en que no se había desarrollado la Resistencia de Materiales.

material de la barra en función de su sección, (en términos actuales, su límite elástico, para impedir deformaciones permanentes), o sea, supongamos que la barra A ( de 1 cm<sup>2</sup> de sección es de acero, de  $\sigma_{lim} = 2.500 \text{ Kg/cm}^2$  ) y tomamos la magnitud  $OA = 2 \text{ cm}$  (que significaría, a la escala elegida un esfuerzo de 2 Tn que originaría un tensión en la barra A,  $\sigma_A = 2.000 \text{ Kg/cm}^2 < \sigma_{lim}$  ) y otras longitudes menores de 2.5 cm sobre las rectas OB, OC, OD y OE, hasta formar el polígono cerrado ABCDEA.

Es evidente que la AB (esquema II de la Fig. 4.33.) será la fuerza que aplicada en el nudo 1 donde convergen las barras A y B del entramado, genera en dichas barras los esfuerzos OA en A y OB en B. Así, BC será la fuerza que aplicada en el nudo 2, donde convergen las barras B y C del entramado, genera en dichas barras los esfuerzos OB sobre B y OC sobre C y así sucesivamente, con lo que podemos enunciar, definitivamente el Teorema II:

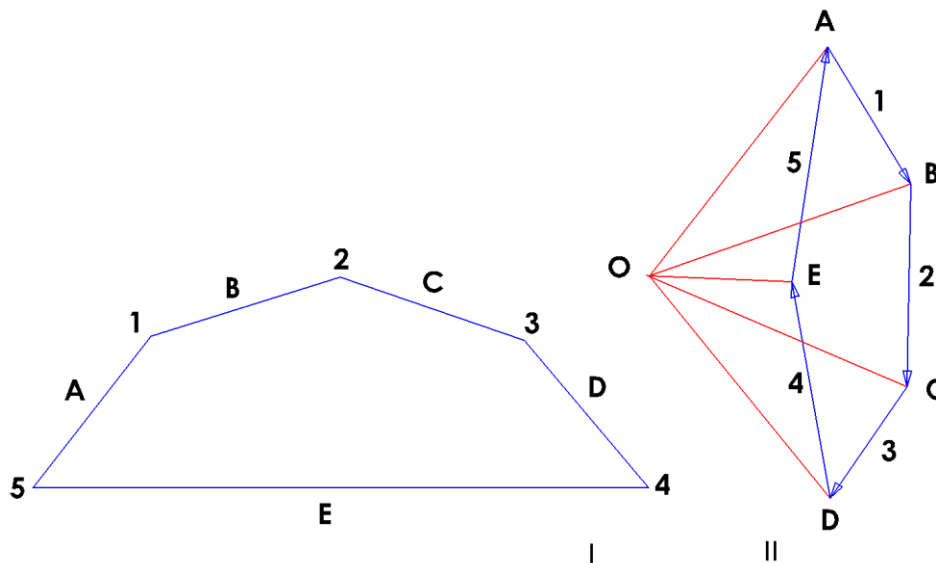


Fig. 4.33. Dibujo de un entramado con cinco barras para la explicación del Teorema II de Rankine, generalizable a cualquier número de barras. (Dibujos propios, según los conceptos expresados en (Rankine, 1876: 148-150)

*“Si se traza desde un punto líneas paralelas a los ejes de las barras de un entramado poligonal, (rectas de direcciones OA, OB,...,OE, del esquema II), los lados de un polígono cualquiera, tal que sus vértices estén situados en dichas rectas concurrentes en O, (polígono de vértices A, B, C, D, E), representan un Sistema de Fuerzas, que aplicadas en los vértices del entramado, quedarán en equilibrio. Cada una de estas fuerzas estará aplicada en el nudo comprendido entre las barras, paralelas a las rectas concurrentes en el punto de partida cuyos extremos abarcan la fuerza en cuestión. Finalmente, las longitudes de las líneas concurrentes en el punto de partida ( O ) representarán los esfuerzos en las barras a las que respectivamente son paralelas.*

Naturalmente, el mecanismo de cálculo grafostático a que da origen el Teorma de Rankine, se aplica a la inversa. Es decir, conocida la geometría del entramado (ABCDE) y las fuerzas actuantes en los nudos,  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$ , podemos determinar los esfuerzos que este sistema de fuerzas genera en las barras del entramado, como se muestra en la Fig. 4.34.

Dado el entramado ABCDE y el sistema de acciones exteriores  $P_1, \dots, P_5$ , es inmediato el trazado de las rectas  $m, n, \dots, t$ , paralelas a las barras  $A, B, \dots, E$ . Como se demuestra en el diagrama de la derecha se puede llevar cualquier magnitud (con la limitación del límite elástico del material de las barras) sobre la primera de ellas,  $m$ , por ejemplo, cerrando el polígono de fuerzas con paralelas a las barras. El resultado correcto de los esfuerzos en las barras generados por el sistema exterior, no es más que una cuestión de escala.

Aunque Rankin no lo explica, (no entra en las propiedades que la Geometría Proyectiva confiere a lo que después de Culmann y Cremona llamamos Polígono de Fuerzas), todos los polígonos inscritos en el haz de rectas radiado desde  $O$ , son semejantes, por lo que es posible comenzar a trazar paralelas a las fuerzas del sistema sollicitación, en cualquier punto de la recta  $m$  y seguir con paralelas hasta cerrar el polígono. La escala a la que se dibujen estas fuerzas es de aplicación también para la medida de los esfuerzos en las barras.

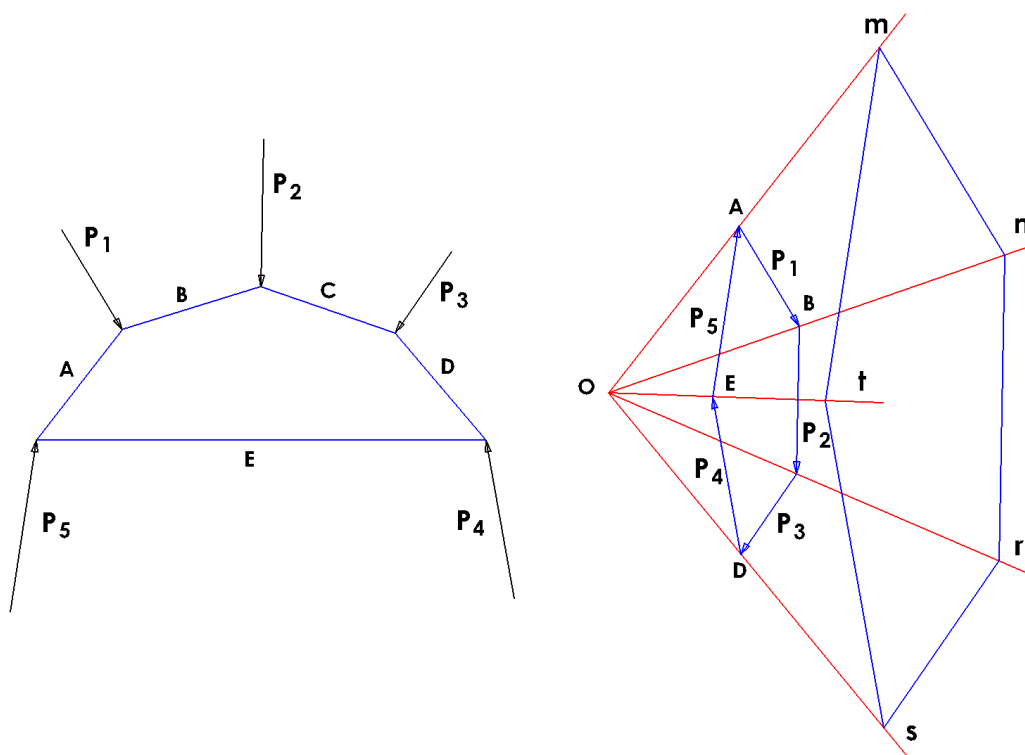


Fig. 4.34. Dibujo explicativo del proceso real grafostático originado por la aplicación de los conceptos de Rankine. (Dibujos y cálculos propios)

En la Fig. 4.36. presentamos la materialización del “Concepto Clave”, a nuestro juicio, de la Teoría de las Figuras Recíprocas. Sin duda se trata del final de un proceso investigador, tras las noticias científicas sobre la Teoría geométrica de los polígonos recíprocos de James Clerk Maxwell y los procedimientos mecánicos de William John Macquorn Rankine.

Cremona lo explica en § XVI *Les projections orthographiques de certains surfaces polyédriques son les figures reciproques relatives aux travures réticulaires*. De su Tratado *Les Figures Réciproques en Statique Graphique*.

En él se pone de manifiesto que considerando dos superficies poliédricas o dos casquetes poliédricos  $S$  y  $S'$  recíprocos, de los que los bordes sean dos polígonos gauchos (no planos) cerrados y siendo  $R$  un poliedro que tiene por base la superficie  $S$ , por vértice el punto  $W$ , tomado arbitrariamente en el espacio y por caras laterales las que están determinadas por planos que pasan por el vértice y los lados sucesivos del borde del casquete  $S$  y siendo  $R'$  el poliedro recíproco de  $R$ , es decir el poliedro limitado por la superficie  $S'$ , el plano polar  $w$  de  $W$  y los planos de los ángulos del borde de  $S'$ . Proyectando ortográficamente los dos poliedros obtendremos dos diagramas recíprocos.

Supongamos que el borde de la superficie  $S$  tiene  $n$  lados y que la superficie tiene  $m$  aristas y  $p$  caras. El poliedro  $R$  tendrá  $n + p$  caras y  $2n + m$  aristas y por consiguiente, el número de vértices será  $m + n - p + 2$ , con lo que  $S$  tendrá fuera de su borde  $m - p + 1$  vértices. Recíprocamente,  $R'$  tendrá  $m + n - p + 2$  caras,  $n + p$  vértices y  $2n + m$  aristas.

Consideremos ahora que la proyección de  $S'$  sea la representación de un entramado reticular que tenga  $p$  nudos y esté formada por  $m$  barras rectilíneas y que el sistema de fuerzas exteriores tengan por líneas de acción las proyecciones de las aristas del borde de  $S'$  y estén representadas en módulo por las dimensiones de los  $n$  lados del polígono proyección del borde de la superficie  $S$ . Entonces la proyección de la cara de  $S'$  que está en el plano  $w$ , será el polígono funicular de las fuerzas externas correspondiente al polo  $O$ , proyección de  $W$ , y las proyecciones de las  $m$  aristas de  $S$ , no pertenecientes al borde del casquete, representarán el valor de los esfuerzos que se generan en las barras correspondientes del entramado, bajo la acción del sistema de fuerzas externas.

Se trata, pues, de dos poliedros recíprocos que proyectamos sobre el plano ortográfico. Hemos intentado dibujar un esquema de estos poliedros en el espacio y sus proyecciones, para mejor aclaración, en la Fig. 4.35.

Hemos obviado la exactitud en la representación en perspectiva de estos esquemas en aras de una más efectiva comprensión de lo especificado.

La dificultad de esta representación radica en la propia definición de los poliedros recíprocos:

Se llaman recíprocos dos poliedros tales que los vértices del uno sean los polos de las caras del otro, por lo que las caras del primero serán porciones de los planos polares correspondientes a los vértices del segundo, y las aristas de uno serán rectas conjugadas de las aristas correspondientes del otro.

Naturalmente, las proyecciones obtenidas sobre el plano ortográfico son figuras duales, también de propiedades recíprocas. A cada lado de la primera figura corresponde un lado paralelo de la segunda, pues dos lados correspondientes son las proyecciones de dos aristas conjugadas de los dos poliedros.

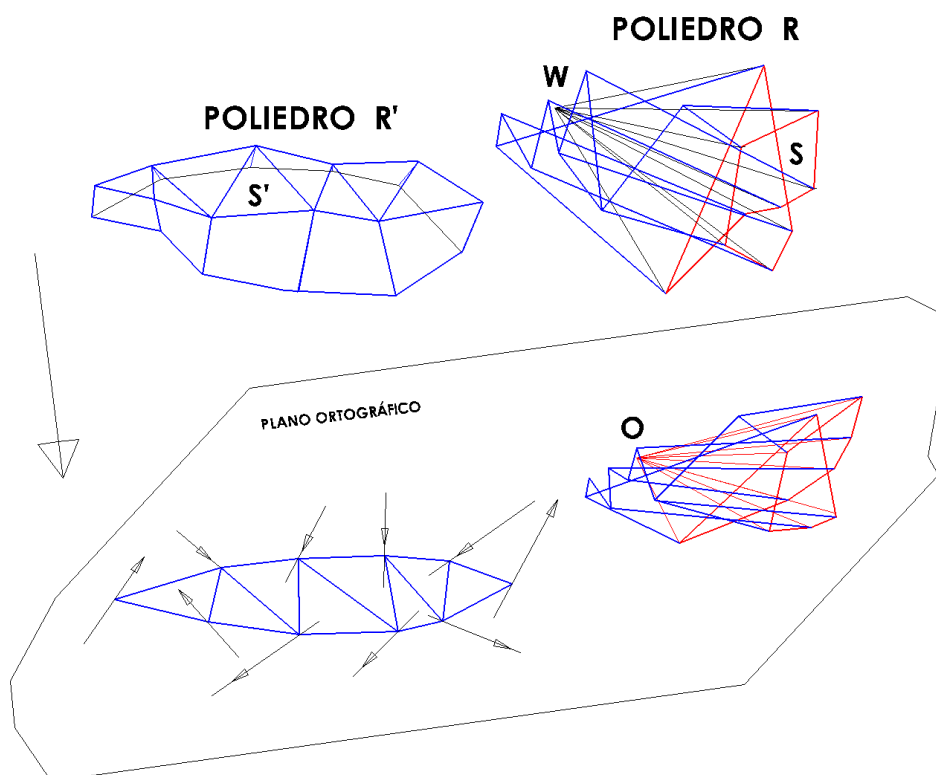


Fig. 4.35. Representación espacial de dos poliedros recíprocos y sus proyecciones sobre el plano ortográfico. Dichas proyecciones son el punto de partida de la metodología expuesta por Luigi Cremona para el cálculo de los esfuerzos en las barras de los entramados. Método de las figuras recíprocas. (Dibujos propios)

Sin entrar en la metodología y sistemática del Cálculo de los esfuerzos en las barras y de las reacciones en su caso, que han sido descritos por la práctica totalidad de los tratados de *Estática Gráfica*, escritos tras *Les Figures Réciproques en Statique Graphique*. Cremona, 1885). Hemos concretado, en la Fig. 4.36. los resultados de dibujar las propiedades de reciprocidad entre las dos proyecciones de los poliedros descritos. Un entramado triangular y su figura recíproca.

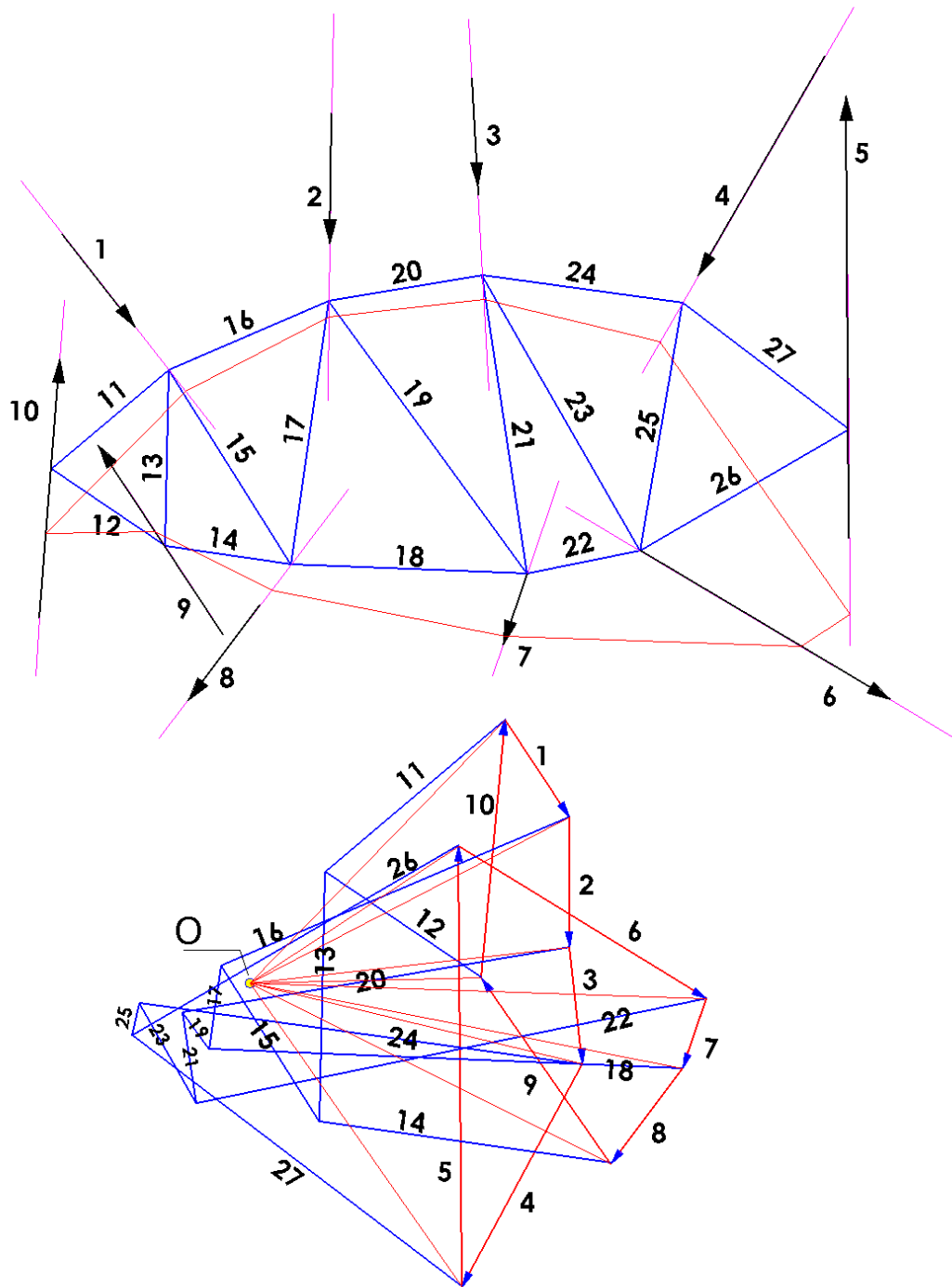


Fig. 4.36. Proyecciones ortográficas de los poliedros R y R' descritos anteriormente y su utilidad para el cálculo de los esfuerzos en las barras del entramado plano que hemos hecho corresponder con la proyección del R'. La utilización de una escala adecuada para longitudes y para fuerzas, permite el cálculo grafostático exacto de los esfuerzos en las barras que hemos numerado. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios).



Reproducimos, a continuación, en las Fig. 4.37. y 4.38. las Planchas IV y V de *Les Figures Réciproques en Statique Graphique* (Cremona, 1885; Pl. IV, V) en las que se muestran distintos cálculos de entramados reticulares y que han sido llevados a la casi totalidad de los posteriores libros de Estática Gráfica. Añadiendo como imagen la de la “Grúa Sansón” Fig. 4.39. exhibida como un importante elemento del Patrimonio Industrial portuario de Cartagena.

CREMONA... Figures réciproques

PL. IV. (Fig. 9-10-11)

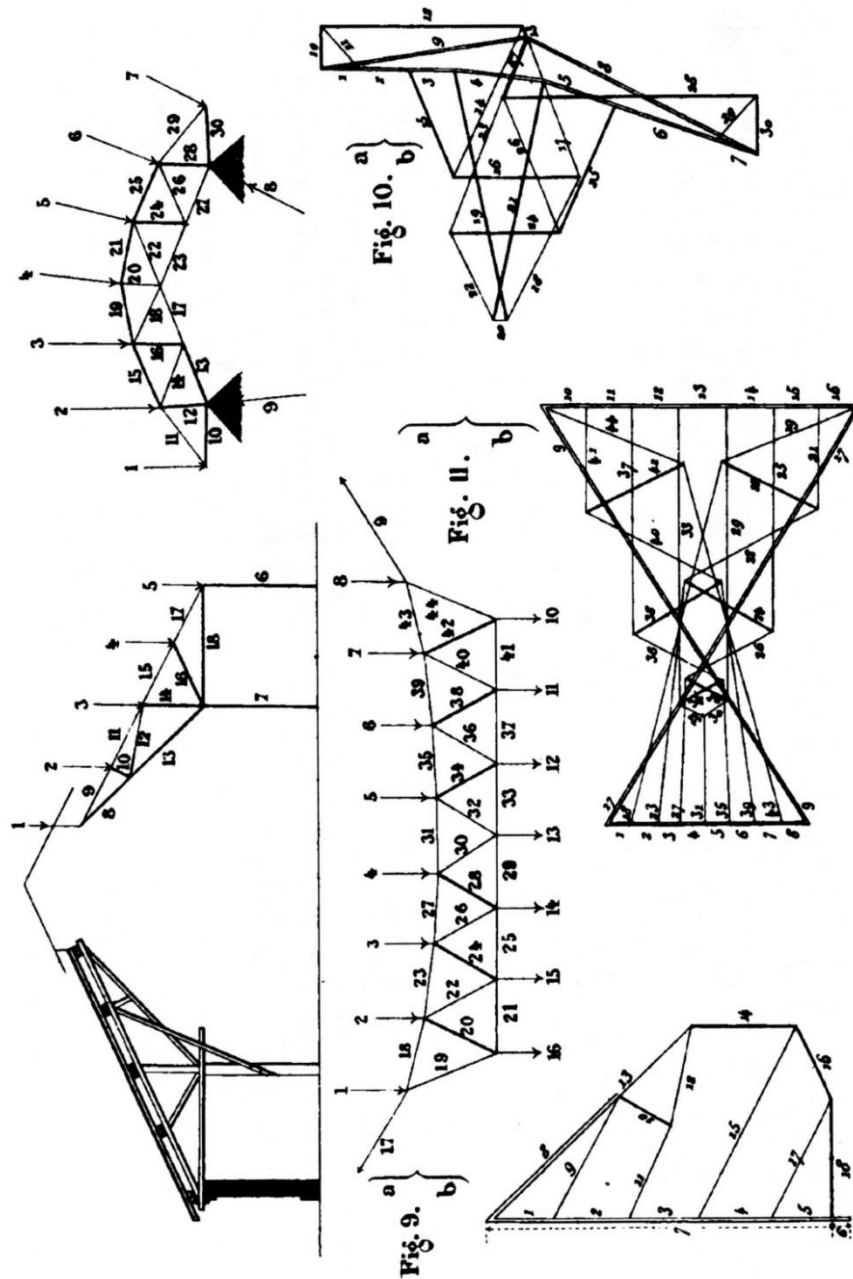


Fig.4.37. Aplicaciones al cálculo de distintos tipos de entramados reticulados. Estos cálculos han sido reproducidos por todos los autores de libros y manuales de Estática Gráfica, durante más de un siglo. (Cremona, 1885, Atlas: Pl. III y IV)

CREMONA. Figuras recíprocas

PL V. (Fig. 12)

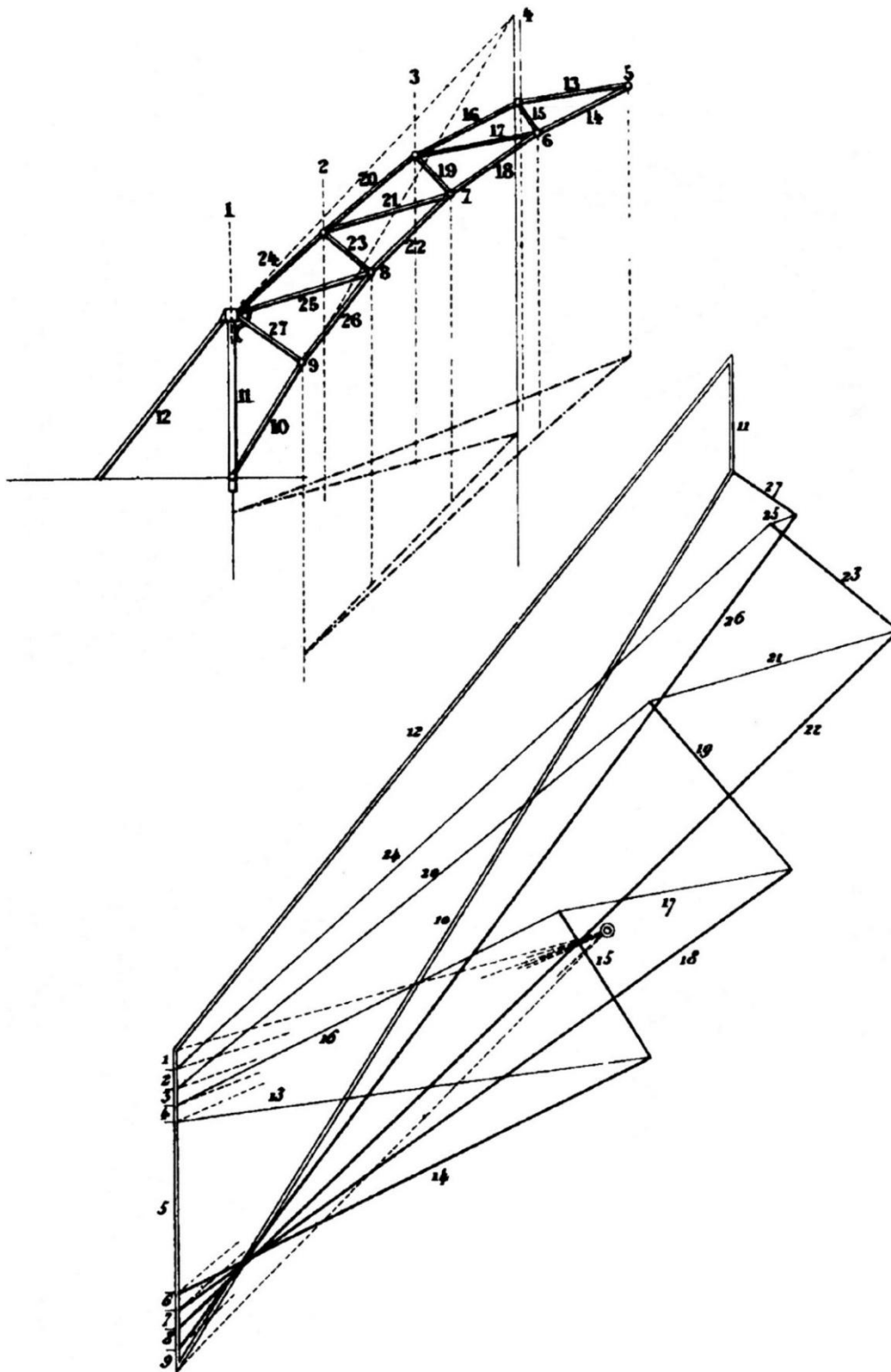


Fig. 4.38. Cálculo de la estructura del entramado de una grúa. (Cremona, 1885, Atlas: Pl. V). El peso propio de máquina y entramado ha sido repartido en los diferentes nudos estando representado por las fuerzas sucesivas 1, 2,...,9, siendo la fuerza 5 el peso eventual que puede levantar la grúa. Volveremos sobre este cálculo en el Capítulo dedicado a Patrones para una didáctica actual de la Grafostática, de esta Tesis.



Fig. 4.39. Grúa Sansón, traída a Cartagena desde Cádiz donde fue construida en 1929. Participó en las pruebas de flotabilidad del submarino de Isaac Peral y en la descarga de muchas de las piezas de artillería del artillado de la costa de Cartagena.

Se encuentra ahora instalada en una de las rotondas de acceso al puerto de Cartagena, naturalmente fuera de servicio, pero mostrando la belleza de las estructuras metálicas, calculada sin duda mediante los procedimientos grafostáticos cuya utilidad actual reivindicamos en esta Tesis Doctoral.

Tal y como venimos analizando en este capítulo, los autores de tratados de Estática Gráfica, tras la obra de Culmann, se decantaron en sus obras por un desarrollo eminentemente práctico, con la expresión de los conceptos que la Mecánica proporcionaba, aplicando los nuevos métodos aprendidos de Culmann y Cremona, obviando la carga teórica de la Geometría Proyectiva, necesaria para la adecuada comprensión del corpus científico que Culmann primero y Cremona casi al mismo tiempo, preconizaban.

Antonio Favaro (1847-1922) ha sido reconocido en la Enciclopedia italiana principalmente como historiador matemático y editor de la obra de Galileo. Pero también era un autor inusualmente prolífico de libros de texto matemáticos y artículos de revisión de otros muchos temas científicos teórico-prácticos relacionados con los primeros. En particular nos interesa su obra relacionada con la Grafostática por sus aportaciones a la misma desde la óptica de la Geometría Proyectiva.

Los temas principales que concentraron su actividad investigadora fueron, junto con la obra de Galileo, de la que llegó a ser un auténtico experto, la Geometría Proyectiva y la Estática Gráfica, profesando auténtica admiración por la obra de Culmann y su trascendencia:

*“...Infatti, dacchè il Culmann, il quale avendo per il primo raccolto in un corpo ben sistemato di dottrine i cardini fondamentali della nuova scienza, ne venne a buon diritto unanimemente salutato il creatore, lesse per la prima volta Statica grafica nel politecnico federale de Zurigo, sono appena trascorsi tredici anni, ed ai nuovi metodi da lui propugnati è già fatto posto nell’insegnamento obbligatorio presso i politecnici di Viena, di Gratz, di Praga, di Monaco, di Stuttgart, di Dresde, di Milano e di Padova, e così da questi istituti escono d’auno in auno a centinaia i giovani ingegneri, che contribuiscono a diffondere vieppiù la studio e l’applicazione.*

*Non è tuttavia a credersi che una così segnalata vittoria sia riportata senza contrasto e che la nuova scienza non abbia avuto e non abbia degli oppositori, i quali non sempre ben formulato gli argomenti, coi quali credono di poterla combattere, esprimono l’avviso che col suo mezzo possa farsi strada nell’insegnamento tecnico un indirizzo troppo meccanico ed in aperta contraddizione cogli scopi, ai quale si tese fino ad ora in questo ramo di istruzione...”*<sup>81</sup>

Favaro explica en qué poco tiempo se ha abierto camino la Estática Gráfica, no sin detractores, a los que está seguro de convencer con sus argumentos, entre otros, con

<sup>81</sup> Favaro, Antonio. *La Statica grafica nell’insegnamento tecnico superiore*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia 1873.

la realidad de los cientos de nuevos ingenieros, que ya han salido de los politécnicos con las nuevas enseñanzas aprendidas. Favaro fue en 1870 primero adjunto y más adelante profesor en la Universidad de Padua, donde dio clase desde 1871 de Estática Gráfica, convirtiendo a Padua en la primera universidad italiana en la que se enseñó.

En 1872, Favaro había publicado un folleto sobre el cálculo gráfico (Favaro, 1872)<sup>82</sup> y un año después, Favaro demostró que, no quería excluir la Geometría Proyectiva de sus trabajos sobre Grafostática, como explica reiteradamente en su extenso artículo, “*La statica grafica nell’insegnamento tecnico superiore*” (Favaro en el que ofrece una muy interesante visión sobre la Estática Gráfica y su relación con el Cálculo Gráfico y con la Geometría Proyectiva. El artículo consta del mismo contenido que la Estática Gráfica de Culmann y es toda una curiosidad que, apenas diez años después de la primera publicación de *Die Graphische Statik*, aparecieran extensas investigaciones históricas sobre la obra de Culmann.

Favaro publicó en 1873 como manuscrito litográfico *Lezioni di statica grafica*, que aparecieron publicadas con impresión litográfica en 1877 y traducidas al francés en 1879 y 1885.<sup>83</sup>

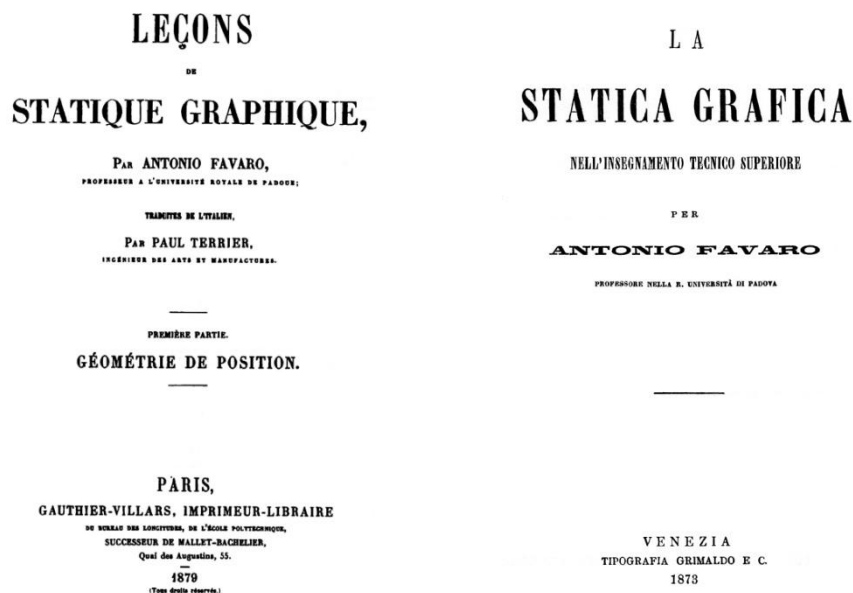


Fig. 4.40. Portadas de la traducción al francés de *La Statica grafica nell’insegnamento tecnico superiore*. (*Leçons de Statique Graphique*) y de *La statica grafica nell’insegnamento tecnico superiore*. (Uno de los más antiguos ejemplares sobre Estática Gráfica con los que contamos. 1873).

<sup>82</sup> Favaro, Antonio. *Sulle prime operazioni del calcolo grafico*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia. 1872.

<sup>83</sup> Favaro, Antonio. *Leçons de Statique Graphique. Première partie. Géométrie de position*, trad. de l’italien par Paul Terrier. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris 1879.

Favaro, Antonio. *Leçons de Statique Graphique. Deuxième partie. Calcul graphique*, trad. de l’italien par Paul Terrier, avec appendice et notes du traducteur. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris. 1885.

En el extremo opuesto de Antonio Favaro, en cuanto a su decantación por la Geometría de Posición como conocimiento necesario para la comprensión de la Grafostática, se encuentra M. Maurice Lévy.

M. Maurice Lévy es el último de los autores que analizamos, bajo la denominación de tratadista de la Estática Gráfica. Aunque no se trata propiamente de un creador como Cremona o Culmann, hemos creído necesaria su inclusión en esta revisión histórica, por haber condensado en su obra *La statique graphique et ses applications aux constructions* (Lévy, 1874) todo el conocimiento que, sobre grafostática, resistencia de materiales y sus aplicaciones a la construcción, era explicado en las distintas escuelas de finales del S.XIX.

Lévy nació en Ribeauvillé, una pequeña localidad del Alto Rin francés en 1838 y sus padres tenían la intención de hacer de él un industrial, por lo que le llevaron a l'École de Chimie de Mulhouse, aunque su enorme predisposición al aprendizaje de las matemáticas les hizo cambiar de idea ampliando sus conocimientos en Sainte-Barbe en 1854, ingresando dos años más tarde en l'Ecole Polytechnique para salir en 1858, como miembro del Cuerpo de Ingenieros de Caminos. (Ponts et Chaussées).

Desde esta época proviene su entusiasmo por la Estática y la Resistencia de Materiales, habiendo desarrollado ya de estudiante una teoría para el cálculo de vigas continuas de directriz recta. Su afición a las matemáticas le lleva a la obtención del grado de Doctor en Ciencias en 1867 con una Tesis sobre coordenadas curvilíneas ortogonales y sobre movimiento de fluidos.<sup>84</sup>

Su tratado *La statique graphique et ses applications aux constructions*, del que tenemos la suerte de contar con un ejemplar de la tercera edición, conservada en magnífico estado en una librería de Buenos Aires, está dividida en tres tomos, correspondientes a tres partes, con sus correspondientes Atlas, que contienen unas maravillosas ilustraciones de los temas, problemas y cuestiones explicadas en el texto.

(I<sup>er</sup> Partie) *Principes et applications de statique graphique pure*. (Ed. Gauthier-Villars, Paris 1907).

(II<sup>e</sup> Partie) *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites*. (Ed. Gauthier-Villars, Paris 1913).

(III<sup>e</sup> Partie) *Arcs. Ponts suspendus. Corps de revolution*. (Ed. Gauthier-Villars, Paris 1918).

---

<sup>84</sup> 1) <http://galenet.galegroup.com>. 2) <http://Annales.org/archives/x/mauricelevy.html>

3) <http://www.archivesnationales.culture.gouv.fr>

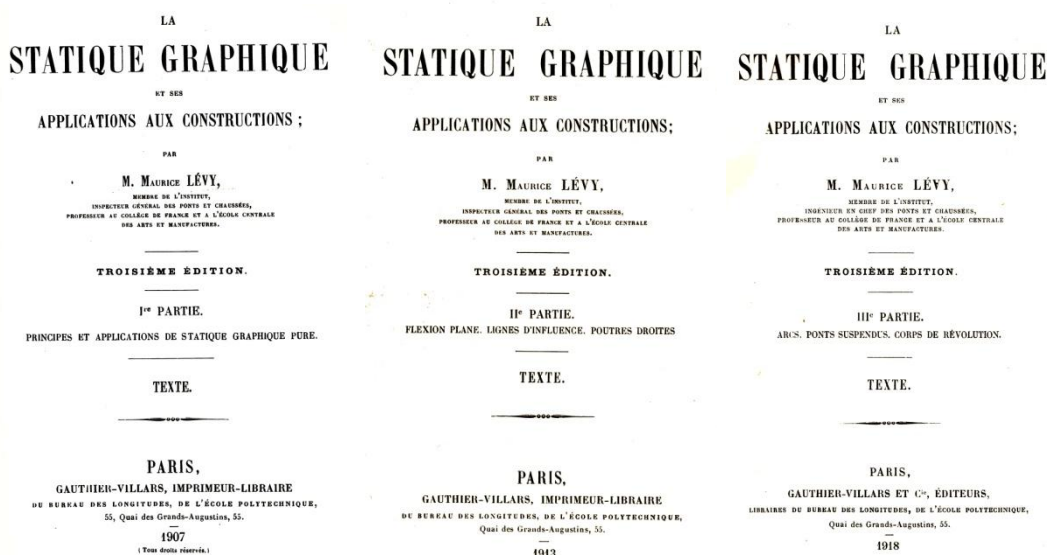


Fig. 4.41. Portadas de los tres tomos del Tratado de Maurice Lévy . Cada tomo contiene al final un Atlas con las construcciones gráficas a las que hacemos referencia.

Maurice Lévy fue un ingénieur des ponts et chaussées (equivalente a nuestros ingenieros de caminos), académico de las Ciencias y científico de renombre internacional <sup>85</sup>. Su tratado editado ocho años después del libro de Culmann, se agota rápidamente en Francia y constituye prácticamente el único documento que, en el periodo 1866-76, trata en Francia el tema de la Grafostática como tema específico. El libro de Lévy es reconocido como un excelente tratado en opinión de Graham:

*“As regards the development abroad, mention et should be made of the labours of Culmann, Cremona Von Ott ; and in a more special manner of those of Maurice Levy, who, on account of the clearness and lucidity of his style, has contributed, perhaps more than any other writer, to the spread of the science of Graphic Statics.”* (Graham, 1883: VIII) <sup>86</sup>

El tratado consta de una primera parte teórica donde se tratan algunas nociones preliminares relativas al cálculo gráfico y una exposición puramente geométrica de los polígonos funiculares y de las figuras recíprocas. Al contrario que Culmann, Lévy no dedica ninguna mención a la Geometría de Posición o Geometría Superior (eran las denominaciones habituales de la época para la Geometría Proyectiva).

<sup>85</sup> Charlton, Thomas Malcom. *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge University Press: Cambirdge 1982.

<sup>86</sup> Graham, Robert Hudson. *Graphic and Analytic Statics in Theory and Comparison*. Crosby Lockwood & Company: London 1883.

En la Fig. 4.42. se representan distintos cálculos de entramados triangulares de la obra de Lévy, en la que se ha utilizado el método de Cremona de las figuras recíprocas. Obsérvese el cálculo de la grúa, prácticamente idéntico al del Tratado de Cremona (Fig. 4.38).

El resto de las figuras presentan cálculos habitualmente analizados en todos los tratados de Grafostática, que a su vez no son más que variaciones más o menos importantes de los originales de Culmann o Cremona, que sirvieron de pauta para que los distintos autores posteriores clasificaran sus ejercicios en unos u otros tipos de estructuras trianguladas resueltas, para guía de estudiantes y profesionales.

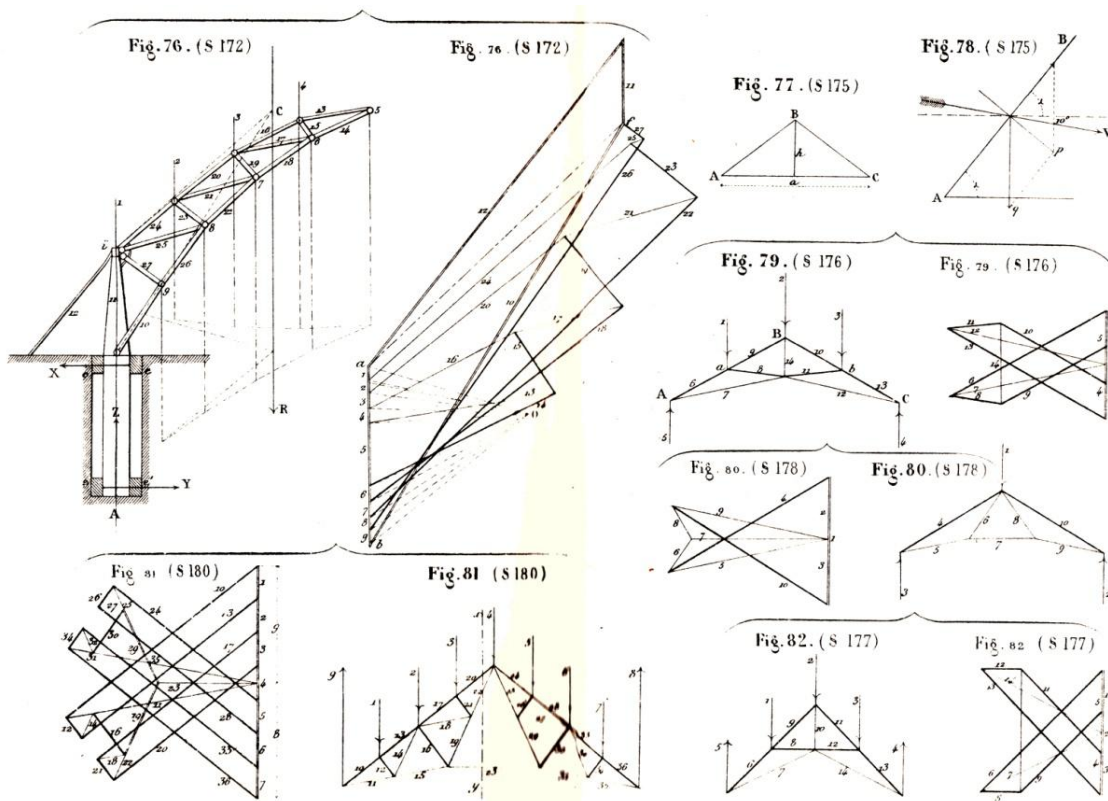


Fig. 4.42. Plancha XVIII del Atlas de la Parte I (Levy, 1907, Atlas: Pl. XXVIII).

En la Fig. 4.43. hemos reproducido la Plancha XXXVI del Atlas de la Parte III en la que se representan un plano a escala, para el cálculo del entramado del puente construido por Eiffel sobre el río Duero en Oporto. (Levy, 1918, Atlas: Pl. XXXVI), que aún se conserva, aunque sin el uso ferroviario para el que se construyó. No nos consta que Maurice Lévy calculara ni interviniera en la construcción del Puente de María Pía, aunque le presta buena atención en su tratado, como entramado para puentes.



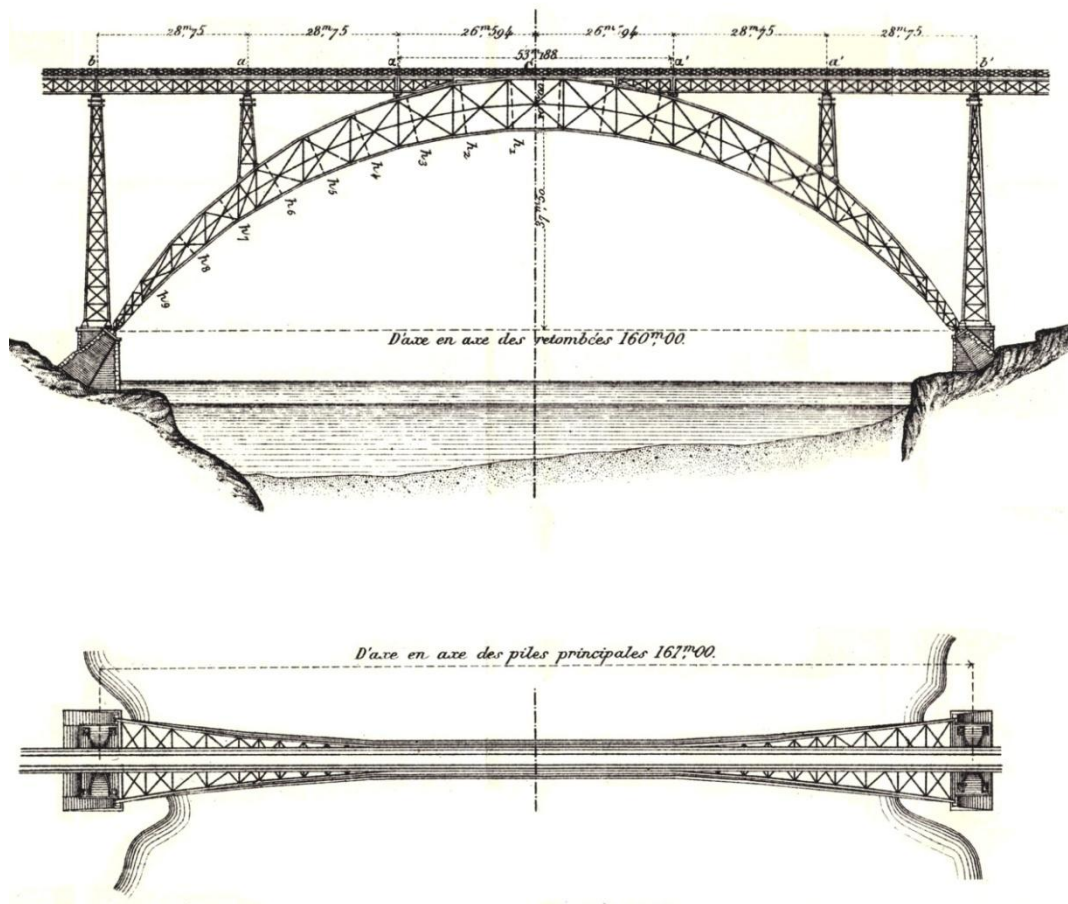


Fig. 4.43. Plancha XXXVI del Atlas de la Parte III en la que se representan un esquema para el cálculo del entramado del puente construido por Eiffel sobre el río Duero en Oporto. (Levy, 1918, Atlas: Pl. XXXVI)



Fig. 4.44. Imagen del puente de entramado metálico María Pía, sobre el Duero en Oporto. (D.P.)



Fig. 4.45. Detalle de las estructuras trianguladas metálicas del arco, las pilastras y el tablero superior. (D. P.)

La Fig. 4.44. muestra en primer término el puente concebido por el ingeniero Théophile Seyrig y construido por la empresa de Gustave Eiffel entre 1876 y 1877. En el último cuarto del siglo XX el puente ya no respondía a las necesidades actuales. Con una sola línea y sólo permitía ir a 20 km por hora, con cargas muy pequeñas.

Está abandonado desde la apertura del puente São João, en 1991, que aparece en segundo plano en la fotografía. El puente de María Pía fue el primero que unió ambos márgenes del Duero en Oporto.

Lévy, plantea en el tercer volumen de su obra, dedicado a Arcos, Puentes suspendidos y Cuerpos de revolución, dos Notas finales, la primera de las cuales dedica a la *Determinación directa de Arcos de Igual Resistencia*.<sup>87</sup>

El estudio se realiza para arcos simétricos de carga y de forma y en el § 3 nos muestra la Aplicación al Arco del Puente del Duero en Oporto del que nos comenta:

*“Ce magnifique ouvrage, récemment établi sur le Douro, à Porto, est dû, comme on sait, à deux constructeurs français, MM. Eiffel et Seyrig. Les chiffres que nous donnons relativement à cet ouvrage sont empruntés à une remarquable Note de M. Seyrig”.*<sup>88</sup>

<sup>87</sup> Lévy, M.Maurice. *La Statique Graphique et ses Applications aux Constructions. Troisième Édition. III<sup>e</sup> Partie. Arcs, Ponts Suspendus, Corps de Révolution*. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>, Éditeurs: Paris 1918.

<sup>88</sup> Nota de, Lévy, donde ensalza la arquitectura del Puente de María Pía y agradece los datos facilitados a Seyrig.

El arco de este precioso puente, llamado de María Pía, es de forma circular, tiene 160 m de luz, 37.5 m de flecha en el intradós y 10 m de altura en la clave. Se apoya en dos estribos de mampostería mediante rótulas, que evitan los empotramientos.

Sostiene una viga continua triangulada superior, que descansa en los extremos sobre dos pilares (b y b' en el dibujo), que a su vez asientan sobre las pilastras-estribo, cimentadas sobre el terreno y sobre los montantes (a, a',  $\alpha$  y  $\alpha'$ ) que apoyan sobre el arco mismo.

El arco que constituye el puente se compone de dos arcos iguales que para que puedan oponer más resistencia al viento, están situados en dos planos inclinados en relación al plano vertical que pasa por el eje del tablero, de manera que su separación de 15 m en los arranques, no es más que de 4 m en el eje de la clave. Cada arco, está formado por tableros en cruz de San Andrés y montantes verticales.

El estudio que Lévy realiza con el modelo del Puente sobre el Duero en Oporto se basa en la teoría por él desarrollada del cálculo del sólido de igual resistencia para una carga vertical simétrica. Cualquiera que sea la carga y el arco, la línea de presiones pasa por las dos articulaciones A y B del arco de la Fig. 4.46. y teniendo en cuenta lo que constituye el Teorema Fundamental:

*“Si a los diversos elementos de un arco de sección y elasticidad constantes o variables, sometido a cargas cualesquiera (verticales o no) apoyado sin empotramientos en rótulas fijas A y B, situadas a nivel o no, se le aplican fuerzas ficticias  $[M / E \cdot I] ds$ , paralelas a la cuerda AB, dirigidas en un sentido arbitrariamente convenido o en el contrario con M positivo o negativo. Su resultante coincide con la cuerda AB.”* (Se desprecia el esfuerzo cortante y la compresión de la fibra media)

La componente  $u$  del desplazamiento elástico de un punto cualquiera de la fibra media de coordenadas  $x$  e  $y$ , viene dada, si se aplica al punto B de ordenada cero por la ecuación:  $u = \int \frac{M}{EI} y ds$  integral que está tomada a lo largo de todo el arco AB y como el punto B es fijo, se tendrá que  $u = 0$  con lo que si  $\int \frac{M}{EI} y ds = 0$  significa que la suma de los momentos de las fuerzas ficticias  $\frac{M ds}{EI}$  paralelas a la recta AB, con respecto a cualquier punto de ella misma es nula. Lo que indica, aplicando el Teorema de Varignon que el momento de la resultante es también nulo, por lo que dicha resultante coincide en dirección con la recta AB. Si el arco tuviese módulo de elasticidad constante  $\int \frac{M}{EI} y ds = 0$  quedaría  $\int \frac{M}{I} y ds = 0$  y si su sección fuese constante, el teorema se aplicaría a fuerzas ficticias  $M ds$  quedando  $\int M y ds = 0$

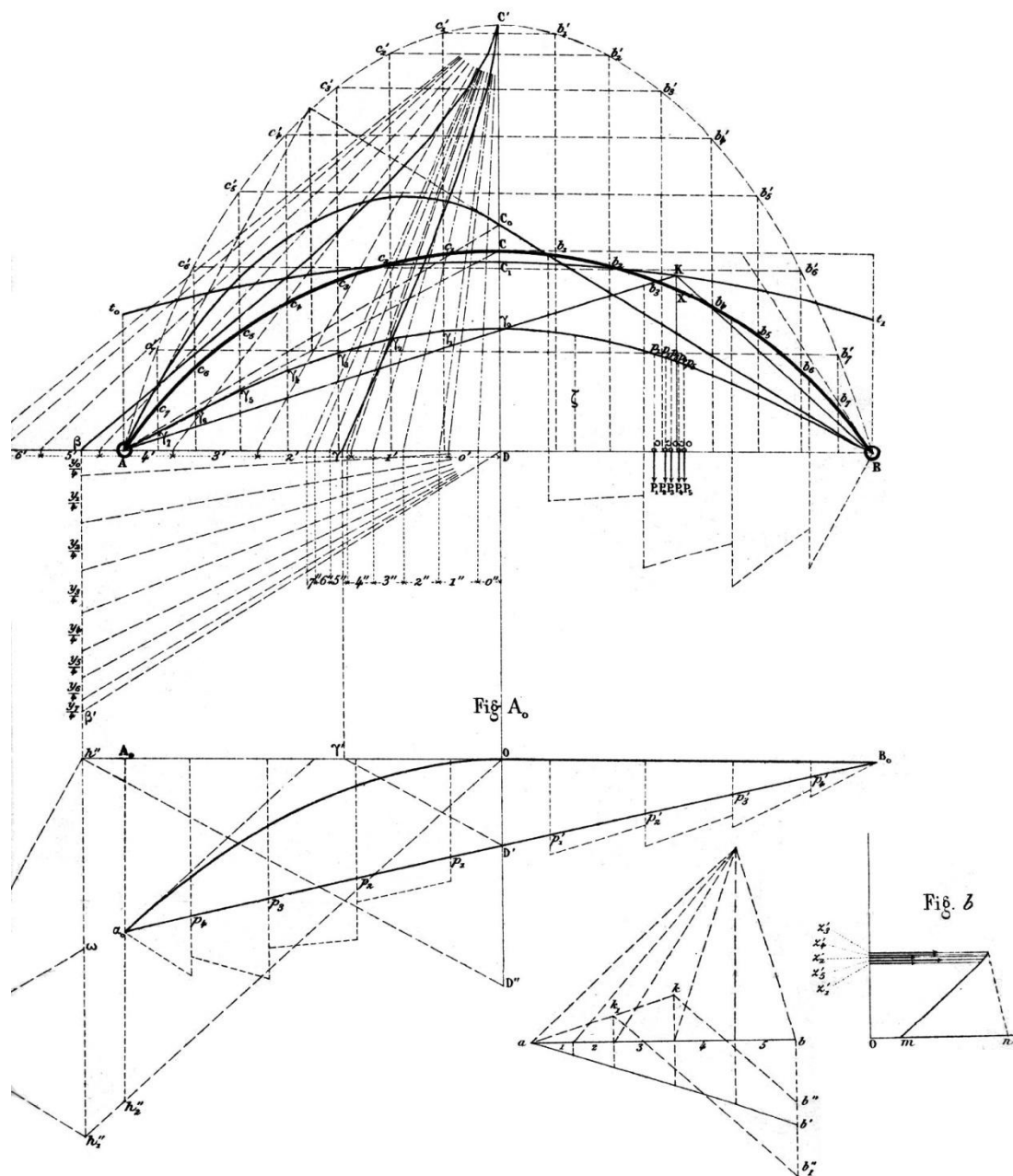


Fig. 4.46. Aplicación a un arco circular ACB de sección constante, una luz y una flecha igual al Puente de María Pía, del cálculo grafostático del Empuje y del Polígono de presiones.

Los cálculos grafostáticos tienen en este caso que ser apoyados por los cálculos analíticos, por lo que se alejan del objetivo principal de nuestra Tesis. No obstante tienen el gran valor de mostrar unas técnicas, nuevas para su época capaces de sustituir todo un complejo cálculo analítico.

## 5. EL CÁLCULO GRÁFICO Y LA GEOMETRÍA DE POSICIÓN. ELEMENTOS NECESARIOS PARA LA ESTÁTICA GRÁFICA

### 5.1. PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS VERSUS GEOMÉTRICOS

Como hemos desarrollado en el capítulo anterior, los autores de los diversos tratados sobre Estática Gráfica, se dividieron según dos corrientes, que llevaron a unos a la aplicación práctica de los procedimientos de cálculo grafostático, que se iban conociendo y generalizando, a través de los originales de Culmann y Cremona y sus clases en sus escuelas técnicas, como en el caso de Karl von Ott,<sup>1</sup> y otros, que estuvieron más interesados en el conocimiento científico del origen de dichas aplicaciones como es el caso de Antonio Favaro.<sup>2</sup>

En ambos casos el Cálculo Gráfico fue el instrumento primero y fundamental que se aplicaron a conocer y utilizar para el desarrollo de la Grafostática.

Todos los autores que escribieron sobre Estática Gráfica, comienzan sus obras con varios capítulos sobre el Cálculo Gráfico. El propio Culmann, antes de introducir en su *Die Graphische Statik* (Culmann, 1866) o su traducción francesa *Traité de Statique Graphique* (Culmann, 1880), las cuestiones mecánicas de representación y manejo de fuerzas, dedica cuatro capítulos al Cálculo Gráfico, integrados en la *Première Partie* del *Traité*:

*Chap. I.- Opérations sur les lignes.* (Sumas, multiplicación y división de segmentos, raíces, potencias etc.).

*Chap. II.- Logarithmes et Règles à Calcul.* (La aplicación de sumas, restas, etc. de segmentos como, logaritmos, era la inmediata aplicación de las operaciones con segmentos del primer capítulo, conduciendo la suma de logaritmos al logaritmo de un producto, etc.)

*Chap. III.- Transformation des Surfaces.* (Aplicación de construcciones geométricas, bien conocidas desde la antigüedad para la medida de superficies, de aplicación en Arquitectura e Ingeniería).

*Chap. IV.- Transformation des Volumes.* (Cálculo de volúmenes para medición de desmontes y terraplenes y cálculo gráfico de terraplenados).

Lo que sí dividió a los sucesores de Culmann fue el conocimiento de la Geometría Proyectiva, imprescindible (coincidimos con Culmann, Cremona o Favaro) para el conocimiento científico de la Estática Gráfica.

---

<sup>1</sup> Ott, Frank von. *Die Grundzüge Des Graphischen Rechnens Und Der Graphischen Statik*. Ed. corregida y aumentada J. G. Calve'sche K.K. Hof: Prag 1879. Reimpresión Nabu Press. 2010.

<sup>2</sup> Favaro, Antonio. *La Statica grafica nell'insegnamento tecnico superiore*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia 1873.

El Análisis y la Geometría ocuparon durante muchos siglos el espacio de las Matemáticas y la cuestión de los valores y utilidades respectivos de las dos ciencias dio lugar a delicadas controversias. Especialmente significativos son estos debates en la época en que encuadramos nuestra investigación, es decir el S.XIX, aunque ya se habían producido diferencias, especialmente desde que François Viète <sup>3</sup> tiene la idea de representar curvas y superficies mediante expresiones algebraicas.

Dado que no existe una solución absoluta al dilema de si Geometría o Análisis y en aras de centrar nuestra investigación en un periodo tan fecundo de la historia de la Ciencia, sólo señalaremos que en éste, la Geometría, en especial gracias a la Geometría de Posición, le ganó terreno al Análisis dentro del mundo de la investigación matemática. Fue puesto de manifiesto el interés de los analistas en transformar los problemas en ecuaciones, despejando, mediante ciertas transformaciones, una serie de combinaciones de símbolos que expresan la clave de la solución al problema planteado, aunque su misma perfección metódica como medio de búsqueda, perjudicaba su eficacia como instrumento de cultura intelectual. <sup>4</sup>

La razón de ser los procedimientos analíticos, que devienen, de alguna forma, de la mecánica, no tarda en perder de vista los orígenes de los que procede, avanzando a través de un laberinto de fórmulas sin perder el hilo conductor, pero con la inconsciencia del desconocimiento del camino que se está recorriendo. Por otra parte, siguiendo las ajustadas observaciones de Poincot, <sup>5</sup> no es extraño que los resultados a los que conduce el Análisis terminan escondidos entre la generalidad de los símbolos algebraicos o con la dificultad de ser descubiertos con menor nitidez que la del enunciado del que provienen. No hay una visión clara del problema y su solución.

La Geometría actúa de una manera totalmente distinta, presentando sus proposiciones de una forma bien diferente, escondiendo a nuestra vista las transformaciones intermedias, mostrando las transformaciones que resuelven el problema, desde el planteamiento hasta la resolución, sin pérdida de los procedimientos intelectuales que conducen a la solución siempre en presencia del enunciado mismo, expresando una solución que parece expresar la más absoluta simplicidad, como diciendo....¿Cómo no te habías dado cuenta... si ya te lo había explicado en el enunciado?...Era la solución más simple. (Favaro, 1873: 10)

---

<sup>3</sup> Viète, François. *Opera mathematica, recognita Francisci a Schooten*. Joseph Hofmann: Leyden 1646 . Reed. Hildesheim, Nueva York, 1970.

<sup>4</sup> Favaro, Antonio. *La Statica Grafica nell’Insegnamento Tecnico Superiore*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia 1873.

<sup>5</sup> Lapparent, A. de. *Louis Poincot (1777-1850). Livre du Centenaire de L’École Polytechnique*. Société des amis de la bibliothèque de L’École Polytechnique: Paris 1897.

Un gran número de propiedades geométricas pueden ser demostradas, bien con la ayuda de trazados puramente teóricos, bien sin ayuda de ninguna representación material. En uno y otro caso, el pensamiento suple la ausencia de figuras y elimina su imperfección, dado que ningún dibujo alcanza la precisión de la expresión de un concepto geométrico. (Piequet, 1872: Pref.)<sup>6</sup>

Esta imperfección resulta tanto más inconveniente cuanto más precisión se le requiere a la Geometría en relación con sus aplicaciones prácticas. Es necesario en este caso rigor y limpieza en el trazado de líneas y la determinación de intersecciones, en la extracción y aplicación de medidas; es necesario, en una palabra, aproximarse tanto como sea posible a esa perfección absoluta que es la esencia de los conceptos y demostraciones geométricas. (Aoust, 1869: Intr. XIV)<sup>7</sup>

Las Matemáticas y la Geometría (todavía no hablamos de Geometría de posición) en la época del nacimiento y desarrollo de la Estática Gráfica (segunda mitad del S. XIX) habían adquirido un desarrollo muy importante, sobre todo en los niveles de escuelas preparatorias a los Politécnicos en Europa en general y por la bibliografía consultada, en Francia y Suiza en particular.

Ambas se estudiaban conjuntamente y constituían una porción fundamental de la formación académica. Mostramos en la Fig. 5.1. una imagen de las pag. 90 y 91 del *Journal de Mathématiques Elementaires*<sup>8</sup>; una publicación plagada de ejercicios de Matemáticas y Geometría, con dos niveles uno “elemental” y otro “superior”, que como reza en su portada estaba destinado a todos los candidatos a escuelas del Gobierno y aspirantes al Bachillerato en Ciencias.

En ambas páginas se muestra el enunciado y resolución de un problema de Geometría, que a juicio del profesor que lo plantea, no ofrece ninguna dificultad, siendo interesante su discusión.

---

<sup>6</sup> Piequet, M. *Étude géométrique des systèmes punctuels et tangentiels des sections coniques*. Gauthier-Villars: Paris 1872.

<sup>7</sup> Aoust, M. l'abbé. *Discours de réception de M. l'abbé Aoust, professeur de mathématique à la Faculté des Sciences de Marseille*. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Marseille. Séance publique du 5 juin 1859.

Aoust, M. l'abbé. *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris 1869. (<http://www.archive.org/>).

<sup>8</sup> *Journal de Mathématiques Elementaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au Baccalauréat ès Sciences*. Publié sous la direction de MM. J. Bournet, De Longchamps et Lucien Lévy. Librairie Ch. Delagrave: Paris 1886. (<http://www.archive.org/>)

No estamos tan seguros, como el profesor, de la simplicidad del ejercicio, aunque sí de la belleza del mismo y lo que nos importa a los efectos de nuestra investigación es el alto nivel del conocimiento impartido en la época, en los institutos franceses. Algunos de los ejercicios de Geometría, Matemáticas y Geometría Descriptiva planteados en el nivel superior son verdaderamente complicados.

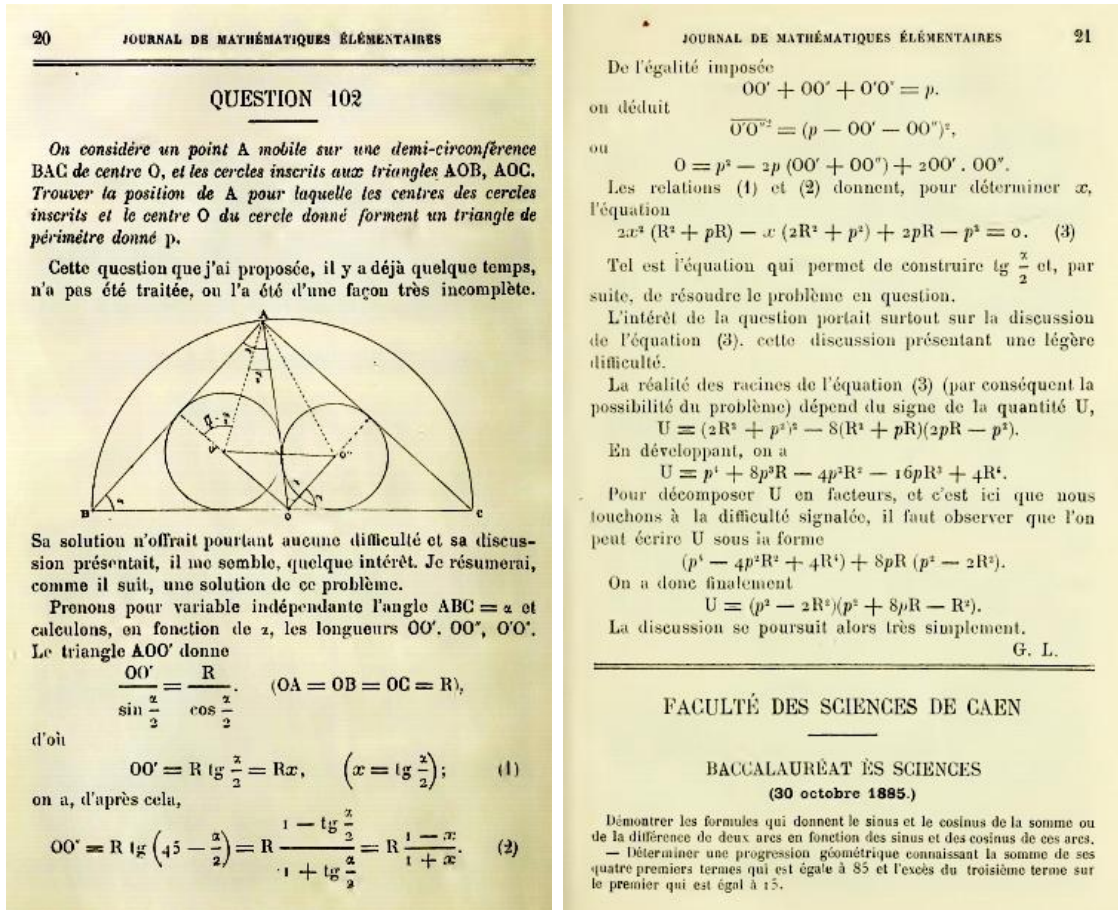


Fig. 5.1. Planteamiento de un problema geométrico, publicado en *Journal de Mathématiques Elementaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au Baccalauréat ès Sciences*.

En este ambiente geométrico-matemático, de gran nivel, el Cálculo Gráfico vino a significar un cierto alivio a los técnicos y estudiantes de carreras técnicas, que habían permanecido sometidos a la dura disciplina que hemos analizado.

Algunos de los temas de dificultad, que hoy no percibimos, acostumbrados a las posibilidades de nuestras actuales calculadoras o programas de cálculo, fueron inteligentemente resueltos mediante el Dibujo y los conocimientos geométricos, a los que, como es natural, ningún arquitecto o estudiante renunciaba.

En la génesis de la Estática Gráfica están el Cálculo Gráfico y la Geometría Proyectiva. De sus conceptos fundamentales para la Grafostática nos ocupamos en los siguientes apartados de esta Tesis.



## 5.2. EL CONOCIMIENTO DE LA GEOMETRÍA Y EL DIBUJO APLICADOS AL CÁLCULO

Barthélémy-Édouard Cousinéry, en su obra *Le calcul par le trait*,<sup>9</sup> advierte que el arte del dibujo conduce a estos resultados:

*“El dibujo es el lenguaje del arquitecto. Traduce su pensamiento con una claridad que el lenguaje ordinario nunca alcanzaría. Dibuja primero todo lo que se propone ejecutar y fija y conserva así la forma perceptible de sus ideas, el resultado de sus cálculos y hasta los trazos dejados por sus titubeos, que pueden servir en muchos casos para la recuperación del camino abandonado. No espera en ningún caso a que sus cálculos hayan acabado para comenzar la traducción gráfica, ocurriendo habitualmente ambas operaciones al mismo tiempo e incluso sucede a menudo que durante la ejecución del diseño, aparece la necesidad de modificar los cálculos o el propio diseño”. (Ver Fig. 5.2)*

Los orígenes del cálculo gráfico se confundieron con las representaciones gráficas, consideradas en el sentido en que se entendían por los matemáticos en el S. XIX que estudiamos. Se podrían encontrar estos orígenes en la Aritmética de los pitagóricos; en el quinto libro de *Los Elementos* de Euclides, donde la teoría de las proporciones es ampliamente expuesta y donde se hace uso de las rectas como símbolos o en otras muchas proposiciones también de los mismos "*Elementos*".<sup>10</sup> Aparecen también vestigios en cantidad de soluciones mecánico-gráficas transmitidas por los griegos, como la trisección de un ángulo, habiendo llegado hasta nuestros días en los distintos manuales de construcciones geométricas, ésta última, con la conciencia clara de la imposibilidad de realizarla con regla y compás o con procedimientos suficientemente aproximados, teniendo en cuenta los instrumentos de dibujo empleados en la época. (Ver Fig. 5.3)

Se podría seguir el desarrollo continuo de los métodos gráficos después de los griegos. Entre los hindúes destacan Brahmagupta o Bhaskara, entre los árabes Mohammed-ben-Mousa, Aboul Wefa, Aboul Djoud u Omar Al-Khayyami,<sup>11</sup> gran constructor de las ecuaciones cúbicas.

---

<sup>9</sup> Cousinéry, Barthélémy-Édouard. *Le calcul par le trait, ses éléments et ses applications à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, à l'interpolation graphique et à détermination, sur l'épure, de l'épaisseur des murs de soutènement et des murs de culée des voutes*. Carilian-Goeury et V. Dalmont: Paris 1840. (Digitalisierungszentrum der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen)

<sup>10</sup> Euclides Opera Omnia, I.L. Heiberg & H. Menge (editors).(1883-85) Nueva edición en griego e inglés, en <http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html>.

<sup>11</sup> Rashed, R. & Vahabzadeh, B. *Al-Khayyam mathématicien, sa vie, son oeuvre*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard: Paris 1999.

Woepcke, F. *L'algèbre d'Omar Al-Khayyam*. (<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k995262>)

Mostramos en la Fig. 5.2. una de las Planchas del libro de Cousinéry, *Le Calcul par le trait*, en la que aparecen algunas de las construcciones geométricas, conocidas desde la antigüedad, como las basadas en la proporcionalidad de segmentos determinados sobre dos rectas concurrentes cortadas por un haz de paralelas y en la Fig. 5.3., unos instrumentos de dibujo habituales en el S. XVIII.

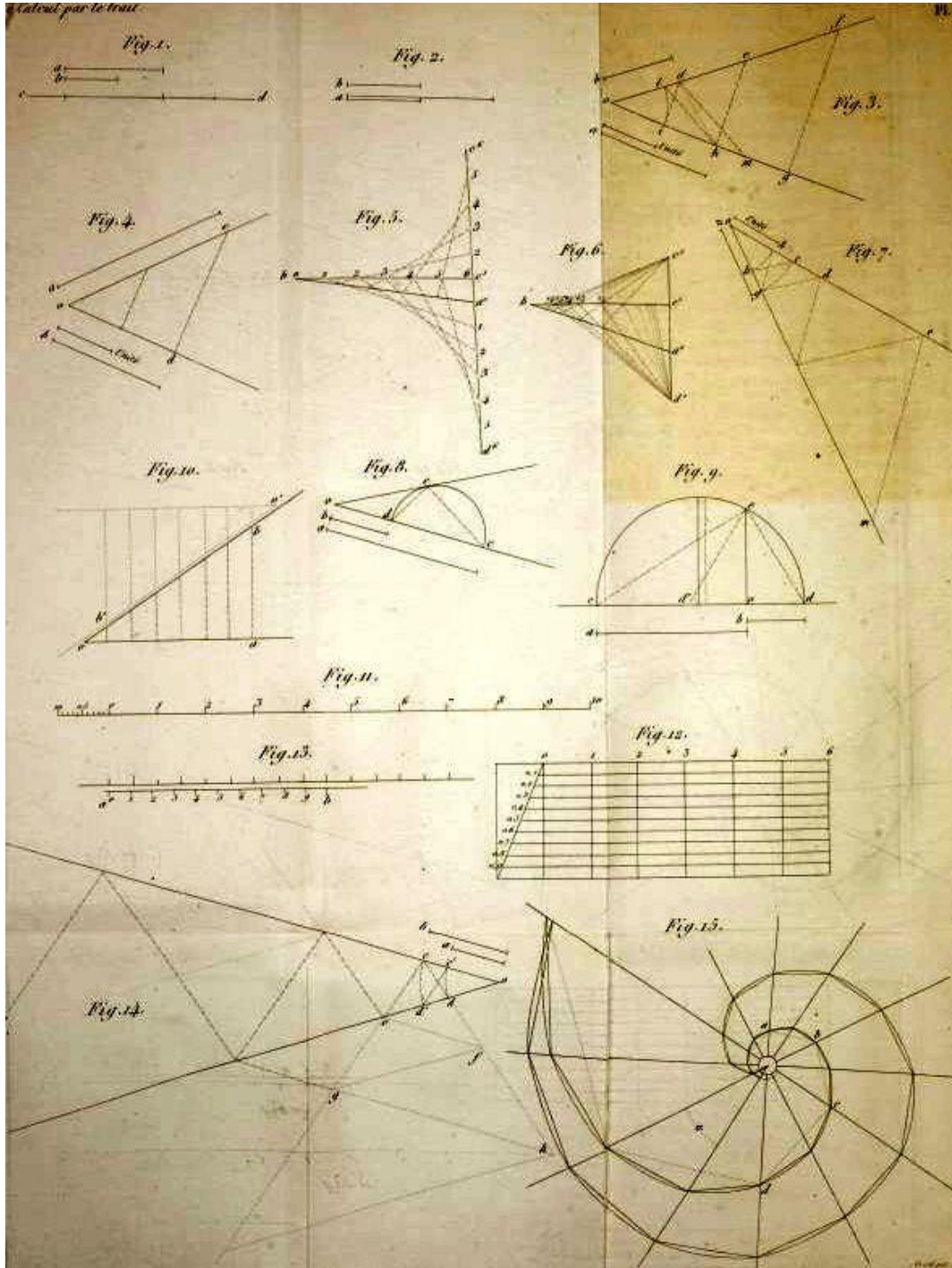


Fig. 5.2. Plancha I de *Calcul par le trait*, de Barthélémy-Édouard Cousinéry, (Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen)

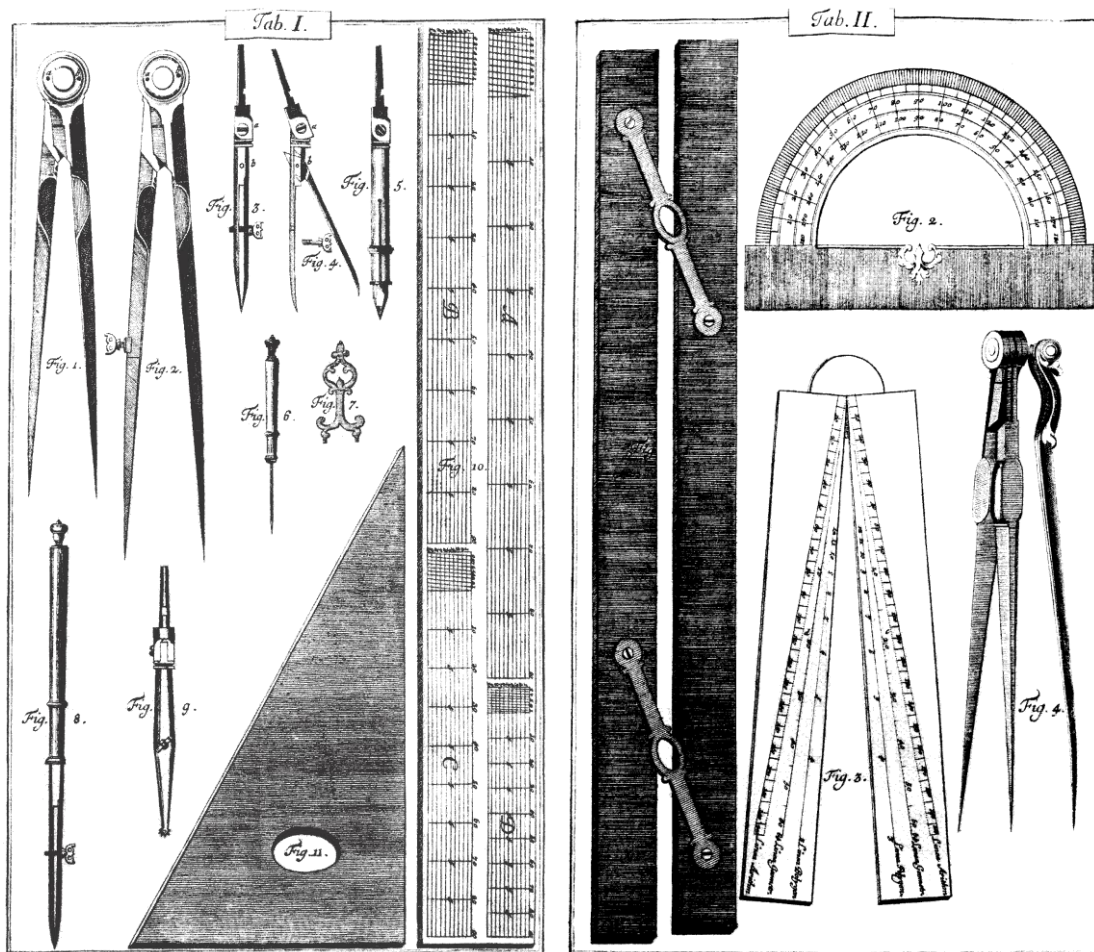


Fig. 5.3. Instrumentos usuales de dibujo en el S.XVIII. (Penter 1723)

La fórmula de Brahmaghupta <sup>12</sup> es una de las más conocidas relaciones entre las geometrías griega e hindú. Incluso es fácilmente demostrable la relación de esta expresión, que calcula el área de un cuadrilátero cualquiera inscrito en una circunferencia con la conocida fórmula de Herón, para el cálculo del área de un triángulo.

$$\text{Area} = [(S-p).(S-q).(S-r).(S-s)]^{1/2}$$

Donde  $S = (p+q+r+s)/2$  Semiperímetro del cuadrilátero.

La expresión del área de un triángulo de Herón de Alejandría que determina el área de un triángulo

$$\text{Area} = [S.(S-a).(S-b).(S-c)]^{1/2}$$

Donde  $S = (a+b+c)/2$  Semiperímetro del triángulo.

<sup>12</sup> La relación entre las matemáticas griega e hindú es analizada por W. Dunham, *Journey through Genius*, Penguin Books, London 1991.

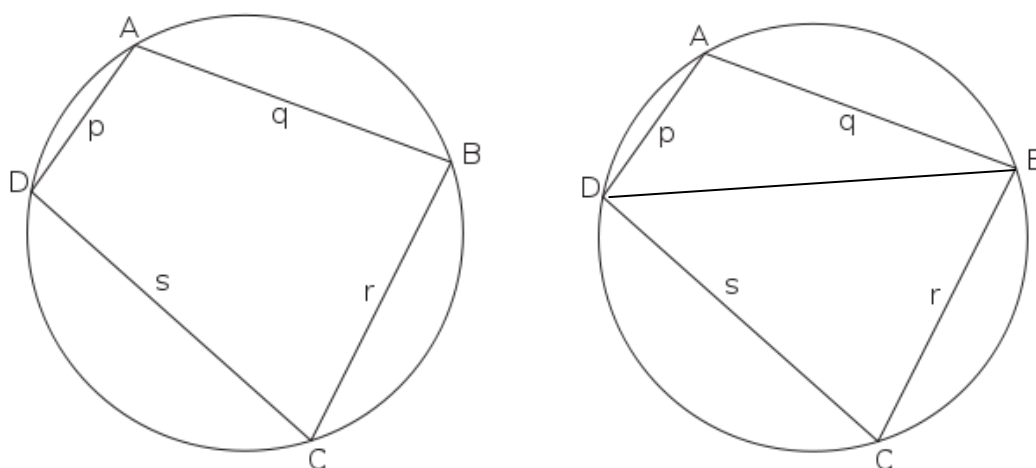


Fig. 5.4. Esquema de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia cuyo área se calcula fácilmente con la fórmula de Brahmagupta. O mediante la utilización dos veces de la fórmula de Herón. Son equivalentes.

Cultivados en Italia, tras la decadencia de los árabes, los métodos gráficos florecieron con Leonardo Pisano <sup>13</sup> y Luca Pacioli, <sup>14</sup> que imprimieron nuevas fuerzas al análisis geométrico de Tartaglia y Cardano.

La *Summa* de Pacioli es una recopilación de la matemática de su tiempo, operaciones aritméticas con la nueva numeración indo-arábiga, suma, resta, multiplicación, división y raíces cuadradas. Aplicaciones sencillas de la Geometría de Euclides y aplicaciones prácticas como resolución de problemas que llevan a ecuaciones algebraicas de primero y segundo grado. En sus aplicaciones geométricas se percibe con claridad que había traducido "*Los Elementos*" de Euclides, que ya analizamos en el apartado 3.1. de esta Tesis.

Los estudios sobre las relaciones geométricas entre los distintos elementos de poliedros regulares, ya señalan la concepción espacial y ponemos especial atención en las proyecciones ortogonales sobre el plano de su base de tetraedros y pirámides, que, a fin de cuentas, constituyen una primera aproximación a las teorías proyectivas de las que se ocuparía la Geometría, como en los inicios de la perspectiva usada en el Renacimiento. La idea de proyectar sobre el plano del cuadro los haces de rectas que concurren el ojo del observador y pasan por cada uno de los puntos del espacio que configuran el objeto a representar.

<sup>13</sup> En relación con la división geométrica de las figuras de Leonardo Pisano (Fibonacci) ver R.C.Archibal*Euclid's Book on the Division of Figures with a restoration based on Woepck's text and on the Practica geometriae of Leonardo Pisano.* Cambridge 1915, pp. 4-9.

<sup>14</sup> Pacioli Luca. *La Divina Proporción*, Ediciones Akal, S.A. 1991. Traducción del original publicado en Venecia 1494.

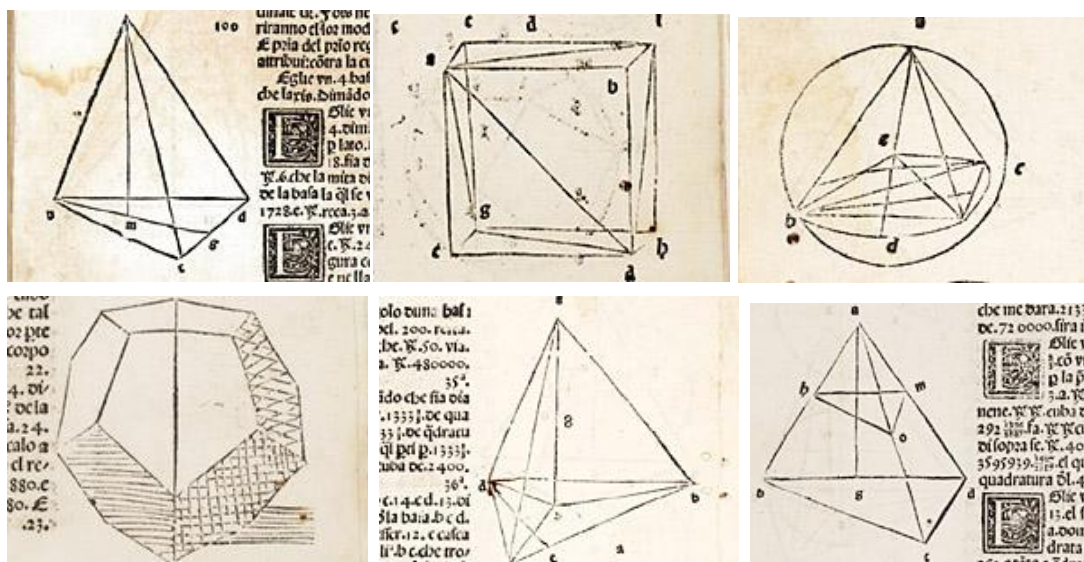
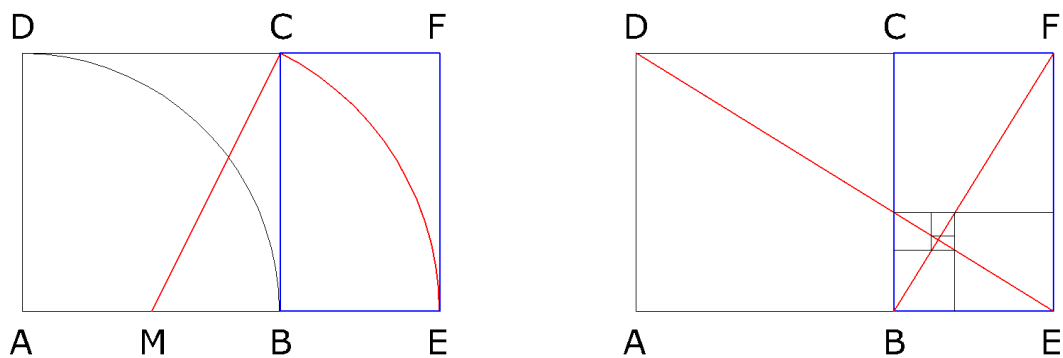


Fig. 5.5. Diversas ilustraciones del libro de Pacioli *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, editado en Venecia en 1494.

La *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità*, suponía la gran ventaja de reunir en un solo libro prácticamente todo el saber de la época. Sin él no se hubieran producido los avances que los matemáticos inmediatamente posteriores nos legaron, sobre todo en *Álgebra*, materia que caracterizó la matemática del Renacimiento. En su otro gran libro *De Divina Proportione* aplica la divina proporción a la división de un segmento en dos partes tales que el todo sea a la mayor como la mayor es a la menor. En nuestro lenguaje simbólico, si tomamos como unidad la longitud de un segmento, y este lo dividimos en dos partes,  $a$  y  $1 - a$ , podemos expresar la divina proporción como:  $1/a = a/1-a$ , ecuación de segundo grado  $a^2 + a - 1 = 0$  cuya solución es el famoso  $\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ , algunas de cuyas propiedades geométricas se muestran en el esquema que hemos dibujado.



$$AB = AD = 1 \quad AE = AM + ME = 1/2 + ME$$

$$ME^2 = MC^2 = MB^2 + BC^2 = (1/2)^2 + 1^2 = 1/4 + 1 = 5/4$$

$$ME = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2 \quad AE = 1/2 + \sqrt{5}/2 = (1 + \sqrt{5}) / 2 = \Phi$$

### 5.3. LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

#### 5.3.1. LA APARICIÓN DE LA NUEVA GEOMETRÍA

Gracias a los trabajos de J. V. Poncelet,<sup>15</sup> la decantación a favor de la Geometría prevaleció sobre el Análisis en la primera mitad del XIX y no digamos en la segunda mitad con la aplicación práctica de sus derivadas a los cálculos mecánicos de extraordinaria trascendencia en el cálculo sencillo de estructuras elementales extendidos con la complicidad de la Resistencia de materiales.

Esta prevalencia es debida en gran parte a los trabajos de J.V. Poncelet, cuya influencia no ha sido nunca, en la historia de la Ciencia, tan significativa. Sus enunciados, tan seguidos y no contestados por las autoridades académicas del siglo XIX como con los modernos métodos introducidos por él, encontrando sus seguidores un guía sólido y seguro incapaz de defraudar con inconsistencia alguna la confianza científica de su inspirador y conductor.

Poncelet encabeza, en efecto, uno de los más grandes movimientos científicos del S. XIX. en el área de las aplicaciones matemático-geométricas que condujo a la Estática Gráfica, objeto de nuestra Tesis Doctoral.

*“Poco a poco los conocimientos algebraicos llegarán a ser menos indispensables y la ciencia, reducida a lo que en verdad debería ser”.*

Expresión demostrativa de las presunciones de inverosimilitud a que fueron sometidos los seguidores de estos nuevos métodos científicos y a los que los aplicaron. Él entrevió la unión que llegaría a darse entre las más puras teorías geométricas y la práctica cuando subtitula su *Traité des propriétés projectives des figures: Ouvrage utile a ceux qui s’occupent des applications de la Géométrie descriptive et d’opérations géométriques sur le terrain*. (Poncelet. 1822) Mostramos en la Fig. 5.20. la portada de la edición de 1922 del *Traité des propriétés projectives des figures* y de una recopilación posterior *Applicatons d’Analyse et de Géométrie qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, que contiene siete manuscritos de Poncelet durante su cautiverio en Rusia.<sup>16</sup>

*...“La extensión de los cálculos y la complicación de las ecuaciones, apenas permiten entender las simplificaciones en otras hipótesis...Las fórmulas no son ellas mismas más que una de las razones por las que la ciencia de la*

---

<sup>15</sup> Poncelet, Jean Victor. *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire: Paris 1922.

<sup>16</sup> Poncelet, Jean Victor. *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*. Bachelier: Paris 1840.

*construcción reclama una solución fácil y exacta a la vez, de manera que la complicación desaparezca, en su mayor parte, cuando se ensaye ... .. la Geometría” (Poncelet, 1840: 101).<sup>17</sup>*

La historia de la Ciencia de la primera mitad del XIX está repleta de hechos que establecen la acción recíprocamente ejercida, con gran ventaja para la Geometría, entre la teoría y sus aplicaciones prácticas, proceso a su vez invertido o realimentado, siendo éstas las que requerían nuevos esfuerzos entre los investigadores teóricos. Un buen ejemplo de esta especie de interrelación o mutua influencia, lo encontramos entre la Geometría de Posición y la Estática Gráfica. Este brillante resultado, no se obtuvo de forma sencilla. La nueva Grafostática encontró detractores que le reprochaban fundamentalmente conducir a una parte de las enseñanzas técnicas, por caminos exclusivamente manuales, llevándolas por vías contrarias a las de los orígenes convenidos para ellas.

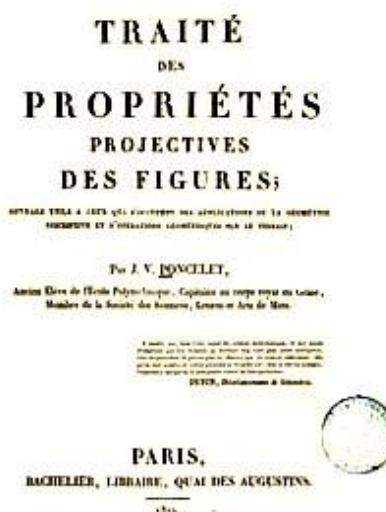
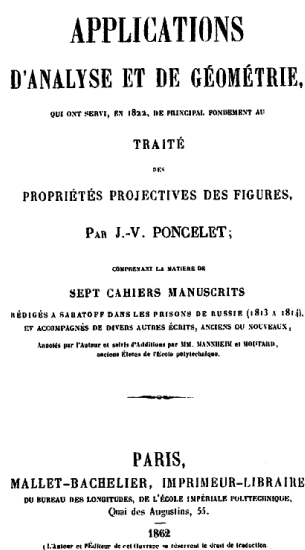


Fig. 5.6. Portada del libro *Applicatons d'Analyse et de Géométrie qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures* (1868) que recogió los manuscritos de Poncelet, escritos durante su cautiverio en Rusia, que originaron el *Traité des propriétés* de 1822.

Es evidente que sucedió entonces lo mismo que en cualquier otra época de la historia del conocimiento, que la aparición de nuevos métodos origina la puesta en duda de su validez por la consagrada superioridad de los antiguos, poniéndose en entredicho incluso la denominación de “método” que comporta un cierto corpus doctrinal, concediéndose por los más benévoloos la denominación de “procedimientos” y a sus prosélitos se les ve como soñadores. El mismo Poncelet vio como se calificaba

<sup>17</sup> Poncelet, Jean Victor. *Applicatons d'Analyse et de Géométrie qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*. Mallet-Bachelier Imprimeur-Libraire: Paris 1862.

su Geometría moderna de “romántica”, siendo con el transcurso del tiempo entronizado como “fundador”. O como sucedió con el ilustre matemático británico, gran especialista en matrices y teoría de números, J. J. Sylvester, cuando expresaba:

“... lo imaginario y lo inconcebible entrarán pronto en los dominios de la Matemáticas..”

viendo el autor de estas palabras, en vida, cumplida holgadamente esta atrevida profecía.<sup>18</sup>

Así sucedió, pues, con la Estática Gráfica, que, en poco tiempo, se impuso en casi todos los países, tras las oposiciones iniciales ya comentadas.

En Suiza, en el Politécnico de Zürich, el propio Culmann imparte un curso especial obligatorio.

En Austria se imparte en escuelas de Viena, Praga (perteneciente al Imperio Austro-Húngaro hasta la creación en 1918 de Checoslovaquia, tras la I G.M.), Gratz y Brunn. En Viena, además de su introducción de la Estática Gráfica en los cursos obligatorios de Mecánica y Construcción, se creó un Curso Facultativo Especial de Estática Gráfica. En Praga y Gratz se impartían cursos obligatorios para todos los alumnos de las Escuelas Técnicas.

En Italia se imparten cursos obligatorios de Estática Gráfica en el Instituto Técnico Superior de Milán, en la Escuela Técnica anexa a la universidad de Padua, en las escuelas técnicas de Roma , Nápoles, Turín, Bolonia y Palermo y en las universidades de Pavía y Pisa.

En Alemania se impartían dos cursos de Estática Gráfica en Berlín, uno, obligatorio de Mecánica en la Gewerbe-Akademie y otro, curso especial facultativo en la Bau-Akademie, en Aix-la Chapelle, Carlsruhe, Darmstadt y Munich. En Dresde, se empieza a enseñar en cursos sobre puentes y ferrocarriles y en Hanover y Stuttgart en los cursos de Mecánica. Siendo prácticamente obligatoria la enseñanza de la Estática Gráfica en las Escuelas Técnicas de todo el país.

En Rusia, al cabo de varios años de ser enseñanza común en otros países, comenzó a estudiarse en la Escuela Politécnica de Riga, también con curso obligatorio.

En Dinamarca se comienza a impartir en la Escuela Politécnica de la Universidad de Copenhague en el año escolar 1876-77, diez años después de la aparición de la primera edición de *Die Graphische Statik* de Culmann.

---

<sup>18</sup> Sobre la vida y obra del insigne matemático británico J.J. Sylvester (1814-1897) ver Parshall, Karen Hunger. *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters*. Clarendon Press: Oxford 1998.



En Estados Unidos, el eminente físico Henry Turner Eddy, <sup>19</sup> profesor de la Universidad de Cincinnati y Minnesota y autor de varias publicaciones sobre Estática Gráfica enseña en ambas universidades tras haber pasado por el Phisikalische Institute de Berlín y la Sorbona en París.

A la vista de la universal acogida que tuvo la Nueva Geometría de Poncelet y como consecuencia la Estática Gráfica de Culmann, que había surgido, fundamentalmente, de las aplicaciones que supo hacer éste, de la Geometría Proyectiva de aquél, cabe plantearse qué elementos de la Geometría Proyectiva fue necesario analizar por Culmann o Cremona para el desarrollo de la Estática Gráfica.

Analizaremos, a continuación, dichos elementos, después de una pequeña revisión de la significativa acogida que a la Geometría Proyectiva le concedió el mundo científico, en particular el de los matemáticos, porque de dicha acogida se deriva también la que se le concedió a la Estática Gráfica, con la salvedad de que aún siendo rechazadas, como veremos en algunos casos, se imponía, al menos en el caso de la Grafostática, por la agilidad de sus aplicaciones, versus la complicación de los desarrollos matemáticos.

---

<sup>19</sup> Eddy, Henry Turner. *Neue Constructionen Aus Der Graphischen Statik*. Teubner: Leipzig 1880 (Reed. Kessinger Publishing: Whitefish, Montana, U.S. 2010)

### 5.3.2. FRANCIA. CUNA DE LA NUEVA GEOMETRÍA

El caso de Francia, merece atención aparte, por haber sido cuna de la moderna Geometría de posición y sin embargo no parece acoger con la misma prontitud y generosidad que otros países importadores de los nuevos tratados geométricos a la Estática Gráfica.

Entre 1827 y 1830, Poncelet había enseñado en Metz a los militares de la “École de l’artillerie et du génie”, un curso de máquinas que impartía al mismo tiempo que en el Ayuntamiento explicaba, ante artesanos y obreros, Mecánica Industrial. En esas lecciones en las que el Cálculo Infinitesimal estaba totalmente ausente, el profesor abordó, entre otras, cuestiones relativas al equilibrio y a la estabilidad de los cuerpos, desarrollando un método de Cálculo Gráfico de las tensiones de las cuerdas que componían el polígono funicular formado al suspender una serie de pesas en distintos puntos. Se trataba en este caso de pesas, es decir de fuerzas verticales y paralelas.

En 1840 con ocasión de un curso en la Sorbona, reincide dando una solución gráfica para un polígono funicular originado no por pesos como en Metz, sino por fuerzas con direcciones cualesquiera, adoptando para resolverlo la misma solución que los promotores de la Estática Gráfica utilizarían años más tarde.

La inclinación por los tratamientos gráficos de cuestiones relativas a los polígonos funiculares no parece ser debida únicamente a la contrastada pasión de Poncelet por los procedimientos gráficos en general, sino que más bien se inscribe en un contexto tecnológico particular: El desarrollo de puentes suspendidos, originarios de los EE.UU. e introducidos en Francia a partir de 1820 después de haberlos adoptado los ingleses.

En definitiva, un puente colgado está compuesto por dos cables metálicos atirantados por barras que soportan los pesos del tablero y los pesos propios de los elementos que circulan por él. Cada cadena o cable metálico constituye así un polígono funicular en el sentido material del término y la introducción de este tipo de obras en Francia viene acompañada de varios estudios donde el polígono funicular es estudiado y resuelto por procedimientos analíticos por Lamé y Clapeyron<sup>20</sup> en 1828, Jullien<sup>21</sup> en 1837 o Michal<sup>22</sup> en 1839.

---

<sup>20</sup> Lamé, Gabriel / Clapeyron, Benôit-Paul-Émile. *Mémoire sur la construction des polygones funiculaires*. Journal du génie civil, 1 (1828), p. 496-504.

<sup>21</sup> Jullien, Pierre. *Note sur quelques propriétés du polygone qu’affecte la chaîne d’un pont suspendu*. Annales des ponts et chaussées. (1837) 1<sup>er</sup> semestre, p. 133-167.

<sup>22</sup> Michal, Zoroastre Alexis. *Notes sur quelques propriétés des polygones funiculaires, en équilibre sous l’action de poids uniformément repartis sur une ligne horizontale. Application à la construction et au calcul des éléments du polygone qu’affecte la chaîne d’un pont suspendu*. Annales des ponts et chaussées. (1839) 1er semestre, p. 133-167.

Se comprende, pues, que entren en competencia los procedimientos gráficos y los consagrados cálculos analíticos, no siendo aquellos aceptados plenamente en Francia hasta que es difundida la publicación de la obra de Culmann, en los años 1870.

Tres periodos jalonan la historia de la acogida de la Estática Gráfica en Francia a partir del último tercio del S.XIX:

Un primer periodo de diez años, desde 1866, fecha de la publicación de la obra de Culmann, *Die Graphische Statik*, hasta 1876, durante el cual la Estática Gráfica permanece prácticamente desconocida. Excepción hecha de la publicación en 1874 de la primera edición de *La estatique graphique et ses applications aux constructions* de Maurice Lévy, ingeniero de puentes y calzadas (equivalente a nuestros ingenieros C.C.P.), científico de renombre internacional y futuro académico, cuya obra, aparecida ocho años después del tratado de Culmann, tras una parte teórica donde se encuentran algunas nociones preliminares relativas al cálculo gráfico y una exposición puramente geométrica de los polígonos funiculares y los polígonos de fuerzas (en el sentido de la geometría clásica, de triángulos semejantes, etc.).

Lévy, al contrario que Culmann, no incluye en su tratado ningún tema relativo a la Geometría Proyectiva, que será un factor común a casi toda la producción francesa en materia de estática gráfica, como en otros muchos casos de otros países en que se obviará, en muchos tratados su procedencia y razón fundamental de ser, en aras de explicaciones de los métodos de cálculo de las materias que le son propias, como ya hemos analizado.

Un segundo periodo, desde 1877 hasta la mitad del decenio siguiente en el que los franceses se familiarizan con la nueva ciencia, esencialmente con la aparición de una serie de traducciones y la publicación de producciones nacionales. A éste pertenece, entre otros, la traducción del italiano que Paul Terrier, ingeniero civil y antiguo alumno de la École central des arts et manufactures, hace del primer volumen del tratado de E.G. de Antonio Favaro, profesor de la Universidad de Padua, en 1879. Este primer volumen está consagrado a la *Géométrie de position*.

Asimismo, Louis Bossut, Capitán de Ingenieros, traduce, con trece años de retraso respecto a la edición original, en 1885 el clásico, ya en aquellos años, libro *Les Figures Réciproques en Statique Graphique* de Luigi Cremona.<sup>23</sup>

---

<sup>23</sup> Los Tratados de Estática Gráfica de Luigi Cremona, con sus respectivas contribuciones a la Geometría de Posición y el de M. Maurice Lévy, que prácticamente la obvia, ya han sido considerados en el Capítulo 4 de esta Tesis Doctoral.

Un tercer periodo comienza hacia 1885 y se prolonga hasta los primeros años del S. XX y marca el final de la excepción francesa en materia de Estática Gráfica. Autores franceses escriben varios tratados y la introducen masivamente en las enseñanzas técnicas como parte integrante de la Resistencia de Materiales, acabando la original oposición entre análisis y procedimientos geométricos.

El hecho de que la Estática Gráfica fuese difundida en Francia y como más adelante veremos en España, por ingenieros civiles, versados en su práctica, así como el hecho de que sea enseñada principalmente en los cursos de Resistencia de Materiales, son en sí mismo indicios de la manera en que los franceses conciben este método de cálculo gráfico.

La Estática Gráfica no tiene enemigos declarados y todo el mundillo politécnico está de acuerdo en que las técnicas gráficas permiten resolver de una manera simple y elegante con la exactitud necesaria la mayor parte de las cuestiones a las que se enfrenta el arquitecto o el ingeniero dentro del cálculo de estructuras sencillas en el quehacer cotidiano de la construcción. Contrariamente a lo que sucede con el cálculo numérico, que puede verse afectado fácilmente por errores, estos nuevos procedimientos gráficos presentan la enorme ventaja, de poder tener numerosas verificaciones visuales durante el proceso de cálculo, circunstancia ésta, sobre la que ya hemos incidido en la introducción de nuestra Tesis en el sentido de la utilidad de la Grafostática cuando se intenta el control estructural a la vez que se está desarrollando el proceso proyectual.

Así lo empiezan a entender los arquitectos e ingenieros franceses en el último cuarto del XIX, aunque hemos de destacar que olvidando en la mayor parte de los casos el corpus teórico, se considera a la Estática Gráfica exclusivamente como un instrumento, es decir, un conjunto de técnicas que permite a sus usuarios resolver de una manera eficaz los distintos cálculos que encuentran en su vida profesional.

Se la considera, pues, como una ciencia aplicada, que toma prestados sus principios de la Estática y desprovista, por tanto de principios propios, situándose bajo el signo de la utilidad y la aplicación inmediata.

El mismo Maurice Lévy ya anuncia desde el principio en su completísimo tratado, que la Estática Gráfica, a pesar del perfecto rigor de sus procedimientos, no constituye para él más que una aplicación muy feliz y extremadamente útil de los métodos combinados de la Geometría Moderna y de la Estática, pero no añade ningún principio verdaderamente nuevo ni a una ni a otra ciencia y lo que le vale para ser erigida como cuerpo de doctrina son sus aplicaciones, dejándola como ciencia aplicada, sin pretender inútilmente usurpar el dominio de la Estática de la que toma sus principios.

Alemanes y franceses, se ponen de acuerdo sobre esta cuestión, sin sentir ninguna necesidad de asociar la Estática Gráfica a la Geometría Superior (Geometría de Posición o Geometría Proyectiva) y no siguen a los fundadores de la nueva Ciencia, Culmann y Cremona, o a autores como Favaro, que ven en la Estática Gráfica, como en los procedimientos geométricos modernos, una gimnasia intelectual que tiene una utilidad inmediata en la formación del arquitecto o el ingeniero.

Esta concepción utilitaria de la Estática Gráfica, lleva al ya citado Lévy a suprimir de la segunda y tercera edición de su obra la parte Geométrica de la primera edición, poco desarrollada.

### 5.3.3. LA DIFUSIÓN DE LA GEOMETRÍA DE DIFUSIÓN EN ESPAÑA

En lo que respecta a España, la Geometría, que había atraído siempre el interés de los ilustrados, siguió siendo objeto de estudio de los que se interesaban por las ciencias en general y por las matemáticas en particular, dándose la circunstancia de intentar, con mejor o peor fortuna, introducir en nuestro país los avances de la Moderna Geometría francesa y otros estudios geométricos puros y sus aplicaciones desarrolladas en otros países de Europa durante el S.XIX.

En determinados ambientes absolutistas imperaba un potente sentimiento anticientífico y la Geometría, más que ningún otro tema, fue la bandera de los librepensadores al servicio de un esperado cambio social.<sup>24</sup>

La renovación de los estudios de la Geometría que produjo Gaspard Monge y sus discípulos de l'École Polytechnique y l'École Normal fue introducida en España a través de dos vías de penetración: una científico-cultural y otra militar, siendo finalmente las Academias militares las encargadas de la transmisión definitiva de la Geometría descriptiva de Monge al conocimiento, siquiera militar, de los españoles.

En 1803 apareció la primera traducción de *Géométrie Descriptive* de Monge para el uso de los estudios de la Inspección General de Caminos, en el año en que empezaba a funcionar la Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos fundada en Madrid por Agustín de Betancourt, así como la Academia de Ingenieros del Ejército en Alcalá de Henares.<sup>25</sup>

L'École Polytechnique y l'École Normal influyeron decisivamente sobre militares e ingenieros estatales y en particular en los profesores de sus respectivas escuelas de formación y en el ambiente de estudio equivalente a lo que en Francia eran las "classes préparatoires". En un artículo escrito por José de Echegaray<sup>26</sup> que había nacido en 1833 y estuvo formado como ingeniero en ese ambiente del segundo tercio del siglo describe así la actividad de la Escuela de Caminos dirigida por Juan Subercase entre 1836 y 1848:

---

<sup>24</sup> Sobre el tema de la influencia de los librepensadores en las distintas enseñanzas en el S.XIX, ver Matray, Claude. *La libre Pensée. Définitions. Esquisse historique*. En *L'Idée Libre*, nº 60, p. 513. Bruxelles 1969.

<sup>25</sup> Agustín Betancourt, uno de los más grandes ingenieros españoles de todos los tiempos, traduce las palabras de Gaspard Monge en las que define los objetivos que persigue con su Geometría descriptiva y que son la causa del interés con el que Culmann define la Grafostática como la aplicación de la Geometría Descriptiva para la realización de cálculos accesibles al campo de la arquitectura y la ingeniería, para encontrar soluciones relativamente sencillas a los problemas del equilibrio de los objetos sometidos a un sistema de fuerzas exteriores.

<sup>26</sup> Echegaray y Eizaguirre, José. Su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Historia de las matemáticas puras en nuestra España. Madrid: Imprenta y Librería de Don Eusebio Aguado. 1866) es un documento capital para el estudio de la polémica sobre la ciencia y la Enseñanza en la España del XIX.

*“Gracias a su influencia, a la severidad de sus exámenes de ingreso y a la preferencia que se ha dado siempre al estudio de las matemáticas puras, se ha formado en pocos años un profesorado libre de matemáticas elementales; pero un excelente profesorado que renovó completamente esta rama tan importante del saber humano”*

*Y en la Escuela ha dominado siempre el mismo espíritu de protección por la ciencia pura; se ha explicado el cálculo diferencial e integral y la geometría descriptiva con un especial cuidado y un desarrollo considerable, así como las numerosas aplicaciones de ésta y la aplicación del cálculo a la mecánica; en estas clases se ha seguido, durante largos años, los mismos textos que se usaban en l'École Polytechnique de Francia”*

A pesar de esta referencia a las enseñanzas en Francia, reflejo del prestigio de las mismas en toda Europa y en España, su influencia no resulta del todo positiva a los efectos de la transmisión de los avances de la Geometría de Posición, que de haberse desarrollado como debería haber sido lógico por su nacimiento, con su conocimiento al de la Estática Gráfica. La evolución de las matemáticas francesas ha sido descrito por Gispert,<sup>27</sup> quien ha indicado:

*“Les mathématiques ont, au détriment d'autres sciences, un rôle prépondérant à l'École Polytechnique. L'École dominant per l'aval, grâce au système des concours d'entrée, tout l'enseignement scientifique des classes préparatoires et du secondaire. Les mathématiques sont posées tout à la fois comme science reine et responsable de l'inadaptation des formations scientifiques en France.*

*Cette domination des mathématiques qui apparaît presque avec la création de l'Ecole n'a pas la même signification tout au long de XIXe siècle. Coupée de la recherche mathématique depuis les années 1830, l'Ecole entretient, en effet dans les années 1860, une tradition mathématique hostile à tout développement théorique qui, au-delà des apparences, freine le développement des mathématiques elles-mêmes et est une des causes de ses retards”.*

Poniendo de manifiesto la preponderancia de las Matemáticas en detrimento de otras materias, desde la creación de l'École Polytechnique, yendo al mismo tiempo en contra del propio desarrollo de la investigación matemática provocando su retraso.

---

<sup>27</sup> Gispert, H. *L'Enseignement scientifique supérieur et ses enseignants, 1860-1900: les mathématiques*. En *Histoire de l'éducation* nº 47, 47-78, 1989.

Gispert, H. *Features of the French mathematics development and of the higher education institutins (1860-1900)*. Prepublications, Université de Paris-Sud. (Mathématiques) 1990.

En cuanto a los programas académicos españoles en relación con los de otros países, se pone de manifiesto cómo la Enseñanza Superior está marcada en sitios como Italia por el interés de modernización científico-técnica del país para el desarrollo industrial y social. En particular, en lo referente a la Geometría, el reglamento universitario del entonces Reino de Italia de 1862 incluía en la *Laurea* en Ciencias Matemáticas Puras: Geometría Analítica, Geometría Descriptiva y en el cuarto y último año una asignatura titulada Análisis y Geometría Superior, en un intento de promover la cultura científica de la nación. Para obtener la *Licenza* en Ciencias Matemáticas y Físicas debían cursarse Geometría Analítica, Geometría Proyectiva con Dibujo y Geometría Descriptiva con Dibujo, siendo la continuación de estos estudios la Escuela de Ingenieros o la *Laurea* defendiendo una memoria al estilo del “*Doktorarbeit*” alemán.

En la España de la misma época se echa en falta esta estratificación y programación educativa, siendo los mismos contemporáneos los que señalan estas carencias. A los diez años de la organización de la facultad de ciencias y a raíz de las reformas del decreto de octubre de 1866, (recordemos que es la fecha de la publicación del tratado de Culmann), los ingenieros de caminos denuncian los problemas de ajuste entre enseñanzas científicas y técnicas desde la Revista de Obras Públicas en la que se explicaba la necesidad de “*levantar nuestra voz en defensa de la enseñanza de las Ciencias Matemáticas y Físicoquímicas, hoy y a nuestro juicio comprometidas*”

Se indicaba que el citado decreto que pretendía en principio animar la actividad de la Facultad de Ciencias, lo que propiciaba era reducir el nivel de su enseñanza al refundir en las facultades de ciencias, la enseñanza de los primeros años de las Escuelas Especiales, uniéndolo equivocadamente lo que debía ser ciencia por la ciencia, con una vía eminentemente práctica, quedando la enseñanza en una mera preparación por el estado para el ingreso en las Escuelas de Minas, Montes, Industriales, Caminos o Arquitectura.

Mención especial merece la Geometría Moderna que nunca se había explicado en Madrid y que seguía sin aparecer en el nuevo plan:

*“ de suerte que nuestros doctores en ciencias matemáticas y físicas alcanzarán su borla sin saber que existen relaciones anarmónicas, sistemas homográficos, puntos de involución y figuras homológicas (...)”* (R.O.P. 1866-67)

Echegaray, que había viajado a París a principios de los 1860 se encargó de exponer en castellano lo más elemental del tratado de Chasles de 1847 en una serie de artículos en la Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, recopilados en 1867:



*“Me propongo publicar en esta serie de artículos un breve resumen de las principales teorías que constituyen hoy la Geometría superior y facilitar de este modo a la juventud el estudio de las obras clásicas, entre las que debo citar como principal la Geometría superior de Mr. Chasles, uno de los primeros matemáticos de nuestra época.*

*En España desgraciadamente nunca se ha explicado esta materia, ni jamás se ha contado con ella en nuestros programas de enseñanza: verdad es que la misma suerte han corrido y corren otras muchas.*

*Yo no puedo tener la aspiración de llenar ni aún en mínima parte tal vacío; pero si al menos estos artículos, imperfectos como son, consiguen despertar el gusto por estos estudios, daré por bien empleado mi trabajo”.*

Al margen de las traducciones de los tratados de otros autores europeos, los españoles, comienzan hacia el último cuarto de siglo a producir textos relativos a la Geometría Proyectiva y como veremos en congruencia con el ánimo europeo de su aplicación a la Mecánica y la Estática Gráfica.

Una buena parte de estos textos son manuales de Geometría Analítica publicados por catedráticos de distintas universidades. En 1883, José María Villafañe publicó en Valencia *unos Elementos de Geometría analítica*, dedicados a Echegaray y Fernández Vallín, como bandera de la confianza en la ciencia, entendida como ideal para el progreso y la modernidad, idea presente en otros muchos matemáticos y expresada en la introducción:

*“Todos los ramos de las ciencias matemáticas vienen adelantando en estos últimos tiempos de una manera prodigiosa, no solo en su parte especulativa, sino en sus trascendentales aplicaciones a todos los conocimientos, que hoy forman el fondo más precioso de la moderna civilización. La Geometría analítica no ha podido, pues, permanecer indiferente a este movimiento progresivo; por el contrario, ella se enriquece cada vez más con los notables descubrimientos, que diariamente se realizan en el campo científico, y en especial con los del análisis algébrico y de la Geometría pura, de esa Geometría Superior que tanto debe a los trabajos de Chasles.(...)”*

*¿Qué sería en estos momentos una Geometría analítica, que no pidiese apoyo a las trascendentales teorías, que hoy se disputan el campo de la ciencia, que hoy en el concierto científico reclaman puesto preferente para*

*explicar las disquisiciones analíticas, para prestar luz a las disquisiciones científicas? Quedarían sin influencia eficaz en la lucha por el progreso indefinido en todas sus manifestaciones que lleva al perfeccionamiento; sería un mero boceto de lo que debe ser, y en especial de la misión que está llamada a llenar en el mundo de la ciencia trascendental".*<sup>28</sup>

Existe ya a estas alturas de siglo en España, una marcada receptividad a la nueva literatura sobre geometría proyectiva producida por las escuelas técnicas alemanas e italianas, obra de Luigi Cremona, Antonio Favaro, Fiedler, Reye y otros. Cuestiones como la noción del Infinito geométrico en el contexto de la Geometría proyectiva, comienza, sobre todo en Barcelona, a difundirse entre polémicas incluso entrecruzadas con cuestiones políticas.

Se extendía el hábito de publicar trabajos, como en el caso de Durán Loriga,<sup>29</sup> que en 1891 publicó un pequeño libro titulado *Tres capítulos de Geometría superior* en el que se contiene una elemental exposición de las nociones básicas de geometría proyectiva como el principio de signos, la relación armónica, la involución o la homografía.

Zoel García de Galdeano,<sup>30</sup> en los años 1890 como reciente catedrático de Geometría analítica, protagoniza la difusión de las teorías modernas sobre la Geometría proyectiva. A lo largo de una serie de artículos aparecidos en su revista *El Progreso matemático*, que luego se recopilaron en un libro en dos tomos *Geometría general* trató casi la totalidad de los temas de la geometría de la segunda mitad del siglo, como la geometría del triángulo, que era tema preferente en su caso como en el de toda una serie de matemáticos franceses con los que estuvo en contacto, o la geometría proyectiva, incluyendo su sometimiento al lenguaje algébrico procedente de la escuela alemana.

---

<sup>28</sup> Villafañe, José María. *Elementos de geometría analítica*. Valencia 1883.

<sup>29</sup> Durán Loriga, Juan J. *Tres capítulos de geometría superior : con arreglo al programa de ingreso en la escuela general preparatoria de ingenieros y arquitectos*. Puga: La Coruña 1891.

<sup>30</sup> García de Galdeano, Zoel. *Geometría general*. Parte 1ª. Zaragoza 1892.  
García de Galdeano, Zoel. *Geometría general*. Parte 2ª. Sistematización de la Geometría. Zaragoza 1895.

García de Galdeano hace especial hincapié en la aplicación de un modo más general de los métodos del álgebra a la geometría, dedicando una monografía titulada "*Las modernas generalizaciones expresadas por el Álgebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio*".

Es de destacar un breve artículo sobre los poliedros de cuatro dimensiones publicado en el tomo II de la revista.

La Geometría de más de tres dimensiones no tuvo una introducción sencilla en España. A pesar de lo expuesto desde la revista "*El Progreso matemático*", la Geometría Descriptiva había ejercido una notable sujeción al mundo de las tres dimensiones muy lejos de las inquietudes de las vanguardias geométricas del XIX, adscripción que tuvo más que ver con la comodidad de desenvolvimiento de la escuela de Torroja <sup>31</sup>, que con la realidad del interés científico por las n-dimensiones ya en fuerte desarrollo. Resulta especialmente interesante desde el punto de vista de nuestra investigación relativa a los orígenes de la Estática Gráfica, por cuanto García de Galdeano introduce la Geometría de cuatro dimensiones a partir de la de tres, con el soporte de los poliedros, basándose en trabajos aparecidos en los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* sobre el método para representar en el plano los sólidos homogéneos de n-dimensiones. Se ciñe Galdeano al estudio particular de los seis cuerpos regulares de cuatro dimensiones y a las proyecciones de estos cuerpos sobre el espacio de tres dimensiones y sobre el plano para facilitar su visualización. Recordamos aquí como en el origen de la Estática Gráfica está la reciprocidad entre el polígono funicular trazado por las líneas de acción de los vectores (representantes de un sistema de fuerzas) y el correspondiente polígono de fuerzas, ambos polígonos no son más que la proyección plana de dos poliedros piramidales cuyo vértice se corresponde con el polo en el polígono de fuerzas y el punto de concurrencia de las fuerzas en caso de un sistema cerrado.

En la década de los 1880 se produjo en España un intento de modernizar la enseñanza universitaria de la geometría aprovechando las posibilidades que ofrecía el marco legal. Precisamente el carácter que esta regulación imprimía a las enseñanzas de la facultad de ciencias, originó una receptividad hacia las matemáticas, que importadas de las escuelas técnicas europeas en el decenio anterior, se centraban en lo que se llamó genéricamente Geometría aplicada y en particular en los estudios de Geometría Proyectiva ligados a métodos gráficos. <sup>32</sup>

---

<sup>31</sup> Torroja Caballé, Eduardo. *Tratado de Geometría de la Posición*. G. Juste: Madrid 1899.

<sup>32</sup> En el artículo de Peralta, J. *El movimiento renovador de la matemática española de finales del siglo XIX*. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, nº50, pp. 34-48. Madrid 1998. Puede analizarse la evolución de nuestra Geometría y en un extenso artículo de Millán A. *Estudios de Geometría superior en España en el S.XIX*. Lull. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, se recogen los distintos textos de los matemáticos de la época, utilizados en este apartado.

En concreto se recibió con la misma sorpresa que entusiasmo en España, como en el resto del mundo, la Estática Gráfica de Carl Culmann, proveniente de Suiza, Alemania e Italia.

En 1893 ingresa Eduardo Torroja Caballé , padre del conocido ingeniero y científico Eduardo Torroja Miret, en la Real Academia de Ciencias de Madrid habiendo encontrado en la Geometría sintética el mejor de los campos para su cultivo matemático, llegando a ser el más influyente del último cuarto del S. XIX. En su discurso de ingreso expresaba su sensibilidad en este sentido:

*“Las verdades geométricas tienen para mí un especial encanto, no solo cuando admiro la belleza y trascendencia de las más importantes, sino también al contemplar la sorprendente armonía que del conjunto de todas ellas resulta. Entre ellas hay algunas ciertas y evidentes, no susceptibles de demostración, que forman como la base o suelo en que se asienta todo el edificio científico; otras fundamentales, inmediatamente derivadas de las anteriores, constituyen el cimiento que apoya el verdadero cuerpo de la construcción, compuesto éste de todas las que dan la parte utilizable, a donde acuden en demanda de amparo otras muchas Ciencias o Artes. Por último, encuéntrase otras que sirven de enlace a las diversas partes y ponen de manifiesto la unidad del conjunto, las cuales aparecen como coronación y remate del edificio, desdeñosamente miradas por algunos que, no viendo inmediata su aplicación a las Artes o a otras Ciencias, las juzga simples figuras decorativas, sin fijarse, en su mezquina manera de ver, en que las que hoy parecen simple remate, pueden bien pronto convertirse en base sobre que se levante nuevo cuerpo de edificio, desde el cual, como situado a mayor altura, se difundan sus benéficas aplicaciones a campos mucho más dilatados. Que no es el edificio científico como las pobres construcciones materiales, destinadas a un uso concreto previamente determinado, cuyo plan completo concibe el arquitecto, y que, una vez terminadas, se enriquecerán con algunos detalles de ornamentación, pero sin que puedan en manera alguna modificarse sus líneas generales ni sus agujas terminales”* <sup>33</sup>

---

<sup>33</sup> Torroja Caballé, Eduardo. Reseña de los medios empleados por la Geometría pura actual para alcanzar el grado de generalización y de simplificación que la distingue de la antigua; Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública de [...] el día 29 de junio de 1893. Madrid, Imprenta de Luis Aguado. Madrid 1893.

Eduardo Torroja Caballé perteneció a la Universidad central participando brevemente en la Universidad de Valencia. Sustituyó a Elizalde en la asignatura de Geometría descriptiva. En 1869 tras superar el ejercicio final de la Carrera de Arquitectura (equivalente a nuestro Proyecto fin de Carrera) y como arquitecto, estuvo de forma más o menos permanente, ligado a la Escuela de Arquitectura de Madrid.

Cuando finalmente obtiene en 1876 la segunda Cátedra de Geometría de Madrid, redacta un programa para la asignatura que denota por sus propios comentarios la relación entre la teoría y sus aplicaciones:

*“ De este modo, el pintor y el escultor, el arquitecto y el ingeniero, el topógrafo y el geógrafo, el físico y el mecánico, reclamarán cada uno un sistema que se adapte con ventaja a sus perentorias necesidades; y el que, prescindiendo de toda aplicación de la ciencia geométrica, estudie las propiedades generales a todas las líneas o superficies o las peculiares e inherentes a tal o cual familia, género o especie determinada, si bien debiera utilizar indistintamente todos los sistemas según sea la superficie que por el momento se ocupe, preferirá entre todos ellos, lo mismo que hace en la geometría analítica, el que le parezca de más general aplicación o de procedimientos de ejecución más sencillos y expeditivos”.*

Los nuevos planteamientos de la Geometría Descriptiva llevaban a plantear a Torroja cada vez más cuestiones de la Geometría Proyectiva, como se muestra en las publicaciones de sus lecciones del curso 1879-80, donde aparecen las relaciones proyectivas entre formas de primera y segunda categoría, examinando la formación de figuras geométricas a partir de otras de inferior orden. Introduce el conocimiento de series rectilíneas o haces, estudiando la Razón Doble entre puntos de la recta, llamando Proyectivas a las que pueden ser colocadas en posición perspectiva; estudia las homografías, afinidades, semejanzas, homologías y homotecias como un caso particular de homografía.

El texto Programa y resumen de las lecciones de Geometría Descriptiva recibió el informe favorable del Consejo de Instrucción Pública considerándolo de utilidad para la enseñanza universitaria de la Geometría Descriptiva superior o moderna y de mérito para el autor, rezando el informe:

*“ (...) las poderosas razones que al señor Torroja han asistido para animarle a romper los añejos y mezquinos moldes de la Geometría descriptiva, y adoptar otros novísimos (...) más amplios y más apropiados a las sin cesar necesidades crecientes y aspiraciones legítimas de la ciencia pura. La geometría de Monge, utilísima para el Ingeniero y el Arquitecto y para cuantos al arte de la Construcción y al ejercicio de las artes industriales*

*se consagran, se hallaba como cohibida en su desenvolvimiento progresivo por el concepto demasiado pobre que de su objeto y trascendencia científica se tuvo durante mucho tiempo. Como en germen palpitaba en ella otra Geometría de orden superior, que poco a poco se ha ido constituyendo y ensanchando y de la cual forma la primitiva mínima parte, o como derivación secundaria, aunque siempre de importancia (...) en el terreno de la aplicaciones apuntadas. Transformación sorprendente debida a las iniciativas fecundas y trabajos admirables de eminentes matemáticos franceses y alemanes, principalmente, del siglo actual y casi contemporáneos nuestros, y en todas las naciones civilizadas acogida con merecido aplauso”.*

Aunque se vislumbra ya en estos comentarios e informes una percepción del interés desde el punto de vista de las ciencias puras, matemáticas, hay una creciente utilización de las aplicaciones prácticas que como un terremoto sacude el mundo de la Ingeniería y la Arquitectura. El propio Torroja en el final de su discurso de ingreso en la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de 1893 pone de manifiesto la tradicional vinculación de la geometría con sus aplicaciones.

*“Pero, si (...) descendemos a las aplicaciones, saltan a la vista las ventajas que la Geometría pura presenta sobre la analítica; ventajas que han hecho que en todo tiempo, y cada vez con más decidido empeño, la prefiriesen los hombres prácticos en la resolución de todos los problemas que tienen relación directa o indirecta con la Geometría.*

*De la Geometría pura se vale el artista en todo lo referente a la perspectiva lineal que utiliza el pintor, y a la perspectiva relieve indispensable al escenógrafo, y de que tanto partido sacan el escultor en la composición de los bajo-relieves y el arquitecto para estudiar la conveniente disposición de las diferentes partes de una construcción, destinadas a producir un determinado efecto.*

*Y no sólo en estas cuestiones de pura Geometría que constituyen el terreno propio de esta ciencia, sino también en otras muchas de carácter mixto, y aún en algunas que parecen más propias del Cálculo que de la Geometría, se aplica ésta con ventaja en muchas ocasiones. Porque las construcciones gráficas que proporciona la Geometría pura, no sólo son más sencillas e intuitivas que los cálculos que pueden llevar al mismo resultado, sino que tiene sobre ellos la ventaja de hacer más difíciles las equivocaciones y más fáciles de descubrir cuando ocurriesen. Y si bien los resultados del Cálculo pueden alcanzar mayor grado de aproximación que las proporcionadas por las construcciones gráficas, esta es más que*

*suficiente en todas las aplicaciones de carácter práctico, aparte que aquella mayor aproximación es más ilusoria que real, puesto que salvo rarísimos casos, la falta de precisión del resultado, más que del procedimiento aritmético o geométrico que se emplea para deducirlo, proceden de la que en sí mismos entrañan los datos de observación o experiencia que les han servido de punto de partida.*

*Por esto la representación y el cálculo gráfico, que tienen su base en las doctrinas de la Geometría pura, encuentran cada vez más partidarios y ensanchan el campo de sus aplicaciones; hasta el extremo de que apenas se encuentra hoy una ciencia de la observación que no los utilice, no solo para poner de manifiesto los resultados de sus observaciones, sino también para combinarlos y deducir de ellos las consecuencias a que naturalmente conducen”.*

En estos comentarios del propio Torroja está la impresión, que se veía ya en el libro de Carlos María de Moy <sup>34</sup> *Geometría descriptiva* cuya tercera edición publicada en Barcelona en 1888 fue prologada por Antonio Favaro, y cuya primera parte está dedicada a la Estática Gráfica, en el sentido del papel desempeñado por la Geometría proyectiva en contextos que parecían reservados al análisis, sobre todo en las cuestiones relativas al cálculo y la resistencia de materiales, mencionándose los cambios que se venían operando en las enseñanzas de las escuelas técnicas en las décadas de 1870 y 80.

*“Dígalo si no, para no citar más que un ejemplo, la Estática Gráfica que con su aplicación al cálculo de la resistencia de materiales, ciencia enteramente nueva, creada por Culmann, como aplicación de la Geometría de la posición de Staudt, pocos años después de llegar esa obra a su conocimiento; ciencia que sustituyendo por trazados gráficos sencillos los prolijos cálculos de resistencia empleados hasta hace pocos años, prepara una completa reforma en la enseñanza de las escuelas técnicas, dando en ellas la preferencia a los estudios de Geometría pura sobre los de Cálculo, que dominaban casi por completo”.*

---

<sup>34</sup> Moy, Carlos María de. Geometría Proyectiva. Primera parte: Estática Gráfica. Imprenta de Pedro Ortega: Barcelona 1888. Se trata del primer libro, de autor español y publicado en España (según nuestra investigación bibliográfica) dedicado a la Estática Gráfica y a la Geometría Proyectiva. Pertenece Moy a ese grupo de escasos autores que entienden la Estática Gráfica desde la óptica de la Geometría Proyectiva. No en vano, está prologado por Antonio Favaro, que con Cremona y Culmann protagonizaron el nacimiento de la Ciencia a la que dedicamos nuestra Tesis.

Quien probablemente mejor resume el sentir científico en cuanto a las repercusiones de la Geometría Proyectiva y la Estática Gráfica, es el matemático granadino Cecilio Jiménez Rueda,<sup>35</sup> que publicó en 1898 en Valencia *Tratado de las formas geométricas de primera categoría* al que siguió *Tratado de las formas de segunda y tercera categoría* en el mismo año, poniendo también de manifiesto, por un lado su adscripción a la teoría de la Nueva Geometría, sin renunciar a la Analítica, no en vano son sus publicaciones académicas, sin menosprecio a las aplicaciones técnicas al cálculo gráfico, a las que se refiere en el prólogo:

*“Y como las relaciones métricas de carácter proyectivo de Casles y Steiner tienen también sus encantos, y son por donde, de un modo natural, entra en los dominios de la Analítica la Geometría Proyectiva, hemos juzgado conveniente no prescindir de aquéllas en absoluto, sino más bien armonizar ambas escuelas, la de Staudt y la de Chasles, aunque procediendo en orden inverso de cómo hasta aquí se ha hecho, esto es, exponiendo las verdades de la Geometría Pura de Posición con absoluta independencia de toda noción anterior, y sin el concepto de cantidad, como hace Staudt; y faltando en ellas las relaciones de carácter métrico; lo que no sólo simplifica la exposición, sino quita monotonía al conjunto y proporciona recursos de demostración enteramente nuevos y elegantes, como se ve en el curso de este tratado, y como se verá mejor aún en los de las formas de segunda y tercera categoría.*

*Así creemos que esta asignatura responde a su fin en nuestra facultad de Ciencias, que no puede ser otro que servir de base a los estudios posteriores de Analítica y Descriptiva. Tal como está redactado nuestro curso, tiene además la ventaja de que puede prescindirse, si se quiere, de toda parte métrica sin que se rompa la trabazón y enlace de la parte puramente de posición”.*

*“Gracias al ilustre Culmann, es también hoy directamente aplicable la Geometría proyectiva al arte de la Construcción, llegando a ser sustituidas en muchos casos, las complicadas integrales del cálculo de resistencias, por un simple dibujo.*

---

<sup>35</sup> Jiménez Rueda, Cecilio. *Tratado de las formas geométricas de primera categoría precedido de una introducción sobre los conceptos fundamentales de la geometría e ilustrado con 118 figuras intercaladas en el texto*. Valencia 1898.



*Con los diagramas recíprocos de Maxwell y los polígonos recíprocos de fuerza y funiculares de Culmann, entra de lleno aquella ciencia en los dominios de la Mecánica y de la Física; sin contar con las aplicaciones que de los haces y radiaciones proyectivas, puede hacer esta última en la teoría de la luz.*

*Así es, que si en 1869 pudo decir Jenkin, de los ingenieros de la época que pocos sospecharían que esta doctrina pone a su disposición un método nuevo, notabilísimo por su exactitud y sencillez, hoy no podría sostener esa afirmación, porque la Geometría Proyectiva se enseña y aplica ya en casi todas las escuelas de ingenieros.*

*Decimos todo esto, porque ya que no el amor a la ciencia por la ciencia, sea al menos su utilidad la que abra paso definitivamente en nuestra patria a teorías que se enseñaban en Alemania hace cincuenta años”.*<sup>36</sup>

---

<sup>36</sup> Buena parte de los textos que hemos manejado en esta revisión son referidos en:

- *INDEX du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*, publié par la Commission Permanente du Répertoire. Gauthier-Villars: 1893.
- López Piñero, J. M. et. al. *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España*. Vol. I. Península: Barcelona 1983.
- Peralta, J. *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Nivola: Madrid 1991.
- Sánchez Ron, José Manuel. *Las ciencias físico-matemáticas en la España del S. XIX. En la Ciencia en la España del S. XIX*. Revista *Ayer* de la Asociación de Historia Contemporánea. Nº 7 Ed. José M. López Piñero: Madrid 1992.
- González Redondo, Francisco A. *La Matemática en las revistas científicas españolas del siglo XIX -- Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, nº91, p. 71. Madrid 2012.

#### 5.3.4. DE LA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA A LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Las relaciones geométricas contenidas en los principios relacionados con la Perspectiva lineal o Perspectiva cónica, forma parte de los conceptos de la Geometría Proyectiva que nos planteamos analizar como uno de los pilares en que se asienta la Estática Gráfica, en el sentido que hemos visto, fue concebida por su creador Culmann e incluso en mayor medida por Cremona y Favaro, quienes, en sus tratados, no comienzan a describir los principios grafostáticos, hasta no haber desmenuzado todos aquellos otros de la Geometría de Posición.

Creemos también, como estos autores, en el principio de necesidad de la Geometría Proyectiva para el desarrollo de la Estática Gráfica, desde el punto de vista de nuestra investigación científica, por lo que nos disponemos a analizar los fundamentos de aquella que intervinieron decisivamente en la creación de ésta, como Ciencia, con independencia de los usos prácticos que ya sus creadores pusieron en las manos de estudiantes y profesionales de la Arquitectura y otras profesiones, en el afán de una visión rápida e intuitiva de las características estructurales de lo que los proyectos representan.

Como arquitectos, consideramos que la Perspectiva es mucho más que un simple sistema de representación geométrica y conocemos que el descubrimiento de sus leyes produjo una auténtica convulsión en el campo de las artes visuales, consiguiendo un fenómeno cultural de gran trascendencia.

La representación espacial en sentido de crear ilusiones ópticas, tiene la característica especial de un cambio que modificará la historia de la pintura europea hacia el futuro, donde la percepción óptica toma la importancia que impone la representación ilusionista como tarea artística.

La imagen se transformó así en una ventana donde vemos una realidad creada artificial pero con datos basados en la experiencia real, por medio de una escenografía adecuada. El sistema de perspectiva se vuelve coherente, el artista descubre que el observador percibe el marco de una pintura como parte de su propia realidad. Con estos detalles los objetos se sitúan aparentemente en un espacio tridimensional, que empujaría la superficie del cuadro hacia adelante donde se halla el observador y a su vez la amplía hacia atrás donde se encuentra una profundidad espacial imaginaria.

Este descubrimiento anticipa la perspectiva central del Renacimiento. La idea principal de la época era describir con precisión la relación existente entre el observador individual y los objetos visualizados por el mismo observador en un momento preciso y determinar cómo cambiar esta relación en función de la distancia o

del ángulo de observación. La importancia se sitúa en la relación dinámica entre el sujeto y el objeto que está siendo visto u observado.

En la Fig. 5.7. se muestra una perspectiva axonométrica desde abajo, de Auguste Choisy,<sup>37</sup> muy descriptiva desde el punto de vista arquitectónico, de la Catedral de Santa María del Fiore, de su libro *Histoire de l'architecture* de 1899 y un estudio de la primera mitad del S. XV, del pintor italiano Antonio di Puccio Pisano (Pisanello, 1395-1455) en el que se nos muestra una perspectiva cónica con unas arcadas paralelas al plano del cuadro, lo que constituye uno de los primeros ensayos de proyecciones cónicas en el auténtico sentido proyectivo. La sensación de profundidad es obtenida por las líneas oblicuas fugando al punto principal, que es la intersección del rayo principal con el plano del cuadro y la seriación de las arcadas disminuidas de tamaño, aunque realmente no hay todavía en el ensayo un ejercicio pleno de proyectividad.

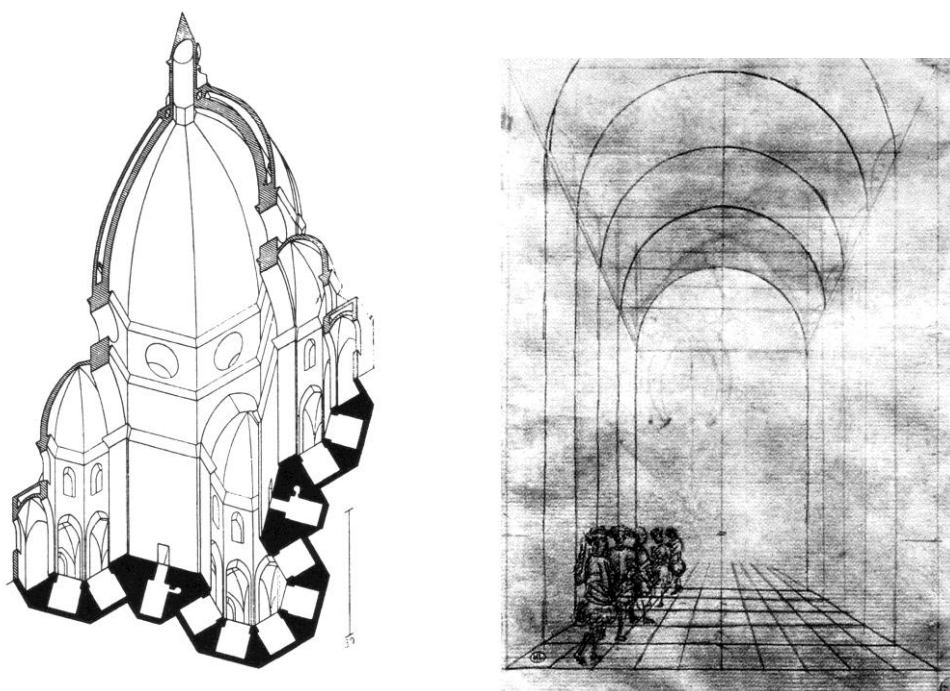


Fig. 5.7. Reproducción de una lámina de *Histoire de l'architecture* de Choisy de 1899 en la que se muestra un dibujo en perspectiva axonométrica desde abajo y un estudio de Pisanello del efecto en perspectiva cónica frontal de unas figuras humanas bajo unas arcadas, con las marcas del pavimento, que ayudan a la creación del artificio de la profundidad representada en un plano.

Naturalmente, las representaciones arquitectónicas de la arquitectura dibujada, que son en sí mismas un artificio, consiguieron con el perfeccionamiento de la técnica correspondiente a la perspectiva cónica, que en todas las Escuelas de Arquitectura se enseñaba, un mejor efecto de la realidad soñada por los arquitectos o por sus clientes, convirtiéndose en un valioso instrumento de nuestra tarea proyectual.

<sup>37</sup> Choisy, Auguste. *Histoire de l'architecture*. Édouard Rouveyre: París 1899. Versión castellana: *Historia de la arquitectura*. (2ª Ed.). Víctor Lerú: Buenos Aires 1951.

En la Fig. 5.8. se muestra una de las espectaculares perspectivas del arquitecto francés Paul Marie Letarouilly, de las que llegó a convertirse en un auténtico especialista, como se muestra en su libro dedicado a la arquitectura de la ciudad de Roma.<sup>38</sup>



Fig. 5.8. Perspectiva cónica frontal. *Scala Regia, Roma*. Grabado calcográfico. Paul Marie Letarouilly. 1880.

<sup>38</sup> Letarouilly, Paul Marie. *Édifices de Rome moderne; ou, Recueil des palais, maisons, églises, couvents et autres monuments publics et particuliers les plus remarquables de la ville de Rome*. Tipographie de Firmin Didot Frères: Paris. 1840-1855.

Al no ser el lienzo del pintor un plano transparente, se plantea un problema al dibujante al tener que representar el dibujo con la intención de que un futuro observador vea lo mismo que el pintor ve.

En ese intento de dibujar la realidad observada, cada vez con más exactitud, se debatieron los arquitectos y pintores del Renacimiento con la intención de descubrir las leyes fundamentales que rigen la construcción de las proyecciones del objeto sobre el cuadro, creando varios de ellos, en el S.XV, los elementos de una teoría fundamental de la perspectiva geométrica.

En la Fig. 5.9. se ha esquematizado el ejercicio proyectivo de un haz de rectas que partiendo de cada vértice del cubo y convergiendo en O, generan en la intersección con un plano cualquiera intermedio, la proyección buscada, y en la Fig. 5.10. se muestra el mismo esquema ya vislumbrado por el genial Durero, en el que el haz de rectas con vértice común O se ha convertido en un hilo, que con un extremo colgado de una plomada en la pared es movido en el otro extremo situándolo en los diferentes puntos de un laúd que reposa sobre una mesa. Las intersecciones del hilo con el plano del cuadro son marcadas produciéndose la proyección buscada.

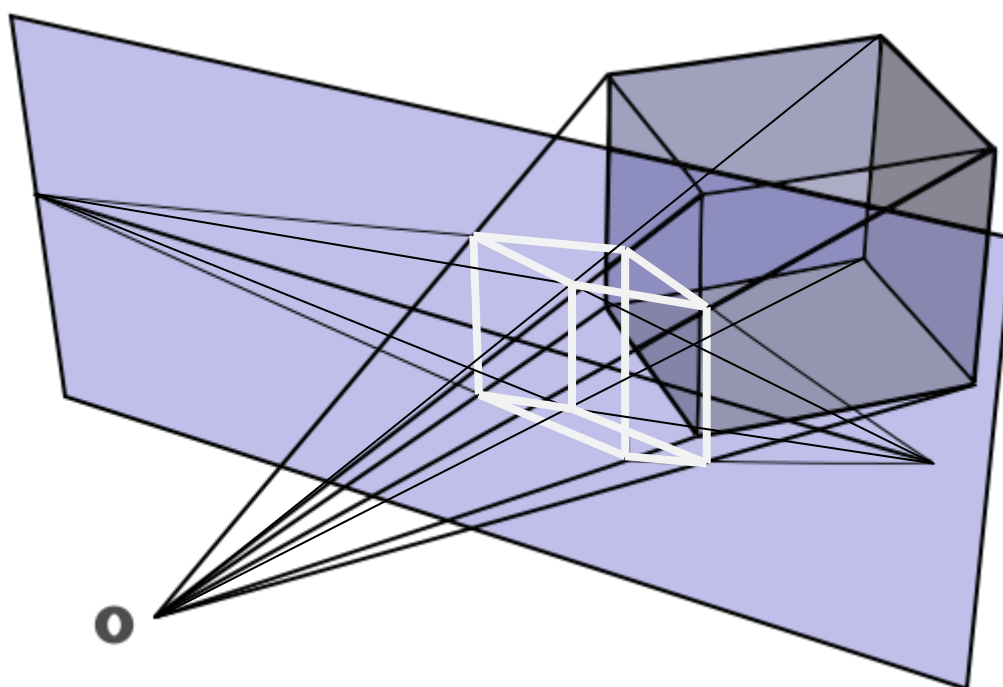


Fig. 5.9. Proyección de un cubo sobre una pantalla. Cada punto es la intersección de una recta que pasa por un punto del objeto y el punto de vista.

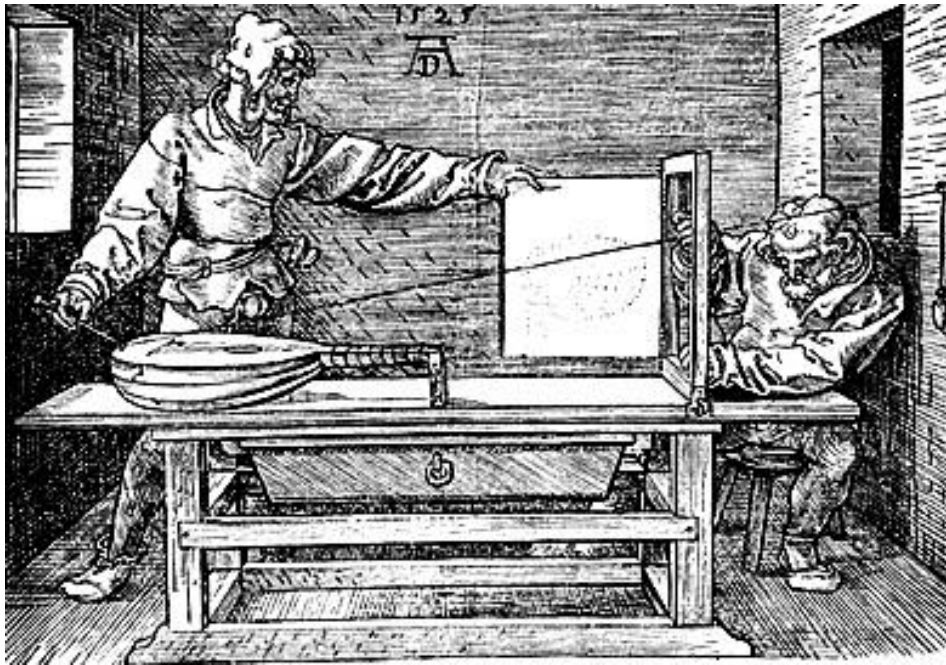


Fig. 5.10. Grabados de Durero del “*Tratado de la medida*” (1525) de Durero,<sup>39</sup> que reproducen el “método del velo” ideado por Leon Battista Alberti,<sup>40</sup> expuesto en “*Della pittura*” (1436), traducción al toscano del propio Alberti del original en latín *De Pictura*, de 1435.

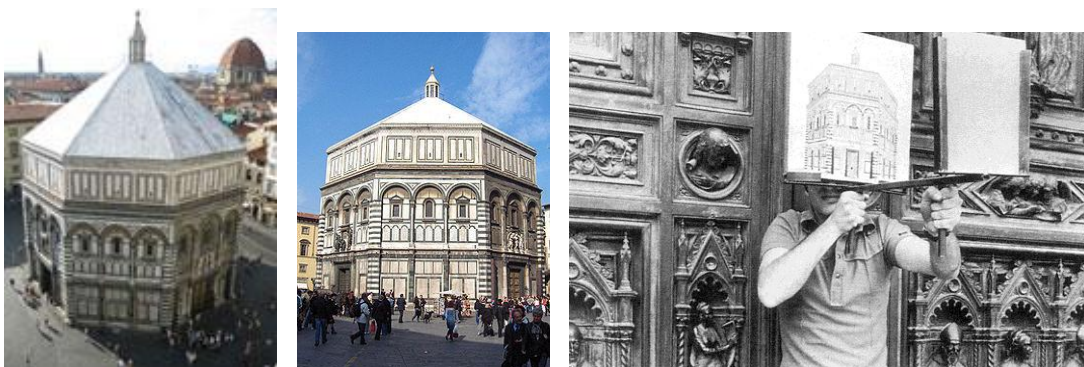


Fig. 5.11. Reproducción de la tablilla perspectiva de Brunelleschi con el dibujo del Baptisterio de Florencia. (Battisti, 1976),<sup>41</sup> citado por (Sainz, 2005: 128).

<sup>39</sup> Sobre el Tratado *De la medida*, ver Checa Cremades, *De la medida. Alberto Durero*. Akal: Madrid 2000.

<sup>40</sup> Alberti, Leon Battista. *De la Pintura*. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México D. F. 1996

<sup>41</sup> Battisti, Eugenio. Filippo Brunelleschi. Electra: Milano 1976.

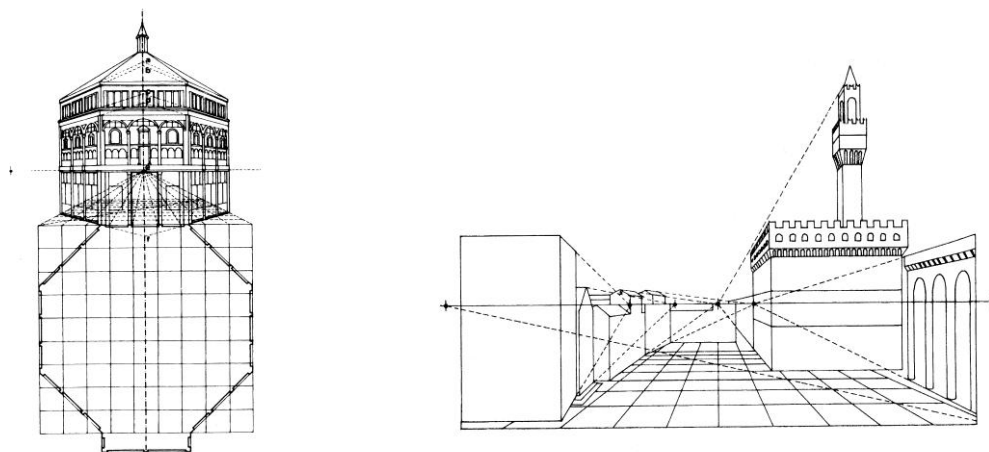


Fig. 5.12. Reconstrucciones hipotéticas de las dos tablillas perspectivas de Brunelleschi. Baptisterio de Florencia y Palazzo Vecchio. (Sainz, 2005: 213). (Battisti, 1976).

Los descubrimientos sobre perspectiva se desarrollaron rápidamente y pasaron a formar parte de la formación y aprendizaje de pintores y arquitectos en el intento de una mayor captación de la realidad en sus cuadros, aquéllos y de ensayo de la futura visión que la obra proyectada podría presentar. Hasta nuestro S. XX, el empeño de los arquitectos por tener esa visión de lo proyectado nos ha llevado al manejo de las técnicas de dibujo en perspectiva, consiguiendo magníficos resultados, que incluso para los amantes del dibujo de la arquitectura, han llegado a constituir un legado, aparte de la mejor o peor obra arquitectónica. (Fig. 5.13.)

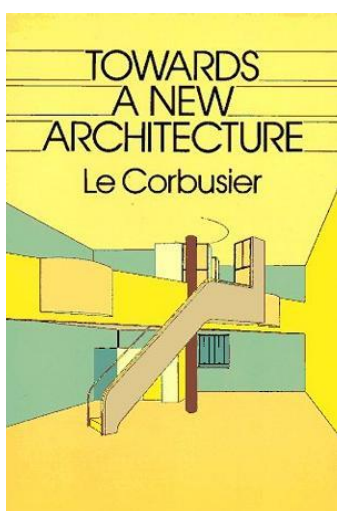


Fig. 5.13. Dibujos en perspectiva de la portada de Hacia una Arquitectura de Le Corbusier y del Solomon R. Guggenheim Museum de Nueva York.

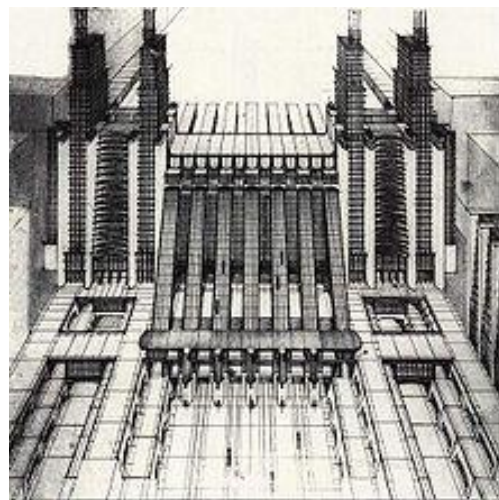
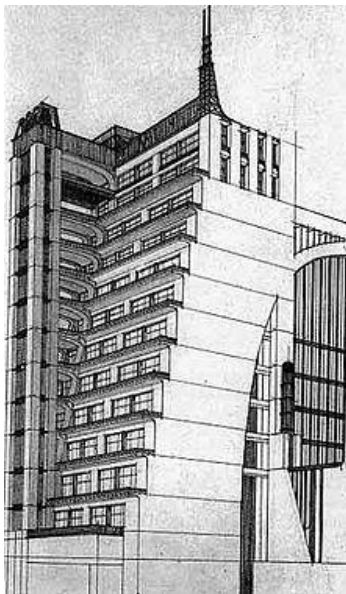
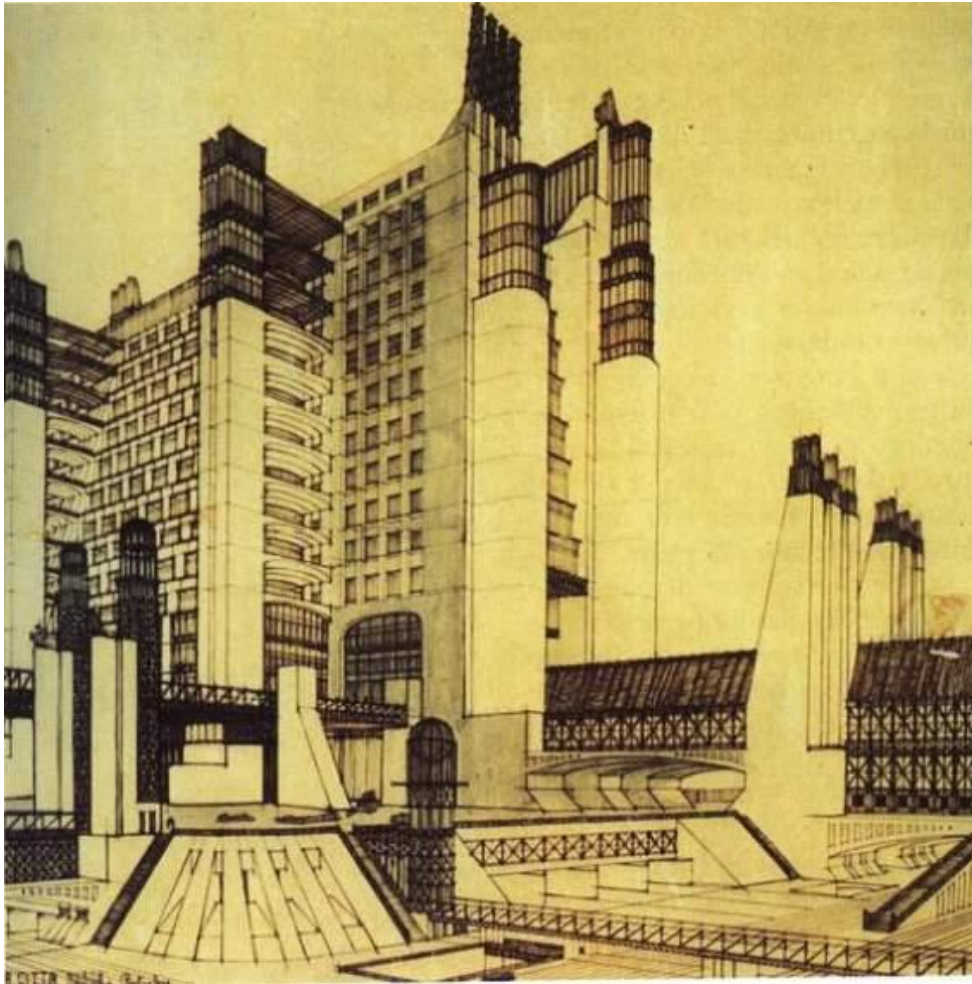


Fig. 5.14. Arriba, perspectiva de Antonio Sant'Elia del proyecto para un metro. 1914. Las calles a distintos niveles se entrecruzan con edificios de viviendas y ascensores . Los dibujos de Sant'Elia no se desarrollaron, por su prematura muerte en la guerra, pero antes de la misma diseñó sus visiones futuristas sobre la *Citta nuova*. Dibujo a tinta negra y lápiz negro y azul sobre cartulina amarilla. Musei civici. Como. Abajo otras perspectivas de Sant'Elia.



La cualidad más importante de la perspectiva (se entiende, cónica) es su carácter visual, o sea, su semejanza con la imagen creada en la retina, lo que hace que se beneficie de las leyes de la *Gestalt*,<sup>42</sup> pero careciendo de las propiedades geométricas de otros sistemas de representación, en cuanto a la imposibilidad de medir, o de comprobar ángulos en el dibujo del objeto proyectado. De ello se deduce que su mayor eficacia se basa en su carácter figurativo. Si se trata de que el dibujo presente el aspecto final que queremos de nuestra idea arquitectónica, la perspectiva es imprescindible. Sin embargo, de igual manera de lo que pretendemos con el uso de la Grafostática, la perspectiva se convierte en un instrumento de trabajo, que nos permite el control continuo del proceso de proyecto, en sus componentes visuales, como la Estática Gráfica lo puede hacer con los comportamientos estructurales de lo diseñado.

En la Fig. 5.15. se muestra uno de esos ejercicios de control de lo proyectado mediante una perspectiva cónica que nos proporciona esa información perceptiva. Se trata de la representación de la intersección de un prisma recto de base triangular con un prisma recto de base cuadrada. Una vez realizadas las proyecciones diédricas ortogonales se ha construido la perspectiva cónica para el control, en el proyecto de una escultura urbana, del efecto perspectivo de “proa” que provoca un diedro cuyos planos forman 60°.

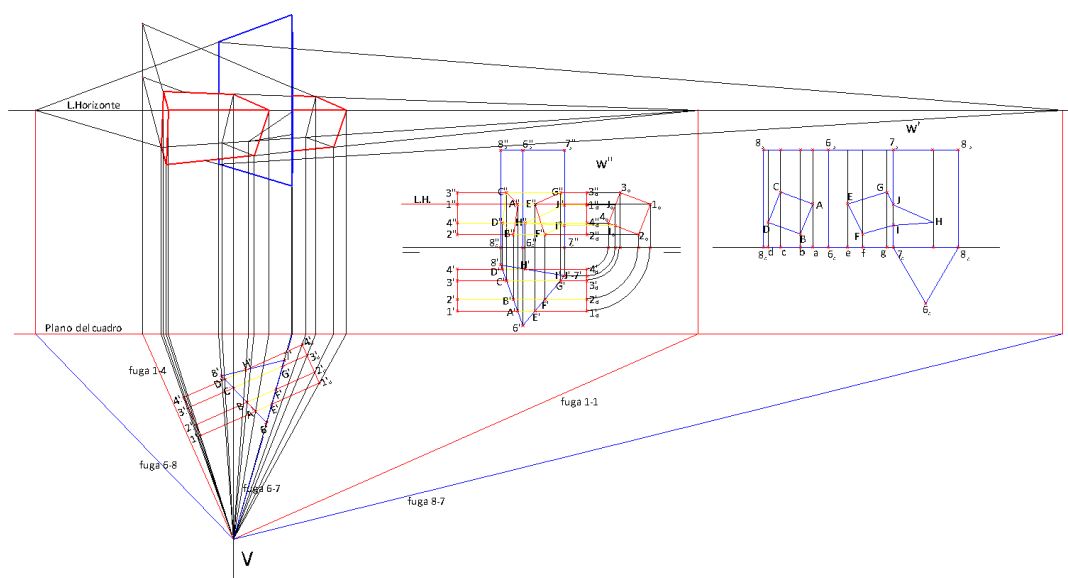


Fig. 5.15. Proyecciones diédricas ortogonales y perspectiva cónica de la intersección de un prisma recto de base triangular con un prisma recto de base cuadrada. (Dibujo propio).

<sup>42</sup> Gestalt (en alemán, traducido como forma, aspecto) fue el nombre de la Escuela psicológica creada en Alemania a principios de S. XX. La mente configura, a través de ciertas leyes, los elementos que llegan a ella a través de los canales sensoriales (percepción) o de la memoria (pensamiento, inteligencia y resolución de problemas). En nuestra experiencia con el entorno, esta configuración tiene un carácter primario sobre los elementos que la conforman, y la suma de estos últimos por sí solos no podría llevarnos, por tanto, a la comprensión del funcionamiento mental. (<http://www.mindmatic.com.ar>)

A principios del S. XVII, un grupo de matemáticos franceses, entre ellos el lionés Gérard Desargues,<sup>43</sup> influidos por la necesidad de arquitectos y pintores, crean una más completa teoría de la perspectiva, publicando en París en 1639, *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (Desargues, 1639). Se trata de un trabajo sobre las secciones cónicas que aprovechando las ideas de las proyecciones llegó a convertirse en uno de los fundamentos de la geometría proyectiva, aunque su publicación coincidió desgraciadamente con el desarrollo creciente de la geometría analítica de Descartes, introducida dos años antes de la publicación de Desargues, que curiosamente no contiene ni una sola figura. Se podía pensar, que como en muchas de las ediciones de la época habría, un Atlas final con ellas, pero si existió, no se conoce.

Mostramos en la Fig. 5.16. la primera y penúltima páginas de *Brouillon Projet* de Desargues. La segunda imagen se corresponde con unas hojas de aclaraciones con las que finaliza su escrito. En este caso, sobre las líneas de acción de determinadas fuerzas descritas en los apartados correspondientes que aparecen numerados.

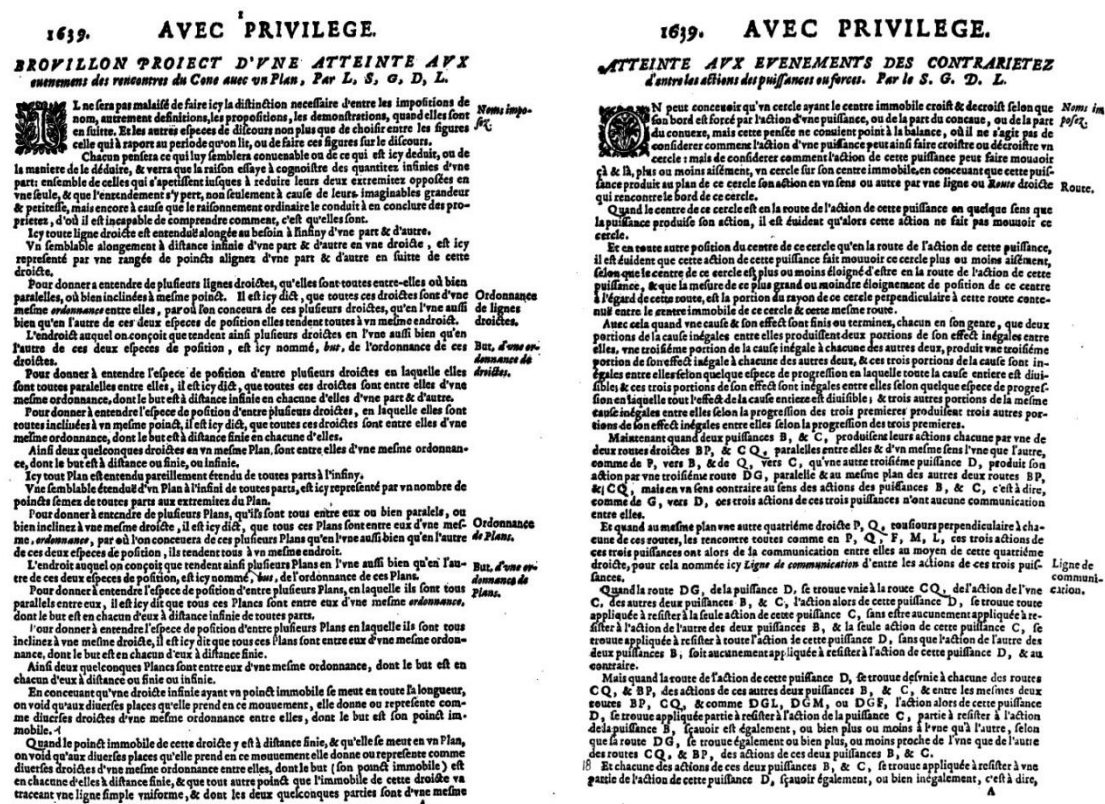


Fig. 5.16. Primera y penúltima páginas de *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* de Girard Desargues.

<sup>43</sup> Desargues, Girard. *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan*. Paris 1639. (<http://www.bibnum.education.fr>)

Girard Desargues (1591-1661) es, *en opinión* de la mayoría de los historiadores de las matemáticas, el geómetra más original y más fecundo del S. XVII. Ignorada por la mayor parte de sus contemporáneos, a pesar de la favorable opinión de sabios tan eminentes como Descartes, Fermat o Pascal, su obra abarca desde los principios de la Geometría Proyectiva a las aplicaciones más concretas de esta ciencia a la Arquitectura, Estereotomía de la piedra, Gnomónica (estudio y determinación de cartas solares) y Perspectiva.<sup>44</sup>

Su mayor contribución a la Geometría Proyectiva, de la que estamos introduciendo los principios básicos en este apartado de nuestra Tesis es el “ensayo” ya mencionado, considerado por el propio Desargues como un boceto destinado a ser posteriormente mejorado con las puntualizaciones de los lectores.

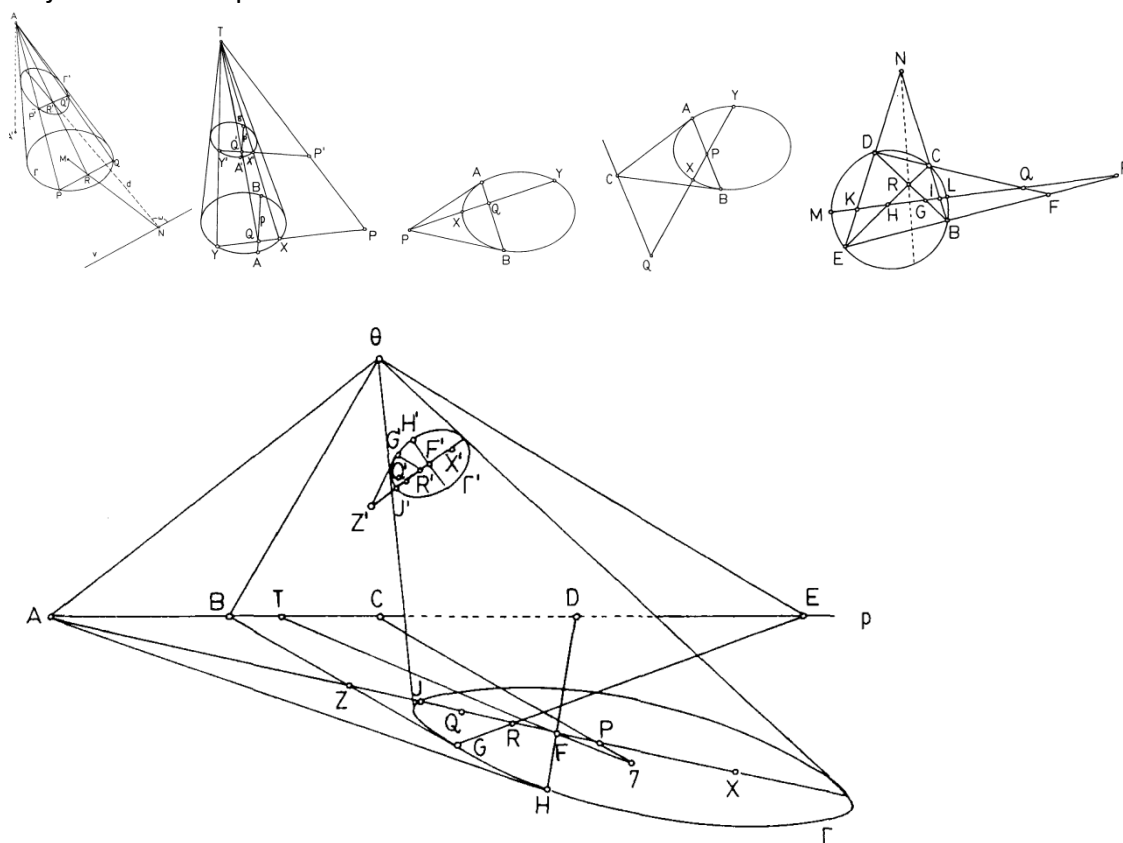


Fig. 5.17. Distintas imágenes representativas de algunos de los conceptos proyectivos del texto de Desargues reinterpretados por Michel Chasles.<sup>45</sup>

<sup>44</sup> Sobre la obra fundamental de Desargues, ver el artículo de René Taton: *Découverte d'un exemplaire original du "Brouillon Project" sur les Coniques de Desargues*. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1951. Vol. 4. Nº 4-2. Pp. 176-181. Persée. (<http://www.persee.fr/web/revues>).

<sup>45</sup> La obra de Desargues, estuvo dispersa en hojas sueltas durante mucho tiempo, hasta que en 1845 Michel Chasles encontró en una librería de viejo, unos escritos sueltos (así era el modo original de escritura de Desargues) al mismo tiempo que la copia manuscrita incompleta de *Brouillon projet* de 1639, hecha en 1679 por Philippe la Hire. Ver *Note sur les ouvrages de Desargues* en *Comptes rendus* de la Académie de Sciences t.20, 1845, pp. 1550-1551.

De los análisis que los matemáticos posteriores a Desargues hicieron de sus escritos, se fueron extrayendo los principios y teoremas contenidos en ellos y sobre todo, se pudieron dibujar, en el intento de sistematizar la comprensión de lo expuesto.

Mostramos en la Fig. 5.18. el Teorema fundamental por el que Desargues es más conocido y que en cierto modo anuncia los mecanismos de proyectividad que vamos a enunciar, de forma resumida a continuación, como itinerario conductor a las aplicaciones de la Geometría Projectiva de las que se nutre la Estática Gráfica.

Si proyectamos un triángulo del plano proyectivo de vértices  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ , desde un punto  $(O)$ , obtenemos otro triángulo de vértices  $(A')$ ,  $(B')$ ,  $(C')$ , y decimos que los dos triángulos son perspectivas desde  $(O)$ . Entonces, dos triángulos son perspectivas si y sólo si los lados correspondientes se cortan en tres puntos alineados.

El teorema de Desargues tiene una versión en el espacio cuya demostración es casi inmediata. En efecto, si los dos triángulos están en dos planos diferentes del espacio proyectivo, entonces los puntos  $(P)$ ,  $(Q)$ ,  $(R)$  de intersección de los lados correspondientes están en la intersección de los dos planos, que es una recta. El teorema de Desargues para el plano, se puede considerar un caso límite de esto, cuando los dos planos se confunden en uno.

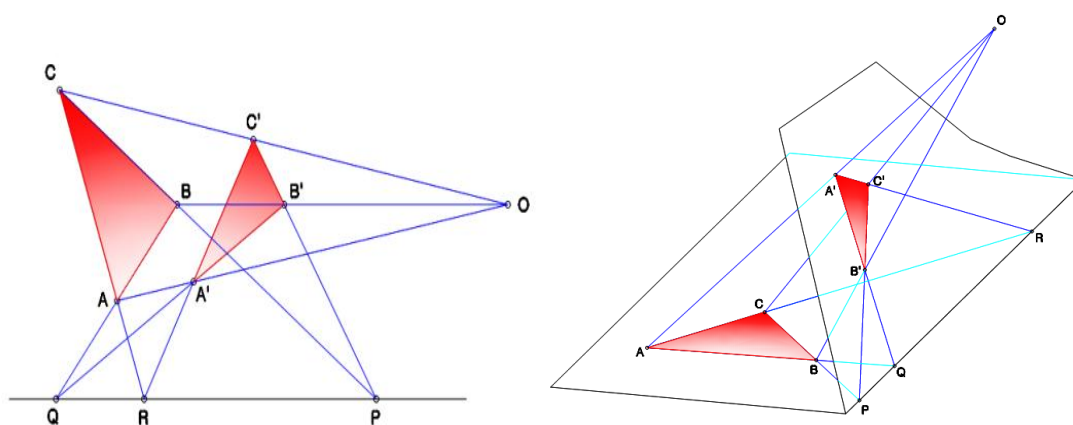


Fig. 5.18. Representación del teorema de Desargues en el plano y en el espacio.

Las Propiedades Métricas son aquellas en las que intervienen las medidas de las distancias y los ángulos y las Propiedades Descriptivas son las que sólo se tratan de la relación entre las posiciones de los elementos geométricos entre sí. Una propiedad métrica sería, por ejemplo, en el enunciado del teorema de Pitágoras, la que relaciona la superficie del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, con la suma de las superficies de los cuadrados construidos sobre sus dos catetos. Una propiedad descriptiva o de posición, sería la definición del hexágono místico de Pascal, que preconiza que si un hexágono se encuentra inscrito en una cónica, los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos están alineados.

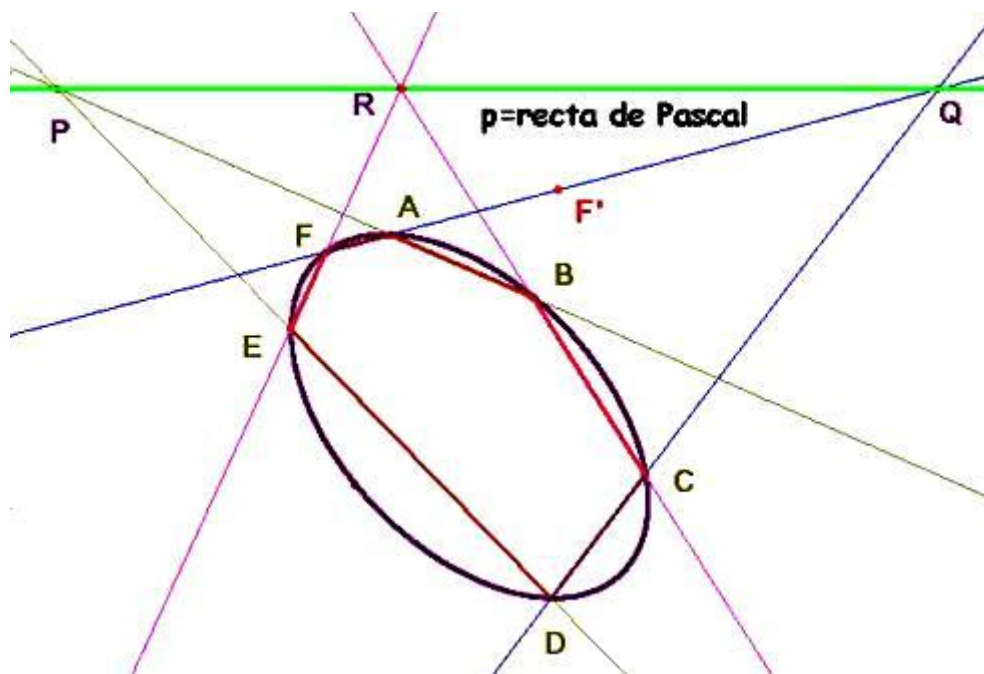


Fig. 5.19. Representación del teorema de Pascal en el que un hexágono está inscrito en una cónica (elipse).

Uno y otro tipo de propiedades geométricas, se aclaran más cuando se considera, por lo menos en el caso de figuras planas, el hecho de que las propiedades descriptivas (las que tienen que ver con la posición) no se alteran cuando se somete la figura a una proyección sobre un plano, por ejemplo, mientras que las propiedades métricas (las que tienen que ver con medidas de longitudes o ángulos) pueden no verificarse una vez realizada dicha proyección. De forma que cuando se proyecta un triángulo rectángulo contenido en un plano cualquiera, dicha proyección no cumplirá en general las condiciones del teorema de Pitágoras y ni siquiera será un triángulo rectángulo. Lo que sí se cumplirá es que seguirá siendo un triángulo, o sea tres rectas concurrentes dos a dos, o serán coincidentes, en el caso de proyectar sobre un plano perpendicular al que contiene al triángulo.

Con las propiedades proyectivas o descriptivas, sucede al contrario. En el caso del Teorema de Pascal, de un hexágono inscrito en una cónica, se proyectará como otro hexágono inscrito en otra cónica, pero los puntos alineados se proyectarán como puntos que también estarán alineados.

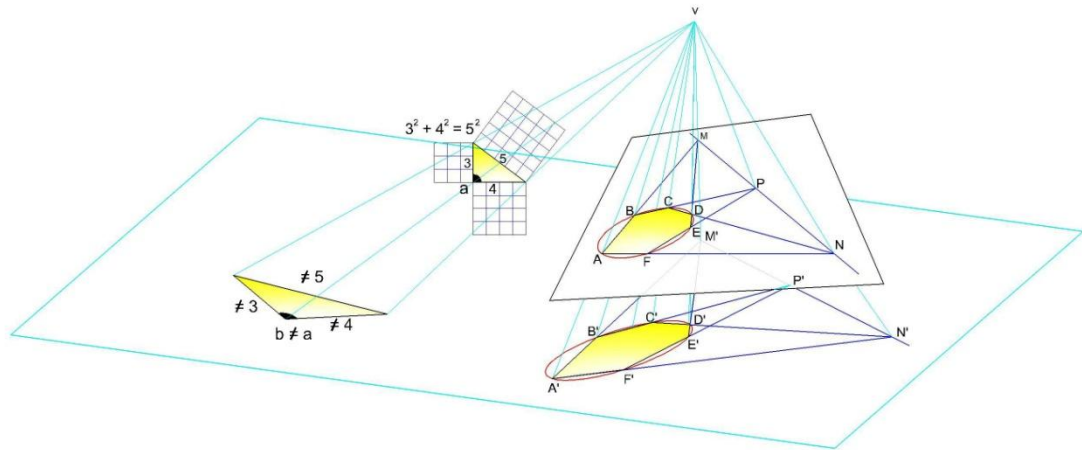


Fig. 5.20. Proyección del hexágono inscrito en una elipse sobre un plano cualquiera y comprobación de teorema de Pascal. El alineamiento de los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos es una Propiedad Proyectiva. La relación pitagórica de los lados del triángulo rectángulo, es una propiedad métrica que no se conserva al proyectarse. No es una propiedad proyectiva. (Dibujos propios).

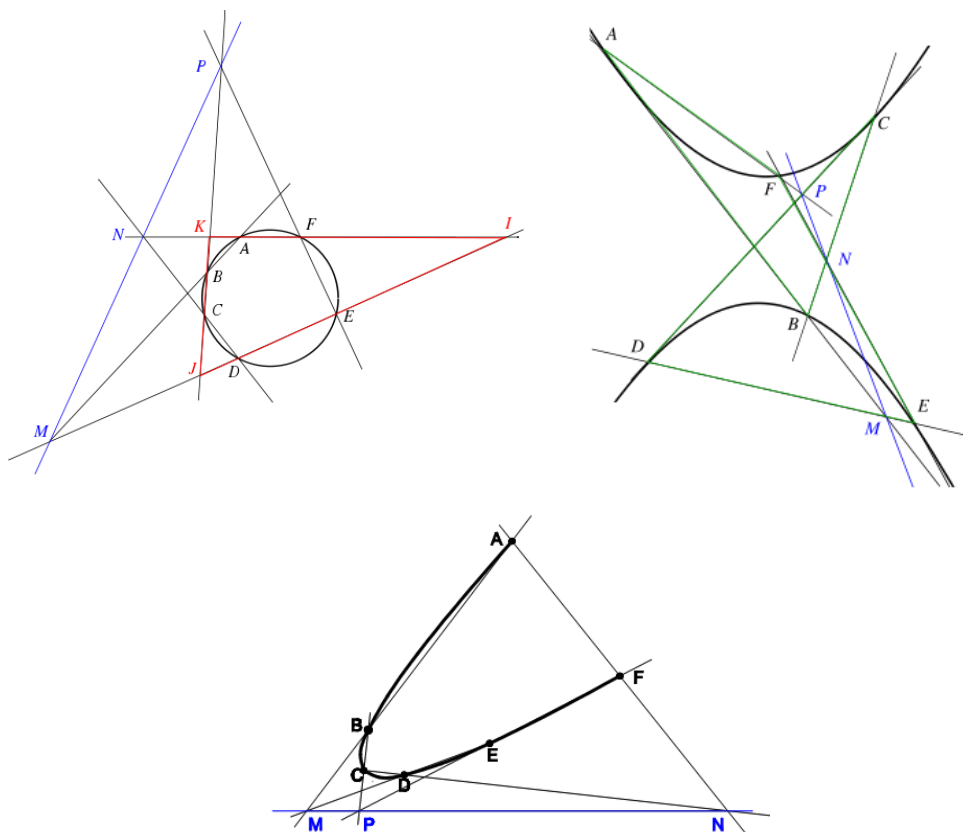


Fig. 5.21. La alineación de los tres pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica, se cumple, para cualquier cónica. Como en el caso de la hipérbola, de la circunferencia y de la parábola de las figuras. Se trata de una propiedad proyectiva. (Dibujos propios)

Definitivamente fue Jean Victor Poncelet, oficial del ejército de Napoleón, quien prisionero en Rusia y sin acceso a libros durante su prisión, elaboró su *Traité des propriétés projectives des figures*. (Poncelet, 1822). Sus trabajos, junto con los de Desargues *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (Desargues, 1639) indujeron a la clasificación de las propiedades geométricas de las figuras en las dos categorías fundamentales de Métricas y Descriptivas o de Posición.

Fundamental en la obra de Poncelet es el nuevo concepto de Cuaterna Armónica, que por su trascendencia al conservarse dicha propiedad tras la proyección, (Relación Projectiva) reproducimos en la Fig. 5.35., mostrando en la 5.36. cómo encontrar dados tres puntos, A, B, C, un cuarto punto D, que forme cuaterna armónica con los otros 3.

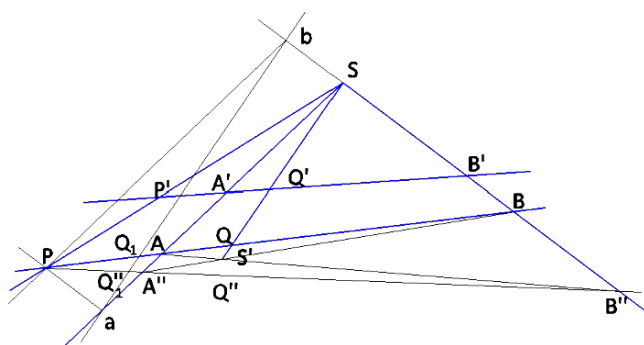


Fig. 5.22. Recreación de la Fig. 1 de la Plancha I del *Traité* de Poncelet en la que se describe la Relación Armónica entre cuatro puntos P, A, Q, B tales que  $PA/PB = QA/QB = PQ - PA/PB - PQ$ . Proyectando desde un punto cualquiera S los cuatro puntos P, A, Q y B, sobre una recta cualquiera, se da  $P'A'/P'B' = Q'A'/Q'B' = P'Q' - P'A'/P'B' - P'Q'$ . Poncelet demuestra que la razón doble ( $\lambda = -1$ ) entre los cuatro puntos se conserva tras la proyección. La relación armónica entre cuatro puntos de una recta es una Relación Projectiva. (Dibujos propios)

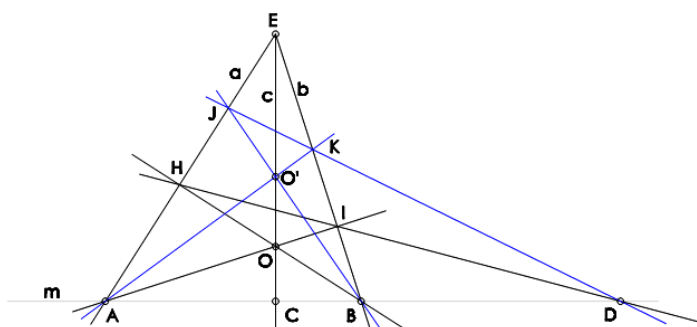


Fig. 5.23. Construcción de una cuaterna armónica. Sean A, B, C, D cuatro puntos sobre la recta m. Se dice que los puntos A y B están separados armónicamente por C y D o que A, B, C, D forman una cuaterna armónica, si la razón doble  $[A, B, C, D] = -1$ . Veamos cómo encontrar un cuarto punto D, que forme cuaterna armónica con otros tres A, B y C dados. Elegido un punto arbitrario E, se traza el haz de rectas  $a = EA$ ,  $b = EB$ ,  $c = EC$  y elegido sobre la recta c un punto cualquiera O se traza AO que determina I sobre b y se traza también BO que termina H sobre a. La unión de HI determina el cuarto punto D buscado, de la cuaterna armónica, sobre la recta m. La construcción geométrica demuestra que ese cuarto punto D es fijo, dados A, B, y C y su determinación es independiente del punto O elegido sobre la recta c. Si elegimos un segundo punto O', la recta AO' determina el punto K sobre b y la recta BO' determina J sobre a volviendo a encontrarse D como intersección de JK sobre m. (Dibujos propios)

### 5.3.5. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA PARA LA GRAFOSTÁTICA

#### 5.3.5.1. RECTA, PLANO Y ESPACIO PROYECTIVOS

En una revisión de los conceptos que de la Geometría Proyectiva utilizaron en sus investigaciones científicos como Maxwell o los tratadistas de la Estática Gráfica, Culmann, Cremona y Favaro, se hace necesaria la introducción de los que resultan básicos para la investigación propuesta en esta Tesis, del itinerario que condujo a la génesis de la Grafostática. Es por ello que sintetizamos, a continuación dichos conceptos, comenzando por los elementales: La recta, el Plano y el Espacio proyectivos.

Si consideramos el plano de la geometría elemental (Fig. 5.24. izqda.) y en dicho plano una recta  $(r)$  y un punto  $(O)$  que no pertenece a ella, hagamos corresponder a cada punto  $(A)$  de  $(r)$ , la recta  $(a) = (OA)$ , que es la recta que lo proyecta desde  $(O)$ . Tenemos, de esta forma, definida una correspondencia entre los puntos de la recta  $(r)$  y las rectas del haz de rectas con vértice o base en  $(O)$ .

Esta correspondencia no es biunívoca, porque a la recta  $(r')$  que pertenece al haz con base en  $(O)$  y es paralela a  $(r)$  no le corresponde ningún punto de  $(r)$ .

Para que la correspondencia sea biunívoca se estableció el convenio de considerar que a la recta  $(r')$  le corresponde también un punto, al que se llamó punto impropio, punto del infinito o punto ideal de la recta  $(r)$ .<sup>46</sup>

Si a los puntos de la recta  $(r)$  se le añade un punto impropio, o punto del infinito, se obtiene una Recta Proyectiva. Sería equivalente al conjunto de rectas del plano que pasan por un punto, considerándose estas rectas como los puntos de la recta proyectiva.

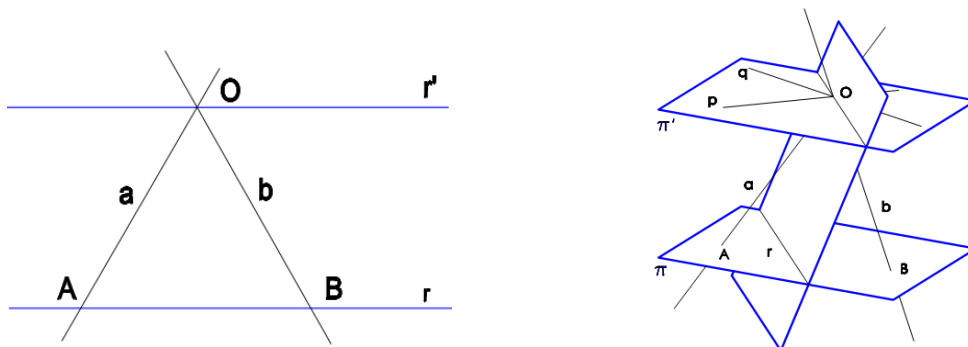


Fig. 5.24. Representación gráfica de los conceptos de recta y plano proyectivos. (Dibujos propios)

<sup>46</sup> Este primer concepto proyectivo, ya anuncia que la Geometría Proyectiva, tiene mucho que ver con conceptos filosóficos, en tanto en cuanto la idea de puntos del infinito supone la trascendencia de lo real. Ver al respecto Magnani, Lorenzo. *Philosophy and Geometry. Theoretical and Historical Issues*. Kluwer Academic Publisher: Norwell MA 2001.



Si consideramos ahora el espacio de la geometría elemental y en él un plano  $(\pi)$  y un punto  $(O)$  exterior a él y hacemos corresponder a cada punto  $(A)$  de  $(\pi)$  la recta  $(a) = (OA)$  que lo proyecta sobre  $(O)$ . A cada punto de  $(\pi)$  le corresponde una recta, pero al igual que en caso anterior, esta correspondencia no es biunívoca, porque a las rectas que pasan por  $(O)$  y son paralelas a  $(\pi)$ , es decir las rectas contenidas en  $(\pi')$ , paralelo a  $(\pi)$  por  $(O)$ , no les corresponde ningún punto de  $(\pi)$ .

Para que dicha correspondencia sea biyectiva tendremos que conseguir que a cada recta que pasando por  $(O)$  sea paralela a  $(\pi)$  le corresponda un punto impropio, punto ideal o punto del infinito del plano  $(\pi)$ . A las rectas  $(r)$  de  $(\pi)$  les corresponden los planos que las proyectan desde  $(O)$  y al punto de intersección de dos rectas le corresponde la recta intersección de los planos que las proyectan. Además, si dos rectas son paralelas en  $(\pi)$ , la recta intersección de los planos que las proyectan desde  $(O)$ , es paralela a  $(\pi)$ , pudiéndose decir que las rectas paralelas tienen un punto impropio o del infinito común.

El conjunto de los puntos impropios de  $(\pi)$  corresponde a las rectas contenidas en  $(\pi')$  que pasan por  $(O)$  y como a éstos, corresponden rectas de  $(\pi)$ , se puede decir que los puntos impropios constituyen la recta impropia o recta del infinito del plano  $(\pi)$ .

Si a los puntos del plano  $(\pi)$  se le añaden los puntos impropios, se tiene el Plano Proyectivo. Sería equivalente al conjunto de rectas que pasan por un punto del espacio, considerándose a estas rectas como puntos y a los planos como rectas del plano proyectivo.

Estas consideraciones de tipo intuitivo anteriores, pueden generalizarse en dos sentidos:

- Aumentando el número de dimensiones, lo que analíticamente no comporta dificultad, aunque para la geometría visual heredada de la tradición euclídea comienza a pasar a un nivel no perceptible.

- Considerando conjuntos de puntos más generales que los que constituyen la recta y el plano ordinarios, como por ejemplo, considerando la recta racional, en la que sólo se consideran puntos de abscisas racionales, o la recta compleja si se consideran conjuntos de puntos cuyas abscisas sean números complejos, que naturalmente, abarcan mayor ámbito.

Era muy importante en el comienzo de las interpretaciones de los procesos proyectivos, el estudio del comportamiento de las figuras y sus secciones y en particular, como ya hemos analizado, las propiedades que de ellas permanecen invariantes tras la proyección.

Por ejemplo, las figuras geométricas que pueden corresponder a una recta o una cónica, son también, respectivamente, una recta o una cónica, pero se observan algunas características anómalas en la correspondiente transformación.

De esta manera, observamos en la Fig. 5.25. , cómo a la cónica, en este caso una elipse ( $E_p$ ) del plano afín ( $\pi$ ), le corresponde, mediante la proyección desde el vértice ( $O$ ) del cono, otra cónica de tipo distinto, en el plano también afín ( $\pi'$ ), en la figura una parábola ( $P_b$ ). Por otra parte, a las dos rectas concurrentes ( $m$ ) y ( $n$ ) en el punto ( $Q$ ) del plano ( $\pi$ ), le corresponden las rectas ( $m'$ ) y ( $n'$ ) paralelas en el plano ( $\pi'$ ), como se demuestra más adelante.

Se comprueba de forma intuitiva que la causa de estas irregularidades, es que faltan puntos en el plano afín ( $\pi'$ ) para completar algunas figuras que representen biunívocamente la proyección desde ( $O$ ) de figuras del plano ( $\pi$ ) que contengan al punto ( $Q$ ), ya que el rayo que proyecta a ( $Q$ ) desde ( $O$ ), no corta al plano ( $\pi'$ ).

Es por estas carencias, por lo que surgió la idea de modificar el plano afín, (también el espacio afín), añadiéndole una serie de puntos adecuadamente elegidos, constituyéndose una Nueva Geometría, en la que las propiedades de las figuras permanecieran invariantes tras los procesos de proyección y sección.

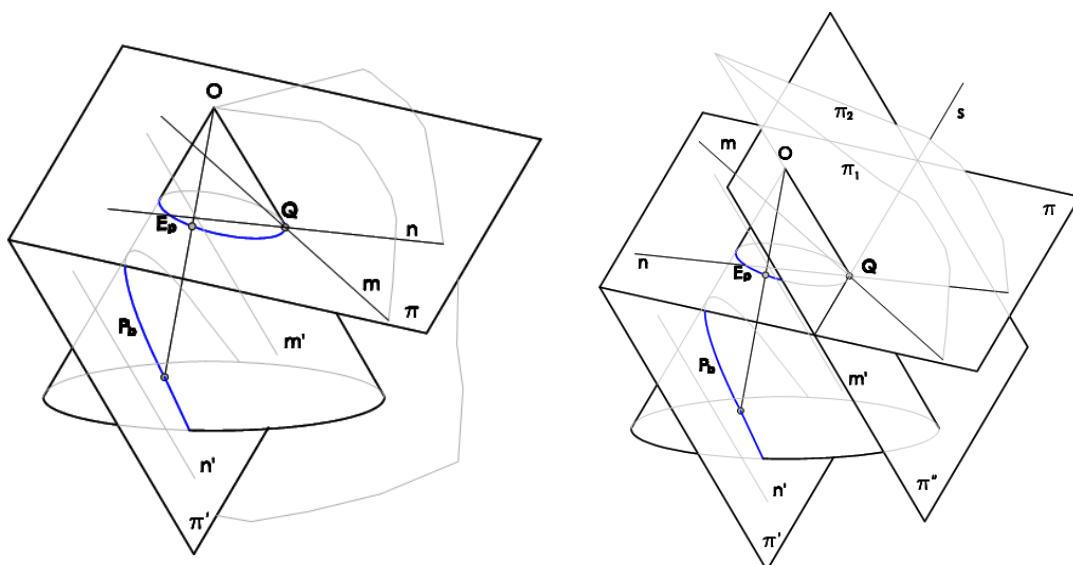


Fig. 5.25. Proyección y sección de cónicas afines. A ( $E_p$ ) del plano afín ( $\pi$ ), le corresponde, mediante la proyección desde el vértice ( $O$ ) del cono, otra cónica de tipo distinto, en el plano también afín ( $\pi'$ ), en la figura una parábola ( $P_b$ ). Por otra parte, a las dos rectas concurrentes ( $m$ ) y ( $n$ ) en el punto ( $Q$ ) del plano ( $\pi$ ), le corresponden las rectas ( $m'$ ) y ( $n'$ ) paralelas en el plano ( $\pi'$ ). (Dibujos propios)

Como hemos señalado, a partir de un espacio afín, podemos obtener un nuevo espacio, añadiendo al primero una adecuada colección de puntos adicionales. El proceso de selección de esos puntos de compleción se explica mediante las figuras que hemos incorporado más arriba en las que una superficie cónica es seccionada por unos planos y que aprovechamos para identificar con la proyección desde su vértice  $(O)$  de una serie de elementos: puntos, rectas y cónicas, situadas en uno de esos planos  $(\pi)$ .

Estudiamos, en primer lugar el plano  $(\pi')$  que pasa por  $(O)$  y es paralelo a  $(\pi)$ . Corta al plano  $(\pi)$  en una recta  $(s)$  que contiene al punto  $(Q)$ . Los puntos de dicha recta  $(s)$  son los puntos de  $(\pi)$  que no pueden ser proyectados desde  $(O)$  sobre el plano  $(\pi')$ . Por lo tanto, si una recta afín cualquiera  $(n)$  de  $(\pi)$  es incidente con  $(s)$  y  $(n')$  es la proyección de  $(n)$  sobre  $(\pi')$ , parece lógico completar  $(n')$  con un punto adicional que haga que a todo punto de la recta afín  $(n')$  le corresponda una recta del haz de rectas proyectantes desde  $(O)$ .

Este punto que añadimos a la recta  $(n')$  es su punto impropio o punto del infinito. La recta del haz de rectas proyectantes desde  $(O)$  que proyecta al punto  $(Q)$  en ese punto impropio de  $(n')$  sería la generatriz  $(OQ)$  del cono que es paralela a  $(\pi')$ . La recta  $(n')$  a quien hemos incorporado su punto impropio, ha pasado a ser una Recta Projectiva.

Por otra parte, si las rectas  $(m)$  y  $(n)$  de  $(\pi)$  concurren en un punto  $(Q)$  de  $(s)$ , entonces las proyecciones  $(m')$  y  $(n')$  de dichas rectas sobre  $(\pi')$  son rectas paralelas, intersecciones con el plano  $(\pi')$  de los planos proyectantes  $(\pi_1)$  y  $(\pi_2)$ , que conteniendo a las rectas  $(m)$  y  $(n)$  de  $(\pi)$ , pasan por la generatriz  $(OQ)$  del cono que es paralela a  $(\pi')$ . Parece también lógico completar estas proyecciones  $(m')$  y  $(n')$  con el mismo punto adicional (impropio), de forma que la situación de incidencia de las rectas así completadas, será análoga a la de las rectas origen de la proyección,  $(m)$  y  $(n)$  de  $(\pi)$ .

Lo que acabamos de describir para un espacio afín concreto, es aplicable a cualquier espacio afín arbitrario. Cualquier espacio afín  $(X)$  puede generar un Espacio Projectivo  $(*X)$  completando  $(X)$  con un conjunto de puntos adicionales de manera que cada recta afín de  $(X)$  se completa con un único punto. Y dos rectas afines de  $(X)$  se completan con el mismo punto, si y sólo si, son paralelas.

Los puntos de  $(*X)$  que completan el espacio afín  $(X)$  son los puntos impropios o puntos del infinito de  $(X)$ .

### 5.3.5.2. DUALIDAD, POLARIDAD Y RECIPROCIDAD

...“Contrariwise” ...Y al contrario... ¿Cuántos planos hay contenidos en un punto? Tantos como puntos pasan por un plano. Y... “contrariwise”, que diría *Tweedledee*.

*Tweedledum and Tweedledee* (Patachunta y Patachún o Tararí y Tarará en la traducción española) son personajes del cuento *Alicia a través del espejo y lo que encontró al otro lado* de Lewis Carroll y de una canción de cuna inglesa anónima. Los nombres fueron tomados de un poema de John Byrom y parece que provienen del hecho de enredar con los dedos o agitarlos sin ningún sentido práctico (*tweedle*). (Carroll, 1871)

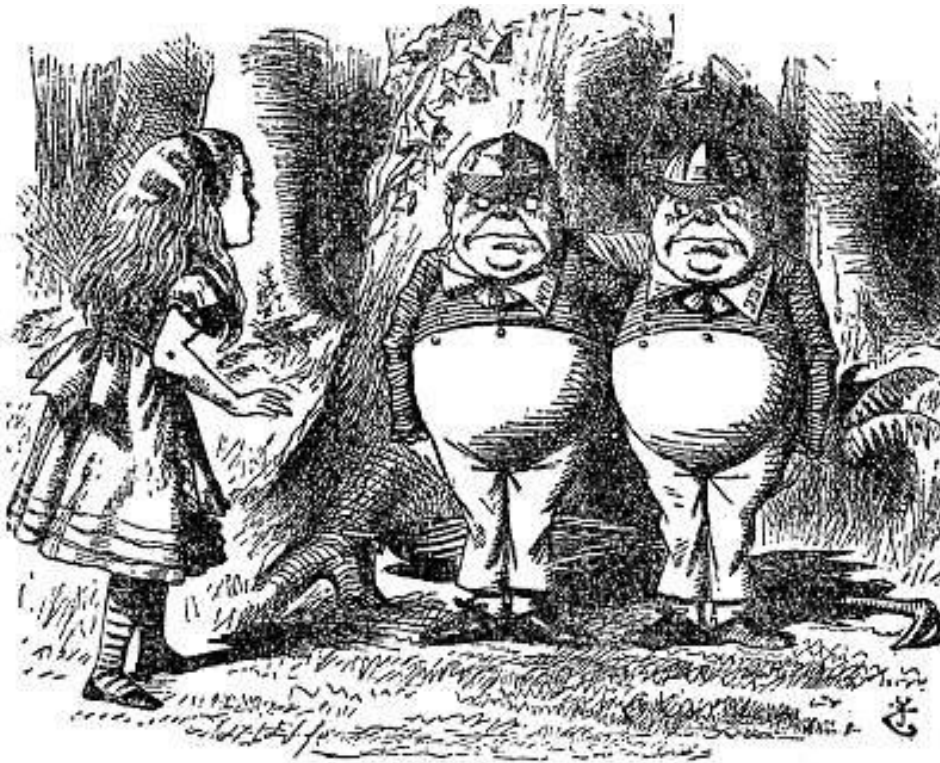


Fig. 5. 26. Ilustración de Tenniel de Patachunta y Patachún para el capítulo 4º de *Alicia a través del espejo* (Lewis Carroll), originalmente publicado en 1871. Ilustración tomada de la edición de Alianza. 1973.

Si en el primer libro de Carroll, Alicia tomaba contacto con el mundo de los adultos, en el segundo ingresa en él. Al "atravesar el espejo" Alicia está atravesando el umbral de su niñez. El mundo que le espera "al otro lado" es, a la vez, igual y radicalmente distinto al suyo propio. Tal como observa Martin Gardner en *Alicia anotada*,<sup>47</sup> "en un espejo... todos los objetos asimétricos van en dirección contraria". Se produce, a lo largo de la narración, una inversión de la realidad.

<sup>47</sup> Carroll, Lewis. *Alicia anotada: Alicia en el país de las maravillas. A través del espejo*. edición de Martin Gardner. Traducción de Francisco Torres Oliver. Colección Grandes Libros. Ediciones Akal: Madrid 1998.

Para llegar donde está la Reina Roja, Alicia camina hacia atrás; Alicia reparte el pastel del León y el Unicornio y después lo parte; Alicia contempla el mundo de los adultos no como la "realidad" sino, lo contrario; como una inversión de la realidad. Para entender esta "inversión" es preciso echar mano de dos palabras definitorias en el idioma inglés. Se trata del *common sense* y, de su opuesto, el *nonsense*. La sociedad victoriana estaba basada en unas normas de conducta que nacían del sentido pragmático del pueblo inglés, de su *common sense*. Pero estas normas, vistas a través de los ojos inocentes de una niña, aparecen desprovistas de su sentido común, resultan ser totalmente convencionales y arbitrarias. (Gardner, 1998)

La dualidad es un concepto omnipresente en toda la Matemática, pero tal vez sea en Geometría Proyectiva donde mejor puede ilustrarse su interés. Es un diccionario que permite traducir de un contexto a otro nociones y resultados.

En el plano proyectivo, una recta tiene por dual un haz de rectas, que se identifica con su punto base, y se obtiene lo siguiente:

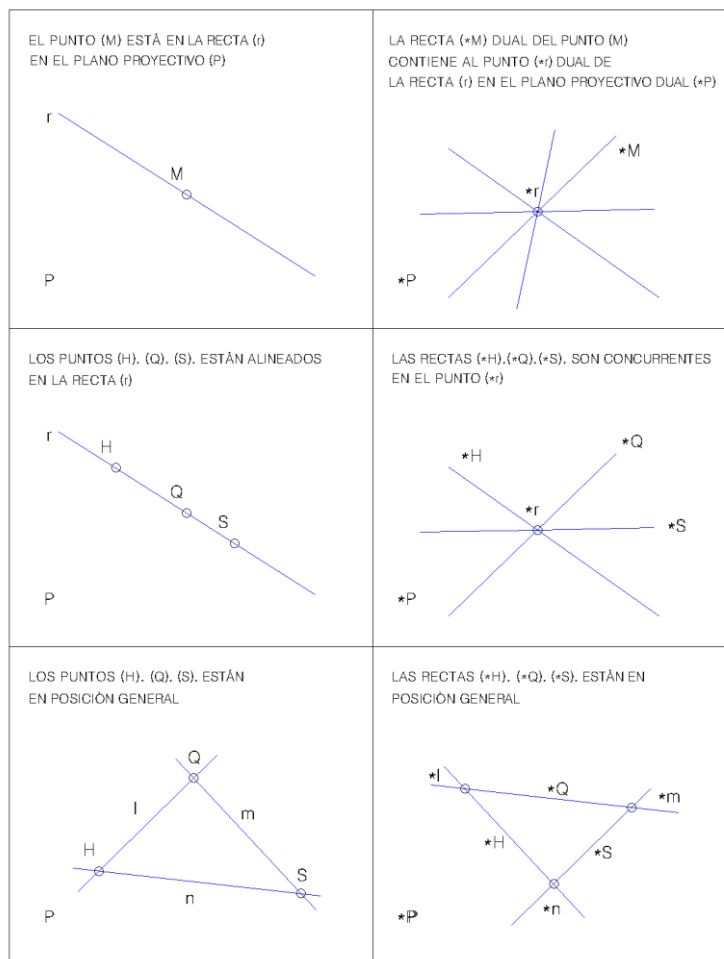


Fig. 5.27. Esquema representativo de elementos de un espacio proyectivo y los elementos duales en el espacio proyectivo dual. (Esquema y dibujos propios)

Una vez se conoce el diccionario entre variedades y variedades duales, se cumple el denominado *Principio de dualidad*, según el cual una proposición relativa a variedades proyectivas es cierta si y sólo si es cierta su dual. Este principio fue establecido inicialmente por Jean-Victor Poncelet, ligado a la noción de polaridad respecto de una cónica dada.

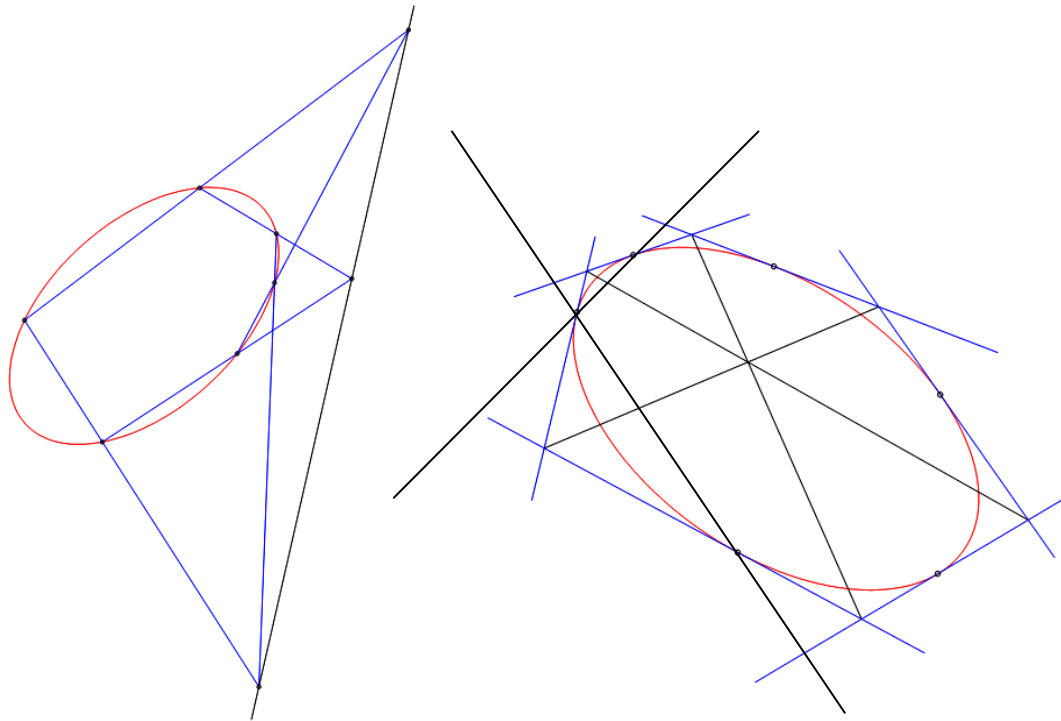


Fig. 5.28. Representación del teorema de Pascal y su dual teorema de Brianchon. (Dibujos propios)

Tal vez uno de los ejemplos más bellos de dualidad sea el denominado Teorema de Brianchon que es el enunciado dual del Teorema de Pascal. En efecto, utilizando la dualidad asociada a una cónica, Julien Brianchon (1785–1864)<sup>48</sup> demostró lo siguiente: Suponemos que seis rectas distintas dadas ordenadamente son tangentes a una cónica regular. Entonces las rectas son los lados sucesivos de un hexágono cuyos vértices opuestos determinan tres rectas concurrentes.

Si tenemos en cuenta que las rectas tangentes a una cónica regular son duales de los puntos de la cónica tangencial asociada y si recordamos el teorema de Pascal, suponemos seis puntos distintos dados ordenadamente que están contenidos en una cónica regular. Entonces los puntos son los vértices sucesivos de un hexágono, cuyos lados opuestos se cortan en tres puntos alineados.

<sup>48</sup> Brianchon, Charles Julien. *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré*. Journal de l'Ecole Polytechnique: Avril 1806.

Resulta asimismo imprescindible para la comprensión de cómo la Geometría proyectiva influyó en el origen la Estática Gráfica, el análisis de los conceptos de Polo y Recta polar en relación con las curvas de segundo orden.

La teoría de los polos y de las rectas polares se encontraba ya, con otras denominaciones en las obras de Desargues (*Oeuvres réunies et publiées par M. Poudra. Paris 1864. t. I, p. 164, 186, 190 y ss.*) y en las de La Hire (*Sections conicae. Paris, 1685, I, 21-28; II, 23-30.*). Conviene recordar que en los orígenes, se debe a Apolonio el célebre teorema que La Hire tomó como fundamento de su teoría de las cónicas y que enunció: “*Si por el punto de concurrencia de dos tangentes a una sección cónica se lleva una transversal que corte a la cónica en dos puntos y a la cuerda que une los puntos de contacto, en un tercer punto; ese tercer punto y el de intersección de las dos tangentes serán conjugados armónicos con relación a los dos primeros*”.

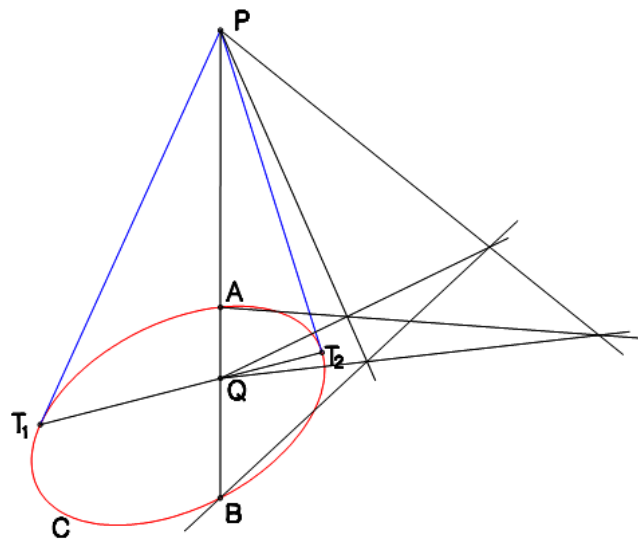


Fig. 5.29. Representación del teorema enunciado donde se demuestra, con la construcción auxiliar de la derecha, que los puntos ( P ) de concurrencia de las tangentes a la cónica ( C ) en ( T1 ) y ( T2 ) y ( Q ), de intersección de la secante transversal ( PB ) con la cuerda de las tangencias ( T1 ) y ( T2 ), son conjugados armónicos de los puntos ( A ) y ( B ) de la cónica ( C ). La razón doble [ P, A, Q, B ] = -1

Asimismo ya habían compartido Chasles y Desboves la opinión de que el *Traité complet des coniques de Pascal*, contiene una teoría completa de polos y rectas polares. (Chasles, 1837 : 19, 71, 123)<sup>49</sup> ( Desboves, 1878 : 47)<sup>50</sup>

<sup>49</sup> Chasles, Michel. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne , suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie* Vol.II. M. Hayez: Bruxelles 1837.

<sup>50</sup> Deboves, A. *Étude sur Pascal et les géomètres contemporaines suivie de plusieurs notes scientifiques et littéraires*. Librairie Ch. Delagrave: 1878.

Gaspard Monge, en su *Géométrie descriptive*, (Monge, 1803) había demostrado que cuando el vértice de un cono circunscrito a una superficie de segundo orden, recorre un plano, el plano de la curva de contacto, pasa siempre por un mismo punto. Y que cuando el vértice de ese mismo cono recorre una recta, el plano de la curva de contacto pasa siempre por una segunda recta. Brianchon demostró más tarde que cuando el vértice de ese cono recorre una superficie de segundo orden, el plano de la curva de contacto desarrolla una segunda superficie de segundo orden. Brianchon hizo uso de esta teoría para deducir del teorema de Pascal, su no menos elegante teorema ya expuesto, siendo la primera aplicación que se hizo de las polares y de la dualidad de las figuras planas. (Brianchon, 1806)

Poncelet había ya expuesto en el Capítulo II. Sección II. *Théorie Générale des Polaires Réciproques* de su *Traité des propriétés projectives...* los fundamentos, que aquí exponemos y que resultan útiles para la comprensión de la figuras recíprocas, origen de la Estática Gráfica. En particular los conceptos de polos y rectas polares en relación a curvas de segundo orden. (Poncelet, 1822. C.II, S. II)

Por un punto **(U)** del plano de una curva (en el estudio que hemos representado, una elipse), que no esté situado sobre ella, se trazan dos secantes que cortan a la curva en **(A)**, **(C)**, **(B)** y **(D)**. El cuadrángulo **(ABCD)** queda, pues, inscrito en la elipse. Los puntos **(P)**, **(Q)** de intersección de los lados opuestos y **(R)**, **(S)** de intersección de las tangentes a la elipse en los vértices opuestos, están situados sobre una misma recta **(u)**. Si designamos como **(V)** y **(W)** a los puntos de intersección de la recta **(u)** respectivamente con **(AC)** y **(BD)**, se encuentra que **(V)** está armónicamente separado de **(U)** por los puntos **(A)** y **(C)**. En efecto, en el cuadrángulo **(PBQD)** los lados opuestos se cortan dos a dos respectivamente en **(A)** y **(C)**, la diagonal **(BD)** pasa por el punto **(U)** y la diagonal **(PQ)** por **(V)**. De la misma manera, los puntos **(U)** y **(W)** están armónicamente separados por **(B)** y **(D)**.

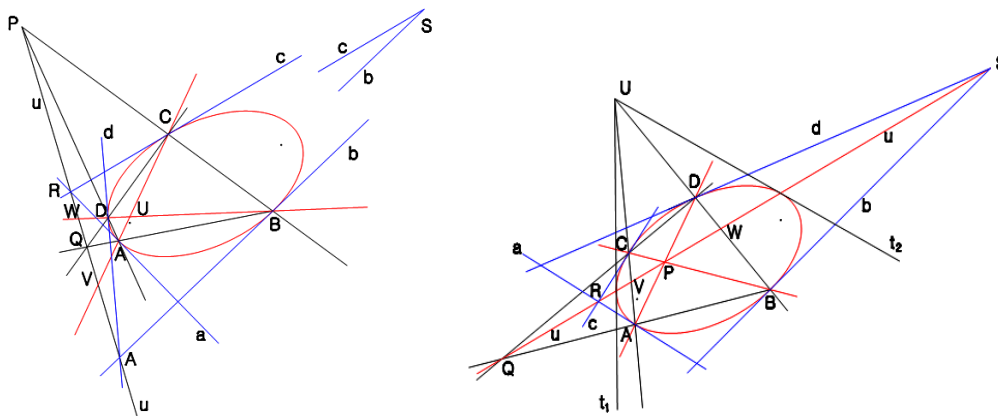


Fig. 5.30. Representaciones de la construcción de la recta Polar de un punto respecto a una cónica. Cuando el punto **(U)** es interior a la cónica (en este caso una elipse) y cuando el punto **(U)** es exterior.



Se determina, entonces, la recta  $(u)$ , haciendo pasar por  $(U)$  una secante  $(AC)$  y buscando sobre esta recta el punto  $(V)$  armónicamente separado de  $(U)$  por los puntos  $(A)$  y  $(C)$  de la curva que hay que unir con el punto  $(R)$  de intersección de las tangentes a la curva por los puntos  $(A)$  y  $(C)$ . Como la segunda secante pasa también por  $(U)$ , se tendrá siempre los siguientes puntos sobre la recta  $(u)$  ya determinada por la primera secante  $(AC)$ :

- Los puntos de intersección  $(P)$  y  $(Q)$  de los lados opuestos del cuadrángulo  $(ABCD)$
- El punto de intersección  $(S)$  de las dos tangentes en  $(B)$  y en  $(D)$
- El punto  $(W)$  armónicamente separado de  $(U)$  por los puntos  $(B)$  y  $(D)$ .

El punto  $(U)$  es el Polo de la recta  $(u)$  así determinada y viceversa la recta  $(u)$  es la recta Polar del punto  $(U)$ .

Es de crucial importancia la obtención de el Polo de una recta respecto a una cónica y “recíprocamente”, la Recta Polar de un punto respecto a esa cónica, para el Cálculo del Núcleo Central de una Sección, como ya hemos demostrado en el punto 4.3. en las Fig. 4.21. y 4.22. para una sección semicircular.

Dos puntos del plano se llaman Conjugados o Recíprocos con respecto a una curva de segundo orden cuando uno de ellos está situado sobre la recta polar del otro. Dos rectas del plano se dicen Conjugadas o Recíprocas con respecto a una curva de segundo orden, cuando una de ellas pasa por el polo de otra. Toda tangente es recíproca de sí misma, ya que pasa por su polo, que es el punto de tangencia. Si dos puntos  $(A)$  y  $(B)$  son recíprocos de un tercero  $(C)$ , la recta  $(AB)$  es la polar de  $(C)$ . Y si dos rectas  $(a)$  y  $(b)$  son recíprocas de una tercera  $(c)$ , el punto de intersección de  $(a)$  y  $(b)$  es el polo de la recta  $(c)$ .

Sentadas estas definiciones relativas al polo de una recta y a la recta polar de un punto, cabe la proposición de las propiedades siguientes, encaminadas a finalmente extender los conceptos de reciprocidad a figuras, para encadenar con las figuras recíprocas, lo que constituye el principio de partida de la Estática gráfica.

Si un triángulo  $(AMB_1)$  está inscrito en una curva de segundo orden, toda recta recíproca a uno de sus lados,  $(AB_1)$ , corta a los otros dos lados en dos puntos recíprocos. (Fig. 5.31.)

Viceversa: Toda recta cortada por dos lados de un triángulo en dos puntos recíprocos, pasa por el polo del tercer lado.

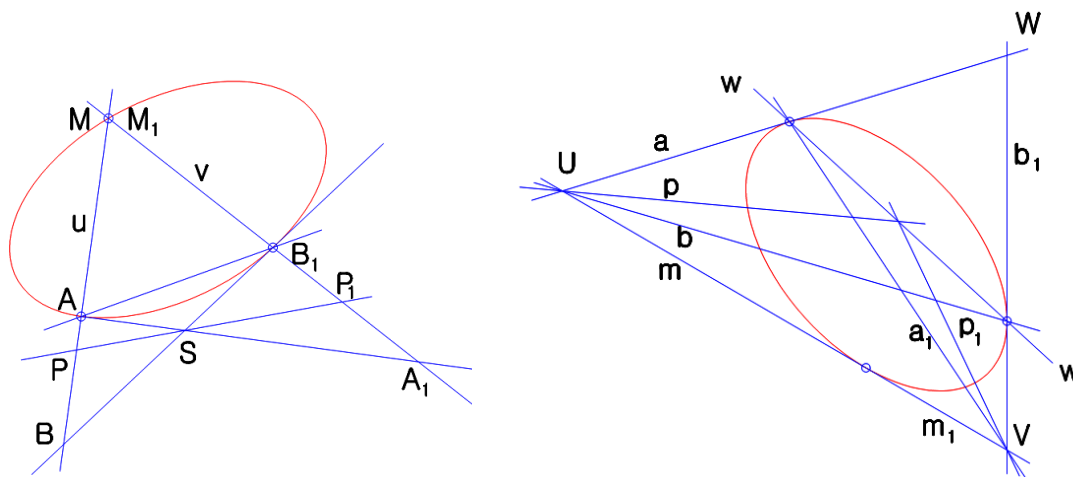


Fig. 5.31. Representación del teorema: Si un triángulo  $(AMB_1)$  está inscrito en una curva de segundo orden, toda recta recíproca a uno de sus lados,  $(AB_1)$ , corta a los otros dos lados en dos puntos recíprocos, y viceversa, toda recta cortada por dos lados de un triángulo en dos puntos recíprocos, pasa por el polo del tercer lado.

En efecto, las puntuales  $(AM) = (u)$  y  $(B_1M) = (v)$ , serán proyectivas si se le asigna como correspondiente a cada punto de  $(u)$  su recíproco de  $(v)$ . El punto  $(M)$  de la curva común a  $(u)$  y a  $(v)$  es, por otra parte, recíproco de sí mismo, engendrando las dos puntuales señaladas un haz de rayos de primer orden. El centro  $(S)$  de ese haz de rayos, debe encontrarse sobre la tangente en  $(A)$  ya que el punto de intersección  $(A_1)$  de esta tangente (**polar de A**) con  $(v)$  es recíproco del punto  $(A)$ . El centro  $(S)$  estará asimismo sobre la tangente en  $(B_1)$  que es la recta polar de  $(B_1)$ .

El punto  $(S)$  es, el polo de  $(AB_1)$  y por tanto, toda recta que pase por él, es decir toda recta recíproca de  $(AB_1)$  corta a  $(u)$  y a  $(v)$  en dos puntos recíprocos  $(P)$  y  $(P_1)$  en la figura de la izquierda. En la figura de la derecha se presenta gráficamente el teorema dual del anterior:

Si un triángulo  $(UVW)$  está circunscrito a una curva de segundo orden, todo punto recíproco a uno de los vértices  $(W)$  es proyectado desde los otros dos vértices mediante dos rayos o rectas recíprocas y viceversa:

Todo punto proyectado desde dos vértices  $(U)$  y  $(V)$  de un triángulo, circunscrito a una curva de segundo orden, por dos rayos recíprocos estará situado sobre la recta polar del tercer vértice del triángulo.

En efecto, en la figura de la izquierda se demuestra que la puntual  $(PP_1)$ , primero es recíproca del lado  $(AB_1)$  del triángulo inscrito en la cónica ya que pasa por el punto  $(S)$  que es el polo de dicho lado  $(AB_1)$  y en segundo lugar, los puntos  $(P)$  y  $(P_1)$  serán recíprocos si la polar de uno de ellos pasa por el otro.

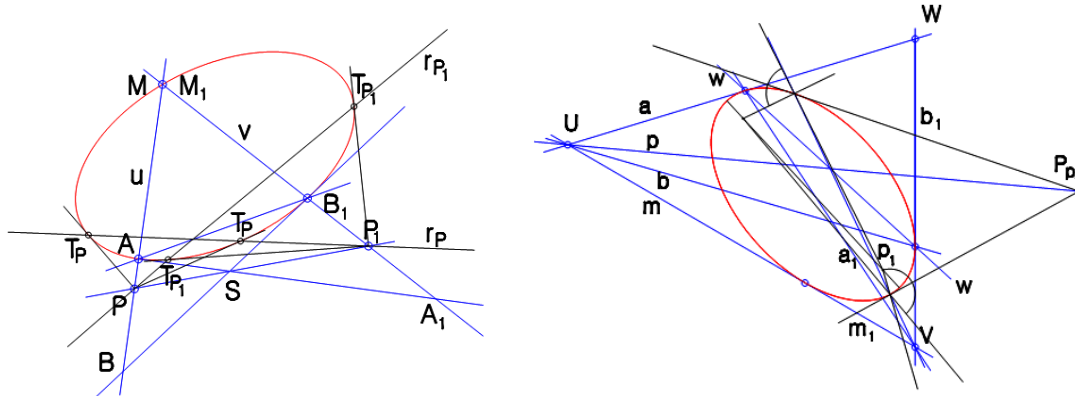


Fig. 5.32. Se demuestra en las figuras anteriores los correspondientes enunciados. (Dibujos y cálculos propios)

Para comprobarlo hemos calculado la recta polar de  $(P)$  trazando las tangentes a la cónica desde  $(P)$  y uniendo los puntos de tangencia  $(TP)$  se obtiene la recta  $(r_P)$ , polar de  $(P)$  que obviamente pasa por  $(P_1)$  y lo mismo sucede con la recta  $(r_{P_1})$ , polar de  $(P_1)$  obtenida uniendo los puntos de tangencia  $(TP_1)$  desde  $(P_1)$  a la cónica, que efectivamente pasa por  $(P)$  con lo que queda demostrado que los puntos  $(P)$  y  $(P_1)$  de corte de la recta recíproca del lado  $(AB_1)$  con los otros dos lados del triángulo, son recíprocos.

Con respecto al teorema dual del anterior, demostramos en la figura de la derecha: Primero, que la recta  $(w)$  es la polar del vértice  $(W)$  puesto que une los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde  $(W)$  por estar el triángulo circunscrito a la elipse.

Segundo, un punto cualquiera de esa recta polar  $(w)$  es proyectado por los rayos  $(p)$  desde el vértice  $(U)$  y  $(p_1)$  desde el vértice  $(V)$  y comprobamos que estos dos rayos son recíprocos, para lo cual calculamos, por ejemplo el polo de la recta  $(p_1)$  Trazamos las tangentes a la cónica en los puntos de intersección con la cónica de la transversal  $(p_1)$ , dichas tangentes se cortan en  $(P_{p_1})$  que será el polo de dicha recta.

Hemos mantenido en el dibujo la construcción geométrica del trazado de la tangente a una elipse en un punto de la misma, aunque han sido realizados con ayuda de programas informáticos, como pequeño homenaje al dibujo geométrico, del que los arquitectos nos hemos servido habitualmente en otros tiempos de nuestro próximo pasado.

Comprobamos, a continuación, que el rayo proyectante  $(p)$  pasa por dicho polo  $(P_{p_1})$  de  $(p_1)$ , con lo que quedaría demostrado que las rectas o rayos proyectantes  $(p)$  y  $(P_{p_1})$  son recíprocos.

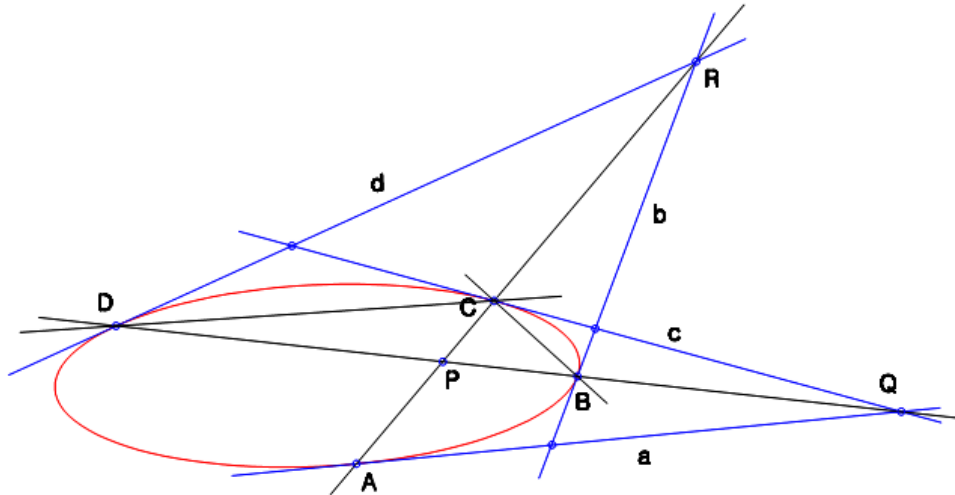


Fig. 5.33. Si una curva de segundo orden es cortada por dos rayos recíprocos,  $(AC)$  y  $(BD)$  en la figura, los puntos de intersección  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ ,  $(D)$ , son cuatro puntos armónicos y las tangentes  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(d)$  en esos puntos, son cuatro tangentes armónicas a la curva de segundo orden. (Dibujos y cálculos propios)

Si una curva de segundo orden es cortada por dos rayos recíprocos,  $(AC)$  y  $(BD)$  en la figura, los puntos de intersección  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ ,  $(D)$ , son cuatro puntos armónicos y las tangentes  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(d)$  en esos puntos, son cuatro tangentes armónicas a la curva de segundo orden.

El polo  $(Q)$  de  $(AC)$ , donde se cortan las tangentes  $(a)$  y  $(c)$ , se debe encontrar sobre la recta  $(BD)$  que es recíproca de  $(AC)$ . De la misma forma, el polo  $(R)$  de la recta  $(BD)$ , donde se cortan las tangentes  $(b)$  y  $(d)$ , se debe encontrar sobre la recta  $(AC)$  que es recíproca de  $(BD)$ .

Si llamamos  $(P)$  al punto de intersección de las transversales  $(AC)$  y  $(BD)$ ;  $(P)$ ,  $(B)$ ,  $(Q)$ ,  $(D)$  son cuatro puntos que forman cuaterna armónica y  $(RP)$ ,  $(b)$ ,  $(RQ)$ ,  $(d)$ , cuatro rectas armónicas. Las rectas  $(CA)$ ,  $(CB)$ ,  $(c)$  y  $(CD)$  son, pues, también armónicas de la misma forma que los puntos  $(ca)$ ,  $(cb)$ ,  $(C)$  y  $(cd)$  forman cuaterna armónica.

Sobre las tangentes  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(d)$ , al ser cortadas por  $(c)$ , como por cualquier otra tangente, se determinan puntos de intersección que forman cuaterna armónica.

#### 5.4. DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS A LA ESTÁTICA GRÁFICA

Cabe insistir en la necesidad del dominio de los conceptos de Reciprocidad y Polaridad, ya expresados por Culmann, Cremona y Favaro, para la comprensión de la teoría Grafostática que pretendemos.

No se trata, pues, de un capítulo destinado a mostrar el conocimiento “erudito” de la Geometría Proyectiva, que Desargues había ya enunciado en 1639 y Poncelet desarrollado en 1822, sino de una revisión de los conceptos proyectivos, conducentes a la comprensión de su aplicación a la Estática Gráfica. Nos interesa, no obstante, llegar al conocimiento del origen de la Grafostática, comprendiendo, más que presuponiendo u obviando, los conceptos de la Geometría Proyectiva.

Se extiende a estos sistemas lo especificado para encontrar la recta polar de un punto respecto a una curva de segundo orden o el polo de una recta, expresando que dos puntos de un sistema polar son recíprocos o conjugados cuando cada uno de ellos está situado sobre la recta polar del otro y que dos rectas son recíprocas o conjugadas cuando cada una de ellas pasa por el polo de la otra.

En el camino a las Figuras recíprocas, empleadas por el pionero Maxwell <sup>51</sup> en 1864, pasa por el conocimiento de los triángulos polares y su construcción, que mostramos en las Fig. 5.47. y 5.48.

Se llama triángulo polar a todo triángulo de un sistema cuyos vértices sean los polos de los lados opuestos, es decir, a todo triángulo cuyos vértices y lados son conjugados dos a dos.

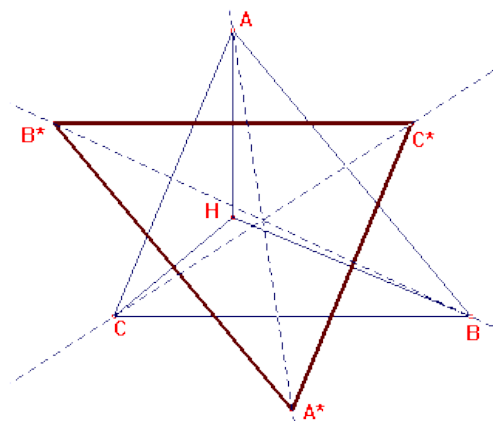


Fig. 5.34. Si (H) es el ortocentro del triángulo (ABC), se pueden trazar los tres triángulos (ABH), (ACH) y (BCH), y sus circuncentros (C\*), (B\*) y (A\*). Éstos puntos forman el llamado triángulo de Carnot de (ABC). Este triángulo es recíproco de (ABC) y homotético de (ABC).

<sup>51</sup> Maxwell, James Clerk. *On reciprocal figures and diagrams of forces*. Philos. Mag., 1864, XXVII, 250-261. London, Edinburgh & Dublin.

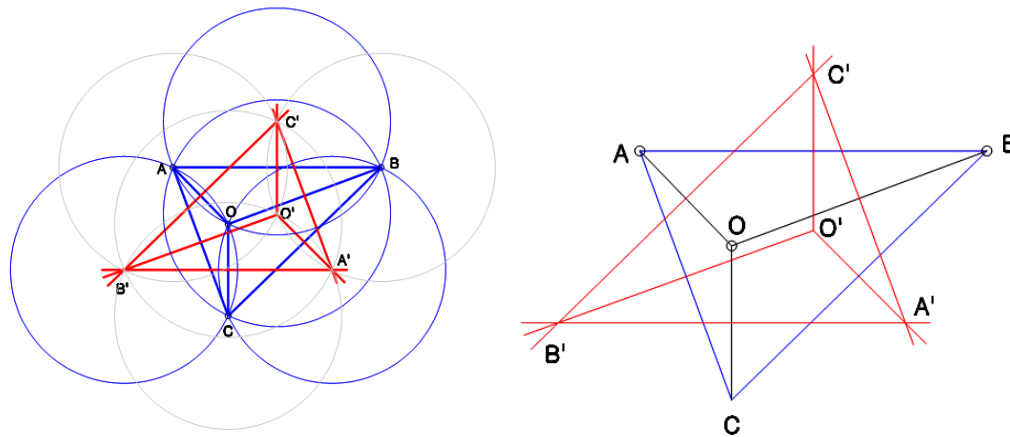


Fig. 5.35. Construcción del triángulo recíproco del  $(ABC)$ , se determinan los circuncentros de los tres triángulos  $(ABO)$ ,  $(ACO)$  y  $(BCO)$ ,  $(C')$ ,  $(B')$  y  $(A')$ . Éstos puntos forman el triángulo  $(A'B'C')$ . Este triángulo es recíproco de  $(ABC)$ . Considerando el punto  $(O)$ , ortocentro del  $(ABC)$ , se construyen las mediatrices de los segmentos  $(OA)$ ,  $(OB)$  y  $(OC)$ , cuyas intersecciones dos a dos determinan los vértices  $(A')$ ,  $(B')$  y  $(C')$  del triángulo recíproco  $(A'B'C')$  buscado. El punto  $(O')$  es el circuncentro del primer triángulo  $(ABC)$  y el punto  $(O)$ , recíproco de  $(O')$  es el circuncentro del triángulo  $(A'B'C')$ . Así, pues, el ortocentro  $(O)$  de un triángulo  $(ABC)$  es el circuncentro del recíproco  $(A'B'C')$  y viceversa.

La reinterpretación vectorial de los sistemas focales, nos lleva al punto de partida en el que la Estática Gráfica toma de la geometría proyectiva los elementos básicos que se especificaban al comienzo del epígrafe y que desembarcan en la reciprocidad expresada de polígono de fuerzas y funicular.

Sean  $(O, \bar{R})$  y  $(\bar{M}_O)$  la resultante de traslación y el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto a ese punto  $(O)$  del plano  $(\pi)$ . Fig 5.36. Como es sabido, el momento  $(\bar{M}_O)$  puede ser sustituido por el par arbitrario  $(\bar{Q})$  y  $(-\bar{Q})$  contenido en el plano  $(\pi)$ , perpendicular al momento  $(\bar{M}_O)$  y que pasa por el punto  $(O)$  y cuya separación  $(d) = (M_O) / (Q)$ . Se dispone el par  $(\bar{Q})$  y  $(-\bar{Q})$  de manera que  $(-\bar{Q})$  pase por el punto  $(O)$ .

Compuestos mediante la suma vectorial  $(\bar{R}) + (-\bar{Q}) = (\bar{S})$ , el sistema queda reducido a dos únicos vectores  $(\bar{S})$  y  $(\bar{Q})$ , el primero pasando por el punto de reducción del sistema,  $(O)$  y el vector  $(\bar{Q})$  contenido en el plano  $(\pi)$ .

Como el vector  $(\bar{Q})$  y la distancia  $(d)$  han sido elegidos arbitrariamente, con la única condición de mantener constante su producto, módulo del momento al que sustituyen, se tiene que existirán infinitas duplas  $(\bar{Q})$  y  $(\bar{S})$  equivalentes al sistema dado. De tal manera que, una vez conocida la resultante del sistema de vectores y el momento resultante del sistema, éste equivalente al par propuesto, y conocida la recta de acción de uno de los dos vectores  $(\bar{S})$  o  $(\bar{Q})$ , la otra línea  $(s)$  o  $(q)$  queda unívocamente determinada la otra.

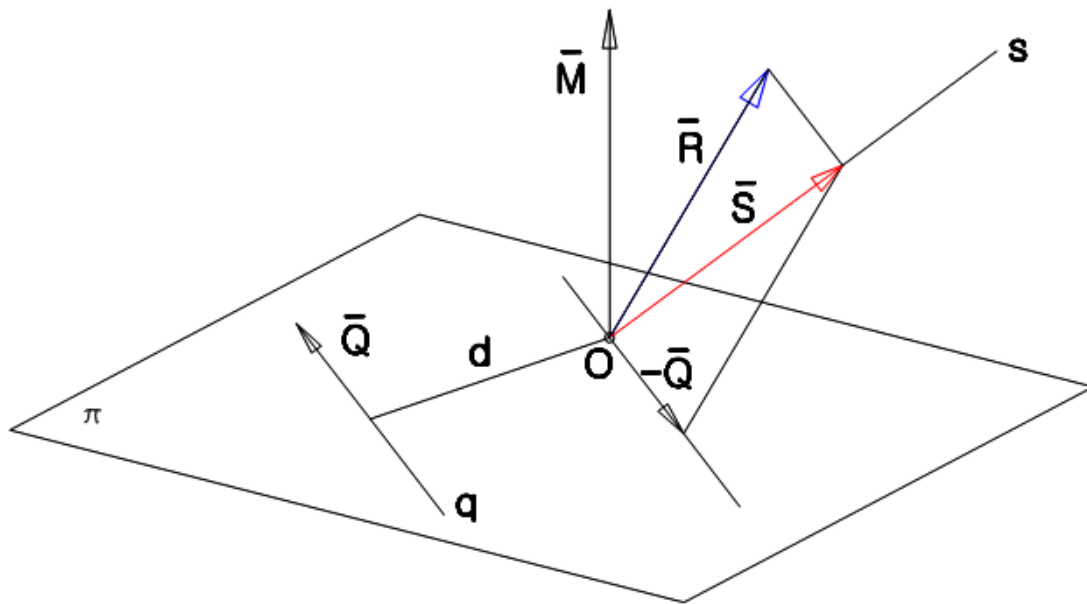


Fig. 5.36. Representación de un sistema de vectores reducido al punto  $(O)$  mediante la resultante  $(\bar{R})$  y el momento resultante  $(\bar{M}_O)$  o su par equivalente  $(\bar{Q}, -\bar{Q}, d)$ . Tras la composición de  $(\bar{R}) + (-\bar{Q}) = (\bar{S})$ . El sistema queda reducido a dos únicos vectores  $(\bar{S})$  aplicado en  $(O)$  y  $(\bar{Q})$  contenido en el plano  $(\pi)$ . (Dibujos propios)

Las rectas  $(s)$  y  $(q)$  consideradas como rectas de acción de los vectores  $(\bar{S})$  y  $(\bar{Q})$  que unívocamente se corresponden, se denominan **rectas conjugadas o recíprocas**. Ya que la recta  $(q)$  está siempre contenida en el plano  $(\pi)$  y la recta  $(s)$  pasa siempre por el punto  $(O)$ , al plano reglado  $(\pi)$ , considerado como lugar geométrico de las rectas  $(q)$ , corresponde, en dicha reciprocidad, la radiación de rayos  $(s)$  y centro  $(O)$ .

El punto  $(O)$  por el cual pasa constantemente la recta  $(s)$  cuando  $(q)$  describe el plano  $(\pi)$  será el **foco** del plano  $(\pi)$  siendo, recíprocamente  $(\pi)$  el **plano focal** de  $(O)$ .

El foco está siempre contenido en su plano focal. La dirección de la resultante  $(\bar{R})$ , se llama **dirección principal** y es uno de los invariantes de los sistemas de vectores deslizantes, con independencia del centro de reducción del sistema. Cualquiera de los infinitos planos perpendiculares a la dirección principal, se denomina **plano ortográfico**.

Conviene detenernos en la concepción de rectas dobles y los ejes de momento nulo. De forma que si consideramos el traslado de  $(q)$  paralelamente a sí misma en el plano  $(\pi)$ , es decir si se hace variar el brazo de palanca  $(d)$  del par equivalente al momento  $(\bar{M})$ , el módulo del vector  $(\bar{Q})$  variará inversamente, para mantenerse invariante el producto, módulo del momento. Por ello, la recta  $(s)$  describirá un haz de rayos de centro  $(O)$ , contenido en el plano que determinan  $(\bar{R})$  y  $(-\bar{Q})$ .

Si se hace a  $(d)$  infinitamente pequeño, el vector  $(\bar{Q})$  estará infinitamente próximo  $(-\bar{Q})$ , llegando a ser el módulo de  $(Q)$  infinitamente grande y el vector  $(\bar{S}) = (\bar{R}) + (-\bar{Q})$  se confundirá con  $(-\bar{Q})$ .

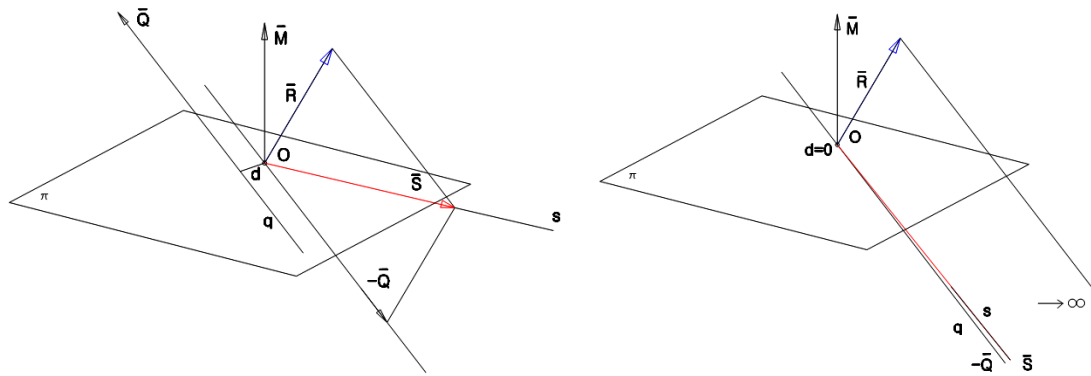


Fig. 5.37. Representación del mismo sistema de vectores reducido al punto  $(O)$  mediante la resultante  $(\bar{R})$  y el momento resultante  $(\bar{M}_O)$  o su par equivalente  $(\bar{Q}, -\bar{Q}, d)$ . Tras la composición de  $(\bar{R}) + (-\bar{Q}) = (\bar{S})$ . El sistema queda reducido a dos únicos vectores  $(\bar{S})$  aplicado en  $(O)$  y  $(\bar{Q})$  contenido en el plano  $(\pi)$ . Si se hace a  $(d)$  infinitamente pequeño, el vector  $(\bar{Q})$  estará infinitamente próximo  $(-\bar{Q})$ , llegando a ser el módulo de  $(Q)$  infinitamente grande y el vector  $(\bar{S}) = (\bar{R}) + (-\bar{Q})$  se confundirá con  $(-\bar{Q})$ . (Dibujos propios)

Haciendo variar la dirección de  $(q)$  y repitiendo el mismo razonamiento anterior concluiremos:

- 1 - Dos rectas conjugadas no son en general coplanarias. Dos rectas conjugadas coplanarias, coinciden.
- 2 - El haz de rayos de centro  $(O)$  contenido en el plano  $(\pi)$  viene a constituir la totalidad de las rectas conjugadas de sí mismas o rectas dobles que pasan por el foco  $(O)$ .

Evidentemente, una recta doble no puede ser considerada como una de las rectas de acción de los dos vectores conjugados a que se reduce el sistema, porque en caso de hacerlo sería preciso que el vector tuviera un módulo infinitamente grande, cosa que mecánicamente no tiene sentido. Sin embargo la Mecánica vectorial puede dar otro significado a las rectas dobles, si consideramos que el momento de un sistema de vectores deslizantes con respecto a un eje, es igual a la proyección sobre dicho eje del momento resultante del sistema con respecto a un punto de dicho eje, o sea, al producto escalar del momento por el vector unitario de la dirección dada.

Sea  $(\bar{u}_q)$  el vector unitario o versor que determina la dirección de una recta doble y por tanto contenida en el plano  $(\pi)$  y pasante por  $(O)$ . La proyección del momento  $(\bar{M})$  sobre dicha dirección será evidentemente nula al ser el momento



( $\bar{M}$ ) perpendicular a dicha dirección, por serlo al plano que la contiene ( $\bar{M}$ ) \* ( $\bar{u}_q$ ) =  $\mathbf{0}$ . Visto lo cual podemos concluir que **las rectas dobles son los ejes de momento nulo**.

Si tomamos otro punto distinto ( $\mathbf{O}'$ ) como centro de reducción, éste será un nuevo foco al que corresponderá un nuevo plano focal ( $\pi'$ ) y un nuevo haz de rectas dobles de centro ( $\mathbf{O}'$ ) contenido en el plano ( $\pi'$ ).

El conjunto de las rectas dobles o conjugadas de sí mismas en el espacio constituye el **complejo de acción** del sistema de vectores considerado, también denominado **sistema focal** o **complejo lineal**, cuyas propiedades proyectivas analizamos a continuación. ( Meoli. 1955: 61) <sup>52</sup>

Llevando al infinito el vector ( $\bar{Q}$ ) será ( $\mathbf{d}$ ) infinitamente grande y por tanto ( $\bar{Q}$ ) llegará a ser infinitamente pequeña, confundándose con la dirección de la resultante ( $\bar{R}$ ) del sistema, resultando ser, por tanto la dirección ( $\mathbf{r}$ ) de la resultante, la recta conjugada de la recta impropia del plano focal.

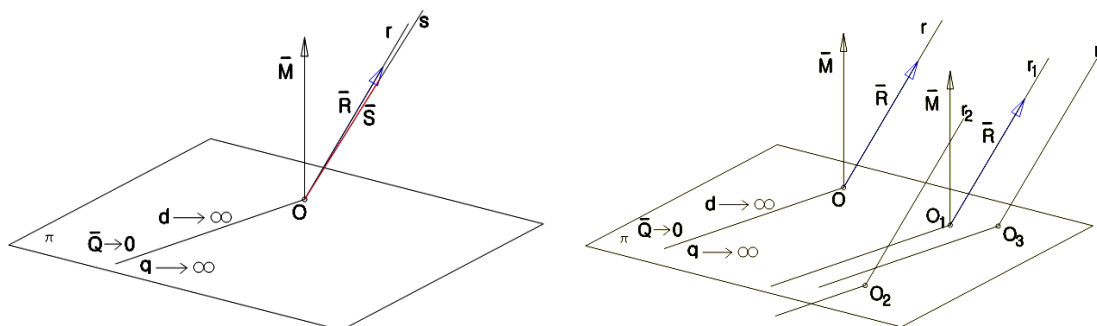


Fig. 5.38. Desplazando arbitrariamente el foco ( $\mathbf{O}$ ) a las posiciones **1, 2, 3,**... se obtiene una radiación de rayos paralelos a la dirección principal ( $\mathbf{r}$ ) y el plano del infinito, lugar geométrico de las rectas recíprocas correspondientes.(Dibujos Propios)

El desplazamiento arbitrario del punto ( $\mathbf{O}$ ) de reducción del sistema a los puntos **1, 2, 3,** ... origina por una parte una radiación de rectas ( $\mathbf{r}_i$ ) paralelas a la dirección de la resultante del sistema ( dirección principal ) y por otro queda determinado el plano del infinito, como el lugar geométrico de las rectas recíprocas de las ( $\mathbf{r}_i$ ) obtenidas.

Se deduce, por tanto, que el foco del plano impropio es el punto impropio de la dirección principal.

<sup>52</sup> Meoli, Humberto. *Lecciones de Estática Gráfica*. Librería y Editorial Nigar S.R.L.: Buenos Aires 1955.

El tratado de Humberto Meoli, *Lecciones de Estática Gráfica*, constituye uno de las excepciones que hemos citado en relación con la toma en consideración de algunos de los principios de la Geometría Proyectiva.

Así en el Capítulo II, § 4 de su libro aparece el concepto de Poliedros recíprocos y de Figuras recíprocas y el Capítulo III, § 1 se trata la relación de reciprocidad entre Polígono funicular y de fuerzas.

Finalmente analizamos los poliedros recíprocos o conjugados, cuyas proyecciones sobre un plano ortográfico van a constituir las figuras recíprocas.

Considerando un poliedro euleriano, es decir un poliedro en el que el número de caras más el de vértices sea igual al de aristas más dos y consideremos a sus vértices como focos de un determinado sistema focal.

Determinamos los planos focales de los vértices de este poliedro, e imaginemos un segundo poliedro cuyas caras sean porciones de estos planos focales. Como el primer poliedro tiene sus vértices sobre las caras del segundo, aquél estará inscrito en éste y éste tendrá tantas caras como vértices tenía el primero.

Supongamos las aristas del primer poliedro como rectas comunes a dos vértices a las que corresponderán las aristas del segundo como rectas comunes a dos caras focales de dichos vértices y dado que el número de éstos es igual al de aquéllas, el segundo poliedro tendrá el mismo número de aristas que el primero.

A una cara enelátera del primer poliedro, cuyos (  $n$  ) vértices son otros tantos focos, corresponde en el segundo un ángulo enedro, cuyas (  $n$  ) caras son los planos focales de aquellos vértices y al plano en que están situados, cara del primer poliedro, corresponde como foco el vértice del ángulo enedro del segundo. Siendo que se pertenecen plano focal y foco, los vértices del segundo poliedro estarán contenidos en las caras del primero y el número de vértices del segundo será igual al número de caras del primero.

Resumimos que:

1 - Si el primer poliedro tiene (  $C$  ) caras, (  $V$  ) vértices y (  $A$  ) aristas y satisface la condición euleriana  $( C ) + ( V ) = ( A ) + 2$  . El segundo poliedro tendrá (  $V$  ) caras, (  $C$  ) vértices y (  $A$  ) aristas, siendo, por tanto también euleriano.

2 - Los vértices del primer poliedro están contenidos en las caras del segundo y viceversa, con los que los dos poliedros son, al mismo tiempo, inscritos y circunscritos el uno con respecto al otro.

3 - Dos poliedros así definidos reciben el nombre de **poliedros recíprocos o conjugados**.

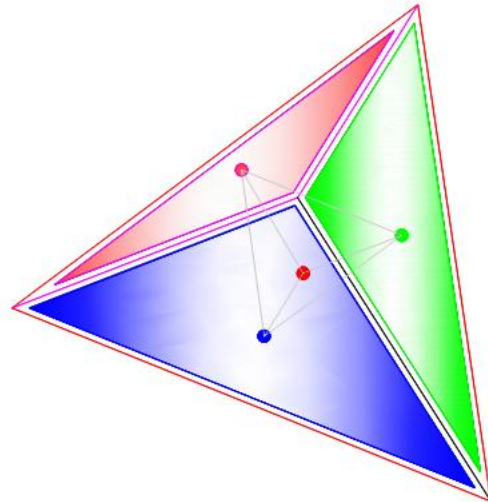


Fig. 5.39. Imagen de dos tetraedros construidos según las condiciones expuestas. Los dos tetraedros son recíprocos o conjugados. (Dibujo propio)

Finalmente imaginemos en la composición del sistema de vectores reducido a un punto  $(O)$  con resultante  $(\bar{R})$  y momento resultante con respecto a  $(O)$ ,  $(\bar{M}_O)$  y su par equivalente  $(\bar{Q})$ ,  $(-\bar{Q})$ . Consideremos un plano  $(\pi_q)$  que contenga al vector  $(\bar{Q})$  y que sea paralelo a la resultante  $(\bar{R})$ . El plano  $(\pi_s)$  que pasa por  $(O)$  y que contiene a  $(\bar{R})$ , a  $(-\bar{Q})$  y por tanto, a su resultante  $(\bar{S})$  tiene que ser obviamente paralelo a  $(\pi_q)$ . Cortando a los planos paralelos  $(\pi_q)$  y  $(\pi_s)$  con el plano ortográfico (perpendicular a la dirección principal), se obtendrán dos rectas paralelas. Por lo que:

4 - Proyectando dos rectas recíprocas  $(q)$  y  $(s)$  sobre el plano ortográfico siguiendo la dirección principal (la de la resultante), se obtienen dos rectas paralelas.

Una recta cualquiera  $(s_i)$  contenida en el plano  $(\pi_s)$ , cortará a la resultante  $(\bar{R})$  en un punto  $(O_i)$  cuyo plano focal  $(\pi_i)$  será paralelo al plano  $(\pi)$  que pasa por  $(O)$ . La recta  $(q_i)$  conjugada de  $(s_i)$  estará por tanto contenida en  $(\pi_i)$  y será paralela a  $(\pi_s)$ . Proyectando sobre el plano ortográfico, todas las rectas  $(s_i)$ , se proyectarán en una única recta, mientras que las rectas  $(q_i)$  se proyectarán en un haz de rayos paralelos. Por lo que:

5 - Una poligonal cualquiera contenida en un plano que a su vez contiene a la dirección de la resultante, (dirección principal), se proyectará sobre el plano ortográfico en una única recta y el sistema de rectas recíprocas de dicha poligonal se proyecta según un haz de rayos paralelos.

Si se proyecta sobre el plano ortográfico dos poliedros eulerianos conjugados se obtiene dos figuras recíprocas, cuyas propiedades, según lo expuesto anteriormente, serán:

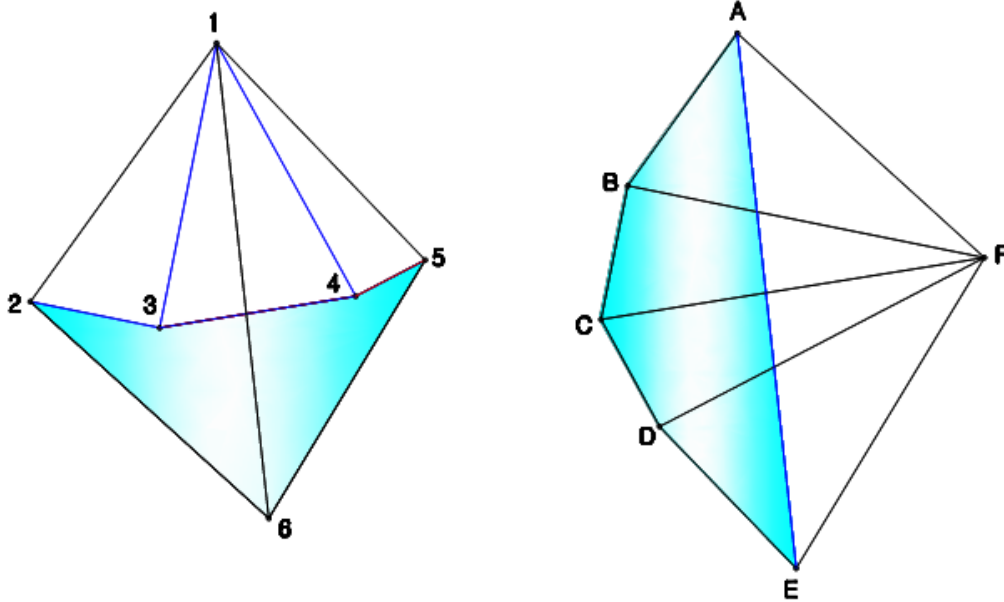


Fig. 5.40. Representación de la proyección de dos poliedros eulerianos recíprocos de 6 vértices, 6 caras y 10 aristas ( $6 + 6 = 10 + 2$ ). La proyección representada constituye dos figuras recíprocas. (Dibujos propios)

6 - A cada lado de la primera figura corresponderá un lado paralelo de la segunda, puesto que son proyecciones de dos aristas conjugadas de dos poliedros recíprocos.

7 - A un polígono cerrado de  $(n)$  lados de la primera figura, ( proyección de una cara enelátera del primer poliedro ), corresponde un nudo en la segunda, al que concurren  $(n)$  rectas ordenadamente paralelas a los lados del polígono, ( proyección del vértice enedro conjugado de aquella cara enelátera )

8 - Cada lado de la primera figura, es común a dos poliedros cerrados que son proyección de dos caras sucesivas del primer poliedro. Cada lado de la segunda figura une dos nudos, proyecciones de los dos vértices consecutivos conjugados de aquellas caras y viceversa.

9 - Siendo los dos poliedros conjugados eulerianos, la primera figura proyectada ortográficamente tendrá  $(n)$  nudos,  $(l)$  lados y  $(p)$  polígonos cerrados, satisfaciendo la relación  $(n) + (p) = (l) + 2$ . La segunda figura tendrá  $(p)$  nudos,  $(n)$  polígonos cerrados y  $(l)$  lados y satisfará, por tanto, la misma condición.

10 - Cada una de las caras de los poliedros recíprocos tiene por lo menos tres lados y cada uno de los vértices, por lo menos tres aristas, por lo que las figuras recíprocas correspondientes presentarán polígonos cerrados de tres lados como mínimo y nudos con al menos también tres rayos.

11 - Si un vértice enedro de uno de los poliedros conjugados es el punto impropio de una dirección distinta de la dirección principal, la cara enelátera del segundo

poliedro, conjugada de dicho vértice, contendrá la dirección principal y se proyectará en una recta,  $(n)$  de cuyos puntos serán las proyecciones de los  $(n)$  vértices de dicha cara, mientras las aristas del vértice enedro impropio del primer poliedro se proyectará en un haz de rayos paralelos.

Aunque fuera en la segunda mitad del S.XVIII y en la primera del XIX donde aparecen los primeros indicios de los nuevos métodos, hay que atribuir, sin duda a Culmann el mérito de haber reunido los principios en un cuerpo de doctrina sistemático.

La Estática Gráfica, tal como Culmann la concibió y explicado por primera vez en 1860 en la Escuela Politécnica de Zürich, extrae sus fundamentos, como ya hemos visto y es opinión consagrada en todos los países, de la Geometría Proyectiva (Geometría Pura o Geometría de Posición) en términos de la época y constituye una feliz aplicación de aquellos métodos modernos que llegan ahora a ser muy apreciados. Culmann supone a sus lectores suficientemente iniciados en la Geometría de Posición y expone inmediatamente los principios del Cálculo Gráfico, pasando en seguida al estudio de la Estática gráfica propiamente dicha y de sus principales aplicaciones. Los nuevos métodos de Culmann son adoptados por casi todos los institutos y escuelas donde la enseñanza de la nueva ciencia es introducida.

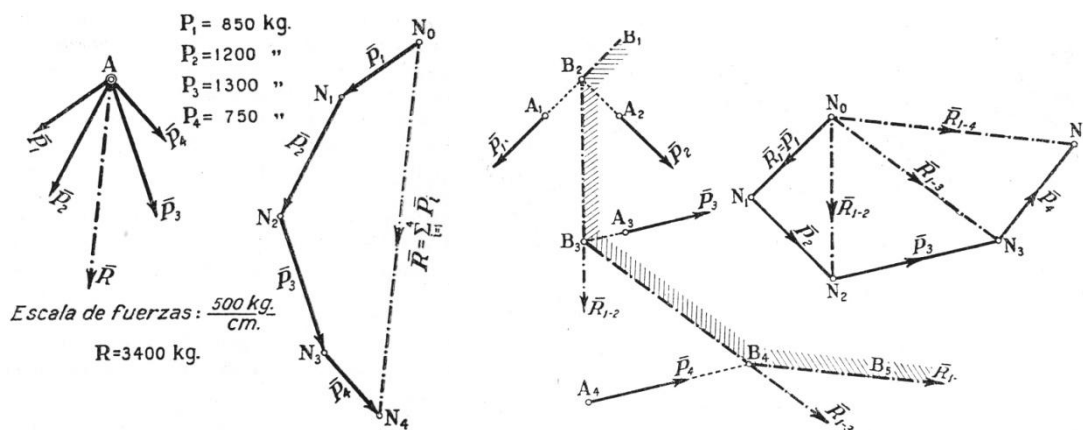


Fig. 5.41. Izquierda: Composición gráfica de un sistema plano de vectores concurrentes para obtención de la Resultante. Los vectores representan fuerzas según la escala que se indica  $E_f = 500 \text{ Kg} / 1 \text{ cm}$ .

Derecha: Composición gráfica de un sistema plano de vectores deslizantes no concurrentes y obtención de la Resultante. Se representa en esta figura la obtención de las resultantes parciales  $(\vec{P}_1), (\vec{P}_1) + (\vec{P}_2) = (\vec{R}_{1-2})$ , que a su vez sumada a  $(\vec{P}_3)$  define  $(\vec{R}_{1-3})$ , que sumada a  $(\vec{P}_4)$  define  $(\vec{R}_{1-4})$ . (Meoli, 1955: 66)

Las operaciones básicas de la mecánica vectorial, como es la suma de vectores, constituye en su representación gráfica, el primer capítulo de la grafostática, en cuanto estos vectores deslizantes, en principio un sistema plano, representan un sistema equivalente de fuerzas, en función de una escala gráfica, en la que la intensidad de las fuerzas es representada por una medida en el dibujo de las mismas. Ver Fig. 5.41. en la que se ha tomado  $\frac{1}{2} T_n = 1\text{cm}$ .

En la parte derecha de la figura se indica cómo la dirección de las resultantes parciales de cada dos fuerzas marca la dirección de cada uno de los radios vectores del polígono de fuerzas de Polo  $\mathbf{N}_0$ , aunque suele tomarse, como se verá a continuación polos externos a las fuerzas. En cualquier caso la resultante del sistema propuesto es inmediata uniendo  $\mathbf{N}_0$  (origen de  $\bar{\mathbf{P}}_1$ ) con el extremo de  $\bar{\mathbf{P}}_4$ .

Como el procedimiento indicado para la obtención de la resultante del sistema plano propuesto, a base de obtención de resultantes parciales resultaba excesivamente laborioso, surgió otro procedimiento que se indica en la Fig. 5.42. siguiente.

Dado el sistema plano de vectores deslizantes  $[\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2, \bar{\mathbf{P}}_3, \bar{\mathbf{P}}_4]$  que representa un sistema plano de fuerzas aplicadas en distintos puntos de un sólido rígido, indeterminados por su condición de vectores deslizantes sobre las direcciones de cada uno de ellos, se construye el polígono de fuerzas  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ , que determina uniendo el primer punto con el último, el vector  $\bar{\mathbf{R}}_{1-4}$ , Resultante del sistema. Ahora bien, para que el sistema quede totalmente determinado deberemos conocer un punto de la recta de acción de dicha resultante.

Si proyectamos los puntos  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ , del polígono de fuerzas, sobre un punto  $(\mathbf{O})$  del plano que contiene al sistema, arbitrariamente elegido y consideramos los vectores  $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) = \bar{\mathbf{P}}_1$  como suma vectorial de los vectores  $(\mathbf{O} - \mathbf{A}_0) + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{O})$ ; el vector  $(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = \bar{\mathbf{P}}_2$  como suma de  $(\mathbf{O} - \mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2 - \mathbf{O})$  y así sucesivamente. Tomando por un punto  $(\mathbf{M}_0)$  cualquiera del plano, la recta  $(\mathbf{m}_0)$ , paralela a  $(\mathbf{O} - \mathbf{A}_0)$  hasta cortar en  $(\mathbf{M}_1)$  a la recta de acción del vector  $\bar{\mathbf{P}}_1$ ; por  $(\mathbf{M}_1)$  la recta  $(\mathbf{m}_1)$ , paralela a  $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{O})$  hasta que corte a la línea de acción de  $\bar{\mathbf{P}}_2$  y así sucesivamente, tendremos que:

- El vector  $\bar{\mathbf{P}}_1$  es la resultante de la suma de dos vectores cuyas rectas de acción,  $(\mathbf{m}_0)$  y  $(\mathbf{m}_1)$ , se cortan sobre su recta de acción en  $(\mathbf{M}_1)$  y cuyos vectores representativos son  $(\mathbf{O} - \mathbf{A}_0)$  y  $(\mathbf{A}_1 - \mathbf{O})$ .

- El vector  $\bar{\mathbf{P}}_2$  es la resultante de la suma de dos vectores cuyas rectas de acción,  $(\mathbf{m}_1)$  y  $(\mathbf{m}_2)$ , se cortan sobre su recta de acción en  $(\mathbf{M}_2)$  y cuyos vectores representativos son  $(\mathbf{O} - \mathbf{A}_1)$  y  $(\mathbf{A}_2 - \mathbf{O})$ , anulándose, por consiguiente los vectores

representados por  $(A_1-O)$  y  $(O-A_1)$ , dado que tienen la misma recta de acción  $(m_1)$ , quedando como equivalente del sistema  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2]$  el sistema formado por dos vectores cuyas rectas de acción son  $(m_0)$  y  $(m_2)$  y los vectores que las representan  $(O-A_0)$  y  $(A_2-O)$ .

- De la misma forma, el vector  $\bar{P}_3$  será equivalente a dos vectores cuyas rectas de acción son  $(m_2)$  y  $(m_3)$  con los vectores correspondientes  $(O-A_2)$  y  $(A_3-O)$ . Por lo que el sistema  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]$  será equivalente a dos únicas fuerzas con direcciones  $(m_0)$  y  $(m_3)$  de los vectores  $(O-A_0)$  y  $(A_3-O)$ .

Reiterando el proceso llegaríamos al sistema formado por dos únicos vectores  $(O-A_0)$  y  $(A_4-O)$  aplicados en las rectas  $(m_0)$  y  $(m_4)$  como equivalente del sistema  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4]$  cuya resultante es el vector  $\bar{R}_{1-4}$ , cuya recta de acción, paralela a  $(A_4-O)$  pasará por el punto  $(S)$ , intersección de las rectas  $(m_0)$  y  $(m_4)$ .

El polígono formado por las rectas  $(m_0), (m_1), (m_2), \dots, (m_n)$  recibe el nombre de Polígono Funicular, cuyo término deriva del latín *funiculus-funiculi*, (hilo), debido a su forma, que es la que adoptaría un hilo flexible, fijado en los puntos  $(M_0)$  y  $(M_{n+1})$ , al que se le aplicasen en los puntos  $(M_1), (M_2), \dots, (M_n)$  las fuerzas representadas por el sistema de vectores  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4]$  que originan dicho polígono. (Meoli, 1955: 68)

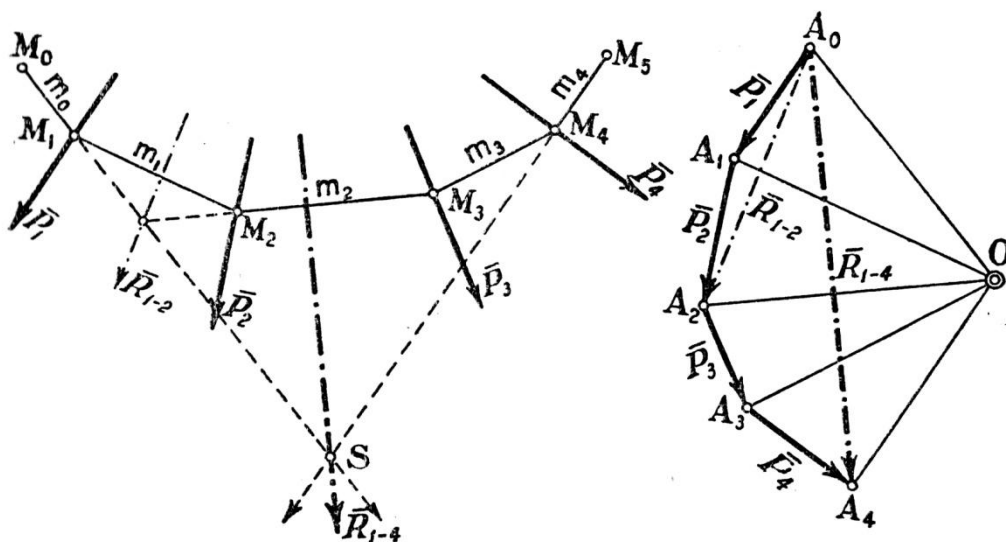


Fig. 5.42. Construcción del Polígono de Fuerzas y el Polígono Funicular para la obtención de la Resultante y su recta de acción. (Meoli, 1955: 68)

El punto arbitrario  $(O)$  desde el que se proyectan los vértices  $(A_i)$  del polígono de fuerzas, se denomina Polo y los rayos proyectantes, Rayos polares o Radios polares.

Finalmente ponemos el mayor énfasis en la aplicación de los conceptos de reciprocidad que relacionan la Geometría Proyectiva, analizada, con el inicio de la Estática gráfica.

Consideremos un sistema de vectores deslizantes  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4]$  concurrentes en el punto ( C ), como se indica en la Fig. 4.82. (a), con Resultante determinada mediante el correspondiente polígono de fuerzas de la Fig. 4.82. (b) y sea  $[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$  un polígono funicular del sistema, construido con polo ( O ).

Podemos considerar a la figura (a) como la proyección ortográfica de una pirámide pentaédrica, cuyo vértice se proyecta en ( C ), punto de concurrencia de los vectores del sistema. Su base pentagonal es el polígono cerrado  $[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$ , funicular que liga los vectores del sistema y sus aristas son las rectas de acción de los vectores del sistema y de su resultante ( $\bar{R}_{1-4}$ ).

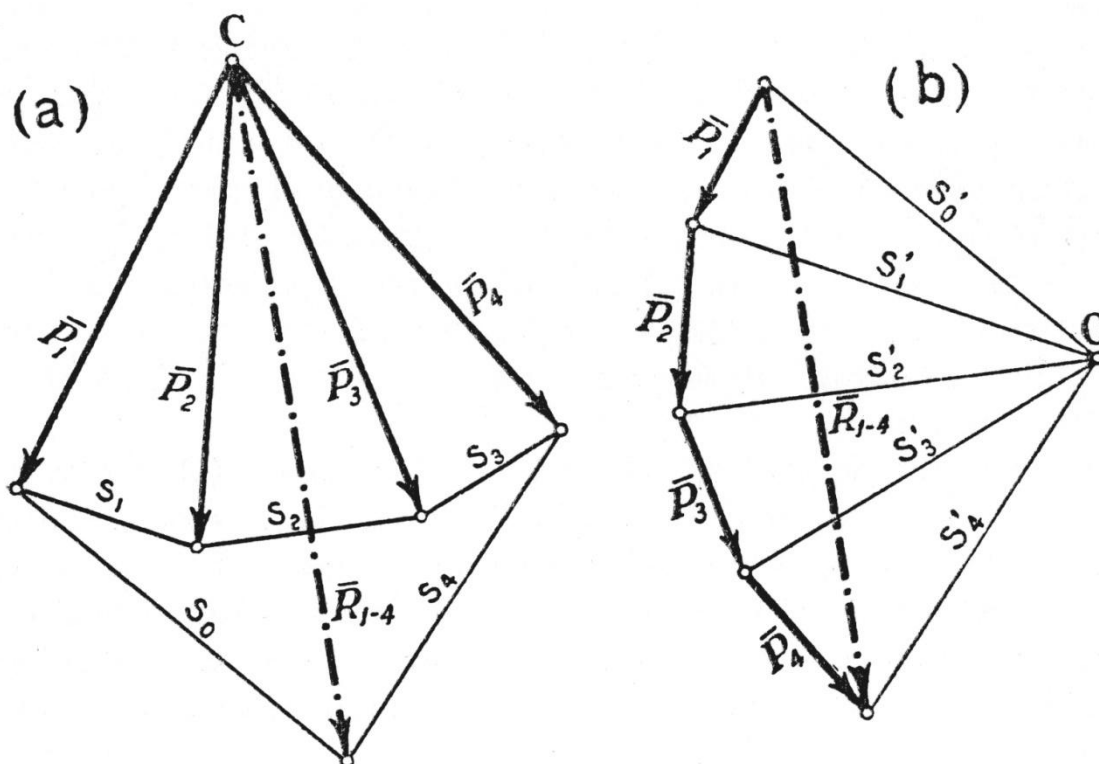


Fig. 5.43. Representación de un sistema de vectores deslizantes  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4]$  concurrentes en el punto ( C ) y los polígonos de fuerzas y funicular, para el análisis de la reciprocidad de los poliedros correspondientes a las figuras (a) y (b).

Tal y como hemos analizado en apartados anteriores, si revisamos en la Fig. 5.56. la representación de la proyección de dos poliedros eulerianos recíprocos de 6 vértices, 6 caras y 10 aristas (  $6+6 = 10+2$  ). La proyección representada constituye dos figuras recíprocas y trasladado el concepto proyectivo a nuestras figuras (a) y (b) podemos concluir que el poliedro conjugado de la pirámide (a), será otra pirámide (b) del mismo número de aristas.



El vértice de la pirámide (a) es el conjugado de la base de la pirámide (b). El haz de rayos de centro (C) en que se proyecta ortográficamente dicho vértice, es recíproco de un polígono cerrado, proyección de la base de la pirámide (b), base cuyos lados son correspondientemente paralelos a dichos rayos. De esta manera, el polígono de fuerzas de la figura (b) que satisface las condiciones expresadas, puede considerarse como la base de la segunda pirámide.

Análogamente, la base de la pirámide (a) que se proyecta en el polígono funicular  $[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$ , tiene por conjugado al vértice de la pirámide (b), cuyas aristas son proyectadas a su vez en el haz de rayos ordenadamente paralelos a los lados del funicular, tales como los rayos polares  $s'_0, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4$  de la figura (b). De donde se deduce que las figuras (a) y (b), que gozan de las condiciones de las figuras recíprocas, tales como han sido definidas, pueden ser consideradas como proyecciones ortográficas de dos poliedros conjugados. Lo que se expresa diciendo que: En un sistema de vectores concurrentes, el polígono de fuerzas y el polígono funicular son figuras recíprocas.

Si el vértice de la pirámide (b) se moviese en la dirección principal, su proyección ortográfica (O), polo del funicular, queda invariante. El plano focal correspondiente, en el que yace la base de la pirámide (a) se trasladará paralelamente y el polígono de la base se transformará semejantemente a sí mismo, proyectándose sobre el plano ortográfico para cada uno de sus posiciones, en uno de los infinitos polígonos funiculares semejantes, correspondientes al mismo sistema de vectores y al mismo polo.

Si por el contrario se hace mover, siempre en la dirección principal, el vértice de la pirámide (a), la figura (a) quedará invariante, mientras que la base de la pirámide (b), trasladándose paralelamente a sí misma, se proyectará en los infinitos polígonos de fuerzas semejantes correspondientes a distintas escalas de fuerzas.

Si por último se desplaza el vértice de la pirámide (a) en otra dirección distinta de la principal, llevándolo al infinito, las aristas concurrentes en este vértice impropio, se proyectarán en un sistema de vectores paralelos. El plano focal correspondiente, asiento de la pirámide (b), contendrá a la dirección principal, y se proyectará en una única recta, que es en lo que degenera el polígono de fuerzas de un sistema de vectores paralelos.

Consideremos, finalmente el sistema plano de vectores no concurrentes  $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]$  de la Fig. 5.57., cuya resultante es  $(\bar{R})$  sobre el que se ha construido dos funiculares de polos  $(O_1)$  y  $(O_2)$ . Consideremos el poliedro generado proyectando un polígono cerrado de cuatro lados desde dos puntos del espacio arbitrariamente elegidos. La Fig.

5.57. (a) puede ser considerada como proyección ortográfica de dicho poliedro y vamos a comprobar cómo será el poliedro conjugado correspondiente.

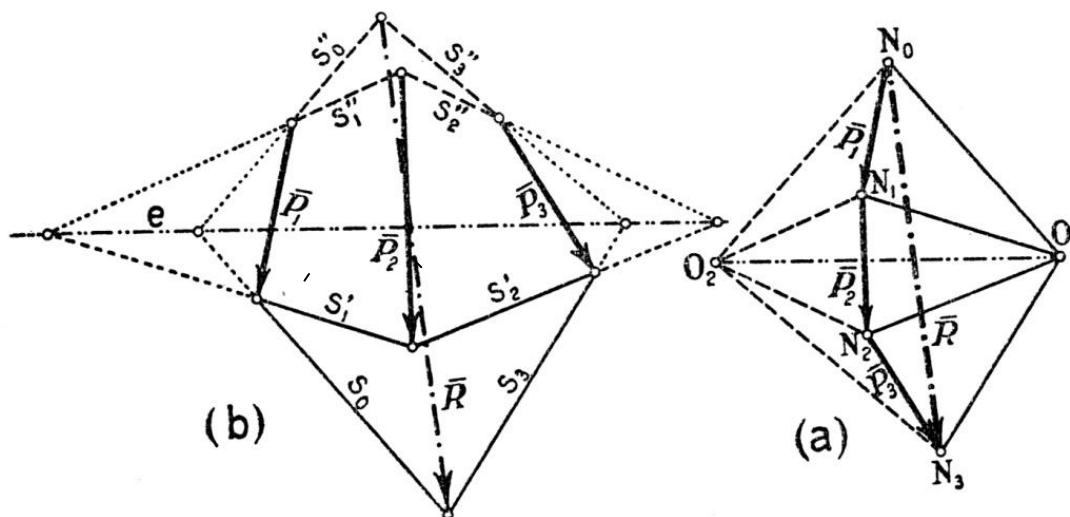


Fig. 5.44. Representación de un sistema de vectores deslizantes [  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  ] con los polígonos funiculares correspondientes a los dos polígonos de fuerzas de polos ( $O_1$ ) y ( $O_2$ ).

El poliedro (a) tiene dos vértices de cuatro aristas, con lo que su conjugado deberá tener dos bases planas de cuatro lados. A la recta que une los vértices del primero, corresponderá la recta de intersección de los dos planos en que descansan las bases del segundo poliedro.

Dos lados consecutivos del polígono del primer poliedro se cortan en un punto, vértice de dicho polígono. Las dos aristas consecutivas correspondientes del segundo poliedro estarán en un plano. El segundo poliedro tendrá dos bases de cuatro lados y cuatro aristas laterales, tales, que dos consecutivas estarán en un plano. Se trata, pues, de un prismoide, cuya proyección ortográfica será como la de la figura (b), dado que los pares de rectas recíprocas de los dos poliedros se proyectan en rectas paralelas, proyectándose sus dos bases en los dos polígonos funiculares [  $s'_0, s'_1, s'_2, s'_3$  ] y [  $s''_0, s''_1, s''_2, s''_3$  ].

A la recta ( $O_1-O_2$ ), proyección de la que une los dos vértices del poliedro (a), le corresponderá una recta (e) paralela, proyección de la recta común a los dos planos de las bases del prismoide, encontrándose los lados de estas bases, dos a dos, en un plano y se cortarán, por tanto en puntos de la recta común a las bases. Como tales lados se proyectan ortográficamente en los lados de los dos funiculares de la figura (a), resulta que éstos se cortarán, dos a dos, en puntos de la recta (e), paralela a la línea que une los polos.

Queda puesto de manifiesto, que como explicaba Culmann en la introducción de su *Die Grafische Statik*, así como en sus clases del Politécnico de Zürich, que es imprescindible un avanzado conocimiento de la Geometría Descriptiva así como de la Geometría Proyectiva, para la comprensión de los principios en que se basa la Estática Gráfica, aunque, como hemos comprobado en nuestra investigación documental, la mayor parte de los tratados posteriores a los que podríamos considerar textos primarios, obvian estas demostraciones relacionadas con los poliedros y figuras recíprocos y aun sin la comprensión del origen de la Grafostática, la utilizan para todas las numerosas aplicaciones que trajo consigo, estudiadas y puestas en práctica, como ya se ha planteado anteriormente, por la mayor parte de los arquitectos e ingenieros que desarrollaron su tarea de concepción, diseño y cálculo de estructuras, durante más de un siglo.

Las principales aplicaciones de los procedimientos grafostáticos, cuyo origen acabamos de describir y que a su vez son un invariante común en la mayor parte de los tratados de Estática Gráfica, serán expuestos en el Capítulo 7 de esta Tesis, como Patrones para una Didáctica actual de la Grafostática, al margen de que algunos de dichos procedimientos han sido ya descritos y utilizados en los distintos argumentos explicativos de los conceptos hasta ahora desarrollados en nuestro trabajo.

Asimismo, exponemos en el Capítulo 6, a continuación, diversos ejemplos históricos de la excepcional utilización de métodos grafostáticos por parte de Arquitectos e ingenieros, maestros en sus obras y grandes conocedores de las estructuras que las sustentaron.

## 6. LA UTILIZACIÓN DE LA GRAFOSTÁTICA

### 6.1. LOS MÉTODOS DE ANTONIO GAUDÍ Y SUS COLABORADORES

El caso de Antonio Gaudí es quizá uno de los más significativos en la utilización de los nuevos métodos que la grafostática había introducido en Europa. Gaudí es un caso único en la historia de la Arquitectura por muchos motivos, incluso hasta desde el punto de vista político <sup>1</sup>, en el sentido de haber sido venerado por todas las corrientes artísticas en general y por las arquitectónicas en particular, admitiendo las vanguardias del movimiento moderno europeo y español su extraordinaria singularidad. Hasta el GATCPAC se significó sin ambages a su favor.

No fue Gaudí muy amigo de la utilización de los nuevos materiales que el XIX ya había puesto en manos los arquitectos, como el acero y el hormigón. Antes por el contrario, los modelos formales de su arquitectura derivan especialmente de los materiales tradicionales, esto combinado con una experiencia estructural basada en la comprensión del comportamiento de estos materiales. El trabajo a compresión y la evitación de formas que comportasen tracciones forma parte de ese conocimiento entre intuitivo y técnicamente formado con el que contó el maestro catalán.

Gaudí da la vuelta a las formas góticas, expandiendo las estructuras hacia la base y estrechando las hacia arriba, en un intento de recoger los empujes, habida cuenta de la inexistencia de materiales capaces de absorber estas sollicitaciones. La brillante e innovadora idea de Gaudí se resume en el aprovechamiento que el conocimiento estructural le había dado de la posición de equilibrio interno de las estructuras y utilizarlas como generadoras de forma para, por así decirlo, hacerlas trabajar a su favor, (los modelos de arcos catenarios son buena prueba de ello). En vez de emplear arcos derivados de las formas circulares como los de medio punto, apuntados o carpaneles, investigó con formas como la parabólica o catenaria. Fig. 6.1.

No teniendo dudas sobre el conocimiento de la Estática Gráfica que tenía Gaudí <sup>2</sup> nos interesa destacar algunas de sus experiencias con los cálculos grafostáticos, a los que dio todo el sentido de control estructural intuitivo que esta Tesis pretende para la Grafostática.

---

<sup>1</sup> La religiosidad de Gaudí, no fue nunca obstáculo para que fervientes defensores de las libertades, en épocas de restricciones de las mismas, reconocieran en él valores arquitectónicos más propios propios de las vanguardias que del rancio historicismo subsiguiente a la Guerra Civil española. El propio Josep Lluís Sert no dudó nunca en la defensa de la arquitectura gaudiana.

<sup>2</sup> Las afirmaciones recogidas por sus colaboradores, Joan Rubió i Bellver, Cèsar Martinell i Brunet o Josep Maria Jujol i Gibert, así como los croquis y dibujos conservados, así lo atestiguan.

La Fig. 6.1. muestra los arcos catenarios de la entrada al Palacio Güell. Aunque en muchos escritos sobre Gaudí se puede leer que se trata de “arcos parabólicos”, los experimentos que conocemos que Gaudí y sus colaboradores realizaron con hilos de los que cuelgan pequeños pesos a escala, demuestran que en realidad se trata de formas catenarias, presentes desde sus primeras obras.

Su origen es puramente mecánico y se remonta a finales del S. XVII, cuando hacia 1675 Hooke publicó un anagrama, incluido en un libro sobre relojes solares, que viene a decir:

“...Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido....”<sup>2</sup>

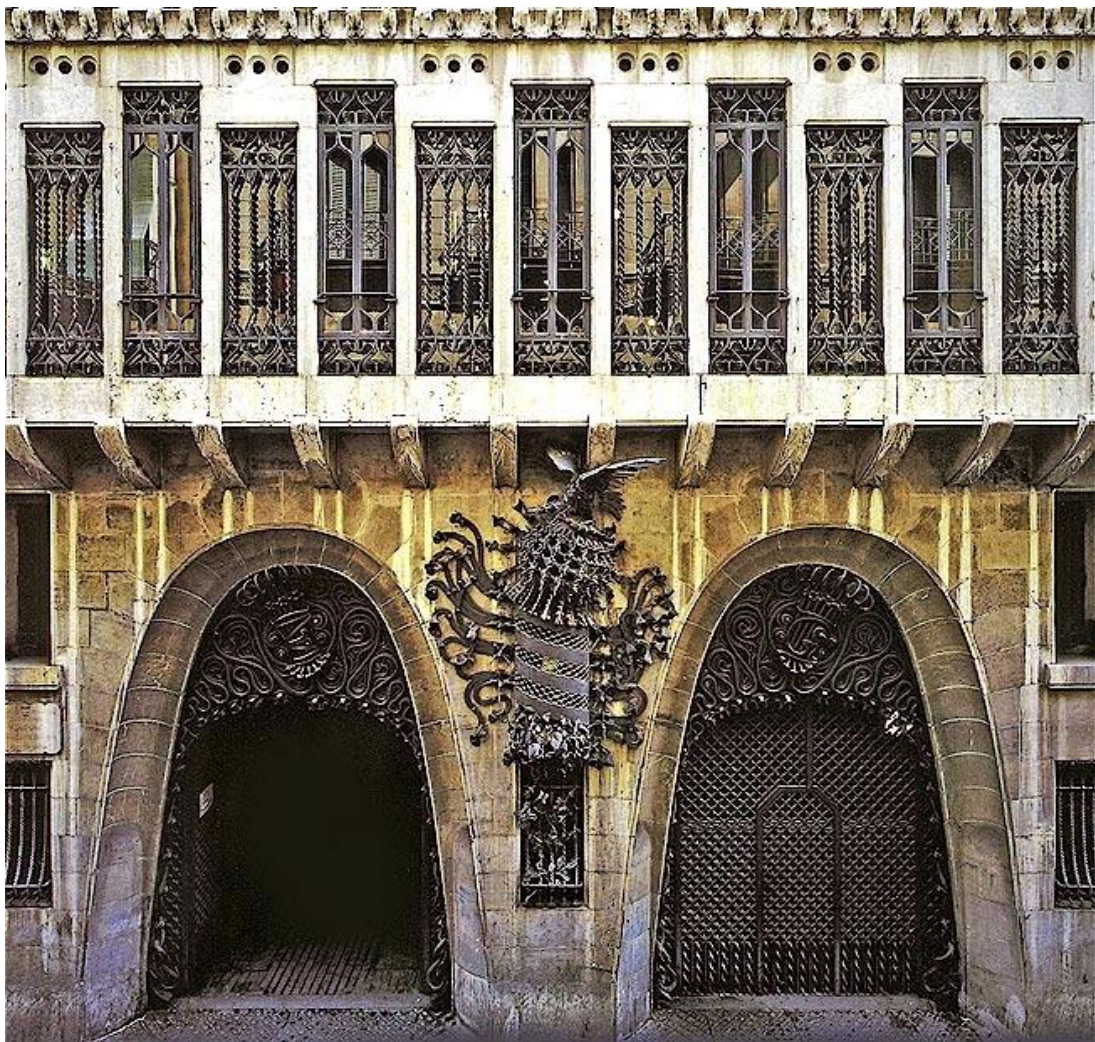


Fig. 6.1. Arcos catenarios de la entrada al Palacio Güell. Antonio Gaudí. Barcelona. (D.P.)

<sup>2</sup> Hooke, Robert. *A description of helioscopes, and some others instruments*. London 1676.

La afirmación de Hooke fue matizada algunos años después por David Gregory, en el sentido de que la forma ideal de un arco es la de una catenaria invertida, de forma que:

“...si un arco se sostiene, es porque es posible inscribir una catenaria en su interior...”<sup>3</sup>

La Fig. 6.2. muestra el modelo señalado por Hooke de la inversión de la cadena colgante y a la derecha, el modelo considerado por Giovanni Poleni,<sup>4</sup> para el estudio de la estabilidad de la cúpula agrietada de San Pedro del Vaticano, consistente en tomar una serie de arcos, a modo de gajos, (Técnica ya descrita en el Capítulo 3 de esta Tesis. Ver Fig 3.46.) comprobando la posibilidad de incorporar una línea de empujes, siempre contenida en su interior, que naturalmente coincide con la forma catenaria. La Fig. 6.3. muestra la serie de arcos catenarios del corredor de la planta baja del edificio del Colegio de las Teresianas de Barcelona (1888-1890) y la Fig. 6.4 los correspondientes a las buhardillas de las casas Batlló y Milá de Barcelona.

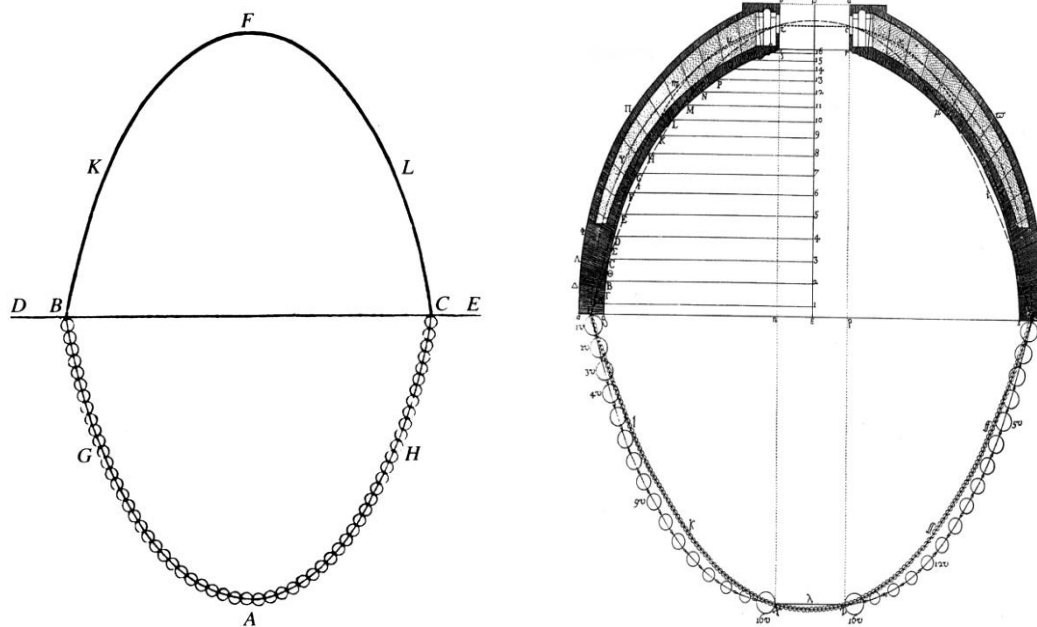


Fig. 6.2. Los dibujos de la catenaria de Hooke y de la inserción de la línea de empujes en el interior del “arco-gajo” tomado de la Cúpula de San Pedro, de una línea de empujes que sigue la forma de una catenaria. (Heyman, 1995).

No fue Gaudí un entusiasta de la utilización de los nuevos materiales que el XIX ya había puesto en manos los arquitectos, como el acero y el hormigón.

<sup>3</sup> Gregory, David. *Catenaria*. Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 19, nº 231, pp. 637-652. London.

<sup>4</sup> Poleni, Giovanni. *Memorie storiche della gran cupola del Tempio Vaticano*. Padua 17



Fig. 6.3. Corredor de la planta baja y pasillo superior del colegio de las Teresianas. Arcos con la forma antifunicular y ménsulas seriadas que aguantan el pasillo del piso superior. (González y Casals, 2002: 58)



Fig. 6.4. Arcos catenarios de los desvanes de la casa Batlló y Milá de Barcelona. El esquema de planos paralelos con arcos catenarios, se repite sistemáticamente en la arquitectura de Gaudí. (Michael Stallbaum. D.P.)

Antes por el contrario, los modelos formales de su arquitectura derivan especialmente de los materiales tradicionales, esto combinado, con una experiencia estructural basada en el comportamiento a compresión de estos materiales. El trabajo a compresión y la evitación de formas que comportasen tracciones, forma parte de ese conocimiento entre intuitivo y técnicamente formado con el que contó el maestro catalán.

Podemos decir que Gaudí da la vuelta a las formas góticas, expandiendo las estructuras hacia la base y estrechándolas hacia arriba, en un intento de recoger los empujes, habida cuenta de la inexistencia de materiales capaces de absorber estas sollicitaciones. La brillante e innovadora idea de Gaudí se resume en el aprovechamiento que el conocimiento estructural le había dado de la posición de equilibrio interno de las estructuras y utilizarlas como generadoras de forma para, por así decirlo hacerlas trabajar a su favor.

No teniendo dudas sobre el conocimiento de la Estática Gráfica que tenía Gaudí (los modelos de arcos catenarios son buena prueba de ello) nos interesa destacar algunas de sus experiencias con los cálculos grafostáticos.

Ya hemos tratado en otros apartados de esta Tesis, los orígenes y desarrollo de los métodos que evolucionaron desde la primera mitad del XIX con Gaspard Monge, Jean Victor Poncelet, etc. y que fueron generalizados desde Culmann o Cremona en aplicaciones sistemáticas, formando parte de las enseñanzas en las escuelas de arquitectura de todo el mundo desde finales del siglo.

La escuela de arquitectura de Barcelona no fue una excepción y el catedrático de Mecánica aplicada, maestro de obras y arquitecto más tarde, Joan Torras i Guardiola, explicaba métodos como el de Scheffler,<sup>5</sup> basado en el principio de la mínima acción, similar a los de Culmann. Joan Martorell i Montells, arquitecto historicista neogótico, para quien había trabajado Gaudí como delineante, le inició en el cálculo gráfico, aunque la singularidad de Gaudí en su aplicación fue unas curiosas simplificaciones que resultaron tremendamente efectivas.

La Fig. 6.5. muestra el aparejo de un arco del tipo catenario y la fotografía de una de esas series que conforman la estructura a base diafragmas sustentantes con la garantía de la descarga mediante estos arcos, que permiten la habitabilidad de las buhardillas. En la Fig. 6.6. hemos representado una función  $y = f(x)$  de tipo hiperbólico, que representa una catenaria transformada.  $y = a \cdot \cosh \left[ \frac{2x}{l} \cdot \operatorname{arcosh} \frac{a+b}{a} \right]$

<sup>5</sup> Ver en Revista de Obras Públicas las referencias al método de Scheffler, relacionado con la metodología de Culmann, a los que Szystowski.

Szystowski, M. *Nuevo método para el trazado de la curva de presiones en las bóvedas de fábrica*. Revista de O.P. 1887. Tomo 17, pp. 196-98. Y Continuación en el Tomo 25, pp. 265-68.



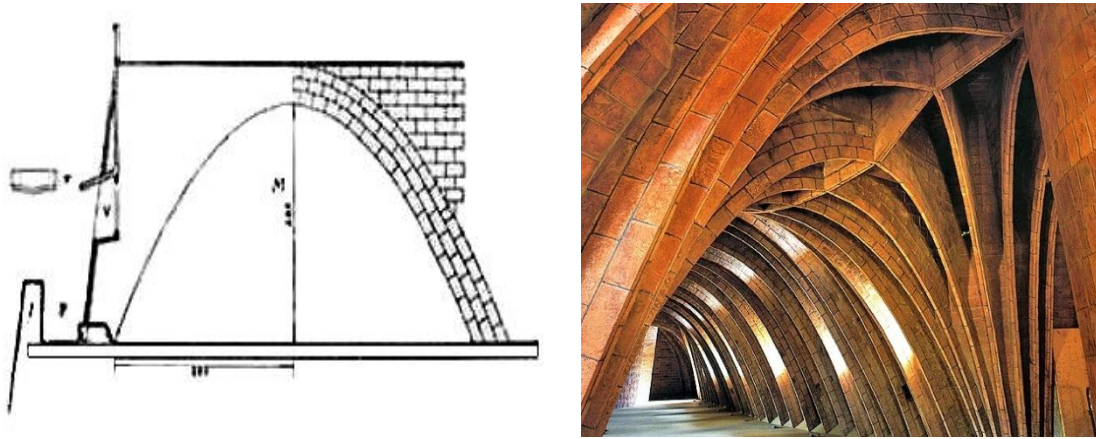
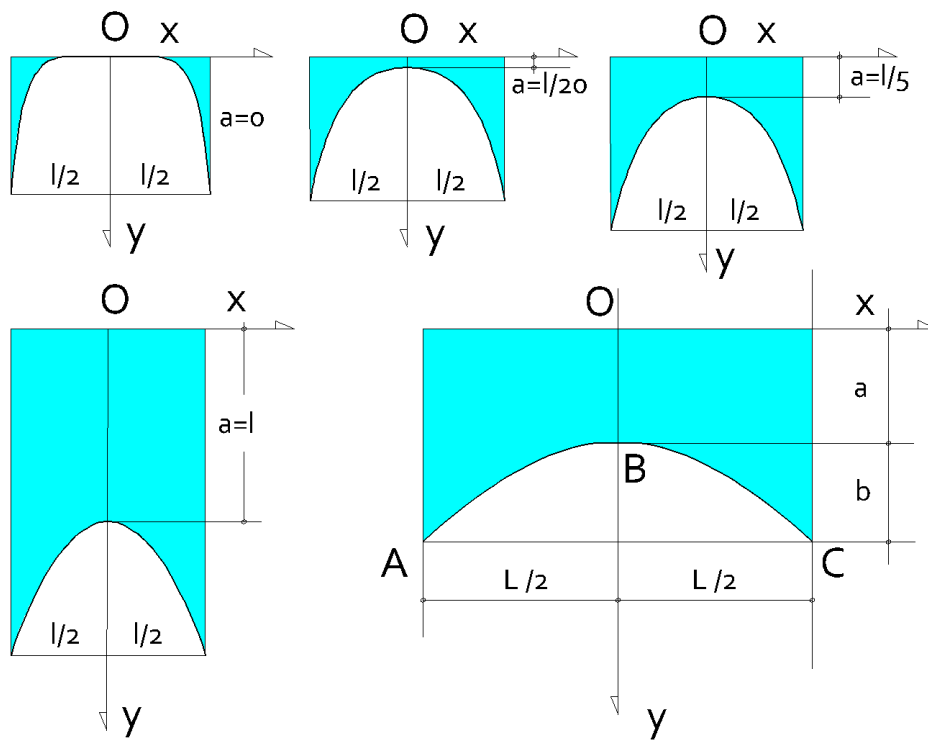


Fig. 6.5. Dibujo del aparejo de un arco tipo (Bergós 1953)<sup>6</sup> y fotografía de una serie de esos arcos de la buhardilla de la casa Milá, mostrando dicho aparejo y la nervatura superior que une las claves de los arcos.(trendmagazine.it).



$$y = a \cosh \left[ \frac{2x}{l} \operatorname{arcosh} \frac{a+b}{a} \right]$$

Fig. 6.6. Representación gráfica de distintos arcos catenarios siguiendo la función hiperbólica de una catenaria transformada, descrita para una misma semiluz del arco ( $l/2$ ), parametrizada con distintos valores de la distancia de la clave al origen de coordenadas ( $a$ ) y de la altura del arco entre la clave y los arranques ( $b$ ). Ecuación matemática según un modelo de Inglis (1951).<sup>7</sup> (Dibujos propios).

<sup>6</sup> Bergós i Massó, Joan. *Materiales y elementos de construcción*. Estudio experimental. Bosch: Barcelona 1953.

<sup>7</sup> Inglis, C. *Applied Mechanics for Engineers*. Cambridge University Press. Cambridge 1951

Gaudí veía las formas catenarias y parabólicas mecánicamente correctas, evitando esfuerzos nocivos para la fábrica y estéticamente bellas, utilizándolas, aun habiendo podido usar otros tipos que, con las debidas proporciones, admitía el material.

H. Moseley<sup>8</sup> en 1835 y E. Méry<sup>9</sup> en 1840 formulan la teoría de las líneas de empuje que otorga carta de naturaleza científica a los experimentos de algunos ingenieros y arquitectos anteriores, uniendo el comportamiento de dichas líneas con la ruptura de los arcos. Desde este momento se puede comprobar el comportamiento estructural calculando bien analíticamente o gráficamente, que es precisamente lo que la Grafostática vino a solucionar de forma mucho más sencilla.

Gaudí recibió esta formación en la Escuela de Arquitectura, como hemos señalado entre los años 1873 y 1878, en que la Estática Gráfica estaba extendiéndose en todo el mundo. Utiliza el cálculo grafostático de los arcos que está diseñando, integrando dicho cálculo en el proceso de proyecto. Es decir, justo lo que estamos intentando demostrar con nuestra Tesis. A Gaudí no le importa tanto la comprobación de la estabilidad del arco o la bóveda construida, como diseñar estos elementos, desde su concepción, con formas calculadas como estables.

La documentación que hasta a nosotros ha llegado demuestra que ese era su modo de proyectar utilizando incluso modelos a escala para sus comprobaciones, llevando a las tres dimensiones lo calculado gráficamente.

El método habitual de cálculo grafostático de estabilidad de arcos y de empujes, que ya hemos analizado en anteriores capítulos, básicamente consistente en dividir el espesor del arco en dovelas reales o ficticias y definir un sistema de fuerzas actuantes, proporcionales a los pesos propios y las sobrecargas, mediante los correspondientes polígono de fuerzas y trazado del funicular, calcular la línea de empujes, es modificado por Gaudí, que probablemente conocía una experiencia antigua similar, utilizada ya por Snell<sup>10</sup> en 1846, consistente en dibujar sobre el propio arco las composiciones de fuerzas, encadenándolas desde el empuje horizontal de la clave, sin utilizar ni Polígono de Fuerzas ni Funicular.

En la Fig. 6.7. se hemos sobrepuesto al dibujo original de Snell, (a la izquierda) las líneas de acción del sistema de vectores, correspondiente a los pesos de las dovelas del arco. Sobre esas líneas de referencia se realiza la composición vectorial con la

---

<sup>8</sup> Moseley, H. *On the equilibrium of the arch*. Cambridge Philosophical Transactions, 1835, Vol. 5, pp. 293-313.

<sup>9</sup> Méry, E. *Memoire sur l'équilibre des voûtes en berceau*. Annales des ponts et Chaussées, 1840, pp. 50-70, planches 133-134.

<sup>10</sup> Snell, G. *On the Stability of Arches...* Minutes and Proceeding of the Institution of Civil Engineers, Vol. 5, pp.439-476, lam. 27-40.

resultante de la anterior. A la derecha se muestra un esquema de los modelos de

cálculo grafostático utilizado por Gaudí según Cèsar Martinell.<sup>11</sup>

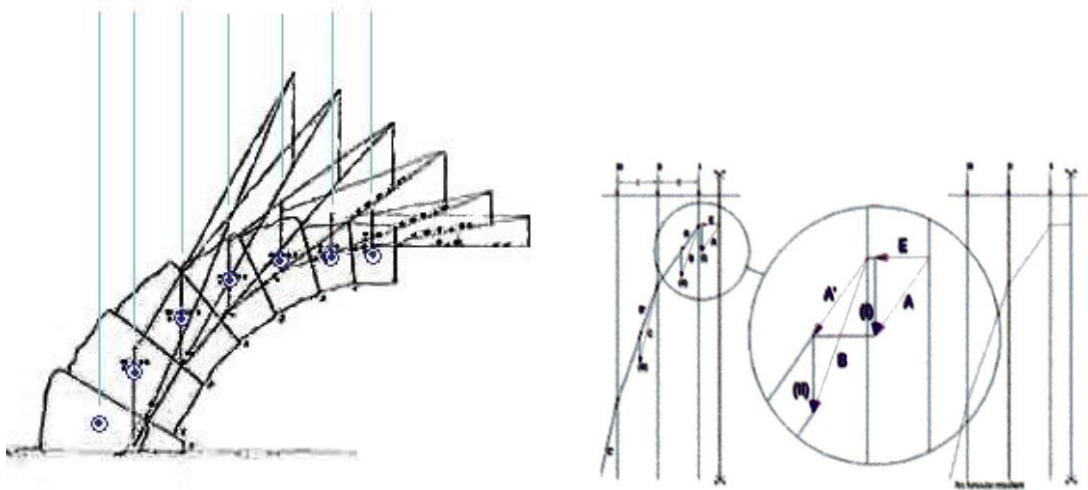


Fig. 6.7. Dibujo de Snell de 1846 del cálculo de la línea de empujes de un arco de dovelas de piedra, en el que hemos sobrepuesto los C.D.G. de las dovelas y las rectas de acción de los vectores fuerza representantes de sus pesos. Esquema del método grafostático que utilizaba Gaudí, según uno de sus colaboradores, Cèsar Martinell i Brunet.

En la Fig. 6.8. hemos dibujado un el cálculo de la línea de empujes de un arco, utilizando el método que hemos descrito, con el que Gaudí estaba familiarizado y parece que le resultaba más cómodo, generalizándose a finales del S. XIX.

Aclaremos, que en la realización del procedimiento grafostático explicado, entre otros por Joan Bergós, siguiendo el método que le atribuye a Gaudí, se simplifica el trazado del funicular de las cargas, entre otras razones por obviar el trazado del polígono de fuerzas.

En realidad, se tendrían que aplicar las cargas I, II, III... en las líneas verticales de las particiones ( d ) pero con la idea de facilitar la construcción gráfica, se aplican para su composición en los extremos de A', B'...De igual manera, habría que haber compuesto las fuerzas en el punto siguiente a aquél donde se hace siguiendo el "método Gaudí".

Otra particularidad que el método supone, es la imposibilidad de ciertos cálculos asociados al conocimiento del Polígono de Fuerzas, que como veremos en el punto siguiente de esta Tesis, con el trabajo de Robert Maillart, supone un inconveniente grave, si bien es cierto, que dibujar el polígono de fuerzas, conociendo las cargas, es inmediato, aunque la simplificación explicada elimina el cálculo de los C.D.G. al dividir el paño del arco en partes iguales.

<sup>11</sup> Martinell i Brunet, Cèsar. *Conversaciones con Gaudí*. Punto Fijo: Barcelona 1969.

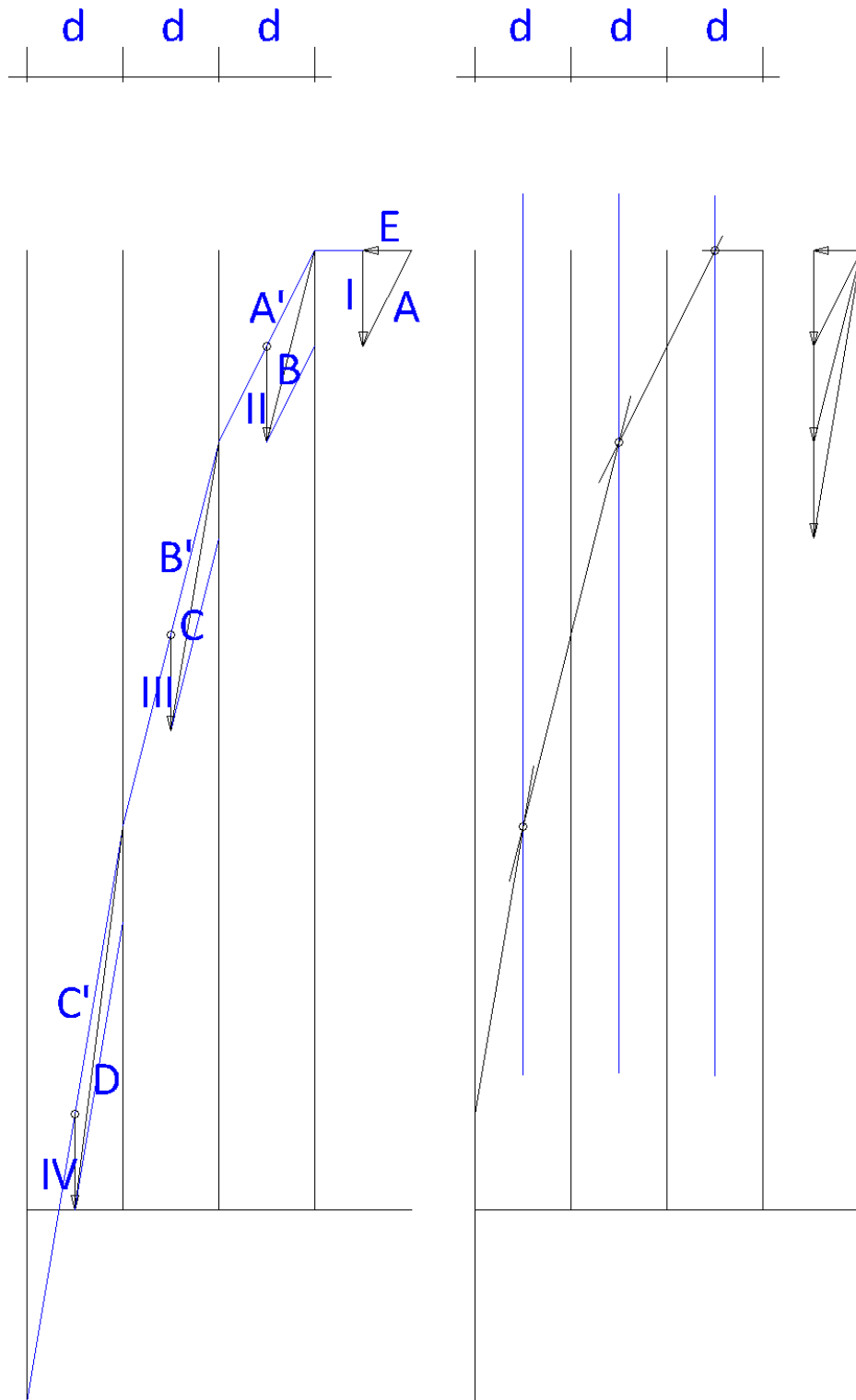


Fig. 6.8. Utilización del procedimiento grafostático explicado por Joan Bergós siguiendo el método que le atribuye a Gaudí, comparado con el procedimiento habitual de la Estática Gráfica. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

Para el cálculo de un arco de proporciones catenarias, hemos dibujado paralelamente el esquema tradicional grafostático, con las rectas de acción de las cargas en los centros de los paños de división y el diagrama de fuerzas. Naturalmente es un ejercicio hipotético ya que las cargas no responden a las que gravitarían sobre un arco real, que aportarían mayor carga junto a los arranques. El polígono funicular (derecha) obtenido con apoyo del polígono de fuerzas, resulta paralelo a la línea de empujes obtenida en el diagrama izquierdo.

Siguiendo su metodología grafostática, son numerosos los planos y croquis que conocemos de Gaudí. Uno de los que más nos interesan a los efectos de nuestra Tesis Doctoral son los distintos cálculos grafostáticos que demuestran el dominio de esta Ciencia por él y su equipo. En efecto, conocemos un dibujo relativo a la fachada poniente de la Sagrada familia, (Rafols 1929) <sup>12</sup> en el que se muestra el cálculo grafostático de los empujes sobre los pilares de la misma y que mostramos en la Fig. 6.9.

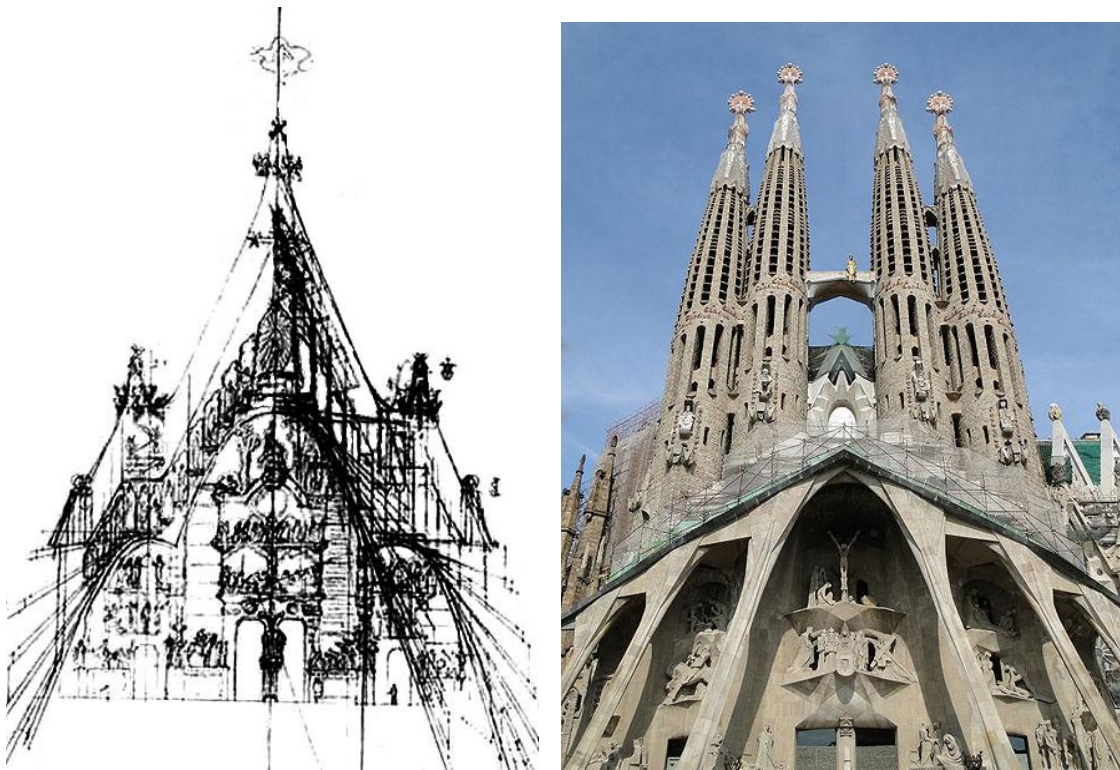


Fig. 6.9. Cálculo grafostático de Gaudí para la fachada de la Pasión (poniente) de la Sagrada Familia de Barcelona, en el que se puede apreciar el estudio grafostático de la sucesión de composición de fuerzas, al modo que hemos visto que él las calculaba, hasta ir encontrando la resultante, como se ve en los vértices inferiores, derecho e izquierdo. (Rafols, 1929). Fotografía de la fachada de la Pasión, donde aparecen los contrafuertes que Gaudí calculaba según el dibujo de la izquierda.

<sup>12</sup> Rafols i Fontanals, Josep Francesc. *Antonio Gaudí*. Ed. Casona: Barcelona 1929.

Es significativa la extraordinaria capacidad de ir y volver sobre distintos tipos de cálculo que tuvo Gaudí. De experiencias grafostáticas como las de los arcos catenarios, ya vistas, pasó a los modelos en tres dimensiones.

Gaudí utiliza su idea para diseñar concibiendo los modelos espacialmente, algo así como superficies catenarias, creando unos modelos mundialmente conocidos de estereofuniculares, como la maqueta construida para la ejecución de la iglesia de la Colonia Güell en Santa Coloma de Cervelló. El primero de ellos sirvió para el diseño de las cúpulas mediante unas cuerdas de las que colgó cadenas cuya longitud era proporcional al peso considerado. De la fotografía que se conserva del experimento se aprecia que sólo trabajó con la mitad de la maqueta. Fig. 6.10.

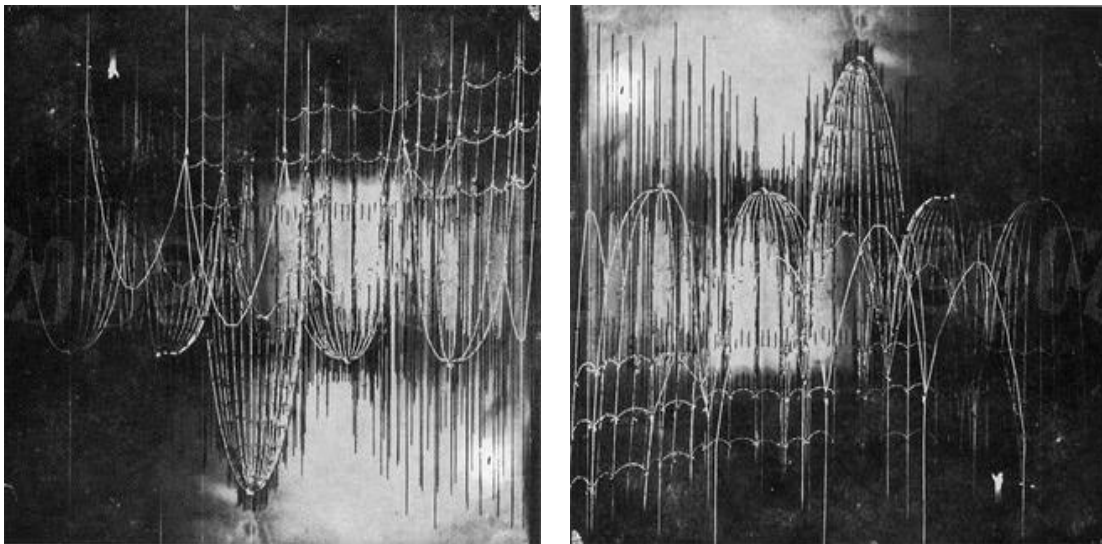


Fig. 6.10. Fotografías del primer estereofunicular utilizado por Gaudí para el diseño de la iglesia de la Colonia Güell. La segunda imagen está invertida pudiéndose comprobar el resultado del experimento.

Posteriormente pasó a ensayar con una maqueta realizada con pequeños sacos con granalla, con más o menos carga según las cargas de cubierta, en esta maqueta si se contempla la totalidad de las cúpulas.

La instalación de unos dinamómetros en la posición en que iban a estar los soportes le proporcionaba el dato, naturalmente a la escala de fuerzas en la que estaba trabajando, de los esfuerzos que tendrían que resistir dichos soportes. La colocación de un lienzo en el interior de la maqueta, ponía de manifiesto las superficies de las cúpulas.

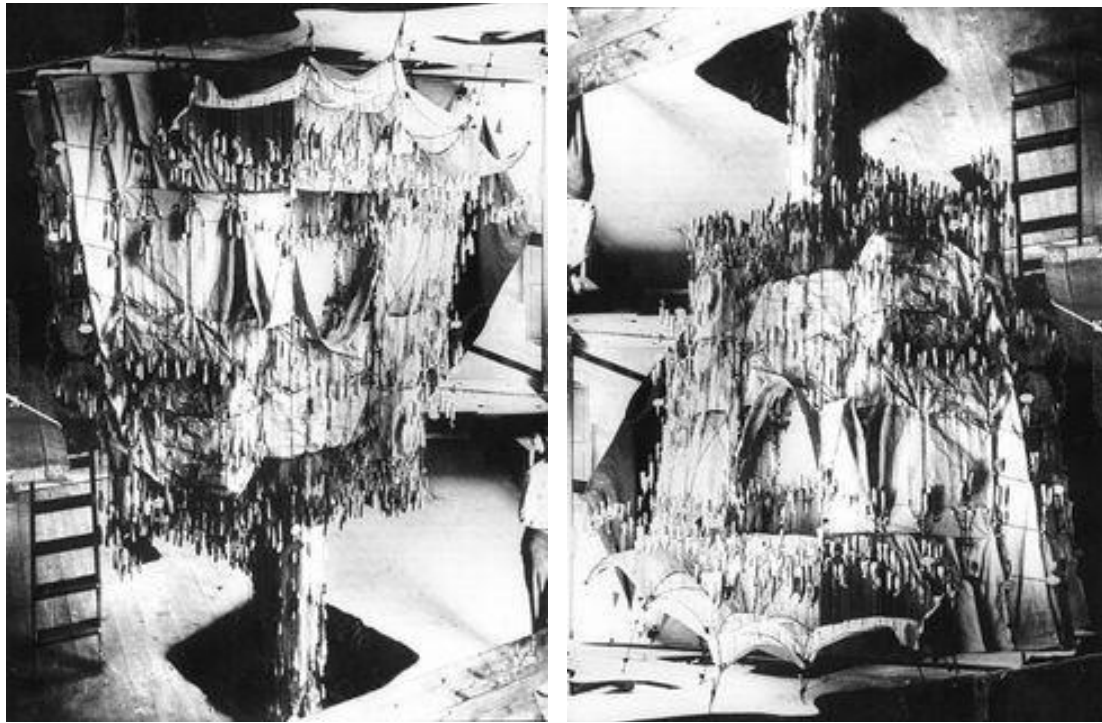


Fig.6.11. Fotografías, real e invertida de la maqueta del estereofunicular con los sacos cargados.

En la construcción de la Sagrada Familia, con la experiencia ya adquirida en las obras descritas, los funiculares fueron encontrados por procedimientos gráficos y no experimentalmente, aunque, ambos corresponden a los mismos conocimientos grafostáticos, que Gaudí bien conocía.

La iglesia de la Sagrada Familia responde a otro proyecto anterior de carácter neogótico, lo que indujo a Gaudí a un perfeccionamiento del gótico, cuando se encargó del nuevo proyecto. Su idea, esa idea estructural y conformadora de los arquitectos que señalaba Torroja y que citamos en la Introducción, es verticalizar las cargas de forma que se eliminen los empujes horizontales y se pueda prescindir de los contrarrestos exteriores y los arbotantes, (las muletas del gótico, según sus propias palabras) (Huerta, 2003: 129) <sup>13</sup> lo que parece que consigue en los primeros proyectos, buscando unas formas abovedadas casi piramidales, que generan cargas casi verticales. Los pequeños empujes horizontales obligan a Gaudí a inclinar los pilares.

Aquella expresión inicial de esta Tesis de que “la forma sigue a las fuerzas” cobra su más potente valor con las experiencias gaudianas. Las columnas de basalto de la cripta de la iglesia de la Colonia Güell en Santa Coloma de Cervelló, cuyo desequilibrio aparente vienen a compensar los esfuerzos de la nave superior no construida.

<sup>13</sup> Huerta, Santiago. El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí. Ingeniería Civil. 129 (2003).

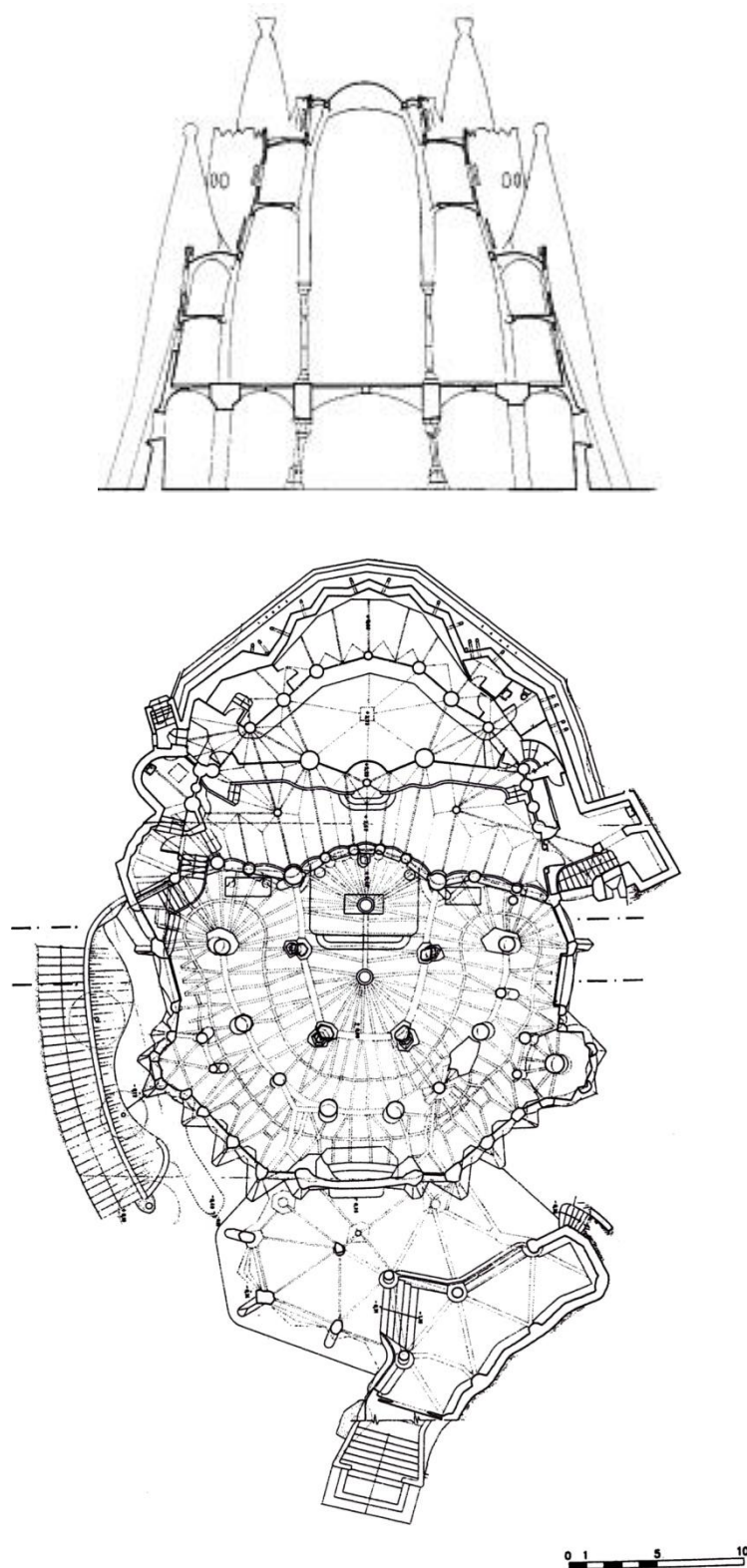


Fig. 6.12. Planta de la Cripta de la Colonia Güell. Arriba, sección mostrando la construcción superior no realizada y que llevaría al equilibrio de las pilastras con apariencia de desequilibrio.



El análisis grafostático de las dos pilastras más próximas al altar, indica que la resultante del estado actual de cargas se desvía de la directriz de la pilastra y que haría falta una carga muy importante para centrarla y hacerla más vertical.

Las razones geométricas del desvío, pudieran deberse según un primer análisis a la diferencia de luces entre el arco central y los laterales inmediatos, de menor luz. No obstante, una segunda reflexión, teniendo en cuenta el efecto producido por la carga que debiera haber inducido la iglesia construida en la planta superior (los cálculos grafostáticos así lo determinan) así como los cálculos del propio Gaudí, rondarían las 50Tn, la resultante se habría desviado en sentido contrario, o sea, hacia la vertical.

En la Fig. 6.13 se muestra la fotografía del interior de la cripta justo en el crucero y en la Fig. 6.14. se presenta el análisis grafostático de las desviaciones de las pilastras y hacia donde se dirige la resultante.

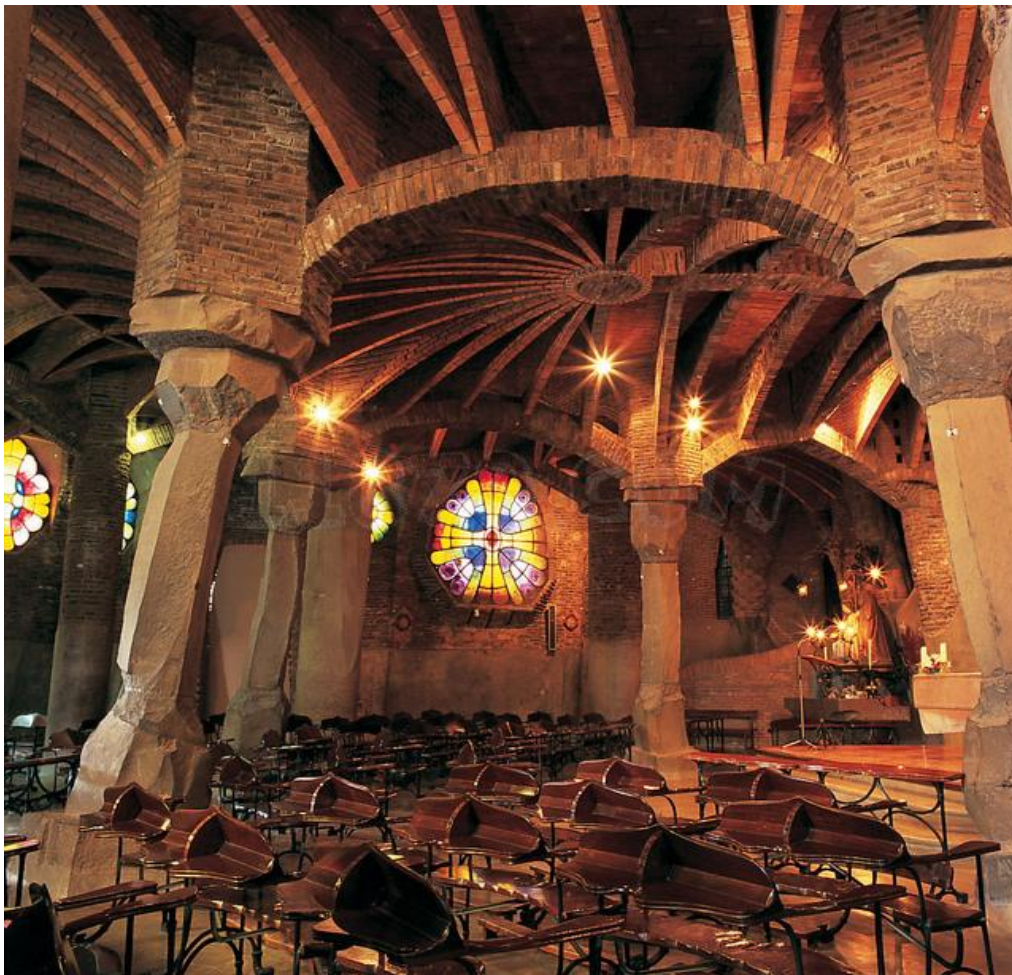


Fig. 6.13. Interior de la iglesia de la Colonia Güell. (D. P.)

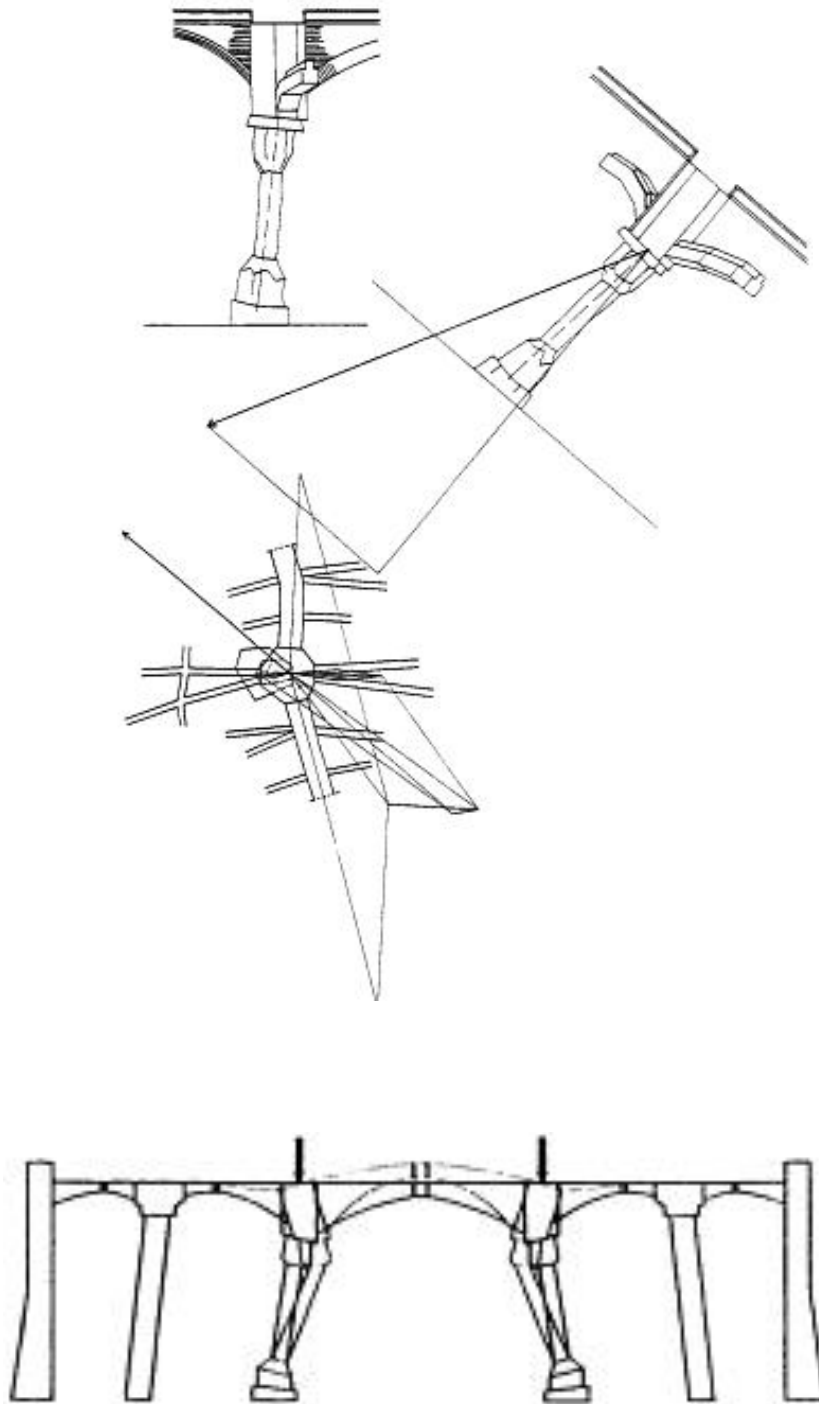


Fig. 6.14. Proyecciones diédricas de una de las pilastras de la Cripta de Gaudí de la Colonia Güell para el análisis, combinado con la Estática Gráfica de la dirección e intensidad de la Resultante actual y sección en la que se insinúa el efecto que la carga de la iglesia superior no construida ejercería sobre la línea de carga en el interior del pilar.<sup>14</sup>

Gaudí había construido la maqueta ya expuesta , en la que estos pilares, que están situados según una trama de 6x6m no tendrían que estar inclinados, dado que las bóvedas superiores fueron diseñadas siguiendo los antifuniculares de las cargas y por

<sup>14</sup> González Moreno, J. Luís – Casals Balagué, Albert. *Estructura y espacio en la arquitectura de Gaudí*. O.P. Ingeniería y territorio. Nº 50, 2002.

tanto carecen casi de empujes horizontales. Existen distintas teorías que intentan explicar las decisiones de Gaudí, pero en cualquier caso, los datos ofrecidos al arquitecto por la maqueta o los análisis grafostáticos fueron “datos” a manejar en la búsqueda de la arquitectura final del conjunto, no solo para esta obra, sino pensando en la posible estructura sustentante de la Sagrada Familia, constituyó una muy interesante experiencia. Mostramos en la Fig.6.15. cálculos grafostáticos del equilibrio, en la determinación del esqueleto de los pilares ramificados, que soportan en la Sagrada Familia, cubiertas, bóvedas y el muro lateral.

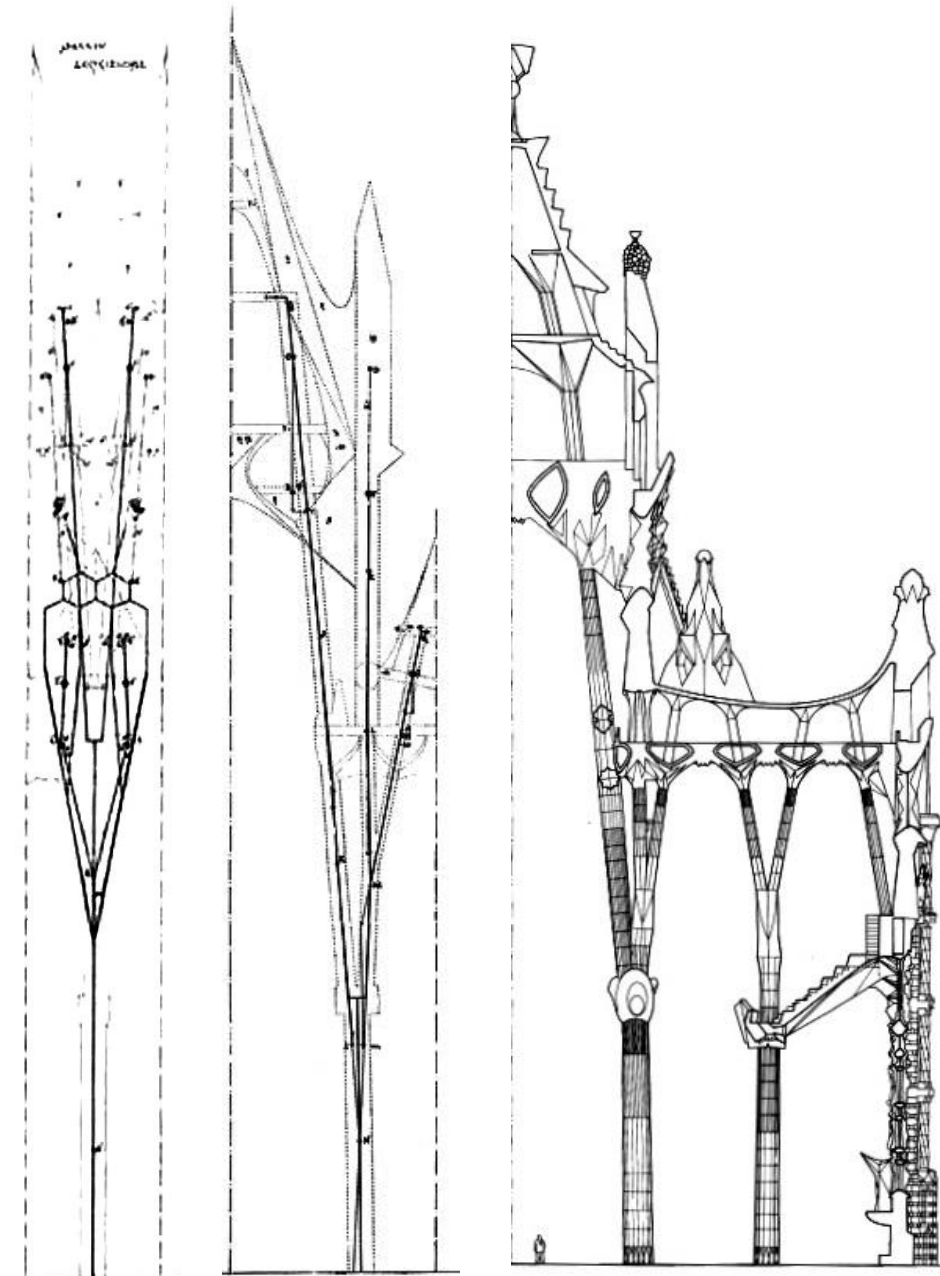


Fig. 6.15. Análisis grafostático de la composición de las líneas de fuerza en el interior de los pilares en forma de árbol en la iglesia de la Sagrada Familia de Gaudí. Alzado frontal y lateral y sección de la nave. (Sugrañés 1923).<sup>15</sup>

<sup>15</sup> Sugrañés Gras, Domingo. *Disposició estàtica del temple de la Sagrada Família*. Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña, pp. 17-36. 1923)

Finalizamos nuestra investigación relativa a la utilización de los procedimientos grafostáticos utilizados por Gaudí y sus colaboradores , con uno de los casos de uso de la Estática Gráfica, más elocuentes (Fig. 6.16.), como el estudio del equilibrio de un tramo de la nave central de la Catedral de Palma de Mallorca, realizado por Rubió i Bellver,<sup>16</sup> que nos retrotraen a los análisis estudiados ya en esta Tesis en el punto 3.2. (ver Fig. 3.70. Dibujos basados en unos esquemas de Ungewitter, 1890. y la Fig. 3.75. Estudio del equilibrio de empujes de las bóvedas en la iglesia de St. Martin en Landshut, Alemania, realizado por Eberhard Zorn, 1933) y con el cálculo realizado por Gaudí para los Contrafuertes del Parque Güell (Fig. 6.17.)

Hemos dibujado dicho cálculo, reconstruyendo los parámetros formales utilizados por Gaudí, que han llegado hasta nosotros por la documentación de su colaborador y seguidor, Rubió i Bellver de 1912 y hemos intentado seguir el procedimiento de distribución de cargas y empujes, para ser compensados por las componentes verticales de las cargas gravitatorias del contrafuerte, reconduciendo dichos empujes, que terminan por pasar, de forma estable, dentro del Núcleo Central de las secciones de las entregas al terreno.

La idea (otra vez “la idea”) es desde el punto de vista de la mecánica, reconducir los empujes que en la parte derecha se iban saliendo del sistema, con la colaboración del peso propio del contrafuerte y la carga de tierra vegetal de la jardinera superior.

Sería interesante el cálculo grafostático del momento del Sistema de vectores fuerza, respecto al punto mas a la derecha del contrafuerte y la comprobación al vuelco del conjunto. La Estática Gráfica nos plantea, no obstante una visión intuitiva de que este vuelco no es posible; dependiendo de la magnitud del empuje, como es natural. ( Podría ser origen de un futuro trabajo continuador, en alguna medida, de esta Tesis Doctoral)

Mostramos en la Fig. 6.18. una preciosa fotografía del muro de contención y el interesante espacio de paso intermedio.

---

<sup>16</sup> Rubió i Bellver, Joan. *Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca*. Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña. 1912, 87-140.

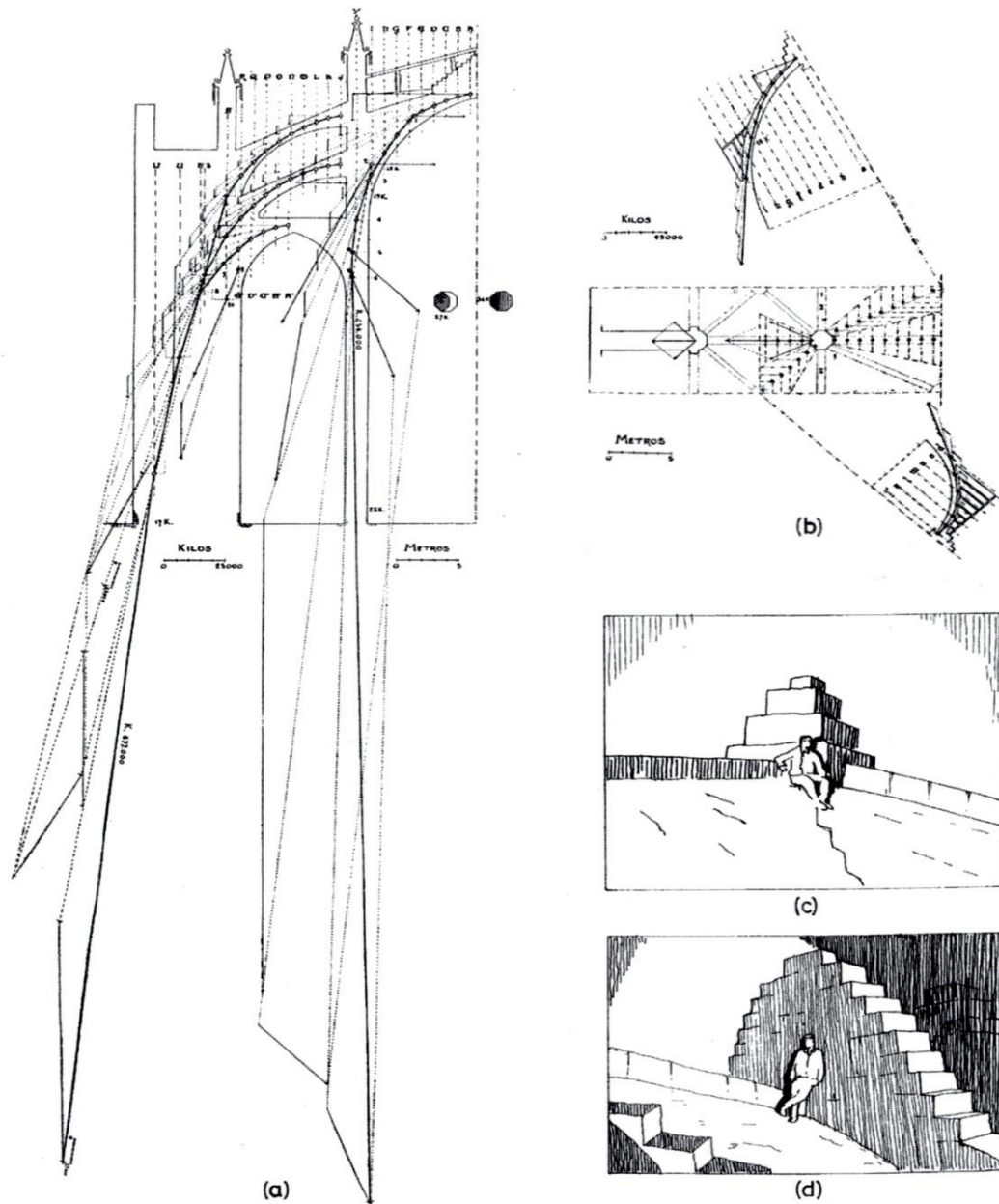


Fig.6.16. Análisis grafostático (método Gaudí) realizado por Rubió i Bellver de la estabilidad de un tramo de la nave central y laterales en la Catedral de Palma de Mallorca.

En (a) se analiza la situación de un tramo tipo. En (b) se calculan los empujes de la nave central y lateral. (Rubio i Bellver, 1912)

En (c) se observa una pirámide de sillería sobre la clave de la bóveda de la nave central, que en este caso como en otras muchas bóvedas comporta una carga crucial para el centrado de la resultante de los empujes.

En (d) se ha redibujado también un muro existente sobre el arco perpiño de la nave central.

(c) y(d) (Huerta, 2004: 511)<sup>17</sup>

<sup>17</sup> Huerta, Santiago. *Arcos, bóvedas y cúpulas*. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Instituto Juan de Herrera: Madrid

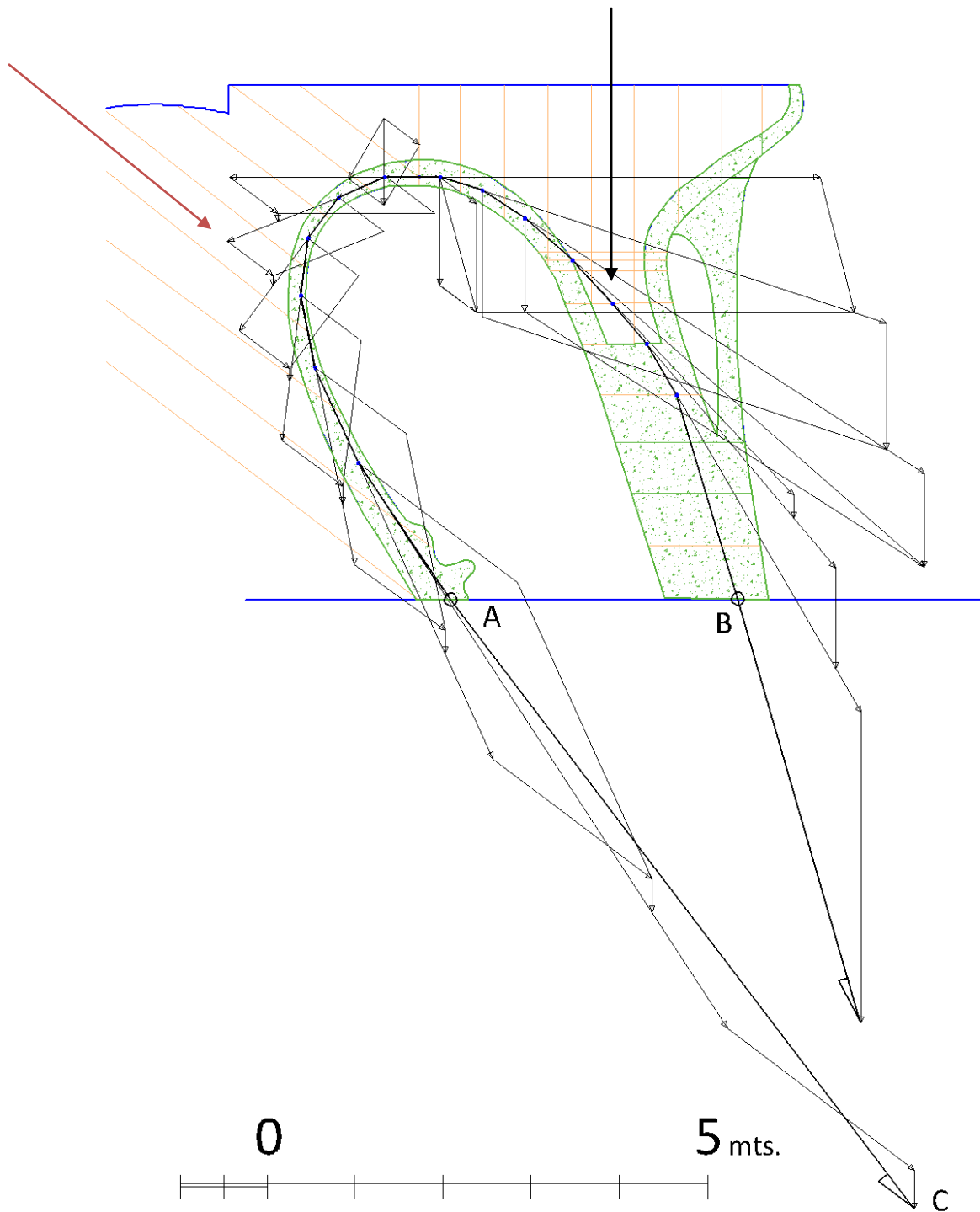


Fig. 6.17. Cálculo grafostático de la estabilidad de un paño de los contrafuertes del Parque Güell de Barcelona, siguiendo el procedimiento habitual de Gaudí, en el que se suprime el dibujo del polígono de fuerzas. Un trazado similar al ortodoxo polígono funicular, se obtiene con las resultantes parciales de la composición encadenada de los empujes y cargas gravitatorias. (Dibujo propio, siguiendo los documentos de Rubió y Bellver de 1912)

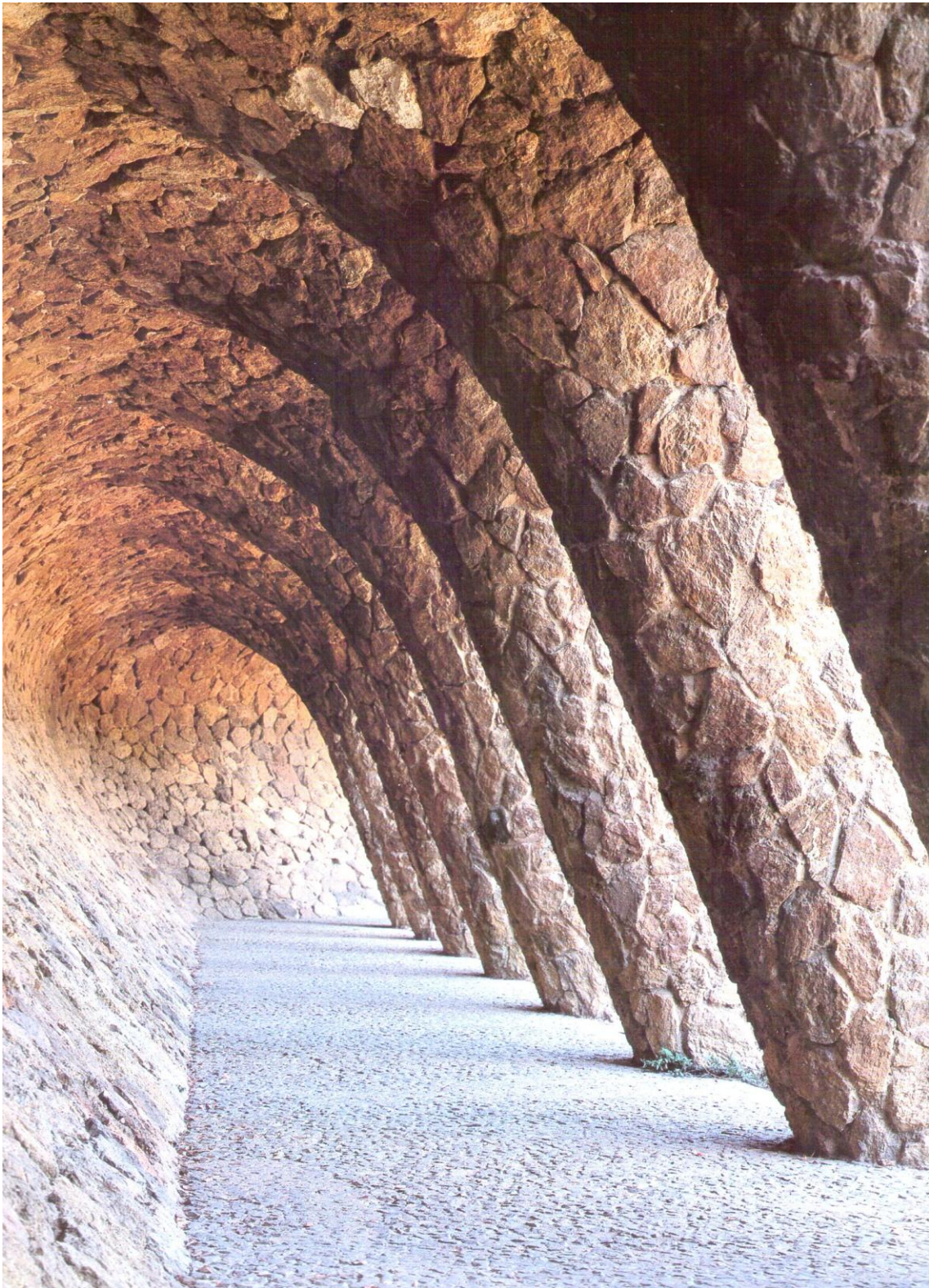


Fig. 6.18. Fotografía de los contrafuertes del Parque Güell de Gaudí en Barcelona. (<http://www.parkguell.es>)

## 6.2. KOECHLIN - EIFFEL. UNA TORRE CUYA FORMA SIGUE A LAS FUERZAS

Maurice Koechlin (1856-1946)<sup>18</sup> era natural de Alsacia y estudió de 1873 a 1877 en la Escuela de Ingeniería del politécnico de Zürich, es decir, fue alumno de Karl Culmann. Después de su licenciatura trabajó hasta 1879 en la empresa ferroviaria francesa Fer de l'Est. A los 23 años entró a trabajar, a través de la recomendación de Culmann, en la empresa Eiffel de construcciones metálicas, en Levallois-Perret a las afueras de Paris y nada más entrar en ella comenzó a desempeñar el puesto de ingeniero jefe. Allí permanecería hasta el final de su vida ocupando cargos de dirección.

Es posible que sorprenda que este apartado dedicado a la Tour Eiffel, comience con referencias a Maurice Koechlin, pero queremos que sirva como pequeño homenaje a su verdadero padre, a quien Gustave Eiffel compró todos los derechos de autoría con la condición de ser citado, pero que el tiempo ha llevado al olvido, junto con Emile Nougier, el otro ingeniero de la empresa de Eiffel, a quienes se debe la idea. Gustave Eiffel convino con sus ingenieros Koechlin y Nougier la firma del siguiente contrato:

*"MM. Emile Nougier et Maurice Koechlin s'engagent à céder à M. Gustave Eiffel "la propriété exclusive du brevet susdit et déclarent être prêts à lui faire cession de tous leurs droits sans aucune restriction ni réserve, et à réaliser cette promesse sous la forme que G. Eiffel jugera convenable et au moment qu'il choisira. Ils le laissent aussi complètement libre, s'il le croit utile, de prendre le même brevet à l'étranger, en son nom personnel et s'engagent à lui prêter leur concours dans ce but, s'il était nécessaire... En outre, MM.E. Nougier et M. Koechlin cèdent à M. G. Eiffel leurs parts de propriété sur le projet exposé. En contrepartie, Eiffel prend à sa charge les frais entraînés par le brevet et s'engage - si la tour est réalisée, même avec des modifications - à verser à chacun d'eux une "prime" de 1% des sommes qui "lui seront payées pour les diverses parties de la construction". Il s'engage, enfin, "à citer toujours les noms de ces Messieurs chaque fois qu'il y aura lieu de mentionner, soit le brevet, soit l'avant-projet actuel".*

En el que Emile Nougier et Maurice Koechlin ceden la propiedad intelectual de la patente y en caso de ganarse el concurso y construirse la obra, Eiffel se comprometía a pagarles el 1% de las certificaciones de obra, citando siempre sus nombres tanto en relación a la patente como al anteproyecto (que era la fase en que se encontraba el proyecto a la firma del documento.

<sup>18</sup> Koechlin, Maurice. *Applications de la statique graphique*. Baudry et Cie. : Paris 1889.

Sobre su figura como ingeniero autor de la Torre Eiffel, ver: Tratz, Martin. *Maurice Koechlin (1856-1945) Der eigentliche Erfinder des Eiffelturms*. Deuche Bauzeitung, 136 (4)105-111.



En la primavera de 1884, se toma la decisión de realizar la Exposición Universal de 1889 en París. Maurice Koechlin y su compañero Emile Nougier<sup>19</sup> tuvieron la idea de construir una torre bien alta, en la zona más céntrica de la Exposición, que se convirtiera en un hito representativo de la misma, confiriéndole un especial atractivo. Koechlin realiza un anteproyecto con los correspondientes croquis y cálculos previos y lo somete a la aprobación inicial de Eiffel quien no se muestra favorable a la idea, pero permite que sus ingenieros sigan con el desarrollo de la misma.

Koechlin había trabajado en el diseño y construcción del Viaducto ferroviario de Garabit sobre el río Truyère, afluente del Garonne. Éste consistía en un puente de hierro con arco de celosía situado en el Macizo Central francés en Saint Flor, que se acabó en 1884 y durante 100 años fue considerado el puente de ferrocarril de mayor altura del mundo. (Ver Fig. 6.19. y 6.20.)



Fig. 6.19. Fotografías actuales y antiguas del Viaducto de Garabit sobre el Truyère. (Graeme Churchard. et al. <http://highestbridges.com> ).

<sup>19</sup> Nougier, Emile (1840-98) ingresó en el Politécnico de París en 1861 y al año siguiente en la Escuela de Minas, obteniendo el título de Ingeniero Civil en 1865. Colaboró con Koechlin en la construcción del Viaducto de Garabit, entre otros muchos y en el diseño, cálculo y construcción de la Torre Eiffel.

Del citado viaducto, nos interesa especialmente el cálculo de sus pilastras, porque del dominio del cálculo grafostático de Koechlin de estas estructuras, surgió el diseño de la Torre Eiffel, que analizamos en este apartado de nuestra Tesis.



Fig. 6.20. Fotografías de detalle de las pilastras metálicas del Viaducto de Garabit sobre el Truyère. (Graeme Churchard, et al. <http://highestbridges.com> ).

La empresa de Eiffel había construido antes que este viaducto, muchos otros, entre los que destacamos el ya mencionado en esta Tesis, Puente de María Pía, del ingeniero Thóphile Seyrig sobre el río Duero en Oporto en los años 1876-77, años en los que Koechlin estaba terminando su carrera.

La estructura es muy parecida, y demuestra que los arquitectos e ingenieros, al menos los franceses, ya calculaban con soltura mediante la Estática Gráfica de Culmann, diez o doce años después de la aparición de su *Die Graphische Statik*, e incluso, como en el caso de Koechlin influían decisivamente en su difusión, aunque algunos años más tarde, con la edición de su libro: *Applications de la statique graphique* de 1889, ya citado, donde se recoge su gran experiencia en el cálculo de entramados metálicos.

Nos centraremos en el cálculo de la pilastra del viaducto, del que se pueden extrapolar algunas de las consideraciones. En particular de su resistencia a los

esfuerzos del viento, que tanto Koechlin como Nougier tuvieron bien presente en la concepción de la famosa Torre.

Koechlin publica su *Applications de la statique graphique* el mismo año de la inauguración de la Torre Eiffel, 1889. En el libro explica minuciosamente el cálculo de la estructura básica de una de estas pilastras, cuya forma se muestra en la Fig. 6.21. junto con un tramo (mn-m'n') donde el autor establece los parámetros geométricos y mecánicos siguientes:

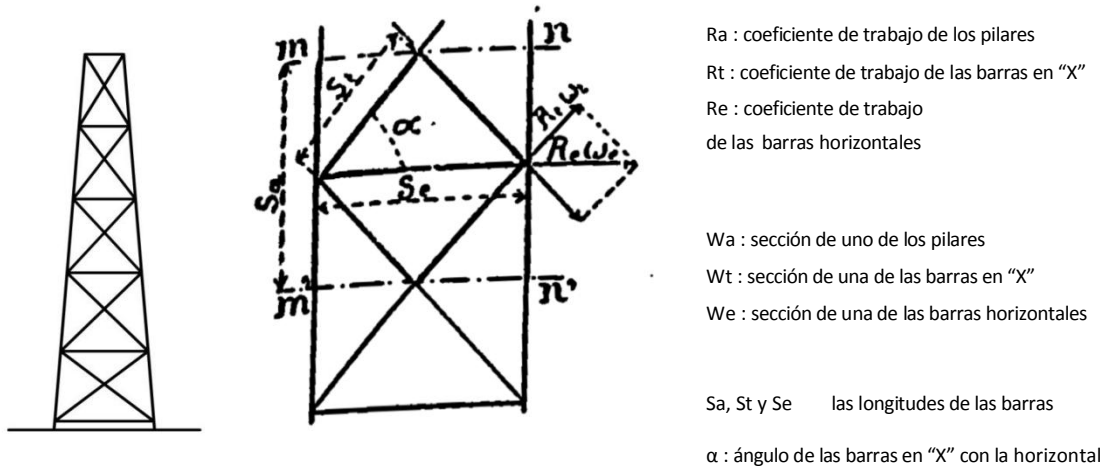


Fig. 6.21. Pilastra de entramado del tipo de las utilizadas en el Puente de María Pía o en Viaducto de Garabit.

En la Fig. 6.22. se muestra escaneada la Plancha II del libro de Koechlin, y una reproducción del procedimiento grafostático para el cálculo de los esfuerzos en las barras debidos al viento, que detallamos más adelante.

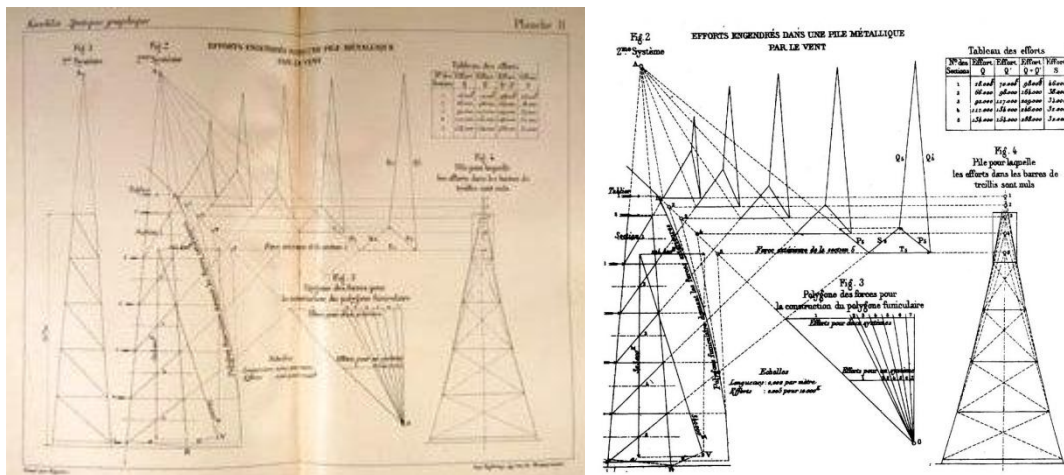


Fig. 6.22. Plancha II del Atlas del libro de Koechlin en la que se muestra el procedimiento grafostático para el cálculo de los esfuerzos en las barras del entramado sometido a la acción del viento estratificado en 5 niveles.

En la Fig. 6.23. se ha redibujado el cálculo grafostático de Koechlin, de los esfuerzos generados en las barras de la pilastra por la acción del viento sobre el puente y sobre la propia pilastra.

La evaluación de las superficies sobre las que actúa el viento se realiza teniendo en cuenta que el primer paño encontrado por el viento, recoge toda su intensidad y que los paños siguientes son sometidos a una acción de viento disminuida por un coeficiente que tiene en cuenta la relación de superficie del paño vacía y la ocupada por las barras. Mas, como las acciones se sitúan en los nudos, estas consideraciones de reducción de carga hay que efectuarlas en el paño inmediatamente anterior.

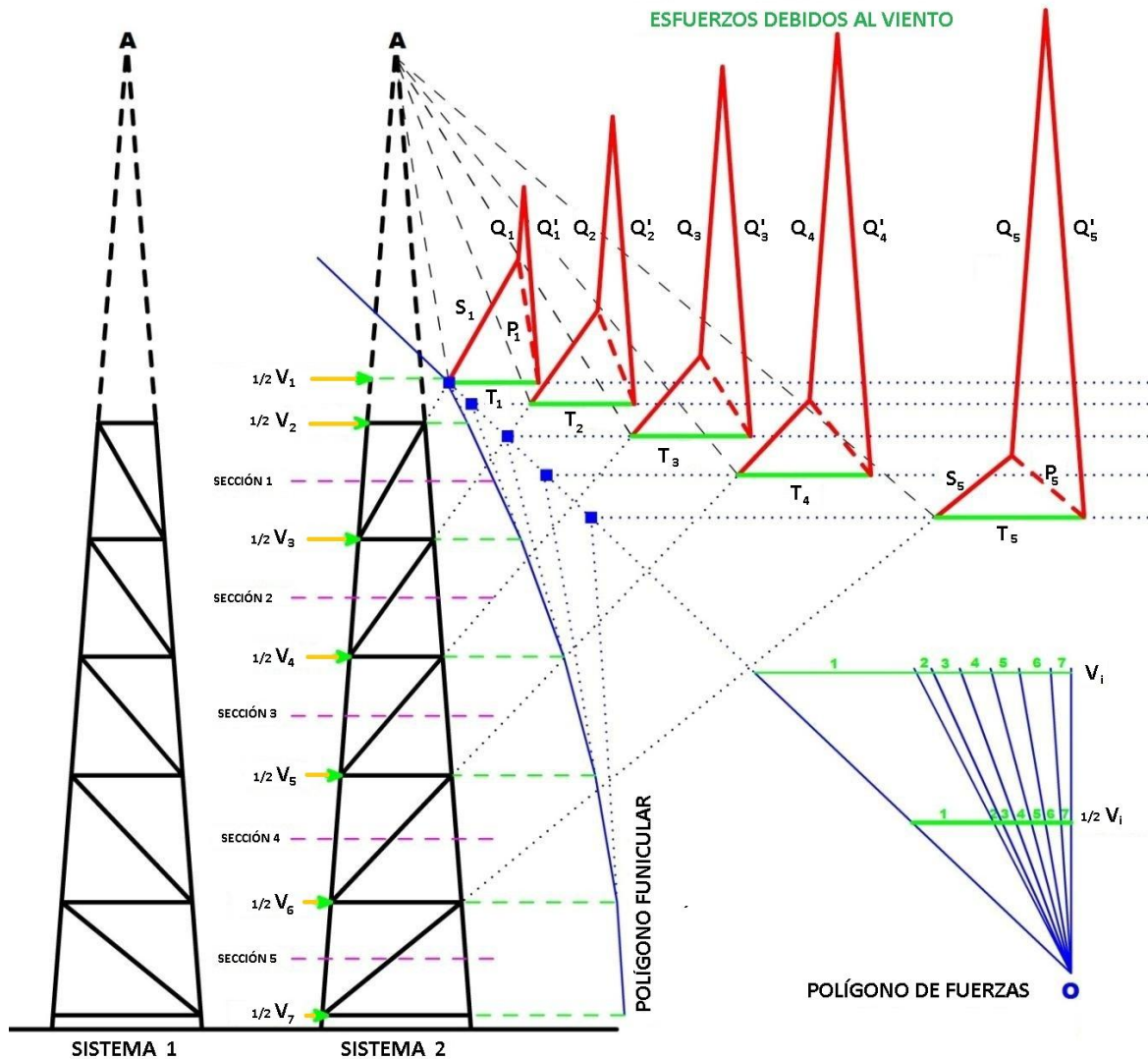


Fig. 6.23. Recreación del cálculo de los esfuerzos en las barras de una pilastra de 50m de altura realizado según el procedimiento explicado por Koerlich en la Planche II de su *Applications de la statique graphique*. Baudry et Cie. : Paris 1889. (Arrondeau, Pierre. *Análisis estructural de edificios del siglo XX: Torre Jaume I*. Master Thesis. Pons Poblet, Josep Maria. Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria)

Ponemos de manifiesto que los diagramas de las figuras recíprocas no se han encadenado según el procedimiento tradicional de Cremona, realizándose un diagrama recíproco para cada nudo. Somos, más partidarios de la composición de los

diagramas de Cremona, que realizaremos más adelante en nuestro cálculo a viento simplificado para la Torre Eiffel.

La Fig. 6.24. recrea parte de la misma Planche de Koechlin, en la que éste analiza la adaptación formal del perímetro de la pilastra a lo que pudiera asimilarse a la forma adaptada por el polígono funicular obtenido previamente. La consecuencia, como analizaremos en la Tour Eiffel es que prácticamente los esfuerzos en las diagonales de la estructura así diseñada, son nulos. De hecho si se realizan los diagramas correspondientes en cada nudo, vemos que desaparecen las rectas correspondientes a los esfuerzos en las diagonales  $S_i$  y  $P_i$ , porque la geometría de las barras de los montantes obliga a cerrar los diagramas con el esfuerzo horizontal  $T_i$  y los esfuerzos en dichos montantes  $Q_i$  y  $Q'_i$ .

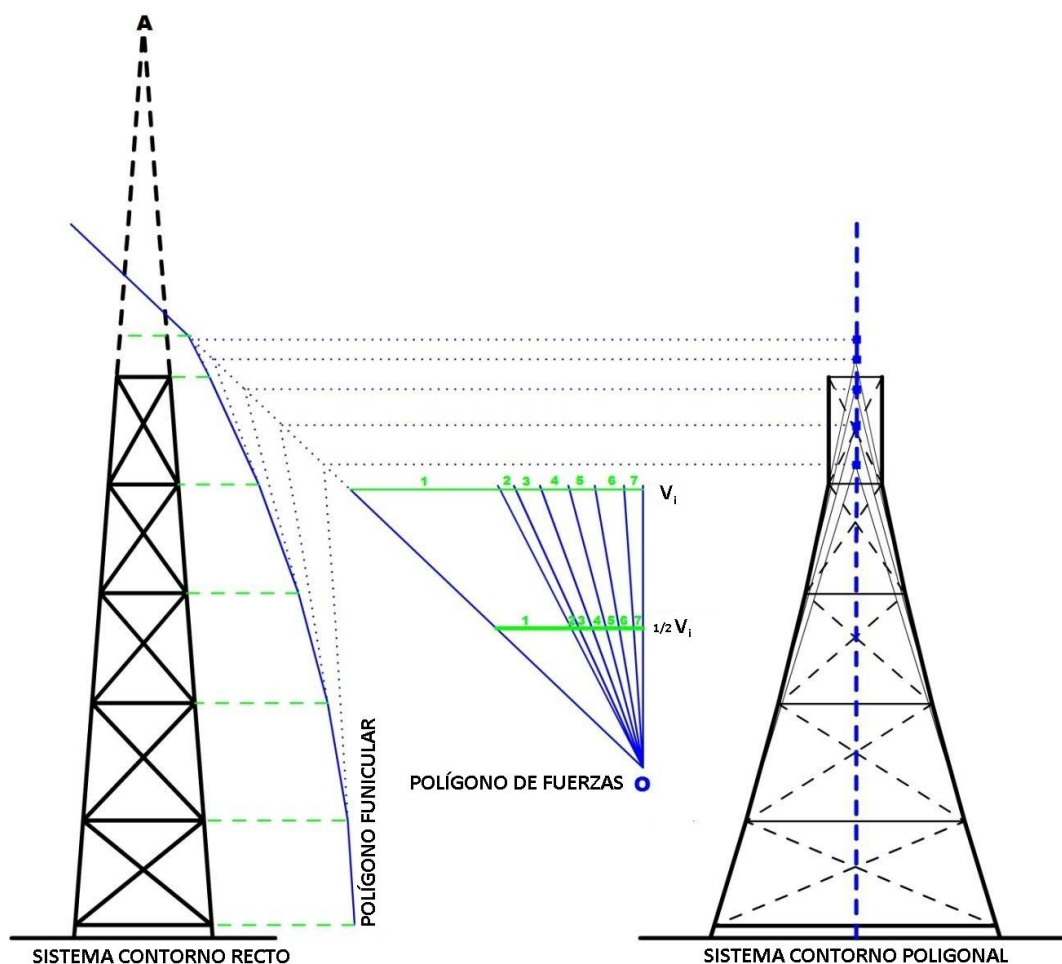


Fig. 6.24. Recreación de parte de la Planche II del libro de Koechlin *Applications de la statique graphique*. Baudry et Cie. : Paris 1889. (Arrondeau, Pierre, 2011 : 19) Se adapta la forma del perímetro de la pilastra, a la forma del polígono funicular, con la consecución de esfuerzos nulos en las diagonales de la estructura.

En la Fig. 6.25 analizamos la utilización de una sencilla composición grafostática de fuerzas, que permite calcular las reacciones en los cimientos de la pilastra.

Una evaluación previa realizada determina el peso total de la estructura  $P_{\text{tot.}} = 323\text{Tn}$  y una acción horizontal de viento de  $V_{\text{tot.}} = 104\text{ Tn}$ , suma de las  $V_1 = 54\text{ Tn}$ ,  $V_2 = 4.4\text{ Tn}$ ,  $V_3 = V_4 = V_5 = V_6 = 10\text{Tn}$  y  $V_7 = 6\text{ Tn}$ . La Resultante, composición de estas acciones es  $R = 340\text{ Tn}$  y como se aprecia en el diagrama provoca en el punto B, un momento  $M_B = R \cdot d = F_A \cdot d' = 340\text{ Tn} \cdot 6.5\text{ m}$   $M_B = 2.210\text{ m} \cdot \text{Tn}$ , que ha de ser equilibrado en el cimiento A con el anclaje correspondiente capaz de resistir una tracción  $F_A = M_B / d' = 2.210\text{ m} \cdot \text{Tn} / 13\text{ m} = F_A = 170\text{ Tn}$ . La Resultante, pasa por un punto, en la base de la pilastra, que se aparta bastante de la sección máxima de la misma. Cosa distinta sucede con la adaptación formal del perfil de la pilastra de la Fig. 6.24. anterior.

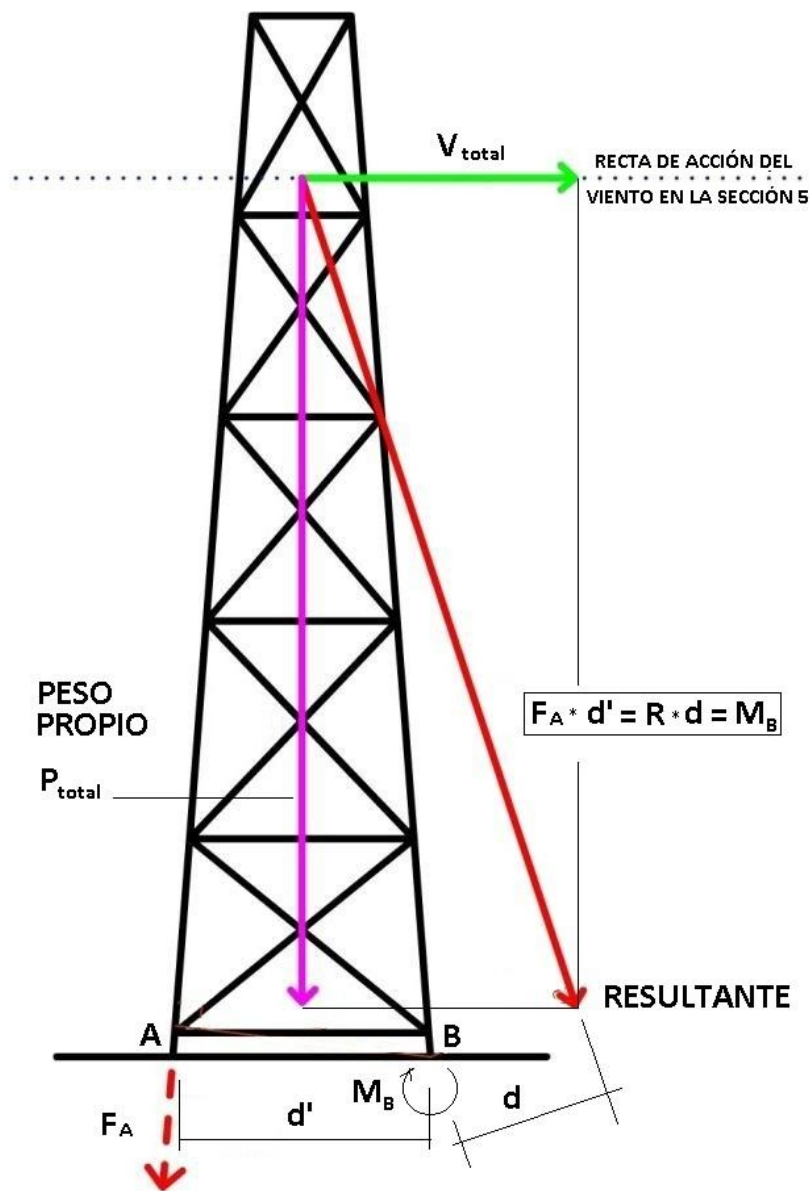


Fig. 6.25. Cálculo gráfico de la Resultante de Peso propio y Acción total del viento y comprobación del momento de vuelco  $M_B$  y sus consecuencias para el equilibrio de la pilastra, en cuanto al anclaje necesario en A.

Estos conocimientos sobre Estática Gráfica resultaron, pues, fundamentales para la concepción de la Tour Eiffel, al ser el efecto del viento a 300 m de altura, el condicionante mayor para la idea de Koechlin y Nougier.

Ya hemos visto como Gustave Eiffel, (Eiffel no era, por cierto, su verdadero apellido, sino el sobrenombre de su familia originarios de Eifel en Alemania, y de apellido real Bönickhausen) que no creía, en un principio en la idea de sus ingenieros, finalmente registra la patente de la torre, acordando con sus verdaderos creadores los términos de un contrato ya reseñado. Su entusiasmo hizo que la construcción se pudiera realizar en tiempo y forma, con gran empeño, incluso económico por su parte.<sup>20</sup>

En la Fig. 6.26. se muestra un croquis con los primeros bocetos de Koechlin, quien junto con Nougier reclaman a Eiffel la intervención de un arquitecto, para el desarrollo del proyecto.

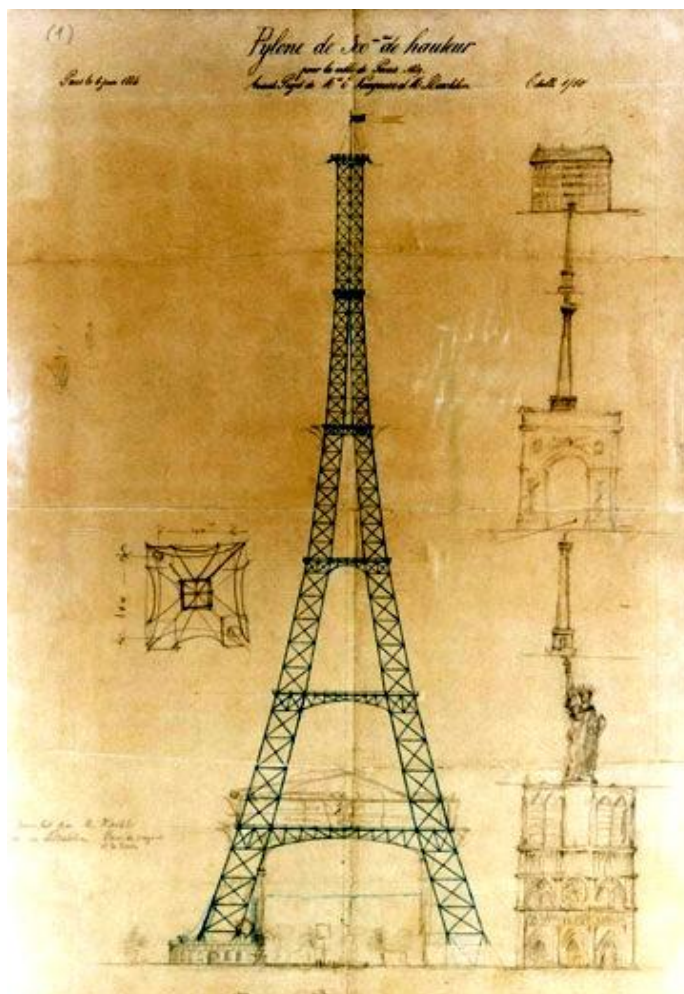


Fig. 6.26. Planos del diseño original de Maurice Koechlin ingeniero por el ETH de Zürich, Jefe del estudio de la empresa de Eiffel.

<sup>20</sup> Sobre la vida y obra de Eiffel, ver Mathieu, Caroline. *Gustave Eiffel. Le magicien du fer*. Skira, Flammarion: Paris 2009.

Fue Charles Leon Stephen Sauvastre (1847-1919), el arquitecto elegido, quien entre otras obras era, también para la Exposición Internacional de Paris de 1889, coautor de la Galerie des Machines junto al también arquitecto Ferdinand Dutert. La Fig. 6.27. muestra la envergadura de la construcción metálica de dicha Galería.

La construcción de la Torre fue un éxito y la obra que nació para ser desmontada en poco tiempo, lleva casi un siglo y cuarto siendo uno de las construcciones más visitadas del mundo.

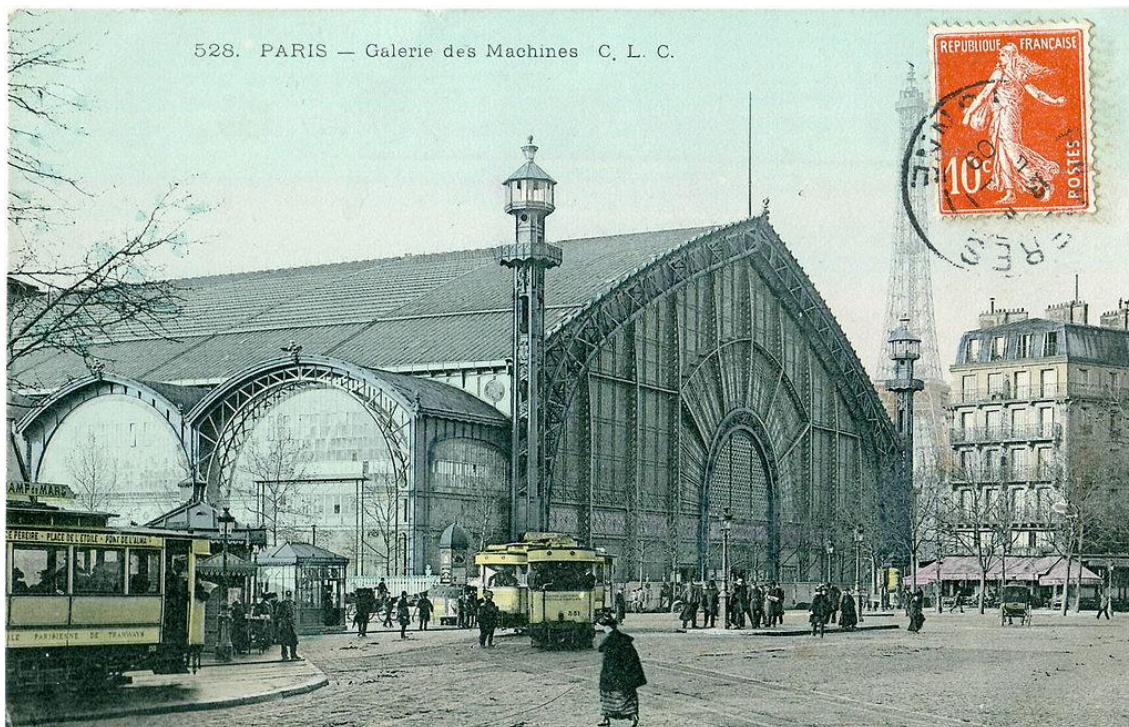
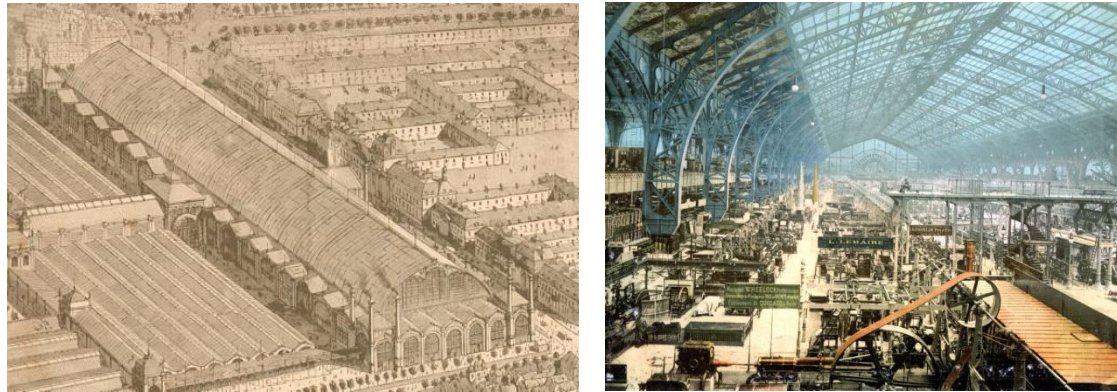


Fig. 6.27. Distintas imágenes de la Galería de máquinas, diseñada para la Exposición Universal de Paris de 1889, por los arquitectos Stephen Sauvastre y Ferdinand Dutert. (D.P. y Digital Collections of the Library of Congress, U.S.)



Analizamos a continuación algunos de los detalles relacionados con la Estática Gráfica y en particular con la forma de la Torre que ya hemos anunciado que responde al objetivo de resistir los esfuerzos que el viento genera en su estructura.

Algunos de esos detalles fueron expuestos por el propio Eiffel, quien a modo de resumen publicó en 1900 una obra con el título *La tour de trois cents metres*.<sup>21</sup>

Respecto a las consideraciones generales que se tuvieron en cuenta, cabe destacar los siguientes principios constructivos:

Se consideró la utilización casi exclusiva de acero de rigidez media y respecto a la forma de los principales elementos constructivos, se adoptó la que la empresa de Eiffel había preconizado como más eficaz para las pilastras de los puentes, de los que habían adquirido mucha experiencia por la gran cantidad de los ya construidos, es decir, secciones “en cajón”, que con la mínima sección otorgaba una máxima resistencia longitudinal y transversal, permitiendo a las piezas así constituidas trabajar con la misma eficacia, tanto a tracción como a compresión.

Se diseñaron, pues, elementos en cajón, con paredes llenas, para piezas de gran resistencia y con paredes con travesaños en celosía para todas las otras, mucho más numerosas, con la ventaja de que para una determinada resistencia requerida, ofrecía la mínima resistencia al viento, por ser mínima su superficie.

Respecto a las cargas gravitatorias de la estructura completa, se estimaron en unas 7.300 Tn sin contar el peso de los ascensores y sin el peso de los visitantes, aunque este último extremo fue obviado por constituir una mínima sobrecarga frente a los pesos estimados globales. Los elementos resistentes, fueron calculados según los conocimientos de la Resistencia de Materiales de la época, calculando los diagramas de momentos a los que se sometían las partes de la estructura, con la Estática Gráfica ya habitual en esa fecha. Es el caso del diagrama de la Fig. 6.28. en el que se calcula grafostáticamente, mediante el Polígono de fuerzas de la derecha, el Polígono funicular de la izquierda, que correspondería a una viga biapoyada en sus extremos, con cargas P1, P2, P3 y P4. La simplificación de considerar articuladas las barras, no es aquí tenida en cuenta, y si el Momento máximo correspondiente a aquel estado de barras biarticuladas, es M en el centro de la barra, se consideraron unos momentos en los empotramientos de  $\frac{2}{3} M$  y de  $\frac{1}{3} M$  en el centro de la barra  $\beta$ - $\gamma$ .

---

<sup>21</sup> Eiffel, Gustave / Lemoine, Bertrand. *La tour de trois cents metres*. Société des imprimeries Lemerrier : Paris 1900.

En la Fig. 6.29. mostramos las curvas de estimación de cargas, en función de la altura, en las que se aprecia, cómo se incrementa llegando a la zona de las pilastras del nivel primero.

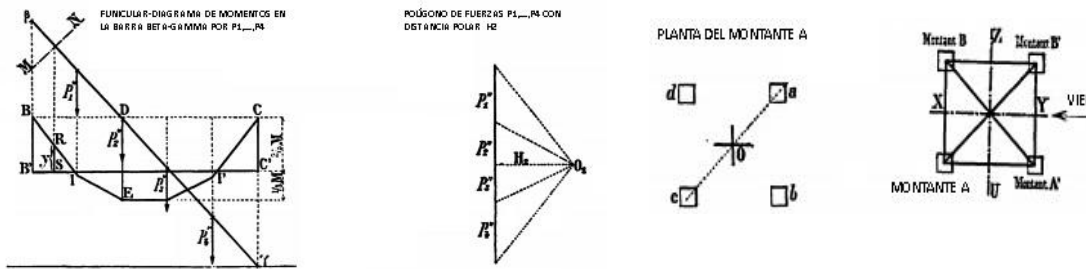


Fig. 6.28. Cálculo grafostático de los momentos inducidos en la barra  $\beta$ - $\gamma$  por la acción del sistema de fuerzas exteriores debidas al peso del compuesto en  $P_1, \dots, P_4$ . Los momentos extremos se han tomado  $M_B = 2/3 \cdot DE \cdot H_2$  y el momento en el centro de la barra  $M_D = 1/3 \cdot DE \cdot H_2$ . Situación de los cuatro perfiles constituyentes de un montante y posición de los cuatro montantes en la base de la torre. (Eiffel, 1900: 25, 37)

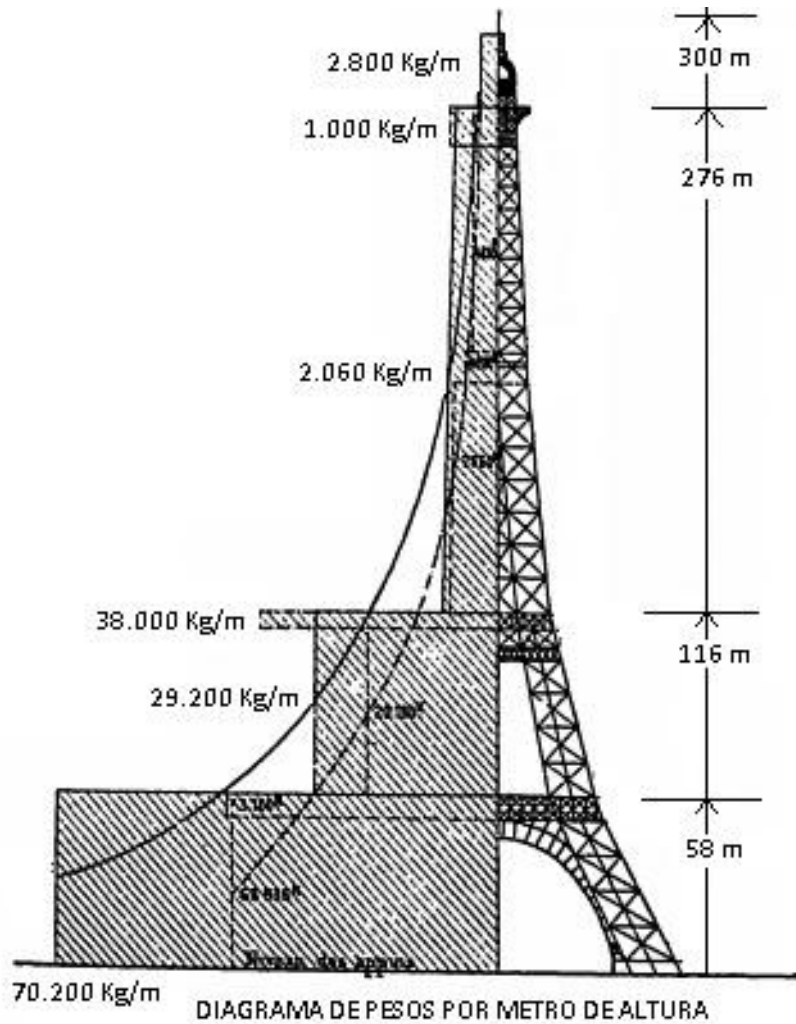


Fig. 6.29. Diagrama de la estimación de pesos por metro de altura de la torre, con las alturas de las tres plataformas básicas medidas desde la base de la torre. (Redibujado sobre el diagrama original de *La tour de trois cents mètres*. (Eiffel, 1900: 20).

Lo visto hasta ahora sobre los cálculos relativos al peso propio y esfuerzos en las barras, no hubiera pasado de un mero cálculo grafostático, como los efectuados en ese último cuarto del S. XIX, por el despacho de Eiffel y otros muchos arquitectos e ingenieros.

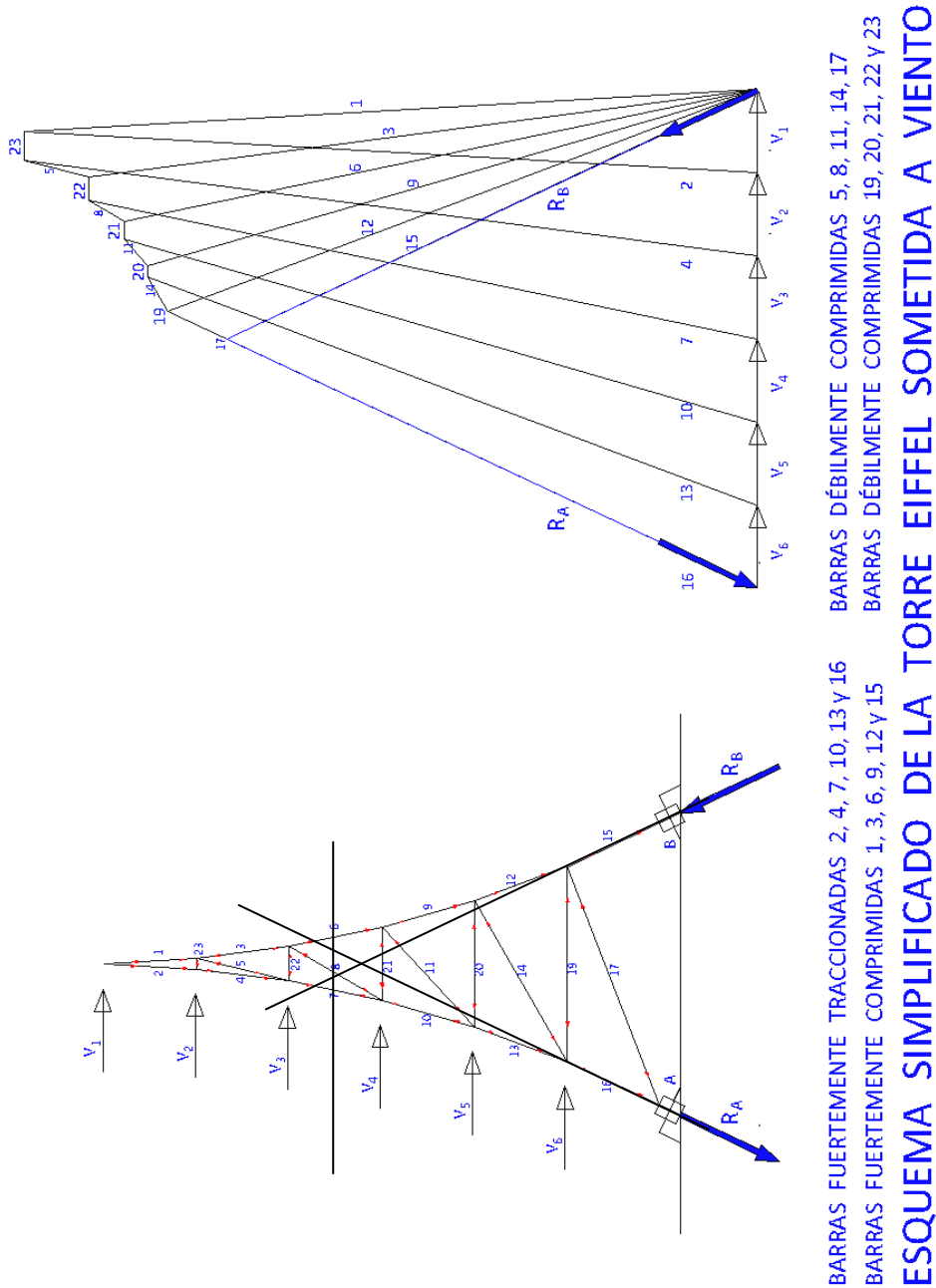


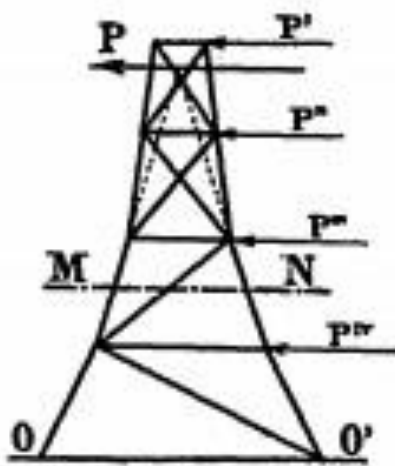
Fig. 6.30. Esquema simplificado del cálculo de una estructura triangulada de forma global similar a la de la Torre Eiffel, mediante un diagrama de Cremona. La Resultante del sistema de vectores fuerza aplicado, no coincide con la intersección de las direcciones 15-16, por lo que los esfuerzos generados en las diagonales no son nulos, aunque sí muy pequeños en comparación con los montantes.

Este tanteo previo es, como se ve, una sencilla aplicación que la Estática Grafica pone en manos de quien diseña, para una primera evaluación, que nos lleve a tomar decisiones, en cuanto a forma, acciones exteriores y reacciones. En definitiva uno de los usos que avalan la vigencia de la Grafostática. (Cálculos y dibujos propios)

Donde verdaderamente se encuentra una nueva y gran idea, es en el cálculo de la estructura para que resista el viento, sin barras en las diagonales, que fue el hándicap que se les planteó a Koechlin y Nougquier, reto que probablemente indujo finalmente a Eiffel, amigo de riesgos y empresas difíciles de afrontar, a apostar decididamente por el proyecto.<sup>22</sup>

El esquema básico es el ya analizado y ensayado por el gabinete de Eiffel en las pilas de los puentes, como el de Garabit. La cuestión era ahora comprobar qué podía pasarle a una estructura de 300 m de altura con los esfuerzos inducidos por el viento.

Analicemos la pilastra de la Fig. 6.31. compuesta por un entramado de barras, dispuesta para resistir los esfuerzos del viento  $P^I$ ,  $P^{II}$ ,  $P^{III}$  y  $P^{IV}$ , situados, como se aprecia, en los cuatro nudos de la derecha.



Se sabía por la Mecánica estudiada ya en la época, que para calcular los esfuerzos provocados en tres barras cortadas por el plano MN, es suficiente determinar la Resultante  $P$  de todas las fuerzas exteriores actuantes por encima de la sección y descomponerla según la dirección de las tres barras cortadas.

Si la forma del sistema es tal, que para cada corte MN, la intersección de las prolongaciones de las líneas de los montantes exteriores está sobre la recta de acción de la resultante  $P$ , el esfuerzo en la barra diagonal es nulo y por tanto se podría suprimir esa barra.

Fig. 6.31. Diagrama de un entramado reticular, elemental, a modo de pilastra, diseñado para resistir los esfuerzos del viento  $P^I$ ,  $P^{II}$ ,  $P^{III}$  y  $P^{IV}$ , aplicados en los nudos, de resultante  $P$ . (Eiffel, 1900: 29)

La aplicación de este principio mecánico, con la ayuda de la Estática Gráfica, constituye la gran aportación de Koechlin-Nougquier-Eiffel que concluyó con la exitosa determinación de la Forma inducida por las Fuerzas del viento actuante en la Torre. Esta idea permite, al suprimir las diagonales, en la mayor parte de la altura inferior de la torre, conseguir su estabilidad con la sola presencia de los cuatro montantes inferiores aislados y simplemente atados con los cinturones horizontales de los pisos primero y segundo, con la atractiva forma mundialmente conocida.

<sup>22</sup> Sobre la vida de Gustave Eiffel y en particular sus aventuras empresariales, algunas con graves consecuencias civiles y penales, como la del Canal de Panamá, ver: Loyrette, Henri. *Gustave Eiffel*. Rizzoli International : New York, 1985.



Fig. 6.32. La atractiva Forma de la Tour Eiffel, tomada desde el Campo de Marte. Abajo como fondo, la plaza del Trocadero, que recuerda la toma de Cádiz, desde la Isla gaditana del mismo nombre, por los Cien mil hijos de San Luis. La nefasta restauración del absolutista Fernando VII, fin del *Trienio liberal* (1820-1823) dio paso a la *Década ominosa* (1823-1833). (Fot. Benh Lieu Song. D.P.)

*“La forma sigue a las fuerzas”* (En la Tour Eiffel las del viento), como enunciábamos en la Introducción de esta Tesis.

Se muestra en la Fig. 6.34. el estudio realizado por el Bureau d'Études de Gustave Eiffel para el análisis de la estabilidad de las pilastras de su famosa Torre.

El análisis fue realizado utilizando dos hipótesis de carga horizontal del viento. Una considerando  $300 \text{ Kg/m}^2$  uniforme a lo largo de distintos tramos, que suman en total  $300 \text{ m}$  de altura de torre, evaluando esfuerzos parciales y sumando el total ( $3.284.400 \text{ Kg}$ ). En la segunda hipótesis de cálculo se comienza en las superficies más altas (las más expuestas) con una evaluación de  $400 \text{ Kg/m}^2$  y se va disminuyendo hasta  $215 \text{ Kg/m}^2$  en las superficies de los tramos más bajos, con una suma de ( $2.874.417 \text{ Kg}$ ) El peso propio total de la construcción para cada montante se evaluó en  $1.620.000 \text{ Kg}$  y el esfuerzo en la base debido a la acción del viento, en  $1.515.750 \text{ Kg}$ .<sup>23</sup>

En el dibujo se aprecian, en la parte inferior izquierda los polígonos de fuerzas para una y otra hipótesis y a lo largo del esquema de la derecha los diagramas de Momentos, marcando en las distintas secciones el momento correspondiente.

Se determina en total una sección de acero para una de las cuatro armaduras de la base de  $80.148 \text{ mm}^2$ , con una sección total de montante de  $4 \times 80.148 \text{ mm}^2$  o sea  $320.592 \text{ mm}^2$ . También se especifica en el plano que el coeficiente de trabajo resultante con estos datos es de  $3.140.750 \text{ Kg} / 320.592 \text{ mm}^2$   $\sigma = 9,8 \text{ Kg} / \text{mm}^2 = 980 \text{ Kg} / \text{cm}^2$ . Para entramados metálicos, se admitía en la época una  $\sigma = 1.000 \text{ Kg} / \text{cm}^2$  e incluso mayor. La evaluación del peso total de la estructura metálica se fijó en  $7.300 \text{ Tn}$  y el peso total de la Torre en cerca de  $10.000 \text{ Tn}$ .

En la Fig. 6.33. se muestra, previamente al trazado global, la construcción grafostática utilizada.

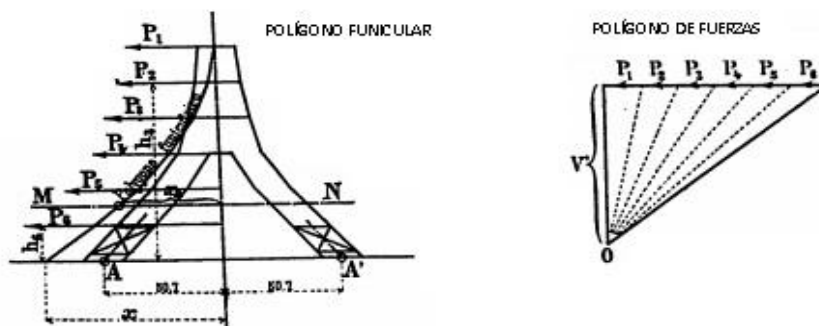


Fig. 6.33. Esquema de la utilización de los procedimientos de la Grafostática para el cálculo de los momentos inducidos por la acción del viento en el plano de la base de las pilastras. (Eiffel, 1900: 35).

<sup>23</sup> Eiffel, Gustave. *Tour en Fer de 300 mètres de hauteur destinée à l'Exposition de 1889*. Mémoire lu à la Société des Ingénieurs, Civils de France. Projet présenté par M.G. Eiffel, dressé par MM. E. Nougier et M. Koechlin, Ingénieurs et M. Sauvestre Architecte. Capiomont et Renault pour la Société des Ingénieurs Civils: Paris 1885.

4<sup>ème</sup> Série, 10<sup>ème</sup> Volume.

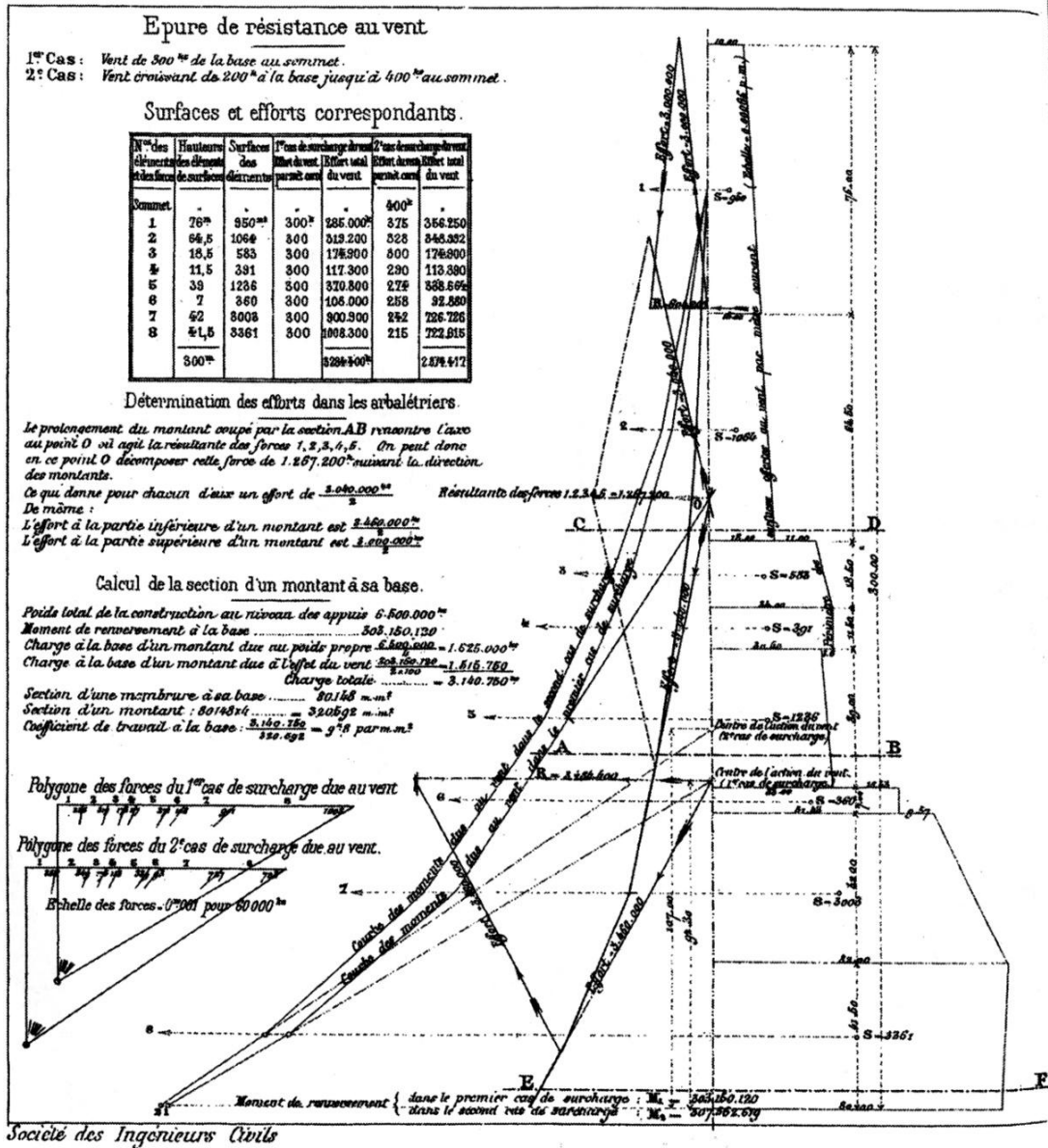


Fig. 6.34. Dibujo, utilizado para el resumen del cálculo grafostático original de los esfuerzos en las pilastras de la base de la Torre Eiffel. Memorias de la Société des Ingénieurs Civils, Serie 4<sup>a</sup> Volumen 10<sup>o</sup>.

Sin entrar en los minuciosos cálculos que el Estudio de Eiffel realizó para la presentación al Concurso convocado para la Exposición Universal de 1898 en París, nos ha parecido interesante en cumplimiento nuestro objetivo de visualizar intuitivamente los aspectos esenciales que la Grafostática puede mostrar de una estructura, analizar un esquema simplificado de su comportamiento ante determinadas condiciones de sollicitación.<sup>24</sup>

<sup>24</sup> Sobre los cálculos relativos a la determinación de los parámetros mecánicos de estructuras verticales, ver: Díaz, Jesús Ildelfonso. *Matemáticas que sustentan columnas torres y rascacielos*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. 103, Nº. 2, pp 247-267: Madrid 2009.

En la Fig. 6.35. mostramos nuestros propios cálculos, realizados para determinar, a partir de los diagramas de esfuerzos de viento que actúan por encima de una determinada sección, la forma óptima que los elementos estructurales de nuestro objeto arquitectónico deben adoptar para el fin que nos proponemos. En el caso de la Tour Eiffel, el objetivo para la parte inferior era la liberación máxima del espacio, suprimiendo todas las barras diagonales en los dos primeros tramos (Téngase en cuenta que se diseñaba un primer tramo de casi 60 m de altura y de otro tanto para el segundo).

Se trata, en primer lugar de determinar dónde se encuentra la Resultante de esos esfuerzos debidos al viento que actúan sobre toda la superficie de la Torre, cuyo diagrama hemos conocido asignando valores de velocidad del viento (por ejemplo  $V = 180\text{Km/h} = 50\text{ m/s}$ , y su conversión a fuerza superficial  $P = 300\text{ Kg/ m}^2$ ) con las variaciones que ya se han expresado anteriormente.

A continuación, se determina el Eje Central del sistema de vectores,  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_9$ , para lo que hemos dividido el diagrama en franjas horizontales, cuya superficie será representada por un vector  $\mathbf{F}_i$ , siendo  $\sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$  (área total del diagrama). Naturalmente la dirección del Eje Central obtenida por intersección del primer y último lado del polígono funicular es la dirección de la Resultante buscada.

En el diseño previo de nuestro objeto, hemos prefijado unas dimensiones del cuadrado de la base de la torre, que queremos tantear, así como la inclinación de los cuatro montantes o pies de la misma.

La Estática Gráfica nos orienta en estos predimensionados, porque ha quedado fijado el punto C, de paso de la Resultante de las fuerzas del viento y mediante un sencillo Diagrama de Cremona o de las figuras recíprocas, podemos comprobar, que si la distancia entre los Centros de Gravedad de la base de las pilastras A y B es aproximadamente 100 m (como es el caso del diseño original de Koechlin) las direcciones de las pilastras AC y BC están determinadas y por tanto su inclinación.

En definitiva: Conocemos para la distancia AC, la dirección de las Pilastras, el Esfuerzo total que la acción del viento genera en ellas (existe gracias a las Figuras Recíprocas de Cremona-Culmann, reciprocidad entre la dimensión AC y el esfuerzo inducido en esta teórica barra) y el esfuerzo a que estaría sometido el cinturón horizontal DE, con la posibilidad de variar la posición de esta hipotética barra horizontal, subiéndola o bajándola en función de las características de la geometría y la capacidad resistente de este cinturón.



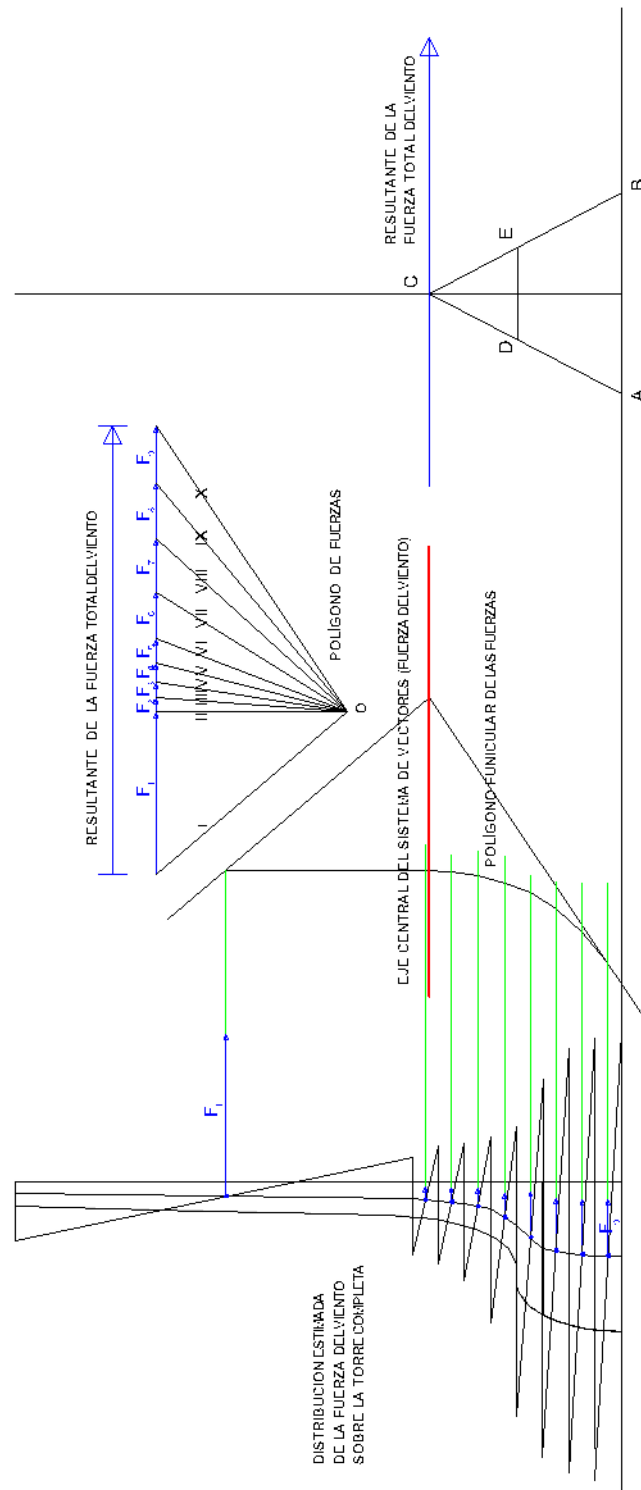


Fig. 6.35. Determinación, a partir de los diagramas de esfuerzos de viento que actúan sobre la torre, de la resultante de dichos esfuerzos como Eje Central del Sistema de vectores  $F_1, F_2, \dots, F_9$  en que hemos descompuesto la acción del viento. Y diagrama de Cremona determinante de la dirección de los montantes AC y BC. (Cálculos y dibujos propios).

La Fig. 6.36. izda., muestra una imagen de la plataforma del segundo nivel de la torre (cinturón GH) visto cenitalmente desde la plataforma del primer piso (cinturón DE) y un detalle dcha., de perfiles compuestos (platabandas roblonadas) de las aristas.

En la Fig. 6.37. hemos reiterado el proceso anteriormente descrito, para las distintas secciones correspondientes a los niveles prediseñados de la Torre.

La obtención de las distintas líneas de acción de las resultantes de las fuerzas de viento situadas por encima, da lugar a la construcción de los diagramas DFE, que determina la inclinación de los montantes del segundo nivel de la Torre e igual que en el anterior cálculo, con DE, es posible ahora determinar el esfuerzo inducido en el cinturón horizontal GH, además de los esfuerzos en los propios montantes DG y EH.

De la misma manera obtenemos el polígono GIH con las inclinaciones de GI y de HI y los esfuerzos inducidos en ellas y en el cinturón horizontal JK.

A partir de esta horizontal, la barras ya no están separadas y los brazos se adjuntan constituyendo un solo cuerpo, siguiendo la forma del polígono funicular (diagrama de momentos) hasta el faro que jalona el extremo de la torre.

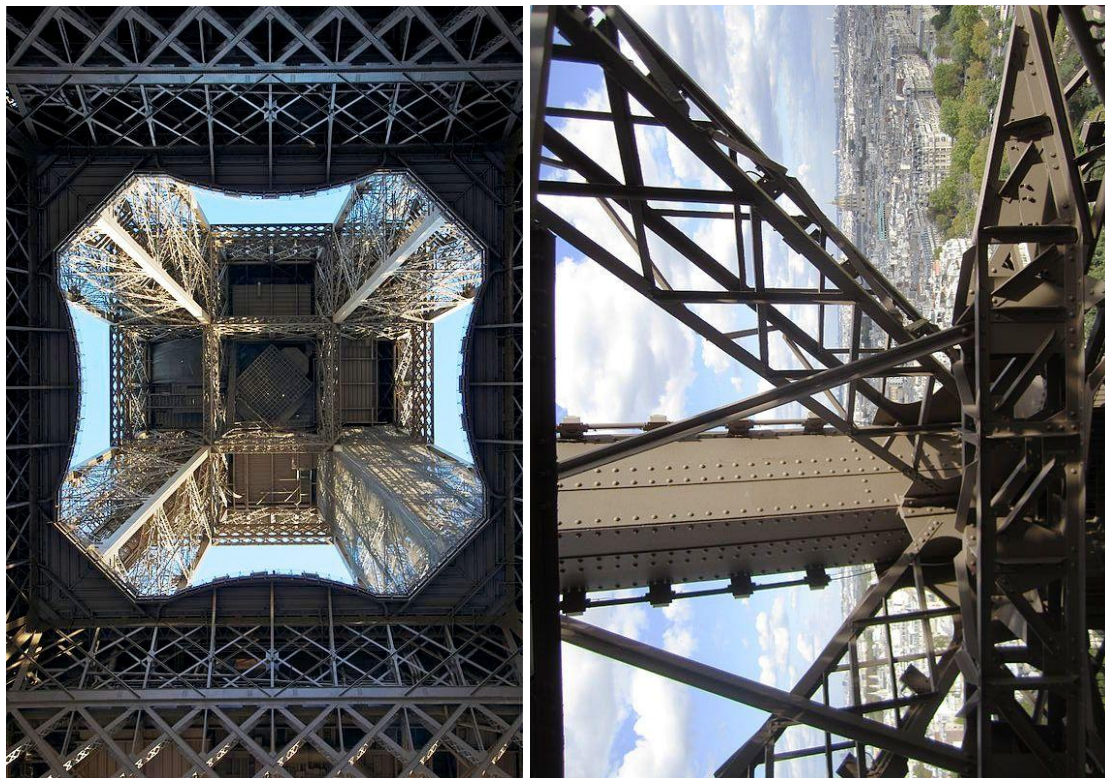


Fig. 6.36. Imagen de la plataforma del segundo nivel, vista cenitalmente desde la plataforma del primer nivel. (Fot. Jebulon, D.P.) Y detalle del perfil de platabandas roblonadas de una de las aristas de los montantes y las vigas trianguladas de arriostamiento. (Fot. Davepark, D.P.).

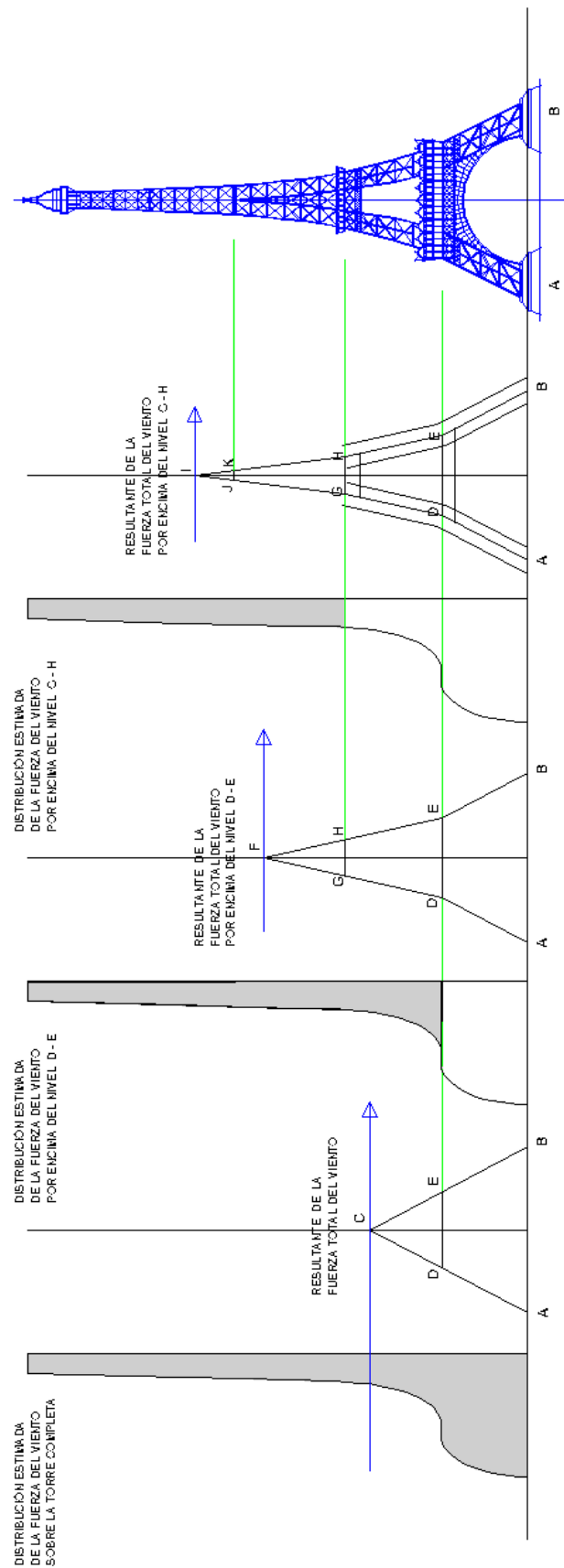
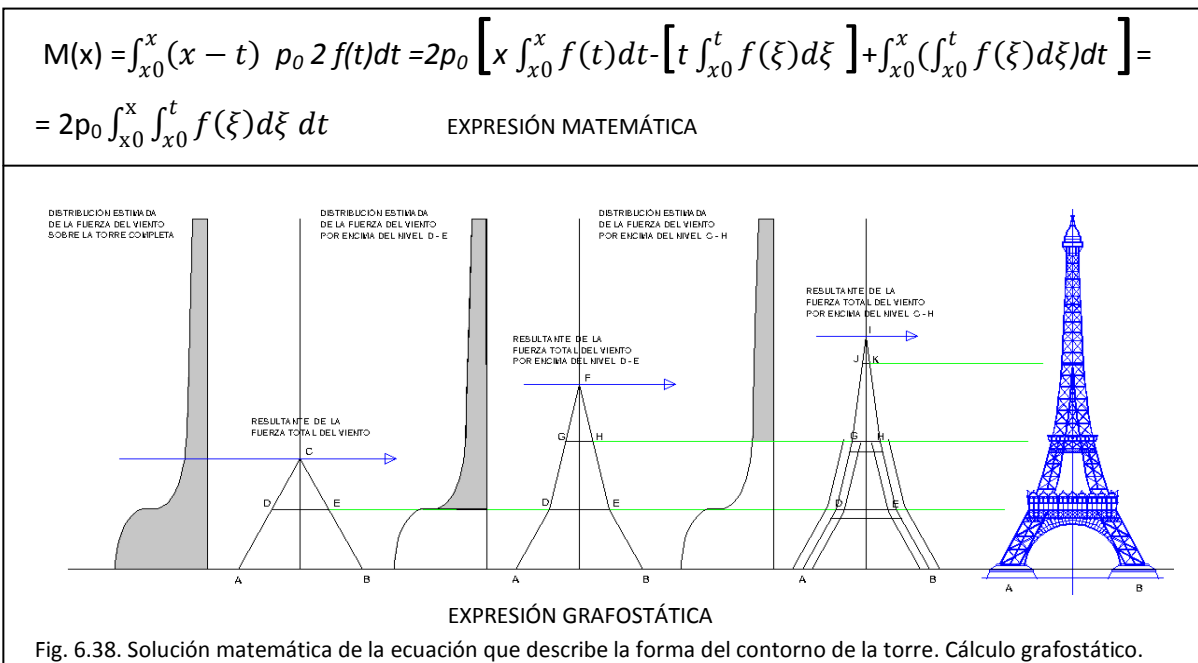


Fig. 6.37. Proceso grafostático de cálculo de la forma adquirida por el contorno de la Tour Eiffel, adaptado a las premisas adoptadas, de resistencia al viento dado por los diagramas. Los ejes de los montantes AC, BC, DG, EH, GJ, HK, van teniendo su intersección en los puntos C,F,I, marcados por la resultante de las fuerzas del viento.

Finalmente queremos hacer mención a que son muchos los estudios realizados acerca de la geometría de la Tour Eiffel. Valoramos, como arquitectos, la ciencia que sin duda hay en ellos, pero a modo de comparación, reproducimos parte de unos cálculos realizados por Patrick Weidman & Iosif Pinelis <sup>25</sup> (Fig. 6.38):

*“La mise en équation de la forme de la Tour Eiffel est ici étudiée. ... produisant une bonne approximation du profile de la tour... dérivé des préoccupations d’Eiffel concernant les effets du vent décrits dans sa communication a la Société Française des Ingénieurs Civils datée du 30 mars 1885. Il en résulte une équation non-linéaire intégro-différentielle dont la solution produit un profil de tour de type exponentiel. Il a été par ailleurs vérifié, comme Eiffel l’a noté, « en réalité la courbe extérieure de la tour reproduit, à une échelle déterminée, la courbe même des moments fléchissant dus au vent ». Une analyse du profil actuel de la tour montre qu’il est composé de deux parties continues exponentielles à taux d’accroissement différents.”*

En relación con la ecuación que mejor describe la forma de la torre siguiendo las indicaciones del mismo Eiffel con respecto a la resistencia menor al efecto del viento, así como lo observado por él de que a determinada escala de longitudes y de fuerzas, la curva de la torre se ajusta al diagrama de momentos (polígono funicular). La ecuación que expresa el Momento es, finalmente, la que escribimos a continuación y que comparamos con nuestro esquema reducido , bajo ella:



<sup>25</sup> Weidman, Patrick & Pinelis, Iosif. *Model equations for the Eiffel Tower profile: historical perspective and new results*. Comptes Rendus. Mecanique. Academie des Sciences de l’Institut de France: Paris 2004. (Dibujos propios)

Por último, queremos rendir un pequeño homenaje a la figura del arquitecto Charles Leon Stephen Sauvastre (1847-1919), cuya intervención en el proceso del diseño final de la Tour Eiffel es de las menos comentadas.

Simplemente mostramos en la Fig. 6.39. los dibujos correspondientes a los primeros esquemas de Koechlin y al plano final presentado al concurso, tras la intervención de Sauvastre.

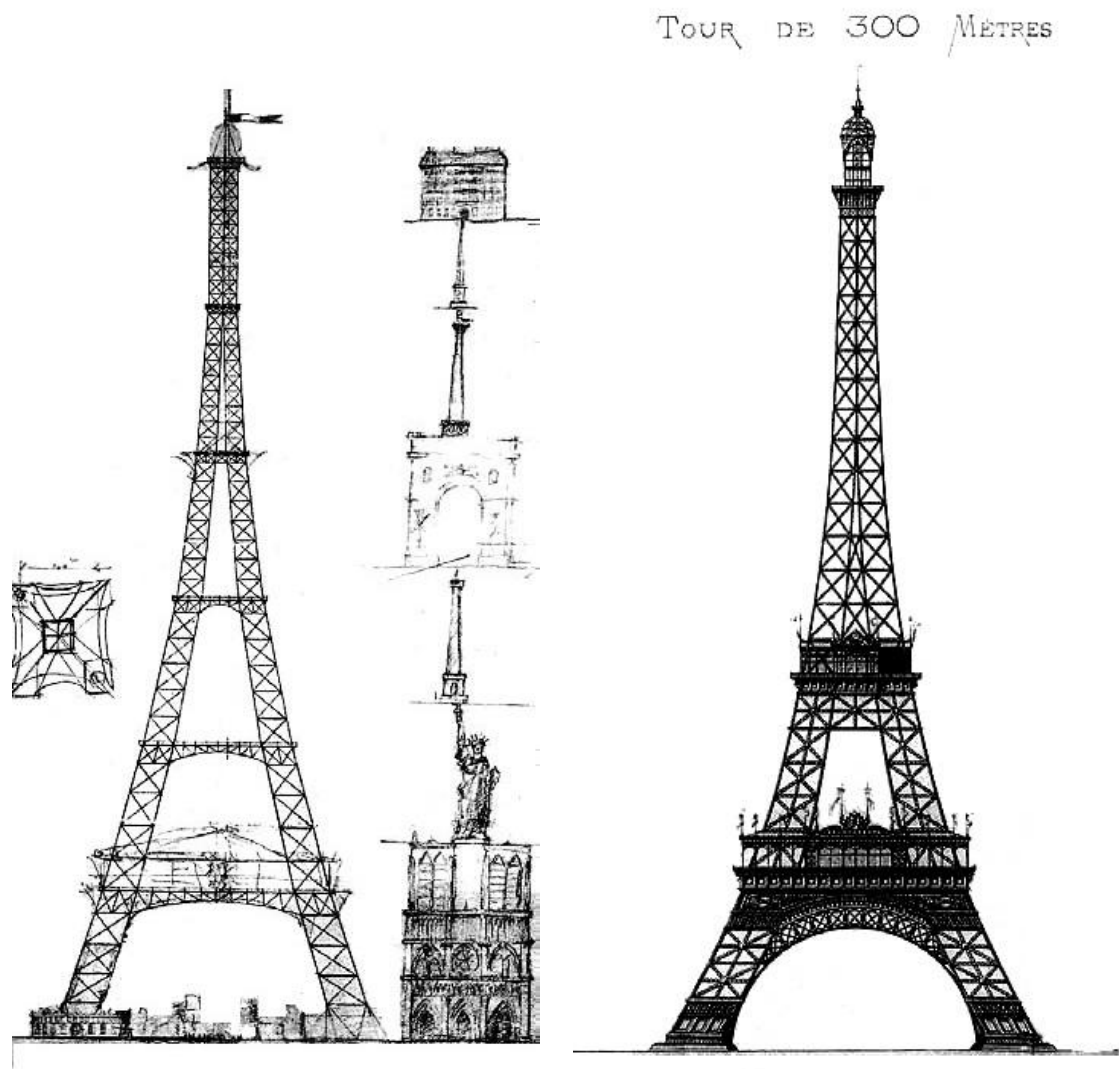


Fig. 6.39. Esquema original de Koechlin y dibujo final de Sauvastre presentado por Eiffel al concurso. (Los dibujos han sido "limpiados" informáticamente de los escaneados difundidos en libros y páginas informáticas por el autor)

Gustave Eiffel terminó su exposición sobre La Tour de trois cents mètres, ante la Société des Ingénieurs Civils de France, con una frase que aunaba entusiasmo y esperanza con una acertada predicción para cientos de años:

*“ Non seulement elle serait une des grandes attractions de l’Exposition Universelle, mais après celle-ci, elle resterait comme un des monuments les plus intéressants de Paris, et certainement l’un des plus visités “*

### 6.3. GUASTAVINO COMPANYY. COMPROBACIONES GRAFOSTÁTICAS

Rafael Guastavino Moreno está considerado uno de los arquitectos españoles de mayor proyección internacional, sobre todo en EEUU, gracias a sus innovaciones técnicas. Es autor de más de 1.000 edificios y en su conjunto más de 3.000 intervenciones en Estados Unidos, en su mayor parte en Nueva York.

Metropolitan Museum, Columbia University, Grand Central Terminal, Federal Reserve Bank, en Nueva York, Harvard University y Boston Public Library en Boston, National Museum, the National Academy of Science, the National Archives, en Washington, iglesias en toda la geografía estadounidense, se cuentan entre los edificios y conjuntos en los que participó junto con los arquitectos de más prestigio profesional del momento y que ahora son parte inseparable de su patrimonio arquitectónico. Cuando en febrero de 1908 fallece Rafael Guastavino Moreno, The New York Times publicó una necrológica en la que lo describe como “el arquitecto de Nueva York”.

Nacido en Valencia en 1842, Rafael Guastavino Moreno se trasladó a Barcelona en 1861 para estudiar en la Escuela de Maestros de Obras y comenzó su trayectoria profesional como constructor y arquitecto en 1866, antes de haber terminado sus estudios.<sup>26</sup> Sus primeras obras responden al acelerado crecimiento de la ciudad y su evolución industrial, concentrándose en el mercado de la arquitectura residencial burguesa del ensanche y en la construcción de contenedores para las nuevas actividades industriales, como la Fábrica Batlló de Barcelona (1871), Fig. 6.40-41.)



Fig. 6.40. Interiores de la Fábrica de hilados y tejidos de algodón, Batlló Hermanos. Barcelona. Bóvedas tabicadas sobre pilares de fundición. Apoyo mediante vigas de madera intermedias y tirantes metálicos. (Fot. M. Freeman)

<sup>26</sup> Prólogo de Santiago Huerta a Guastavino Moreno, Rafael. *Escritos sobre construcción cohesiva y su función en la arquitectura*. Instituto Juan de Herrera. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo CEHOPU. Madrid 2006.

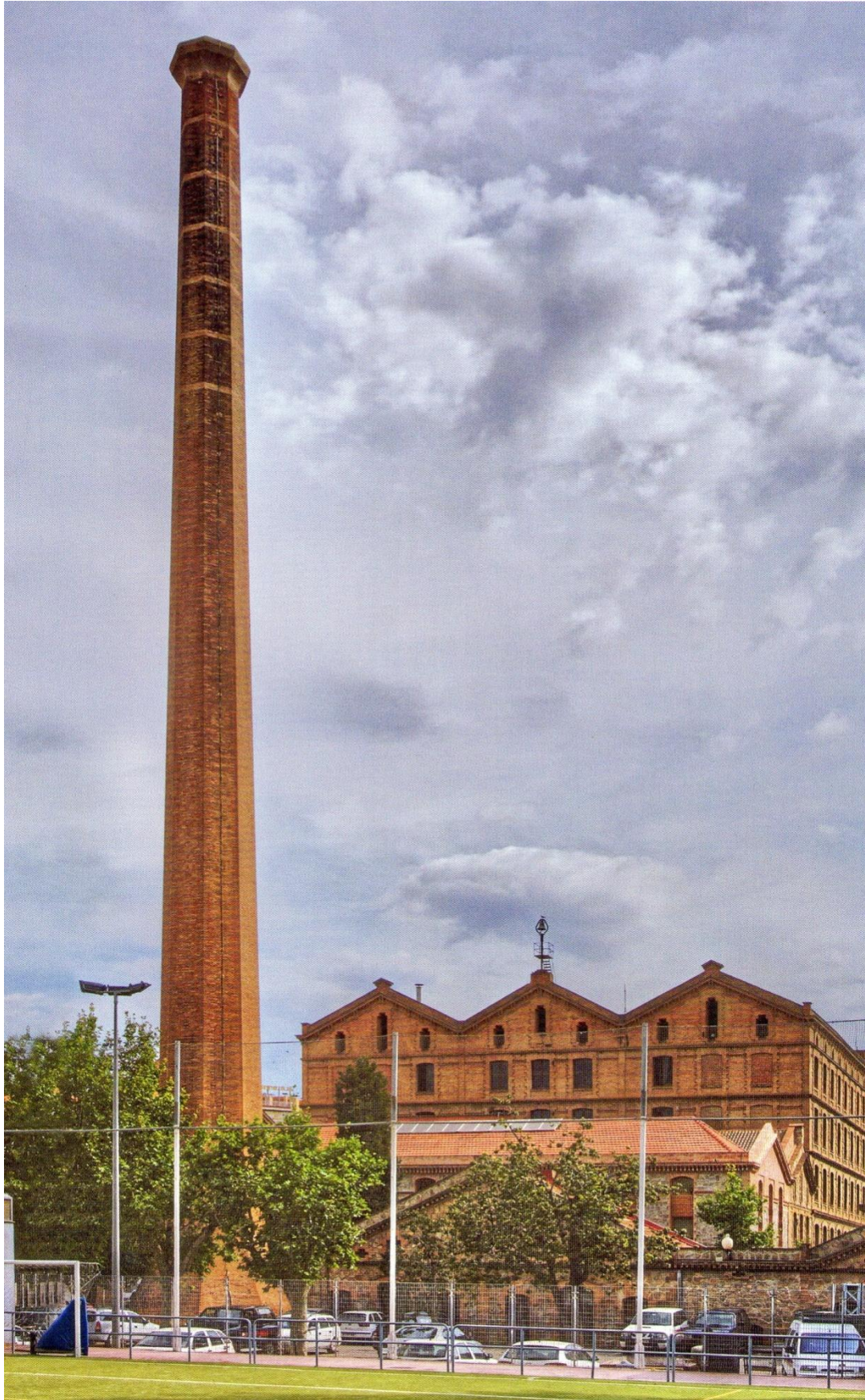


Fig. 6.41. Exterior de la Fábrica Batlló. En primer plano la esbeltísima chimenea de sección octogonal de ladrillo y 60 m de altura. (Fot. Michael Freeman)

Otra de las interesantes obras de Guastavino en España, es el Teatro de La Massa en Vilassar de Dalt, Fig. 6.42. y 43. que tiene una cúpula rebajada de 20m de diámetro y con una sola hoja de rasilla reforzada con nervios en el trasdós y que como señala Huerta, 27 se trata de una bóveda en la que la relación entre espesor y radio de curvatura (  $e/R$  ) era la más pequeña construida hasta entonces, (1881) concluido cuando Guastavino ya se había trasladado a Norteamérica.



Fig. 6.42. Exterior del remodelado Teatro de La Massa en Vilassar de Dalt. (Barcelona) (Pag. Oficial del Teatro)

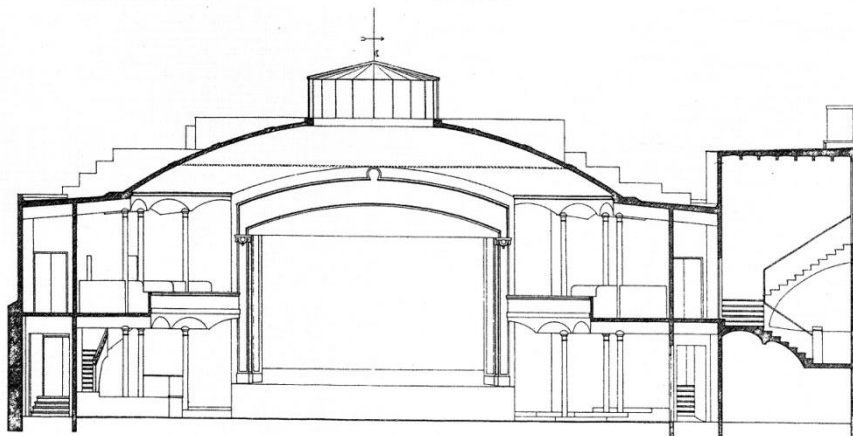


Fig. 6.43. Exterior de la cúpula del Teatro durante la rehabilitación, en la que se aprecian las nervaduras, de refuerzo de la hoja de rasilla. Interior de la sala (Pag. Oficial del Teatro). Sección transversal por la linterna. (Guastavino. Collins Collection, Avery Library)



Rafael Guastavino presentó en los inicios de su carrera sus ideas en exposiciones nacionales e internacionales, buscando conscientemente una proyección de sus primeros trabajos en España. Su llegada a Estados Unidos con su hijo, Rafael Guastavino Expósito, en 1881, la fundación de su propia Compañía Constructora en 1888, la modernización del sistema tabicado cerámico <sup>27</sup> y su proyecto empresarial, desembocan en la reinención de un nuevo tipo de espacios públicos para la metrópolis americana moderna. Sus formas cerámicas abovedadas cualifican el espacio colectivo y se introducen en la nueva realidad estadounidense.

En 1883 comenzó su carrera profesional en Estados Unidos, cinco años después fundó su Compañía constructora y dos años más tarde abrió su propia fábrica de productos cerámicos, manteniendo durante los primeros años la doble actividad profesional de arquitecto y constructor como desarrollo de su concepción integradora de diseño arquitectónico y construcción de lo diseñado.

A partir de 1886 abandonó el ejercicio de la arquitectura y su trabajo como constructor se convierte en el vehículo definitivo para integrarse en el mercado de edificación americana. Para Mar Loren, <sup>27</sup> los Guastavino son testigo de la redefinición de la identidad nacional que tiene lugar en el cambio de siglo XIX al XX, con un cambio profundo de su población que desde este momento se caracterizará por una nueva diversidad étnica y religiosa llegada de todos los rincones del mundo en busca del sueño americano.

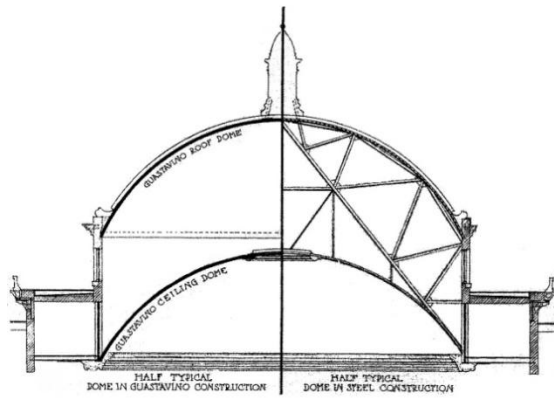
Curiosamente, un procedimiento constructivo artesanal español, como la bóveda tabicada de ladrillo o bóveda catalana, (en realidad debiera llamarse mediterránea) es patentado por Guastavino, convirtiéndose con su ejecución en un producto industrial de primer orden en Norteamérica.

A ello contribuyó en gran medida la habilidad mercantil de los Guastavino, padre e hijo, con una propaganda masiva muy americana, pero que resultaba tremendamente efectiva, multiplicándose los encargos. Los dibujos de las obras construidas, constituyen una valiosa muestra de su buen hacer, constructivo y de marketing. Véanse los detalles de ambos en las Fig. 6.44. y 6.45.

---

<sup>27</sup> Domenech i Estapá, José. *La fábrica de ladrillo en la construcción catalana*. Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña 1900, 37-48.

<sup>28</sup> Sobre la obra de los Guastavino en América, conviene consultar: Loren, Mar. Guastavino CO. *La reinvenió de l'espai públic a New York..* Consorci de Museus de la Comunitat Valenciana, 2008. 12-27: Valencia 2008. Y Loren, Mar. *Texturas y Pliegues de una Nación. New York City: Guastavino Co. y la Reinención del Espacio Público de la Metrópolis Estadounidense*. TC Cuadernos: Valencia 2009.



**GUASTAVINO CONSTRUCTION**  
 vs.  
**STEEL FOR DOMES**

STEEL FRAME CONSTRUCTION FOR DOMES IS COMPLICATED (SEE DRAWING), EXPENSIVE AND SUBJECT TO ANNOYING AND COSTLY DELAYS IN DELIVERY.

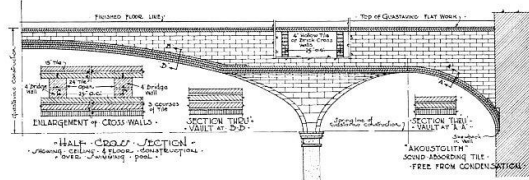
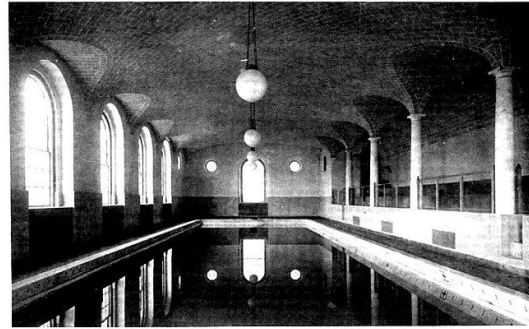
GUASTAVINO CONSTRUCTION IS SIMPLE (SEE DRAWING), IS ECONOMICAL AND THE NECESSARY MATERIALS CAN ALWAYS BE DELIVERED PROMPTLY.

LET US SHOW HOW OUR SYSTEM CAN BE APPLIED TO THE PROBLEMS NOW IN YOUR OFFICE. SEND US YOUR DRAWINGS FOR SUGGESTIONS.

R. GUASTAVINO CO.

40 Court Street  
 Boston, Mass.

Fuller Building  
 New York



Soffit of AKOUSTOLITH sound absorbing Tile assuring freedom from sound reverberation and condensation of moisture

VAULTED CEILING AND ROOF CONSTRUCTION  
 SWIMMING POOL—SMITH COLLEGE, NORTHAMPTON, MASS.  
 J. W. AMES AND E. S. DODGE, ARCHITECTS

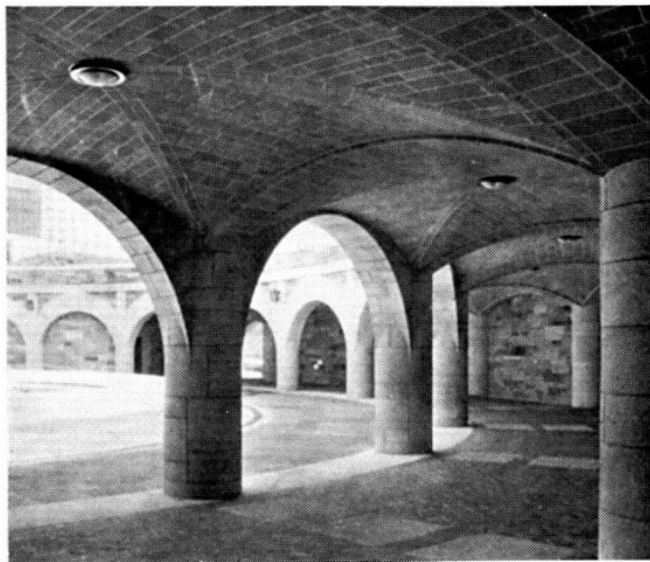
**R. Guastavino Company**

225 W. 34th Street  
 New York City

R. GUASTAVINO CO. OF CANADA, Ltd.  
 New Birk Building, Montreal, P. Q.

40 Court Street  
 Boston, Mass.

**GUASTAVINO TIMBREL ARCH CONSTRUCTION**



GUASTAVINO CONSTRUCTIVE TILE VAULTS  
 HENRY HUDSON PARKWAY, NEW YORK CITY  
 Madigan & Hyland, Consulting Engineers

Typical Constructive Tile ceiling with Texture Tile soffit, providing strength, light weight, permanence, economy and freedom from upkeep—

- FIREPROOF
- VARIETY of finish
- ADAPTABLE to any form of vaulting

Our Engineering Department will be glad to suggest the most economical adaptation of Guastavino vaults on receipt of your preliminary drawings.

Refer to Sweet's—Catalog 40, Section 10

**R. GUASTAVINO CO.**  
 500 Fifth Ave., New York  
 40 Court St., Boston

Fig. 6.44. Documentos de la Guastavino Company, ofreciendo las ventajas de auténticas bóvedas frente a los falsos techos colgados de los entramados metálicos de cubierta, tradicionales. (Guastavino. Collins Collection, Avery Library)

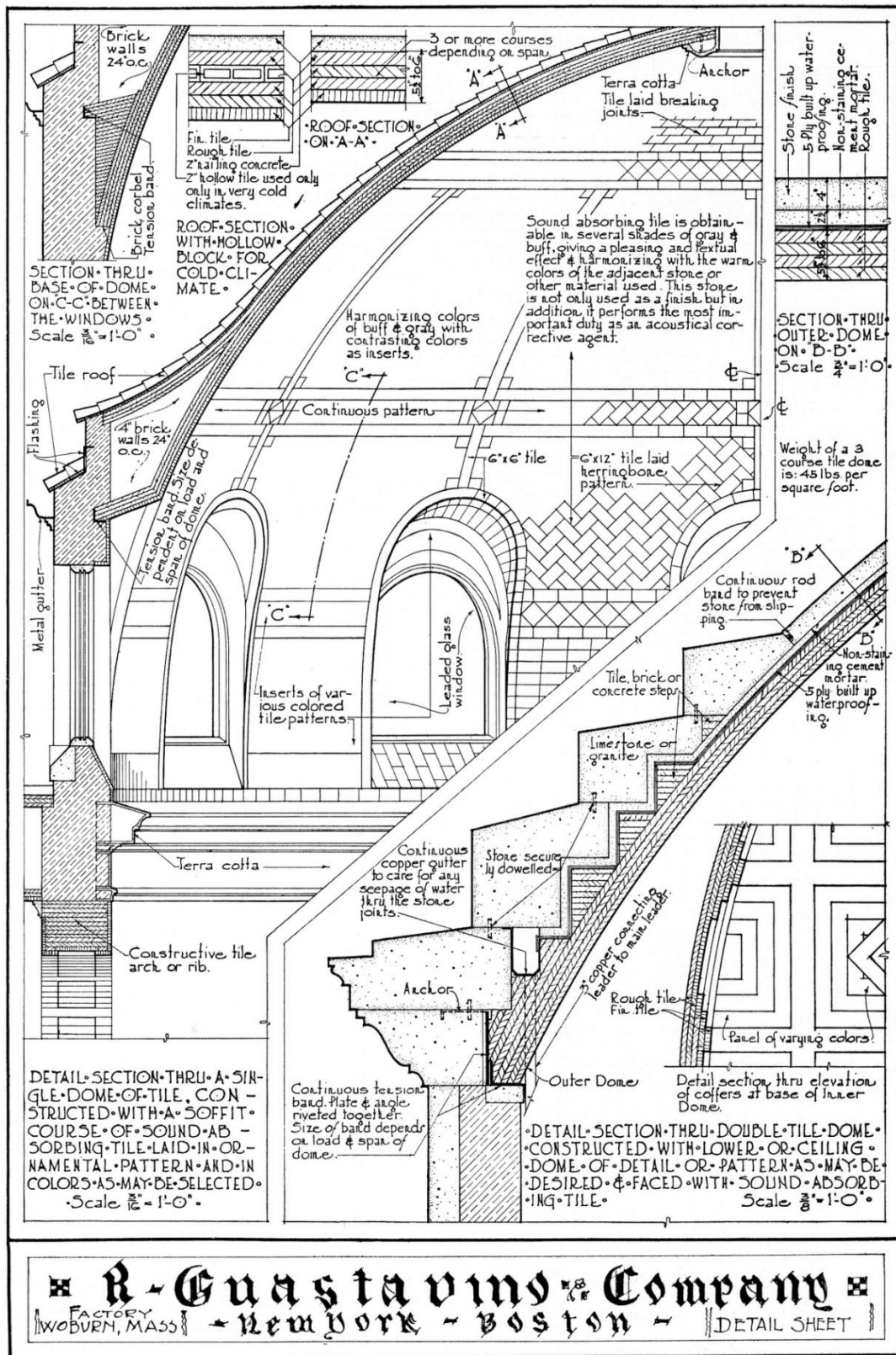


Fig. 6.45. Sección constructiva de una genérica bóveda tabicada del "Sistema Guastavino", con un detallado repertorio de todos los elementos constituyentes del mismo. *Sweet's Catalog*, 1931. (Guastavino. Collins Collection, Avery Library). Los *Sweet's Catalog* venían a ser como una especie de Vademecum (¡Ven-conmigo!) para arquitectos, que mostraba los avances tecnológicos y productos y soluciones constructivas novedosas, con la referencia de marcas, etc. y en caso de los Guastavino con detalles constructivos de la calidad del que mostramos.

Las estructuras tabicadas, tienen su origen en cultura constructiva romana, cuando éstos doblan, como refuerzo, el cimbrado permanente de baldosas para el “hormigonado” (opus caementitium), naciendo de forma espontánea la bóveda tabicada, como se puede apreciar ya en las Termas de Caracalla.

La magia de estas estructuras, resulta tan extraordinariamente impactante, que, como señala magistralmente Félix Cardellach:<sup>28</sup>

*“...a partir de la civilización romana, corre velozmente por la costa latina, levantándose numerosos ejemplos en toda la larga cintura que media desde Nápoles a Cartagena, ejemplos que son después profusamente imitados en las regiones del interior....Una de las características...es el empuje que imprime contra los puntos en que apoya, empuje que proviene de la necesidad de oponerse a la libre dilatación de las formas...”*

*“...Consiste, sencillamente,...., en ajustar los perfiles de las formas tabicadas, precisamente a sus líneas potenciales de acción externa, es decir, a lo que se llaman sus líneas de presiones, con lo que evidentemente se alojan tales líneas en el núcleo de las formas y desaparece en absoluto la tensión de las mismas. Solamente cuando alguna carga exótica o dinámica pueda alterar temporalmente la línea de acción externa, se originará algún esfuerzo tensivo en la estructura, esfuerzo que por ser, además de local, poco intenso, pues no es corriente el caso de alteraciones notables en la línea de acción externa, será siempre seguramente resistido por la estructura tabicada....”*

(Cardellach denomina esfuerzos tensivos a los correspondientes a las tracciones originadas por la flexión. De igual manera se refiere a que desaparecerán las “tensiones” si se ajustan las formas a las líneas de presiones)

Esbozadas las características de las estructuras tabicadas, en palabras de Cardellach, no es nuestro objetivo profundizar en ellas. Más bien, las estructuras tabicadas de los Guastavino son tratadas en nuestra Tesis por el interés mostrado por ellos, en particular, por Rafael Guastavino Expósito, hijo de Guastavino Moreno, en la utilización de la Estática Gráfica para la comprobación de la estabilidad estructural de sus construcciones. En unos casos por iniciativa propia, como parte de su ya expuesta habilidad comercial y en otros, a requerimiento de los arquitectos que habían diseñado la estructura que fuese, y querían garantías de que lo construido por los Guastavino resistiría.

Guastavino padre, era mucho más partidario de construir y someter a pruebas de carga lo construido, quizás influido por su formación como Maestro de obras.

<sup>29</sup> Cardellach, Félix. *Filosofía de las estructuras*. Librería de Agustín Boch: Barcelona 1910. Algunas de las definiciones más atinadas, a nuestro juicio, sobre los tipos estructurales, su origen, los principios que los rigen y su desarrollo, están contenidas en esta extraordinaria obra de la que tenemos el privilegio de contar con una primera edición. Es el caso de la síntesis de las estructuras tabicadas expuesta.

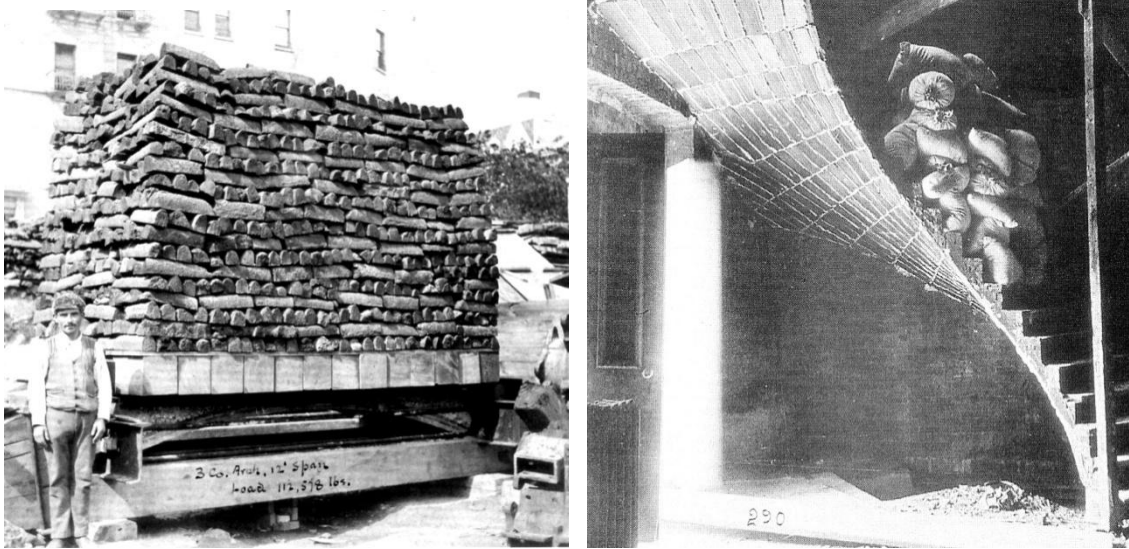


Fig. 6.46. Prueba de carga con 100.000 libras (45 Tn) sobre un arco de 12 pies (3.66m). Otras pruebas sobre una escalera tabicada realizada en 1903 (Guastavino. Collins Collection, Avery Library) y en la última aparece el propio Guastavino padre, subido sobre la clave de uno de los arcos formeros de las bóvedas de la Biblioteca Pública de Boston, de los arquitectos McKim, Mead y White. (Naturalmente estaba bien seguro de la estabilidad de los arcos que construía) (Print Department de la Boston Public Library).

Sin duda, lo que dio a la Compañía su mayor éxito inicial fue la personalidad de Guastavino y la espectacularidad de su increíble capacidad para usar el marketing y la propaganda para promover su sistema constructivo.

Guastavino padre, destacó las cualidades extraordinarias de las bóvedas sistema, transformando una aparentemente sencilla estructura subordinada a las ideas de los arquitectos en una forma milagrosa que podría desafiar no sólo la gravedad, sino algunas eventualidades como los desastres ocasionados por los incendios.

Cuando un gran incendio quemó cientos de edificios en Paterson, Nueva Jersey, en 1902, la compañía Guastavino fotografió los restos calcinados de los edificios, con una atención particular a las estructuras metálicas de cubierta, todas fracasadas por el fuego. También fotografió sus bóvedas, "Guastavino vault" que habían sobrevivido a los incendios, prueba de la resistencia al fuego de sus métodos constructivos. Fig. 6.47.



Fig. 6.47. Fotografía tomada tras el gran incendio que asoló Paterson, New Jersey, en 1902. En ella aparece una de las bóvedas tabicadas de los Guastavino, que había resistido con suficiencia, el fuego, manteniéndose estable, frente al fracaso estructural de las estructuras metálicas. (Guastavino. Collins Collection, Avery Library).

Estas imágenes fueron utilizadas en los anuncios para promover la idea de las "bóvedas Guastavino" como un sistema de construcción indestructible por el fuego. Guastavino padre seguía trabajado arduamente para crear un aura mítica alrededor de su bóveda, comercializando el sistema entre arquitectos y potenciales clientes. Del mismo modo, su hijo, Guastavino Expósito se encargaba de la publicación de las especificaciones del diseño en el "*Sweet Catalog*" (un catálogo para los arquitectos Americanos, ingenieros y contratistas) cada año, lo que facilitaba a los arquitectos la inclusión de sus bóvedas, incluso con los planos detallados de las mismas. Fig. 6.44. y 6.45.

Guastavino Expósito (1873-1950) trabajaba en la empresa de su padre desde los quince años, recibiendo una formación eminentemente práctica, al modo antiguo de los aprendices. Su padre había presentado en su *Essay on the theory and history of Cohesive Construction, applied especially to the timbrel vault*<sup>30</sup> las únicas informaciones sobre los métodos de cálculo (analíticos) que se conocen de su pregonado sistema constructivo, para la bóveda de cañón y la cúpula esférica, ambas rebajadas.

Para la obtención del empuje de un arco o bóveda de cañón rebajada, Guastavino emplea la expresión empírica:  $A \cdot \sigma_c = \frac{P \cdot l}{8 \cdot f}$  en la que (A), es la superficie en mm<sup>2</sup> por unidad de longitud transversal a la bóveda en la clave, ( $\sigma_c$ ) es la tensión de rotura a compresión, expresada en N/mm<sup>2</sup> (P) es la suma del peso propio, relleno y sobrecarga que actúa sobre la bóveda por unidad de longitud en (KN), (l) es la luz de la bóveda en (m) y (f), su flecha en (m), definiendo estos dos datos, la geometría de la bóveda.

En la expresión se relaciona la carga (P) con el espesor de la bóveda (ya que conocemos su área, (A) y la tensión de rotura del material ( $\sigma_c$ ), obtenida de ensayos, habiendo definido la geometría del arco. Se trata de más o menos de la expresión del empuje de un arco parabólico cargado uniformemente. (Guastavino, 1893: 34)

Guastavino expone como ejemplo el cálculo del espesor de una bóveda de 4.5 m de luz, una relación flecha/luz de 1/10 soportando una carga repartida de 12 KN/m<sup>2</sup> y una tensión de rotura para el material de  $\sigma_c = 14.21$  N/mm<sup>2</sup>, con lo que si se considera, como el preconiza, una tensión admisible del orden de la décima parte de la tensión de rotura, es decir,  $\sigma_{adm} = \frac{1}{10} \sigma_c = 14.2$  Kg/cm<sup>2</sup>, entrando en la fórmula obtenemos un  $A \cdot \sigma_{adm} = \frac{54.000 \text{ N} \cdot 4.500 \text{ mm}}{8 \cdot 450 \text{ mm}} = 67.500 \text{ N}$  con lo que  $A = 47.500 \text{ mm}^2$ , que para un metro de anchura, o sea, 1.000 mm, habría que usar dos rasillas de una pulgada aproximadamente, es decir  $2 \cdot 2.54 = 5$  cm, que sería el espesor en la clave. (Guastavino, 1893: 37)

Naturalmente utilizar un coeficiente de seguridad de minoración de la resistencia a compresión  $\gamma_c = 0.1$  era bastante conservador y el propio Guastavino reconoce que podría haber utilizado coeficientes de hasta  $\gamma_c = 0.2$ , lo que le permitía jugar con espesores distintos en función del diseño. Lo cierto es que se trataba de cálculos que aseguraran la estabilidad y no de cálculos en rotura.

<sup>30</sup> Guastavino Moreno, Rafael. *Essay on the theory and history of Cohesive Construction, applied especially to the timbrel vault*. 2ª Ed. Ticknor and Company: Boston. 1893. Traducido en: *Escritos sobre la construcción cohesiva*. Instituto Juan de Herrera. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo (CEHOPU). Madrid 2006.

Mientras que Guastavino padre, realiza, como hemos visto, unos pocos cálculos y trabaja más bien conducido por su extraordinaria intuición y conocimiento constructivo, su hijo, que tenía una cierta formación técnica autodidacta y una buena experiencia práctica de la mano de su padre, demuestra una gran habilidad para los cálculos gráficos, empleando los métodos de la Estática Gráfica de Culmann, que ya a finales del S. XIX eran habitualmente utilizados en todos los despachos de arquitectos e ingenieros del mundo y como es natural, también en los americanos.

El conocimiento y uso de la Grafostática para comprobar estructuras era habitual en estos despachos técnicos, pero fue conociéndose cada vez más, que la utilización, que arquitectos como Gaudí, e ingenieros como Eiffel o Robert Maillart, hacían de la Estática Gráfica, iba más allá del puro cálculo y era fuente de diseño en cuanto al control que se puede tener de determinados parámetros que conjugan fuerzas y formas.

Guastavino hijo, aprendió a usarla, durante la construcción de la Capilla de St. Paul (1907), en la Universidad de Columbia de la Ciudad de Nueva York, cuando los arquitectos, Howells y Stokes, querían estar seguros de la estabilidad de la bóveda, cargada con las 6.5 Tn que la linterna introducía en la cúpula.

Cuando la compañía Guastavino no pudo darles prueba suficiente de seguridad, con sus escasos cálculos analíticos, los arquitectos contrataron a una ingeniería consultora, especialista en cálculos grafostáticos, que utilizan para analizar la estructura de los Guastavino y cuyos cálculos reproducimos en la Fig. 6.48. en la que se aprecian los polígonos de fuerzas y los funiculares tanto de la bóveda externa como de la interior para el análisis de las líneas de empujes y las resultantes y puntos de aplicación de las mismas, que naturalmente condicionan los estribos y contrarrestos necesarios.

Aunque parece que Guastavino hijo extrajo sus consecuencias de la metodología utilizada por los expertos en cálculo grafostático, su idea principal estaba centrada en crear su propio sistema, que parece que se basó en otro tipo de cálculos grafostáticos menos orientados según la Grafostática de Culmann.

El interés por la Estática Gráfica de Guastavino Expósito, es posible que le llevara al conocimiento de los escritos de Dunn <sup>31</sup> y que decidiera aplicar su metodología al cálculo de cúpulas tabicadas, obsesionado como estaba en conocer y evaluar dónde aparecen las tracciones en este tipo de estructuras y disponer refuerzos metálicos en el interior de su espesor, que lejos ya de la clave, es naturalmente mayor y permite dicha inclusión, sin mayor problema.

---

<sup>31</sup> Dunn, William. *The Principles of dome construction*. Architectural Review, 1908 vol.23: 63-73, 108-112.



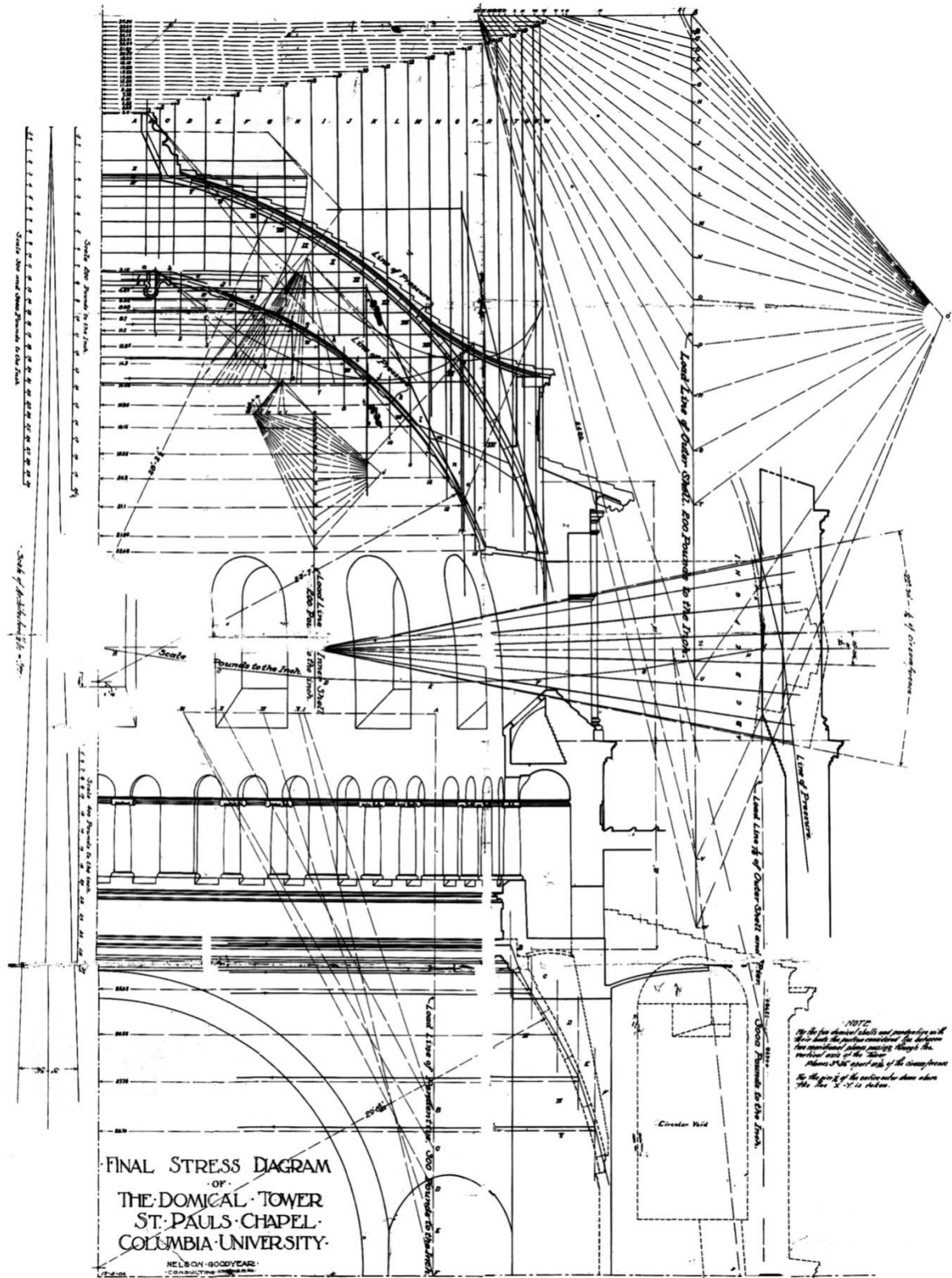


Fig. 6.48. Cálculo grafostático para el estudio de la estabilidad de la St. Paul Chapel de los arquitectos Howell & Stokes. Universidad de Columbia. New York. (1905-1906) El análisis responde a la metodología explicada en el punto 3.2. de esta Tesis. (Guastavino. Collins Collection, Avery Library).

El primer método gráfico para el cálculo grafostático de bóvedas, fue propuesto por el ingeniero y Dr. en Físicas Henry T. Eddy, en su *Researches in Graphical Statics*,<sup>32</sup> Fig. 6.49. siendo divulgado por William Dunn<sup>33</sup> en sendos artículos de 1904 y 1908, dando a conocer la metodología explicada por Eddy.

Es esta la fuente que posiblemente conociera Guastavino Expósito y que le iniciara en este tipo de cálculos gráficos, que empleó para muchas cúpulas; en particular para la gran cúpula de St. John the Divine, en la que se usaron refuerzos metálicos. Las Fig. 6.49., 6.50. y 6.51. muestran el procedimiento ideado por Eddy.

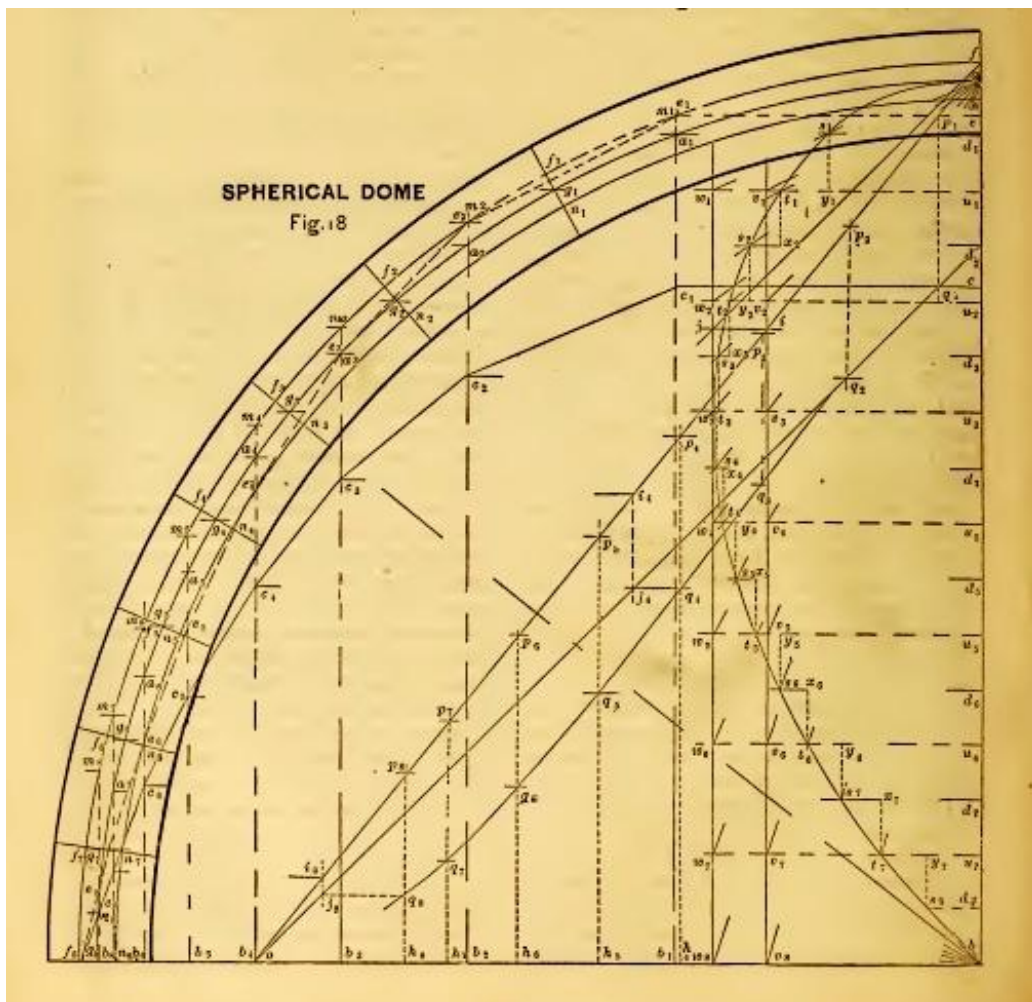


Fig. 6.49. Método grafostático ideado por el profesor de Matemáticas y de Ingeniería Civil de la Universidad de Cincinnati, Henry T. Eddy, en 1878, para el análisis de membrana para cúpulas metálicas o de fábrica. (Eddy, 1878: 54)

<sup>32</sup> Eddy, Henry T. *Researches in Graphical Statics*. Van Nostrand: New York 1878.

<sup>33</sup> Dunn, William. *Notes on the stresses in frames spires and domes*. Journal of the Royal Institute of British Architects, Third series, Vol. 11 ( nov. 1903-oct. 1904) London 1904.  
Dunn, William. *The principles of dome construction*. Architectural Review, Vol. 23: (63-73, 108-112) London 1908.

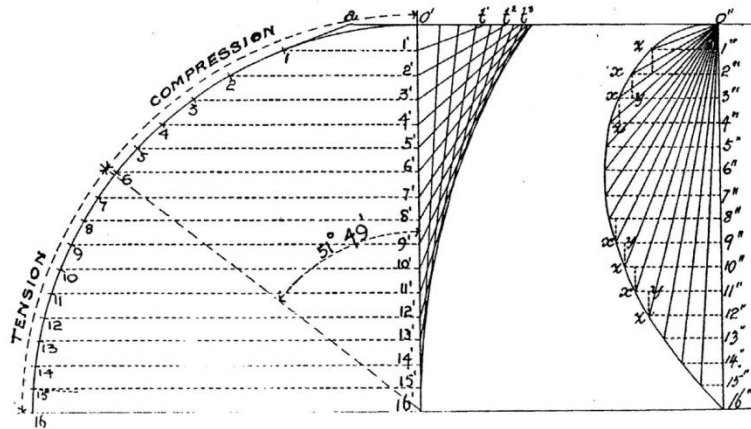


Fig. 6.50. Dibujo simplificado del método de Eddy en el que se grafía el ángulo de 51° 49' desde la clave, a partir del cual aparecen tracciones en la cáscara. Esto induce a Guastavino Expósito a introducir armaduras en los paralelos inferiores desde ese ángulo hasta la horizontal. (Dunn, 1904)

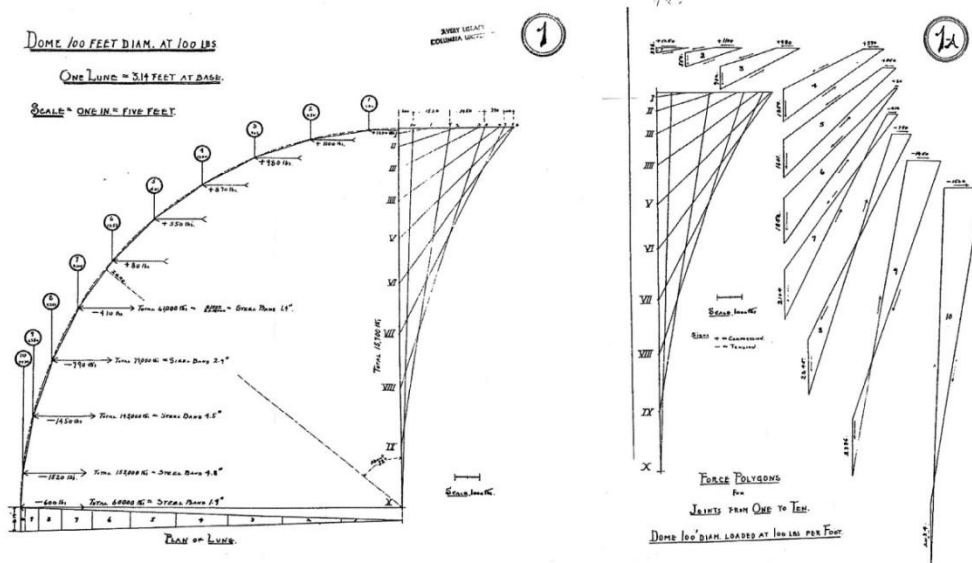


Fig. 6.51. Utilización del método de Eddy para análisis gráfico de una fina lámina para una cúpula de 30 m de diámetro. (Avery Library, Columbia University)

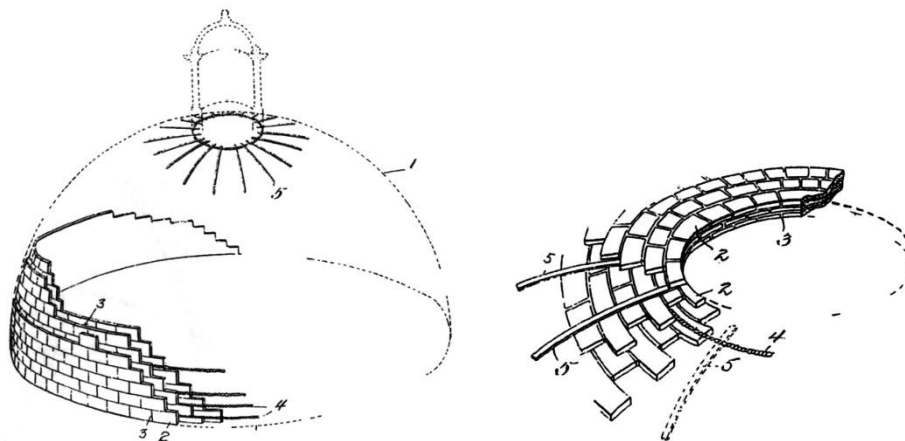


Fig. 6.52. Sistema patentado por Rafael Guastavino Expósito de cúpulas tabicadas con armadura metálica para la resistencia de la zona traccionada. (R. Guastavino. Masonry Structure, Patented Jan. 18. 1910)

Básicamente, la metodología para el análisis de membranas estudiada por Eddy, que él mismo sitúa en su libro *In Graphical Statics* en el Capítulo “*New Constructions*”, consiste en dividir el plano de la sección de la cúpula en rebanadas, lo que equivale a dividir la cúpula en anillos horizontales, de los que se calcula el peso, dibujando los vectores fuerza correspondientes sobre una línea vertical, como se hace con los polígonos de fuerzas de la Grafostática convencional. Se trazan horizontales por los extremos de estas fuerzas (situadas en la vertical dibujada a la derecha en la Fig. 6.51) y finalmente, por los orígenes de cada una de las fuerzas se trazan paralelas a las tangentes a la parte inferior del segmento circular del anillo correspondiente.

Naturalmente se han de dibujar los vectores fuerza a la escala que corresponda para que la resultante tenga por módulo el peso total de los anillos, de forma que el radio de la cúpula coincida con dicha longitud.

Cada polígono, triángulo o trapecio está en relación con el diagrama del equilibrio de fuerzas del anillo que le corresponde. Las fuerzas inclinadas representan la suma de las fuerzas tangenciales  $N_\phi$  a lo largo del corte, cuyo valor se puede obtener dividiendo su magnitud, medida sobre el diagrama de fuerzas, por la longitud de la circunferencia del corte. Los vectores horizontales representan la suma de los empujes horizontales en cada corte, cuyas diferencias tienen que ser compensadas por fuerzas  $N_\theta$  que hay que calcular algebraicamente. A partir de los 52º Eddy indica que las  $N_\theta$  se convierten en tracciones (como se puede apreciar en el diagrama de la Fig. 6.53. por el sentido de cierre de los diagramas de fuerzas), con lo que a partir de ese punto la superficie de empujes se aparta de la cáscara manteniéndose constante.

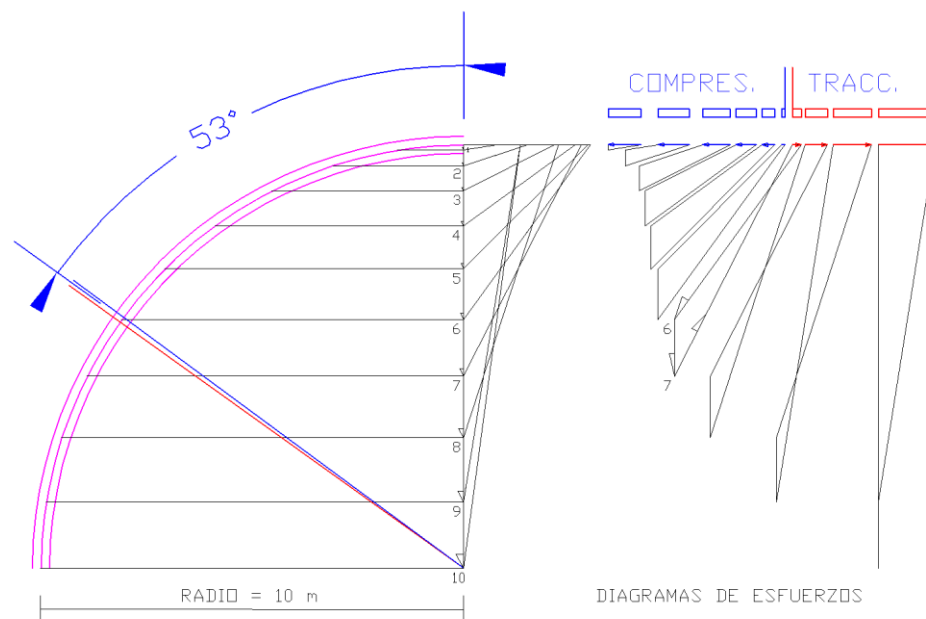


Fig. 6.53. Aplicación del método de Eddy a una cúpula de 20m de diámetro, con la construcción separada de los polígonos de equilibrio de esfuerzos por anillo horizontal. El ángulo desde la clave a partir del que aparecen tracciones es en este caso de 53º. (Dibujos y cálculos propios) Siguiendo (Eddy, 1878: 54-59) y (Huerta, 2006: xliii)

Las observaciones hechas por Eddy relativas al ángulo a partir del que aparecen las tracciones en las membranas y el empuje permanece constante, fueron el punto de partida para el sistema patentado por Guastavino Expósito de una cúpula con un casquete esférico superior y a partir de un determinado paralelo, colocar zunchos y bóvedas de contrarresto, que en definitiva hacen que la bóveda pueda definirse como "sin tracciones", como el caso que mostramos en la Fig. 6.54. de la doble cúpula para el National Museum de Washington, cuyas características geométricas fueron modificadas precisamente en función de conseguir eliminar esas tracciones, variando los radios de curvatura y adicionando esas pequeñas bovedillas suplementarias que transmiten a modo de arbotantes los empujes a los contrarrestos perimetrales.

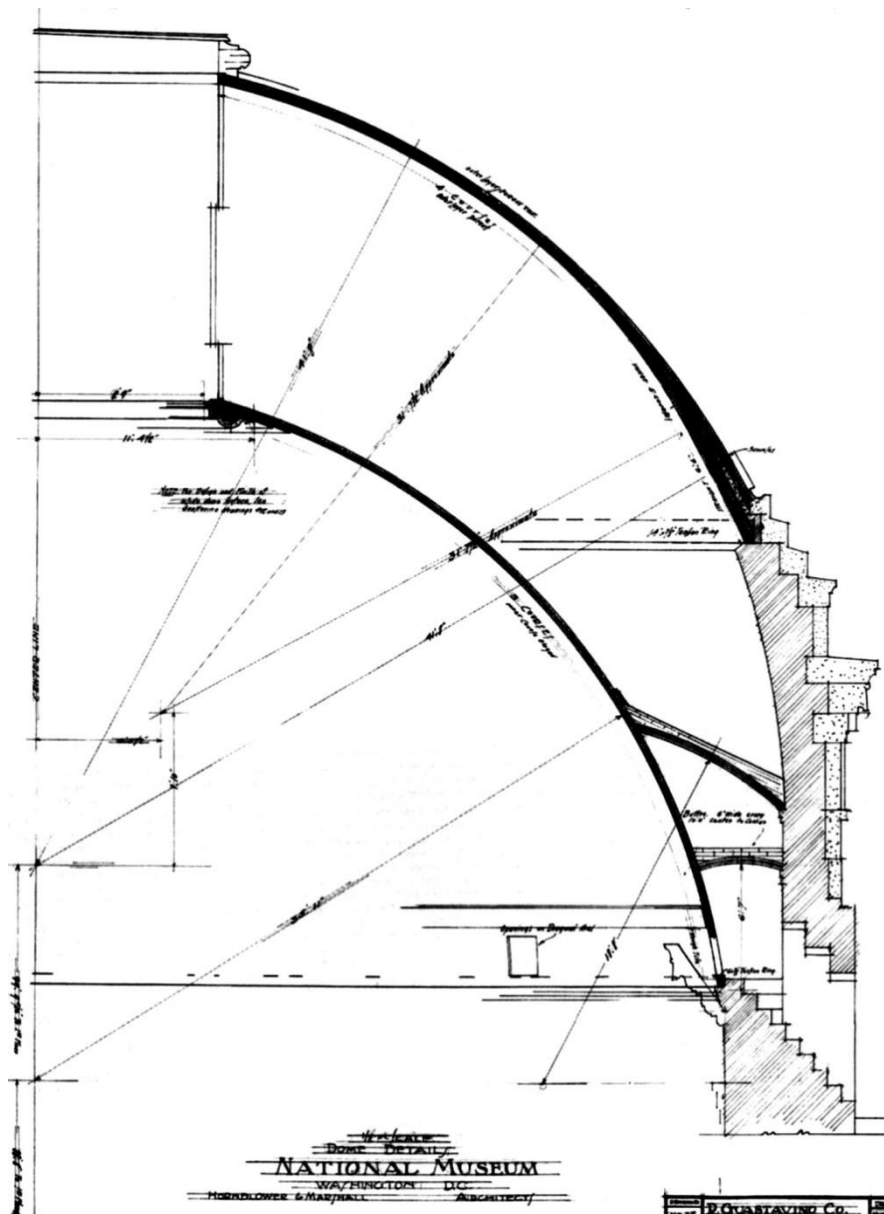


Fig. 6.54. Doble cúpula del National Museum de Washington, en las que se aprecian las distintas curvaturas y las pequeñas bóvedas y zunchos adicionales, en la búsqueda de una solución sin tracciones. (Guastavino. Collins Collection, Avery Library).

Finalmente mostramos en la Fig. 6.55. los procedimientos habituales de la Estática Gráfica para el cálculo de los arcos tabicados que estaban destinados al soporte de la cubierta de la Catedral de St. John the Divine en Nueva York, diseño de Heins & La Frage, Cram & Ferguson. Tras los análisis grafostáticos realizados, finalmente no se construyeron dichos arcos y la cubierta se sustentó sobre una estructura metálica triangulada. Pero ahí estuvo la Grafostática prestando su servicio en el proceso.

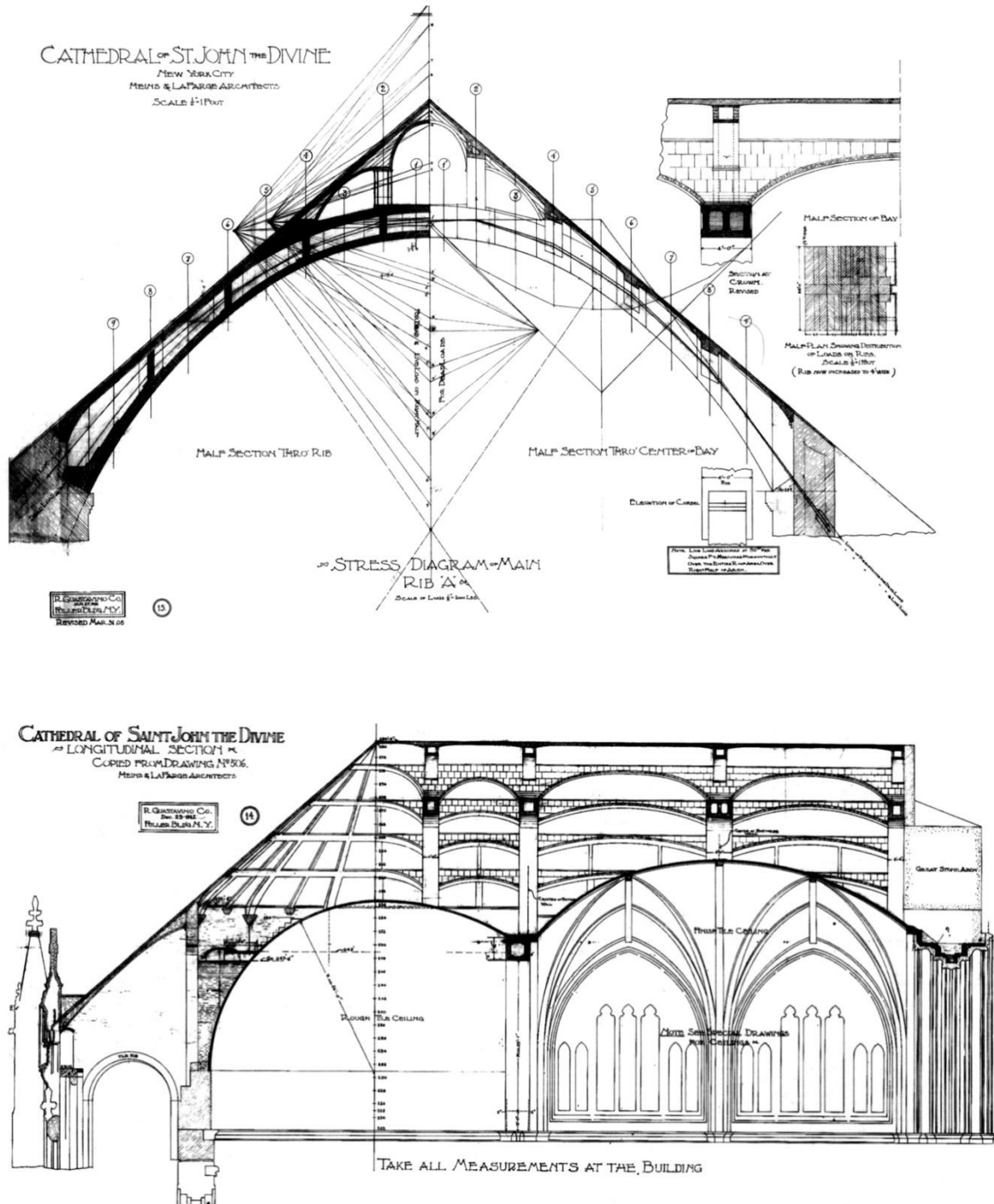


Fig. 6.55. Análisis grafostático para el cálculo de los arcos de cubierta de la nave de la Catedral de St. John the Divine. New York. El cálculo del funicular tras el polígono de fuerzas permite determinar la línea de empujes y la necesidad de los zunchos perimetrales, que se aprecian en el dibujo superior.

## 6.4. ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO DE ALGUNAS ESTRUCTURAS SIMPLIFICADAS

### 6.4.1. ESQUEMAS SIMPLES. ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO. DECISIONES DEL ARQUITECTO

Son numerosos los modelos estructurales que los arquitectos venimos utilizando en la construcción de edificios de todo tipo, habiendo dispuesto de los conocimientos que la Mecánica y la Resistencia de materiales ha puesto en nuestras manos, como ya indicamos en la introducción de esta Tesis.

La Grafostática ha sido uno de los grandes instrumentos utilizados en la creación arquitectónica conjugando la esencia de un conjunto armónico y resistente, desde su difusión masiva, en el último cuarto del S. XIX.

Uno de nuestros objetivos es demostrar su vigencia, siglo y medio después de su aparición, comprobando que sigue siendo útil en nuestro ejercicio proyectual. Para ello, hemos estudiado, en los puntos precedentes, cómo usarla intencionadamente consiguiendo una visión intuitiva de lo diseñado y por construir, introduciendo las modificaciones inducidas de nuestras conclusiones grafostáticas.

Revisamos en este apartado algunos ejemplos de intervenciones conocidas, cuya estructura hemos simplificado para un más sencillo análisis que nos ofrezca con claridad, qué parámetros podemos controlar de ellas, con ayuda de nuestro conocimiento de la Estática Gráfica.

El dominio de la Estática Gráfica condujo a Culmann, como ya hemos visto en el apartado 4.3. de esta Tesis, a aplicaciones de la investigación médica, insospechados. Sólo a modo de ejemplo y por su relación ocasional con las bioformas arquitectónicas

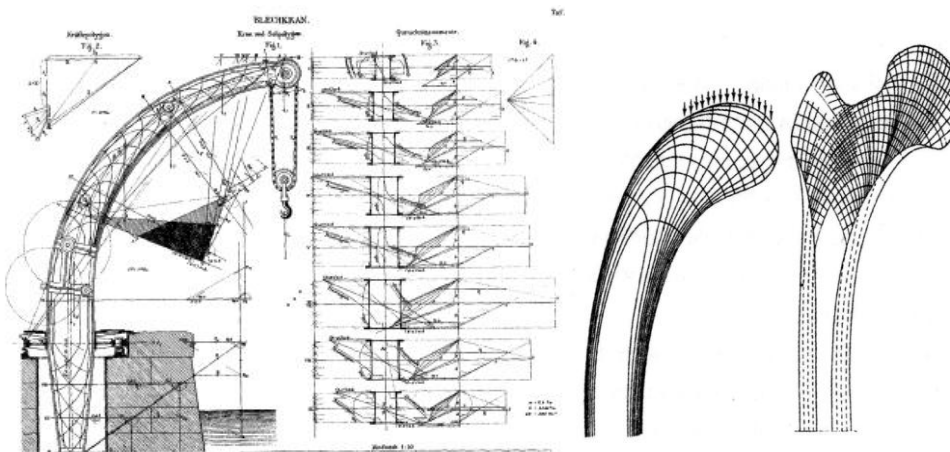


Fig. 6.56. Estudio grafostático del diseño de una grúa Fairbairn por Ritter, alumno y principal continuador de las teorías Culmann. En el estudio presente, se va optimizando la sección de la estructura en función de los esfuerzos a los que va estando sometida y asimilación de esta estructura a la de la cabeza de un fémur humano realizada por Culmann. (Bertram, 2006: 127-129)

Hermann von Meyer,<sup>34</sup> profesor de anatomía de Zúrich y profesor especialista en estructuras óseas, mediado el S. XIX, llevaba tiempo preguntándose por la estructura externa y la organización interna, ambas tan sorprendentes como eficaces del hueso del fémur. Y es que la cabeza de este hueso, que se articula con la pelvis, se halla totalmente desplazada con relación al eje principal del hueso.

Una observación atenta permite distinguir múltiples haces de fibras óseas dispuestas de manera igualmente desconcertante. Así es que el peso del cuerpo queda totalmente en voladizo. Sin embargo, el conjunto resulta sorprendentemente sólido. Las innumerables cavidades parecen estar, por su diversidad e irregularidad, en el desorden más completo a la vista de un médico o de quien no conozca la Mecánica y Resistencia de materiales.

De hecho las direcciones medias de esas finas “viguetas” óseas siguen las líneas de fuerzas de tracción y cruzan en ángulo recto las líneas de compresión. Karl Culmann, demostró gracias a su conocimiento de la Grafostática que la distribución de estos haces no tenían nada que ver con el azar. Aunque aleatorios, estaban orientados exactamente para seguir las líneas de fuerza que se originan en la estructura interna del hueso.<sup>35</sup>

Como en muchas otras ocasiones, en materia que tiene que ver con los procesos de aplicación de conceptos científicos a usos prácticos, esta forma de distribución interna de elementos resistentes en los huesos, fue el origen de nuevas formas estructurales. Y como no podía ser de otra manera, muchos desarrollos ortopédicos y biomecánicos han tenido como referencia los análisis mecánicos, en general y grafostáticos, en particular, por su simplicidad y contundencia visual intuitiva.<sup>36</sup>

Desde entonces se han trabajado aun más, ciertas analogías y hay grúas que imitan la columna vertebral del hombre, edificios de todo tipo que se organizan estructuralmente siguiendo patrones del esqueleto y en particular los mecanismos de las articulaciones, son referencia continua en el diseño arquitectónico. De la misma manera que se diseñan prótesis que toman su forma de estructuras arquitectónicas consagradas por siglos de efectividad.

---

<sup>34</sup> Meyer, Georg Hermann von. *Statik und Mechanik des menschlichen Knochengestütes*. Wilhelm Elgelmann: Leipzig 1867.

<sup>35</sup> Culmann se dio cuenta, leyendo el artículo de Meyer de 1867, de que la dirección de los sistemas de plaquitas situados en las cabezas del primer metatarso, representan las mismas líneas que la Resistencia de Materiales denomina curvas de máxima compresión y máxima tracción.

<sup>36</sup> Giordan, André. *Mi cuerpo, la mayor maravilla del mundo*. Plaza & Janés: Barcelona 2000



Al margen de esta aplicación singular, pero anecdótica, de los conocimientos de la Estática Gráfica, lo importante para los objetivos de esta Tesis, es observar cómo podemos obtener una gran ventaja modificando nuestras estructuras arquitectónicas en función de los análisis grafostáticos.

En este sentido, mostramos en la Fig. 6.57. cómo nuestro conocimiento de la Grafostática nos permite una cierta manipulación de los parámetros geométricos de una sencilla viga triangulada, para obtener mejores resultados mecánicos, de proporciones, económicos, etc.

El cálculo mediante el procedimiento de Las Figuras Recíprocas ideado por Luigi Cremona,<sup>37</sup> determina de forma sencilla e inmediata los esfuerzos inducidos en las barras de la viga triangulada, tipo Pratt, pero una pequeña variación de  $\frac{1}{4}$  de la longitud del canto de dicha viga origina un considerable incremento en los esfuerzos inducidos en las barras, sometida la viga al mismo estado de cargas.

Por el contrario, supongamos que nuestra viga es la de trazo más débil y está sometida al estado de cargas puntuales  $F_1, \dots, F_5$ . Obtenidos los esfuerzos mediante nuestro método grafostático, comprobamos que en alguna barra se supera la tensión admisible para el material de que pretendemos esté constituida la viga. Pues es inmediata la corrección en el predimensionado hasta conseguir el esfuerzo máximo que la sección de la barra permita. El concepto de "Reciprocidad" proveniente de la Geometría Proyectiva, entre el Polígono de fuerzas y la geometría del entramado, nos

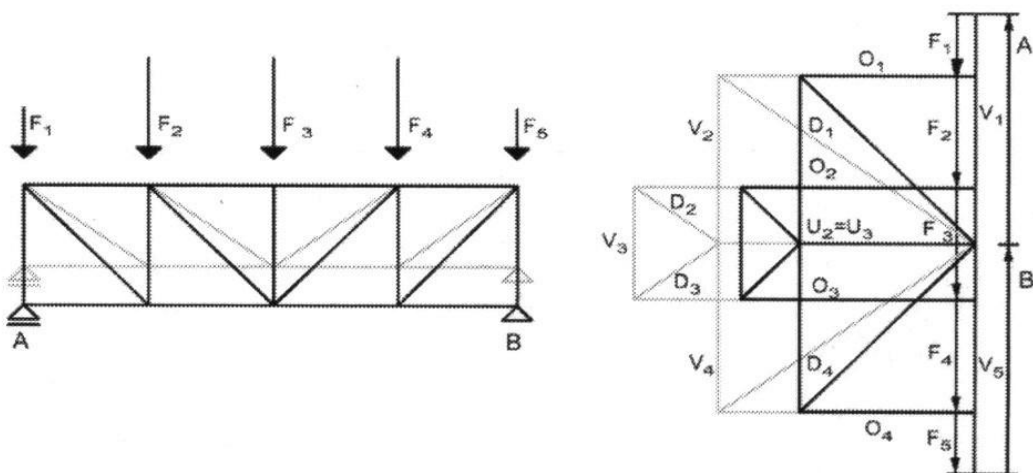


Fig. 6.57. Cálculo grafostático mediante el método de las figuras recíprocas o de Cremona, de los esfuerzos en las barras de una viga triangulada tipo Pratt, en el que se demuestra el importante incremento de dichos esfuerzos con una pequeña disminución del canto de la viga.

<sup>37</sup> Cremona Luigi. *Le Figure reciproche nella Statica Grafica*. Tipografia Giuseppe Bernardoni: Milano 1872.

Ver las consideraciones sobre el origen del método desarrollado por Luigi Cremona en el punto 4.4. de esta Tesis.

proporciona la clave para poder determinar el canto de la viga en función de las características del material de la misma.

Supongamos que tenemos que diseñar una viga similar a la de la Fig.6.57. para un estado de cargas como mostramos en la Fig. 6.58. y pretendemos predimensionarla contando con que el material de constitución de todas las barras ha de ser 2 perfiles normalizados L de alas iguales de acero de  $\sigma_{adm} = 2.600 \text{ Kg/cm}^2$ . Prescindiendo del efecto del posible pandeo de las barras comprimidas y considerando que han sido mayoradas las cargas, podemos determinar la sección de acero necesaria para el mayor de los esfuerzos, que es el de las barras 4 y 4' = 17.500 Kg puesto que todas las barras van a ser conformadas con los mismos perfiles y la sección S necesaria será el cociente  $\frac{17.500 \text{ Kg}}{2.600 \text{ Kg/cm}^2} = 6.73 \text{ cm}^2$ , sección que podemos conseguir con 2 L (40.40.6) cuyo peso por metro lineal es de 3.52 Kg/m. La longitud total necesaria del perfil seleccionado es de 30 m y un peso final de 105 Kg.

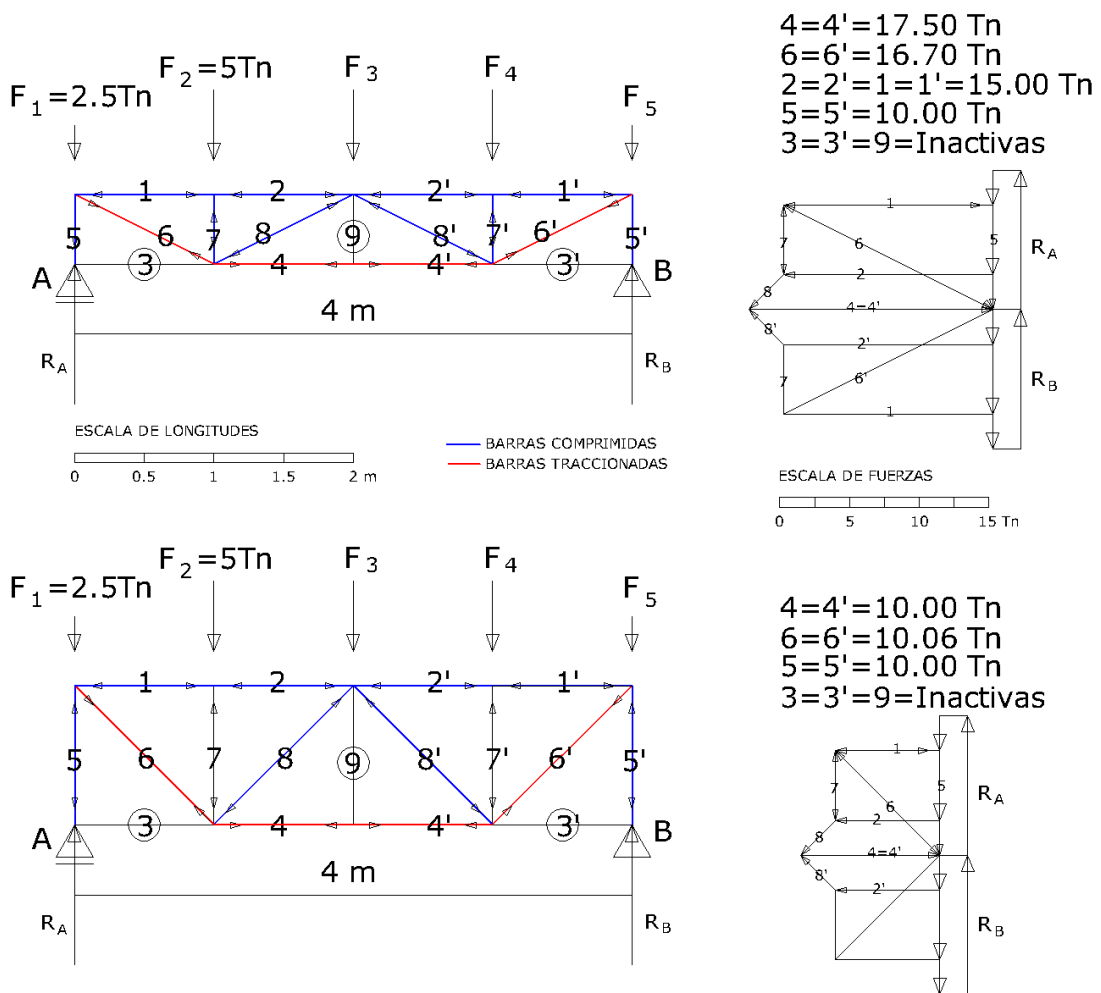


Fig. 6.58. Cálculo de una viga tipo Pratt solicitada por el sistema de fuerzas  $F_1, \dots, F_5$  y comprobación del efecto producido con el aumento de la dimensión de los montantes de la viga.

Si consideramos ahora nuestra segunda opción, en la que hemos duplicado la dimensión de los montantes, pasando ahora a un metro, con el mismo estado de cargas, podemos comprobar en nuestro diagrama de Cremona, que las mayores solicitaciones corresponden ahora, casi por igual a las diagonales 6 y 6', a los montantes exteriores 5 y 5' y a las barras del cordón inferior 4 y 4' = 10.000 Kg.

Ahora la sección  $S$  necesaria será  $S = \frac{10.000 \text{ Kg}}{2.600 \text{ Kg/cm}^2} = 3.84 \text{ cm}^2$  que podemos conseguir con dos angulares 2 L (30.30.5), cuyo peso por metro lineal es de 2.18 Kg/m, midiendo ahora una longitud total de 37.28 m, al haber aumentado la dimensión de algunas barras. El peso total es, sin embargo, de 81.27 Kg, o sea 23 Kg menos de acero.

Las decisiones que tomemos, dependerán de los condicionantes de nuestro diseño. Es posible que no sea posible duplicar el canto de la viga, pero sí aumentarlo una cierta cantidad. Lo cierto es que la ayuda prestada por los tanteos grafostáticos, nos pone en mejor posición en la decisión final, con una visión rápida de las solicitaciones inducidas y las modificaciones posibles.

Algunas de las consecuencias de los análisis grafostáticos que hemos descrito para este sencillo ejemplo, son muy visibles en cuanto se realiza el cierre del diagrama de Cremona:

- La simetría de carga y forma, induce en las barras esfuerzos también simétricos sea cual sea el canto de la viga.
- En ambas estructuras los esfuerzos en los montantes verticales son iguales.
- Son mayores los esfuerzos en los montantes donde se encuentran los apoyos.
- Existe una gran diferencia entre los esfuerzos creados en las diagonales. En las 6, 6' son mucho mayores que en las 8, 8'.
- En ambos casos resultan más solicitadas las barras traccionadas que las comprimidas.
- Si las fuerzas aplicadas en los extremos fuesen mayores, es decir si por ejemplo, todas las fuerzas externas fueran iguales  $F_1 = F_2 = \dots = F_5 = 5 \text{ Tn}$ , los únicos esfuerzos inducidos en las barras que se modificarían serían los de los montantes extremos, que se duplicarían, sin ninguna otra consecuencia.

Es posible, estudiar los efectos de las modificaciones de nuestro diseño, que con unos pequeños retoques puede, economizar material, admitir mayores cargas, disminuir dimensiones de algún elemento y aumentar otros, todo ello consecuencia de la reciprocidad, como decíamos, entre la geometría del entramado y del polígono de fuerzas. En la Fig. 6.59. se muestra un croquis con una representación de las escuadrías resultantes de la reducción a 2/3 y 1/3 del canto de una viga Pratt.

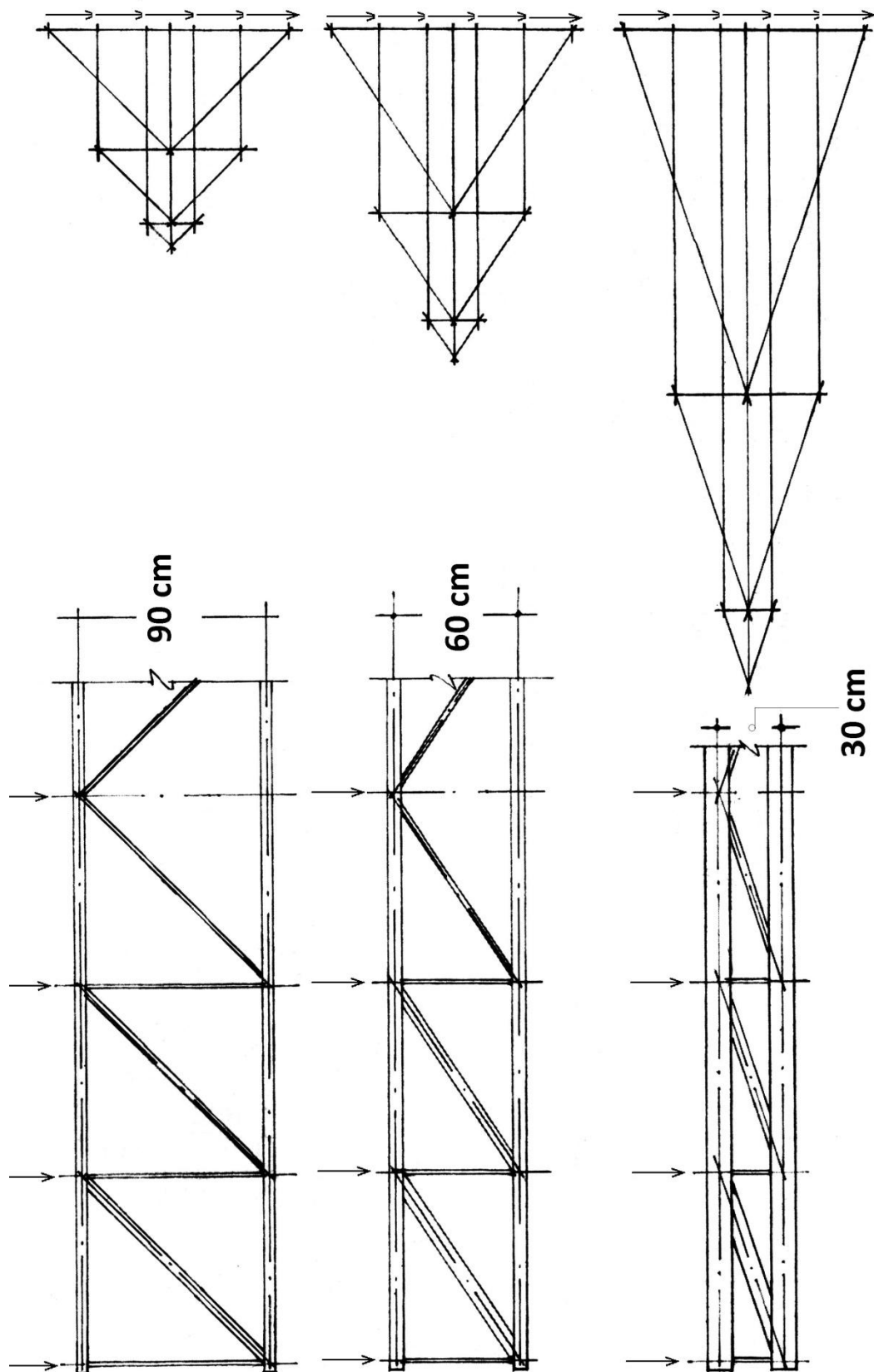


Fig. 6.59. Croquis a escala en el que se representa la variación de esfuerzos en las barras de la viga triangulada, tipo Pratt, sometida a un sistema de cargas iguales en los nudos del montante superior, cuando el canto disminuye a  $2/3$  y a  $1/3$  del canto inicial. Se muestran las escuadrías correspondientes para mayor impacto visual. (Dibujo propio sobre una idea de Zalewski & Allen, 1998: 125)

Otros ejemplos se muestran a continuación en la Fig. 6.60. Se constata cómo el manejo del polígono funicular invertido de la carga repartida ( $q$ ) nos puede ayudar en el diseño de un pórtico de 16m de vano, con articulaciones en los apoyos y en el centro del travesaño superior. (Gerhardt, 2002a: 65-69).<sup>38</sup> Si manipulamos el polígono funicular invertido, elevando el vértice de la parábola, se reducen las componentes horizontales de las reacciones  $R_A$  y  $R_D$ ,  $A_H$  y  $D_H$ , consiguiendo una disminución de los momentos en los nudos  $B$  y  $C$ ,  $M_B$  y  $M_C$ , para lo que hemos de modificar nuestro diseño del pórtico inicial, introduciendo dos articulaciones simétricas en el travesaño,  $L$  y  $L'$ , induciéndose un pequeño momento positivo en el centro del vano  $M_S$ , mejorando las sollicitaciones de todas las barras y los apoyos

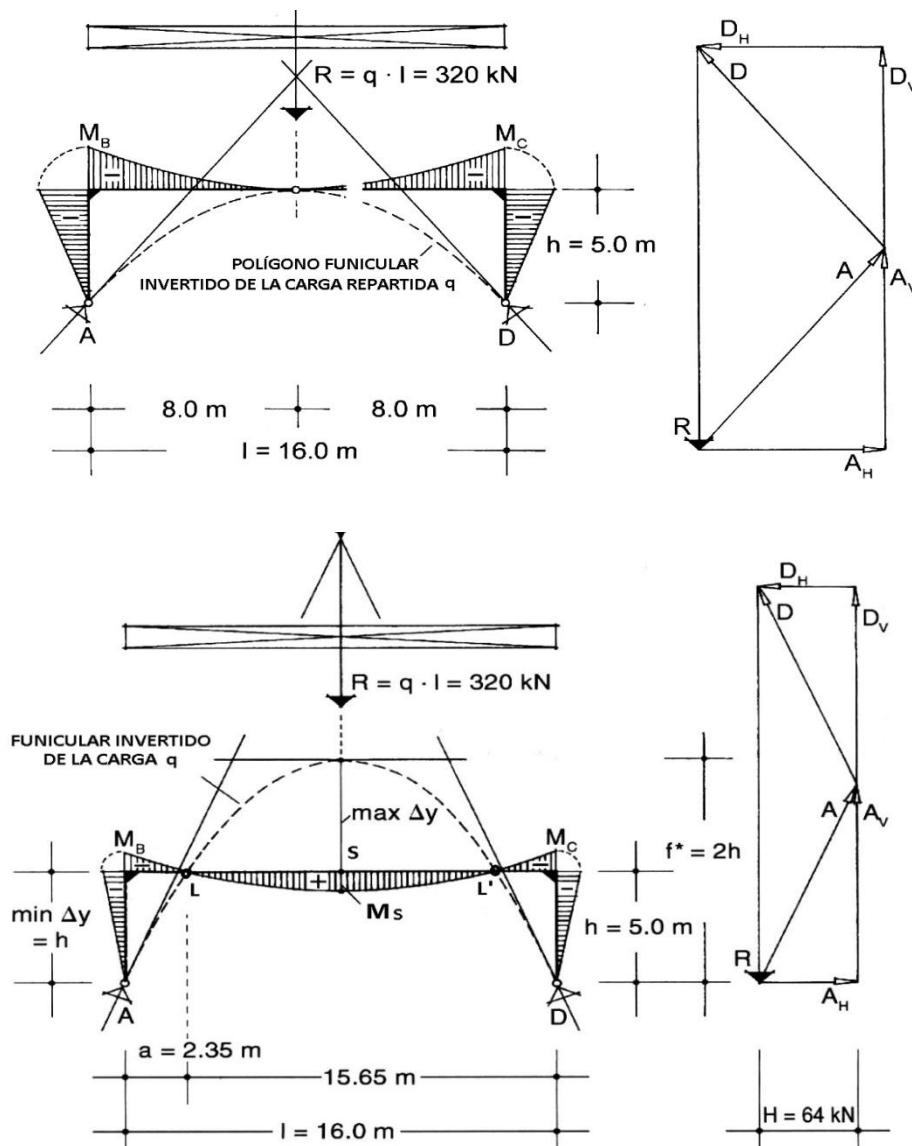


Fig. 6.60. Manipulación del polígono funicular invertido de la carga repartida  $q$  sobre el pórtico triarticulado superior, para la reducción de las componentes horizontales de las reacciones. La consecuencia de nuestro análisis es la conversión del pórtico original en otro con dos articulaciones  $L$  y  $L'$ . (Gerhardt, 2002a: 65-69).

<sup>38</sup> Gerhardt, Rolf. *Anschauliche Tragwerkelehre. Experimentelle Darstellung von Biegemomenten mit Hilfe der Seillinie*. Aachen: Saker 2002a.

### 6.4.2. UNA IDEA DE PIER LUIGI NERVI. ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO

Los análisis grafostáticos sobre esquemas simplificados de obras construidas, son otros de los usos de la Estática Gráfica, de gran interés para el conocimiento del espíritu que guió a quien las construyó. No se trata tanto de recalcular la estructura construida como de comprender la idea que la animó, “la idea” de la que hablamos en la introducción de nuestra Tesis, en palabras de Eduardo Torroja, o la “Filosofía de las Estructuras” de Félix Cardellach.

Una estructura que analizamos brevemente a continuación, corresponde al Graderío y Cubierta del *Campo sportivo G. Berta Firenze*, actual *Estadio Comunale*, obra de Pier Luigi Nervi <sup>39</sup> de 1931. En la Fig. 6.61. se muestra el plano original de la sección de la cubierta y graderío y la planta de los nervios de hormigón que la sustentan y una perspectiva cónica, también original del Estudio Nervi & Nebbiosi.

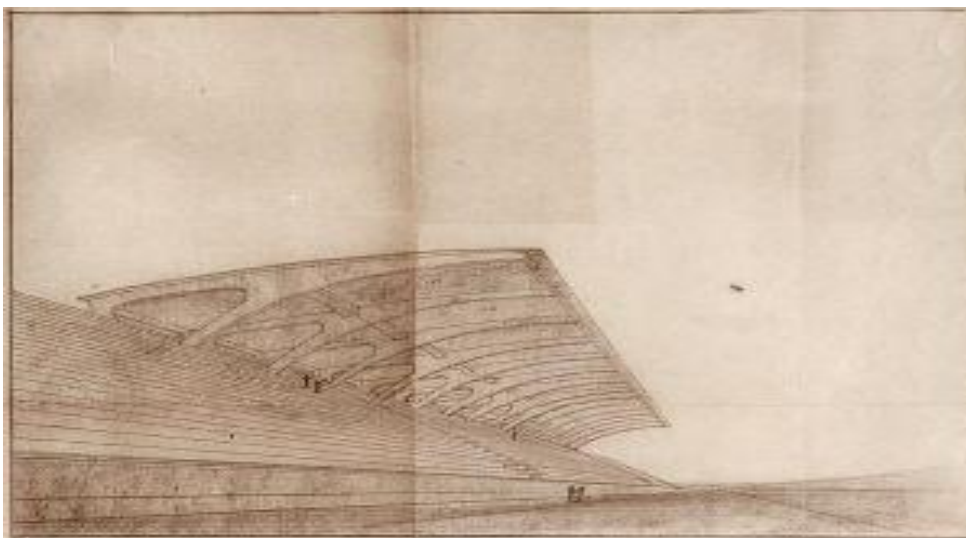
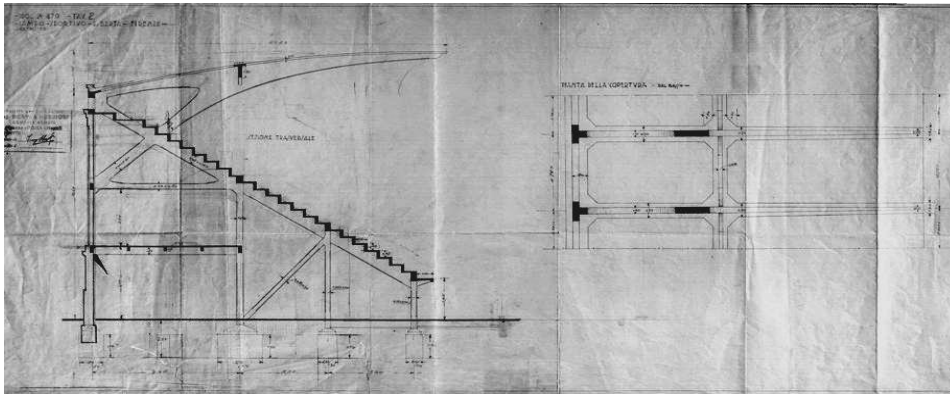


Fig. 6.61. Plano original del proyecto del graderío y cornisa del Estadio Comunale di Firenze y perspectiva de Nervi.

<sup>39</sup> Nervi, Pier Luigi. *Costruire correttamente*. Hoepli: Milano 1955.

El arquitecto, ingeniero y constructor Pier Luigi Nervi (1891-1979) es uno de los arquitectos estructuristas mejores del S. XX. Nikolaus Pevsner lo define como “el mas brillante artista en hormigón armado de nuestro tiempo”



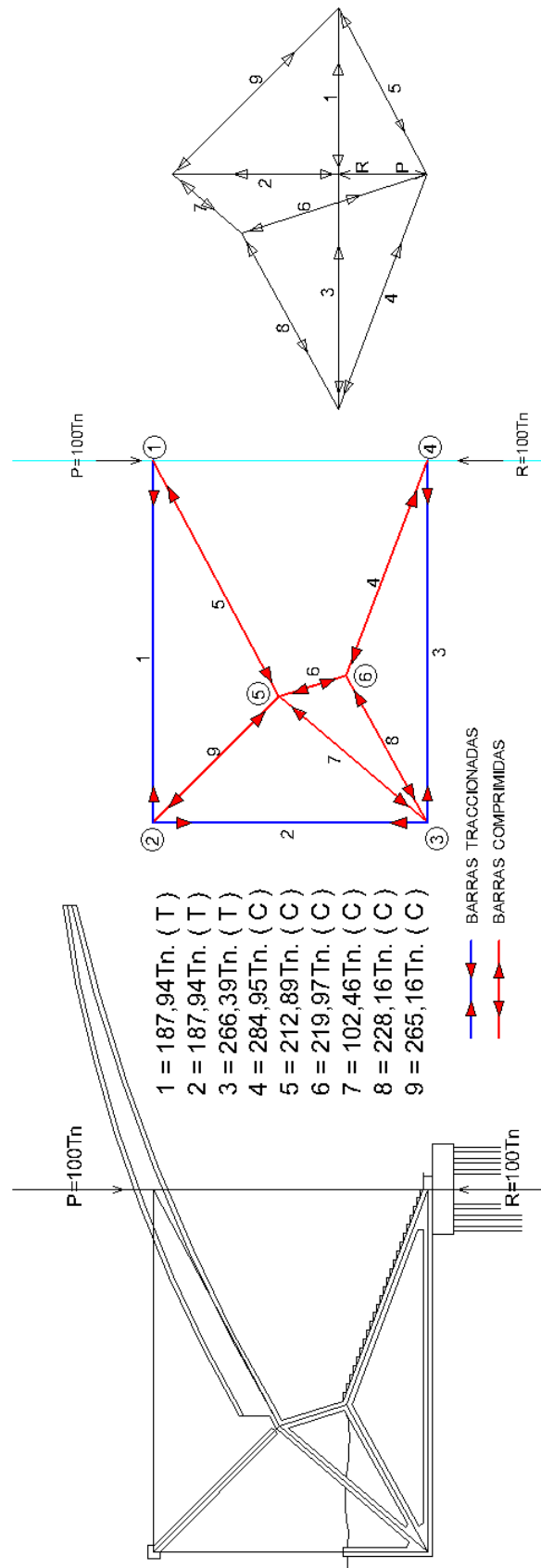
*“Construir correctamente es la esencia de la arquitectura; la corrección estructural... es condición suficiente que engendra resultados estéticos satisfactorios, pues equivale a la veracidad funcional, técnica y económica”*

Fig. 6.62. Fotografías de una maqueta y de la realidad en construcción y construida de la grada y la marquesina del Estadio Comunale di Firenze, en las que se muestra la “idea” de la estructura sustentante de la marquesina integrada con la estructura del graderío. La frase es de su libro *Costruire correttamente*. (Pier Luigi Nervi, *Structures*. F. W. Dodge Corporation: New York 1956).

Como arquitecto e ingeniero, dos en uno, Nervi estaba convencido de que los constructores debían resolver los problemas de cada construcción aplicando las leyes de la física, porque con éstas se podía regular el equilibrio, las fuerzas y la resistencia de los materiales; esa cualidad le permitió convertirse en uno de los constructores más innovadores del S. XX.<sup>40</sup>

Nuestra intención es estudiar mediante un escueto análisis grafostático, que mostramos en la Fig. 6.63. una simplificación de dicha estructura, descubriendo la esencia de las fuerzas exteriores que suponemos actúan en una porción del graderío y la marquesina y cómo es posible el equilibrio del sistema estructural conjunto. Hemos considerado una carga puntual de 100 Tn, que origina en las diferentes barras que componen nuestra estructura simplificada unos esfuerzos de tracciones y compresiones, que solicitan las secciones del hormigón armado de las piezas en que hemos descompuesto el sistema.

<sup>40</sup> Huxtable, Ada Louise. *Pier Luigi Nervi*. Editorial Bruguera: Barcelona 1961.



ANÁLISIS GRAFOSTÁTICO DE UNA ESTRUCTURA DE LA GRADA Y CUBIERTA SIMILAR A LA DEL ESTADIO COMUNALE DE FIRENZE CON EL CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS MEDIANTE EL DIAGRAMA DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS IDEADO POR LUIGI CREMONA

Fig. 6.63. Cálculo grafostático de una estructura similar a la del Estadio Comunale di Firenze de Pier Luigi Nervi. (Calculos grafostáticos y dibujos propios)



Debemos manifestar que las simplificaciones estructurales introducidas en el estudio realizado, se han hecho en aras de una mejor comprensión de la idea estructural. Así pues y a modo de ejemplo, la barra 6 de nuestro modelo no sigue la continuidad del graderío, para diferenciar mejor la parte estructural de cubierta de la de la grada. Sin embargo en el nudo (6), las barras 4, 6 y 9, podrían estar en una misma recta sin alteraciones de los resultados finales, que conducen a tres barras bien comprimidas.

En el estudio previo de nuestro modelo, nos parecía que cambiar la dirección de esta barra 6 ofrecía un mayor aspecto de brazo de palanca en el mecanismo estructural diseñado por Nervi.

Finalmente mostramos en la Fig. 6.64. el plano descriptivo de armado general de una sección transversal por la viga del voladizo. Destacamos los armados previstos para las tracciones.

En nuestra simplificación, la barra 3 horizontal estaría fuertemente traccionada, mientras que en armado de Nervi, no parece tener una especial significación esta tracción, quizás por la continuidad estructural, que nuestro modelo no contempla, mientras la estructura real sigue teniendo pilares más abajo del nudo inferior derecho.

En la primera barra vertical derecha, se aprecian numerosas patillas de anclaje, como síntoma inequívoco de estar calculada a una importante tracción, que confirma el resultado de nuestro análisis intuitivo.

Lo mismo sucede con el armado de la parte superior de la viga del voladizo, aunque el conocimiento del cálculo del hormigón armado ya prevé que en cualquier caso una viga en voladizo tendrá las fibras superiores traccionadas, a lo que corresponde, como es natural, el armado del plano.

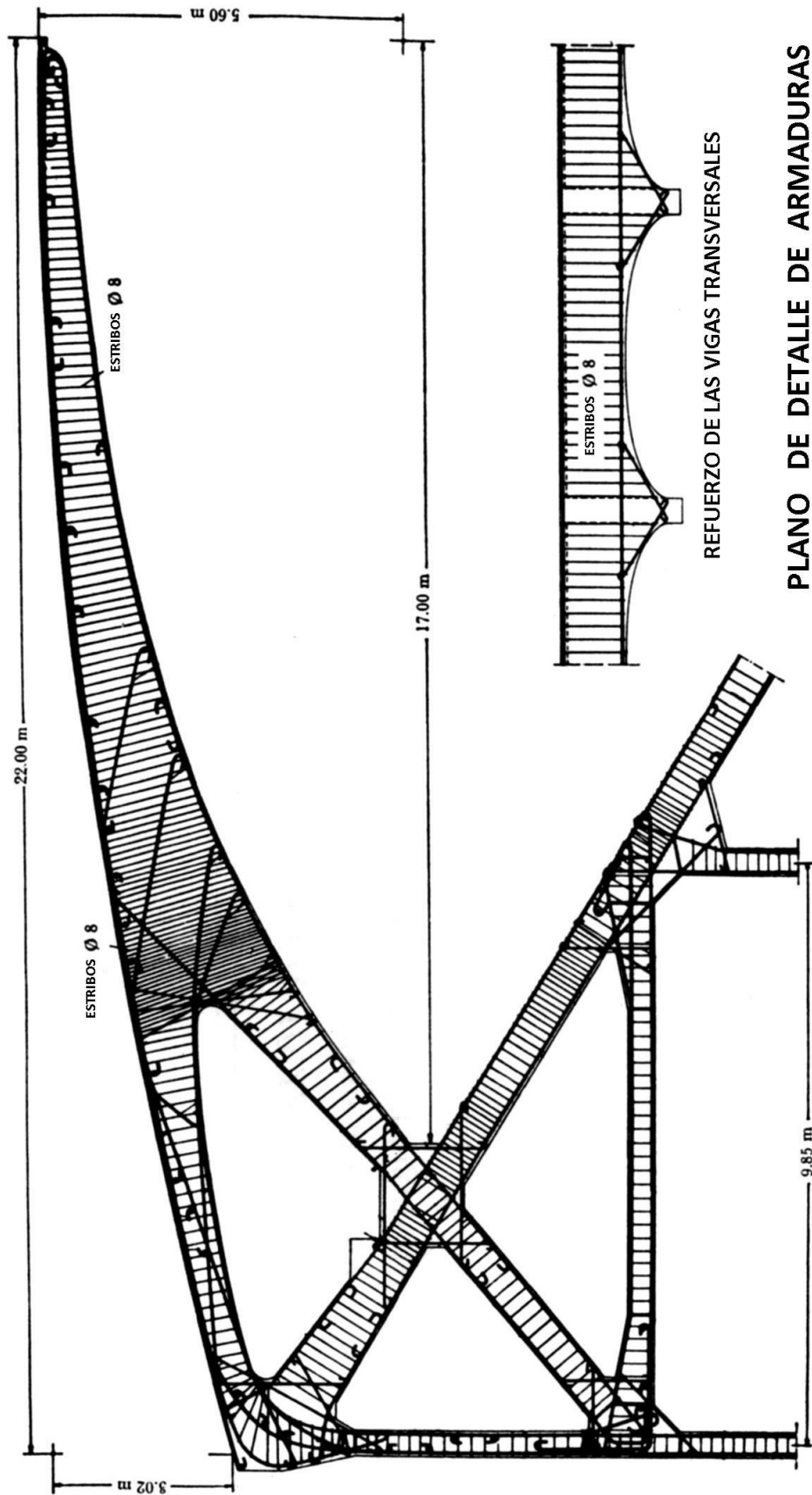


Fig. 6.64. Plano del armado general de la estructura del graderío y marquesina, mostrada por la sección transversal (longitudinal de las vigas del voladizo) del Estadio Comunal de Firenze. (Pier Luigi Nervi, *Structures*. F. W. Dodge Corporation: New York 1956).

### 6.4.3. EL PUENTE DEL ALAMILLO DE SEVILLA

Un cálculo similar es el que realizamos a continuación sobre la estructura del Puente del Alamillo, inaugurado con motivo de la Exposición universal de Sevilla del año 1992.



Fig. 6.65. Fotografías, nocturna y a vista de pájaro del Puente del Alamillo de Sevilla, del arquitecto Santiago Calatrava 1992.

El puente del Alamillo fue diseñado y construido entre 1989 y 1992 con motivo de la Expo '92 de Sevilla, por el arquitecto Santiago Calatrava.

El proyecto fue en realidad un "proyecto incompleto" de la Expo '92, ya que la idea inicial comprendía crear un puente idéntico inclinado de forma opuesta en el otro cauce del río Guadalquivir. De este proyecto inicial, sólo pudo erigirse uno, pues el presupuesto no hizo posible el segundo.

No es objeto de esta Tesis, profundizar en valores estéticos o de corrección arquitectónica de este importante objeto simbólico para la Sevilla de 1992. Por tanto nos limitaremos a su estudio desde el punto de vista mecánico y su funcionamiento estructural. Describiremos, pues, sus características geométricas y lo que conocemos de la idea de su creador en cuanto al equilibrio de las fuerzas intervinientes en su funcionamiento estructural.

Lo cierto es que a pesar de que el mástil se concibió como el elemento que equilibra el puente, tal y como se explica en el apartado "estructura" del proyecto original, parece ser que en realidad el núcleo hexagonal del tablero del puente resiste sin tirantes. La prueba está en que los cables que sustentan el tablero no se encuentran tensos en la parte superior de dicho mástil, al contrario de lo que cabría esperar por el concepto estructural que desarrolla.

Con la ejecución de ese proyecto, se pretendían los siguientes objetivos:

Salvar la dársena sin ningún tipo de apoyo intermedio, integrar la margen derecha en Sevilla y generar una gran superficie de agua sin ningún tipo de obstáculo, llegando con estas premisas a una luz de 200 m, que entra en el ámbito técnico de los puentes atirantados.

La creación de una conexión urbana y que mostrase el desarrollo tecnológico alcanzado y el estado de la técnica de la construcción en la España del 92, buscando sensaciones, el remate del mástil es en realidad un mirador al que se accede por una escalera que discurre por el interior del mástil. Se reservó espacio para la maquinaria de un futuro ascensor panorámico exterior, construyéndose las puertas de conexión entre ascensor y escalera interior. Existe una zona peatonal, en el centro del tablero, separada del área de circulación de vehículos.

Su integración en el paisaje enriquece el entorno urbano del lugar, realizándose a base de unas formas totalmente ligeras que evitan en todo momento la idea de puente como elemento estático, destacando por su impresión de movimiento y por su avanzado diseño, combinación de tecnología, ingeniería y arte escultórico.



Fig. 6.66. Fotografías del Puente del Alamillo de Sevilla 1992. Santiago Calatrava

Como tipo estructural, se trata de un puente atirantado de pilón contrapeso, en el lenguaje de los especialistas.

El brazo equilibrante alcanza 140 metros de altura con una inclinación de 58º, del que parten, a distintas alturas, parejas de tirantes paralelos que sustentan el tablero (de 300 m. de longitud, los más largos del mundo en su momento)

Para su construcción se empleó una de las mayores grúas de tierra existentes en aquel entonces, capaz de levantar 200 Tn a 150 mts de altura.

Entre el mástil y el tablero se produce un equilibrio de fuerzas, que se transmite por los 13 pares de tirantes. Su principio de funcionamiento es el de una balanza, cuyo fulcro se encuentra en la articulación, que hemos demostrado que se encuentra en el Eje central del sistema de vectores que representan los pesos parciales del tablero y el mástil. El equilibrio se obtiene mediante el desplome del mástil, en un ángulo de 58º sobre la horizontal. Es considerado el primer puente sustentado por cables, en el que la plataforma se equilibra con el peso de la torre inclinada hacia atrás.

Tiene una longitud total de 250 metros y está construido con placas de acero hexagonales, reforzado en su interior por hormigón armado.

El tablero está diseñado con una estructura metálica, y se compone de un cajón central y de forma hexagonal donde se encastran los anclajes activos de los tirantes. De este cajón parten unas costillas metálicas de 4 metros, a ambos lados, sobre las que se apoya una losa de hormigón que forma el tablero por donde debe circular el tráfico rodado, son dos calzadas de tres carriles cada una.

Mástil y tablero se apoyan en un pedestal macizo de hormigón, cimentado mediante 54 pilotes de 2 m de diámetro y 48 m de profundidad.

El apoyo se realiza a través de las correspondientes transiciones entre el hormigón armado y el metal. Nosotros consideramos en nuestra simplificación, que existe una articulación en este punto.

Los cables están formados por 60 torones de 0'6 pulgadas de diámetro cada uno, excepto la última pareja, de 291 m de longitud, que constan de 45 torones. Los torones van protegidos por resina epoxi, y el cable está envuelto por una vaina de polietileno de alta densidad inyectado en las zonas de anclaje.

El anclaje activo tiene lugar en la parte inferior, en los laterales del cajón central del tablero. El pasivo se sitúa en la cara en desplome del mástil, que compensa con su propio peso los esfuerzos de flexión originados por los tirantes, ya que no hay cables de retenida.

Otros puentes con el sistema de pilón y tirantes tienen en cuenta el efecto de acciones laterales, equilibrando con planos de tirantes, que convergiendo en la arista del mástil, otorgan al conjunto una mayor estabilidad, al menos de forma intuitiva, como en el caso del Puente sobre el Tajo de Talavera de la Reina cuyos esquemas observamos en la Fig. 6.66. y 6.67.

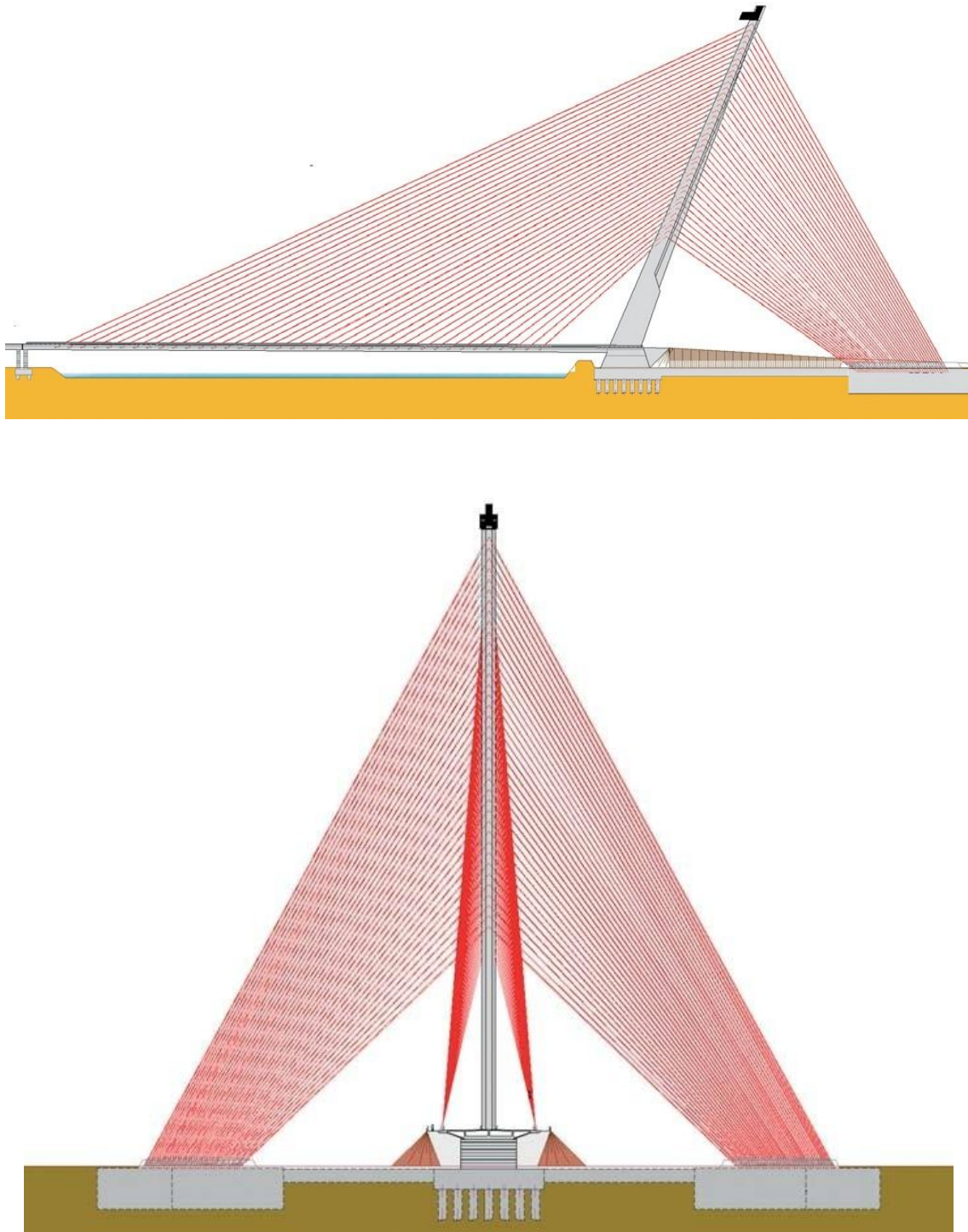


Fig. 6.67. Esquemas del Puente atirantado sobre el Tajo en Talavera de la Reina. Estudio AIA, Arquitectos e Ingenieros asociados, S.A. 2007-2011. (Hormigón y acero, Volumen 63, nº 263, 7-47, enero-marzo 2012)



Fig. 6.68. del Puente atirantado sobre el Tajo en Talavera de la Reina. Estudio AIA, Arquitectos e Ingenieros asociados, S.A. 2007-2011. (Hormigón y acero, Volumen 63, nº 263, 7-47, enero-marzo 2012) (Foto Carlos Hormigos)



No es este el caso del Alamillo, que puede considerarse pionero en el modelo de contrapesar a modo de balanza, las cargas del tablero con las del mástil, sin consideraciones al respecto de estos esfuerzos de viento u otras posibles acciones laterales.

Al estar concebido el equilibrio, en los modelos como el de Talavera, mediante unas fuerzas contenidas en planos no coincidentes con el de las cargas de tablero y pilón, sería aquí necesario proyectar sobre el plano central las fuerzas de los tirantes esviados, cuyas componentes verticales y horizontales, ahora duplicadas, habría que considerar para el equilibrio global.

Nuestro esquema simplificado sobre el Alamillo sólo considera acciones en el plano del eje del puente, perpendicular al tablero, tal como parece haber sido concebido.

Comprobamos el equilibrio de cada nudo hipotético, simplemente cerrando el diagrama triangular que formamos con Carga en el tablero  $Q_i$ , Tracción en los cables y Compresión en el tablero. Y por otra parte, el diagrama triangular también, Carga  $P_{14-i}$  del pilón, Compresión en el pilón y Tracción en los cables, coincidiendo ésta última, naturalmente para cada pareja de cargas  $Q_1-P_{13}$ ,  $Q_2-P_{12}, \dots, Q_{13}-P_1$ . Figs. 6.68.,69 y 70.

Hemos considerado conveniente a efectos de nuestro sentido intuitivo de comprender el funcionamiento de la estructura, disponer los diagramas de Cremona, casando la tracción en los cables, que participa a un tiempo de ambos diagramas.

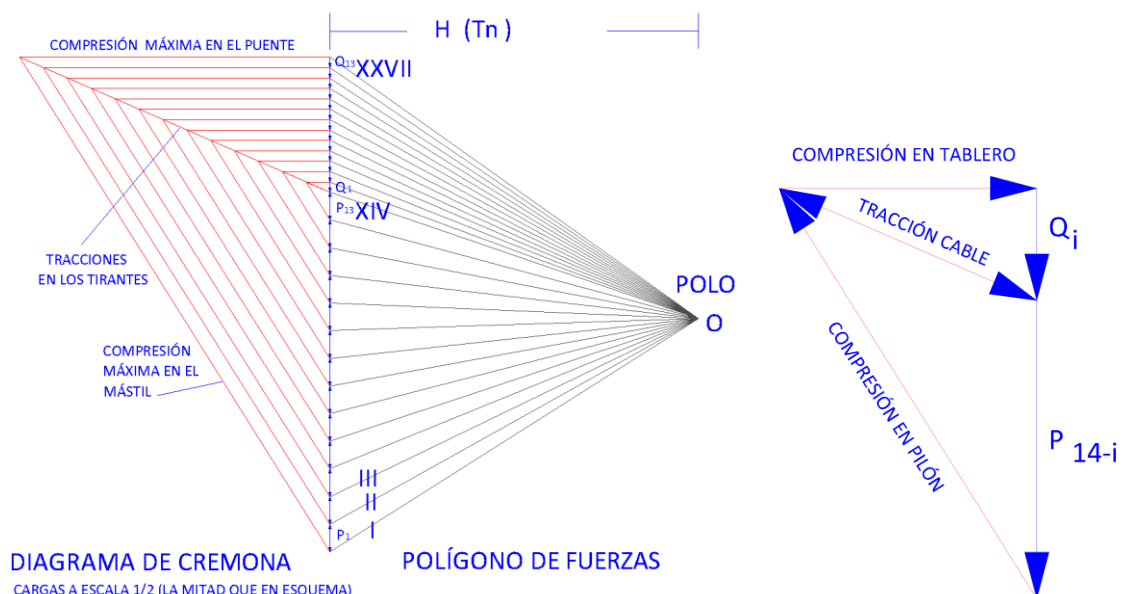


Fig. 6.69. Polígono de fuerzas y diagramas de Cremona para el cálculo de los esfuerzos inducidos en el Tablero, Pilón y Cables del Puente del Alamillo de Sevilla. (Dibujos y Cálculos propios)

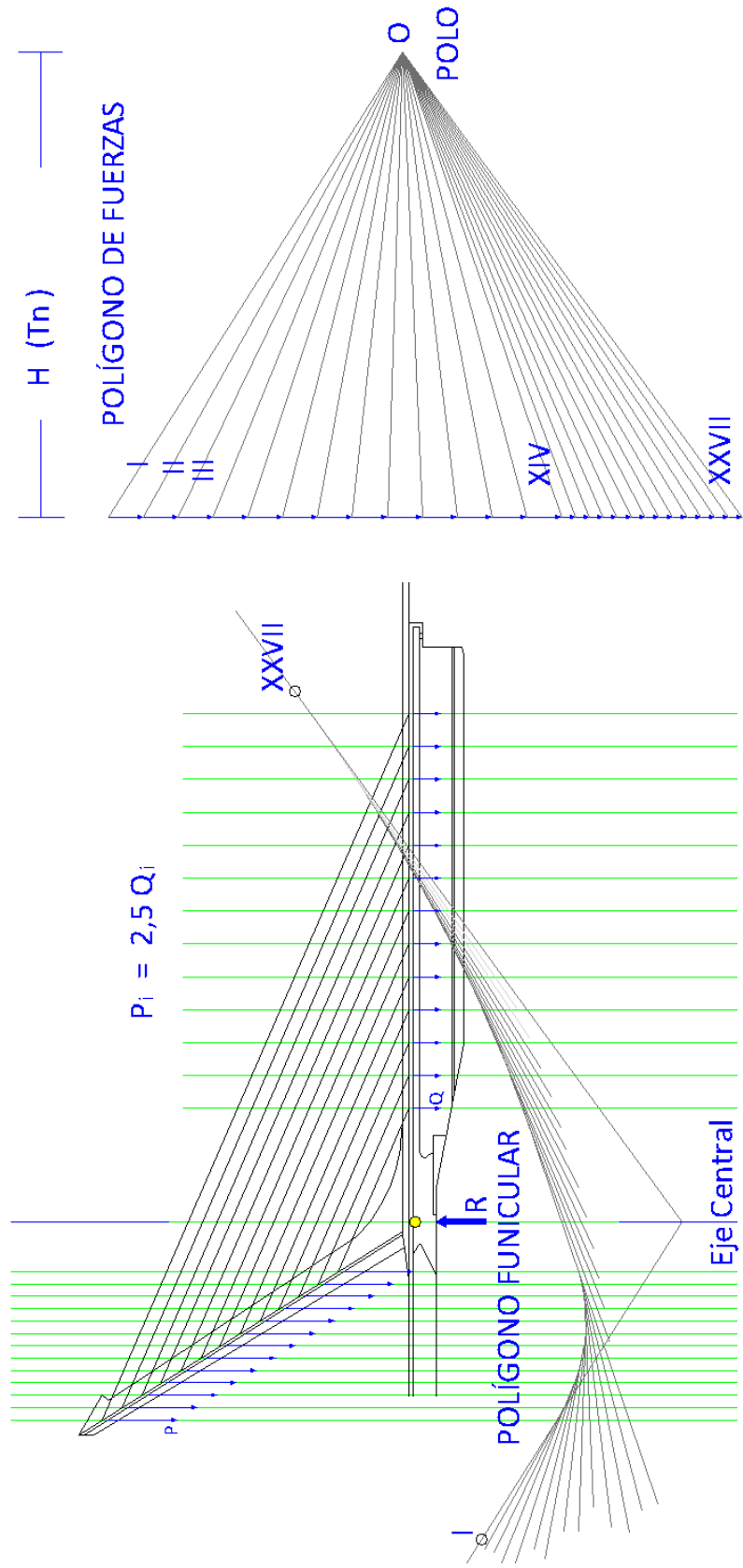


Fig. 6.70. Polígono de fuerzas y polígono funicular correspondiente para el cálculo del Eje Central del sistema de fuerzas y determinación de la Resultante. Puente del Alamillo de Sevilla. Santiago Calatrava. (Dibujos y cálculos propios)

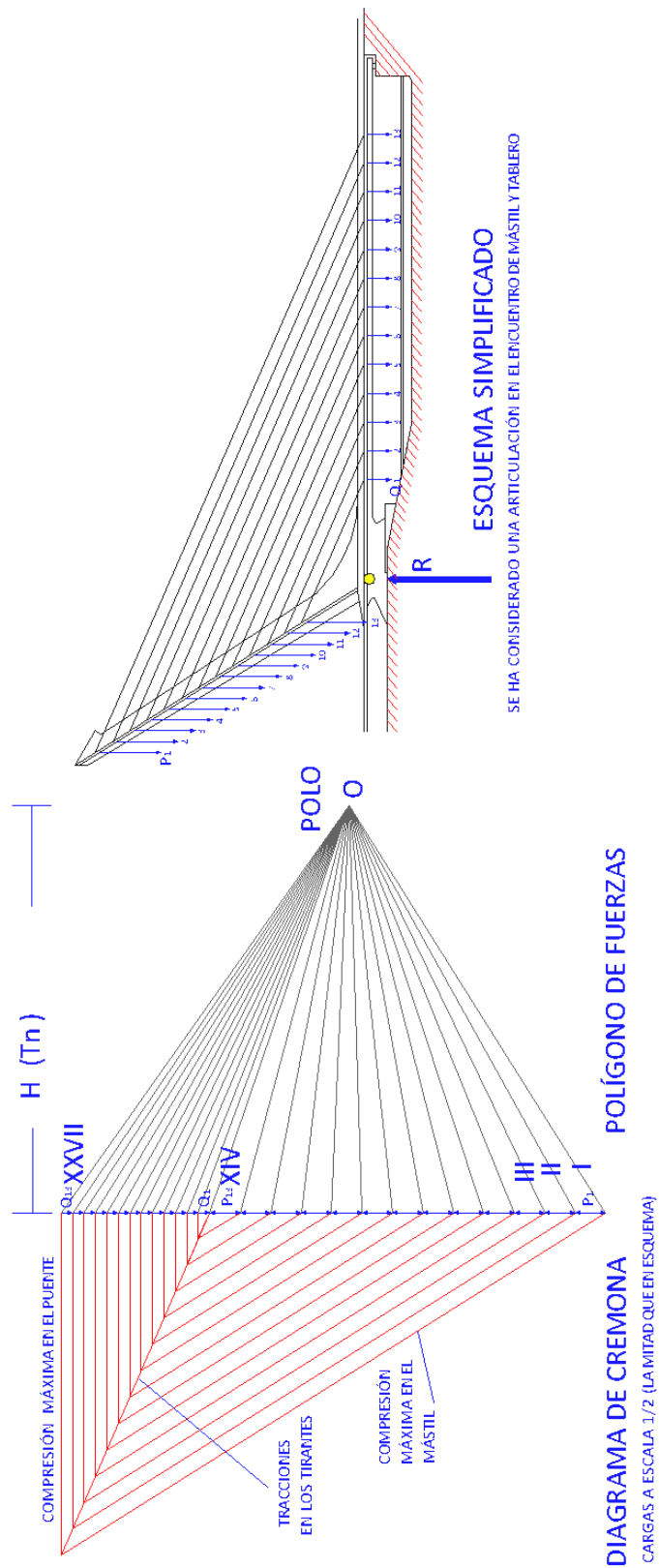


Fig. 6.71. Esquema simplificado, Polígono de fuerzas y diagramas de Cremona asociados, para el cálculo de los esfuerzos inducidos en el Tablero, el Pilón y los Tirantes. Puente del Alamillo de Sevilla.S. Calatrava (Dibujos y cálculos propios)

El trazado del polígono de fuerzas y su funicular correspondiente, nos da la información de la posición del Eje Central del sistema de fuerzas actuante, pesos parciales de pilón y tablero, que será, como sabemos la dirección de la Resultante, punto dónde disponemos el elemento de transmisión de cargas al terreno, en este caso el gran encepado cuyos 54 pilotes de 2m de diámetro se hincaron a una profundidad de casi 50m.

En nuestro esquema simplificado, hemos dispuesto una articulación en la convergencia de los esfuerzos horizontales del tablero, los del mástil y la resultante, articulación que permite los cálculos sencillos de diagramas triangulares.

Aunque sabemos que no es esta la realidad constructiva, la simplificación es muy gratificante a efectos de consideraciones generales sobre qué tensión debe soportar cada pareja de tendones, que van creciendo, a medida que evaluamos más longitud de tablero del puente y más longitud de pilón. Lo mismo sucede con la aptitud a compresión del cajón hexagonal que constituye el núcleo de la parte inferior del tablero y otro tanto con la capacidad a compresión del pilón.

Nuestro diagrama de Cremona, determina, siquiera aproximadamente, datos para un predimensionado de cada uno de estos tres elementos constitutivos de la estructura y nos hubiera permitido, en caso del control del diseño original modificaciones sobre los parámetros intervinientes. Por ejemplo la inclinación del pilón, para aumentar o disminuir las tensiones en los cables o el calibre de éstos. Si la sección transversal del pilón puede ser hueca o necesita más masa y debe ser mixta hormigón acero, etc.

Éste es en esencia nuestro objetivo con la utilización de la Estática Gráfica, que como estamos demostrando nos aporta información considerable, con esquemas estructuralmente sencillos y no demasiados medios auxiliares.

En sus orígenes, material simple de dibujo. En la actualidad material electrónico de dibujo asistido, e incluso para algunos nostálgicos, unos sencillos croquis a escala son también una buena fuente de información.

Respecto a las conclusiones extraíbles de nuestros análisis, no debemos olvidar que existen visiones globales sobre los sistemas estructurales con la suficiente perspectiva como para no dejar que éste o cualquier otro método nos haga perder la vista del comportamiento esperado para la estructura en cuestión.

En este sentido, revisando análisis y comentarios sobre algunos sistemas estructurales, hemos parado en un libro que es un compendio de textos,

suponemos que pensados en su mayoría como apuntes dispersos de asignaturas de estructuras de la Universidad Politécnica de Madrid, que han sido recogidos en una única publicación.<sup>41</sup> Los textos son a la vez amenos y rigurosos, y casi siempre desconcertantes. En el apartado sobre estructuras "perversas" se analizan diseños que funcionan de manera incorrecta y entre estos destaca, a modo anecdótico, lo que parece una alusión al puente del Alamillo (Sevilla) de Santiago Calatrava y que él soluciona simplemente mediante una viga biapoyada en ambas orillas. Lo que De Miguel parece mostrar es el comportamiento del sistema, cuando flecha el tablero del puente, provocando con el descenso del centro del vano y elevación del extremo derecho, el destensado de los cables extremos (barras casi abscisas, en su dibujo) y la casi ruptura de los cables del centro, por alargamiento excesivo (casi rompe en su dibujo)

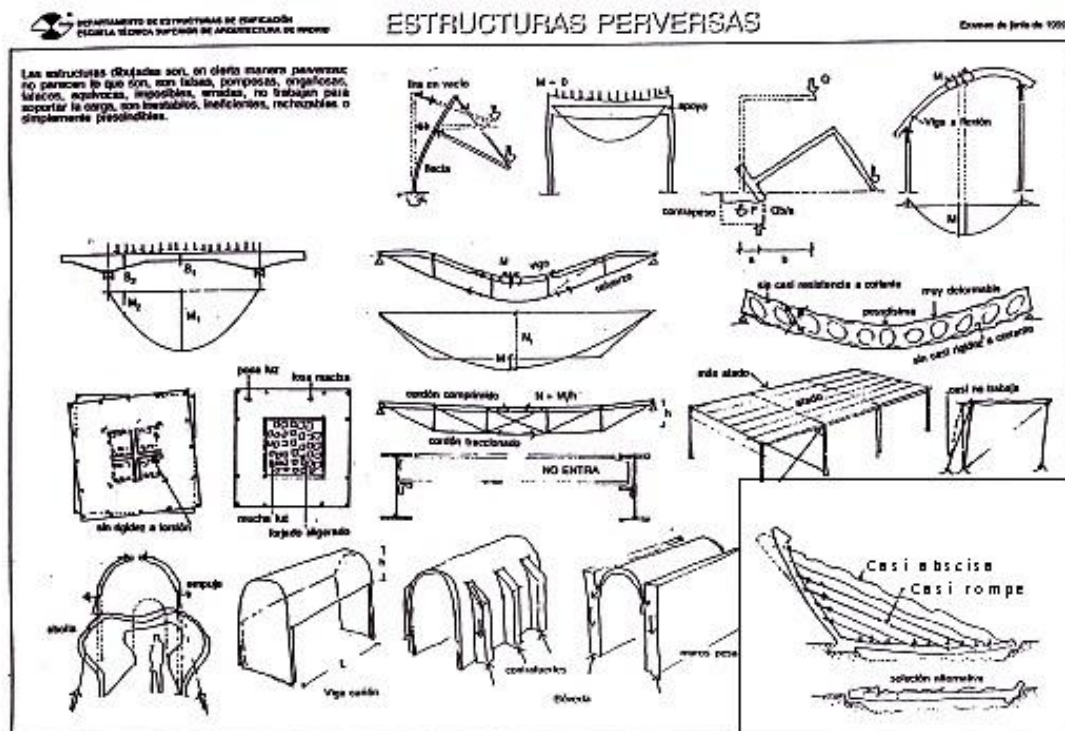


Fig. 6.72. Lámina de "Estructuras perversas" del profesor De Miguel recogidas en *Estructuras dos*. En ella se muestra una reflexión al respecto del "no esperado" comportamiento del Puente del Alamillo, con la flexión del tablero.

Añadimos, solamente una mínima reflexión, a la que como arquitectos, no podemos sustraernos:

La forma, la proporción, la escala y el valor estético como escultura urbana del Puente del Alamillo, es irreplicable. Su ejecución reiterada, con más o menos modificaciones, como productos en serie, es, a nuestro juicio, un error.

<sup>41</sup> De Miguel Rodríguez, José Luis. *Estructuras dos*. "Estructuras perversas" Departamento de Estructuras de Edificación. ETSAM: Madrid 2005.

#### 6.4.4. SALGINATOBEL Y MAGAZZINI GENNERALI EN CHIASSO DE ROBERT MAILLART

El último de los análisis que presentamos en este apartado es el de la utilización de la Grafostática por uno de los genios de las estructuras. En particular del hormigón armado.

Se trata del Ingeniero suizo, nacido en Berna en 1872 y muerto en Ginebra en 1940, Robert Maillart.

Maillart estudió en El Politécnico de Zürich (ETH), donde se licenció en 1894 consiguiendo una de las mejores preparaciones para el conocimiento estructural que el mundo de las enseñanzas técnicas era capaz de impartir en su época.<sup>42</sup> Allí enseñó Karl Culmann y años después Karl Wilhelm Ritter, (1847-1906) del que Maillart llegó a ser alumno y cuyas enseñanzas marcaron su carrera profesional.<sup>43</sup> Recordemos la famosa polémica entre los conceptos defendidos por Ritter de “métodos técnicos” frente a los “métodos científicos” defendidos por los alemanes, como el significado caso de la importancia que Ritter otorga a las pruebas de carga sobre puentes pequeños, en polémica con el profesor alemán Franz Engeser en 1892.<sup>44</sup>

Los puentes de Robert Maillart constituyen una interesante página de la historia de la construcción en hormigón armado. Su estudio bien merece un trabajo completo de investigación, por sus innovadores conceptos estructurales.

Aunque tal estudio se apartaría de los objetivos de nuestra Tesis, sí hacemos una referencia en especial al de Sanginatobel de 1930,<sup>45</sup> Fig. 6.73. interesándonos particularmente el original diseño de la estructura que Maillart realiza, siete años antes, en 1923 para los Almacenes Generales de Chiasso. Fig. 6.74.

---

<sup>42</sup> Durante los primeros años de carrea de Maillart, el hormigón armado inicia su difusión en el mundo occidental, de la mano de tres pioneros: Joseph Monier (1823-1906) un jardinero e inventor francés, Francois Hennebique (1843- 1921) empresario y constructor francés y el ingeniero alemán G.A. Wayss (1851-1917)<sup>43</sup>

<sup>43</sup> Billington, D. *Wilhelm Ritter: Teacher of Maillart and Amman*. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Mai 1980, pp. 1103-16. New York 1980.

<sup>44</sup> Simonnet, Cyrille. *Le béton. Histoire d'un matériau. Économie, Technique, architecture*. Éd. Parenthèses: Paris 2005.

<sup>45</sup> El Puente Sanginatobel en Schiers, Suiza, está reconocido por la ASCE (American Society of Civil Engineers) como una de las treinta mejores estructuras del mundo.<sup>46</sup>

<sup>46</sup> Billington, David P. *The Art of Structural Design: A Swiss Legacy*. Princeton University Art Museum. Princeton, 2003.



Fig. 6.73. Fotografías del Puente de Sanginotobel en Schiers, Suiza. Robert Maillart 1930.



Fig. 6.74. Vista de los Pórticos exteriores de los Almacenes Generales de Chiasso. Robert Maillart 1923.

En el año 1928, el Cantón suizo de Graubünden, decidió construir un puente sobre de una garganta entre los Alpes, que conectara el poblado de Schuders con la ciudad de valle Schiers. Un puente sobre el arroyo Salginatobel. La licitación, convocada para el 15-09-1928 elegiría al proyecto de menor coste.

Robert Maillart resolvió este nuevo reto a la gravedad con un puente revolucionario, por su forma, sólo posible, construido en hormigón armado, con un arco de 90 metros y una flecha de 13 metros. Maillart proyecta una de las formas más efectivas, conocidas, en el mecanismo estructural de control de las fuerzas y en el ahorro de material que consigue su eficacia estructural.<sup>47</sup>

La Fig. 6.75. muestra el despiece de armaduras y las secciones en cajón diseñadas por Maillart.

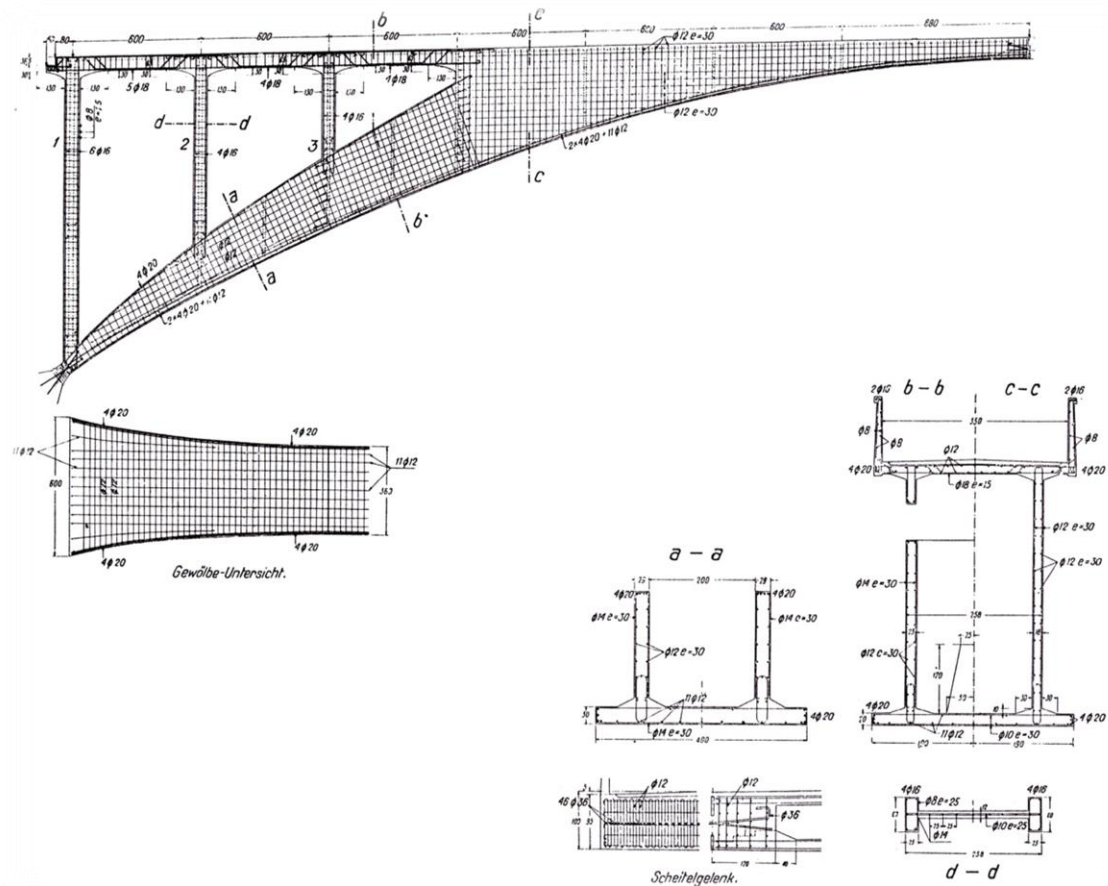


Fig. 6.75. Puente Salginatobel en Schiers, Suiza. Robert Maillart. 1930. Despiece de armaduras y detalle de las distintas secciones de hormigón. Planos. Bibliothek-ETH, Zürich.

<sup>47</sup> Sobre los principios estructurales y el uso del H. A de Maillart, es interesante ver (Giedion, 2009: 447-458). Giedion, Sigfried. *Espacio, tiempo y arquitectura*. Reverté: Barcelona 2009.



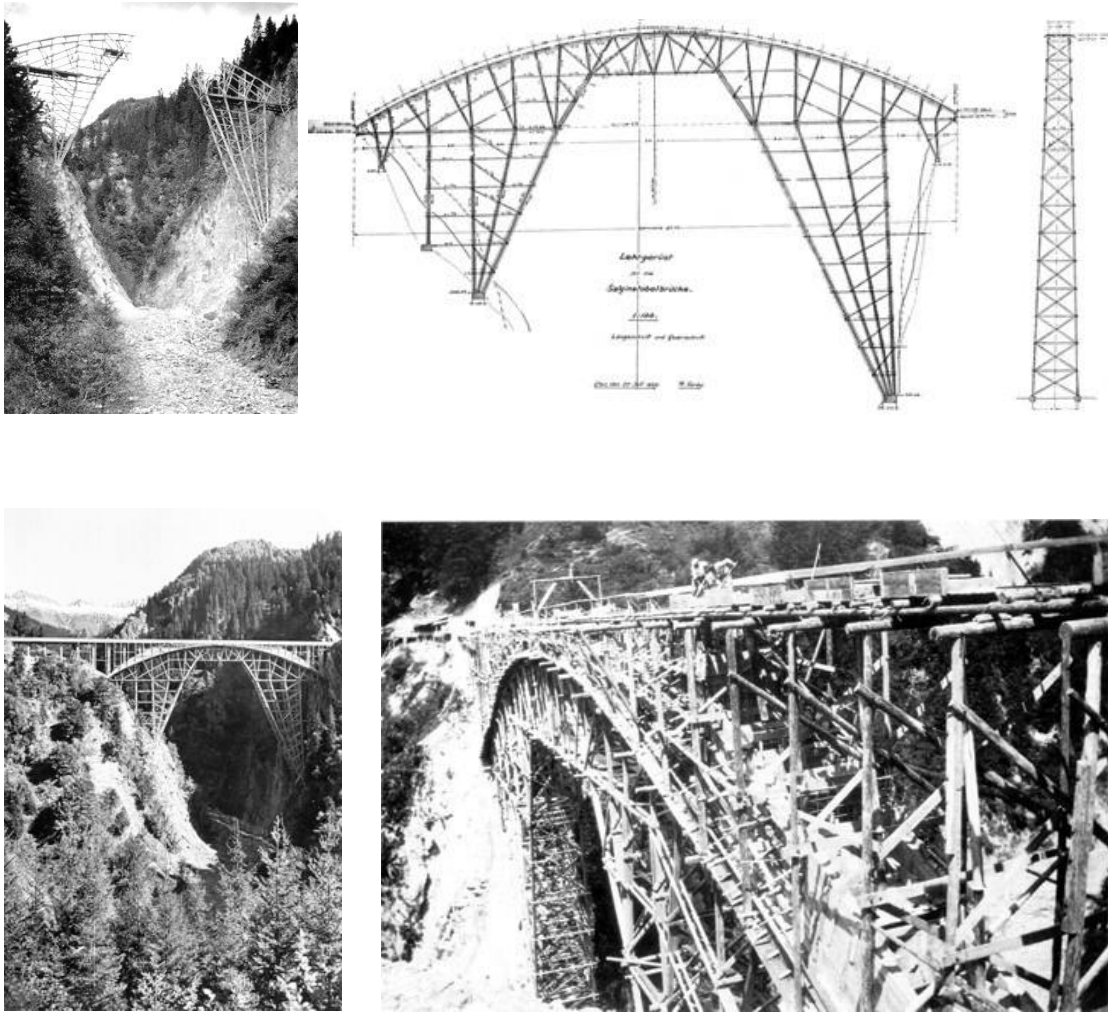


Fig. 6.76. Fotografía del montaje de la estructura del andamio para el encofrado. Plano del andamiaje y distintas fases del hormigonado. Fotos Bibliothek-ETH, Zürich.

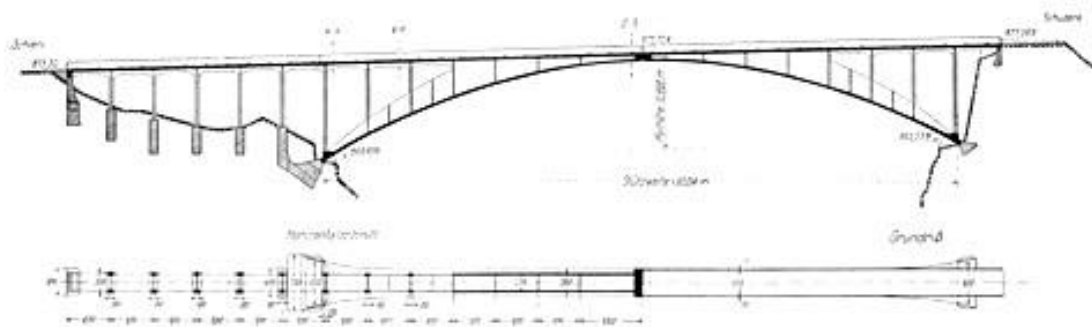


Fig. 6.77. Plano donde se aprecian los elementos de cimentación de los pilares de apoyo de la zona izquierda del tablero.

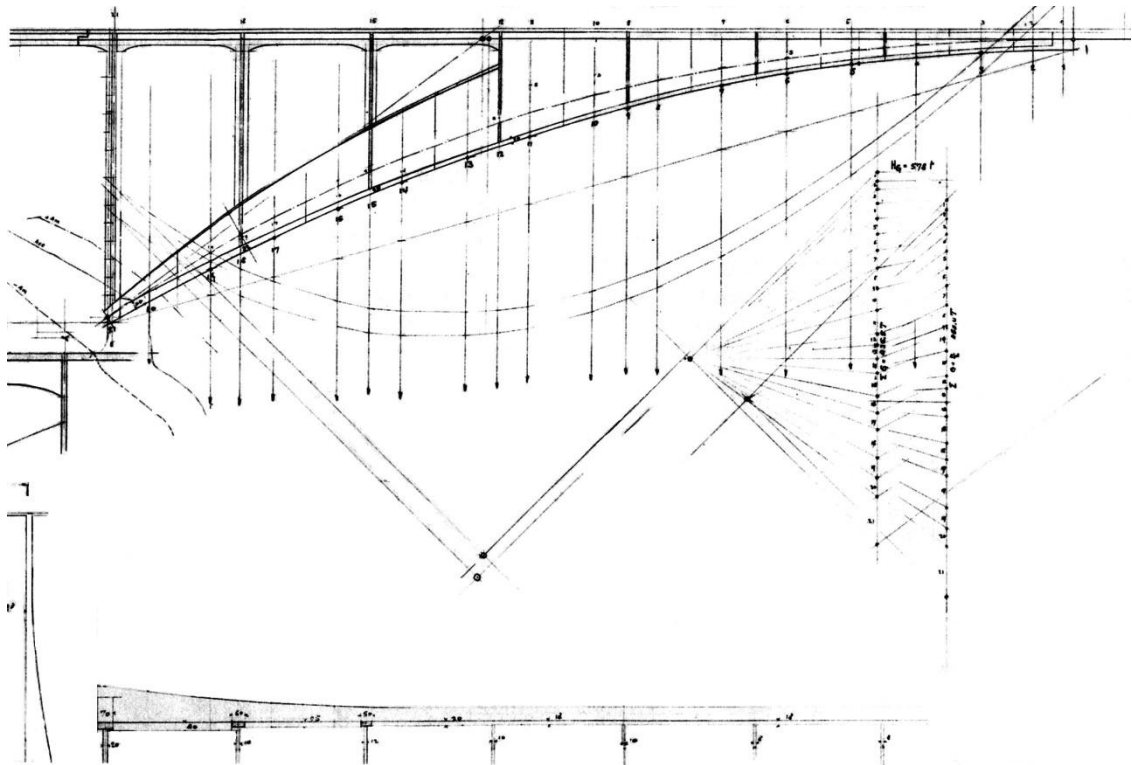


Fig. 6.78. Detalle de los cálculos del polígono funicular y la inversión del mismo para la optimización de la construcción del arco del puente. Bibliothek-ETH, Zürich.

Que al menos los predimensionados de este puente fueron realizados con los procedimientos de la Estática Gráfica, no ofrece duda pues disponemos de los planos que mostramos en la Fig. 6.78. y 6.81. Sin embargo sabemos que el concepto estructural que Maillart defiende, frente a los complicados métodos analíticos, se basa en hacer trabajar el arco prácticamente a compresión como una estructura de la época romana.

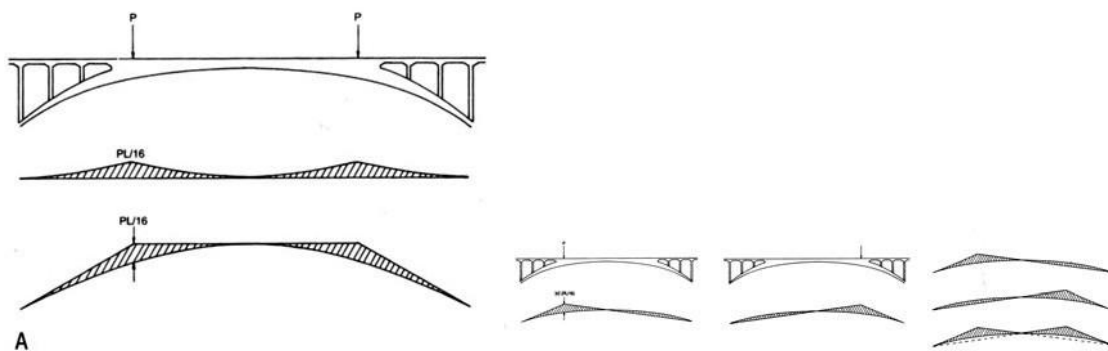


Fig. 6.79. Diagrama de momentos generados por dos cargas simétricas y la corrección necesaria por las cargas alternadas.

De hecho el cálculo grafostático precisamente proporciona el funicular, con la línea de empujes, y su inversión genera la forma final que se le da al arco y las tres

articulaciones proporcionan un sencillo cálculo que contrastaba con las tremendas dificultades analíticas de otros diseñadores.

La idea de Maillart es que conectando toda la placa horizontal, mucho más rígida, con el arco, en el trabajo a flexión del conjunto arco placa, el reparto de rigideces hace que el arco se vea muy beneficiado, precisando mínimos espesores. Por ejemplo, en el Schwandbach, el momento asignado al arco es sólo del 5% del total con lo que su espesor es muy pequeño.<sup>48</sup>



Fig. 6.80. Imágenes del puente Schwandbach, de trazado curvo. Especialmente significativo es el mínimo espesor tanto del arco como de los montantes.

Realmente, el arco es poligonal y abarca 37 metros, con paredes muy delgadas, tanto en el arco de unos 20 cm, como los montantes, de 17cm. La anchura del arco es variable, con montantes trapezoidales, adaptando la forma a los requerimientos del tráfico de forma que se neutralicen las fuerzas centrípetas que la curva genera.

En palabras de uno de los más conocidos historiadores de la obra de Maillart, David P. Billington:

*"Integration of form here is as fully developed as in any concrete bridge ... All parts exhibit their true thicknesses, with nothing hidden for effect ... With the two mature masterpieces at Töss and Schwandbach, Maillart reached a climax in his building of deck-stiffened arch bridge."*

Que manifiestan cómo en este puente, cada pieza muestra exactamente su espesor sin que aparezcan magnitudes efectistas, llegando con éste Schwandbach y el de Töss, al clímax de sus sistemas de puentes con arco.<sup>49</sup>

<sup>48</sup> Giovannardi, Fausto. *Robert Maillart e l'emancipazione del C.A.* Ed. Fausto Giovannardi. [www.giovannardierontini.it](http://www.giovannardierontini.it)

<sup>49</sup> Billington, David P. *Robert Maillart and the Art of Reinforced Concrete*, The MIT Press: Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts 1990.

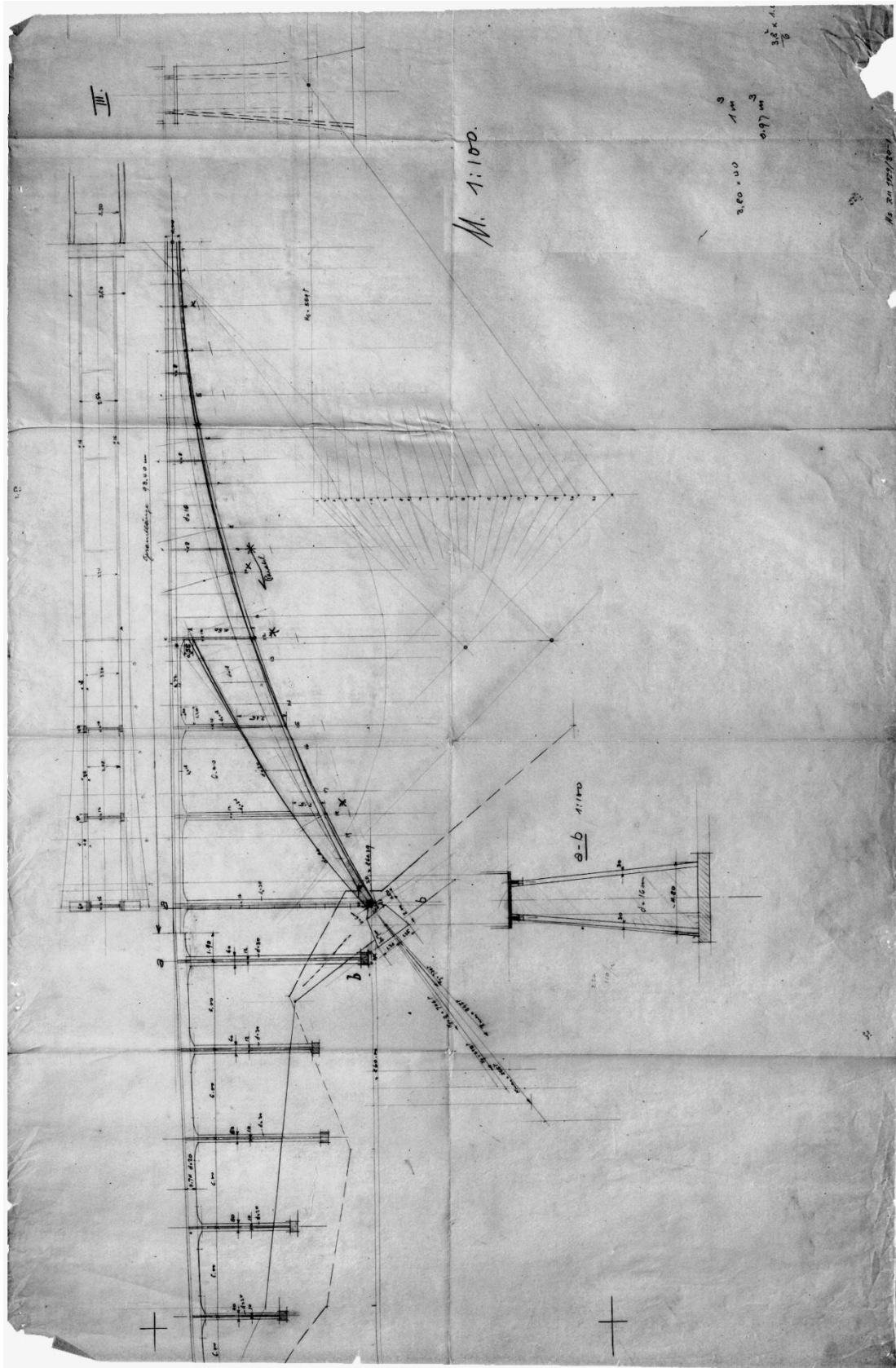


Fig. 6.81. Reproducción del plano original de Maillart, con el cálculo grafostático y anotaciones sobre las dimensiones de los distintos elementos del puente de Salginatobel. Colección sobre Maillart del Archivo del ETH de Zürich.

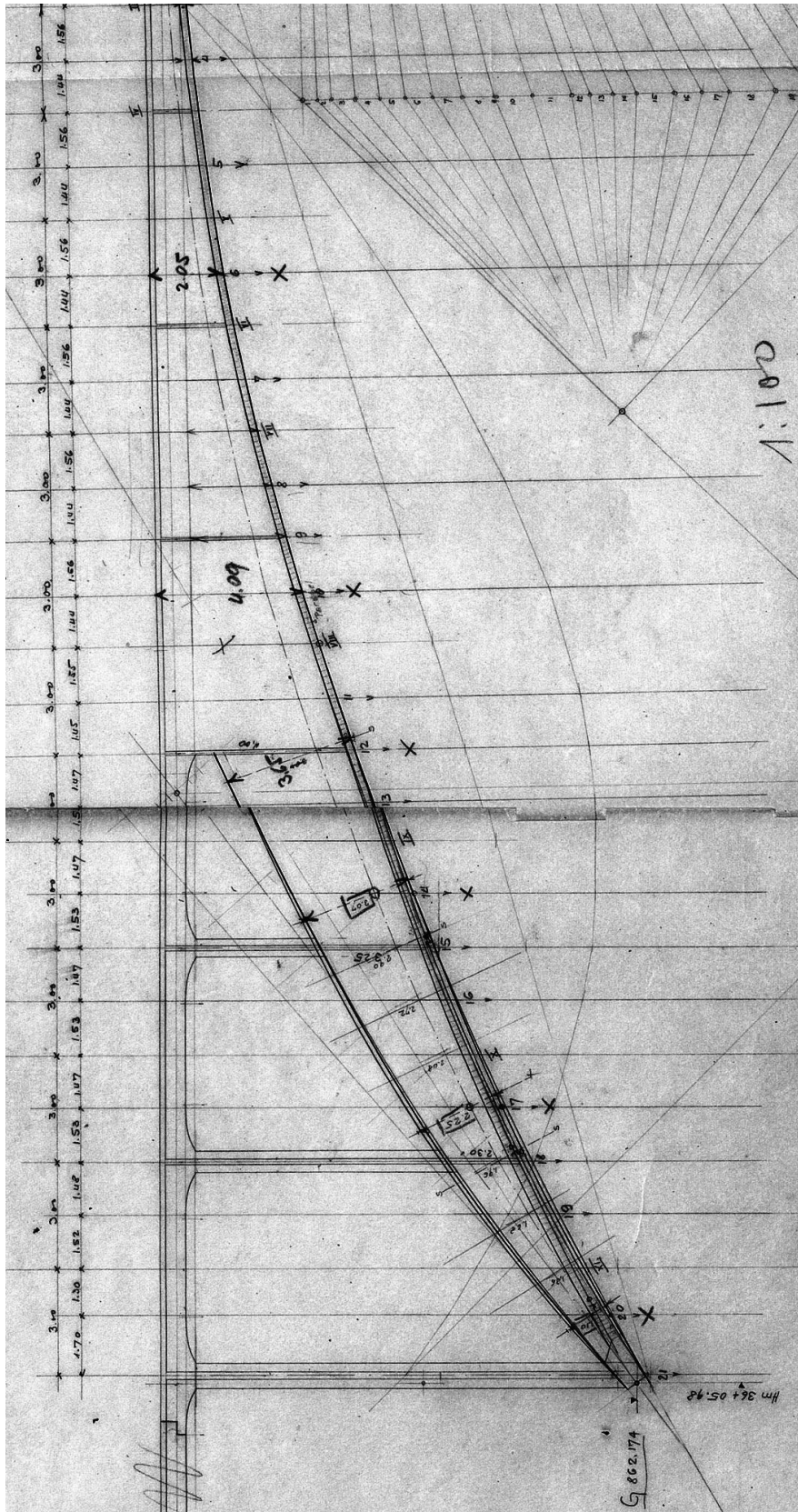


Fig. 6.82. Reproducción de otro de los planos originales de Maillart. Colección sobre Maillart del Archivo del ETH de Zürich.

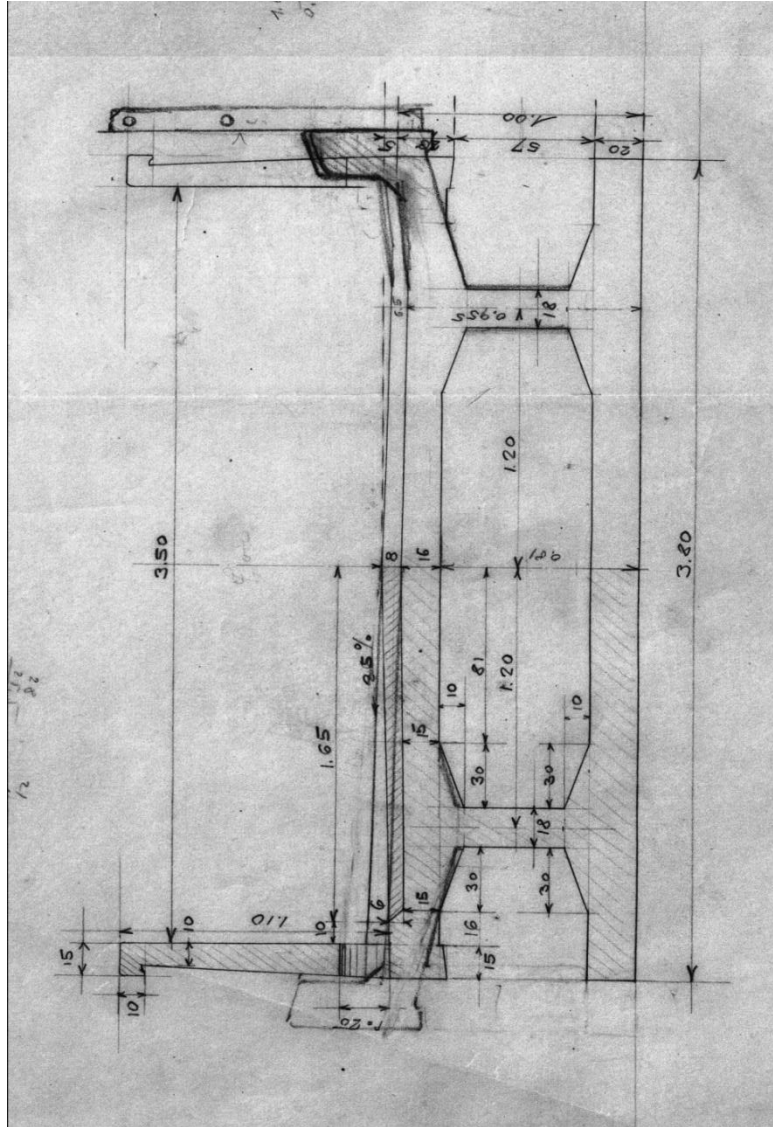


Fig. 6.83. Reproducción de uno de los planos originales de Maillart con una de las secciones transversales del tablero del puente de Salginatobel solidaria con el arco. Destacan las dimensiones de los elementos de H.A. (20 cm del arco, 16 cm para el tablero, 18 cm los nervios de conexión, etc.) Colección sobre Maillart del Archivo del ETH de Zürich.

Finalizamos la exposición de la utilización de la Estática Gráfica por Robert Maillart en la concepción de sus puentes con arco, en particular el de Salginatobel, mostrando tres de sus planos originales, perteneciente a la Colección sobre la obra de Maillart del Instituto Politécnico de Zürich (ETH).<sup>50</sup>

<sup>50</sup> Zastavni, Denis. *What Was Truly Innovative about Maillart's Designs Using Reinforced Concrete?* Proceedings of the International Congress on Construction History. Cottbus, May 2009.

Zastavni, Denis. *La Conception Chez Robert Maillart: Morphogenèse des Structures Architecturales*. Unité d'architecture. Université catholique de Louvain: (UCL), Louvain-la-Neuve, Belgique 2007.

Uno de los más bonitos ejemplos, a nuestro juicio, de control del diseño estructural, efectuado mediante los conceptos grafostáticos, es el realizado por Maillart en los hangares exteriores de los Magazzini Gennerali de Chiasso.

La empresa, fundada en 1920, por iniciativa de un grupo de representantes economía local y del municipio de Chiasso, había obtenido la declaración de utilidad pública e interés general por el Gobierno del cantón Ticino y la concesión del Gobierno Federal suizo para la gestión de un punto Franco dotado de su oficina aduanera.

Adquiridos 35.000 m<sup>2</sup> de terrenos, fue construido el enlace ferroviario vinculado a la estación internacional de mercancías de Chiasso, encargando a Robert Maillart el proyecto para construir un importante almacén, que a día de hoy sigue considerándose como una obra maestra de arquitectura industrial que es visitado regularmente por profesionales y estudiantes de Arquitectura de todo el mundo.

A comienzos de 1923, está terminado el proyecto y comienza la obra de los famosos Almacenes de Chiasso, (Fig. 6.80) cuya estructura nos interesa especialmente, por mostrar, quizás como ninguna otra, los resultados de un análisis grafostático en la creación de las formas estructurales.

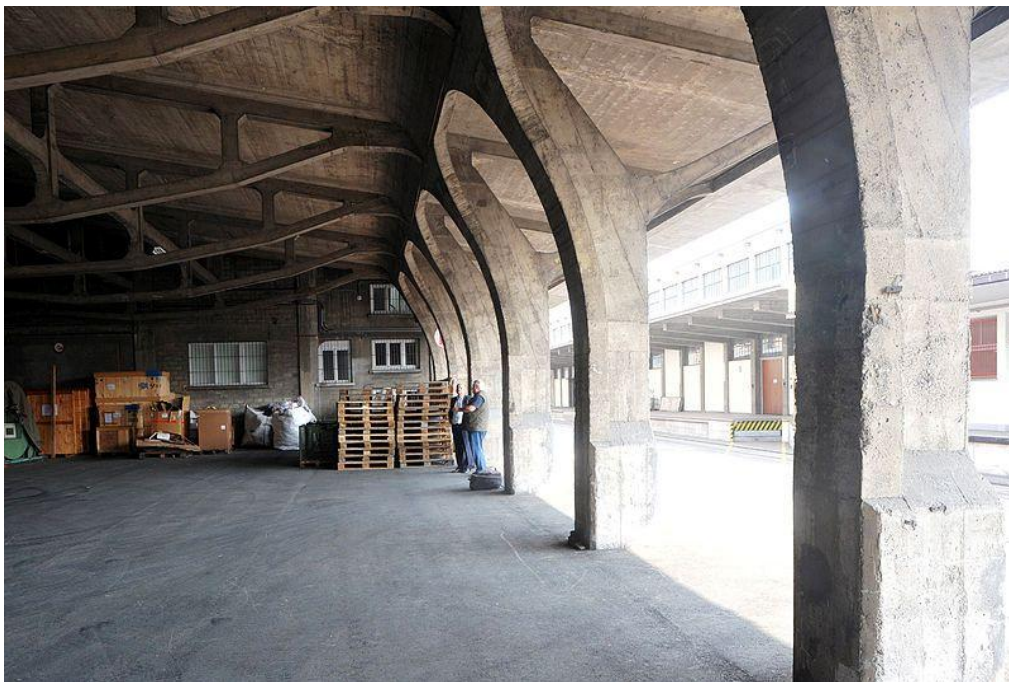


Fig. 6.84. fotografía del intradós de la cubierta y los pórticos de hormigón armado de la nave abierta de los Magazzini Gennerali de Chiasso de Robert Maillart. 1924. (Fot.: Chriusha. D.P.)

Está presente en el diseño estructural de los pórticos exteriores de esta obra, la idea de Maillart de unir solidariamente la cubierta, que aquí es una placa de hormigón armado y los soportes del mismo material (en los puentes será el tablero con el arco). La disposición de crujías es la habitual para naves, separando los pórticos 5 m y salvan una luz entre soportes de 25 m.



Fig. 6.85. Imagen de los pórticos de la nave abierta de almacenamiento exterior de los Almacenes Generales de Chiasso. (Fot. D.P.)

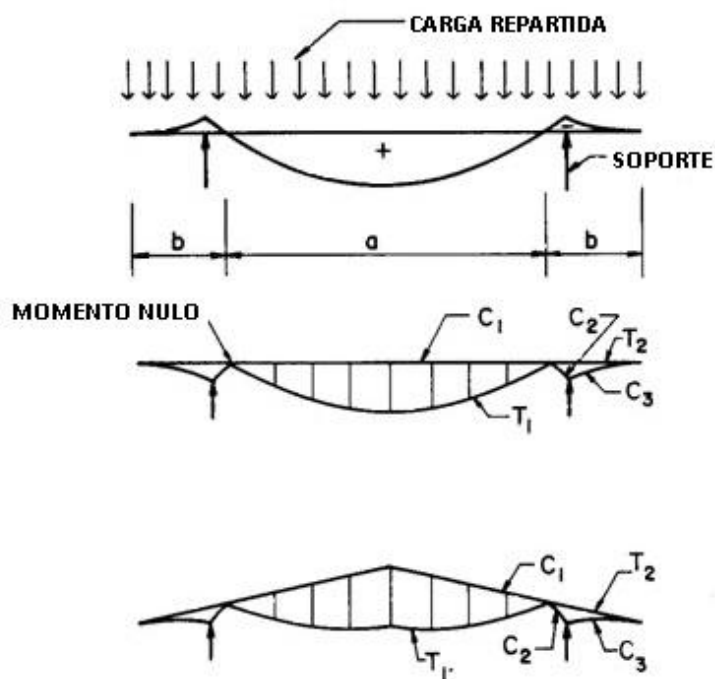


Fig. 6.86. Interpretación de la adaptación formal de la cercha de Maillart al diagrama de momentos para una carga repartida, con dos soportes, conservando los puntos de momento nulo.



En la obra de los Almacenes Generales de Chiasso, se pone fundamentalmente de manifiesto el uso que hace Maillart de la Estática Gráfica, la herramienta originalmente ideada por Karl Culmann. En las dos ediciones sucesivas de su tratado (Culmann, 1866); (Culmann, 1880), la Estática Gráfica se muestra fundamentalmente concebida como herramienta básica de análisis mecánico para estructuras.

Quizás en la idea de Culmann, el análisis estructural tiene lugar principalmente cuando todas las características geométricas de la estructura ya se han determinado. Mientras que nuestro objetivo primero en esta Tesis Doctoral, es demostrar, como sucede con Maillart, que la Grafostática se convierte en una herramienta de diseño en el sentido de que ayuda a definir la geometría (morfogénesis) en una etapa muy temprana.

Podríamos, por lo tanto, decir que se trata de un completo procedimiento de diseño gráfico-mecánico, basado en la Estática, para obtener las líneas generales del trazado Puesto de Salginatobel, siendo asimismo esta función de diseño también especialmente evidente en la interpretación que se puede hacer de la génesis de la geometría de la estructura de Maillart del cobertizo de los Magazzini Generali de Basilea-Chiasso.

Así como en otras obras de Maillart hay evidencias en los archivos, fundamentalmente en el del ETH de Zürich, de la utilización de la Estática Gráfica para el diseño de sus estructuras, no es este el caso de los Almacenes de Chiasso, pues los planos y esquemas que, con seguridad, utilizó en los diferentes tanteos para la adaptación de la forma a las fuerzas, se han perdido.<sup>51</sup>

El proyecto del edificio general diseñado por el arquitecto Ettore Brenno, (Fig. 6.87.) no contemplaba la estructura exterior de esta nave abierta que fue diseñada por Maillart con posterioridad a la finalización de la obra principal, seis meses después.

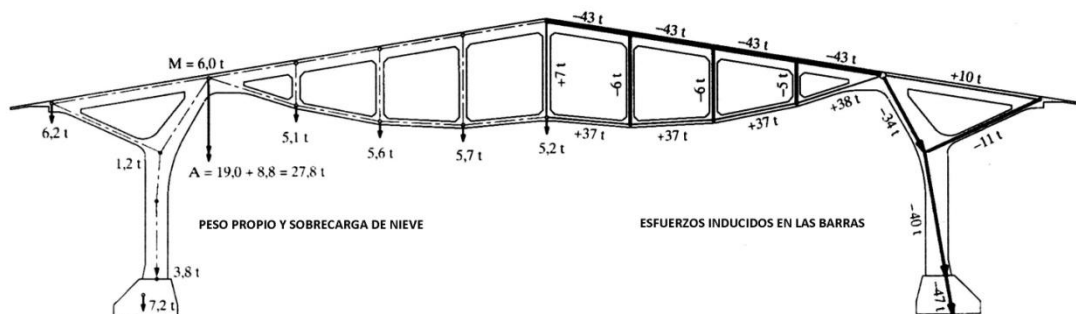


Fig. 6.87. Esquemas del resultado del cálculo grafostático, mediante las figuras recíprocas, del pórtico tipo de los Almacenes Generales de Chiasso. A la izquierda la estimación de las cargas. A la derecha los esfuerzos en las barras.

<sup>51</sup> Zastavni, Denis. *The structural design of Maillart's Chiasso Shed (1924): a graphic procedure*. Structural Engineering International 18(3), pp. 247-252. 2008b.

Mostramos en la Fig. 6.87. la superposición de las líneas estructurales del edificio principal de los Almacenes (en segundo plano) y de los pórticos exteriores, objeto de nuestro estudio. Citamos, sin embargo, uno de los elementos estructurales utilizados de forma novedosa por Maillart y son los capiteles fungiformes de los pilares de hormigón, en su entrega a las losas de forjado, aunque su análisis, caiga fuera del ámbito de nuestro estudio actual.

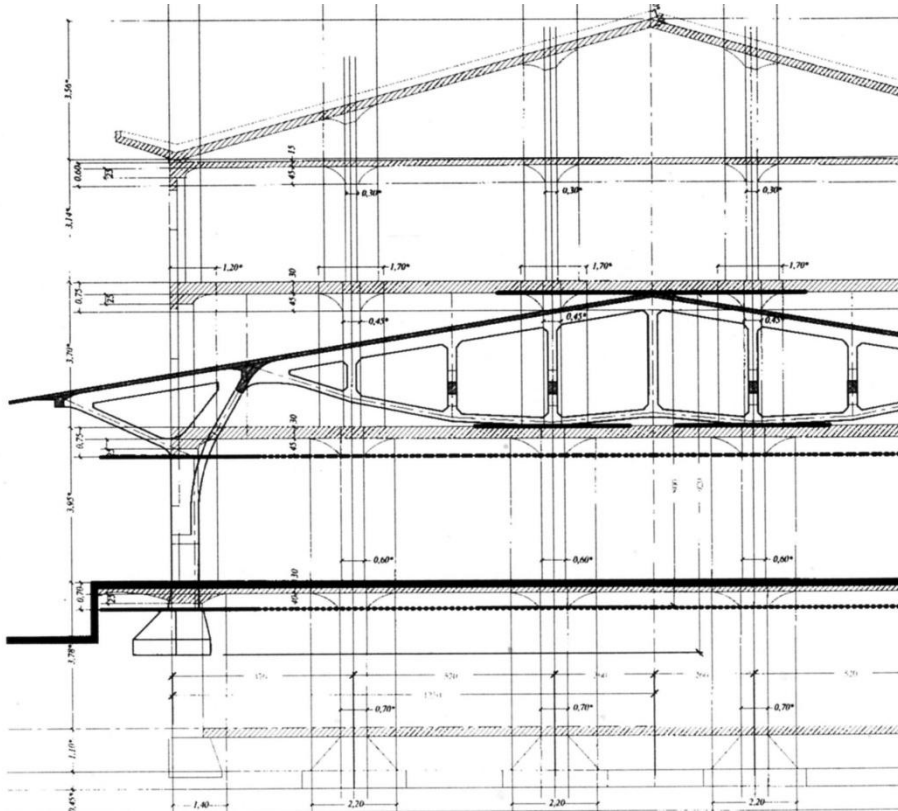


Fig. 6.88. Superposición de de las líneas estructurales del edificio principal de los Almacenes (en segundo plano) y de los pórticos exteriores. Sistema constructivo de losa de hormigón de espesor constante y capiteles fungiformes. (Zastavni, 2008b: 248) (Fot. Ticin)

La construcción de un polígono de fuerzas que podemos modificar eligiendo su polo a voluntad y sus funiculares correspondiente nos lleva a la conclusión de cómo es posible la manipulación, probablemente utilizada por Maillart, que reproducimos en la Fig. 6.90. a partir del esquema simplificado del pórtico modelo del Hangar de la Fig. 6.88. cuya fotografía se muestra en la Fig. 6.89.

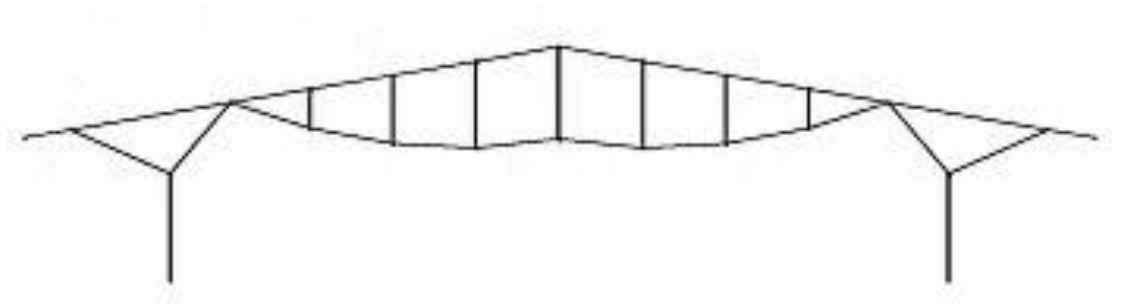


Fig. 6.89. Representación esquemática del pórtico modelo del Hangar de los Almacenes Generales de Maillart.

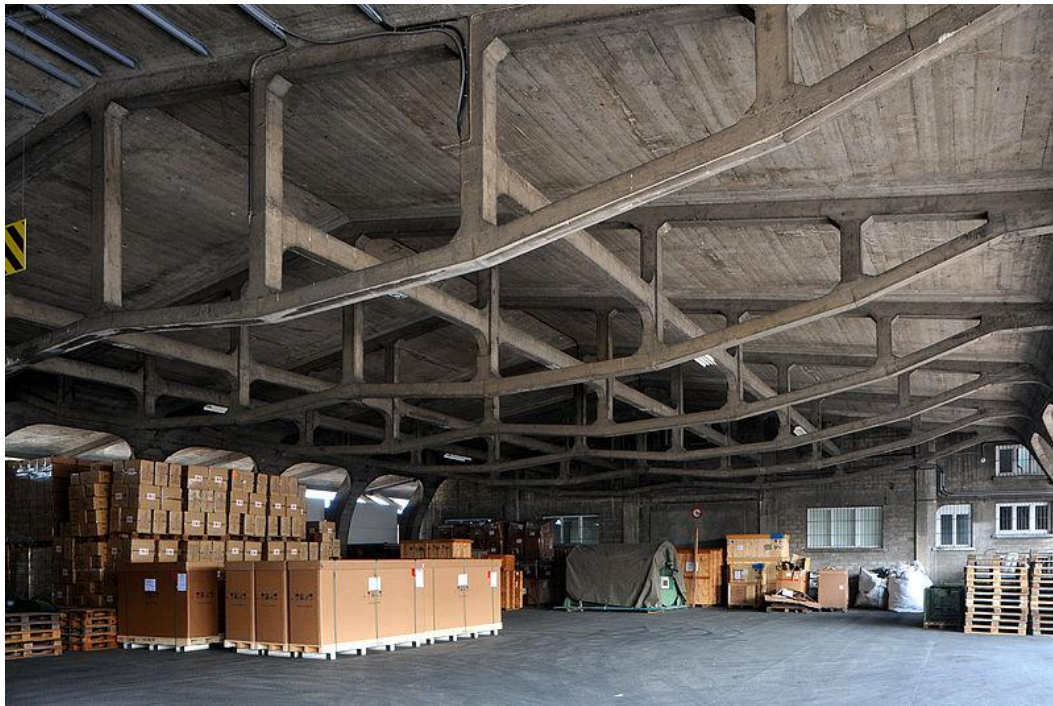


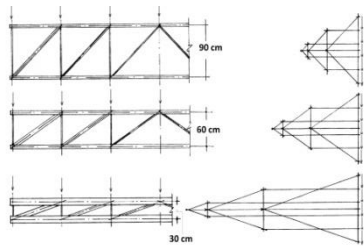
Fig. 6.90. Vista del interior del hangar, que muestra los pórticos objeto de nuestro análisis.

No es precisamente la forma habitual con la que se construían las cerchas en la época en que Maillart diseñó y calculó éstas de Chiasso, por lo que los críticos del momento y otros muchos, más tarde, quisieron ver formas orgánicas,<sup>52</sup> más o menos extrañas, surgidas de la imaginación de su creador, sin profundizar en el verdadero origen, hasta el punto de comparaciones con las formas Gaudianas, pretendiendo

<sup>52</sup> Billington, David P. *The Art of Structural Design: A Swiss Legacy*. Princeton University Art Museum: Princeton 2003.

aludir con tales referencias al formalismo, sin caer en la cuenta de que son precisamente, ambas, fruto de la reflexión estructural y que en ambos autores “las formas siguen a las fuerzas”, ratificando una vez más nuestro postulado de principio.

En los tres cálculos grafostáticos de la Fig. 6.90. se puede comprobar cómo se generan distintos funiculares para un mismo estado de cargas, sin más que modificar la distancia polar. Se ha dibujado solamente medio polígono de fuerzas, por la simetría de carga y forma; y a medida que reducimos dicha distancia polar, se incrementa la pendiente de los lados del funicular, generando un cordón inferior con menores esfuerzos en las barras.



Si recordamos el ejemplo mostrado en nuestra Fig. 6.59. En ella mostrábamos cómo aumenta el esfuerzo en las barras a medida que disminuimos el canto de la viga triangulada que, de 90 cm pasa a 60 cm y en el tercer caso a 30 cm con un incremento enorme de la sollicitación en el cordón superior e inferior.

Al contrario, la disminución de la distancia polar (aumento del canto) hace que disminuya el esfuerzo en las citadas barras.

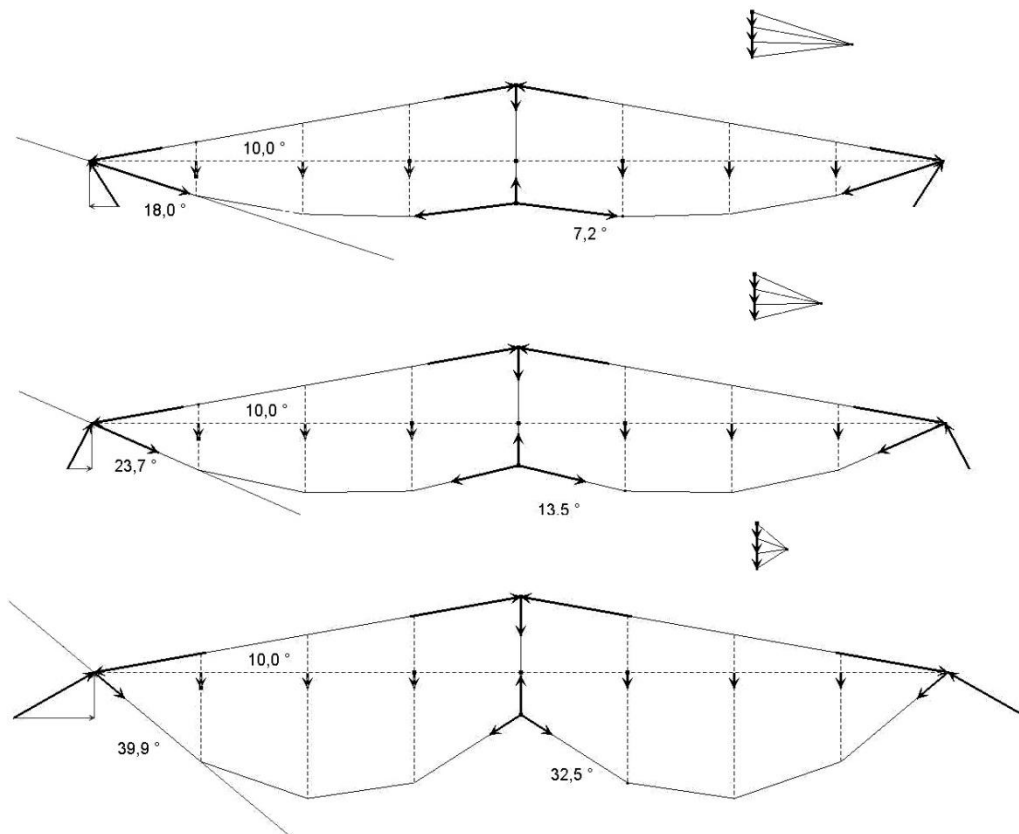


Fig. 6.91. Cálculo grafostático de los funiculares correspondientes a un mismo estado de cargas, con la variación de la distancia polar en los diagramas de fuerzas.

Finalmente cabe concluir que la Estática Gráfica permite combinar la geometría de nuestra estructura con la forma que consideremos más adecuada. En el hangar de Chiasso, las barras de la cubierta están sometidas a compresión, ya que peso propio y sobrecargas son transmitidos por los montantes verticales, también comprimidos, a las barras del cordón inferior, traccionadas. Sólo el montante central está traccionado.

En Chiasso, el gálibo necesario para el almacenamiento, pudo ser el elemento determinante para una solución intermedia, que con seguridad fue evaluada en el sentido de que las tracciones en el hormigón armado de las barras traccionadas inferiores fuesen compatibles con las secciones y los armados económicamente viables.

Interesa, asimismo, la comprobación de la línea de acción de las resultantes y su paso por el núcleo central de la sección de la pilastra, que evitará esfuerzos flectores. Aunque el hormigón armado puede soportarlos, no olvidamos las razones de economía constructiva que siempre animaron las obras de Maillart.

Tal como analizamos en el Capítulo 3 de esta Tesis, del Tratado de Ungewitter, se consideran tres ejemplos de transmisión de empujes y cómo es posible el control del equilibrio entre nave central, naves laterales y arbotantes, con distintas inclinaciones de los empujes extremos de éstos. (Fig. 3.70).

El caso es el mismo y aquí Maillart utiliza el tornapuntas del voladizo, para que su empuje, se componga con la fuerza contraria (1) en la Fig. 6.92., verticalizando la resultante, que termina por centrarse en la base del pilar, entregando al macizo del cimiento dentro del tercio central. (Parece que se aumentó asimétricamente el trapecio de la zapata para favorecer este efecto, al igual que se produjo un ensanchamiento en la base de las pilastras, por el mismo motivo, aumentando su peso propio).

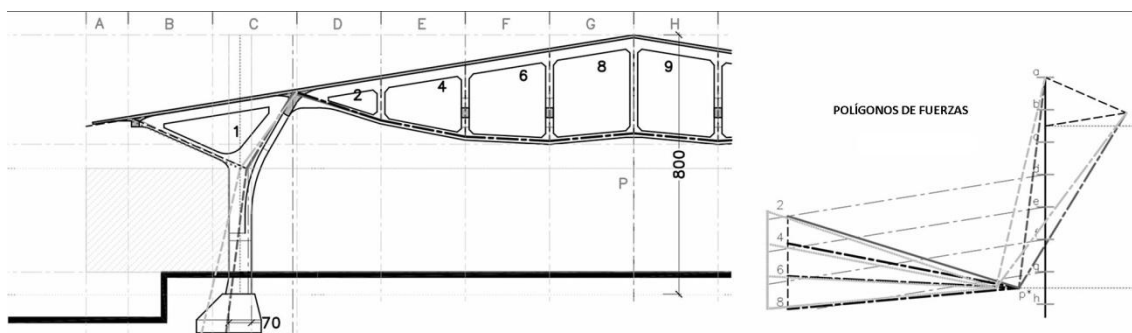


Fig. 6.92. Control grafostático de la dirección de la resultante. Su centrado se consigue manipulando el diagrama de fuerzas, que determinará finalmente la geometría del tornapuntas del voladizo.

## 7. PATRONES PARA UNA DIDÁCTICA ACTUAL DE LA GRAFOSTÁTICA

### 7.1. REPRESENTACIÓN DE FUERZAS. SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

La representación habitual de las fuerzas que intervienen en un sistema mecánico, se realiza, desde antes de la aparición de la Estática Gráfica, mediante Sistemas de Vectores Deslizantes. Es necesario, por tanto, un cierto conocimiento de la Mecánica vectorial y en particular de los fundamentos previos del Álgebra y Cálculo vectoriales (Adams, 2009: 641-659) <sup>1</sup> para el desarrollo fecundo de las aplicaciones grafostáticas. <sup>2</sup>

Entendiendo que desde el punto de vista geométrico, un vector se puede definir como un segmento orientado, AB, donde A es su origen y B, su extremo, situado sobre su recta soporte, o línea de acción del vector. La clasificación vectorial es inmediata, en Vectores Libres, Deslizantes y Ligados. Si las componentes del vector  $\vec{a}$  son  $a_x, a_y, a_z$  y A es un punto de su recta de acción, de coordenadas  $A_x, A_y, A_z$  es inmediata la determinación de la ecuación de la recta soporte del vector, dada en la forma que señala el paralelismo de los vectores  $\vec{AP}$  y  $\vec{a}$ , siendo las coordenadas del punto genérico P  $\in r$   $P(x, y, z)$  :

$$r \equiv \left[ \frac{x-A_x}{a_x} = \frac{y-A_y}{a_y} = \frac{z-A_z}{a_z} \right] \text{ con vector unitario de } (r), \vec{u}_r \equiv (a_x/|\vec{a}|, a_y/|\vec{a}|, a_z/|\vec{a}|)$$

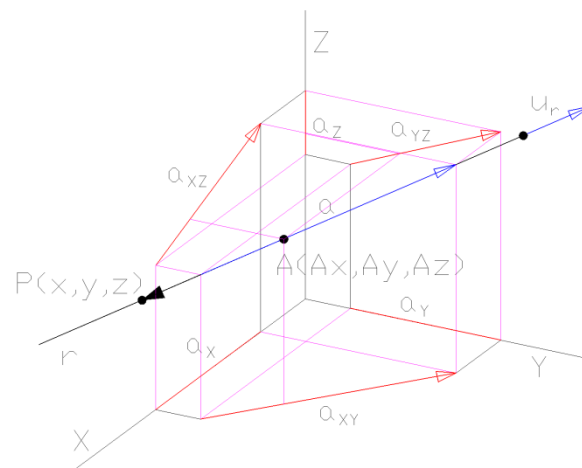


Fig. 7.1. Representación axonométrica de las componentes cartesianas de un vector ( $\vec{a}$ ) perteneciente a la recta ( $r$ ) cuya ecuación se obtiene por la proporcionalidad de las componentes de los vectores ( $\vec{AP}$ ) y ( $\vec{a}$ ). (Dibujos Propios)

<sup>1</sup> Adams, Robert A. *Cálculo*. Pearson Educación, S. A.: Madrid 2009.

Catalá Galindo, José D. et al. *Física*. Luis Vives: Zaragoza 1993.

Magro Andrade, Rafael. et al. *Fundamentos físicos de la ingeniería I*. García Maroto Editores, S. L.: Madrid 2007.

Novais, Maria Helena. *Cálculo Vectorial e Geometría Analítica*. Edgard Blucher, Ltda.: Sao Paulo 1976.

<sup>2</sup> La mayoría de los conceptos y ejercicios desarrollados en este apartado, forman parte del Programa de las Asignaturas Física Aplicada I y II, de la Escuela de Arquitectura e Ingeniería de Edificación de la Universidad Católica San Antonio de Murcia, impartida por el autor de esta Tesis Doctoral.

Determinamos la relación de “equipolencia” como aquella que indica cierta igualdad, de alguna de las características de las magnitudes vectoriales. Así diremos que dos vectores son equipolentes si tienen el mismo Módulo, Dirección y Sentido.

Para que dos vectores libres sean iguales basta con que sean equipolentes. Un vector es por tanto libre, si se puede sustituir por cualquiera de sus equipolentes. Un vector es deslizante si se puede sustituir por cualquiera de los equipolentes de su recta de acción y un vector es ligado si sólo es equipolente a sí mismo. Dos vectores deslizantes son iguales, si además de equipolentes tienen la misma recta de acción o recta soporte. Dos vectores ligados son iguales si además de equipolentes tienen el mismo origen.

Dadas las particularidades de los Sistemas de Fuerzas que representamos como vectores deslizantes y atendiendo a sus efectos mecánicos, nos interesa destacar algunas características especiales de los Sistemas de Vectores Deslizantes, que vamos a denominar Invariantes del Sistema.

Sea un conjunto finito de vectores ( $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ) aplicados respectivamente en los puntos ( $P_1, P_2, \dots, P_n$ ), cuyo vector suma es naturalmente finito, también.

Obtenemos su Resultante  $\bar{R}$  como un vector libre, suma de todos los vectores del sistema  $\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i$

Definimos el Momento Central del sistema respecto a un punto, como la suma de cada uno de los Momentos de los vectores del sistema respecto a ese punto:  $\bar{M}_O = \sum_1^n \bar{M}_{O_i} = \sum_1^n \bar{O P}_i * \bar{F}_i$ , donde (\*) es el Producto vectorial, en este caso, del vector  $\bar{O P}_i$ , con origen en el Centro de Momentos y extremo en un punto cualquiera,  $P_i$  de la recta de acción del vector  $\bar{F}_i$  y el propio vector  $\bar{F}_i$ .

El cambio de centro de momentos es inmediato: Si calculamos el Momento del sistema respecto a otro punto cualquiera:  $\bar{M}_{O'} = \sum_1^n \bar{O' P}_i * \bar{F}_i = \sum_1^n (\bar{O' O} + \bar{O P}_i) * \bar{F}_i = \sum_1^n \bar{O P}_i * \bar{F}_i + \sum_1^n \bar{O' O} * \bar{F}_i = \bar{M}_O + \bar{O' O} * \sum_1^n \bar{F}_i \rightarrow \boxed{\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \bar{O' O} * \bar{R}}$

Son Invariantes de todo sistema de vectores deslizantes:

- La Resultante. (Como vector libre puede utilizarse cualquier punto del espacio para sumar los vectores del sistema).
- El producto escalar del Momento Central, en cualquier punto, por la Resultante. Definido como  $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = |\bar{M}_O| \cdot |\bar{R}| \cdot \cos \alpha$  donde  $\alpha$  es el ángulo que forman el Momento central y la Resultante

Ahora bien, si dividimos ambos miembros por  $|\bar{R}| \neq 0$  tendremos:

$\bar{M}_O \cdot \bar{u}_r = |\bar{M}_O| \cdot \cos \alpha$ , es decir la proyección del vector Momento Central sobre la Resultante.

- El momento mínimo del sistema es Constante. Esa proyección del Momento Central en cualquier punto, sobre la Resultante, es constante, es decir, no varía sea cual sea el punto del espacio respecto al que calculamos el momento del sistema.

En efecto si calculamos el Momento Central respecto a otro punto  $O'$ , que ya hemos visto que es  $\bar{\mathbf{M}}_{O'} = \bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{O}'O} * \bar{\mathbf{R}}$  y calculamos su producto escalar por la Resultante, veremos que  $\bar{\mathbf{M}}_{O'} \cdot \bar{\mathbf{R}} = (\bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{O}'O} * \bar{\mathbf{R}}) \cdot \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{M}}_O \cdot \bar{\mathbf{R}} + (\bar{\mathbf{O}'O} * \bar{\mathbf{R}}) \cdot \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{M}}_O \cdot \bar{\mathbf{R}}$  al ser el segundo sumando nulo por ser el producto escalar de dos vectores perpendiculares. Expresándose, pues,  $\bar{\mathbf{M}}_{O'} \cdot \bar{\mathbf{R}} / |\bar{\mathbf{R}}| = \bar{\mathbf{M}}_O \cdot \bar{\mathbf{R}} / |\bar{\mathbf{R}}| = \text{Constante} = \text{Momento mínimo}$

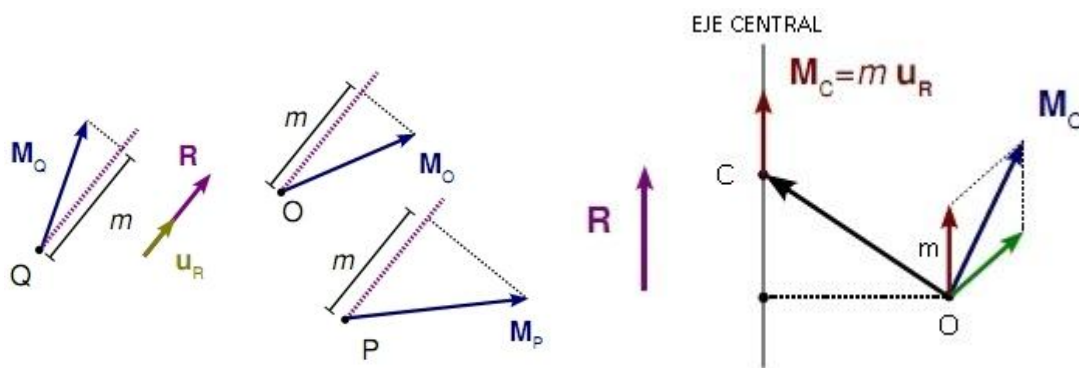


Fig. 7.2. Representación de la proyección ( $m$ ) del Momento de un sistema respecto a distintos puntos  $O, P, Q, \bar{\mathbf{M}}_O, \bar{\mathbf{M}}_P, \bar{\mathbf{M}}_Q$ , sobre la dirección de la Resultante del Sistema. Descomposición del Vector Momento  $\bar{\mathbf{M}}_O$  del sistema respecto a un punto cualquiera  $O$ , en dos componentes una de las cuales, el vector  $\bar{\mathbf{m}}$  corresponde al Momento mínimo.

De esta manera, cabe la descripción de cómo se crea el denominado Campo de Momentos, que, dado un sistema de Vectores Deslizantes, asigna a cada punto del espacio dos vectores, uno es la Resultante, que como vector libre cabe llevarla a cualquier punto, y otro es el Momento Central del sistema respecto a ese punto.

Se define el Eje Central de un sistema de vectores deslizantes, como el Lugar Geométrico de los puntos del espacio, respecto a los cuales, el Momento Central del sistema tiene un valor mínimo.

En la Fig. 7.2., el Momento Central respecto a un punto cualquiera ( $O$ ), que no pertenece al Eje Central, tiene una componente ( $m$ ) en su dirección. Pues bien, cuando calculamos el Momento Central respecto a un punto ( $C$ ) del Eje Central del sistema, dicho Momento, sólo tiene esa componente, o sea,  $\bar{\mathbf{M}}_C = m \cdot \bar{\mathbf{u}}_r$ . Se trata del vector Momento Mínimo, invariante vectorial del sistema.

Así, de la definición de Eje Central como el Lugar geométrico de los puntos del espacio tales que el Momento Central del sistema respecto a ellos, es Momento



Mínimo. Es decir el Momento resultante del sistema respecto a un punto del Eje Central es paralelo a la Resultante, o es nulo.

Supongamos que de un sistema cualquiera, conocemos la Resultante ( $\bar{\mathbf{R}} \equiv (R_x, R_y, R_z)$ ) y el momento resultante respecto a cualquier punto, por ejemplo el origen O (0, 0, 0), ( $\bar{\mathbf{M}}_O \equiv (M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz})$ )

Y supongamos, también que el punto Q (x, y, z) pertenece al Eje Central del sistema. Por la propia definición de este lugar geométrico, el Momento resultante, o central del sistema respecto a este punto Q, ha de ser mínimo y por tanto paralelo a la Resultante.

Calculemos este momento  $\bar{\mathbf{M}}_Q = \bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{QO}} * \bar{\mathbf{R}}$  para lo que hay que calcular el producto vectorial  $\bar{\mathbf{QO}} * \bar{\mathbf{R}}$  que resolveremos con el determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ -x & -y & -z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

$\bar{\mathbf{QO}} * \bar{\mathbf{R}} = (y R_z - z R_y) \bar{\mathbf{i}} + (x R_z - z R_x) \bar{\mathbf{j}} + (y R_x - x R_y) \bar{\mathbf{k}}$  quedando finalmente el momento buscado respecto al punto del Eje Central, Q:

$\bar{\mathbf{M}}_Q = \bar{\mathbf{M}}_O + \bar{\mathbf{QO}} * \bar{\mathbf{R}} = (M_{Ox} + y R_z - z R_y) \bar{\mathbf{i}} + (M_{Oy} + x R_z - z R_x) \bar{\mathbf{j}} + (M_{Oz} + y R_x - x R_y) \bar{\mathbf{k}}$  vector, que ha de ser paralelo a la Resultante, lo que expresamos señalando la proporcionalidad entre sus componentes:

$[(M_{Ox} + y R_z - z R_y), (M_{Oy} + x R_z - z R_x), (M_{Oz} + y R_x - x R_y)]$  y  $(R_x, R_y, R_z)$

$$\frac{(M_{Ox} + y R_z - z R_y)}{R_x} = \frac{(M_{Oy} + x R_z - z R_x)}{R_x} = \frac{(M_{Oz} + y R_x - x R_y)}{R_x} \text{ que corresponde a la}$$

ecuación en forma continua de una recta en el espacio, precisamente esa recta es el Eje Central buscado.

Utilizaremos en adelante, para este apartado 7. de esta Tesis, la aplicación de los conceptos a expresar, mediante un ejemplo que explica el contenido del apartado.

**7.2. CÁLCULO DEL EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE VECTORES. CORRESPONDENCIA ENTRE LOS RESULTADOS ANALÍTICOS Y GRAFOSTÁTICOS**

Dado el sistema de vectores deslizantes:

$\bar{F}_1(-2, -4, 0)$  aplicado en  $A(4, 10, 0)$ ;       $\bar{F}_2(0, -3, 0)$  aplicado en  $B(5, 10, 0)$ ;  
 $\bar{F}_3(3, -4, 0)$  aplicado en  $C(6, 11, 0)$ ;       $\bar{F}_4(4, 0, 0)$  aplicado en  $D(5, 12, 0)$

Vamos a calcular analíticamente La Resultante del Sistema y la posición del Eje Central.

Calculo analítico:  $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = (5, -11, 0)$

$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \bar{O}\bar{A} * \bar{F}_1 = (0, 0, 4)$        $\left| \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 10 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{matrix} \right| = (0, 0, 4)$

$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \bar{O}\bar{B} * \bar{F}_2 = (0, 0, -15)$  (Obviamos la escritura de los determinantes)

$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = \bar{O}\bar{C} * \bar{F}_3 = (0, 0, -57)$

$\bar{M}_O(\bar{F}_4) = \bar{O}\bar{D} * \bar{F}_4 = (0, 0, -48)$

$\bar{M}_O = (0, 0, -116)$

Si  $Q(x, y, z) \in r$  (Eje Central)  $\rightarrow \bar{M}_Q // \bar{R}$

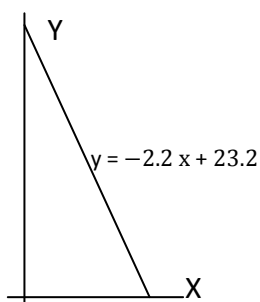
$\bar{M}_Q = \bar{M}_O + \bar{Q}\bar{O} * \bar{R} = -116 \bar{k} - 11z \bar{i} - 5z \bar{j} + (5y + 11x) \bar{k} = -11z \bar{i} - 5z \bar{j} + (11x + 5y - 116) \bar{k}$

y expresando la proporcionalidad entre las componentes de  $\bar{M}_Q$  y la resultante  $\bar{R}$ :

$\frac{-11z}{5} = \frac{-5z}{-11} = \frac{11x + 5y - 116}{0}$

ecuación en forma continua de la recta Eje central, que podemos transformar multiplicando:  $-121z = -25z$  ;  $0 = (-11)(11x + 5y - 116)$  con lo que, de la primera  $z = 0$  y de la segunda  $11x + 5y - 116 = 0$  ; ambas representan una recta contenida en el plano XY, que es el plano en el que está situado el sistema.

Finalmente la recta en el plano XY puede expresarse  $y = \frac{-11}{5} x + \frac{116}{5}$  o como  $y = -2.2 x + 23.2$  que podemos representar gráficamente como se muestra



La abscisa en el origen es para  $y = 0$  ;  $x = 10.55$   
 La ordenada en el origen es para  $x = 0$  ;  $y = 23.20$

Fig. 7.3. Representación gráfica de la recta Eje Central obtenida analíticamente. (Cálculos y dibujos Propios)

Para el mismo sistema de vectores, la solución grafostática es:

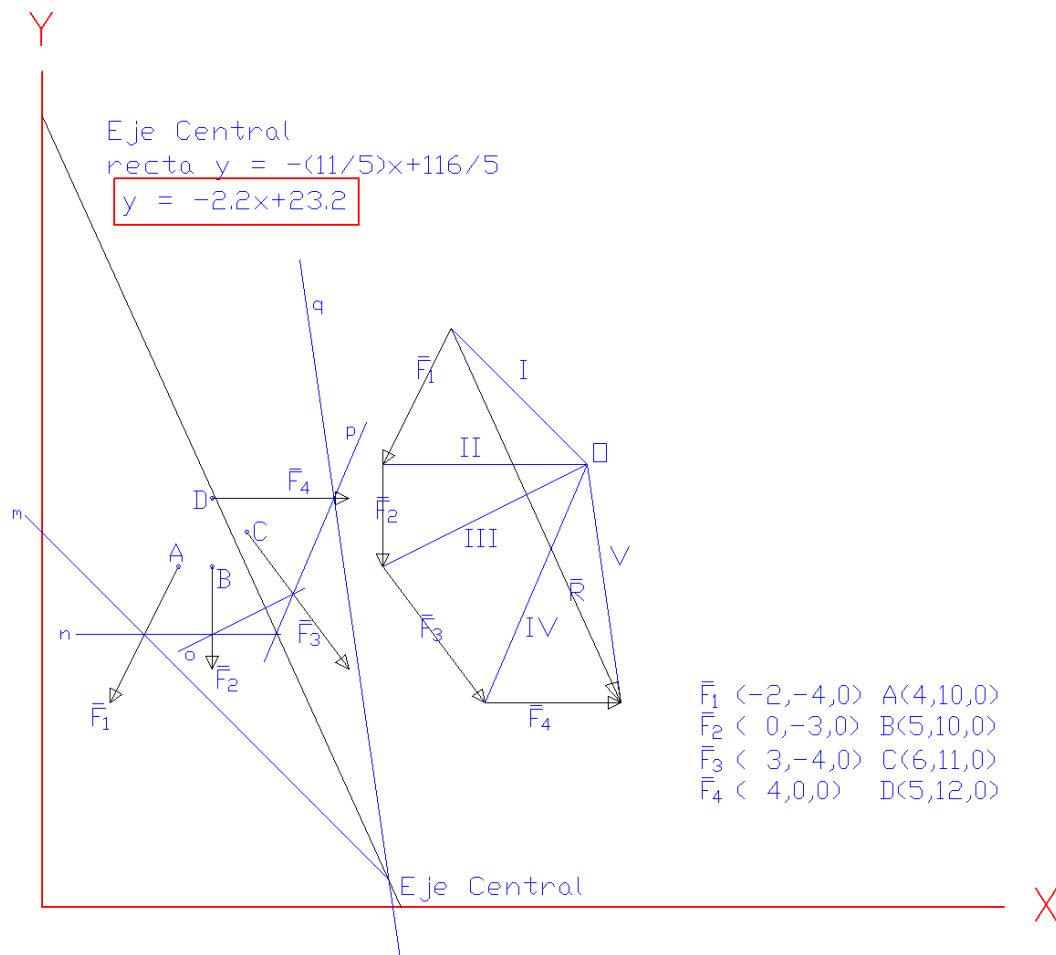


Fig. 7.4. Cálculo grafostático de la Resultante y Eje Central del sistema de vectores propuesto. (Cálculos analíticos, grafostáticos y dibujos propios)

La resolución grafostática pasa por dibujar en primer lugar el Polígono de fuerzas. Con polo O elegido arbitrariamente se dibujan encadenados los cuatro vectores, trazando desde O los cinco radios polares I, II, III, IV y V. Por un punto cualquiera del primer vector  $\vec{F}_1$  se trazan paralelas a los radios I y II, primeros lados del polígono funicular, hasta que el segundo corte a la recta de acción del vector  $\vec{F}_2$ , se reitera el proceso hasta que el cuarto lado del funicular corta a  $\vec{F}_4$  y por este punto trazamos el quinto lado, paralelo al radio polar V.

La intersección del primer y último lados del polígono funicular determina un punto de paso del Eje Central, cuya dirección es paralela a la Resultante, obtenida en el polígono de fuerzas, uniendo el origen del primer vector  $\vec{F}_1$  con el extremo del último  $\vec{F}_4$ .

Hacemos notar la sencillez del procedimiento grafostático frente al analítico y su congruencia de resultados, uno de nuestros objetivos en esta Tesis.

Cuando se trata de un sistema no contenido en un plano, el procedimiento analítico se mantiene tal como hemos realizado el anterior, obteniéndose por la condición de paralelismo entre el Momento resultante respecto a un punto del Eje Central y la Resultante del sistema, expresada con la proporcionalidad entre las componentes de ambas:

$$\frac{(M_{ox} + y R_z - z R_y)}{R_x} = \frac{(M_{oy} + x R_z - z R_x)}{R_x} = \frac{(M_{oz} + y R_x - x R_y)}{R_x}$$

En cuanto a la solución grafostática de cálculo de la Resultante y de la posición del Eje Central del sistema, distinguiremos entre varios casos:

El caso de vectores concurrentes en un punto, aunque el sistema no sea plano, la Resultante sigue siendo un vector libre, pero el Momento Central o Momento Resultante del sistema coincide con el Momento de la Resultante, por aplicación del Teorema de Varignon, con lo que el Eje Central del sistema pasa por el punto de concurrencia de los vectores, quedando grafostáticamente determinado.

De la misma manera, si el sistema está formado por vectores paralelos, la Resultante tendrá la misma dirección de los vectores del sistema y la posición del Eje Central viene determinada por el Centro del sistema, que coincide con el C.D.G. y cuyo cálculo ya analizamos en el Punto 4.4. El cálculo analítico es el ya analizado, pues la ecuación de la recta coincide con la dirección de todos los vectores y un punto de paso es el C.D.G.

El cálculo grafostático del Eje Central se reduce al cálculo del C.D.G. del sistema de vectores paralelos.

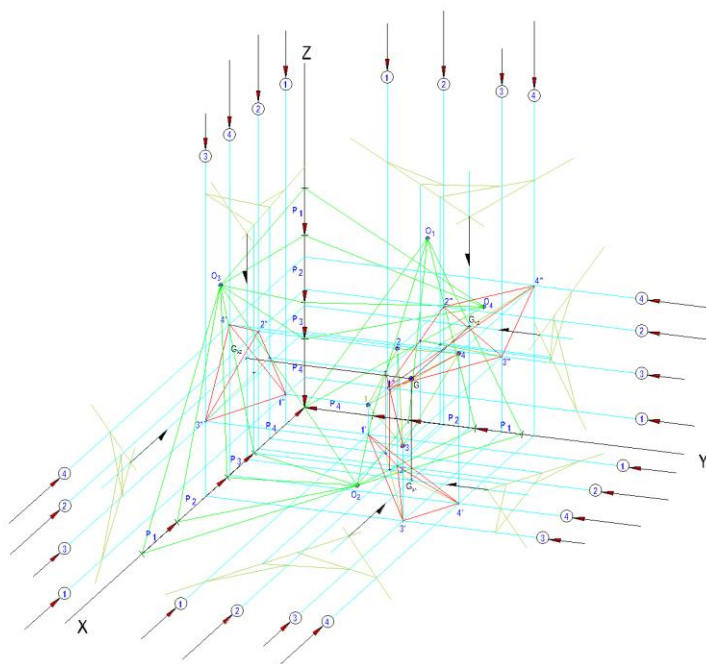
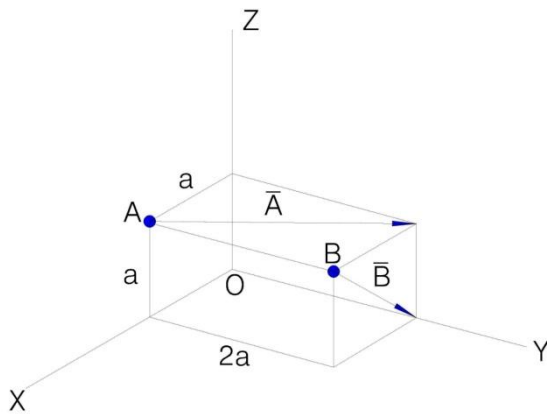


Fig. 7.5. Cálculo grafostático del C.D.G. ( G ) del sistema de vectores [1, 2, 3, 4] mediante la determinación de los Ejes Centrales de los sistemas proyectados sobre XY, XZ e YZ. La vertical que pasa por ( G ) es el Eje Central buscado. (Cálculos grafostáticos y dibujos propios)

Los sistemas de vectores deslizantes gauchos, cualesquiera, precisan de la combinación de analítica y grafostática para la determinación del Eje central.

En efecto, analizaremos el caso con un sistema formado por dos vectores (por simplicidad del dibujo) que situaremos en sendos vértices, A y B de un paralelepípedo recto rectángulo, cuyas aristas mayores tienen doble dimensión de las menores, como se indica en el esquema adjunto.



Determinaremos primero las componentes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , para lo que asignaremos valor numérico (la unidad) al parámetro (a) con lo que el vector  $\vec{A} \equiv (-1,2,0)$  y el  $\vec{B} \equiv (-1,0,-1)$  Siendo la Resultante  $\vec{R} \equiv (-2,2,-1)$ .  
Omitimos el cálculo de los Momentos de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  respecto al origen por no resultar reiterativo y ofrecemos los resultados de los respectivos determinantes,  $\vec{M}_O(\vec{A}) \equiv (-2,-1,2)$  y  $\vec{M}_O(\vec{B}) \equiv (-2,0,2)$ , siendo  $\vec{M}_O \equiv (-4,-1,4)$  y la ecuación del Eje Central, queda expresada como  $(2z+y-4)/-2 = (2z-x-1)/2 = (4-2y-2x)/-1$

Si analizamos las intersecciones de esta recta con los planos de proyección, puntos  $P_1, P_2, P_3$  (haciendo cero las variables x, y, z, alternativamente), podremos representar gráficamente los invariantes del sistema y si como comprobación calculamos los Momentos  $\vec{M}(P_1), \vec{M}(P_2)$  y  $\vec{M}(P_3)$ , comprobaremos que son Momentos mínimos.

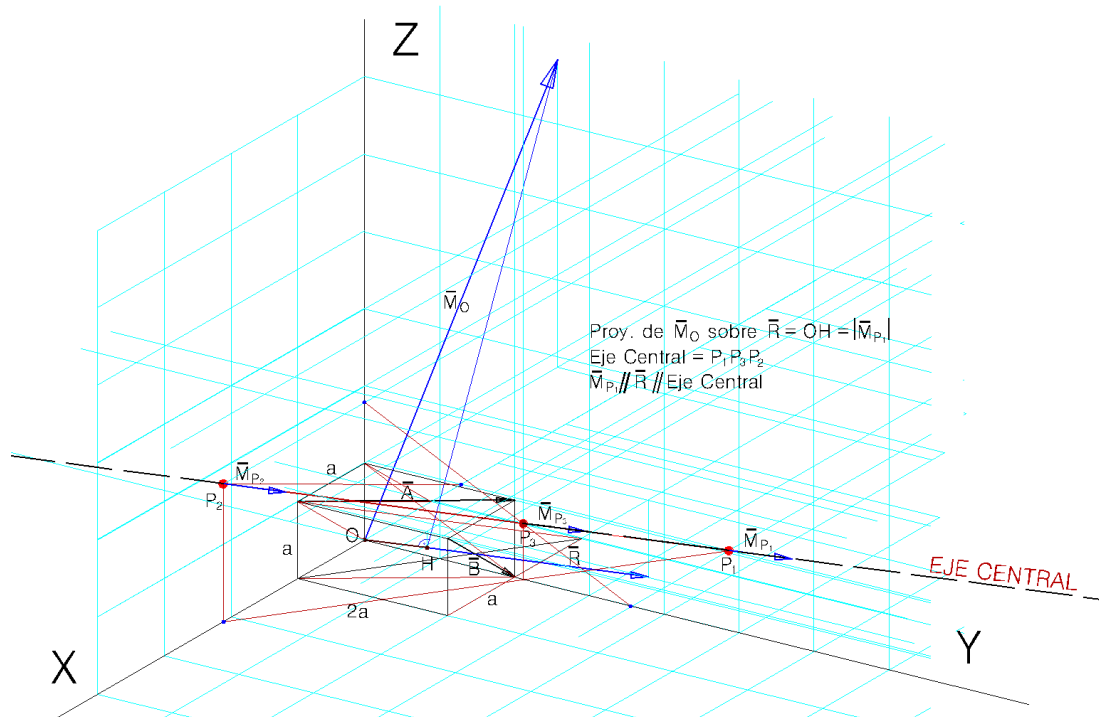


Fig. 7.6. Perspectiva axonométrica de los resultados analíticos obtenidos para el cálculo de la Resultante del sistema propuesto, el Momento resultante respecto al origen, el Momento mínimo (segmento OH, proyección del Momento resultante sobre la Resultante, Recta  $P_1, P_2, P_3$  Eje Central. Se comprueba que los momentos  $\vec{M}(P_1), \vec{M}(P_2)$  y  $\vec{M}(P_3)$ , son vectores en la dirección del Eje Central con módulo el segmento OH, Proyección de  $\vec{M}_O$  sobre la Resultante  $\vec{R}$ . (Cálculos analíticos, grafostáticos y dibujos propios).

La Geometría Descriptiva, como ya anunciaba Culmann en la introducción de su *Die Graphische Statik*, constituye un poderoso arma para el manejo y cálculo mediante los procedimientos de la Estática Gráfica. La representación diédrica de la Resultante del sistema que analizamos, es contundente, pues queda completamente determinada por sus proyecciones diédricas ortogonales y ese única. (Parte izquierda de la Fig. 7.7.)

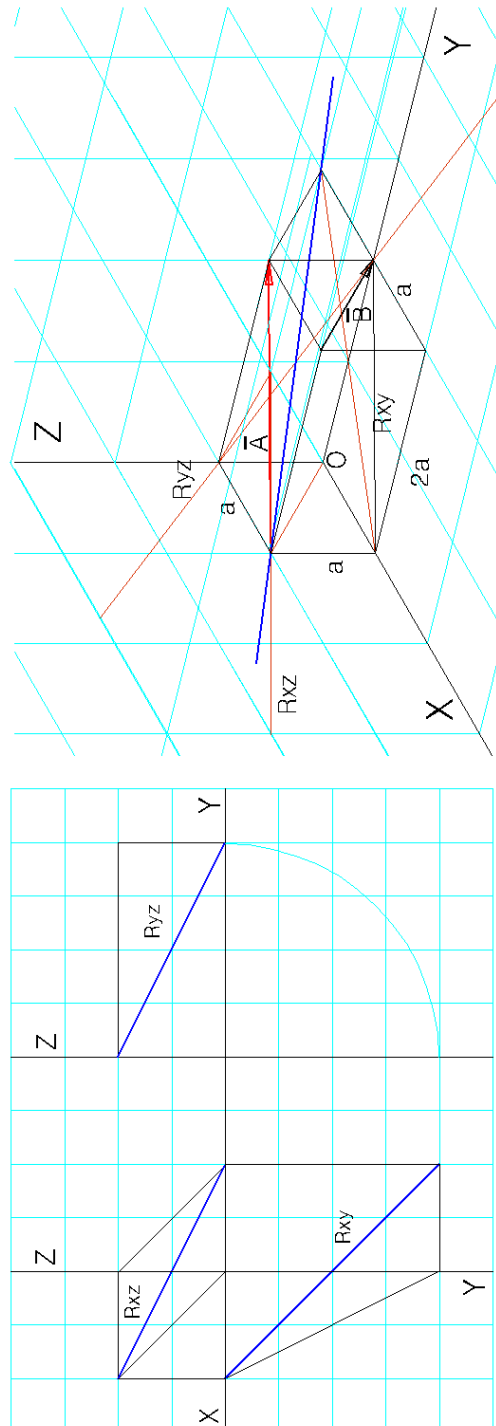


Fig. 7.7. Representación Diédrica y Axonométrica de la recta que contiene a la Resultante del sistema formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Recordamos que la Resultante es un vector libre y por tanto, hemos realizado la suma vectorial situando un vector equipolente a  $\vec{B}$  a continuación del extremo del  $\vec{A}$  y uniendo el origen del  $\vec{A}$  con el extremo del equipolente a  $\vec{B}$ , obtenemos el vector Resultante con origen en el punto (1, 0, 1), origen del vector  $\vec{A}$ .

La combinación de Estática Gráfica y Geometría Descriptiva se convierte en un buen aliado para la resolución de algunos problemas, que se plantea la Grafostática, fundamentalmente cuando los sistemas de fuerzas, que representamos mediante sistemas de vectores, no son sistemas planos.

Es este el caso del estudio de cuatro fuerzas, que presentamos en las Fig. 7.8. y 7.10. y que puede servir para el análisis de los esfuerzos en un mástil o poste inclinado y su equilibrio mediante tres cables atirantados, en función de la posición de dichos tirantes. Puede tratarse también de un trípode, con sus patas apoyadas en el suelo, al que se le aplica una fuerza con una cierta inclinación en el vértice superior.

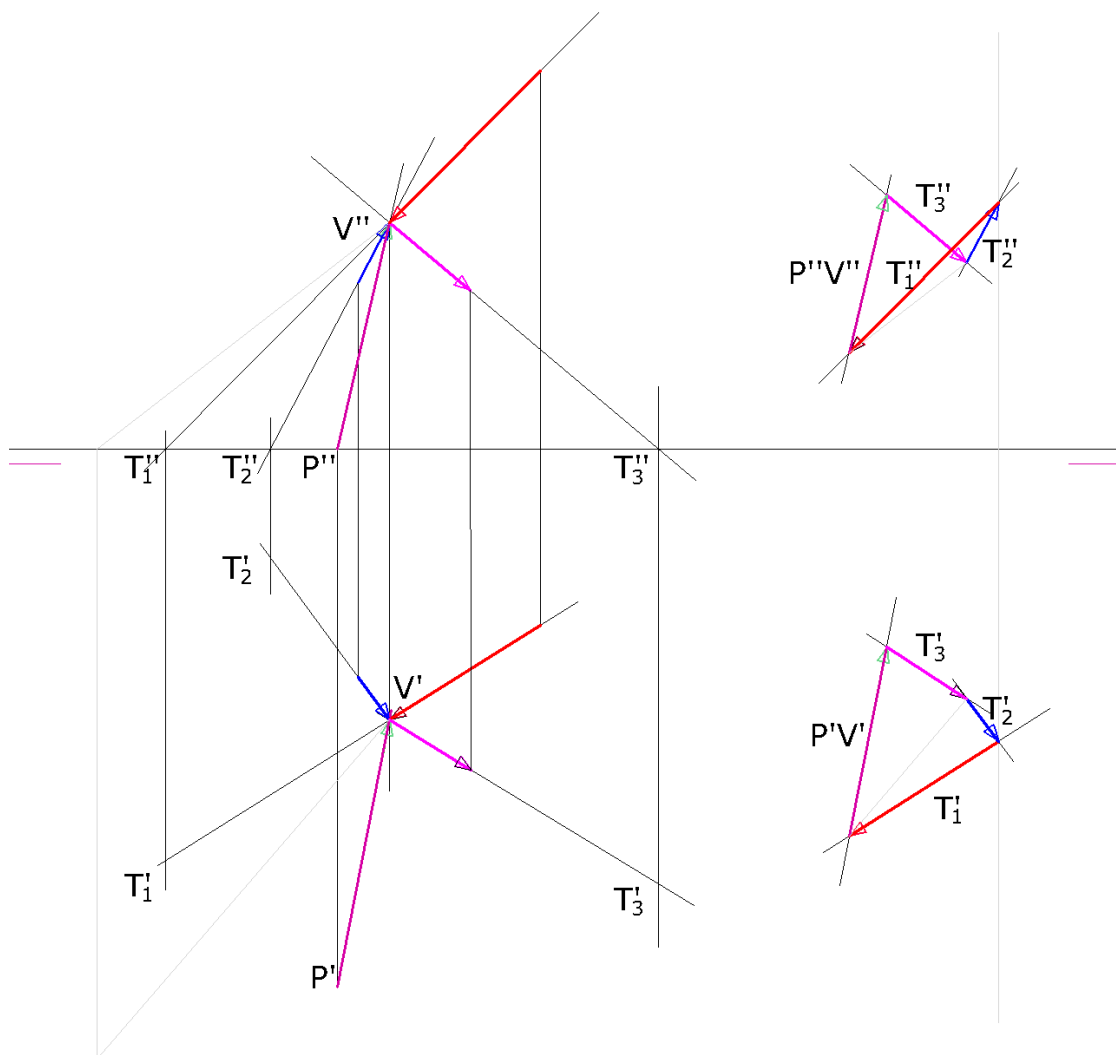


Fig. 7.8. Utilización conjunta de la Estática Gráfica y la Geometría Descriptiva, para determinar el equilibrio del sistema bajo la acción de una fuerza exterior, mediante las Proyecciones diédricas ortogonales del sistema y el Polígono de fuerzas asociado, también representado por sus proyecciones.

En la Fig. 7.8. se ha representado este último caso, de un trípode formado por las barras  $PV$ ,  $T_2V$  y  $T_3V$  que tiene su vértice en  $V$ , punto donde se aplica una fuerza exterior en la dirección  $VT_1$ . La fuerza exterior (grafiada en rojo) está perfectamente definida como vector, ya que en diédrico es posible el cálculo inmediato de la verdadera magnitud de un segmento (v.m. en la Fig. 7.9.) proyectado, o en sentido inverso, situar sobre una recta proyectada una magnitud conocida. Por tanto nuestro sistema espacial, trípode en este caso, y la fuerza actuante sobre el vértice está determinado mediante sus proyecciones diédricas (planta y alzado en el lenguaje clásico del dibujo arquitectónico). El polígono de fuerzas situado a la derecha en planta y alzado, determina el equilibrio del sistema, señalando la descomposición de la fuerza exterior roja  $\bar{T}_1$  en la suma vectorial de las  $\bar{P}\bar{V} + \bar{T}_3 + \bar{T}_2$ . Dichas fuerzas se han tomado en planta y alzado, siguiendo las direcciones de las rectas soporte de las proyecciones diédricas de la izquierda.

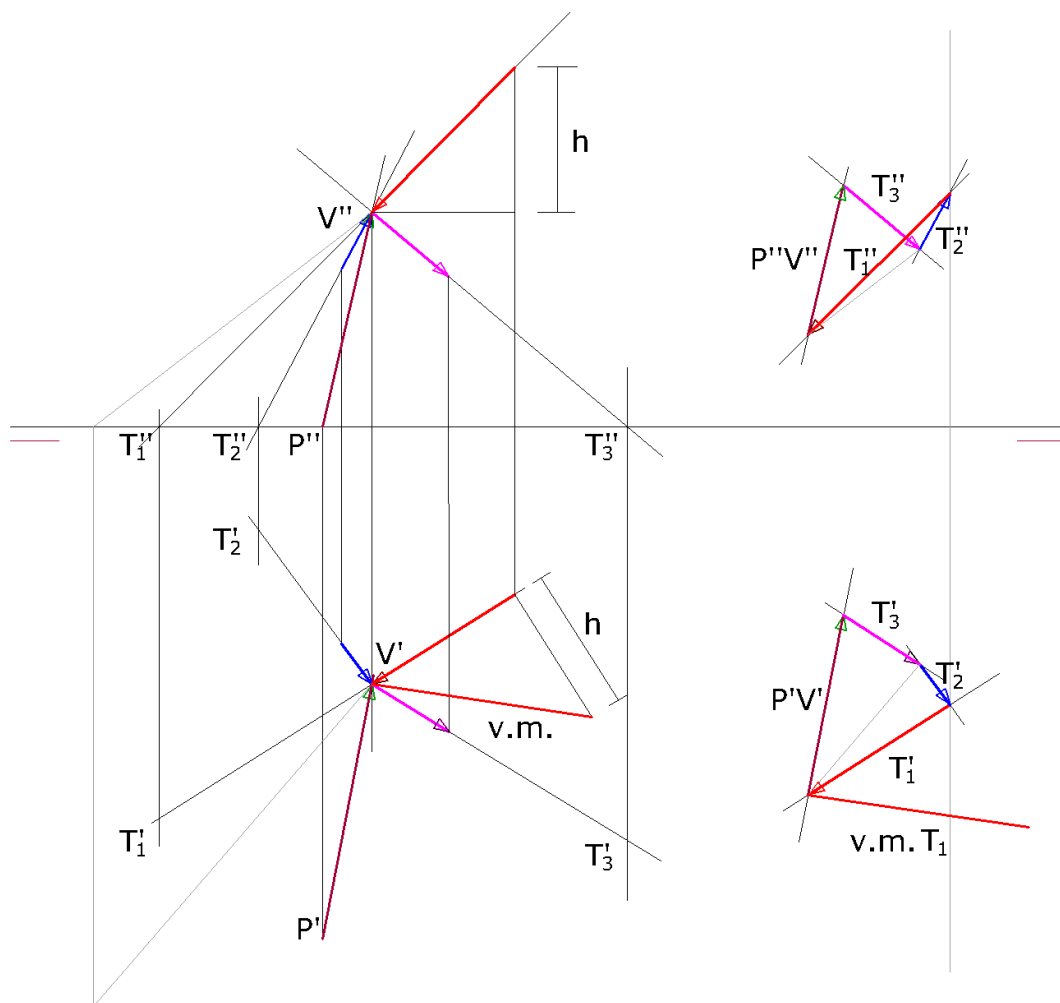


Fig. 7.9. Utilización conjunta de la Estática Gráfica y la Geometría Descriptiva, para determinar el equilibrio del sistema bajo la acción de una fuerza exterior, mediante las Proyecciones diédricas ortogonales del sistema y el Polígono de fuerzas asociado, también representado por sus proyecciones. Se ha grafiado también el cálculo de la verdadera magnitud de la fuerza exterior roja, procedimiento extensible a cualquier barra o fuerza. (Cálculos y dibujos propios)



Exactamente los mismos cálculos servirían para el planteamiento del problema en los términos de:

Determinar los esfuerzos en los cables tensados  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , que garanticen el equilibrio del Puntal PV, con garantía de resistencia a tracción de los cables y del Puntal a compresión. Esta es una situación habitual en muchos sistemas estructurales tensados en los que la disposición tridimensional podría llevar a dificultades con sólo los procedimientos grafostáticos habituales.

Lo que podría denominarse como Estática Gráfica Tridimensional, puede ser un buen instrumento para el predimensionado de estas estructuras. Cabe, como se deduce de la observación de nuestra pequeña estructura, variar las direcciones de los tensores, en planta, en alzado o en ambos, con lo que automáticamente variarían los módulos de los vectores del diagrama de fuerzas, permitiéndonos la reducción de la tensión en alguno de los tirantes, si, por ejemplo, se sobrepasara el límite elástico del material de uno de ellos o la resistencia a compresión del mástil, etc. Recordemos que las verdaderas magnitudes de estos vectores son inmediatas en la representación en diédrico.

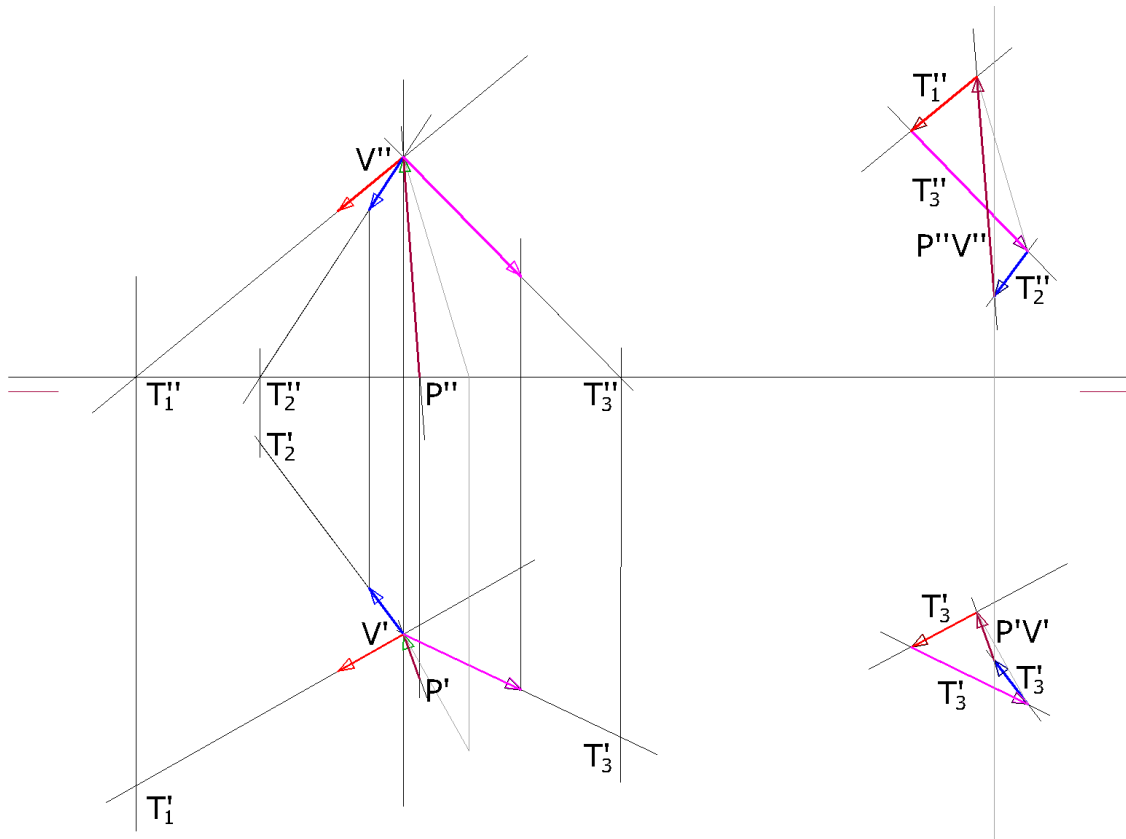


Fig. 7.10. Utilización conjunta de la Estática Gráfica y la Geometría Descriptiva, para determinar el equilibrio del sistema Puntal-Tirantes, mediante las Proyecciones diédricas ortogonales del sistema y el Polígono de fuerzas asociado, también representado por sus proyecciones. (Cálculos y dibujos propios).

**7.3. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DEL C.D.G. DE LÍNEAS, SUPERFICIES Y VOLÚMENES**

Son numerosos los casos expuestos en capítulos anteriores que hacen referencia a los conceptos relativos a la teoría sobre la que se basa el cálculo de estas aplicaciones grafostáticas, por tanto, nos limitaremos en este y otros siguientes apartados a mostrar algunos ejemplos de cálculos que con bastante buena aproximación resuelven lo que, analíticamente sería un procedimiento de relativa dificultad.

Todos los casos que estudiamos traen causa de la formación de dos Sistemas de Vectores Deslizantes Paralelos, con dos direcciones distintas, de los que calcularemos la posición del Eje Central. No es necesario que las direcciones de los dos sistemas sean perpendiculares, bastará que no sean coincidentes. Los vectores de los dos sistemas considerados estarán aplicados en los C.D.G. de las porciones elementales en que dividamos la línea, la superficie o el volumen correspondiente, representando el módulo de cada vector la longitud, superficie o volumen de la porción correspondiente.

a) - Caso del Cálculo grafostático del C.D.G de una Línea. Sea la poligonal A, B, C, D, de la que queremos calcular el C.D.G. Elegido un Polo cualquiera O , construimos el Polígono de fuerzas, de radios polares I, II, III, IV y V, que unen el Polo y los orígenes y los extremos de los vectores  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ , que representan las longitudes de AB, BC, CD y DA. La intersección de los lados I' y V' del Polígono funicular recíproco, trazado con vértices en las rectas de acción de los vectores, determina el punto del Eje Central del sistema. Repetido el procedimiento para los vectores  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ , sistema con dirección perpendicular al anterior obtenemos el otro Eje Central, cuya intersección es ( G ).

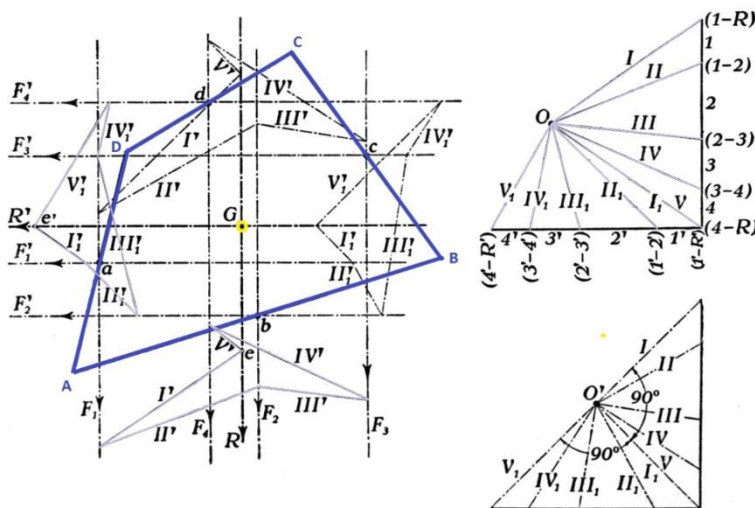


Fig. 7.11. Cálculo del C.D.G. de la poligonal A, B, C, D. Se demuestra en las dos construcciones que la elección del Polo O y el O', proporcionan resultados idénticos, por lo que dicha elección es indiferente. (Dibujos propios sobre una propuesta de Rubio, 1951: 30)<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Rubio Sanjuan, Isidoro. *Grafostática y sus aplicaciones a la construcción*. Nuevas Gráficas: Madrid 1931.  
 Rubio Sanjuan, Isidoro. *Elementos de Grafostática*. Labor: Barcelona 1951.

b) - Cálculo del C.D.G. de una Superficie. Sea la sección en T de la Fig. 7.12. delimitada por la poligonal A, B, C, D, E, F, J, H, (señalada en amarillo), que descomponemos en tres superficies, un triángulo superior y dos rectángulos. Es sistema de vectores deslizantes paralelos es ahora de tres vectores que representan en módulo las superficies descritas. El C.D.G. buscado es la intersección de los Ejes Centrales (marcados en azul). Según el polo elegido, el funicular recíproco se abre o cierra más, con mejor visión y medida, necesaria a veces, como veremos en el caso de los Momentos de Inercia. Además conviene señalar que el Polígono de fuerzas puede realizarse a la escala conveniente a las dimensiones del dibujo. En la Fig. 7.12 se han dibujado a la mitad.

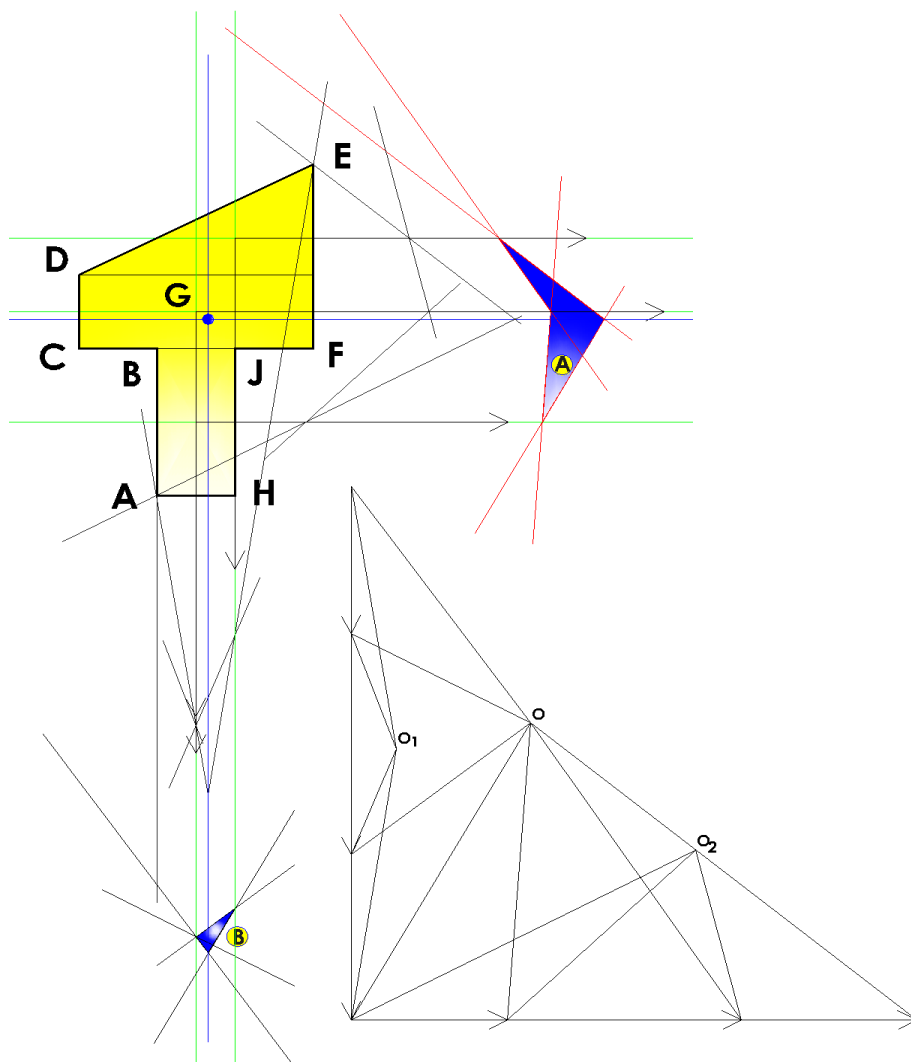


Fig. 7.12. Cálculo del C.D.G. de la sección plana encerrada por la poligonal A, B, C, D, E, F, J, H. Se han utilizado los Polos  $O$ ,  $O_1$  y  $O_2$ , para la creación de cuatro polígonos de fuerzas y sus cuatro funiculares recíprocos, comprobándose idénticos resultados, como venimos exponiendo. En el caso del trazado del funicular (B) los vectores que representan las áreas de los dos rectángulos, están sobre la misma recta de acción, por lo que en su trazado, sobre el primer punto situado sobre esta recta de acción, coinciden las paralelas a los tres primeros radios polares. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

c) - Es posible también determinar el C.D.G. de secciones a las que se les haya restado parte de la superficie, como en el caso de la corona circular excéntrica que se muestra en la Fig. 7.13.

Bastará tener en cuenta en el Polígono de fuerzas que el vector del sistema que corresponde a la superficie eliminada, ( $\bar{F}_2$ ) deberá colocarse con el sentido contrario al resto, en este caso al que representa la superficie del círculo mayor, ( $\bar{F}_1$ ) y trazar el Polígono funicular con las paralelas a los radios polares, ordenadamente. Así, por un punto cualquiera de la recta de acción de  $\bar{F}_1$ , trazaremos paralelas a los radios polares (I) y (II) hasta que esta última (II') corte a la recta de acción de ( $\bar{F}_2$ ) por donde se trazará (III') paralela al radio polar (III), determinándose el punto (a) como intersección de (I') y (III'). El Eje Central del sistema, ha de tener la misma dirección de los vectores paralelos del sistema y pasará por (a). La intersección del Eje Central y el Eje de simetría de la sección, (G) es el C.D.G. buscado.

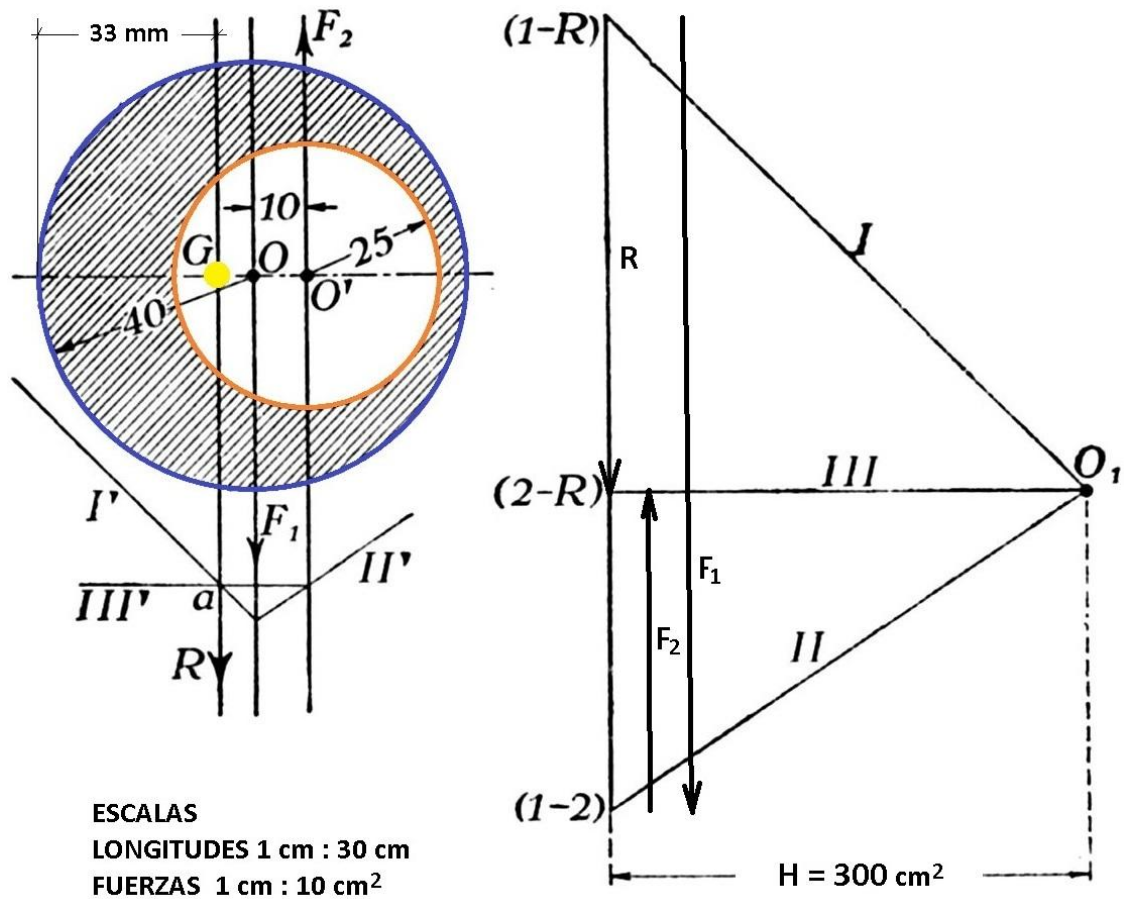


Fig. 7.13. Determinación del C.D.G. de una corona circular excéntrica, de radio mayor 40 mm y radio del círculo menor 25 mm., cuyos centros están separados 10 mm. La posición de (G) sobre el Eje de simetría, encontrada está situada a 33 mm del extremo izquierdo del diámetro, Eje de simetría de la sección, o sea, a 7 mm a la izquierda del centro de la circunferencia mayor. Calculado analíticamente el resultado es de 33.59 mm. Una diferencia de 0.6mm. (Dibujos propios sobre una propuesta de (Rubio, 1951: 31)

El cálculo grafostático de C.D.G. de volúmenes, ofrecen poca más dificultad que las líneas o superficies estudiados hasta ahora. El proceso pasaría por el cálculo de los volúmenes de los cuerpos geométricos elementales en que podamos dividir el objeto de nuestro cálculo y formalizar el Sistema de vectores paralelos, cuyos vectores representarán a esos volúmenes, a la escala conveniente para el dibujo.

En la Fig. 7.14 se muestran los cálculos de los C.D.G. de sendos sólidos propuestos en distintos libros de Mecánica. (Rubio, 1949: 58)<sup>4</sup>, (Hibbeler, 2006: 45, 141,202)<sup>5</sup>

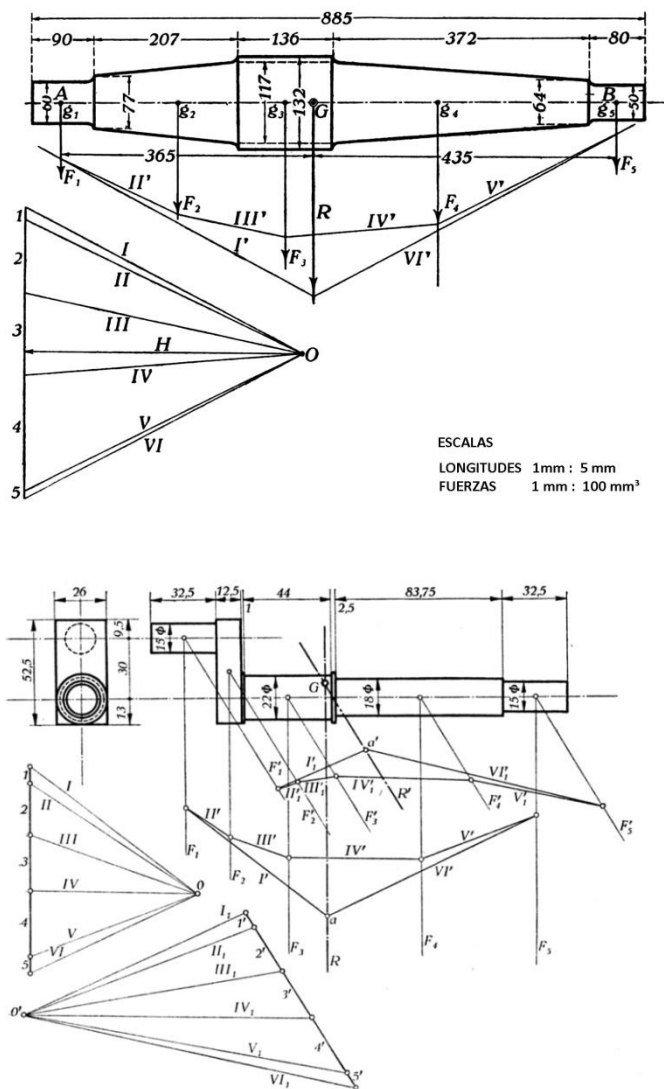


Fig. 7.14. Cálculo de los C.D.G. de dos sólidos. El primero corresponde a una pieza compuesta de tres cilindros y dos troncos de cono, que presenta un eje de simetría. En el segundo caso, el sólido es una suma de cilindros unidos a una placa paralelepípedica y no presenta ejes de simetría, por lo que es necesario realizar el proceso dos veces con sistemas de vectores paralelos y distinta dirección. El segundo diagrama de fuerzas se ha planteado esviado un ángulo cualquiera respecto al primero. Los módulos de los vectores siguen siendo los volúmenes de los sólidos parciales. (Rubio, 1951: 32-33).

<sup>4</sup> Rubio Sanjuán, Isidoro. *Mecánica Industrial*. Editorial Labor: Barcelona 1949.

<sup>5</sup> Hibbeler, R.C., *Mecánica de materiales*. Pearson Educación: México 2006.

#### 7.4. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

El cálculo de Momentos de Inercia mediante los métodos de la Estática Gráfica ha sido desde que Culmann mostrara su metodología, una de las aplicaciones más apreciadas por su simplicidad, frente a la dificultad que pueden presentar los cálculos analíticos en determinadas secciones.

La Fig. 7.16 muestra el cálculo del Momento de inercia de un sistema de vectores paralelos respecto a un eje de su misma dirección. Se ha realizado mediante los dos procedimientos tradicionales de la Estática Gráfica. (Culmann, 1880: 303-455)<sup>6</sup>

El método de Culmann consiste en encontrar las intersecciones entre los lados del polígono funicular recíproco del polígono de fuerzas y el eje respecto al cual buscamos el Momento de Inercia. Un segundo polo elegido arbitrariamente tiene sus radios polares desde el polo  $O'$  hasta las intersecciones encontradas anteriormente. De un segundo funicular recíproco de este último polígono de fuerzas, se busca la intersección del primer y último lado con el eje dado y se mide la distancia ( $z$ ) entre esas intersecciones. El Momento de inercia es el producto:  $I = H \cdot H' \cdot z$  de las dos distancias polares por la distancia encontrada ( $z$ ).

El método de Mohr, más rápido, consiste en medir el área encerrada entre el el Polígono funicular de polo  $O$  y el eje respecto al que calculamos el M.I., cuyo valor se obtiene multiplicando dos veces esa área ( $A$ ) por la distancia polar ( $H$ ).

En cuanto a las escalas a utilizar, conviene señalar, en primer lugar, que todas las medidas del polígono de fuerzas, por ser estas representantes de superficies, se miden en unidades al cuadrado, mientras en el polígono funicular recíproco, se mide en unidades lineales, salvo el área encerrada por el funicular, que como área tiene unidades al cuadrado.

En la Fig. 7.17. hemos realizado el cálculo del Momento de inercia de una sección plana respecto a dos ejes perpendiculares que pasan por su C.D.G. que hemos calculado previamente.

Se ha realizado, también en este caso, el cálculo mediante los dos métodos mencionados, de Culmann y Mohr, con la coincidencia total de resultados, como es natural. Se han elegido las distancias polares  $H = 6 \text{ cm}^2$   $H' = 5 \text{ cm}$ .

---

<sup>6</sup> Culmann dedica los cinco capítulos de la (*Troisième Partie* de su *Traité de Statique Graphique*. Dunot Éditeur: Paris 1880) a los Momentos de Inercia, tema al que concede vital importancia por sus consecuencias estructurales.

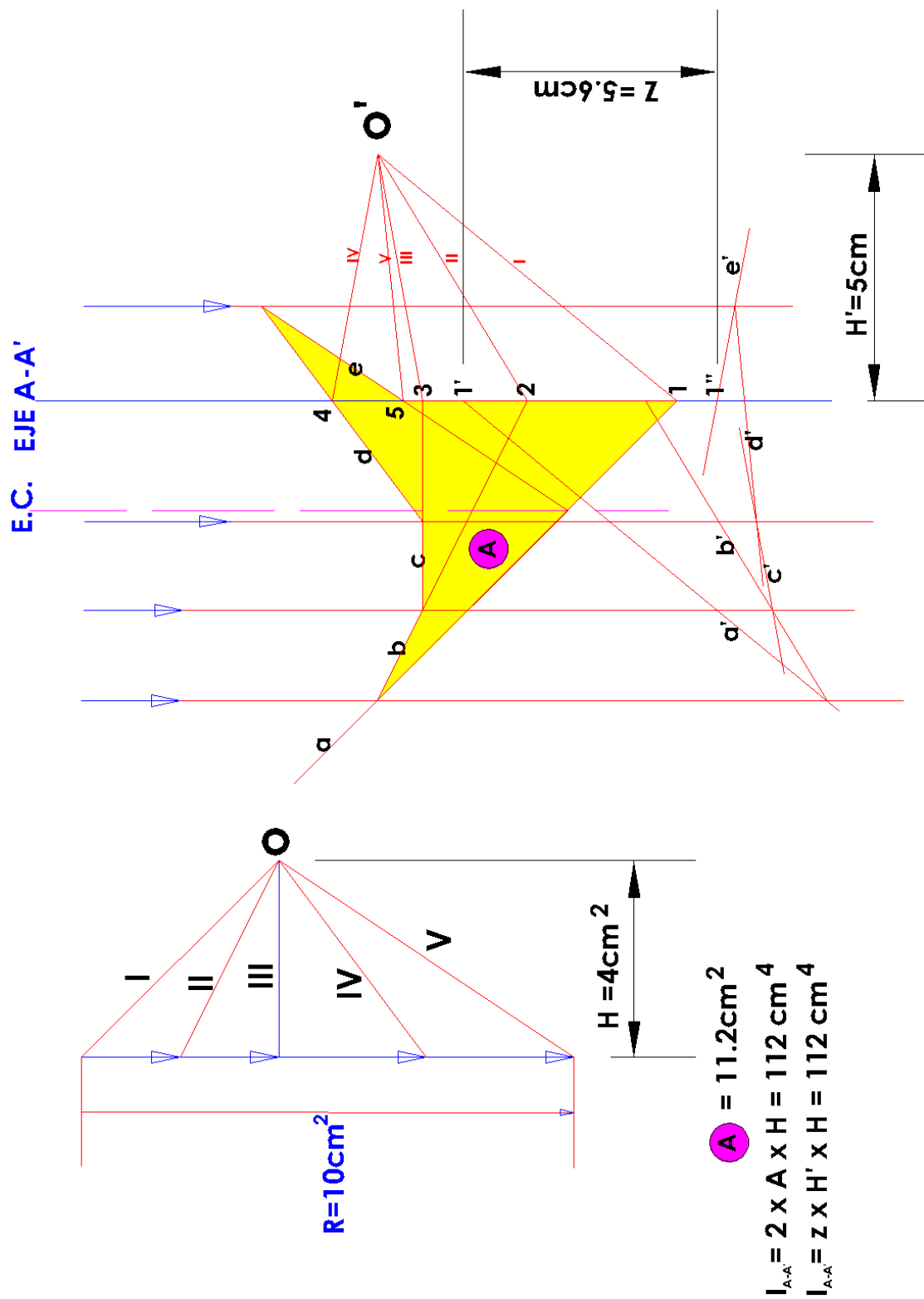


Fig. 7.16. Cálculo del Momento de Inercia de un sistema de vectores deslizantes paralelos respecto a un eje de su misma dirección. Nótese la coincidencia entre los resultados obtenidos mediante los dos métodos de cálculo. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)

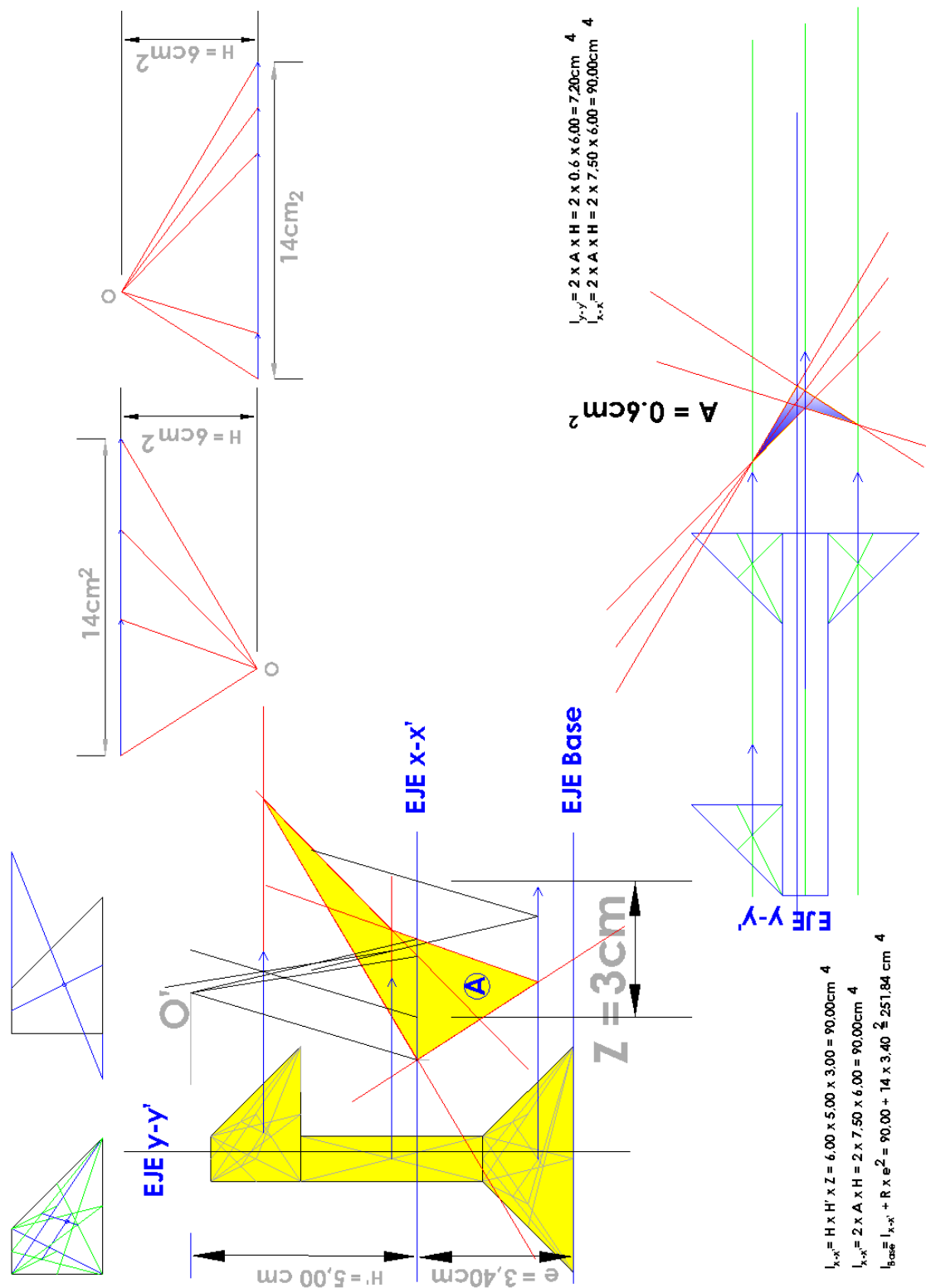


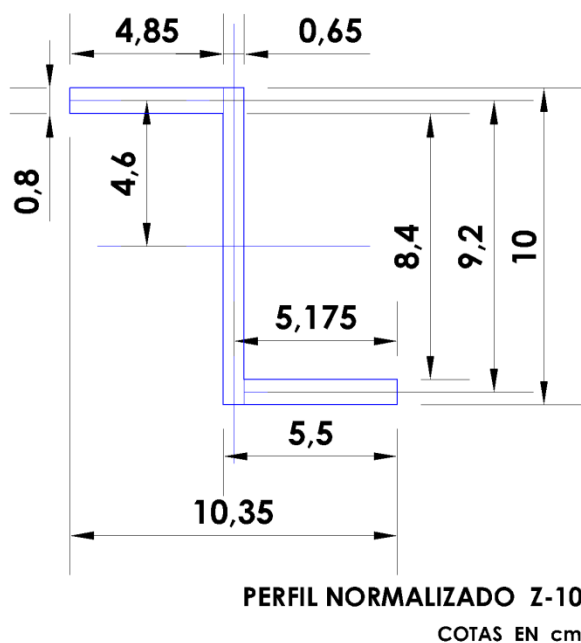
Fig. 7.17. Cálculo del Momento de Inercia de una sección plana irregular respecto a los ejes perpendiculares XX' e YY', que pasan por su C.D.G., calculado previamente. Nótese la coincidencia entre los resultados obtenidos mediante los dos métodos de cálculo. (Dibujos y cálculos grafostáticos propios)



En la Fig. 7.18. Se ha realizado el cálculo grafostático de los Momentos de Inercia de la sección de un perfil en Z respecto a dos ejes X e Y perpendiculares, que pasan por el C.D.G. de la sección,  $I_x$  e  $I_y$ .

Asimismo, hemos realizado el cálculo grafostático del Momento Centríflugo (denominación antigua del Producto de Inercia),  $I_{xy}$  de la sección respecto a los mismos ejes. Llamamos la atención sobre este cálculo, cuya metodología no aparece en la mayoría de los tratados y que requiere del doble cálculo de los Momentos Estáticos de las superficies elementales en que hemos descompuesto la sección, respecto a cada uno de los ejes, X e Y.

Hemos asignado valores numéricos para una mejor comprensión del desarrollo de los cálculos. Así, se trata de un antiguo perfil normalizado en Z, cuyas dimensiones son las del esquema:



Las superficies correspondientes de las alas y del alma son:

$$S_{\text{ala}} = 3.88 \text{ cm}^2$$

$$S_{\text{alma}} = 6.50 \text{ cm}^2$$

Los Momentos y Producto de Inercia calculados grafostáticamente han resultado:

$$I_x = 220 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 74 \text{ cm}^4$$

$$P_{xy} = 100 \text{ cm}^4$$

Advertimos que en la metodología del cálculo grafostático de Momentos de Inercia de secciones, dado que se trata de sistemas continuos, es necesaria la división de la superficie total en un número suficiente de partes elementales. En el caso que nos ocupa para la determinación de  $I_y$  (diagrama inferior de la izquierda) hemos dividido en cuatro elementos las alas superior e inferior, pues son muy diferentes las distancias de sus respectivos C.D.G. parciales al eje Y, no siendo correcta la sustitución de toda su superficie, representada por un solo vector aplicado en la mitad del rectángulo del ala, tanto superior como inferior. Por las mismas razones, para el Momento  $I_x$  hemos hecho una división en ocho partes el alma de la sección. Las áreas encerradas por los funiculares, (A) y (A') son de esta manera correctas para el producto  $I_x = 2 \cdot A' \cdot H'$  y  $I_y = 2 \cdot A \cdot H$ .

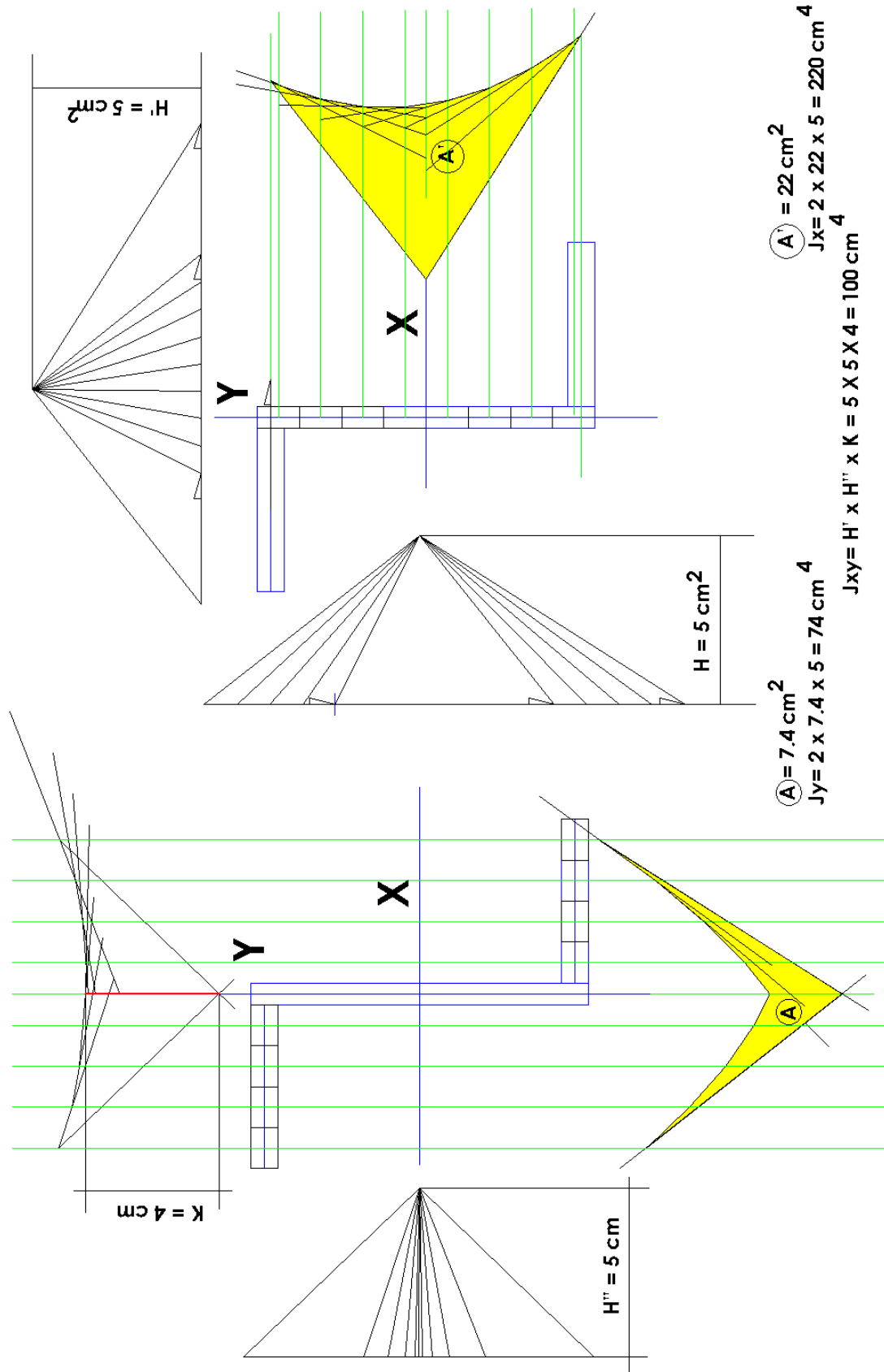


Fig. 7.18. Cálculo de los Momentos y el Producto de Inercia de la sección de un perfil normalizado en Z de 10 cm de canto. Se ha utilizado el método de Mohr para los Momentos de Inercia y el de Culmann para el Producto de Inercia.

## 7.5. TRAZADO DEL CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

El trazado del Círculo de Mohr para Momentos y Productos de Inercia, proporciona una inestimable colaboración para el conocimiento de los valores estáticos de las secciones planas, con las que trabajamos habitualmente los arquitectos. Hemos analizado en los párrafos anteriores el cálculo de Momentos y Productos de Inercia, que ejemplificamos con una sección Z.10., elegida por la ausencia de ejes de simetría. Es bien sabido que para las secciones con un eje de simetría, éste es baricéntrico y por tanto es un Eje Principal de Inercia, junto con su ortogonal por el C.D.G., siendo nulo el Producto de inercia. No es este el caso de la sección Z.10 que analizamos.

La Fig. 7.19. muestra el trazado del Círculo de Mohr para esta sección. Sobre el Eje X y a partir del baricentro G, grafostáticamente ya calculado, se llevan los segmentos GD y GE que representan (a la escala que se determine para los Momentos de Inercia) los Momentos de Inercia  $J_x$  y  $J_y$  respectivamente. En nuestro caso hemos dibujado a la escala  $1\text{cm} : 10\text{ cm}^4$ . ( Utilizamos la notación  $J_x, J_y$  por comodidad de escritura en los dibujos, evitando la confusión de la mayúscula I, con el número 1).

Por los puntos E y D se trazan perpendiculares al eje X, llevando el valor de  $-J_{xy}$  hacia arriba y de  $J_{xy}$  hacia abajo, obteniéndose los puntos P y C. Uniendo P con C se tiene el diámetro del Círculo de Mohr buscado, siendo P su Foco. El Círculo corta al Eje X en los puntos A y B. Los segmentos PA y PB señalan las direcciones de los Ejes Principales de Inercia, puesto que estos ejes determinarían Productos de Inercia Nulos, al convertirse los segmentos DC y EP en los puntos A y B respectivamente. En nuestro caso las direcciones principales han sido marcadas en rojo y forman con los ejes X e Y un ángulo de  $27^\circ$ , que coincide exactamente con los resultados analíticos que para el cálculo del ángulo formado por un una pareja de ejes XY con los ejes Principales de una sección, señalan que ha de cumplirse  $\text{tg}(2\alpha) = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{2 \cdot 100}{220 - 74} = 1.37 \rightarrow 2\alpha = 53.87^\circ$   
 $\rightarrow \alpha = 26.94^\circ$ . La expresión de esta relación proviene de hacer  $dJ_x/d\alpha = 0$  dado que la función que liga el Momento de Inercia  $J_x$  con el ángulo que forma este eje con el Principal de Inercia tendrá un valor máximo o mínimo para ese ángulo buscado.<sup>7</sup> También es posible determinar con el Círculo ya trazado, el cálculo inmediato de los Momentos y Producto de Inercia de la sección para cualquier pareja de ejes, con inclinación cualquiera, como los ejes mm y nn de nuestro cálculo. Si el ángulo es de  $10^\circ$  a la derecha del eje X, obtenemos  $J_m = 179\text{ cm}^4$ ,  $J_n = 115\text{ cm}^4$  y  $J_{mn} = 119\text{ cm}^4$ . Finalmente los valores para los Ejes Principales de Inercia son:  
 $J_x^* = 271\text{ cm}^4$   $J_y^* = 23\text{ cm}^4$   $J_x^*y^* = 0$

<sup>7</sup> Hibbeler, R.C. *Mecánica de materiales*. 6ª Ed. Trad. Cera Alonso (José de la) / González y Pozo (Virgilio). Pearson Educación.: Naucalpan de Juárez, México 2006.

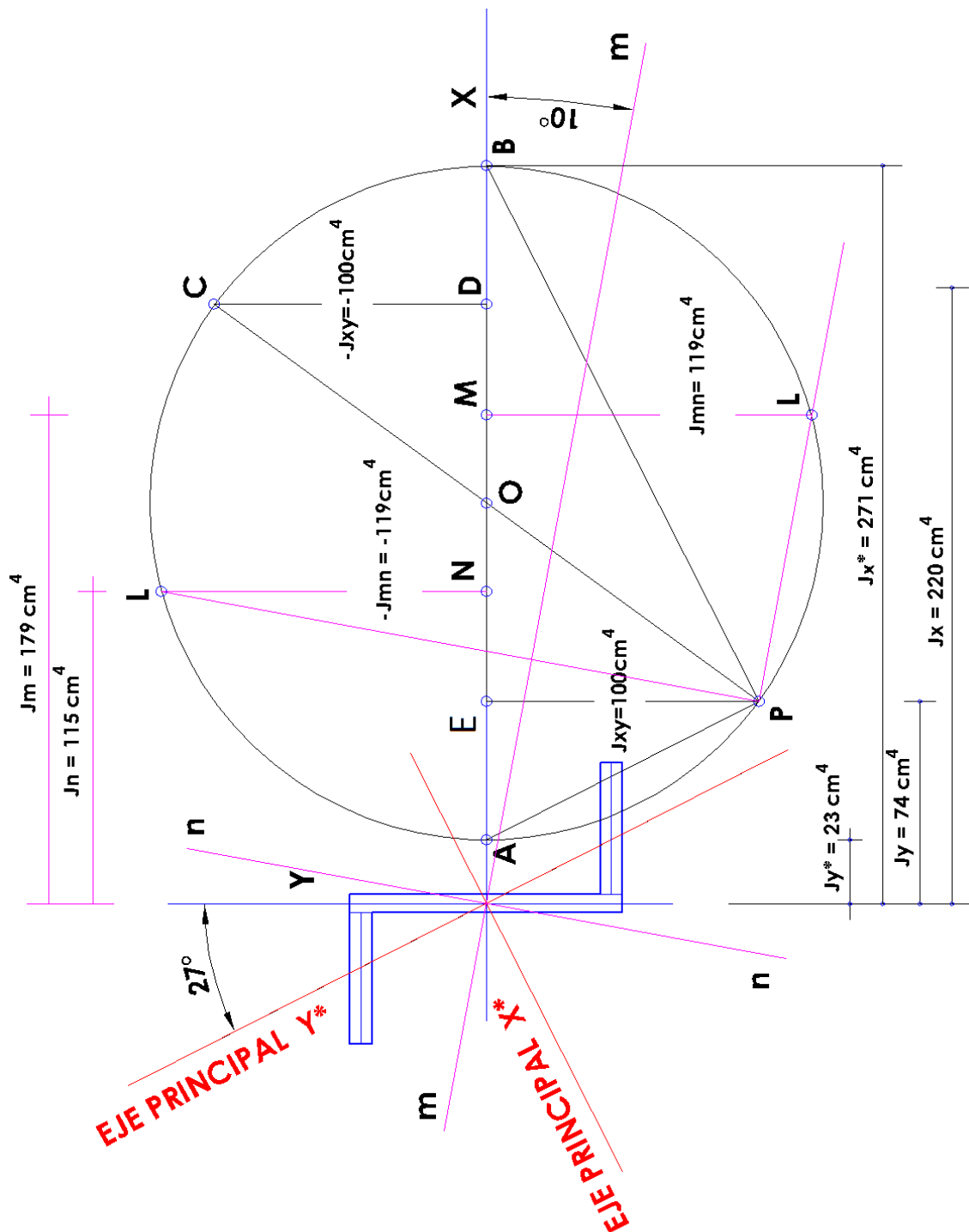


Fig. 7.19. Cálculo del Círculo de Mohr de Momentos de Inercia, para la sección de un perfil Z.10, del que hemos calculado sus Momentos y Producto de Inercia. El Círculo de Mohr permite el cálculo gráfico de los Ejes Principales de Inercia de la sección, que para este perfil, forman un ángulo de  $27^\circ$  con los ejes XY primitivos, así como los Momentos y Productos de Inercia para parejas de ejes con cualquier inclinación. (Cálculos y dibujos propios)

## 7.6. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE LA ELIPSE CENTRAL DE INERCIA DE UNA SECCIÓN

El trazado de la Elipse Central de Inercia es otro de los métodos grafostáticos que nos permite, habiendo determinado previamente los Momentos Principales de Inercia, calcular, fácilmente los Momentos y Producto de Inercia de la sección estudiada, respecto a cualquier par de ejes, que formen un ángulo cualquiera con los Ejes principales.

En efecto, en la Fig. 7.20., conocidos ya los Momentos Principales  $J_{x^*}$  y  $J_{y^*}$  (referidos a los Ejes Principales  $X^*$  e  $Y^*$ ) y la Superficie de la sección, podemos determinar los Radios de giro correspondientes:

$$i_{x^*} = \sqrt{\frac{J_{x^*}}{S}} = 4.35 \text{ cm} \quad i_{y^*} = \sqrt{\frac{J_{y^*}}{S}} = 1.27 \text{ cm.}$$

Éstos, serán los semiejes de la Elipse Central de Inercia de la Sección.

Para determinar ahora los Momentos de Inercia con respecto a un par de ejes cualesquiera ( $m$ ) y ( $n$ ) se trazan paralelas a estos ejes que sean tangentes a la Elipse Central de Inercia, que interceptarán a dichos ejes en sendos puntos de tangencia, determinando sobre los nuevos ejes ( $m$ ) y ( $n$ ) dos segmentos cuyas magnitudes representan los nuevos radios de giro  $i_m$  e  $i_n$ , con cuyos valores podremos calcular los nuevos Momentos de Inercia  $J_m$  y  $J_n$ . Así:

$$J_m = i_m^2 \cdot S = 3.54^2 \text{ cm}^2 \cdot 14.3 \text{ cm}^2 = 179 \text{ cm}^4$$

$$J_n = i_n^2 \cdot S = 2.83^2 \text{ cm}^2 \cdot 14.3 \text{ cm}^2 = 115 \text{ cm}^4$$

Una paralela al nuevo eje ( $n$ ) por el punto superior de tangencia determina la distancia ( $a$ ) y una paralela al ( $m$ ) por el punto de tangencia inferior determina el segmento ( $b$ ).

Los productos  $a \cdot i_m \cdot S = b \cdot i_n \cdot S = J_{mn}$  Momento Centrífugo o Producto de Inercia de la sección respecto a estos Ejes ( $m$ ) ( $n$ ).

Una vez más, la Estática Gráfica nos facilita con sus construcciones gráficas, cada vez más sencillas, con la ayuda de los programas informáticos de Dibujo asistido por ordenador, unos cálculos, que realizados analíticamente, concuerdan sin duda con los grafostáticos, pero resultan complicados en algunos casos.

La comprobación visual de los resultados es siempre un punto a favor de la Grafostática y el manejo de la Elipse Central de Inercia y el giro de determinados ejes nos puede determinar la posición más interesante de determinados elementos estructurales.

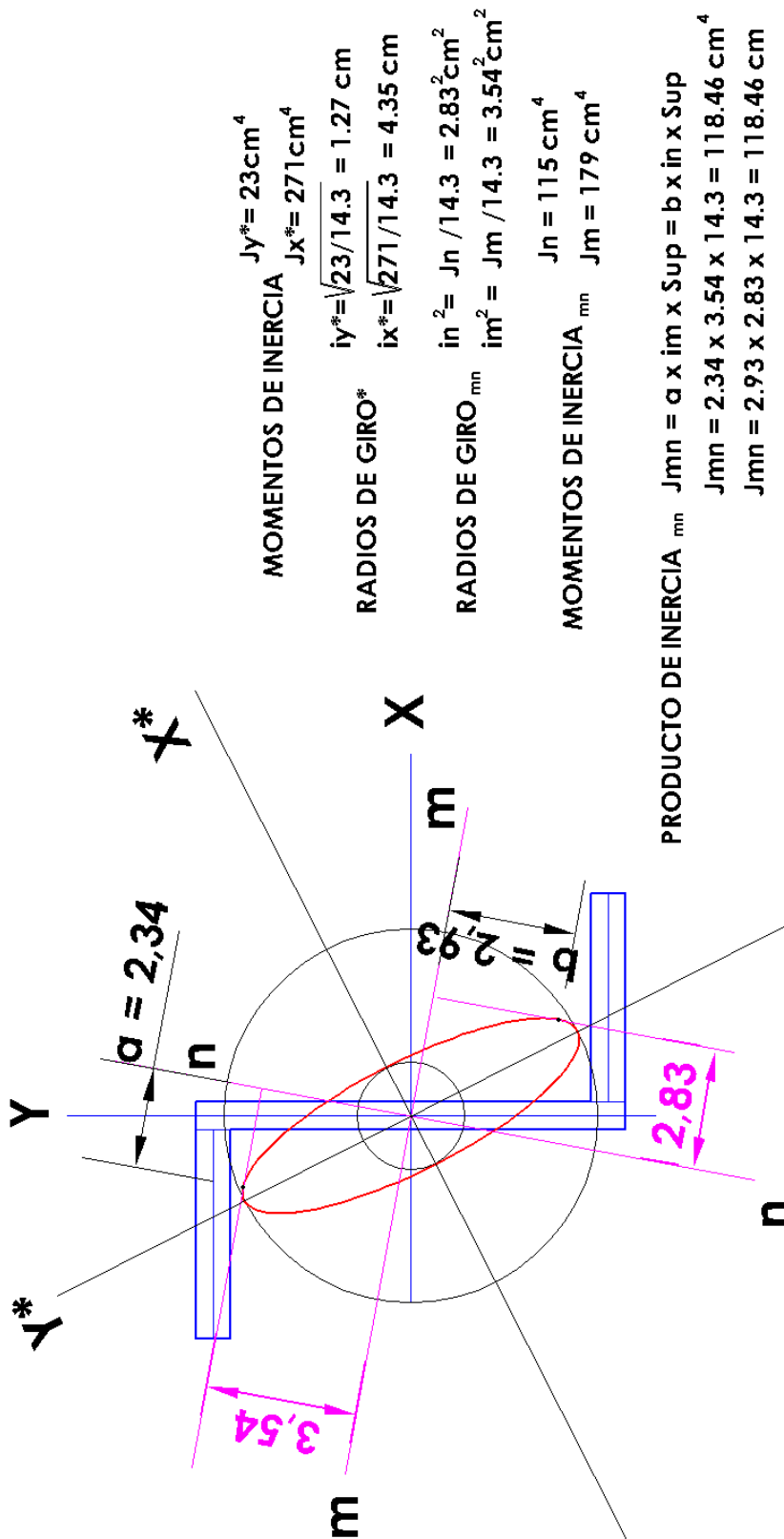


Fig. 7.20. Cálculo de Momentos de Inercia de la sección Z.10 respecto a Ejes **mm - nn** que forman un ángulo cualquiera con los Ejes Principales de Inercia.

### 7.7. DETERMINACIÓN GRAFOSTÁTICA DEL NÚCLEO CENTRAL DE UNA SECCIÓN

Como ya analizamos en el Capítulo 3 de esta Tesis, es de gran importancia en el análisis estructural el conocimiento del comportamiento de las secciones del material resistente a las acciones exteriores. La posición de una fuerza normal a una sección, determina en ella un estado tensional que conocemos bien, por la Resistencia de Materiales y que viene expresado:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{N \cdot e_y}{I_x} y + \frac{N \cdot e_{yx}}{I_y} x = \frac{N}{S} \left[ 1 + \frac{e_y}{\frac{I_x}{S}} y + \frac{e_x}{\frac{I_y}{S}} x \right] = \frac{N}{S} \left[ 1 + \frac{e_y}{i_x^2} y + \frac{e_x}{i_y^2} x \right]$$

y va desde un valor de tensiones, uniforme en todos los puntos que la componen, hasta una variación de estas tensiones en cada punto, llegando a la situación de cambio de signo dentro de la propia sección.

Se pueden dar posiciones particulares de la carga que determinan en todo caso la construcción del núcleo central.

Si analizamos el desplazamiento de la fuerza colocada sobre el baricentro de la sección y la desplazamos hacia cualquier lado, se comprueba que el eje neutro se mueve acompañando a la fuerza, y las tensiones cambiarán con el movimiento de ésta. En un determinado lugar de la aplicación de la carga las tensiones comienzan a cambiar de signo formándose diagramas que pasan de rectangulares a trapezoidales, triangulares y doblemente triangulares. Cuando el diagrama es exactamente un triángulo, el eje neutro se sitúa tangente a la sección, esa es la posición límite que determina el contorno del Núcleo Central de la sección, pudiéndose definir, pues, como el lugar geométrico de los puntos de la sección en los que al aplicar en ellos la carga, generan tensiones del mismo signo en toda la sección.

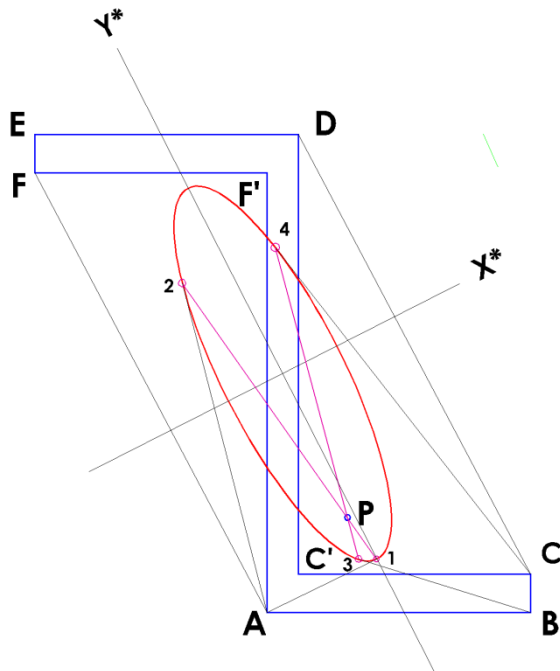
Los tratados de Mecánica y Resistencia de Materiales, ofrecen ecuaciones para determinar la posición de los puntos que marcan el contorno del Núcleo, aunque en ocasiones, como ya demostramos en el Capítulo 4, Punto 4.3., Fig. 4.21 y 4.22, determinadas secciones ofrecen serias dificultades para la determinación analítica del Núcleo Central.

Cumpliendo nuestro objetivo en esta Tesis, de desarrollar el cálculo grafostático del Núcleo Central de cualquier sección, se ha estudiado el caso, en la Fig. 7.21., de la sección en ( Z ), de la que ya hemos expresado algunos de sus características geométricas y mecánicas. Hemos determinado los puntos del Núcleo, aprovechando la interrelación entre Geometría Proyectiva y Grafostática, como los polos de las rectas tangentes a la sección, respecto a la Elipse Central de Inercia calculada. .

Una vez dibujados los Ejes principales de Inercia de la sección y dibujada también la Elipse Central de Inercia de la misma, el procedimiento utilizado pasa por encontrar los polos de las rectas tangentes al perímetro de la sección.

De cada vértice de dicho contorno, encontramos la recta polar recíproca respecto a la cónica (Elipse Central de Inercia) con el conocimiento de la Reciprocidad que la Geometría Proyectiva nos brinda, entre Polo de una recta respecto a la cónica y recta polar de un punto respecto a ella.

Así, trazamos las tangentes a la elipse desde los dos vértices inferiores de la sección, uniendo los puntos de tangencia trazados desde uno de esos vértices, encontramos su recta polar recíproca. De igual modo encontramos la polar recíproca del otro vértice



Describimos brevemente en el esquema adjunto, el cálculo del Polo (P) respecto a la Elipse Central de Inercia de la sección dada, recíproco del segmento AB de la base de la sección.

Se trazan desde el vértice (A) las tangentes A1 y A2 a la elipse en los puntos 1 y 2. La recta 1-2 es recta polar recíproca del polo A. A su vez trazamos desde B las tangentes B3 y B4 a la elipse en los puntos 3 y 4. La recta 3-4 es recta polar recíproca de B respecto a la elipse. La intersección de las polares 1-2 y 3-4 es el polo (P) de la recta AB respecto a la elipse. (P) es el primer punto encontrado del Núcleo Central de la sección.

Por las características que definen el Núcleo Central de una sección, hay que tener en cuenta que:

- Éste es siempre una figura cóncava, que tiene tantos lados como vértices tiene la sección.
- El Núcleo central es un lugar geométrico que se ubica en torno al C.D.G. de la sección.
- A efectos del cálculo de los polos de las rectas del contorno de la sección, no se tienen en cuenta las concavidades que pueda presentar ésta, de tal manera, que el Núcleo Central se calcula como si existieran realmente las líneas CD y FA sin los ángulos cóncavos CC'D y FF'A del esquema.



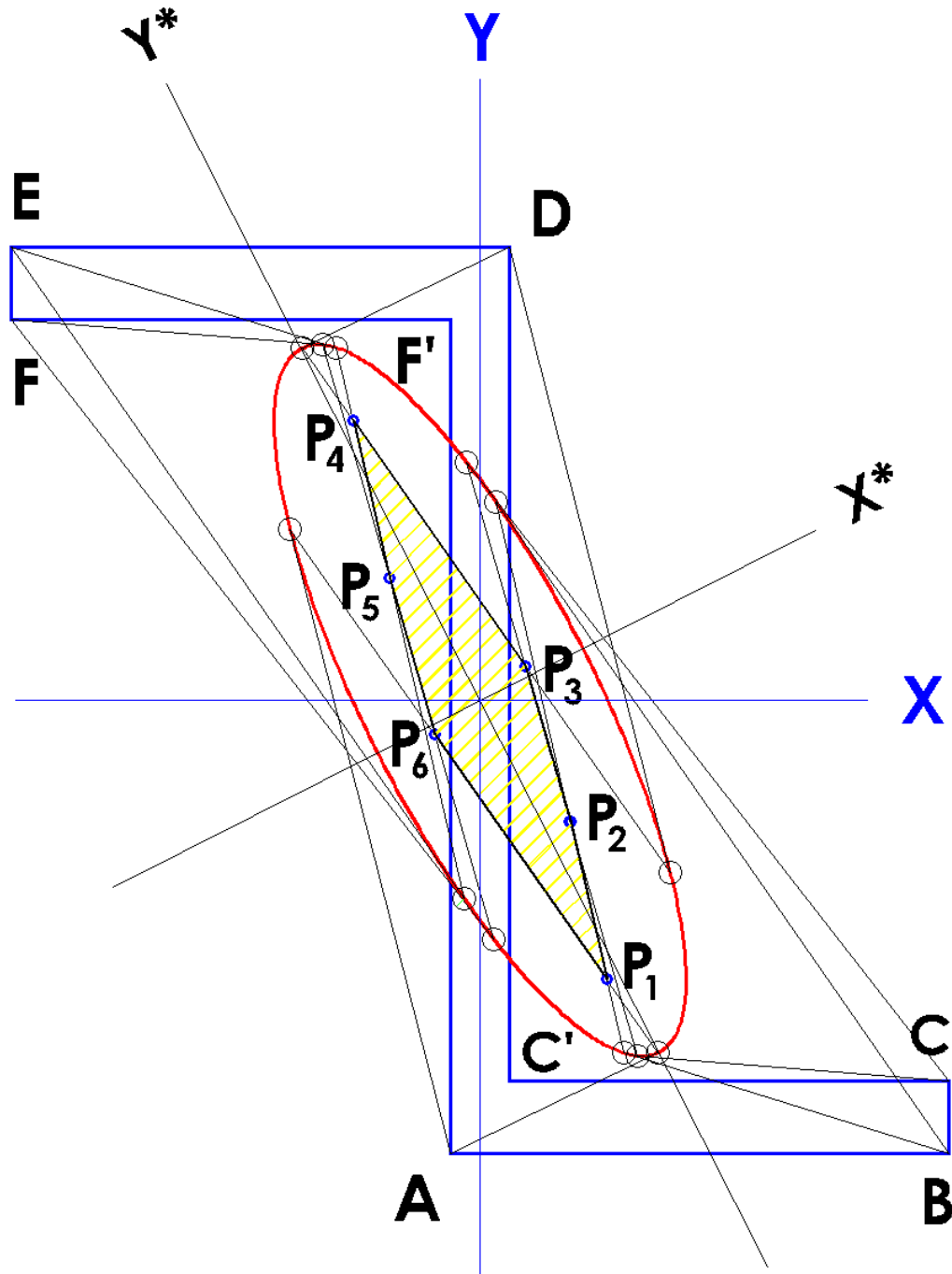


Fig. 7.21. Determinación del Núcleo Central de la sección Z.10. La metodología seguida consiste en el cálculo de los seis polos de las rectas que definen el contorno de la sección Z dada.

P1 es el polo del lado mayor del ala inferior, recta AB, y es intersección de la recta polar de A con la polar de B, ambas se obtienen por unión de los dos puntos de tangencia en la elipse de las tangentes que parten de A e idénticamente, la polar de B se obtiene uniendo los puntos de tangencia con la elipse de las tangentes que parten desde B.

P2 es el polo del lado menor del ala inferior, recta BC. P3 es el polo de la hipotética recta CD. P4 es el polo de la recta DE, lado mayor del ala superior. P5 es el polo de la recta EF, lado menor del ala superior. Y finalmente, P6 es el polo de la hipotética recta FA. Los polos P1, P2 y P3 no están alineados, de la misma manera que sucede con P4, P5 y P6. (Cálculos y dibujos propios)

## 7.8. DETERMINACIÓN GRAFOSTÁTICA DE LOS ESFUERZOS CORTANTES, MOMENTOS FLECTORES Y FLECHAS EN VIGAS ISISTÁTICAS DE DIRECTRIZ RECTA

Una de las aplicaciones de la Estática Gráfica más extendidas ha sido desde su divulgación en el último tercio del S. XIX, hasta prácticamente nuestros días, es la representación de los diagramas de Esfuerzos Cortantes y Momentos de Flexión en vigas bien biapoyadas, bien empotradas en un extremo. La simplicidad estructural de los sistemas de que se trata, y el empleo masivo de este tipo de estructuras en todo tipo de construcciones, ha supuesto que la práctica totalidad de escuelas de Arquitectura y todos la ingenierías incluyeran en sus temarios, al menos el conocimiento de estos diagramas.

En la mayor parte de los casos, si hablamos de 1970 hacia atrás, el estudio de las bases que la Grafostática proporciona para la comprensión de estos sistemas estáticamente determinados, era materia común en las asignaturas previas al cálculo de estructuras. No obstante, incluso en la actualidad, aun habiendo abandonado la enseñanza de la Estática Gráfica, ha perdurado el trazado, siquiera automático, de los diagramas referidos, en la explicación visual y muy intuitiva, de qué solicitaciones genera un determinado estado de cargas en una sencilla barra biapoyada o empotrada en un extremo, con el resto en voladizo.

Absolutamente todos los tratados objeto de nuestra investigación, tratan el tema, por lo que no será necesario profundizar en exceso en este apartado, aunque como patrón para una didáctica grafostática, era necesaria su inclusión en este capítulo.

Seguiremos el esquema ya utilizado de analizar algunos ejemplos que modelizan los itinerarios a seguir con las aplicaciones correspondientes de la teoría grafostática.

En la Fig. 7.22. se considera la viga de directriz recta apoyada en sus extremos A y B, sometida a las cargas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , si agregamos las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  de los apoyos, en estas condiciones se dice que la viga trabaja a flexión; la acción sobre la viga, del sistema de las cinco fuerzas determina un esfuerzo de flexión.

El sistema de las fuerzas exteriores  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , cargas concentradas y las reacciones  $R_A$  y  $R_B$ , forma un sistema en equilibrio y por tanto, la viga estará en equilibrio sometida a las tres cargas y a las reacciones en los apoyos.

En los problemas de flexión, el itinerario será el siguiente:

Determinar las reacciones para hallar después los esfuerzos cortantes y momentos flectores para las diferentes secciones de la viga, construyendo los diagramas de Esfuerzos Cortantes y Momentos Flectores.

Para una sección cualquiera C, el esfuerzo cortante es la suma algebraica de las fuerzas exteriores situadas a la derecha o izquierda de dicha sección, incluidas las reacciones.

Para una sección cualquiera C, el momento flector es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto a C, incluidas las reacciones. Dado que se trata de un sistema de Vectores deslizantes paralelos, los que representan a las fuerzas actuantes, el momento resultante de las fuerzas actuantes a izquierda o derecha, coincide con el momento de la resultante de dichas fuerzas.

En la Fig. 7.22. se muestra una aplicación a una viga de luz 9 m. Se obtiene  $R_A = 4.150 \text{ Kg}$  y  $R_B = 4.850 \text{ Kg}$  y Momento máximo en la sección más solicitada  $a_2$ :  $M_{m\acute{a}x.} = 1.125.000 \text{ Kg mm}$ . MN = 15mm, que hay que multiplicar por la escala de momentos  $1\text{mm} = 75 \times 200 \times 50 = 750.000 \text{ Kg mm} = 0.75 \text{ Tn.m}$  ( producto de escala de longitudes, por la escala de fuerzas y por la distancia polar)

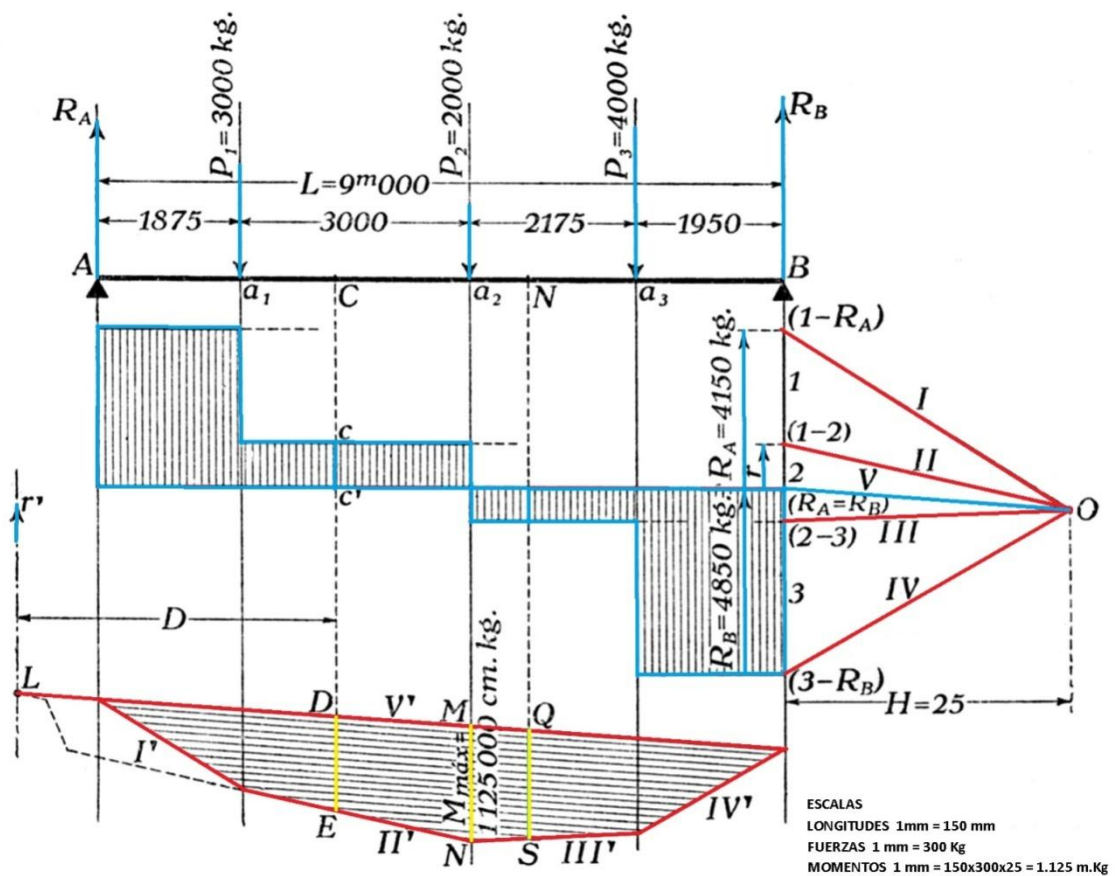


Fig. 7.22.Cálculo de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores y de las reacciones en los apoyos,  $R_A$  y  $R_B$  de una viga cargada con tres cargas concentradas situadas en las secciones  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ . Dibujo propio sobre una propuesta de (Rubio, 1951: 42)

En la construcción del funicular recíproco del polígono de fuerzas, la elección de un punto cualquiera de la recta de acción de  $F_1$ , en la Fig.7.23. para el inicio de su trazado, hace que, salvo simetrías totales de carga y fuerza, no se dé una línea de cierre horizontal. Por comodidad visual y en aras de esa intuición estructural, que intentamos fomentar, se ha realizado un cambio de polo. La línea azul de cierre del primer funicular marca la dirección sobre el polígono de fuerzas a partir de la división RA-RB, sobre la que tomar el nuevo polo, para un cierre horizontal del nuevo funicular. Y si además tomamos una distancia polar unidad (  $1 Tn$  ), esto nos permite medir longitudes en vertical en el diagrama de momentos que corresponden al momento en esa sección en  $Tn.m$ , al ser  $H = 1 Tn$ .

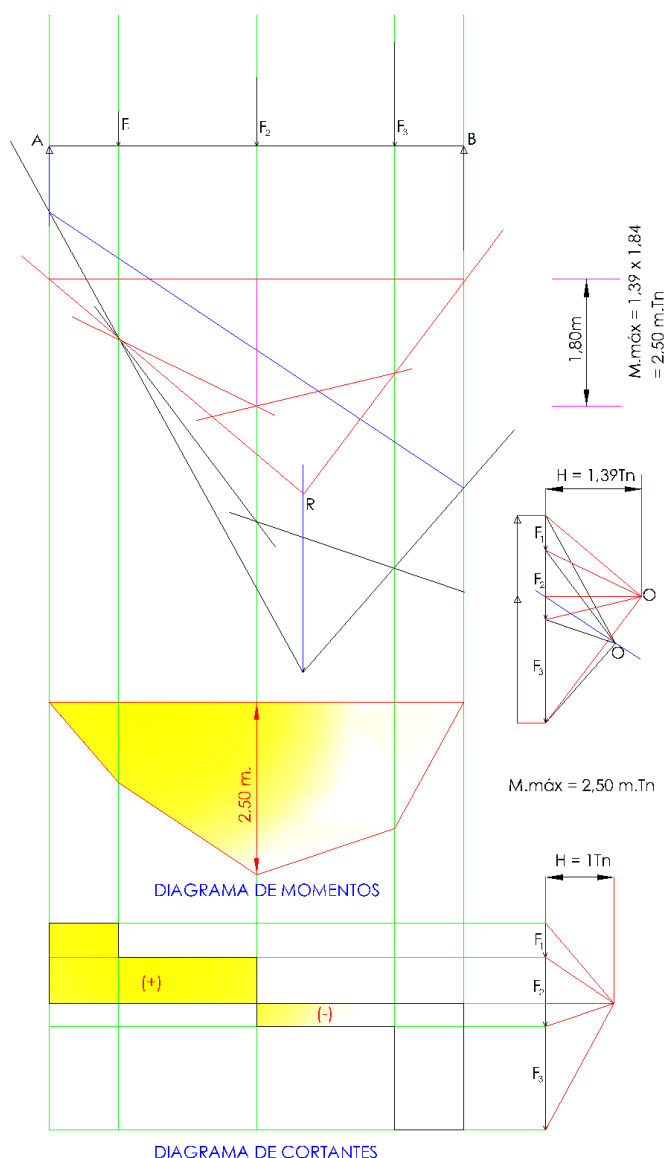
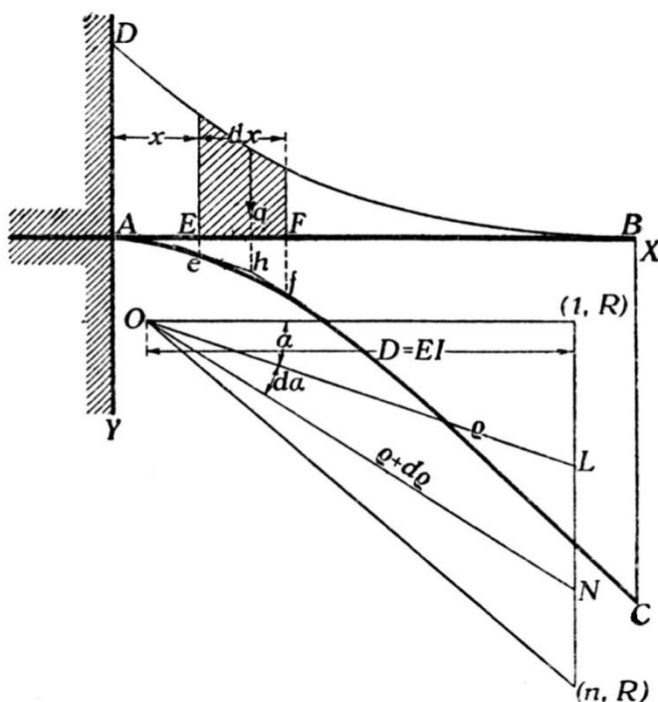


Fig. 7.23. Cálculo de los diagramas de momentos y esfuerzos cortantes en una viga de directriz recta, solicitada por un sistema de tres cargas concentradas  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y construcción grafostática para conseguir que el diagrama de momentos tenga el cierre horizontal, permitiendo una visión más clara de los momentos de las distintas secciones. La elección de una distancia polar ( $1 Tn$ ) unidad, permite la lectura directa de los momentos a lo largo del diagrama. (Cálculos grafostáticos y dibujos propios)

Así como el cálculo de los diagramas de Momentos y Cortantes para las vigas obtuvo una difusión universal, como ya hemos comentado, el cálculo grafostático de la Elástica ha tenido mucho menos eco entre estudiantes o profesionales, siendo a nuestro juicio verdaderamente interesante su conocimiento para una visión completa y rápida del comportamiento de estas estructuras isostáticas.



En Resistencia de Materiales es habitual llamar Elástica a la fibra media deformada por la flexión. Para cada punto de ésta, la ordenada corresponde a la flecha, cuyos valores máximos nos interesa conocer para visualizar la deformación final de una pieza sometida a flexión. Los valores de la deformación en todos los puntos se localizan de forma intuitiva.

Si una viga se carga con un área que se corresponde con su diagrama de momentos flectores y si se divide en zonas de anchura infinitesimal, aplicando en los C.D.G. de dichas zonas, fuerzas verticales de intensidad proporcional a la superficie del área correspondiente, el límite del polígono funicular recíproco al diagrama de fuerzas así generado es la Elástica, habiendo tomado como distancia polar el producto de  $E \cdot I$ . Con  $E$  = Módulo de deformación longitudinal del material de la viga (Módulo de Young) y con  $I$  = Momento de inercia de la sección (se entiende que es constante en la longitud considerada).

En el esquema superior, se ha determinado el diagrama de momentos DB que situamos como carga repartida "ficticia" sobre nuestra viga de sección constante  $I = cte.$  y homogénea,  $E = cte.$  Si la superficie de cargas es ADB y el polígono de fuerzas está constituido por un polo arbitrario (O), una distancia polar ( $E \cdot I$ ), y como suma de fuerzas  $(1, R)$   $(n, R) = \int M dx$ , podemos construir el polígono funicular AC de la forma habitual.

Tomemos dos ejes ortogonales XY en A. Consideremos la carga elemental  $q = M dx$ , rayada en la figura, siendo el punto  $e(x, y)$  y el punto  $f(x+dx, y+dy)$ . Las tangentes a la

curva funicular se cortan en (h), dirección de la carga vertical (q) y los radios polares correspondientes serán Q y Q+dQ.

Proyectando el contorno cerrado OLN sobre la dirección vertical AY, tendremos una suma de segmentos verticales:  $(Q+dQ) \sin(\alpha+d\alpha) = Q \sin \alpha + M dx$ , que desarrollado queda:  $Q \cdot \sin \alpha \cdot \cos d\alpha + Q \cdot \cos \alpha \cdot \sin d\alpha + dQ \cdot \sin \alpha \cdot \cos d\alpha + dQ \cdot \cos \alpha \cdot \sin d\alpha = Q \sin \alpha + M dx$ . Donde como ( $d\alpha$ ) es el ángulo formado por las tangentes en c y en f, a la curva funicular, siendo estos puntos infinitamente próximos, será  $\cos(d\alpha) = 1$ , con  $dQ \cdot \sin(d\alpha) = dQ \cdot d\alpha$ , elemento diferencial de segundo orden, a suprimir, quedará:  $Q \cdot \cos \alpha + dQ \cdot \sin \alpha = d(Q \cdot \sin \alpha) = M dx$ . (\*)

Como en el triángulo rectángulo O (1,R) L del polígono de fuerzas,  $D = E \cdot I = Q \cos \alpha$ , o lo que es lo mismo  $Q = D / \cos \alpha$ , volviendo a (\*)  $d(D \cdot \sin \alpha / \cos \alpha) = D \cdot d(\tan \alpha) = M dx$  Pero como  $\tan \alpha = dy / dx$  es el coeficiente angular de la recta tangente al funicular en el

punto (e), resulta finalmente:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{M}{D} = \frac{M}{E I}$  quedando:  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E I}$

Que es la conocida ecuación de la Elástica.

Estudiamos el caso práctico del cálculo de la Elástica de una viga (I.P.N. 300) Fig.7.24 empotrada en su extremo (A) cargada con carga uniformemente repartida de  $p = 2 \text{ Kg / mm.l} = 2 \text{ Tn / m.l}$ .

Se han dispuesto las siguientes Escalas, que en estos ejercicios son fundamentales:

Longitudes: 1 : 50

Fuerzas: 1 : 200 con distancia polar para el polígono de fuerzas  $H = 50 \text{ Kg}$

Momentos: 1 =  $5 \cdot 10^5 \text{ mm} \cdot \text{Kg}$

Momentos como cargas sobre la viga:  $e_m : 1 = 2 \cdot 10^5$

$D = E \cdot I : e_d : 1 = 4 \cdot 10^{10}$  (por las grandes magnitudes de E y de I)

Flechas:  $e_f = \frac{4 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{10} \cdot 50} = 4$

El Diagrama de Momentos se ha construido con el polígono de fuerzas P1...P6 que corresponden a  $(3.000 \text{ mm} \cdot 2 \text{ Kg / mm}) / 6 = 6.000 \text{ Kg} / 6 = 1.000 \text{ Kg}$ . Marcadas en rojo.

A su vez la carga "ficticia" de los Momentos gravitando sobre la viga, también se ha dividido en seis, cinco trapecios y un triángulo de los que se ha determinado su C.D.G., marcados en amarillo. Los vectores  $M_1...M_6$  representan cada una de estas áreas.

$M_A = pl/2 = 6.000 \times 3.000 / 2 = 900 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 18.0 \text{ mm}$

$M_a = 2 \cdot (3.000 - 500)^2 / 2 = 625 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 12.5 \text{ mm}$

$M_b = (3.000 - 1.000)^2 = 400 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 8.0 \text{ mm}$ ;  $M_c = 4.5 \text{ mm}$ ;  $M_d = 2 \text{ mm}$ ;  $M_e = 0.5 \text{ mm}$

El valor obtenido en el extremo del funicular de deformaciones es de  $f = 41.25 \text{ mm}$ ,

con lo que a la escala correspondiente la flecha real sería  $f_{\text{real}} = 10,31 \text{ mm}$

El cálculo analítico de esta flecha es  $f_{\text{analit.}} = 10.33 \text{ mm}$

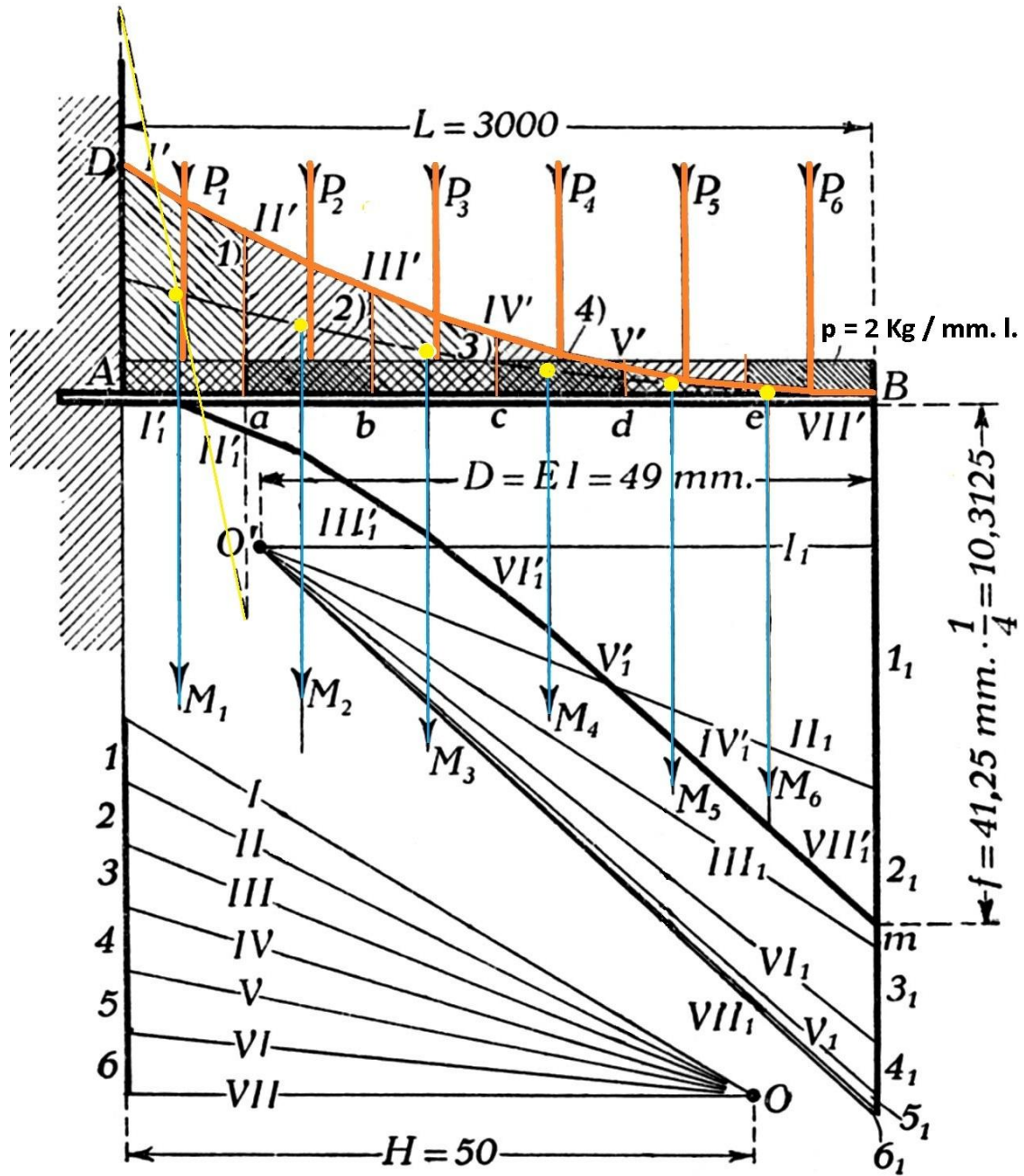


Fig. 7.24. Cálculo de la Elástica de una viga (I.P.N. 300) empotrada en su extremo (A) cargada con carga uniformemente repartida de  $p = 2 \text{ Kg / mm.l} = 2 \text{ Tn / m.l}$ . Los vectores  $M_1 \dots M_6$  representan cada una de estas áreas.  
 $M_A = pl/2 = 6.000 \times 3.000/2 = 900 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 18.0 \text{ mm}$   
 $M_a = 2 \cdot (3.000 - 500)^2 / 2 = 625 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 12.5 \text{ mm}$   
 $M_b = (3.000 - 1.000)^2 = 400 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 8.0 \text{ mm}; \text{ ; } M_e = 0.5 \text{ mm}$   
 $M_c = (3.000 - 1.500)^2 = 225 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 4.5 \text{ mm}$   
 $M_d = (3.000 - 2.000)^2 = 100 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 2 \text{ mm}$   
 $M_e = (3.000 - 1.500)^2 = 25 \cdot 10^4 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 0.5 \text{ mm}$

La flecha medida en la vertical del extremo del funicular es de  $f = 41.25 \text{ mm}$ , que representa una flecha real en el extremo B de la viga, de la cuarta parte, por la escala utilizada. Finalmente la flecha real es  $f = 10.31 \text{ mm}$ . Dibujos propios sobre una propuesta de (Rubio, 1951: 61-76).

## 7.9. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE ENTRAMADOS RETICULARES PLANOS. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS FIGURAS RECÍPROCAS DE LUIGI CREMONA

De los métodos y aplicaciones que la Estática Gráfica puso a disposición de los arquitectos e ingenieros, desde su creación, el llamado Método de Cremona, para el cálculo de entramados reticulares planos, ha sido el más difundido a lo largo de los años de la vigencia de la Grafostática, y probablemente, sea el que más a perdurado hasta hoy. En realidad la teoría de Luigi Cremona sobre las *Figuras Recíprocas* <sup>8</sup> era mucho más una consecuencia de la Geometría de Posición, que Cremona dominaba y sobre la que había publicado <sup>9</sup> años antes de las aplicaciones grafostáticas, que el fruto del interés por conseguir un instrumento de cálculo.

La difusión de las aplicaciones de su teoría no se hicieron esperar y hasta hoy se siguen aplicando habitualmente, ya no solo en el cálculo de entramados reticulares, sino en el análisis de cualquier sistema formado por barras, que esté sometido a una o varias acciones exteriores y del que queramos comprobar los esfuerzos inducidos en estas barras.

Hemos estudiado en esta Tesis, varios casos de estructuras complejas, convenientemente simplificadas para dichas comprobaciones, que nos manifiestan de una forma sencilla si los elementos que la conforman están traccionados o comprimidos y en general si es posible el equilibrio del sistema estudiado. Todas estas comprobaciones se han realizado utilizando la aplicación de reciprocidad entre un poliedro (el entramado o el sistema de que se trate) y el poliedro conformado a partir del polígono de fuerzas actuantes ligado a las direcciones de las barras del entramado.

No volvemos a insistir sobre las explicaciones proyectivas de la aplicación grafostática de Cremona, que ya expusimos en los Capítulos 4 y 5. Nos limitaremos a mostrar algunos ejemplos de cálculo de estructuras trianguladas articuladas, que ha sido, como decimos, la aplicación grafostática más utilizada desde su creación.

En los cálculos de estos entramados, las barras que concurren en los nudos de una de estas celosías están sometidas a dos clases de cargas:

El peso propio de las barras ( que no consideramos en los cálculos o se prorratan en el cómputo de las cargas generales) y las procedentes de las cargas soportadas por el conjunto de la construcción.

---

<sup>8</sup> Cremona, Luigi. *Le Figure reciproche nella Statica Grafica*. Terza Edizione. U. Hoepli: Milano 1879.

<sup>9</sup> Cremona, Luigi. *Elementi de Geometría Proiettiva (Ad uso degli Istituti Tecnici del Regno d'Italia)* G. B. Paravia e Comp.: Roma-Torino-Milano Firenze 1873.



Las barras de una celosía transmiten al nudo la carga que soportan.

El método de Cremona permite determinar la distribución de esfuerzos en las barras mediante un sencillo diagrama. Su principio consiste en descomponer las fuerzas dadas en dos fuerzas cuyas direcciones vienen proporcionadas por las posiciones de las barras del sistema, es decir, por la geometría del entramado.

Es pues conveniente comenzar esta descomposición por un nudo donde concurren dos barras. Partiendo de ese nudo, las fuerzas exteriores, reacciones en los apoyos, cargas, etc., se descomponen en dos fuerzas que actúan sobre el eje de las barras.

Pasando al nudo siguiente, en el que se reúnen tres barras, se descomponen las fuerzas que actúan según las dos direcciones de las nuevas barras halladas. A continuación es ya posible pasar a un nudo donde concurren cuatro barras, ya que dos de las fuerzas inducidas en dos de ellas son ya conocidas. Basta pues tomar sistemáticamente nuevos nudos donde sean desconocidos los valores de los esfuerzos en dos barras nuevas y proseguir con la metodología explicada.

En el análisis de la descomposición en cada nudo, es conveniente marcar en nuestro diagrama el hipotético recorrido de las fuerzas descompuestas, señalando si éstas se alejan del nudo o se acercan a él. En el primer caso, la fuerza inducida en la barra estará comprimida y en el segundo caso traccionada. Este señalamiento es muy útil para comprobar que el procedimiento se ha completado, pues cada barra ha de ser recorrida en dos sentidos opuestos.

La metodología de cálculo no distingue entre sistemas de fuerzas actuantes en los nudos, pudiendo llevar direcciones cualesquiera, sin embargo preferimos, organizar varios diagramas, en el caso de que coexistan cargas con direcciones distintas, un sistema de vectores paralelos para las cargas verticales, por ejemplo, y otros para la dirección del viento, que suele ser, un caso habitual en los entramados para cubiertas.

Como en todo problema mecánico, los esfuerzos inducidos, se sumarán con sus signos. (Tracciones positivas y compresiones negativas suele ser el convenio más utilizado) Finalmente se estudia, el dimensionado de las barras de la estructura en función de la sollicitación inducida global.

A continuación se muestran en las Fig. 7.25. y siguientes algunos de estos cálculos.

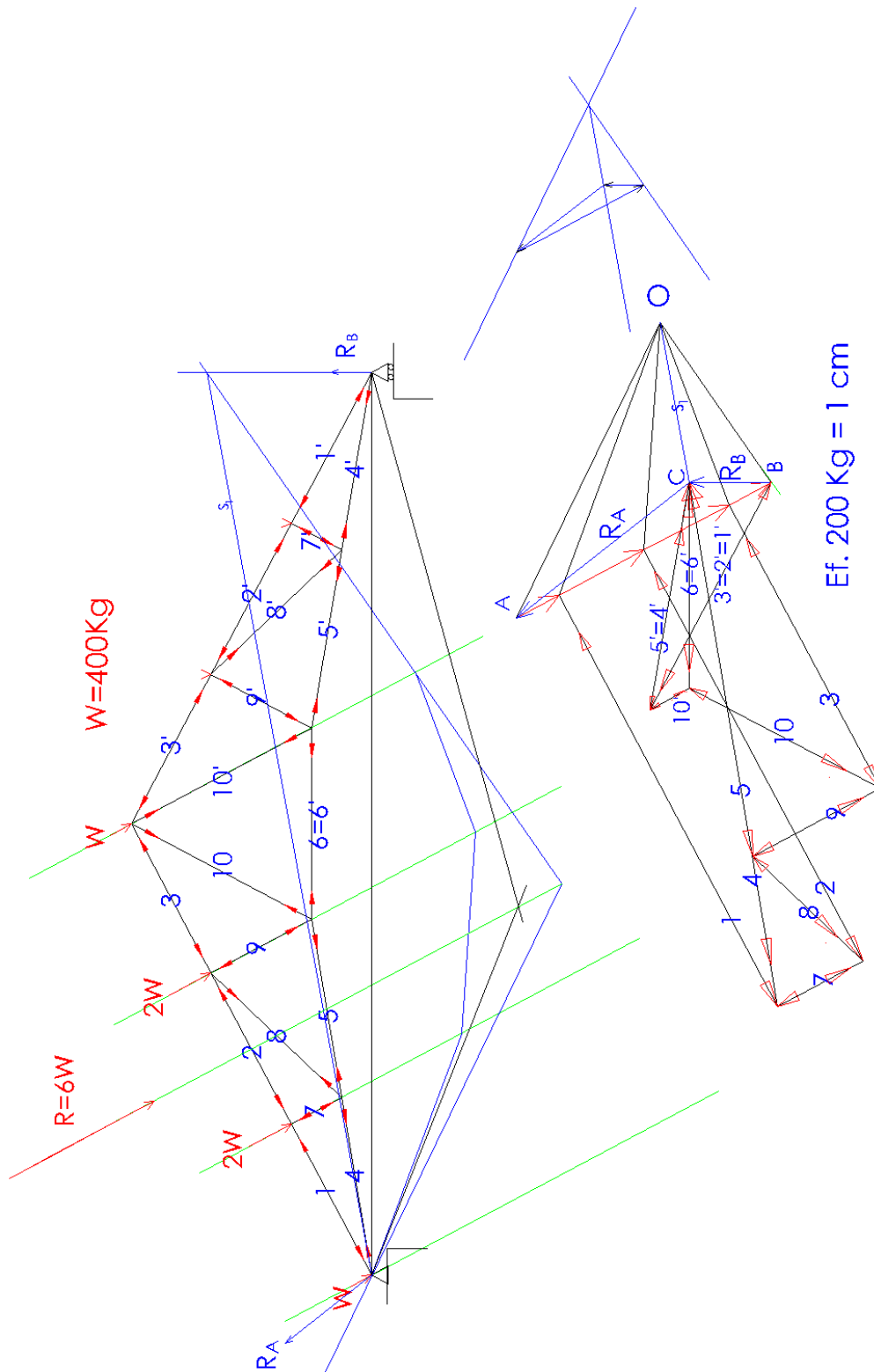
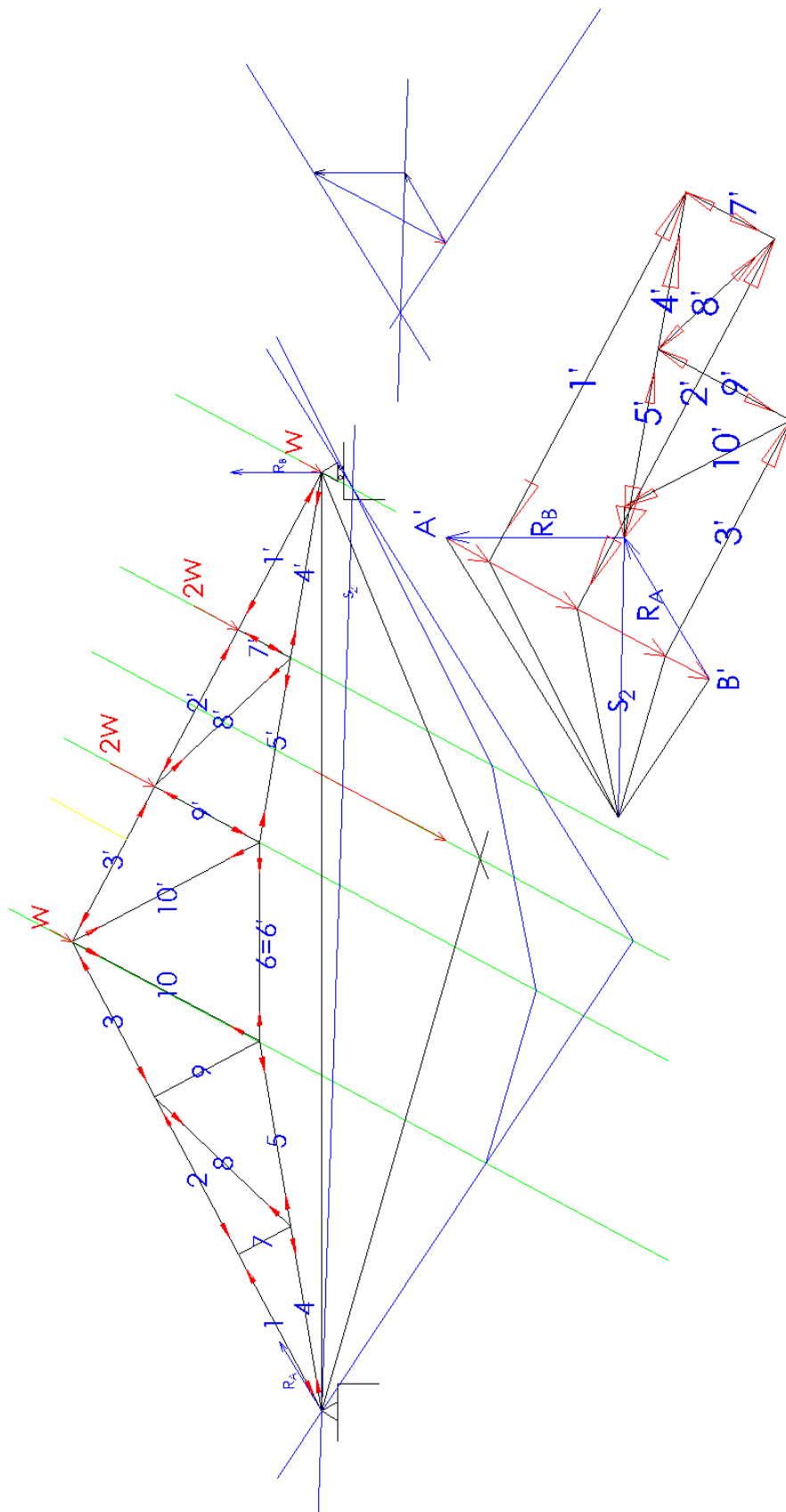


Fig. 7.25. Cálculo de un Cuchillo tipo “belga” sometido a la acción del viento proveniente de la izquierda. El procedimiento comienza siempre encontrando las reacciones en los apoyos, iniciando el diagrama con el equilibrio de un nudos en el que sólo existan dos incógnitas, procediendo ordenadamente, marcando nudos y recorridos y señalando en el esquema de la estructura, cuando los esfuerzos “salen” del nudo y cuando “entran” lo que permite finalmente calificar las barras como Traccionadas o Comprimidas. ( Cálculos grafostáticos y dibujos propios)



Ef. 200 Kg = 1 cm

Fig. 7.26. Cálculo de un Cuchillo tipo “belga” sometido a la acción del viento proveniente de la derecha. ( Cálculos grafostáticos y dibujos propios)

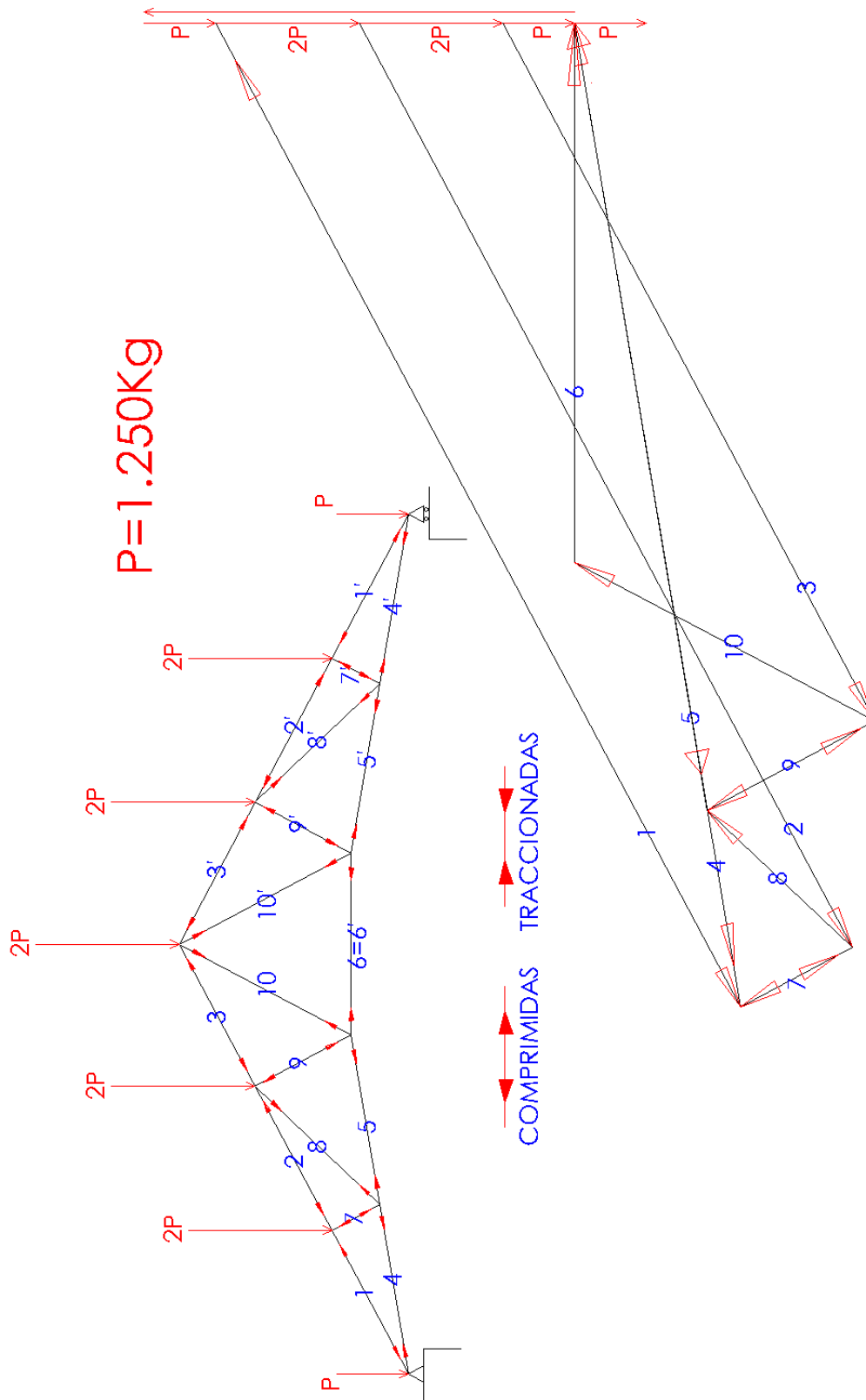


Fig. 7.27. Cálculo de un Cuchillo tipo "belga" sometido a la acción del viento proveniente de la derecha. ( Cálculos grafostáticos y dibujos propios)

### 7.10. CÁLCULO GRAFOSTÁTICO DE UNA BÓVEDA DE MAMPOSTERÍA Y DE H.A.

La tarea de la transmisión del conocimiento científico se interrelaciona con habilidades, que los arquitectos de todos los tiempos hemos cultivado con una motivación que puede considerarse tendenciosa. Hemos intentado que quien está aprendiendo el oficio se esforzara en la comprensión de toda una experiencia acumulada a lo largo de la historia.

No siempre los grandes maestros de la arquitectura han tenido la habilidad requerida para que tal transmisión se realizara sin el trauma del alumno, que sabe inalcanzable la experiencia y el conocimiento que el gran maestro muestra e incluso a veces demuestra pero no transmite.

El conocimiento arquitectónico a veces no llega a calar en el aprendiz de arquitecto, bien sea de carácter puramente técnico-estructural, o de concepción de la idea global.

Hay claros ejemplos en la historia de las enseñanzas técnicas, y de la Arquitectura en particular, de grandes maestros en la transmisión del conocimiento. Profesores inolvidables de las escuelas de Arquitectura.

Algunos casos hemos citado en relación con nuestro tema del conocimiento intuitivo de las estructuras arquitectónicas, como el del ingeniero Eduardo Torroja o el arquitecto Félix Cardellach o el del Profesor Ricardo Aroca, grandes figuras del conocimiento de las estructuras arquitectónicas y muy buenos transmisores de ese conocimiento.<sup>10</sup>

Hay, por otra parte, textos que hemos consultado y citado en esta Tesis, que se significan por esa gran capacidad de transmisión, aun no proviniendo de conocidas figuras de la arquitectura o la ingeniería.

Especialmente reseñables son los libros compendio del conocimiento técnico de su época. Una especie de recopilación de lo que de estructuras y de resistencia de materiales se sabía en ese momento y se trataba de facilitar al arquitecto o ingeniero, desde las expresiones trigonométricas más habituales, al cálculo de una sección de una viga de hormigón sometida a flexión, pasando por las dosificaciones para necesarias o el tamaño de los áridos, etc.

---

<sup>10</sup> Torroja Miret, Eduardo. *Razón y ser de los tipos estructurales*. C.S.I.C. Instituto E. Torroja: Madrid 1984.

Cardellach, Félix. *Filosofía de las estructuras*. Librería de Agustín Boch: Barcelona 1910.

Aroca Hernandez Ros, Ricardo. *¿Qué es estructura?*. Cuadernos del Instituto Juan de Herrera: Madrid 1999.

A este tipo de manuales, de consulta de muchos profesionales, va dedicado este pequeño apartado y en particular al titulado:

*Calculista de estructuras de hormigón armado hierro y madera* de Simon Goldenhörn. La primera edición es de 1951 y nosotros contamos con una 10ª ed. de 1961, impresa en los Talleres Gráficos de Sebastián de Amorrortu e Hijos de Buenos Aires, suponemos que editado por el propio autor.

El hecho de la referencia a este autor, es por haber encontrado en nuestra investigación sobre la Estática Gráfica, una muy buena respuesta a la búsqueda de autores que, a los principios teóricos, unieran algunas aplicaciones prácticas de interés didáctico.

Este es el caso del Cálculo de una bóveda de mampostería y el mismo planteamiento resuelto con hormigón y en ambos casos utilizando los conocimientos de la Estática Gráfica,<sup>11</sup> con una profusión de detalles, que hacen que sea destacable su estudio. Es evidente que tratándose de un manual de 1951, la inclusión de estos cálculos mediante la Estática Gráfica, pone de manifiesto su uso habitual, aún con los conocimientos estructurales existentes, ya mediado el S. XX.

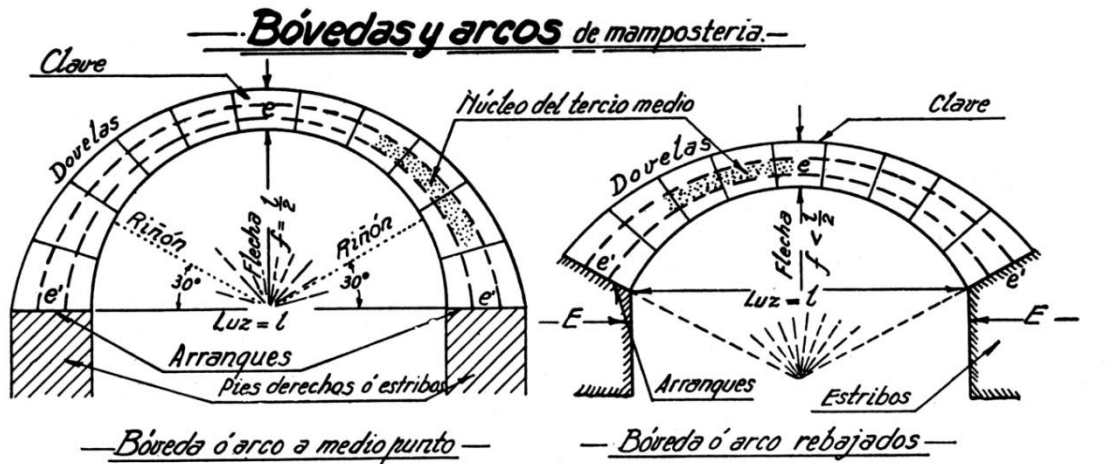
Mostramos, pues, en la Fig. 7.28. Una serie de cálculos empíricos de los espesores necesarios para estas bóvedas. En las Fig. 7.29. y 7.30. el cálculo grafostático de la bóveda de mampostería y en las 7.31. y 7.32. los cálculos para la misma bóveda en hormigón armado, concluyendo en la Fig. 7.33. con un interesante estudio grafostático de la estabilidad de los estribos.

A nuestro juicio, constituyen, junto con otros muchos temas tratados por el autor, como el cálculo de estructuras metálicas, con una infinidad de detalles constructivos, o el de una chimenea resistente al empuje del viento, también resuelto con la ayuda de la Grafostática, un muy valioso argumento a favor de la vigencia de la Estática Gráfica y su posible utilización actual.

---

<sup>11</sup> Goldenhörn, Simon. *Elementos de Estática Gráfica*. Impreso en los Talleres Gráficos Argentinos L. J. Rosso: Buenos Aires 1946.

Goldenhörn, Simon. *Calculista de Estructuras de H. Armado, Hierro y madera*. Impreso en los Talleres Gráficos de Sebastián de Amorrortu e hijos: Buenos Aires 1951. 10ª Ed. 1961.



— Fórmulas empíricas para determinar aproximadamente los espesores (e y e') en la clave y en los arranques —

**NOTACIÓN**

e = espesor de la clave, en cm.  
e' = " del arranque, en cm.

l = luz, en cm.

P = la carga total, en kg, de la semi-bóveda o arco (dovelas y sobrecarga).

f = flecha, en cm.

ρ = coeficiente de trabajo del material a la compresión, en kg/cm<sup>2</sup>.

1) Para bóvedas o arcos de medio punto, góticos o peraltados:

$$e = \sqrt{f^2 + 0,015 \frac{P \cdot l}{\rho}} - 1,03f$$

2) Para bóvedas o arcos rebajados:

$$e = \sqrt{2,3f^2 + 0,015 \frac{P \cdot l}{\rho}} - 1,50f$$

Para bóvedas de medio punto de flecha $\frac{l}{2}$ . . . . .	e' = 1,8 e	cm.
Para " rebajadas " " $\frac{l}{4}$ . . . . .	e' = 1,6 e	"
Para " " " " $\frac{l}{6}$ . . . . .	e' = 1,4 e	"
Para " " " " $\frac{l}{8}$ . . . . .	e' = 1,2 e	"
Para " " " " $\frac{l}{10}$ . . . . .	e' = e	"

- Ejemplo: Arco rebajado de: l = 4m.; f = 1m. P = 15000kg; ρ = 6kg/cm<sup>2</sup>

$$e = \sqrt{2,3 \times 100^2 + 0,015 \frac{15000 \times 400}{6}} - 1,50 \times 100 = 45 \text{ cm.}; \quad e' = 1,6 \times 45 = 72 \text{ cm.}$$

— Fórmulas empíricas para determinar el espesor de los estribos —

**NOTACIÓN**

E = espesor del estribo, en m.

e = espesor de la clave, en m.

f = flecha, en m.

l = luz, en m., del arco.

H = altura total, en m., del estribo, arco o bóveda y sobrecarga.

h = altura, en m., del estribo hasta el arranque de la bóveda o arco.

1) Para arcos de medio punto:

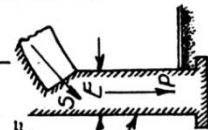
$$E = (0,6 + 0,162l) \sqrt{\frac{0,865l (h + \frac{l}{4})}{H (e + \frac{l}{4})}}$$

2) Para arcos rebajados:

$$E = (0,33 + 0,212l) \sqrt{\frac{h \cdot l}{H (f + e)}}$$

3) Para arcos elípticos:

$$E = (0,43 + 0,154l) \sqrt{\frac{0,84 (h + 0,54f)}{H (e + 0,465f)}}$$



Se dilata el estribo en el ancho empírico E y luego se verifica su estabilidad, teniendo en cuenta:  
1) Empuje del arco: S  
2) Peso propio del estribo y su sobrecarga.  
3) Empujes laterales: Q, si existen.

Fig. 7.28. Notación y fórmulas empíricas para determinar los espesores de una bóveda en la clave y en los arranques, para diferentes tipos de geometría de los arcos. ( Goldenhörn, 1961: 263).

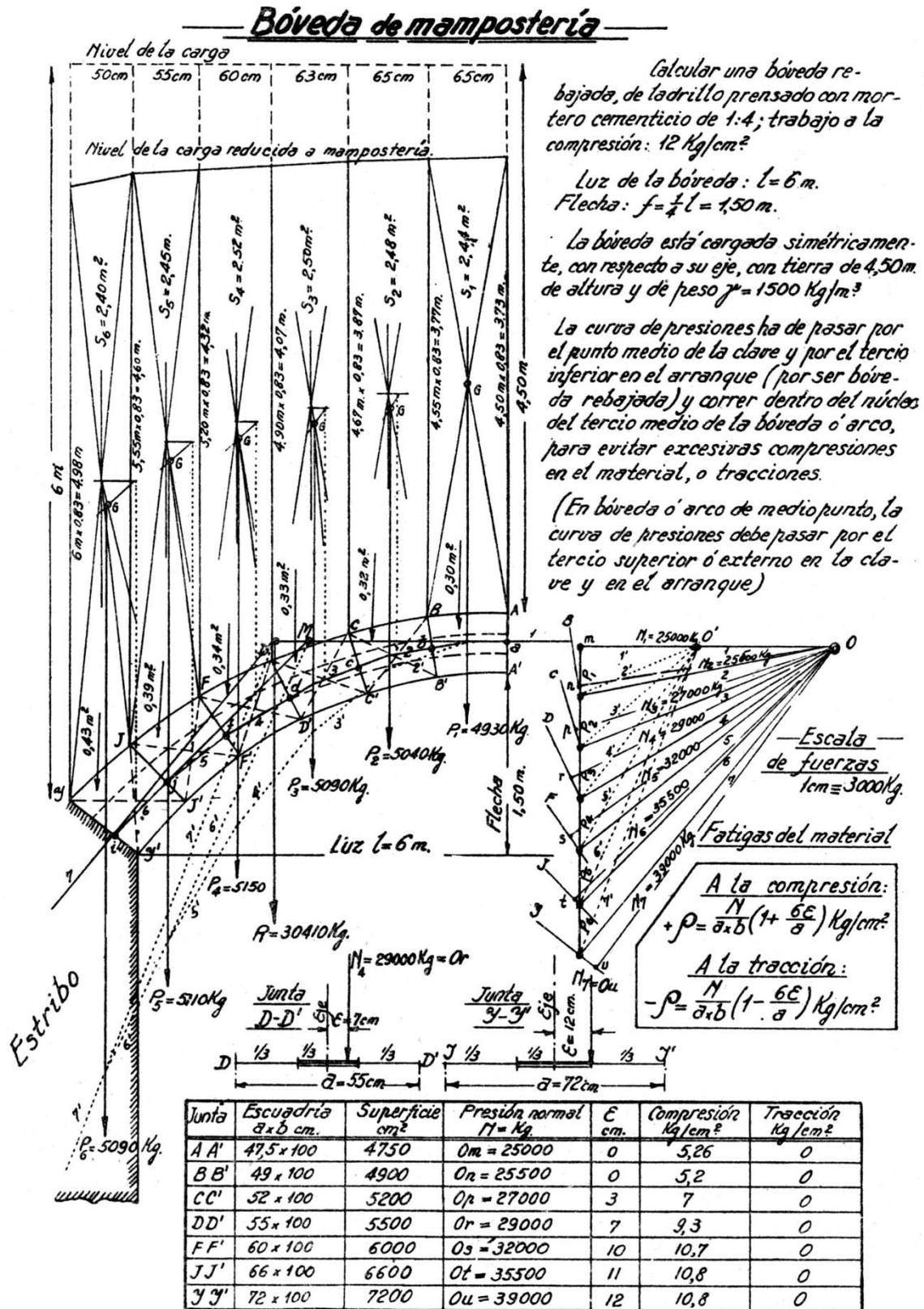


Fig. 7.29. cálculo grafostático de una bóveda de mampostería, con determinación de la línea de presiones y su entrega a los estribos, así como las dimensiones derivadas del cálculo. Y los esfuerzos generados por las cargas actuantes. ( Goldenhörn, 1961: 264).



Se calcula media bóveda ó arco. Para bóvedas se toma 1m. de largo ó profundidad.  
 Peso de la mampostería de ladrillo prensado: 1800 kg/m<sup>3</sup>  
 La altura de la carga en la clave es de 4,50m. y en el arranque de la bóveda resulta aproximadamente 6m. Altura media: 5,25m. Luz del semiextrados =  $\approx$  3,60m.  
 Peso de la tierra: 5,25m  $\times$  3,60m  $\times$  1m  $\times$  1500kg/m<sup>3</sup> + peso propio aproximado de la semi bóveda =  $\approx$  30000 kg.  
 Espesor en la clave:  $e = \sqrt{2,3 \times 150^2 + 0,015 \frac{500 \times 30000}{12}} - 1,5 \times 150 = 48\text{cm.}$   
 Haremos:  $e = 47,5\text{ cm}$  (2 ladrillos de 23cm + 1,5cm. de junta)  
 El espesor en el arranque:  $e' = 1,6 \times 47,5 = 76\text{cm.}$  Haremos:  $e' = 72\text{cm.}$  (3 ladrillos de 23cm. + 3cm. para 2 juntas)

Ahora se comprueba, con el cálculo gráfico, si estos espesores satisfacen a la estabilidad de la bóveda. Dibujada la silueta de ella y su carga, se reduce esta carga de tierra a mampostería de ladrillos para uniformarla con el material de la bóveda. La relación entre los pesos de la tierra y de la mampostería es: 1500 : 1800 = 0,83. Con este coeficiente se traza el nivel imaginario de la carga, reducida a mampostería.

Se divide la semi bóveda en 6 ó más dovelas y en otros tantos rectángulos la superficie representativa de la carga. Se hallan los centros de gravedad de los rectángulos y de las dovelas, donde se aplicarán -como fuerzas- sus superficies correspondientes, en cierta escala, para obtener los centros de gravedad G definitivos. Por estos puntos pasan las rectas de acción de la carga + el peso propio de las dovelas: P<sub>1</sub>-P<sub>2</sub>-P<sub>3</sub>-P<sub>4</sub>-P<sub>5</sub>-P<sub>6</sub>.

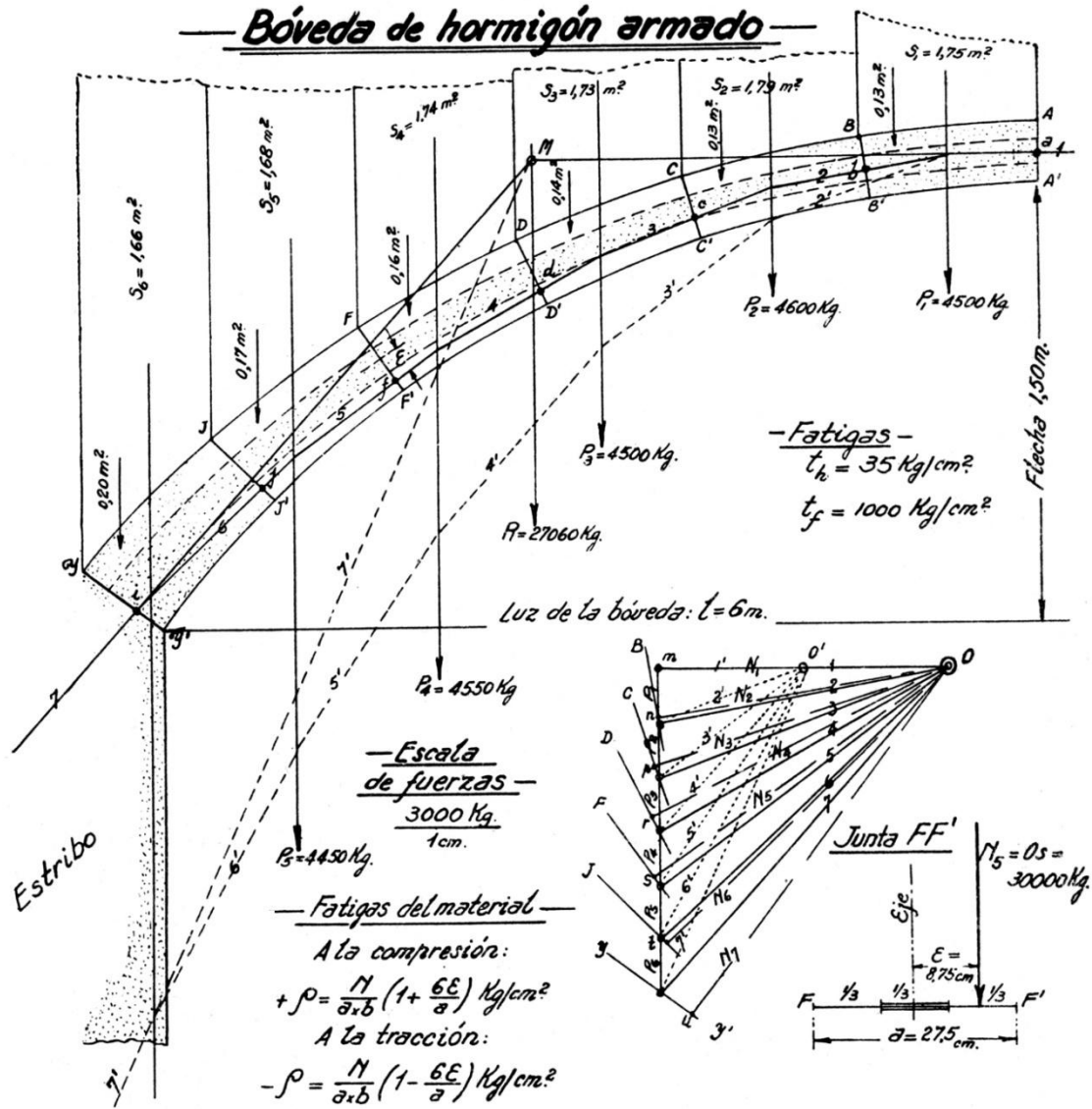
Carga y dovela.	Superficie. m <sup>2</sup>	Volumen. m <sup>3</sup>	Peso. Kg	Observaciones
1	2,74	2,74	P <sub>1</sub> = 4930	Peso de la mampostería 1800kg/m <sup>3</sup>
2	2,80	2,80	P <sub>2</sub> = 5040	
3	2,83	2,83	P <sub>3</sub> = 5090	
4	2,86	2,86	P <sub>4</sub> = 5150	
5	2,84	2,84	P <sub>5</sub> = 5110	
6	2,83	2,83	P <sub>6</sub> = 5090	
			P = 30410	

Se construye, arrancando de un punto (m), el polígono de fuerzas P<sub>1</sub>-P<sub>2</sub>-P<sub>3</sub>-P<sub>4</sub>-P<sub>5</sub>-P<sub>6</sub>. Con un polo cualquiera O, tomado sobre la horizontal que pasa por el punto (m), se traza el polígono funicular (punteado) haciendo pasar su primer lado (1) por el punto medio (a) de la clave. El punto M, intersección del primer y penúltimo lado (1 y 6') de este polígono funicular, se une con el punto (i), tercio inferior de la junta "Y-Y". Por el punto donde termina, en el polígono de fuerzas, la equipolente de la fuerza P<sub>3</sub> se traza una paralela a (Mi) y se obtiene un nuevo polo O. Con este polo O se traza otro polígono funicular definitivo, que pasará por los puntos (a) y (i) de la bóveda, como se ha establecido en la página anterior.

La intersección de los lados de este polígono funicular con las juntas de las dovelas dará la curva de presiones a-b-c-d-f-j-i, la que debe correr dentro del núcleo del tercio medio de la bóveda ó arco, pues saliendo ella afuera puede dar origen a inadmisibles fatigas de compresión ó tracción en la mampostería. (Ver "Muros de contención".)

Si resultaran fatigas mayores de lo que permite el material, se deberá aumentar el espesor de la bóveda ó arco; se trazará nuevamente la curva de presiones y se verificarán las fatigas. El cálculo de las fatigas en las juntas de las dovelas se hará, usando las fórmulas y la planilla, indicadas en la pág. anterior.

Fig. 7.30. Planilla explicativa de las comprobaciones grafostáticas realizadas para bóveda de mampostería. ( Goldenhörn, 1961: 265).



Calcularemos la bóveda anterior, pero de hormigón armado. Su espesor será muy inferior al de la bóveda de ladrillos, por admitir el hormigón fuertes compresiones y su armadura metálica absorberá los esfuerzos de tracción, que se originan, por el hecho de que la curva de presiones sale del núcleo del tercio medio.

El espesor de la bóveda o arco en la clave:  $e = l + 12,5cm$ , para carga equivalente a  $1m$  de altura de tierra. Para cada metro de altura mayor de tierra, se agregará  $\pm (e)$  un centímetro ( $l =$  luz de la bóveda o arco en metros)

El espesor en el arranque:  $e' = 1,6e$ .  
 En el presente caso:  $e = 6 + 12,5 + 3,5 = 22cm$ ;  $e' = 1,6 \times 22 = 35cm$ .

Como en el caso anterior, se dividió la semi-bóveda en 6 dovelas y en otras tantas rectángulos la superficie representativa de la carga de tierra, la que se reduce a peso equivalente de hormigón armado, con el coeficiente  $0,625 (1500 \text{ Kg/m}^3 : 2400 \text{ Kg/m}^3)$ , para uniformarla con el material de la bóveda.

Fig. 7.31. cálculo grafostático de una bóveda de hormigón armado, con determinación de la línea de presiones y su entrega a los estribos, así como las dimensiones derivadas del cálculo. Y los esfuerzos generados por las cargas actuantes. ( Goldenhörn, 1961: 266).

Se determinan los centros de gravedad de las dovelas y de los rectángulos representativos de la carga sobre cada dovela, donde se aplican - como fuerzas - sus superficies correspondientes, para así determinar los centros de gravedad G definitivos. Por estos puntos pasan las rectas de acción de la carga + el peso propio de las dovelas:  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ .

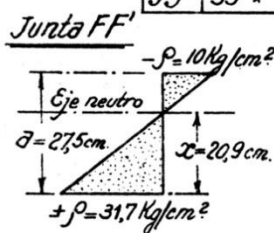
Carga y dovela	Superficie $m^2$	Volumen $m^3$	Peso $Kg$
1	1,88	1,88	$P_1 = 4500$
2	1,92	1,92	$P_2 = 4600$
3	1,87	1,87	$P_3 = 4500$
4	1,90	1,90	$P_4 = 4550$
5	1,85	1,85	$P_5 = 4450$
6	1,86	1,86	$P_6 = 4460$
			$R = 27060$

Se construye el polígono de fuerzas  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ . Con el polo O se traza el polígono funicular (punteado), debiendo pasar su primer lado (1) por el punto medio de la clave. Se determina el punto M, intersección del primer y último lado del polígono funicular. Se une el punto M con el punto (i) tercio medio inferior del arranque de la bóveda o arco. Por el punto terminal del polígono de fuerzas se traza una paralela a (Mi), que determinará el nuevo polo O.

Con este polo se traza el otro polígono funicular 1-2-3-4-5-6-7, que pasa por el punto medio de la clave y por el tercio inferior del arranque (por ser bóveda rebajada), determinando la curva de presiones a-b-c-d-f-j-i.

— Fatigas máximas del material —

Junta	Escuadría $a \times b$ cm.	Superficie $cm^2$	Presión normal $N = Kg$	$\epsilon$ cm.	Compresión $Kg/cm^2$	Tracción $Kg/cm^2$
AA'	22 x 100	2200	$O_m = 24000$	0	10,9	0
BB'	22,5 x 100	2250	$O_n = 24500$	2	16,7	0
CC'	23 x 100	2300	$O_p = 25500$	3,7	21,8	0
DD'	24,5 x 100	2450	$O_r = 27000$	7	30	7,9
FF'	27,5 x 100	2750	$O_s = 30000$	8,75	31,7	10
JJ'	31,5 x 100	3150	$O_t = 33000$	9,4	29,2	8,3
YY'	35 x 100	3500	$O_u = 36000$	5,83	20,6	0



Como se ve, la fatiga máxima en la junta FF' (por ser  $\epsilon$  la ordenada mayor entre el eje de la bóveda y la curva de presiones) a la compresión es de 31,7  $Kg/cm^2$ , admisible para hormigón.

La fatiga máxima a la tracción es de 10  $Kg/cm^2$ , que debe ser absorbida totalmente por la armadura metálica.

La posición del eje neutro:

$$\frac{31,7}{10} = \frac{x}{27,5 - x} ; x = 20,9 \text{ cm.}$$

La tracción total a absorber en 1m. de ancho (profundidad) de bóveda:

$$T = (a - x) \times \frac{p}{2} \times 100 \text{ cm} = (27,5 - 20,9) \times \frac{10}{2} \times 100 = 3300 \text{ Kg.}$$

Si  $t_f = 1000 \text{ Kg/cm}^2$ , se necesitan 3,3  $cm^2$  de hierro  $\approx 12 \phi 6$  /m. ancho bóveda, es decir, una barra cada 8 cm.

Esta armadura se colocará en la parte superior de la bóveda o arco. Se recomienda colocar la misma armadura en la parte inferior de la bóveda o arco, en vista de que el cálculo gráfico no es muy exacto y que no se han tomado en cuenta ciertos factores, como ser: cambio de temperatura, ligeras trepidaciones.

Las dos armaduras llevarán sus respectivos hierros de repartición de  $\phi 6$  mm. - distancia dos cada 16 cm. Por razones de los esfuerzos tangenciales de corte y para establecer una trabazón entre las zonas comprimida y estirada del hormigón, se colocarán estribos envolventes, que abrace una barra de la armadura inferior y otra de la superior, formando una N en la izquierda de la bóveda o arco y una V en la parte derecha. Su diámetro es de 6 mm.

Fig. 7.32. Planilla explicativa de las comprobaciones grafostáticas realizadas para bóveda de hormigón armado, con las recomendaciones relativas a armaduras y expresión de la fatiga máxima en la junta F-F' y el diagrama de tensiones para dicha sección, con las tracciones absorber por las armaduras. ( Goldenhörn, 1961: 266).

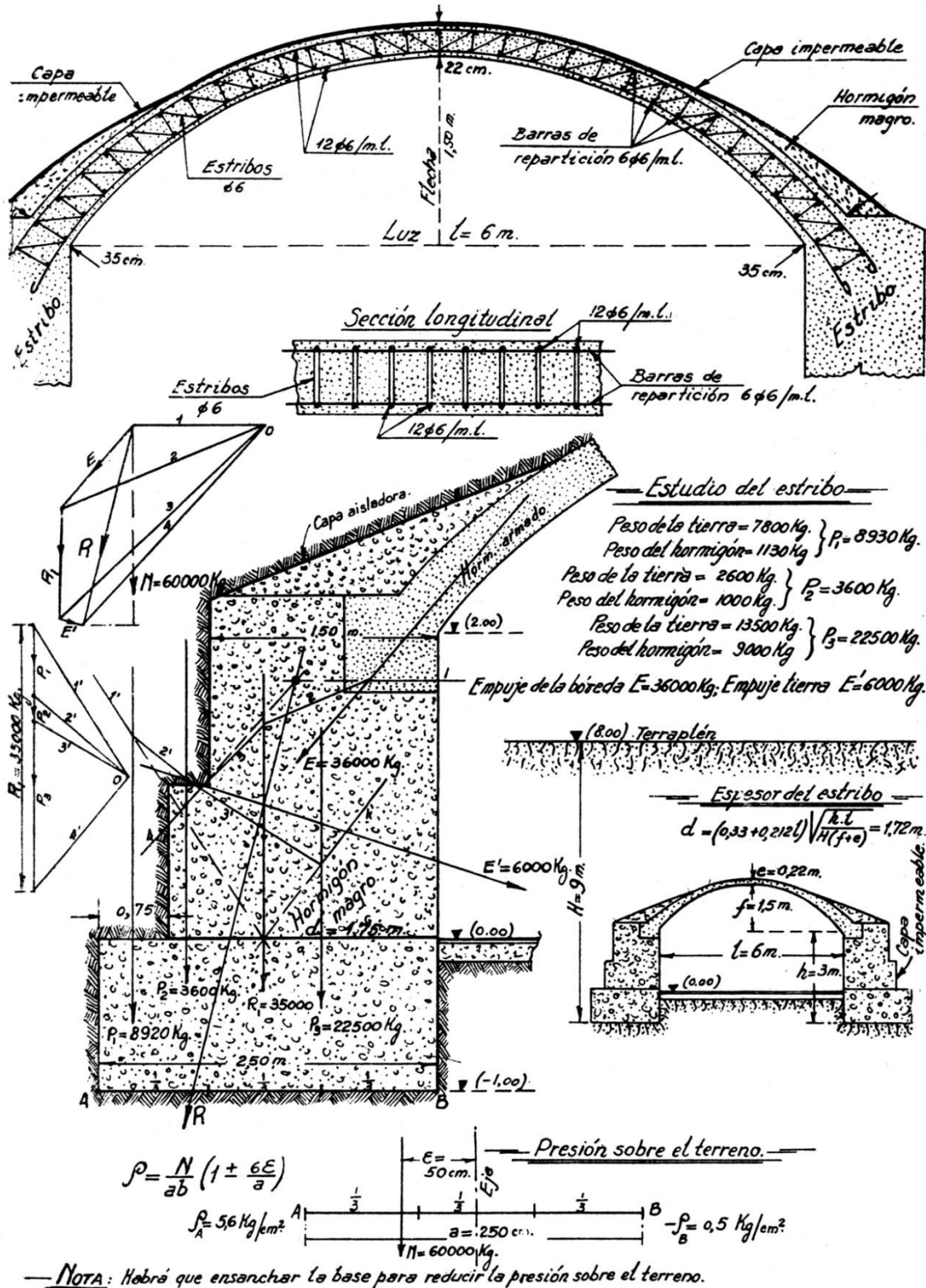


Fig. 7.33. Comprobaciones grafostáticas de la estabilidad de los estribos de la bóveda calculada, con identificación de la línea final de empujes y la anchura necesaria para el control de la presión sobre el terreno. La comprobación determina una modificación para la cimentación, que resuelva la entrega dentro del tercio central de la sección de contacto.

## 8. CONCLUSIONES

Finalizamos el trabajo de investigación de esta Tesis Doctoral con un pequeño resumen de las conclusiones que consideramos hipótesis demostradas. La tarea no ha terminado y seguiremos la investigación, ahondando en las líneas apuntadas correctas y rehaciendo las que requieran modificación o una mayor extensión.

Respecto al **OBJETIVO PRIMERO:**

- Edificios de los más representativos de finales del XIX y XX se han calculado con los procedimientos grafostáticos ideados por Culmann y Cremona, de los que hemos mostrado algunos ejemplos.
- Los métodos de cálculo que durante el S.XX se han desarrollado y sobre todo las cada vez más potentes calculadoras electrónicas y programas para instrumentos informáticos, han reducido, hasta su casi total extinción, la enseñanza y por tanto el conocimiento de la Grafostática, de los nuevos arquitectos.
- La utilización de la Grafostática sigue ofreciendo grandes ventajas para los arquitectos. Por un lado utiliza el dibujo y muestra las relaciones geométricas y mecánicas del objeto de nuestro diseño, en definitiva usa nuestro lenguaje. Por otro, como se ha demostrado en los modelos que hemos analizado en esta Tesis Doctoral, al simplificar los mismos, podemos comprender con mayor facilidad los posibles efectos de aumentar o disminuir los parámetros geométricos o mecánicos de nuestro diseño, controlando los resultados provocados por nuestras modificaciones.
- Nada impide, más bien al contrario, la utilización de los programas de dibujo asistido por ordenador, de uso común en el mundo entero, que eliminan los pequeños errores inherentes al lápiz, la escuadra, el cartabón, la regla y el compás.
- La exactitud de los resultados obtenidos con los cálculos grafostáticos no es el objetivo que se persigue con su utilización. Más bien se trata de una valiosa información para la comprensión del funcionamiento del elemento estructural que estemos analizando y nunca la precisión de un resultado numérico o matemático.

- *Antes y por encima de todo cálculo, está la idea, moldeadora del material en forma resistente, para cumplir su misión...* (Eduardo Torroja).

También a esa idea va dedicada esta Tesis.

Respecto al **OBJETIVO SEGUNDO:**

- Hemos demostrado la coincidencia de resultados obtenidos analítica y grafostáticamente para los sistemas de vectores, en general y como representantes de sistemas de fuerzas, en particular. El cálculo de C.D.G. es un muy buen ejemplo.
- El Dibujo y la Geometría han constituido el lenguaje de los arquitectos desde nuestros orígenes más remotos.
- La Geometría Descriptiva viene a suponer un gran apoyo para la determinación gráfostática de sistemas gauchos de fuerzas y sus condicionantes mecánicos.. Ratificamos la idea de Culmann de la necesidad de su conocimiento y dominio.

Respecto al **OBJETIVO TERCERO:**

- Hemos definido un itinerario exclusivamente delimitado dentro de los métodos de la Estática Gráfica, para el cálculo del Núcleo Central de cualquier sección. Los ejemplos mostrados en los distintos apartados de esta investigación así lo corroboran.
- La contribución de los conceptos de la Geometría Proyectiva han sido determinantes para la consecución de este objetivo.

Otras conclusiones de interés:

- Los viejos conceptos de la Geometría de Posición y en particular los de las Figuras Recíprocas, que alcanzan con Poncelet su mejor expresión, supusieron el punto de partida para que Karl Culmann y Luigi Cremona propusieran su Estática Gráfica.
- La Estática Gráfica supuso una conjunción entre la Mecánica, la Geometría y el Dibujo, más que apropiada, que los arquitectos tenemos a la hora del proceso diseño-cálculo de nuestros objetos proyectados. Aquí hemos demostrado su utilidad actual.

- Aún contando con modernos programas de cálculo, insistimos en la necesidad del conocimiento de la Estática Gráfica como un instrumento adecuado para el control proyectual de nuestros objetos arquitectónicos.
- Las comprobaciones de estabilidad de valiosas estructuras de nuestro Patrimonio Arquitectónico, pueden tener en la Estática Gráfica un aliado plenamente vigente.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

Para las referencias bibliográficas que se muestran a continuación, se ha seguido la notación más utilizada internacionalmente.

Se han ordenado alfabéticamente por la primera letra del apellido del autor, sigue el nombre del mismo, en caso de coincidencia. Aparece en negrita **MAYÚSCULAS** y entre paréntesis, como por ejemplo **(1866)**, abajo del apellido que concede el orden, el año de la publicación.

En su caso si la edición consultada no coincide con la de la primera edición y este caso se conoce, se citan ambas ediciones. La original en negrita y se adjunta el año del texto consultado.

Se acompaña el nombre comercial de la Editorial y la ciudad de la sede de la misma.

Finalmente se ha añadido en algunas referencias, un paréntesis con uno o dos asteriscos, que representan respectivamente:

(\*) Volúmenes pertenecientes a la biblioteca del autor.

(\*\*) Textos pertenecientes a la biblioteca electrónica del autor, descargados vía Internet.

En caso de autores con varias obras, ha sido el año de la primera edición de los títulos el parámetro ordenador.



- **ABRAHAM** (Pol)  
(1934) *Viollet-le-Duc et le rcionalisme médiéval*. Vicent, Fréal et Cie: Paris.
- **ALASIA** (Cristoforo)  
(1899) *Calcolo grafico ed applicazioni alla statica grafica*. Lapi: Cita di Castello. (\*)
- **ALBERTI** (Leon Battista)  
(1436) (1996) *De Pictura. (De la Pintura)* (Edic. en castellano) Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México D. F. 1996
- **ALLEN** (Edward) / **ZALEWSKI** (Waclaw) / **BOSTON STRUCTURES GROUP**.  
(2010) *Form and Forces. Designing efficient, expressive structures*. John Wiley & Sons. Hoboken, New Jersey. (\*)
- **ALSINA** (Claudi)  
(2010) *Las mil caras de la belleza geométrica. Los poliedros*. RBA Libros, S.A.: Barcelona. (\*)
- **ANDA ALANÍS de** (Enrique X.)  
(2008) *Félix Candela. 1910-1997. El dominio de los límites*. Taschen: Freiburg. (\*)
- **ANDRÉS MARTÍN** (Francisco Ramón) / **FADÓN SALAZAR** (Fernando)  
(1994) *Análisis Gráfico de obras emblemáticas de Félix Candela*. Actas del VI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica. INGEGRAF: Toledo.
- **ANGUITA TUÑÓN** (Juan)  
(1996) *Sebastiano Serlio. Representación y Proyecto en el Libro IV. (Venecia, 1537) Una revisión de la edición castellana de Francisco Villalpando (Toledo, 1552)*. T.D. Dirigida por GENTIL BALDRICH (José María). ETSAS: Sevilla. (\*)
- **ANGUITA TUÑÓN** (Juan)  
(2011) *Asignaturas en la red. 1985-2011. Dibujo Arquitectónico*. Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla. I.S.B.N. 978-84-693-8652-1. (\*)
- **AOUST** (M. l'Abbé. Louis Stanislas Xavier Barthélemy )  
(1859) *Discours de réception de M. l'abbé Aoust, proffeseur de mathématique à la Faculté des Sciences de Marseille*. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Marseille. Séance publique du 5 juin 1859.

- **Aoust** (M. l'Abbé. Louis Stanislas Xavier Barthélemy )  
(1869) *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris 1869. (University of Michigan Historical Math Collection).
- **ARANA CAÑEDO-ARGÜELLES** (Juan)  
(2009) *Escritos científicos*. Colección Obras filosóficas y científicas de Gottfried Wilhelm Leibniz. Editorial Comares S.L.: Granada.
- **ARCHIBALD** (R.C.)  
(1915) *Euclid's Book on the Division of Figures with a restoration based on Woepck's text and on the Practica geometriae of Leonardo Pisano*, Cambridge, 1915, pp. 4-9.
- **ARNAU AMO** (Joaquín)  
(1988) *La teoría de la Arquitectura en los Tratados*. Tomos I (Vitruvio), II (Alberti) y III (Filarete, Di Giorgio, Serlio y Palladio). Tebar Flores: Madrid. (\*)
- **ARREDONDO** (Francisco) et. alt.  
(1977) *La obra de Eduardo Torroja*. Colección Cultura y Ciencia. Instituto de Empresa: Madrid.
- **ARRONDEAU** (Pierre)  
(2011) *Análisis estructural de edificios del S. XX: Torre Jaume I*. Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería. Master Tesis. Tutor: Pons Poblet, Josep María. Universitat Politècnica de Catalunya: Barcelona.
- **ARTIÑANO Y DE GALDÁCANO** (Gervasio de)  
(1931) *Compendio de Resistencia de Materiales y Grafostática*. Librería General de Victoriano Suárez: Madrid. (\*)
- **AROCA HERNÁNDEZ-ROS** (Ricardo)  
(1999) *¿Qué es estructura?*. Cuadernos del Instituto Juan de Herrera: Madrid. (\*\*)
- **ATTALANESE** (Carmine)  
(1970) *Apunti di statica grafica con Appendice*. Lignori editore: Napoli. (\*)
- **AYRES, JR.** (Frank)  
(1971) *Teoría y problemas de geometría proyectiva*. Trad. Llamas Jimeno (Amaury) / Veloza Cantor (Campo Elías). Libros McGraw-Hill: Bogotá. (\*)

- **BANHAM** (Reyner)  
(1977) *Teoría y diseño arquitectónico en la era de la máquina*. Nueva Visión: Buenos Aires. (\*)
- **BARTOLOMÉ** (José M.) et. alt.  
(1970) *Apuntes de estructuras articuladas de Florentino del Pozo*. 3ª Ed. Servicio de publicaciones de alumnos ETSICCP: Madrid. (\*)
- **BASSEGODA MUSTÉ** (Buenaventura)  
(1947) La bóveda catalana. Boletín de Información de la Dirección General de Arquitectura. Nº 2. Marzo de 1947 pp.15-16: Madrid.
- **BAUD** (G.)  
(1967) *Tecnología de la construcción*. Blume: Barcelona. (\*)
- **BAUERNFEIND** (C. M.)  
(1967) *Die Pauli'sche Gewölbetheorie, analytisch bearbeitet von Ingenieur Bauernfeind*, "Eisenbahn-Zeitung", Bd. 4, 1846, pp. 293-302.
- **BAUSCHINGER** (Johann)  
(1871) *Elemente der Graphische Statik*. R. Oldenbourg: München.
- **BAYLE** (M. Georges)  
(1930) *Cours de Statique graphique*. Ecole spéciale des travaux publics du bâtiment et de l'industrie: Paris. (\*)
- **BEDFORD** (Anthony) / **FOWLER** (Wallace)  
(2008) *Mecánica para ingeniería*. Quinta edición. Trad. Murrieta Murrieta (Jesús Elmer). Pearson Educación de México, S.A. de C.V.: Naucalpán de Juárez. Estado de México. (\*)
- **BELHOSTE** (Bruno)  
(1989) *Gaspard Monge. Urgences revolutionnaires et utopie*. Les Cahiers du M.U.R.S. nº 17-3<sup>ème</sup> Trimestre. 1989. Science et Devenir de l'Homme. Paris (Las siglas M.U.R.S. corresponden a: Mouvement Universel de la Responsabilité Scientifique)
- **BELMAR** (F.) / **GARMENDIA** (A.) / **LLINARES** (J.)  
(1998) *Curso de Física Aplicada. Estática*. Servicio de publicaciones. UPV: Valencia. (\*)
- **BENEVOLO** (Leonardo)  
(1977) *Historia de la Arquitectura Moderna*. 3ª Ed. Gustavo Gili: Barcelona. (\*)

- **BERGÓS I MASSÓ** (Joan)  
(1953) *Materiales y elementos de construcción. Estudio experimental*. Bosch: Barcelona.
- **BILL** (Max)  
(1969) *Robert Maillart. Bridges and Constructions*. Frederick A. Praeger: New York.
- **BILLINGTON** (David P.)  
(1990) *Robert Maillart and the Art of Reinforced Concrete*, The MIT Press: Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts.
- **BILLINGTON** (David P.)  
(2003) *The Art of Structural Design: A Swiss Legacy*. Princeton University Art Museum: Princeton.
- **BOUDON** (Philippe) , Guillerme (Jacques), Tabouret (René)  
(1970) *Figuration graphique en architecture*. D.G.R.S.T. Paris. (1974) Atelier de recherche et d'études d'aménagement. Paris.
- **BOURNET** (J.) , et alt.  
(1886) *Journal de Mathématiques Elementaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au Baccalauréat ès Sciences*. Librairie Ch. Delagrave: Paris.(\*\*)
- **BRIANCHON** (Charles Julien)  
(1806) *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré*. Journal de l'Ecole Polytechnique: Avril 1806.(\*\*)
- **BRIX** (Adolf Ferdinand Wenceslaus)  
(1831) *Lehrbuch der Statik fester Körper, in elementarer Darstellung mit besonderer Rücksicht auf technische Anwendung*. C. Reimarus: Berlin 1849. (Digitalizado de un original de la University of Michigan por googlebooks).(\*\*)
- **CAMUS** (Charles-Étienne-Louis)  
(1751) *Cours de mathématique, 3<sup>ème</sup> partie: Éléments de mécanique statique*, t. I et II . Imprimerie Royale: Paris (\*\*)
- **CARDELLACH** (Félix)  
(1910) *Filosofía de las estructuras*. Librería de Agustín Boch: Barcelona. (\*)
- **CARMONA** (Michel)  
(2002) *Gustave Eiffel*. Editions Fayard: Paris.

- **CARVALLO** (J.)  
(1850) *Étude sur la stabilité des voûtes*, Mallet-Bachelier: Paris.
- **CATALÁ GALINDO** (José Damián) / **ORTUÑO ORTÍN** (Miguel) / **RÍUS TALÉNS** (José)  
(1993) *Física*. Ed. Luis Vives: Zaragoza. (\*)
- **CEBALLOS MESA** (Alfredo)  
(2011) *Epónimos: La ley de Wolff*. Julio César Hernández Perera. Centro de Investigaciones Médico Quirúrgicas: La Habana.(\*\*)
- **CHARLESON** (Andrew)  
(2006) *La estructura como arquitectura*. (Forma, detalles y simbolismo) Reverté: Barcelona. (\*)
- **CHARLTON** (Thomas Malcom)  
(1982) *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge University Press: Cambirdge.
- **CHASLES** (Michel Floréal)  
(1837) (1989) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie*. Editado por Gabay: Paris 1989.(\*\*)
- **CHATZIS** (Konstantinos)  
(2004) *La réception de la Statique Graphique en France durant le dernier tier du XIX<sup>e</sup> siècle*. Revue d'Histoire des Mathématiques. Tome 10 Fascicule 1. Societe Mathematique de France: Paris. (\*)
- **CHECA CREMADES** (Fernando)  
(2000) *De la medida*. Alberto Durero. Akal: Madrid.
- **CHING** (Francis D.K.)  
(2008) *Manual de Dibujo Arquitectónico*. 3ª Ed. Revisada y ampliada. Trad. Carbonell (Jorge) / Castán (Santiago). Gustavo Gili: Barcelona. (\*)
- **CHOISY** (Auguste)  
(1873) (1999) *L'art de bâtir chez les romains*. Ducher: París. Versión castellana: *El arte de construir en Roma*. CEHOPU, CEDEX, 1999. Instituto Juan de Herrera: Madrid.(\*\*)
- **CHOISY** (Auguste)  
(1899) (1951) *Histoire de l'architecture*. Édouard Rouveyre: París. Versión castellana: *Historia de la arquitectura*.(2ª Ed.). Victor Lerú: Buenos Aires 1951.(\*\*)

- **CHURTICHAGA** (José M<sup>a</sup>)  
(2004) *“La estructura veloz” en Félix Candela y Emilio Pérez Piñero* . Arquitecturas ausentes del siglo XX. Editorial Rueda, S.L.: Madrid.(\*\*)
- **CIAPPI** (Anselmo)  
(1930) *Corso di Statica Grafica. Parte Prima. Calcolo grafico e Nomografia*, Con 144 figure ed una tavola fuori testo. Paolo Cremonese: Roma. (\*)
- **CIAPPI** (Anselmo)  
(1930) *Corso di Statica Grafica. Parte Seconda. Statica Teorica e Statica Applicata*, Con 198 figure. Paolo Cremonese: Roma. (\*)
- **CIAPPI** (Anselmo)  
(1930) *Corso di Statica Grafica. Parte Terza. Teoria dei momenti d’Inerzia*, Con 56 figure. Paolo Cremonese: Roma. (\*)
- **CORBALÁN** (Fernando)  
(2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA Libros,S.A.: Barcelona. (\*)
- **CORDELLA** (Domenico)  
(1876) *Sulla Statica Grafica*. G. Abello e Comp. G. Abello e Comp.: Torino. (\*)
- **CORTÉS** (Juan Antonio)  
(1998) *La Geometría ha muerto. ¡Viva la Geometría!* Circo. 1998. 57. El curso de las cosas. Circo M.R.T. Coop.: Madrid.(\*\*)
- **COULOMB DE** (Charles-Augustin)  
(1776) *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs a l’architecture*. Mémoires de l’Académie Royale des Sciences, Vol. 7 (1776) pp. 343-382.
- **COUSINERY** (Barthélémy Édouard)  
(1840) *Le calcul par le trait, ses éléments et ses applications: à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, à l’interpolation graphique et a la détermination pour l’épure de l’épaisseur des murs de soutènement et des murs de coulées des voûtes*. Chez Carilian- Goeury et VR Dalmont: Paris. (Digitalisierungszentrum der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen)(\*\*)
- **CREMONA** (Luigi)  
(1872) *Le Figure reciproche nella Statica Grafica*. Tipografia Giuseppe Bernardoni: Milano.

- **CREMONA** (Luigi)  
(1873) *Elementi de Geometría Proiettiva (Ad uso degli Instituti Tecnici del Regno d'Italia)* G. B. Paravia e Comp.: Roma-Torino-Milano Firenze.
- **CREMONA** (Luigi)  
(1879) *Le Figure reciproche nella Statica Grafica*. Terza Edizione. U. Hoepli: Milano. ([http://www.bma.arch.unige.it/PDF/cremona\\_le\\_figure\\_reciproche.pdf](http://www.bma.arch.unige.it/PDF/cremona_le_figure_reciproche.pdf))(\*\*)
- **CREMONA** (Luigi)  
(1885) *Les figures réciproques en Statique Graphique*. Trad. Bossut (Louis) Gauthier-Villars: Paris. Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes UK. 2010. (\*)
- **CROMBIE** (Alistair Cameron)  
(2006) *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo. V. I y II*. Alianza Editorial: Madrid. (\*)
- **CULMANN** (Karl)  
(1856) *Ueber die Gleichgewichtsbedingungen von Erdmassen*. Zürcher & Furrer: Zürich. Weitere Kollektionen Wissenschaftshistorische Bestände (ETH-Bibliothek) <http://astronomie-rara.ethbib.ethz.ch>.(\*\*)
- **CULMANN** (Karl)  
(1857) *Druck kreisförmiger Tonnengewölbe auf ihre Lehrgerüste, in Programm der eidgen. polytechnischen Schule für das Schuljahr 1857-58*, Orell, Füssli und Comp., Zürich.
- **CULMANN** (Karl)  
(1866) *Die graphische statik*. Von Meyer & Zeller: Zürich. (Escaneado por Google bücher 2008. Formato de libre disposición informática).(\*\*)
- **CULMANN** (Karl)  
(1875) *Druck kreisförmiger Tonnengewölbe auf ihre Lehrgerüste*. Von Meyer und Zeller: Zürich.
- **CULMANN** (Karl)  
(1875) *Die graphische statik*. 2ª Ed. Von Meyer & Zeller (A. Reimann): Zürich
- **CULMANN** (Karl)  
(1880) (2010) *Traité de statique graphique*. Trad.de la 10ª ed. Alemana Glasser (G.) Jaquier (J.) Valat (A). Dunot: Paris. (Ed. Facsimil Lighining Source UK Ltd.: Milton Keynes). (\*)

- **DARRAS (M.)**  
(1925) *Estatique graphique elementaire et notions preliminaires de resistance des materiaux*. Librairie central des sciences: Paris. (\*)
- **DAVIS (D. S.)**  
(1955) *Nomography and Empirical Ecuations*. Reinhold Publishing Corporation: New York.
- **DÉMARET (Jean)**  
(1948) *Esthétique et construction des ouvrages d'art*. Dunod: Paris.(\*)
- **DERAND (François)**  
(1643) *L'architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes*. Sebastian Cramoisy: Paris.
- **DESARGUES (Girard)**  
(1636) *Exemple des manières universelles du S.G.D.L. (Sieur Girard Desargues Lyonnais) touchant la pratique de la perspective*. Paris 1636. (<http://gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France>). (\*\*)
- **DESARGUES (Girard)**  
(1639) *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan*. Paris 1639. (<http://gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France>).(\*\*)
- **DESCARTES (René)**  
(1637) (1954) *La Géométrie, appendice au Discours de la méthode*. Imprimerie de Ian Maire: Leyde. Reed. Dover: New York 1954.
- **DESCARTES (René)**  
(1637) (1947) *La geometría*. Trad. e introd. por Pedro Rossell Soler. Espasa Calpe: Buenos Aires., 1947.
- **DÍAZ (Jesús Ildefonso)**  
(2009) *Matemáticas que sustentan columnas torres y rascacielos*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. 103, Nº. 2, pp 247-267: Madrid. (\*\*)
- **DIEGUEZ GONZÁLEZ (Agustín)**  
(1999) *Dibujo Técnico*. Apuntes de dibujo técnico y sistemas de representación. Servicio de ediciones UPCT: Cartagena. (\*)



- **DOMENECH I ESTAPÁ** (José)  
(1900) Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña 1900, 37-48. Barcelona.
- **D'ORS PÉREZ-PEIX** (Víctor)  
(1967) *Arquitectura y humanismo*. Labor: Barcelona. (\*)
- **DUHEM** (Pierre)  
(1906) *Les origines de la statique*. Librairie Scientifique A. Hermann: Paris.
- **DUNN** (William)  
(1904) *Notes on the stresses in frames spires and domes*. Journal of the Royal Institute of British Architects, Third series, Vol. 11 ( nov. 1903-oct. 1904) London.
- **DUNN** (William)  
(1908) *The principles of dome construction*. Architectural Review, Vol. 23: (63-73, 108-112) London.
- **DÜRER** (Albrecht)  
(2008) *Traité des proportions* (1525) accompagné des Lettres et Écrits théoriques. Textes traduits et présentés par Pierre Vaisse. Éditions Hermann: Paris.
- **DUTEMPLE** (Lesley A.)  
(2003) *The Pantheon*. Lerner Publications Company: Minneapolis.USA. (\*)
- **EDDY** (Henry T.)  
(1878) *Researches in Graphical Statics*. Van Nostrand: New York. (\*\*)
- **EIFFEL** (Gustave)  
(1885) *Tour en Fer de 300 mètres de hauteur destinée a l'Exposition de 1889*. Mémoire lu à la Société des Ingénieurs, Civils de France. Projet présenté par M.G. Eiffel, dressé par MM. E. Nouguier et M. Koechlin, Ingénieurs et M. Sauvestre Architecte. Capiomont et Renault pour la Société des Ingénieurs Civils: Paris.(\*\*)
- **EIFFEL** (Gustave)  
(1885) *Projet d'une tour en fer de 300 mètres de hauteur destinée à L'Exposition de 1889*. Bulletin de la Société des Ingénieurs Civils de France, 38 (1885) pp. 345–370: Paris.
- **EIFFEL** (Gustave)  
(1900) *La tour de trois cents mètres*. Société des imprimeries Lemerrier: Paris. (\*\*)

- **ENGEL** (Heino)  
(2009) *Sistemas de estructuras*. Gustavo Gili: Barcelona. (\*)
- **ETAYO** (José Javier)  
(2001) *El despertar de nuestra Matemática*. Actas de las Jornadas Provinciales de Matemáticas. Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Madrid: Madrid.
- **EUCLIDES DE ALEJANDRÍA**  
(300 A.C.) *Euclidus Opera Ominia*, I.L. Heiberg & H. Menge (editors), Teubner (1883-1916). (Nueva edición en griego e inglés, en: <http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html>). (\*\*)
- **FAVARO** (Antonio)  
(1872) *Sulle prime operazioni del calcolo grafico*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia.
- **FAVARO** (Antonio)  
(1873) *La Statica grafica nell'insegnamento técnico superiore*. Tipografia Grimaldo E C.: Venezia. (\*)
- **FAVARO** (Antonio)  
(1877) *Lezioni di statica grafica*. Sacchetto: Padova.
- **FAVARO** (Antonio)  
(1879) *Leçons de Statique Graphique*. Première partie. Géométrie de position, trad. de l'italien par Paul Terrier. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris. (\*)
- **FAVARO** (Antonio)  
(1880) *Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni*, Società tipographica: Modena.
- **FAVARO** (Antonio)  
(1885) *Leçons de Statique Graphique*. Deuxième partie. Calcul graphique, trad. de l'italien par Paul Terrier, avec appendice et notes du traducteur. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris. (\*)
- **FORTEA LUNA** (Manuel) / **LÓPEZ BERNAL** (Vicente)  
(1998) *Bóvedas extremeñas. Proceso constructivo y análisis estructural de bóvedas de arista*. COADE. Delegación de Badajoz: Badajoz. (\*)

- **FRAMPTON** (Kennet)  
(2009) *Historia crítica de la Arquitectura Moderna*. 4ª ed. Trad. Sainz (Jorge). Gustavo Gili: Barcelona. (\*)
- **FRIED** (Michael) & **UNGURUS** (Sabetai)  
(2001) *Apollonius of Perga's Conica. Text, context, subtext*. Brill: Leiden, Boston, Köln.
- **GARCÍA VARTOSA** (Gerard) Director. AA.VV.  
(2000) *Domenech i Montaner año 2000*. Colegio de Arquitectos de Cataluña: Barcelona. (\*)
- **GARCÍA DEL CID** (Lamberto)  
(2000) *La sonrisa de Pitágoras. Matemáticas para diletantes*. Debolsillo: Barcelona. (\*)
- **GARCÍA GARCÍA** (Ascensión)  
(1996) *El puente y la escultura, un diálogo entre funcionalidad y estética*. T.D. Director: Fernando Hernández. Universidad de Barcelona: Barcelona.(\*\*)
- **GARCÍA GARCÍA** (Rafael)  
(2005) *Henri Thunnissen. Estudioso de la construcción abovedada y arquitecto*. Actas del Cuarto Congreso Nacional de Historia de la Construcción, Cádiz, enero 2005. Vol I, pp. 439-50. Instituto Juan de Herrera: Madrid.(\*\*)
- **GARCÍA-GERMÁN** (Javier) (Ed.) AA.VV.  
(2010) *De lo mecánico a lo termodinámico. Por una definición energética de la arquitectura y el territorio*. Colección Compendios de Arquitectura Contemporánea. Gustavo Gili, SL: Barcelona. (\*)
- **GARCÍA MORALES** (M<sup>a</sup> Victoria)  
(1987) *Relación de artículos de Teodoro Anasagasti*. Catálogo de la Exposición: *Arquitectura madrileña de la primera mitad del S.XX*. Archivo municipal: Madrid.
- **GER Y LÓBEZ** (Florencio)  
(1898) *Tratado de construcción civil*. Texto de numerosas Escuelas de Arquitectura. La Minerva extremeña. Ed. Facsimil. Departamento de Publicaciones de la Diputación de Badajoz: Badajoz. (\*)
- **GERHARDT** (Rolf)  
(2002a) *Anschanliche Traguerklehre. Experimentelle Darstellung von Biejemomenten mit Hilfe der Seillinie*. Aachen: Saker

- **GESTO DE DIOS** (Ramón)  
(2012) *Mecánica para arquitectos e ingenieros: Estática: Un enfoque estructural*. Aula Magis: Madrid. (\*)
- **GIEDION** (Sigfried)  
(2009) *Espacio, tiempo y arquitectura*. Reverté: Barcelona. (\*)
- **GIRALT - MIRACLE** (Daniel) Director. AA. VV.  
(2002) *Gaudí. La búsqueda de la forma. Espacio, Geometría, Estructura y Construcción*. Lunwerg Editores S. A.: Barcelona. (\*)
- **GIL DE HONTAÑÓN** (Rodrigo)  
(1540) *Manuscrito*. (Recogido en todo o en parte en el manuscrito de Simón García *Compendio de Arquitectura y simetría de los templos*, 1681). Ed. facsimilar y transcripción. Colegio de Arquitectos, de Valladolid. Valladolid. 1991.(\*\*)
- **GIORDAN** (André)  
(2000) *Mi cuerpo, la mayor maravilla del mundo*. Plaza & Janés: Barcelona.
- **GIOVANNARDI** (Fausto)  
(2000) Robert Maillart e l'emancipazione del C.A. Ed. Fausto Giovannardi. [www.giovannardierontini.it](http://www.giovannardierontini.it). (\*\*)
- **GODOY** (Luis A.)  
(2010) *Estabilidad de Estructuras: Una Perspectiva Histórica*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE): Barcelona.(\*\*)
- **GOLDENHÓRN** (Simon)  
(1946) *Elementos de Estática Gráfica*. Impreso en los Talleres Gráficos Argentinos L. J. Rosso: Buenos Aires. (\*)
- **GOLDENHÓRN** (Simon)  
(1951) *Calculista de Estructuras de H. Armado, Hierro y madera*. Impreso en los Talleres Gráficos de Sebastián de Amorrortu e hijos: Buenos Aires. 10ª Ed. 1961(\*)
- **GONZÁLEZ-MORENO NAVARRO** (José Luís) / CASALS (Albert)  
(2002) *Gaudí y la razón constructiva. Un legado inagotable*. Akal. Textos de Arquitectura: Madrid. (\*)
- **GOURNERIE** (J. de la )  
(1862) *Traité de géométrie descriptive*. Mallet Bachelier: Paris.

- **GRAHAM** (Robert Hudson)  
(1883) *Graphic and Analytic Statics in Theory and Comparison*. Crosby Lockwood & Company: London 1883. (\*)
- **GREGORY** (David)  
(1697) *Catenaria*. Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 19,nº 231, pp. 637-652. London.(\*\*)
- **GUASTAVINO MORENO** (Rafael)  
(1893) *Essay on the theory and history of Cohesive Construction, applied especially to the timber vault*. 2ª Ed. Ticknor and Company: Boston.(\*)
- **GUASTAVINO MORENO** (Rafael)  
(1896) *Prolegomenos on the Function of Masonry in Modern Architectural Structures* (Part I). Record and Guide Press: New York. (\*)
- **GUASTAVINO MORENO** (Rafael)  
(1904) *The Function of Masonry in Modern Architectural Structures* (Part II). America Printing Co.: Boston.(\*)
- **GUASTAVINO MORENO** (Rafael)  
(2006) *Escritos sobre la construcción cohesiva*. Instituto Juan de Herrera. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo (CEHOPU). Madrid. (\*)
- **GUILLERME** (Jacques)  
(1982) *La figurazione in architettura*. Franco Angeli. Milán.
- **GUIU CASANOVA** (Manuel)  
(1957) *Geometría plana y del espacio. Con nociones de Geometría Proyectiva*. 9ª Edición. Boch: Barcelona. (\*)
- **HEARN** (Fil)  
(2006) *Ideas que han configurado edificios*. Ed. Gustavo Gili: Barcelona. (\*)
- **HENKEL** (Otto)  
(1926) *Estática Gráfica*. Trad. Álvarez Lide (G.) Labor: Barcelona. (\*)
- **HEYMAN** (Jacques)  
(1983) *Cronic defects in masonry vaults: Sabourets cracks*. Monumentum.26: 131-141. (Traducido al castellano en Heyman 1995, 265-72).

- **HEYMAN** (Jacques)  
(1988) *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. Cambridge University Press: Cambridge.
- **HEYMAN** (Jacques)  
(1995) (1999) *Estructuras de fábrica*. Edición y traducción íntegra de la edición original: *The Stone Skeleton*. Cambridge University Press: Cambridge. 1995 Instituto Juan de Herrera: Madrid. (1ª Reimpresión, Madrid 2005) (\*)
- **HIBBELER** (R. C.)  
(2006) *Mecánica de materiales*. 6ª Ed. Trad. Cera Alonso (José de la) / González y Pozo (Virgilio). Pearson Educación.: Naucalpan de Juárez, México. (\*)
- **HOELSCHER** (Randolph P.) et al.  
(1952) *Graphic Aids in Engineering Computation*. McGraw-Hill: New York.
- **HOSKINS** (L. M.)  
(1899) *The Elements of graphic Statics. A Text-Book for Students of Engineering*. Macmillan & Co., Ltd.: London. (\*)
- **HUERTA** (Santiago)  
(2001) *Las bóvedas de Guastavino en América*. Publicado con ocasión de la exposición: *Guastavino Co. (1885-1962). La reinención de la Bóveda*. Ed. a cargo de Santiago Huerta. Instituto Juan de Herrera. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo (CEHOPU). Madrid. (\*)
- **HUERTA** (Santiago)  
(2004) *Arcos, bóvedas y cúpulas*. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Instituto Juan de Herrera: Madrid. (\*)
- **HUERTA** (Santiago)  
(2006) *La construcción tabicada y la teoría cohesiva de Rafael Guastavino*. Introducción a *Escritos sobre construcción Cohesiva* de Rafael Guastavino. Instituto Juan de Herrera. Centro de Estudios Históricos de Obras Públicas y Urbanismo (CEHOPU). Madrid. (\*)
- **HUXTABLE** (Ada Louise)  
(1961) Pier Luigi Nervi. Editorial Bruguera: Barcelona.
- **HUYGENS** (Christiaan)  
(1934) *Oeuvres Complètes*. Société Hollandaise des Sciences. Martinus Nijhoff: La Haye.

- **INDEX**  
(1893) *Index du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*, publié par la Commission Permanente du Répertoire. Gauthier-Villars: 1893.
- **INGLIS (C.)**  
(1951) *Applied Mechanics for Engineers*. Cambridge University Press. Cambridge.
- **JACOBO (Guillermo José)**  
(2004) *El diseño estructural por medio de los métodos gráficos*. Comunicaciones científicas y tecnológicas de la Universidad Nacional del Noroeste: El Chaco. Argentina. (\*)
- **JIMÉNEZ IRAUNDEGUI (Rosa)**  
(2001) *Historia de las Matemáticas*. Ministerio de Educación Cultura y Deporte: Madrid.(\*\*)
- **JIMÉNEZ RUEDA (Cecilio)**  
(1898) *Tratado de las formas geométricas de primera categoría precedido de una introducción sobre los conceptos fundamentales de la geometría e ilustrado con 118 figuras intercaladas en el texto*. Valencia.
- **JOHNSON (L. E.)**  
(1952) *Nomography and Empirical Equations. Organized by equation type, scales are nicely explained, nice geometrical approach*. John Wiley & Sons: New York.
- **JOST (Hans-Ulrich)**  
(2005) *The Introduction of Reinforced Concrete in Switzerland (1890-1914): Social and Cultural Aspects*. <http://www.arct.cam.ac.uk/Downloads/ichs/vol-2-1741-1754-jost.pdf>. (\*\*)
- **KAYSER (Carl Heinrich Albert)**  
(1836) *Handbuch der Statik mit Bezug auf ihre Anwendung und mit besonderer Rücksicht auf ihre Darstellung ohne Anwendung der höheren Analysis*. G.Braun: Karlsruhe. ( Université de Strasbourg. STRASBOURG-Bib.electronique 063 ) (\*\*)
- **KERSTEN (C.)**  
(1929) *Empleo del hierro en la Construcción*. Trad. Bassegoda (B.) Casona: Barcelona. (\*)

- **KOECHLIN** (Maurice)  
(1889) *Applications de la Statique Graphique*. P., Baudry et Cie.: Paris.
- **KÖRNER** (Cristian)  
(1901) *Gewölbte Decken*. Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung: Stuttgart.
- **KPNEIP** (Karl) / **WINZER** (Gustav) / **KILLMAN** (Paul)  
(1937) *La escuela del técnico mecánico III. Mecánica. Resistencia de materiales. Grafostática*. Labor: Barcelona. (\*)
- **KURAN** (Aptullah)  
(1968) *The mosque in early Ottoman architecture*. University of Chicago Press: Chicago. (\*\*)
- **KURRER** (Karl-Eugen)  
(1991) *Auf der Suche nach der wahren Stützlinie*. Humanismus und Technik, 34, 1991: 21-54. (*En busca de la verdadera línea de apoyo*. Humanismo y Técnica)
- **LAGRANGE** (Joseph Louis)  
(1815) *Mécanique Analytique*. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. M<sup>me</sup> V<sup>e</sup> Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques: Paris.
- **LAGRANGE** (Joseph Louis)  
(1795) *1ª Lección de la Escuela Normal*. En J. Dhombres (Ed.), *L'École normale de l'an III. Leçons de Mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge* (pp. 9-141). Dunot: Paris.
- **LALANNE** (Louis Léon)  
(1844-51-63) *Abaque, ou Compteur universel, donnant à vue à moins de 1/200 près les résultats de tous les calculs d'arithmétique, de géométrie et de mécanique pratique*. Carilian-Gœury et Dalmont: Paris 1844. 2ème éd. Hachette: Paris 1851. 3ème éd. Hachette: Paris 1863.
- **LALANNE** (Léon)  
(1876) *Notice sur les travaux et titres scientifiques de M . Léon Lalanne*. Gauthier- Villars: Paris.



- **LAMÉ** (Gabriel)  
(1826-1827) *Mémoire sur la Construction des polygones funiculaires*. Journal des voies de comunicación. Saint Petersburg. (Source gallica.bnf.fr/Ecole nationale des Ponts-et-chaussées).(\*\*)
- **LAPPARENT** (A. de)  
(1897) *Louis Poinsot (1777-1850). Livre du Centenaire de L'École Polytechnique*. Société des amis de la bibliothèque de L'École Polytechnique. Paris.
- **LE BON** (Gustave)  
(1905) *L'Évolution de la Matière*. Ernest Flammarion, Editeur: Paris.  
gallica.bnf.fr / Bibliothèque National de France.
- **LEHMANN** (Christine) / **MAURER** (Bertram)  
(2006) *Karl Culmann und die graphische Statik. Zeichnen, die Sprache des Ingenieurs*. Ernest & Sohn: Berlin. (\*)
- **LEMOINE** (Bertrand)  
(1990) *Santiago Calatrava. Un sculpteur du jeu des forces*. Architecture d'Aujourd'hui. n° 267. Février 1990.
- **LEMOINE** (Emile)  
(1902) *Geometrographie, ou Art des constructions geometriques*. Naud: Paris .
- **LEROY** (Charles François Antoine)  
(1840) *Traité de Géométrie Descriptive*. Suive de la Méthode des Plans Cotés et de la Théorie des Engrenages Cylindriques et Coniques avec une collection d'Épures composée de 69 Planches. Seconde Édition (1842), revue et augmentée. Bachelier, Carilian-Goeury et Dalmont: Paris.
- **LETAROUILLY** (Paul Marie)  
(1840-55) *Édifices de Rome moderne; ou, Recueil des palais, maisons, églises, couvents et autres monuments publics et particuliers les plus remarquables de la ville de Rome*. Tipographie de Firmin Didot Frères: Paris.
- **LÉVY** (M. Maurice)  
(1907) *Principes et aplicatons de statique graphique pure*. I Tomo. Gauthier-Villars: Paris. (\*)

- **LÉVY** (M. Maurice)  
(1913) *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.* II Tomo . Gauthier-Villars: Paris. (\*)
- **LÉVY** (M. Maurice)  
(1918) *Arcs. Ponts suspendues. Corps de revolution.* III Tomo. Gauthier-Villars: Paris. (\*)
- **LISNOVSKY** (Martín)  
(2007) *Selección de Textos Maestros.* Cátedra Brandariz.  
<http://www.arquitecturamashistoria.blogspot.com>. (\*)
- **LÓPEZ MANZANARES** (Gema)  
(1998) *La estabilidad de la cúpula de San Pedro: el informe de los tres matemáticos.* Actas del Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción, A Coruña, 22-24 octubre de 1998. I. Juan de Herrera: Madrid.
- **LÓPEZ PELÁEZ** (José Manuel)  
(2007) *Maestros cercanos.* Colección la Cimbra. Fundación Caja de Arquitectos: Barcelona. (\*)
- **LOREN** (Mar) / Et Alt.  
(2008) *Guastavino CO. La reinvenió de l'espai públic a New York.* . Consorci de Museus de la Comunitat Valenciana, 2008. 12-27: Valencia.
- **LOREN** (Mar)  
(2009) *Texturas y Pliegues de una Nación. New York City: Guastavino Co. y la Reinvenió del Espacio Público de la Metrópolis Estadounidense.* TC Cuadernos: Valencia.
- **LLOREN** (Mar)  
(2009) *Texturas y Pliegues de una Nación. New York City: Guastavino Co. y la Reinvenió del Espacio Público de la Metrópolis Estadounidense.* TC Cuadernos: Valencia.
- **LYNN** (Greg)  
(1999) *Animate Form.* Princeton Architectural Press: New York.
- **LOZANO LEYVA** (Manuel)  
(2007) *De Arquímedes a Einstein. Los diez experimentos más bellos de la Física.* De Bolsillo: Barcelona. (\*)

- **LOZANO LEYVA** (Manuel)  
(2007) *Los hilos de Ariadna. Diez descubrimientos científicos que cambiaron la visión del mundo.* Debate: Barcelona. (\*)
- **LURÇART** (André)  
(1929) *Architecture.* Collection: *Les Manifestations de l'esprit contemporain.* Au Sans Pareil: París.
- **MACDONALD** (William L.)  
(1972) *The Pantheon. Design, meaning and progeny.* Harvard University Press: Cambridge. Massachusetts. (\*)
- **MAGRO ANDRADE** (Rafael) et al.  
(2007) *Fundamentos físicos de la ingeniería I.* García Maroto Editores, S. L.: Madrid. (\*)
- **MAKOWSKI** (Z. S.)  
(1972) *Estructuras espaciales de acero.* Gustavo Gili: Barcelona. (\*)
- **MAINSTONE** (R.)  
(1973) (1999) *Intuition and the springs of structural invention.* Reed. en R. Mainstone. *Structure in Architecture.* Ashgate Publishing: London, 1999, pp 1–48.
- **MARTINELL I BRUNET** (Cèsar)  
(1969) *Conversaciones con Gaudí.* Punto Fijo: Barcelona.
- **MASSAU** (Junius)  
(1878-1887) *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications.* *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand,* 2 (1878), p. 13–55, 203–281 ; 7 (1884), p. 53–132 ; 10 (1887), p. 1–535.: Bruxelles.
- **MATHIEU** (Caroline)  
(2009) *Gustave Eiffel. Le magicien du fer.* Skira, Flammarion: Paris 2009.
- **MAURER** (Bertram)  
(1998) *Karl Culmann und die graphische statik.* Geschichte der Naturwissenschaft und der Technik: Berlin, Diepholz, Stuttgart 1998.
- **MAXWELL** (James Clerk)  
(1864) *On reciprocal figures and diagrams of forces.* Philos. Mag., 1864, XXVII, 250-261. London, Edinburgh & Dublin. (\*\*)

- **MAXWELL** (James Clerk)  
(1872) *On reciprocal figures, frames and diagrams of forces.* Trans. Roy. Soc. Edinburgh Vol. 26. pp. 1-40, plt. 1-4 Edinburgh.(\*\*)
- **MEOLI** (Humberto)  
(1955) *Lecciones de estática gráfica.* Nigar: Buenos Aires. (\*)
- **MEYER** (Georg Hermann von )  
(1867) *Die Architektur der Spongiosa.* Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medizin 47 pp. 615-628. (1867). Springer: Berlin, New York.
- **MEYER** (Georg Hermann von )  
(1867) *Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüsts.* Wilhelm Elgelmann: Leipzig.
- **MEYER** (Jean )  
(1873) *Le Dr. Charles Culmann ingénieur et profeseur a l'école polytechnique fédéral a Zürich.* Notice biographique. Tirage spécial pour la Société des anciens élèves de l'école polytechnique: Lausanne 1882. ETH-Sig.:92466.
- **MICHONS** (Pierre-Félix)  
(1857) *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement,* Lithographie de l'École d'Application. Metz.
- **MINGUEZ** (Carlos)  
(1999) *El Prefacio al Almagesto de Ptolomeo.* La filosofía de los científicos. Universidad de Valencia: Valencia.
- **MODIGLIANO** (Cesare)  
(1882) *Sull'applicazione della Statica Grafica allo studio dei progetti di navi.* Studi dell'Ing. Cesare Modigliano. Libero Docente nella R. Università di Pisa. Tip. Pieraccini Dir. Da P. Salvioni: Pisa. (\*)
- **MOHR** (Christian Otto)  
(1868) *Beitrag zur Theorie der Holz und Eisenkonstruktionen.* ZAV Hannover.
- **MOHR** (Christian Otto)  
(1916) *Die Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks.* Ernst: Berlin.
- **MONEO VALLÉS** (Rafael)  
(2007) *Cosas vistas de izquierda a derecha (sin gafas).* Un comentario a la Tesis Doctoral de Enric Miralles Moya, 1987. Graduate School of Design, GSD – Harvard.(\*\*)

- **MONGE** (Gaspard)  
(1798) *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales l'ane 3 de la République.* (1794). Baudouin, imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national: Paris ( [gallica.bnf.fr/ark](http://gallica.bnf.fr/ark)) (\*\*)
- **MONGE** (Gaspard)  
(1803) (1996) *Geometría descriptiva.* Imprenta real. Madrid. Ed. Facsimilar. Colección de Ciencias, Humanidades e Ingeniería nº 52. Colegio de Ingenieros CCP.: Madrid. (\*)
- **MONGE** (Gaspard)  
(1922) *Géométrie descriptive. Augmentée d'une Théorie des ombres et de la perspective.* Extraite des papiers de l'auteur par Barnabé Brisson. I. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup> Éditeurs: Paris. ( <http://gallica.bnf.fr/>) (\*\*)
- **MONGE** (Gaspard)  
(1922) *Géométrie descriptive. Augmentée d'une Théorie des ombres et de la perspective.* Extraite des papiers de l'auteur par Barnabé Brisson. II. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup> Éditeurs: Paris. ( <http://gallica.bnf.fr/>) (\*\*)
- **MONTESDEOCA DELGADO** (Ángel)  
(2001) *Geometría Proyectiva. Cónicas y Cuádricas.* Colección Textos Universitarios. Dirección General de Universidades e Investigación de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias: Tenerife. (\*)
- **MOY** (Carlos María, de)  
(1888) *Estática Gráfica. Primera parte: Geometría Proyectiva.* Imprenta de Pedro Ortega: Barcelona. (\*)
- **MUÑOZ COSME** (Alfonso)  
(2008) *El proyecto de arquitectura.* Reverté: Barcelona. (\*)
- **NAVASCUÉS PALACIO** (Pedro)  
(1974) *El libro de la Arquitectura de Hernán Ruíz, el joven.* ETSA de Madrid: Madrid.(\*\*)
- **NAVASCUÉS PALACIO** (Pedro)  
(1995) *Enseñanza de la Arquitectura: cultura moderna técnico artística.* Instituto Juan de Herrera: Madrid.
- **NERVI** (Pier Luigi)  
(1955) *Costruire Correttamente.* Hoepli: Milano.

- **NICHOLL** (Charles)  
(2005) *Leonardo DaVinci. El vuelo de la mente*. Taurus. Memorias y Biografías: Madrid. (\*)
- **NIETO NIETO** (Justo)  
(2008) *Y tú..., ¿Innovas o abdicas?* Editorial de la UPV.: Valencia. (\*)
- **NOVAIS** (Maria Helena)  
(1976) *Cálculo Vetorial e Geometria Analítica*. Edgard Blucher, Ltda.: Sao Paulo.
- **OCHSENDORF** (John)  
(2010) *Guastavino vaulting. The art of structural tile*. Pinceton Architectural Press: New York.
- **ORTEGA** (Tomás) / **ORTEGA** (Inés)  
(2004) *Los diez problemas de Apolonio*. Suma nº 46. Junio 2004. (pp. 59-70) Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas: Madrid. 2004. (\*\*)
- **ORTEGA Y GASSET** (José)  
(1925) (2010) *La deshumanización del Arte*. Planeta De Agostini: Barcelona. (\*)
- **OTT** (Karl von)  
(1871) *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*. IX. Programm der Oberreal Schule besorders abgedruckt: Praga 1871. ( Libro digitalizado por Google de la New York Public Library y descarga vía Internet ). (\*\*)
- **OTT** (Karl von)  
(1872) *Die Grundzüge des Graphischen Rechnens und der graphische Statik*. Edición aumentada: Praga. Reimpreiön: Nabu Press. Charleston, USA. 2010.
- **OTTO** (Edwud)  
(1963) *Nomography* (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics). Macmillan: New York.
- **OUTERELO DOMINGUEZ** (Enrique) / **SÁNCHEZ ABRIL** (José M<sup>º</sup>)  
(2009) *Nociones de Geometría Proyectiva*. Sanz y Torres: Madrid.
- **PALLADIO** (Andrea)  
(1570) *I quatro libri dell'architettura*, Domenico de Franceschi: Venecia. Versión en castellano *Los cuatro libros de arquitectura*, traducción del Presbítero Don Joseph Francisco Ortiz y Sanz. Imprenta Real: Madrid. 1797.

- **PANSIERI** (Enrique)  
(1984) *Estática gráfica. Curso elemental*. Construcciones Sudamericanas: Buenos Aires. (\*)
- **PARSHALL** (Karen Hunger)  
(1998) *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters*. Clarendon Press: Oxford.
- **PEDRESCHI** (Remo)  
(2008) *Form, Force and Structure: A brief history*. Versatility and Vicissitude, Architectural Design, 2008 ,eds. Michael Hensel and Achim Menges, vol78, No.2 John Wiley and Sons: New York.
- **PEREZ LARGADRA** (Antonio)  
(2007) *Historia antigua de Egipto y Próximo Oriente*. Akal: Madrid.
- **PÉROUSE DE MONTCLOS** (Jean-Marie)  
(1968) (1993) *Presentation de Architecture: Essai sur L'art, de Étienne-Louis Boullée*. Col. Savoir sur l'art. Hermann: Paris.
- **PETRIGNANI** (Achille)  
(1973) *Tecnología de la Arquitectura*. Versión española Bessagoda (B.) Gustavo Gili: Barcelona. (\*)
- **PEVSNER** (Nikolaus)  
(2000) *Pioneros del Diseño Moderno. De William Morris a Walter Gropius*. Ediciones Infinito: Buenos Aires. (\*)
- **PLIEGO DE ANDRÉS** (Elena)  
(2009) *Las bóvedas góticas en Lehrbuch der gotischen Constructionen de Georg Gottlob Ungewitter*. Actas del Sexto Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Valencia, 21-24 octubre 2009. Instituto Juan de Herrera: Madrid.
- **POLENI** (Giovanni)  
(1748) *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano*. Padua.(\*\*)
- **PONCELET** (Jean Victor)  
(1822) *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire: Paris. (<http://books.google.es/>) (\*\*)

- **PONCELET** (Jean Victor)  
(1835) *Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes*. Mémorial de l'officier de génie. Vol. XII. Pp. 151-213. Imprimerie et Fonderie de Fain: Paris. Hathi Trust. Digital Library. <http://babel.hathitrust.org>. (\*\*)
- **PONCELET** (Jean Victor)  
(1839) (1870) *Introduction a la mécanique industrielle Physique ou Expérimentale. Troisième Édition*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire: Paris.
- **PONCELET** (Jean Victor)  
(1840) *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*. Bachelier: Paris.
- **PONCELET** (Jean Victor)  
(1862) *Applicatons d'Analyse et de Géométrie qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*. Mallet-Bachelier Imprimeur-Libraire: Paris
- **POUCHET** (L.E.)  
(1795) *Arithmétique linéaire, ou Nouvelle méthode abrégée de calculer, que l'on peut pratiquer sans savoir lire ni écrire*. Guedra: Rouen an IV.
- **PUERTAS** (M.L.)  
(1996) *Euclides: Elementos*. Gredos: Madrid.
- **RAMÓN Y CAJAL** (Santiago)  
(1897) (2010) *Reglas y consejos sobre investigación científica. Los tónicos de la voluntad*. Planeta De Agostini: Barcelona. (\*)
- **RÁNDEZ GARCÍA** (Luis)  
(2004) *Matemáticas en Babilonia*. Departamento de Matemática aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza: Zaragoza. (\*\*)
- **RANKINE** (William John Macquorn)  
(1864) *Principle of Equilibrium of Polyhedral Frames*. Philosophical Magazine , vol.27, p.92. [www.tandf.co.uk/journals/TPHM](http://www.tandf.co.uk/journals/TPHM). (\*\*)
- **RANKINE** (William John Macquorn)  
(1870) *Diagrams of forces in frameworks*. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol.7 , pp. 171-172. Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.(\*\*)
- **RANKINE** (William John Macquorn)  
(1872) *Frames of roofs*. *The Engineer*, vo l. 33, p. 114. Feb. 1872: London.



- **RANKINE** (William John Macquorn)  
(1876) *Manuel de Mécanique appliquée*. Traduit de l'Anglais sur la septième édition par A. Vialay. Dunot Editeur: Paris. (<http://gallica.bnf.fr/ark>). (\*\*)
- **RAYÓ FONT** (Jaime)  
(1910) *La bóveda tabicada*. Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña (1910) pp. 157-184: Barcelona.
- **REULEAUX** (Franz)  
(1864) *Die grafische Statik in ihrer Anwendung auf den Maschinenbau*. Nach Vorträgen von Herrn Prof. Reuleaux bearbeitet und herausgegeben von Politechnischen Verein. Als Manuscript autographirt: Zürich.
- **REULEAUX** (Franz)  
(1868) *Vorträge über Maschinenbaukunde*. Herausgegeben von den Studirenden der Königl. Gewerbe Akademie Berlin. Als Manuskript gedruckt: Berlin.
- **REULEAUX** (Franz)  
(1872) *Der Constructeur : Ein Handbuch zum Gebrauch beim Maschinen-Entwerfen*. Von Friedrich Voeweg und Sohn: Braunschweig.
- **RIEMANN** (Bernhard)  
(2000) *Riemanniana Selecta*. José Ferreirós: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid 2000. (\*\*)
- **RITTER** (Wilhelm)  
(1888) *Anwendungen der graphischen Statik. Nach Professor K. Culmann. Erster Teil. Die im Innern eines Balkens wirkenden Kräfte*. Von Meyer & Zeller: Zürich.
- **RODRIGUEZ DE ABAJO** (Francisco J.)  
(1966) *Geometría Descriptiva. Tomo V. Sistema Cónico*. Ed. Donostiarra: San Sebastián. (\*)
- **RODRIGUEZ DE ABAJO** (Francisco J.) / GARCÍA CORDERA (ANTONIO)  
(1973) *Geometría Descriptiva. Tomo I . Sistema Diédrico. 7ª Ed.* Donostiarra: San Sebastián. (\*)
- **RODRÍGUEZ DE ABAJO** (Francisco J.) / ÁLVAREZ BENGOA (Víctor) / GONZALO GONZALO (Joaquín)  
(2011) *Dibujo Técnico*. Ed. Donostiarra: San Sebastián. (\*)

- **ROLDÁN RUIZ** (Juan)  
(2007) *Estructuras de edificación. Fundamentos y esquemas para el proyecto y la ejecución de estructuras*. Fundación Universitaria San Antonio. Murcia. (\*)
- **RUBIO SANJUAN** (Isidoro)  
(1931) *Grafostática y sus aplicaciones a la construcción*. Nuevas Gráficas: Madrid. (\*)
- **RUBIO SANJUAN** (Isidoro)  
(1949) *Mecánica Industrial*. Labor: Barcelona.
- **RUBIO SANJUAN** (Isidoro)  
(1951) *Elementos de Grafostática*. Labor: Barcelona. (\*)
- **SAINZ AVIA** (Jorge)  
(2009) *El Dibujo de Arquitectura: Teoría e historia de un lenguaje gráfico* Reverté: Barcelona. (\*)
- **SALU** (Yehuda)  
(2009) *Physics for Architects*. Infinity: West Conshohocken. Peennsylvania. (\*)
- **SALVADORI** (Mario)  
(1980) *Why Buildings Stand Up. The Stregth of Architecture*. W.W. Norton & Company: New York. (\*)
- **SÁNCHEZ RON** (José Manuel)  
(1992) *Las ciencias físico-matemáticas en la España del S. XIX. En la Ciencia en la España del S. XIX*. Revista Ayer de la Asociación de Historia Contemporánea. Nº 7 Ed. José M. López Piñero: Madrid 1992.
- **SANCHÍS SABATER** (Antonio)  
(1999) *Fundamentos físicos para ingenieros*. Vol. 1. Servicio de publicaciones de la Escuela Técnica Superior de I.I. UPV: Valencia. (\*)
- **SAVIOTTI** (Carlo)  
(1882) *Sui metodi grafici d'integrazione con applicazioni*, Giornale del Genio civile, 20 (1882), p. 172–193. Tip. et Lit. Del Genio Civile di Roma.
- **SAVIOTTI** (Carlo)  
(1883) *Note sur les méthodes graphiques d'intégration*. Revue universelle des mines(2), 13 (1883), p. 483–511. Institut National de l'Industrie Charbonniere Liège. Association des Ingenieurs sortis de l'École de Liège: Liège.

- **SAVIOTTI** (Carlo)  
(1888) *La statica grafica. Lezioni. V.1 Calcolo grafico, V.2 Statica grafica: force externe, V.3 Statica grafica: force interne.* U. Hoepli: Milano.
- **SCHLESINGER** (Josef)  
(1868-69) *Vorträge über Graphisches Rechnen u Grafo-Statik.* A. Burotyn u A. Proesch: Wien.
- **SCHMIDT** (R.)  
(1986) *On the Recognition of Equations by François Viète.* En *The Early Theory of Equations. On their Nature and Constitutions.* Annapolis, MD: Golden Hint Press, pp. 1-104.
- **SEARS** (Francis W.) / **ZEMANSKY** (Mark W.)  
(1971) *Física General.* Versión española. Yusta Almarza (Albino). Aguilar S. A. de ediciones: Madrid. (\*)
- **SENABRE** (Jorge)  
(1990) *Dibujo Técnico.* Luis Vives: Zaragoza. (\*)
- **SERWAY** (Raymond A.) / **JEWETT, JR.** (John W.)  
(1971) *Física.* Vol. 1 y 2. 3ª Ed. Internacional Thomson Editores Spain: Madrid. (\*)
- **SIMONNET** (Cyrille)  
(2005) *Histoire d'un matériau. Économie, Technique, architecture.* Éd. Parenthèses: Paris.
- **SKEMPTON** (A. W.)  
(1981) *Les premiers temps de la Mécanique des sols.* Revue Francaise de Geotechnique. Nº 15. Mai 1981. Association Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées: Paris. (\*\*)
- **SNELL** (G.)  
(1846) *On the Stability of Arches...* Minutes and Proceeding of the Institution of Civil Engineers, Vol. 5, pp.439-476, lam. 27-40.
- **SODDY** (Frederick)  
(1936) *The Kiss Precise.* Nature. (International weekly journal of science) Nº 137 (20 Junio 1936). (\*\*)

- **SONDERICKER** (Jerome)  
(2003) *Graphic Statics with Applications to Trusses, Beams, and Arches*. Chapman & Hall, Limited: London.
- **STAUDT** (Georg Karl Christian)  
(1847) *Geometrie der Lage*. Friedr. Korn'schen Buchhandlung: Nürnberg.
- **STEVIN** (Simon)  
(1586) *De Beghinselen der Weeghconst*. Druckerye van Christoffel Plantijn, by François van Raphelinghen: Amsterdam.(\*\*)
- **STUDER** (Marc-André) / **FREY** (François)  
(1997) *Introduction à l'analyse des structures*. Presses polytechniques et universitaires romandes: Lausanne.
- **SULLIVAN** (Louis Henry)  
(1896) *The Tall Office Building Artistically Considered*. Lippincott's Magazine. LVII, March 1896. (\*\*)
- **SZYSTOWSKI** (M.)  
(1896) *Nuevo método para el trazado de la curva de presiones en la bóvedas de fábrica*. Revista de O.P. 1877. Tomo 17, pp. 196-98 y continuación, 1877 Tomo 25, pp. 265-68.(\*\*)
- **TAMEZ ESPERANZA** (Elías)  
(2006) *Dibujo Técnico*. Limusa: México D. F. (\*)
- **TAPIA MORENO** (Francisco Javier)  
(2002) *Apolonio, el geómetra de la antigüedad*. Apuntes de historia de las Matemáticas. Vol. 1. Nº 1. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora: México.(\*\*)
- **TATON** (René)  
(1951) *Découverte d'un exemplaire original du "Brouillon Project" sur les Coniques de Desargues*. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1951. Vol. 4. Nº 4-2. pp. 176-181. Persée. (<http://www.persee.fr/web/revues>).(\*\*)
- **TATON** (René)  
(1953) *La première oeuvre géométrique de Philippe la Hire*. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1953. Vol. 6. pp. 93-111. (<http://www.persee.fr/web/revues>).(\*\*)

- **TETMAJER** (Ludwig)  
(1882) *Über Culmanns bleibende Leistungen*. Ein Vortrag gehalten in der naturforschenden Gesellschaft in Zürich: Zürich.
- **TIPLER** (Paul A.) / **MOSCA** (Gene)  
(2010) *Física para la Ciencia y la Tecnología*. Vol.1 y 2. 6ª Ed. Reverté: Barcelona. (\*)
- **THOMAS ARA** (Luis)  
(1958) *Geometría Descriptiva con nociones de Geometría del Espacio y Geometría Descriptiva*. Talleres tipográficos Jean, S.A.: Santander. (\*)
- **TORROJA CABALLÉ** (Eduardo)  
(1893) *Reseña de los medios empleados por la Geometría pura actual para alcanzar el grado de generalización y de simplificación que la distingue de la antigua*. Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública de [...] el día 29 de junio de 1893. Madrid, Imprenta de Luis Aguado. Madrid 1893.
- **TORROJA MIRET** (Eduardo)  
(1984) *Razón y ser de los tipos estructurales*. C.S.I.C. Instituto E. Torroja: Madrid. (\*)
- **TOURNÈS** (Dominique)  
(2000) *Notes & Débats. Pour une Histoire du Calcul Graphique*. Revue d'Histoire des Mathématiques. 6 (2000). p: 127-161. Société Mathématique de France: Marseille. (\*\*)
- **TOURNÈS** (Dominique)  
(2003) *Junius Massau et l'Intégration Graphique*. Revue d'Histoire des Mathématiques. 9 (2003). p: 181-252. Société Mathématique de France: Marseille. (\*\*)
- **UNGEWITTER** (Georg Gottlob)  
(1859-1864) *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*. (2ª Ed. 1875) T.O. Weigel: Leipzig.
- **UNGEWITTER** (Georg Gottlob)  
(1890) *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann*. 3ª Ed. T.O. Weigel Nachfolger: Leipzig.

- **VALLES** (Miguel S.)  
(1999) *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Síntesis, S.A.: Madrid.(\*\*)
- **VARIGNON** (Pierre)  
(1687) *Projet d'une Nouvelle Méchanique, avec un examen de l'opinion de Borelli sur les proprietes des poids suspendus par des cordes*. Chez la Veuve d'Edme Martin, Jean Boudot & Estienne Martin. Paris. (Escaneado por Google Ebookstore en 2008 de un original procedente de la Universidad de Lausanne). (\*\*)
- **VARIGNON** (Pierre)  
(1725) *Nouvelle Mecanique Ou statique*. Claude Jombert: Paris. Ed. Facsimil La Vergne. TN. USA.2010. (\*)
- **VARIGNON** (Pierre)  
(1734) *Eléments de Mathématiques*. Chez François Canguion: Amsterdam.  
<http://books.google.es>
- **VERA BOTÍ** (Alfredo)  
(2001) *De los descubrimientos teóricos: Desde la construcción empírica al cálculo de las estructuras*. Catálogos de Arquitectura. Nº 9. Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia. (\*)
- **VERA BOTÍ** (Alfredo)  
(2003) *La conservación del Patrimonio Arquitectónico*. Diego Marín, Librero Editor: Murcia. (\*)
- **VERONESE** (G.)  
(1903) *Commemorazione del Socio Luigi Cremona, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 12, 1903, pp. 664-678.
- **VIÈTE** (François)  
(1646) *Opera mathematica, recognita Francisci a Schooten*. Joseph Hofmann: Leyden . Reed. Hildesheim, Nueva York, 1970.
- **VIGNOLA** (Giacomo Barozzi da)  
(1562) (1961) *Regola dei cinque ordini di architettura*. Roma 1562. Primera versión castellana: *Regla de los cinco órdenes de arquitectura*. Antonio Mancelli. Madrid. 1593. Nuestra edición: Viñola. *Tratado de los cinco órdenes de arquitectura*. Ed. Construcciones sudamericanas. Buenos Aires. 1961. (\*)

- **VILLARACEAU** (A. J. F. Y.)  
(1853) *Sur l'établissement des arches de pont envisagé au point de vue de la plus grande stabilité*, Mallet-Bachelier: Paris.
- **VIOLLET-LE-DUC** (Eugène Emmanuel)  
(1854) *Dictionnaire Raisonné de l'Architecture française du XIe au XVIe siècle*. B. Bance Éditeur: Paris.(\*\*)
- **VIOLLET-LE-DUC** (Eugène Emmanuel)  
(1863) *Entretiens sur l'architecture*. A. morel et Cie. Éditeurs: Paris. Edición digitalizada por Harvard College Library.(\*\*)
- **WAGENSBERG** (Jorge)  
(2004) *La rebelión de las formas. O cómo preservar cuando la incertidumbre aprieta*. Metatemas. Tusquets Editores: Barcelona. (\*)
- **WAGENSBERG** (Jorge)  
(2006) *A más cómo, menos por qué*. Metatemas. Tusquets Editores: Barcelona. (\*)
- **WAGENSBERG** (Jorge)  
(2008) *El gozo intelectual. Teoría y práctica sobre la inteligibilidad y la Belleza*. Metatemas. Tusquets Editores: Barcelona. (\*)
- **WAGENSBERG** (Jorge)  
(2010) *Las raíces triviales de lo fundamental*. Metatemas. Tusquets Editores: Barcelona. (\*)
- **WEIDMAN** (Patrick) / **PINELIS** (Iosif)  
(2004) *Model equations for the Eiffel Tower profile: historical perspective and new results*. Comptes Rendus. Mécanique. Académie des Sciences de l'Institut de France: Paris.(\*\*)
- **WEYRAUCH** (Jacob. J.)  
(1874) *Die Graphische Statik. Historisches und kritisches*. ZfMPh 19. pp. 361-390. 1874.
- **WEYRAUCH** (Jacob. J.)  
(1874) *Über die graphische Statik. Zur Orientierung. Separatausgabe. Vermehrt durch Zusätzen in capitel X, sowie durch das Capitel*. "Literatur über graphische Statik" Leipzig.

- **WOLFF** (Julius)  
(1870) *Die innere Architektur der Knochen*. Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medizin 50 (3) : 389-453. Springer: Berlin, New York.
  
- **WOLFF** (Julius)  
(1892) *Das Gesetz der Transformation der Knochen*. Zum Autor Dieter Wessinghage : Berlin 1892. Reimpresión: D. Wessinghage. Vorwort von Heinz Mittelmeier 1991.
  
- **ZALEWSKI** (Wactaw) / **ALLEN** (Edward)  
(1997) *Shaping Structures Statics*. John Wiley & son, Inc.: New York. (\*)
  
- **ZASTAVNI** (Denis)  
(2008a) *La Conception Chez Robert Maillart: Morphogenèse des Structures Architecturales*. Unité d'architecture. Université catholique de Louvain: (UCL), Louvain-la-Neuve, Belgique 2008.
  
- **ZASTAVNI** (Denis)  
(2008b) *The structural design of Maillart's Chiasso Shed (1924): a graphic procedure*. Structural Engineering International 18(3), pp. 247-252.
  
- **ZASTAVNI** (Denis)  
(2009) *What Was Truly Innovative about Maillart's Designs Using Reinforced Concrete?* Proceedings of the International Congress on Construction History. Cottbus, May 2009.
  
- **ZORN** (Eberhard)  
(1933) *Statische Untersuchung der St. Martinskirche in Landshut, Ph. D. Dissertation, Universität München, Germany*.



**ANEXO: COLECCIÓN DE TRATADOS DE ESTÁTICA GRÁFICA**

Hace ya algunos años que la Estática Gráfica es objeto de nuestro interés, incluso bastante antes del planteamiento y desarrollo de esta Tesis Doctoral.

De ese interés y de la afición a los libros, surgió esta pequeña colección de libros dedicados a la Estática Gráfica. Naturalmente, los textos de los que hemos dispuesto para nuestra investigación son muchísimos más, pero nos ha parecido oportuno presentarlos como anexo a esta Tesis Doctoral, habiendo conseguido reunir éstos volúmenes, todos absolutamente descatalogados y encontrados en librerías de viejo del mundo entero, Italia, Francia, Inglaterra, Estados Unidos, Argentina, Uruguay y la propia España.

La intención básica es rendir un pequeño homenaje a los autores de los mismos, que dedicaron tiempo y esfuerzo a la divulgación de esta Ciencia-Técnica, cuya actualizada utilización hemos reivindicado en esta Tesis.

Se ha realizado un escaneado de las páginas de título, y un tratamiento de limpieza ya que en la mayor parte de los casos, la antigüedad del papel o el deterioro provocado por el tiempo, hacían difícil la lectura de los datos impresos en el original.

No hemos incluido algunos que conteniendo capítulos o partes de ellos dedicados a la Grafostática, no la mencionan en el Título, aunque naturalmente están referenciados en la Bibliografía.

Hemos ordenado los títulos cronológicamente, según la fecha de la edición con la que contamos, que en muchos casos no son las primeras.

