

**UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA**  
Departamento de Estadística e Investigación Operativa  
Aplicadas y Calidad



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

**GRÁFICOS DE CONTROL DE CALIDAD  
MULTIVARIANTES CON DIMENSIÓN  
VARIABLE**

**Tesis doctoral**

**Realizada por: Omar Honorio Ruiz Barzola**

**Dirigida por: Francisco José Aparisi García**

**Valencia, 2013**



D. Francisco José Aparisi García, profesor titular del Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad de la Universidad Politécnica de Valencia CERTIFICA que la presente memoria de investigación:

“GRÁFICOS DE CONTROL DE CALIDAD MULTIVARIANTES CON  
DIMENSIÓN VARIABLE”

ha sido realizada bajo su dirección por Omar Honorio Ruiz Barzola, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que así conste, en cumplimiento con la normativa vigente, autoriza su presentación ante el Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad de la Universidad Politécnica de Valencia para que pueda ser tramitada su lectura y defensa pública.

En Valencia, febrero 2012.

Fdo: Francisco José Aparisi García



*A mi nenis y la mami*



## **Agradecimientos**

Inicialmente quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas e instituciones que han hecho posible que el presente trabajo se haya llevado a cabo. Los compañeros, amigos y familiares que han estado presentes siempre que los he necesitado, dándome su apoyo de una u otra manera. SENESCYT, ESPOL y CIBE por auspiciar mis estudios con la confianza de que regrese y aporte los conocimientos adquiridos en función del bien del país.

Quiero agradecer a los profesores y directivos del programa doctoral que supieron guiarme cuando lo requerí, y de forma específica a Francisco Aparisi por su paciencia y enseñanzas en la labor de dirección de esta tesis.

También quiero agradecer a Esther Lilia Peralta porque sin su apoyo, confianza y guía, no habría podido llegar a estas instancias.

Finalmente, mi agradecimiento infinito a mi hija y esposa que supieron tolerar este tiempo de ausencia en el hogar, ofreciéndome su soporte, comprensión y cariño en todo momento.

A todos, gracias totales!





## Índice general

Índice de tablas	XII
Índice de figuras	XIV
Lista de acrónimos	XVI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Consideraciones iniciales	2
1.2 Objetivos planteados	3
1.3 Motivación	4
1.4 Alcance del estudio	5
1.5 Estructura del documento	7
<b>2. Antecedentes y metodología</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción	10
2.2 Gráficos de control	11
2.2.1 Generalidades	11
2.2.2 Bases estadísticas para la construcción de los gráficos de control	15
2.2.3 Parámetros variables en los gráficos de control y ARL's	26

2.2.4	Evolución de los gráficos de control	31
2.2.5	Diseño de los gráficos de control	55
2.3	Metodologías	58
2.3.1	Cadenas de Markov aplicadas a los gráficos de control	58
2.3.2	Métodos heurísticos de optimización de parámetros: Algoritmos Genéticos	64
2.3.3	Obtención de ARL's a través de simulación	76
<b>3.</b>	<b>Diseño y optimización del gráfico de control con doble dimensión (DDT<sup>2</sup>)</b>	<b>85</b>
3.1	Introducción	86
3.2	Generalidades del gráfico de control de Doble Dimensión T2 (DDT <sup>2</sup> )	89
3.3	Medidas de rendimiento	91
3.4	Comprobación de parámetros óptimos y valores de ARL a través de simulación	98
3.5	Diseño y optimización del software desarrollado	101
3.6	Análisis del rendimiento y Comparación	109
3.7	Análisis de sensibilidad	132
3.8	Conclusiones del capítulo	139
<b>4.</b>	<b>Diseño y optimización del gráfico de control con dimensión variable</b>	<b>143</b>

<b>(VDT<sup>2</sup>)</b>		
4.1	Introducción	144
4.2	Generalidades del gráfico VDT <sup>2</sup>	148
4.3	Dinámica del gráfico VDT <sup>2</sup>	151
4.4	Obtención de límites del gráfico VDT <sup>2</sup> para un ARL bajo control dado	154
4.5	Obtención del ARL a través del gráfico VDT <sup>2</sup> utilizando cadenas de Markov	156
4.6	Diseño del gráfico, Optimización y Software desarrollado	163
4.7	Comprobación de parámetros óptimos y ARL conseguidos con la cadena de Markov a través de simulación	172
4.8	Análisis del rendimiento del gráfico VDT <sup>2</sup>	173
4.9	Análisis de sensibilidad de la optimización	195
4.10	Comparación de resultados DDT <sup>2</sup> versus VDT <sup>2</sup>	203
4.11	Conclusiones del capítulo	205
<b>5.</b>	<b>Conclusiones generales y futuras líneas de investigación</b>	<b>211</b>
5.1	Conclusiones generales	212
5.2	Futuras líneas de investigación	216
	<b>Bibliografía</b>	<b>217</b>

## Índice de tablas

3.1.	Muestreo simulado para el gráfico de control $DDT^2$ .	109
3.2.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=200$ , $p_1 = 1$ y $p = 2$ .	115
3.3.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=200$ , $p_1 = 2$ y $p = 3$ .	116
3.4.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=200$ , $p_1 = 2$ y $p = 4$ .	117
3.5.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=200$ , $p_1 = 5$ y $p = 6$ .	118
3.6.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=200$ , $p_1 = 5$ y $p = 7$ .	119
3.7.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=400$ , $p_1 = 1$ y $p = 2$ .	120
3.8.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=400$ , $p_1 = 2$ y $p = 3$ .	121
3.9.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=400$ , $p_1 = 2$ y $p = 4$ .	122
3.10.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=400$ , $p_1 = 5$ y $p = 6$ .	123
3.11.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=400$ , $p_1 = 5$ y $p = 7$ .	124
3.12.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=1000$ , $p_1 = 1$ y $p = 2$ .	125
3.13.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=1000$ , $p_1 = 2$ y $p = 3$ .	126
3.14.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=1000$ , $p_1 = 2$ y $p = 4$ .	127
3.15.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=1000$ , $p_1 = 5$ y $p = 6$ .	128
3.16.	Gráfico de control $DDT^2$ Optimizado para $ARL_0=200$ , $p_1 = 5$ y $p = 7$ .	129

4.1.	Muestras simuladas para ejemplificar el uso del gráfico de control VDT <sup>2</sup>	171
4.2.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =200, p <sub>1</sub> = 1 y p = 2.	177
4.3.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =200, p <sub>1</sub> = 2 y p = 3.	178
4.4.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =200, p <sub>1</sub> = 2 y p = 4.	179
4.5.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =200, p <sub>1</sub> = 5 y p = 6.	180
4.6.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =200, p <sub>1</sub> = 5 y p = 7.	181
4.7.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =400, p <sub>1</sub> = 1 y p = 2.	182
4.8.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =400, p <sub>1</sub> = 2 y p = 3.	183
4.9.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =400, p <sub>1</sub> = 2 y p = 4.	184
4.10.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =400, p <sub>1</sub> = 5 y p = 6.	185
4.11.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =400, p <sub>1</sub> = 5 y p = 7.	186
4.12.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =1000, p <sub>1</sub> = 1 y p = 2.	187
4.13.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =1000, p <sub>1</sub> = 2 y p = 3.	188
4.14.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =1000, p <sub>1</sub> = 2 y p = 4.	189
4.15.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =1000, p <sub>1</sub> = 5 y p = 6.	190
4.16.	Gráfico de control VDT <sup>2</sup> Optimizado para ARL <sub>0</sub> =200, p <sub>1</sub> = 5 y p = 7.	191

## Índice de figuras

2.1.	Contraste de hipótesis para la $i$ -ésima muestra de un control de procesos	24
3.1.	El gráfico de control $DDT^2$ .	90
3.2.	Software para la optimización del gráfico de control $DDT^2$ control chart, aplicado y resuelto para un ejemplo específico.	103
3.3.	Tab “ARL calculation” del software para la optimización del gráfico $DDT^2$ .	107
3.4.	Gráfico de control $DDT^2$ simulada de la Tabla 3.1.	108
3.5.	Software para la optimización del gráfico de control $DDT^2$ , cuando se requiere una restricción sobre el %p.	113
3.6.	Diferencia porcentual del $ARL(DDT^2)$ respecto al $ARL(T_p^2)$ , para el caso $p_1 = 2$ , $p = 3$ , $d_{p_1}^* = 0.5$ y $d_p^* = 1.5$	134
3.7.	Diferencia porcentual del $ARL(DDT^2)$ respecto al $ARL(T_p^2)$ , para el caso $p_1 = 2$ , $p = 4$ , $d_{p_1}^* = 1.5$ y $d_p^* = 2$	135
3.8.	Diferencia porcentual del $ARL(DDT^2)$ respecto al $ARL(T_p^2)$ , para el caso $p_1 = 5$ , $p = 6$ , $d_{p_1}^* = 0.5$ y $d_p^* = 2$	136
3.9.	Diferencia porcentual del $ARL(DDT^2)$ respecto al $ARL(T_p^2)$ , para el caso $p_1 = 5$ , $p = 6$ , $d_{p_1}^* = 0.5$ y $d_p^* = 2$ con la restricción %p = 50%	138
4.1.	Gráfico de control $VDT^2$ ; (A) un límite de alerta $w$ ; (B) dos límites de alerta $w_1$ y $w_2$	150
4.2.	Interfaz del Software desarrollado para la optimización del gráfico de control $VDT^2$	166

4.3.	Interfaz del Software desarrollado para la optimización del gráfico de control $VDT^2$ con una restricción en el porcentaje de veces que todas las variables son medidas (ver flecha roja)	169
4.4.	Gráfico de control $VDT^2$ para el ejemplo de la tabla 4.1	170
4.5.	Análisis del rendimiento obtenido por las diferentes versiones del gráfico de control $VDT^2$	174
4.6.	Porcentaje de mejora del ARL de un gráfico de control optimizado $VDT^2$ , relativo al gráfico de control $T^2$ (gráfico de control $VDT^2$ optimizado para $p_1 = 2$ , $p = 3$ y $d_1 = 0.5$ , $d = 1$ )	196
4.7.	Porcentaje de mejora del ARL de un gráfico de control optimizado $VDT^2$ , relativo al gráfico de control $T^2$ (gráfico de control $VDT^2$ optimizado para $p_1 = 5$ , $p = 7$ y $d_1 = 1.5$ , $d = 2$ )	197
4.8.	Diferencias porcentuales del ARL de dos gráficos de control $VDT^2$ optimizados. $p_1 = 2$ , $p = 3$ , óptimo para A = ( $d_1=0.5$ , $d=1$ ), y para B = ( $d_1=1.5$ , $d=3$ )	200
4.9.	Diferencias porcentuales del ARL de dos gráficos de control $VDT^2$ optimizados. $p_1 = 2$ , $p = 4$ , óptimos para A = ( $d_1=0.25$ , $d=1$ ), y para B = ( $d_1=1.5$ , $d=3$ )	201
4.10.	Diferencias porcentuales del ARL de dos gráficos de control $VDT^2$ optimizados. $p_1 = 5$ , $p = 6$ , óptimos para A = ( $d_1=1$ , $d=2$ ), y para B = ( $d_1=2.5$ , $d=3$ )	202

## Lista de acrónimos

MCUSUM	Gráfico Multivariado de Sumas de Acumuladas
MEWMA	Gráfico Multivariado de Promedios Móviles Exponencialmente Ponderados
DST <sup>2</sup>	Gráfico T <sup>2</sup> con Doble Muestreo
ARL	Promedio de Longitud de Rachas
GA	Algoritmos Genéticos
DDT <sup>2</sup>	Gráfico T <sup>2</sup> con Doble Dimensión
VDT <sup>2</sup>	Gráfico T <sup>2</sup> con Dimensión Variable
SPC	Control Estadístico de Procesos
CUSUM	Gráfico de Sumas de Acumuladas
EWMA	Gráfico de Promedios Móviles Exponencialmente Ponderados
CL	Límite de Control
LWL	Límite Inferior de Alerta
UWL	Límite Superior de Alerta
LCL	Límite Inferior de Control
UCL	Límite Superior de Control
RL	Longitud de Racha
OC	Curva Característica de Operación



MC	Monte Carlo
IE	Ecuación Integral
ATS	Tiempo Promedio hasta la aparición de una Señal de fuera de control
SCC	Gráfico de control para Causas Especiales
MMSE	Mínimo Error Cuadrático Medio
ARIMA	Modelos con Promedios Móviles
EWMAST	EWMA para el caso de Procesos Estacionarios
DS	Doble Muestreo
VSS	Tamaño de Muestra Variable
VSI	Intervalo Variable de Muestreo
DWL	Doble Límite de Alerta
BDS	Doble Muestreo Bivariado
VSSVSI	Variable Intervalo de tiempo y Tamaño de Muestra
AATS	Tiempo Medio Ajustado hasta una Señal
ICA	Análisis de Componentes Principales
PCA	Análisis de Componentes Principales
VSSI	Variable Intervalo de tiempo y Tamaño de Muestra
ESD	Diseño Estadístico Económico
ACS	Coste Promedio de Muestreo

CS

Coste de Muestreo

Vp

Gráfico de control con Parámetro Variable

## Resumen

Los gráficos de control multivariantes son una reciente aportación al control de procesos, siendo el gráfico  $T^2$  de Hotelling la opción más utilizada por el operario por su fácil aplicación. Por este motivo se busca potenciar su uso, sin complicar o cargar de esfuerzo adicional a los responsables del proceso.

Considerando los buenos resultados obtenidos por gráficos predecesores en los cuales se varía el tamaño de la muestra, esta tesis plantea la posibilidad de obtener mejores resultados **variando de forma adaptativa el número de variables** involucradas en el control del proceso. Con ello lograr la **reducción del ARL** o promedio de muestras necesarias hasta que aparezca una señal de fuera de control, además **reducir los costos asociados al muestreo**, utilizando la totalidad de variables involucradas en el proceso únicamente cuando sea necesario.

Para poder lograr los objetivos planteados se hizo uso de cadenas de Markov y métodos heurísticos (algoritmos genéticos). Se desarrollaron programas informáticos que facilitaron el cálculo y la optimización del diseño de los gráficos de control propuestos, los cuales trabajan con dimensiones variables  $p_1$  y  $p$  ( $p_1 < p$ ). Los gráficos desarrollados en esta tesis son de Doble Dimensión ( $DDT^2$ ) y de Dimensión Variable ( $VDT^2$ ). Para mostrar los resultados se presentan tablas informativas, se realiza análisis comparativos con los resultados de los gráficos  $T^2$  de Hotelling y MCUSUM, y se hace un análisis de sensibilidad del gráfico óptimo.

Los gráficos propuestos logran reducir el ARL fuera de control con respecto al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling. Los ARL fuera de control de los gráficos propuestos para todos los casos analizados presentan mejor rendimiento que los obtenidos por el gráfico  $T^2$  calculado con solo las primeras  $p_1$  variables, y en la mayoría de los casos cuando se compara con el rendimiento del gráfico  $T^2$  conseguido con las  $p$  variables.

Los gráficos de control propuestos logran reducir los costos asociados al muestreo. A medida que aumentan los valores de  $p_1$  y  $p$  el porcentaje de veces que se utilizan todas las variables va incrementándose. Con las distancias  $d$  y  $d_1$  el efecto es contrario. Por este motivo, se puede afirmar que a pequeñas distancias y mayor cantidad de variables, se obtienen los porcentajes más altos de veces que se utilizan las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control (coste alto de muestreo, aunque más económico que utilizar todas las  $p$  variables). Por el contrario, cuando se consideran pocos parámetros y distancias mayores, éste porcentaje es bajo, reduciendo considerablemente los costos del muestreo.

## Resum

Els gràfics de control multivariants són una recent aportació al control de processos, sent el gràfic  $T^2$  d'Hotelling l'opció més utilitzada per l'operari per la seua fàcil aplicació. Per este motiu es busca potenciar el seu ús, sense complicar o carregar d'esforç adicional als responsables del procés.

Considerant els bons resultats obtinguts per gràfics predecessors en els quals es varia la grandària de la mostra, esta tesi planteja la possibilitat d'obtindre millors resultats variant de forma adaptativa el nombre de variables involucrades en el control del procés. Amb això aconseguir la reducció de l'ARL o mitjana de mostres necessàries fins que aparega un senyal de fora de control, a més reduir els costos associats al mostratge, utilitzant la totalitat de variables involucrades en el procés únicament quan siga necessari.

Per a poder aconseguir els objectius plantejats es va fer ús de cadenes de Markov i mètodes heurístics (algoritmes genètics) . Es van desenrotllar programes informàtics que van facilitar el càlcul i l'optimització del disseny dels gràfics de control proposats, els quals treballen amb dimensions variables  $p_1$  i  $p$  ( $p_1 < p$ ). Els gràfics desenrotllats en esta tesi són de Doble Dimensió (DDT<sup>2</sup>) i de Dimensió Variable (VDT<sup>2</sup>). Per a mostrar els resultats es presenten taules informatives, es realitza anàlisis comparatives amb els resultats dels gràfics  $T^2$  d'Hotelling i MCUSUM, i es fa una anàlisi de sensibilitat del gràfic òptim.

Els gràfics proposats aconseguixen reduir l'ARL fora de control respecte al gràfic de control  $T^2$  d'Hotelling. Els ARL fora de control dels gràfics proposats per a tots els casos analitzats presenten millor rendiment que els obtinguts pel gràfic  $T^2$  calculat amb només les primeres  $p_1$  variables, i en la majoria dels casos quan es compara amb el rendiment del gràfic  $T^2$  aconseguit amb les  $p$  variables.

Els gràfics de control proposats aconseguixen reduir els costos associats al mostratge. A mesura que augmenten els valors de  $p_1$  i  $p$  el percentatge de vegades que s'utilitzen totes les variables va incrementant-se. Amb les distàncies  $d$  i  $d_1$  l'efecte és contrari. Per este motiu, es pot afirmar que a xicotetes distàncies i major quantitat de variables, s'obtenen els percentatges més alts de vegades que s'utilitzen les  $p$  variables quan el procés està baix control (cost alt de mostratge, encara que més econòmic que utilitzar totes les  $p$  variables). Al contrari, quan es consideren pocs paràmetres i distàncies majors, este percentatge és davall, reduint considerablement els costos del mostratge.

## Abstract

Multivariate control charts are a recent contribution to the control of processes, being the Hotelling  $T^2$  chart the most implemented because of its ease of use. For this reason we seek to enhance its use, without complicating or giving additional work to the processes owners.

Considering the good results obtained by predecessors graphic methodologies which vary the sample size, this thesis raises the possibility of obtaining better results by adaptively varying the number of variables involved in controlling the process; thereby achieving a reduction in average run length. The application of such methodology will also reduce costs associated with sampling, using all variables involved in the process only when necessary.

To achieve the objectives of this thesis, we made use of Markov chains and heuristics methods (genetic algorithms). Computer programs were developed to facilitate the design of the proposed control charts, which work with variable dimensions,  $p_1$  and  $p$  ( $p_1 < p$ ). The graphics developed in this thesis are of Doble Dimension (DDT<sup>2</sup>) and Variable Dimension (VDT<sup>2</sup>). To display the results we present tables of analyzes comparing the results of graphics and MCUSUM and Hotelling  $T^2$  control chart. Additionally, we performed a sensitivity analysis of the optimal graph.

The proposed graphics are able to reduce the out of control ARL with respect to Hotelling  $T^2$  control chart. The out of control ARL of proposed graphics for all analyzed cases exhibited a better performance than those obtained by  $T^2$  control chart with only the first  $p_1$  variables, and in most cases when compared to the performance achieved with  $T^2$  control chart with all  $p$  variables.

The proposed control charts were able to reduce the costs associated with sampling. With increasing the values of  $p_1$  and  $p$  the percentage of times all the variables were used increased. However, we observed the opposite effect with the distances  $d$  and  $d_1$ . For this

reason, we can say that at small distances and greater number of variables, we get the highest percentage of times the  $p$  variables are used when the process is in control (high cost of sampling, although cheaper than always using all  $p$  variables). Conversely, when considering a few parameters and greater distances, this percentage is low, greatly reducing the cost of sampling.



---

# **CAPÍTULO 1**

---

## **INTRODUCCIÓN**

## 1.1 Consideraciones iniciales

Hace aproximadamente una centuria se inició un nuevo campo de aplicación de la estadística impulsado por el Dr. W. Shewhart. Este físico, ingeniero y estadístico norteamericano es considerado el padre del control estadístico de la calidad. Sus teorías sobre el control de procesos y de forma especial los gráficos de control por él propuestos, constituyen la base para lo que hoy se conoce como Control Estadístico de Procesos. En 1947 el Profesor H. Hotelling, propuso un gráfico de control multivariado hoy conocido como gráfico  $T^2$  de Hotelling y que es el equivalente al gráfico de Shewhart en el caso univariado. En 1974 el Dr. Kaoru Ishikawa incluye al gráfico de control como una de las 7 principales herramientas del control estadístico de calidad.

En este contexto, el gráfico de control ha ido desarrollando un mayor grado importancia y relevancia, es así que a partir de los gráficos propuestos por Shewhart han aparecido un gran número de ellos cuya finalidad es detectar de forma temprana la presencia de eventos que puedan ocasionar problemas al proceso.

Durante el desarrollo de la presente tesis se hace una revisión de la evolución del gráfico de control. Se analiza: el gráfico univariado para variables continuas o discretas, los gráficos que guardan información de eventos pasados, los gráficos multivariados y sus variantes más importantes.

En la actualidad una parte de la investigación se basa en diseñar gráficos de control que consideren a la vez varias variables del proceso, también en diseñar gráficos que minimicen el ARL fuera de control y para ello se requiere de procesos más complejos en su etapa de diseño.

Considerando que los gráficos multivariados requieren mayor cantidad de recursos destinados al muestreo, la presente tesis plantea diseñar un **gráfico de control multivariado** que utilice un **número variante de variables** a ser monitorizadas durante el proceso y **que reduzca el promedio de muestras necesarias para detectar cuando el proceso está fuera de control.**

## **1.2 Objetivos planteados**

Una vez descritas las consideraciones iniciales, se planteó el siguiente objetivo general: Optimizar el diseño del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling de tal manera que su dimensión sea variante y de forma adaptativa. Es decir, un muestreo en el que el número de variables varíe en función de la información obtenida de ellas.

De este objetivo general se desprenden los siguientes objetivos específicos:

Reducir el promedio de muestras necesarias hasta que aparezca una señal de fuera de control o minimizar el ARL fuera de control.

Reducir los costos asociados al muestreo utilizando la totalidad de variables involucradas en el proceso únicamente cuando sea necesario.

Obtener software que realice la optimización de acuerdo a las necesidades del usuario, con una interfaz amigable, y que provea de toda la información necesaria para que el operario pueda tomar una buena decisión a partir de ella.

### **1.3 Motivación**

Los gráficos de control multivariantes son una gran aportación al control de procesos. Sin embargo, la complicación que involucra el diseño de los múltiples gráficos que han aparecido en los últimos años y la complejidad al momento de obtener el estadístico para realizar el control del proceso, hace que el gráfico  $T^2$  de Hotelling siga siendo la opción más fácil para el operario.

Considerando que frecuentemente, dentro del grupo de variables variables a ser monitorizadas existe un subgrupo de ellas que hace que el muestreo se vuelva más costoso o difícil, se desea minimizar el uso de estas variables durante el control del proceso y de esta manera reducir los costos asociados al muestreo.

Otra motivación relacionada fue la de observar como el gráfico de control  $T^2$  con doble muestreo reducía considerablemente el promedio del número de muestras hasta la aparición de una señal de fuera de control, modificando el número de observaciones sólo cuando era necesario, la interrogante planteada fue ¿Qué sucedería si lo que se modificara sería el número de variables relacionadas a la calidad a ser monitorizadas durante el proceso?

Dado que otras opciones multivariadas como los gráficos MCUSUM o MEWMA, detectan de forma más rápida una señal de fuera de control para pequeños cambios en el proceso, debido a la información que van acumulando, ¿qué tan buena sería la opción presentada en esta tesis comparada con al menos uno de estos gráficos?

## **1.4 Alcance del estudio**

Tal como se indicó en los objetivos, el fin es obtener una mejora en el rendimiento del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling modificando de manera adaptativa el número de variables involucradas para la obtención del estadístico  $T^2$ , tomando como referencia el gráfico de control con doble muestreo (DST<sup>2</sup>), realizado por Champ y Aparisi (2008).

La presente tesis se encuadra en los gráficos de control estadístico para procesos multivariados, con un número adaptativo de variables  $p$  mayor que uno ( $p = p_1 + p_2$ ), de los

cuales utilizan solo  $p_1$  para la monitorización, y cuando éstos dan una señal de alerta se utilizan todas las  $p$  variables.

La tesis no aborda el tema de reducción permanente de la dimensión, como cuando se aplica estadística multivariada a través del análisis de componentes principales (Ferrer, 2007).

Otro ámbito en el que no se enmarca esta tesis es el análisis de las mejoras en el ARL en función de la dirección del desplazamiento real en el espacio  $p$ -dimensional, tal como los gráficos multivariantes direccionales (Zou y Tsung, 2008, Li et al 2012), que están optimizados para detectar cambios en un sentido de giro específico, y que por lo general no funcionan muy bien para cambios en direcciones diferentes a las especificadas.

Se asume que las variables involucradas en el proceso estacionario estudiado tienen una distribución normal multivariada con parámetros iniciales conocidos ( $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}$ ) en un estado bajo control. Además, que dentro de la totalidad de las  $p$  variables consideradas para el control del proceso, existen dos grupos; un grupo  $S_1$  compuesto de  $p_1$  variables que necesitan menos recursos (coste, tiempo, etc.) y un grupo  $S_2$  compuesto de  $p_2$  variables en el cual se requiere de una mayor cantidad de recursos y por tanto más información para el estadístico que indique si el proceso está controlado o no.

## 1.5 Estructura del documento

Esta tesis se estructura de la siguiente manera:

El capítulo 1 introduce el tema de la investigación, su propósito, motivación y delimitación del estudio.

El capítulo 2 analiza en detalle los gráficos control conducentes a las opciones planteadas en esta tesis. Se revisan las bases estadísticas necesarias para la construcción de los gráficos de control. Seguidamente se hace una revisión de los parámetros variantes en los gráficos de control y de los ARL's como la metodología más utilizada para medir el rendimiento de los gráficos de control. Se revisa la evolución de los gráficos, desde los iniciales de Shewhart hasta los obtenidos con métodos complejos y como se realiza su diseño. Se abordan también en este capítulo las metodologías requeridas para la construcción y diseño de los gráficos propuestos tales como las Cadenas de Markov aplicadas a los gráficos de control, métodos heurísticos de optimización de parámetros: Algoritmos genéticos (GA) y la simulación como método de obtención de los ARL's.

El capítulo 3 presenta el diseño y optimización del gráfico de control  $T^2$  con Doble Dimensión (DDT<sup>2</sup>); se realiza inicialmente una breve introducción del tema tratado en el capítulo, se presentan las generalidades del gráfico de control DDT<sup>2</sup>; cuales son las medidas de rendimiento consideradas para su evaluación; y como se efectuó, a través de simulación, la

comprobación de parámetros óptimos del gráfico y valores de ARL. Posteriormente se analiza el diseño y la optimización del software desarrollado para este gráfico, así como su rendimiento, para seguidamente realizar las comparaciones respectivas. Por último, se hace una evaluación de su robustez o sensibilidad; y el capítulo culmina con las respectivas conclusiones.

El capítulo 4 presenta el diseño y optimización del gráfico de control  $T^2$  con Dimensión Variable (VDT<sup>2</sup>); se realiza inicialmente una breve introducción del tema tratado en el capítulo, se presentan las generalidades del gráfico de control VDT<sup>2</sup>; luego se analiza su dinámica considerando los cambios en el número de parámetros o de límites (de alerta o de control), entre otras cosas. Se estudia cómo se obtienen los límites del gráfico VDT<sup>2</sup> para un ARL bajo control dado y el uso que se hace para ello de las cadenas de Markov. Posteriormente, al igual que en el capítulo anterior, se analiza el diseño y la optimización del software desarrollado para este gráfico, así como su rendimiento, para luego realizar las comparaciones respectivas. Por último se hace una evaluación de su robustez o sensibilidad; y el capítulo culmina con las respectivas conclusiones.

Finalmente, el capítulo 5 presenta las conclusiones generales de la tesis y las líneas abiertas para trabajos futuros.



---

## **CAPÍTULO 2**

---

### **ANTECEDENTES Y METODOLOGÍA**

## 2.1 Introducción

En el presente capítulo, se realiza una revisión bibliográfica con la finalidad de conocer el estado del arte en cuanto a los gráficos del control, especialmente los gráficos multivariados que se basan en el estadístico  $T^2$ . También se hace una revisión de las metodologías estadísticas e informáticas que han sido necesarias para poder obtener los gráficos de control propuestos en esta tesis doctoral.

Brevemente se revisan los inicios de los gráficos de control como una herramienta del control estadístico de procesos (SPC por sus siglas en inglés), empezando por los gráficos propuestos por Shewhart y la importante aportación realizada por Hotelling.

Seguidamente se revisa la metodología para la obtención de los gráficos de control del tipo univariado y los gráficos de control multivariados, poniendo énfasis en los gráficos  $T^2$ . Posteriormente se revisan otros gráficos de control multivariados, los cuales contienen parámetros que van adaptándose a circunstancias específicas del proceso, con la finalidad de hacerlos óptimos.

Se abordan las metodologías estadísticas e informáticas que fueron necesarias emplear para el desarrollo de la tesis, entre ellas los aspectos generales de los procesos estocásticos y de forma específica las cadenas de Markov y su aplicación en los gráficos de control. Se revisan los métodos heurísticos de optimización de parámetros a través de algoritmos genéticos y su

aplicación en la optimización de parámetros de los gráficos de control. Por último, se presenta la metodología utilizada para generar las simulaciones requeridas y utilizadas como método de comprobación de los parámetros obtenidos en las optimizaciones de los gráficos de control.

## **2.2 Gráficos de control**

### **2.2.1 Generalidades**

El SPC se fundamenta en la propuesta realizada por el Dr. Walter Shewhart (Neuhauser, 2006) quien mientras laboraba en la empresa Bell Telephone, en la década de los 20 del siglo pasado, desarrolló las bases para el control de procesos, impulsando además la idea de que los problemas ocurridos durante el proceso pueden ser por causas normales o causas especiales, siendo el gráfico propuesto el que ayudaba a identificar dichas causas; su identificación daba como resultados la reducción de la variabilidad y la mejora del proceso.

El Dr. Walter A. Shewhart propuso realizar el seguimiento de las características de calidad a través parámetros estadísticos como el promedio y la varianza de una variable aleatoria relacionada con la calidad, con el fin de reducir su variabilidad utilizando gráficos hoy conocidos como “gráficos de control” o “gráficos de Shewhart”, los cuales indican la evolución de los valores de los estimadores de las características de calidad, calculados a partir

de muestras de tamaño  $n$ , obtenidas de procesos continuos de producción, los cuales ayudan a tomar una decisión acerca del estado del proceso.

A través de los gráficos propuestos, Shewhart identificaba y analizaba las causas de su variabilidad, la misma que se estudiaba para diferenciar entre la variabilidad natural también llamada fortuita, común o aleatoria, presente en un estado bajo control del proceso y una variación inaceptable en el desempeño del proceso, generada por problemas no inherentes al proceso llamadas causas asignables o especiales, las cuales son responsables de llevar al proceso a un estado de fuera de control de forma imprevista. Los gráficos de control también ayudan a detectar con rapidez la presencia de alguna causa no deseable. También indicaba que el control de procesos consta de dos fases:

- La fase de desarrollo, que ayuda a conocer el comportamiento estadístico del proceso, determina límites de control para el estimador del parámetro analizado y ayuda a eliminar causas asignables o especiales.
- La fase de madurez, en la cual se mide la capacidad del proceso para cumplir con los estándares de calidad inicialmente propuestos; se identifica el promedio del número de muestras antes de obtener falsas alarmas; y ayuda a reducir el tiempo o el número de muestras necesarias para detectar pequeños cambios en el proceso.

Los primeros gráficos de control propuestos por Shewhart, fueron para monitorizar el

promedio  $\bar{X}$  y la variación (R o S), estos gráficos de control se aplican a variables cuantitativas (medidas). Adicionalmente aparecieron los gráficos  $c$  y  $p$  para monitorizar el número de defectos por lotes y la proporción de defectos por lotes, respectivamente; es decir, SPC para variables cualitativas.

La incorporación de estas y otras modificaciones a los gráficos de control de Shewhart, para que estos no sean solo para variables cuantitativas sino también para variables cualitativas, hicieron que su aplicación sea cada vez mayor.

Otra aportación al SPC del tipo univariante, fue la incorporación de dos nuevos gráficos para detectar pequeñas variaciones en el proceso, uno introducido por E. S. Page (1954) denominado gráfico de sumas acumuladas (CUSUM, por sus siglas en inglés) y el segundo introducido por S. W. Roberts (1959) denominado gráfico de promedios móviles exponencialmente ponderados (EWMA, por sus siglas en inglés). Estos gráficos van acumulando información obtenida de las muestras anteriores y de esta manera pueden detectar de forma más rápida pequeños cambios en el proceso. Aún son muy utilizados aunque solo realizan el control de una variable a la vez.

Posteriormente se dio impulso al control estadístico de procesos de tipo multivariado, el cual es frecuentemente utilizado para monitorizar diversas variables relacionadas a la calidad (Fuchs y Kenett, 1998). La principal aportación en este campo fue la realizada por el Profesor Harold Hotelling (1947), quien propuso un gráfico de control multivariado basado en la

distancia de Mahalanobis (1936), utilizando el vector de promedios y la matriz de covarianzas de una variable aleatoria con distribución normal multivariada, para realizar el gráfico de control multivariado denominado gráfico de control  $T^2$  de Hotelling  $T^2 = n(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)' \Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)$ , el cual monitoriza la distancia entre el vector de promedios esperado y el vector de promedios observados, considerando su matriz de covarianzas y que utiliza un límite de control (CL) el cual indica si la distancia entre los dos vectores es lo suficientemente grande para declarar al proceso como fuera de control.

Una aportación muy importante en este mismo campo fue el realizado por Lowry (1992) a través del gráfico de control EWMA para casos multivariados MEWMA,  $T_i^2 = Z_i' \Sigma_z^{-1} Z_i$ ; previamente Crosier en 1988 había presentado una versión multivariada del gráfico de control de sumas acumuladas MCUSUM,  $C_i = \sqrt{(S_{i-1} + X_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (S_{i-1} + X_i - \boldsymbol{\mu}_0)}$ . En el apartado 2.2.4 se revisa en detalle estos gráficos.

Se han realizado otras aportaciones en el campo del control estadístico de procesos multivariados, las obras de Jackson (1980, 1981a, 1981b) sobre el uso de componentes principales y análisis de los factores, así como la contribución de MacGregor y Kourti (1995), Nomikos y MacGregor (1995) y Kourti y MacGregor (1996) que tienen como objetivo reducir la dimensionalidad de los problemas de los procesos de seguimiento con un gran número de variables a través de métodos de proyección (métodos de variables latentes). Aparisi et al. (2010) también estudió los gráficos de control de componentes principales y su optimización.

Todos estos métodos requieren la medición de todas las variables. La reducción que proporcionan estos métodos reside en el análisis, sus contextos y motivaciones son diferentes de las consideradas en el presente trabajo, el cual es optimizar el gráfico de control considerando el coste de la medición de las variables. Con esta motivación, Costa y De Magalhães (2005) propusieron y analizaron un gráfico de control del tipo univariado en el que la variable de calidad  $X$  es sustituida por una nueva variable  $Y$  mucho menos costosa de medir y que  $X$  se mida solamente cuando a través de  $Y$  haya una indicación de que el proceso puede estar fuera de control.

En el contexto multivariado, González y Sánchez en 2010, presentan un esquema donde la dimensionalidad se reduce pero de forma permanente, esto crea un riesgo de indetectabilidad durante el proceso de ciertas alteraciones que podrían aparecer en las variables que dejaron de ser consideradas, tal como lo expresan en su artículo.

### **2.2.2 Bases estadísticas para la construcción de los gráficos de control**

El control estadístico de procesos se aplica a varias características de calidad que presentan variabilidad debido a los factores aleatorios relacionados al proceso productivo (Ruíz-Falcó, 2006). Cuando la característica de interés es medible, generalmente tiene función de distribución de probabilidad normal  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ; si no lo tuviera, se puede hacer uso del

Teorema del Límite Central o de transformaciones matemáticas para aproximar o asumir su normalidad.

Para características medibles, existe interés principalmente por estimar:

- a. la media  $\mu$  del proceso a través de  $\bar{X}$ ;
- b. la variabilidad a través del rango  $R$  en cada muestra;
- c. la desviación estándar  $\sigma$ , a través de  $s$ ; o
- d.  $\sigma^2$  utilizando  $s^2$ .

Los estimadores se definen de la siguiente manera:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; n \text{ es el tamaño de la muestra}$$

$$R = \max(X_i) - \min(X_i)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow S = \sqrt{S^2}$$



Con  $X_i$  normalmente distribuida.

Conocer la distribución de  $\bar{X}$  no es problema si la característica de calidad  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , entonces  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ . Cuando  $X$  no proviene de una distribución Normal, la aplicación del teorema del límite central soluciona el problema (Montgomery, 2008).

El Rango o Recorrido  $R$ , cuando es analizado a través de una muestra, es la diferencia entre el mayor y el menor valor de las observaciones.

$$r = X_{\max} - X_{\min}$$

Cuando es analizada como variable aleatoria el Rango es:

$$R = \max_{i=1,\dots,n}(X_i) - \min_{i=1,\dots,n}(X_i)$$

Si la variable de interés  $X$  tiene una distribución Normal, la función de densidad de  $R$  está dada por:

$$f_{R_n}(r) = n * (n - 1) * \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_t^{t+r} f_X(x) * dx \right)^{n-2} * f_X(t) * f_X(t + r) * dt$$

$X$  es la variable Poblacional,  $f_X(x)$  es la función de densidad de una variable aleatoria Normal,  $r$  el valor del rango y  $t$  una variable auxiliar que sirve para la integración (Carot, 1998).

El valor esperado del rango en función de la desviación estándar de la población, está dado por:

$$E(R_n) = d_2 * \sigma$$

La desviación estándar de R es:

$$DE(R_n) = d_3 * \sigma$$

Los valores de  $d_2$  y  $d_3$ , se encuentran en función del tamaño de la muestra  $n$ . Para más detalles se puede revisar Carot V., pág. 124-125.

Si se desea utilizar  $s$  para estimar  $\sigma$ , debe considerarse lo siguiente: Sea  $Y$  una v.a. cualquiera con  $\text{Var}(Y) \geq 0$ , entonces

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) - [E(Y)]^2 \geq 0$$

$$E(Y^2) \geq [E(Y)]^2; \text{ sea } Y = s$$

$$E(s^2) \geq [E(s)]^2; \text{ como } E(s^2) = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \geq [E(s)]^2$$

obteniendo la raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad se tiene  $\sigma \geq E(s)$

Por este motivo es necesario introducir el factor de corrección  $c_4$ , de tal manera que

$$E(s) = c_4 \sigma$$

$$\hat{\sigma} = \bar{s} / c_4$$

cuando,  $c_4 = [2 / (n-1)]^{1/2} \Gamma(n/2) / \Gamma[(n-1)/2]$ ;  $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ ; y  $\Gamma(m) = (m-1)!$ , para  $m$  entero positivo (Carot, 1998).

Si las características de calidad pueden ser cuantificadas, se hace uso de diferentes funciones de distribución de probabilidad para variables aleatorias discretas, tal como se detalla a continuación.

Para características cuantificables, los estimadores utilizados son:

- a. número de elementos  $D$  (disconformes) que no cumplen con las características de calidad y que pertenecen a una muestra de tamaño  $n$ ;

- b. fracción de disconformes  $p$ , siendo su estimador  $\hat{p} = \frac{D}{n}$ . Haciendo uso de esta última relación, aparece el gráfico de control para el número de disconformes  $np$ , siendo fácil deducir que  $D = n\hat{p}$ ;
- c. cantidad de defectos  $c$  o disconformidades por unidad de observación; y
- d. promedio de defectos por unidades de inspección  $u$ , cuando  $u = \frac{x}{n}$ , siendo  $x$  en el número de disconformidades totales en una muestra de  $n$  unidades de inspección.

Se debe identificar el tipo de v.a. con la que se esté trabajando, con ello se tienen los valores esperados y la desviación estándar de los estimadores más utilizados al construir los gráficos de control para las características cuantificables más comúnmente analizadas.

Para determinar el número de elementos  $D = n\hat{p}$  que en una muestra de tamaño  $n$ , no cumplen con las características de calidad (disconformes), su función de distribución de probabilidad es binomial, donde  $E(D) = np$ , y  $\text{Var}(D) = np(1-p)$ .

La fracción de disconformes estimada por  $\hat{p} = \frac{D}{n}$  tiene función de distribución de probabilidad binomial;  $E(\hat{p}) = E(D)/n = p$ , y  $\text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}(D)/n^2 = np(1-p)/n^2 = p(1-p)/n$ .

La cantidad de defectos o disconformidades por unidad de observación  $c$ ; tiene una función de

distribución de probabilidad Poisson, donde la  $E(X) = \text{Var}(X) = c$ . Además  $\hat{c} = \bar{c}$ .

En cuanto al promedio de defectos por unidades de inspección  $u = X/n$  siendo  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , número de disconformidades dividido para el tamaño de la muestra  $n$  unidades de inspección.  $E(u) = E(X/n) = \lambda/n$ ; y  $\text{Var}(u) = \text{Var}(X/n) = \text{Var}(X)/n^2 = \lambda/n^2$ . Haciendo el cambio de variable  $p = \lambda/n$  y utilizando la aproximación de la Poisson a la Normal, se tiene que  $u \sim N(p, p/n)$ . Si no se cuenta con el parámetro  $p$ , se lo estima a través de  $\hat{p} = \bar{u}$ ; se debe considerar que  $u \neq \bar{u}$ .

Estos gráficos de control fueron muy efectivos para detectar causas asignables de señales de fuera de control, especialmente en la fase 1 del control de procesos. En esta fase no se considera la optimización de los gráficos de control para reducir falsas alarmas.

La presencia de falsas alarmas genera la necesidad de utilizar la longitud promedio de rachas o números de muestras a tomar, hasta que aparece una señal fuera de control o hasta que caiga un punto por primera vez fuera de los límites de control (ARL por sus siglas en inglés). Ya que cada toma de muestra cumple con las características de un ensayo Bernoulli, entonces, la variable  $X$  “número de muestras a tomar hasta que por primera vez una muestra se sitúe fuera de los límites de control” tiene una distribución binomial negativa con parámetros  $r = 1$  y  $p = 1 - \beta$ , (Carot, 1998); entonces,  $ARL_1 = 1/(1-\beta)$ .

Por otro lado, se determinó que la probabilidad de cometer error tipo I (inferir que el proceso está fuera de control cuando en realidad está bajo control) o tipo II (inferir que el proceso está

bajo control estadístico cuando en realidad no lo está), se puede controlar dando valores adecuados a  $\alpha = P(\text{Error Tipo I})$  y  $n$ .

Saber si el punto  $i$  correspondiente a la  $i$ -ésima muestra (por ejemplo  $\bar{x}_i$ ) está o no dentro de los límites de control, puede ser definido como un contraste de hipótesis estadística; para ello partimos de su definición básica:

$$H_0: \theta_0 = \theta_1 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta_0 \neq \theta_1$$

- $H_0$  es denominada hipótesis estadística nula y propone que el proceso está bajo control;
- $H_1$  es denominada hipótesis estadística alternativa y propone que el proceso no está bajo control;
- $\theta_0$  es el valor del parámetro en un estado bajo control;
- $\theta_1$  es el valor alterno del parámetro obtenido a través de su estimador y de una muestra de tamaño  $n$ .

Al realizar contrastes de hipótesis existen dos tipos de errores. Enfocados al control de procesos son:

- Error Tipo I, rechazar que el proceso está bajo control (Rechazar  $H_0$ ) cuando sí lo está; y
- Error Tipo II, aceptar que el proceso está bajo control (Aceptar  $H_0$ ) cuando no lo está.

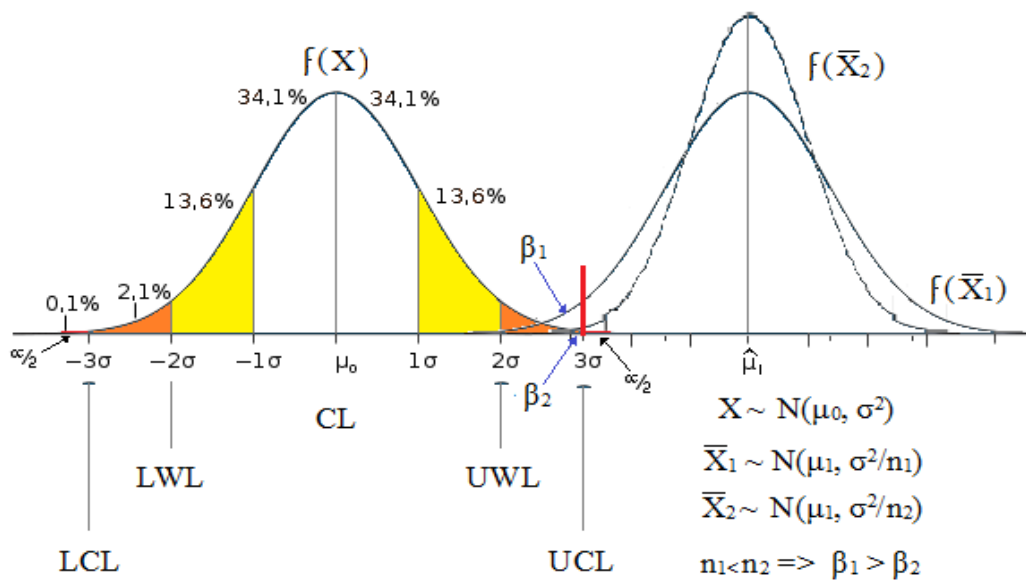
Además

- $P(\text{Error Tipo I}) = \alpha$
- $P(\text{Error Tipo II}) = \beta$

Uno de los parámetros que el investigador puede manejar al momento de crear un gráfico de control es  $\alpha$ . Sin embargo, el valor de  $\beta$  está asociado al tamaño de la muestra  $n$ , como se explica en la figura 2.1.

La figura 2.1 muestra como se aplica el contraste de hipótesis, cuando se requiere monitorizar el promedio de la característica de calidad  $X$  de un proceso. En la curva de la función  $f(X)$ , se indican la línea central (CL), los límites de alerta (LWL, UWL) y los límites de control (LCL, UCL). Se observa como el incremento en el tamaño de la muestra de  $n_1$  a  $n_2$  ( $n_1 < n_2$ ), tiene un efecto inverso en la probabilidad de aceptar que el proceso está bajo control cuando no lo está, reflejado en la disminución del valor de  $\beta$ , ( $\beta_1 > \beta_2$ ).

Se considera el siguiente caso; se ha construido un gráfico de control para el promedio de la característica de calidad  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , se construyen los límites de alerta y control, tal como se describe en la figura 2.1. Al contar con el parámetro  $\sigma$  y obtener los límites de control, se observa que si la constante ( $k = 1, 2, 3$ ) que acompaña a  $\sigma$  es igual a 3, queda un 0.1% (0.001) del área bajo la curva a la derecha de  $3\sigma$  y 0.1% (0.001) del área bajo la curva a la izquierda de  $-3\sigma$ ; lo que significa un 0.2% (0.002) de probabilidad de rechazar que el proceso está bajo control cuando sí lo está, dicho de otra manera,  $P(\text{Error Tipo I}) = \alpha = 0.002$ .



**Figura 2.1. Contraste de hipótesis para la  $i$ -ésima muestra de un control de procesos;**



Por otro lado, al obtener muestras de tamaño  $n_1$  se tiene que  $\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma/\sqrt{n_1})$ . Observe que  $\mu_0 \neq \mu_1$  aunque ambas funciones tienen la misma desviación estándar  $\sigma$ ; es decir que la media del proceso a sufrido un desplazamiento dado por  $|\mu_0 - \mu_1|$ . El área ( $\beta_1$ ) que está bajo la curva de  $f(\bar{X}_1)$  y que queda a la izquierda de la línea roja, representa la probabilidad que algún  $\bar{x}_i$  de esa población con media desplazada  $\mu_1$ , sea considerado dentro del grupo de elementos que cumple con los estándares, cuando realmente no los cumple; esto nos llevaría a aceptar que el proceso está bajo control cuando no lo está; dicho de otra manera  $P(\text{Error Tipo II}) = \beta_1$ .

Ahora bien, si se obtienen muestras de tamaño  $n_2$  de la misma población con función de distribución de probabilidad  $N(\mu_1, \sigma)$ , ahora se tendrá que  $\bar{X}_2 \sim N(\mu_1, \sigma/\sqrt{n_2})$ , cuando  $n_2 > n_1$ ; esto implica que al ser mayor  $n_2$  la desviación estándar de  $\bar{X}_2$  obviamente será menor que la de  $\bar{X}_1$ , es decir habrá menor dispersión de los datos y una curva  $f(\bar{X}_2)$  más angosta, lo que dará como resultado que  $\beta_2 < \beta_1$ , pues habrá un área menor de  $f(\bar{X}_2)$  al costado izquierdo de la línea roja.

La lectura más importante que se puede dar a la figura 2.1 es que la probabilidad de cometer error tipo I o II se puede controlar dando valores adecuados para  $\alpha$  y  $n$ .

En el siguiente apartado de esta tesis se analizan los casos cuando no se tienen los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y los métodos que existen para suplir su ausencia.

### 2.2.3 Parámetros variantes en los gráficos de control y ARL's

#### *Parámetros variantes en los gráficos de Shewhart*

Al momento de construir los gráficos de control de Shewhart solo se pueden manejar tres parámetros: tamaño de la muestra  $n$ , frecuencia de la toma de la muestra  $t$  y el nivel de significancia  $\alpha$  el cual nos ayuda a construir los límites de control.

Dado que  $n$  es el tamaño de la muestra, esto representa que se requieren de  $n$  observaciones en un periodo de tiempo  $t$  determinado por el investigador para controlar el proceso. Incrementar  $n$  en el mismo periodo de tiempo  $t$  implica tomar un mayor número de elementos para la muestra; sin embargo, cuando se mantiene  $n$  pero el periodo  $t$  lo reducimos  $t/a$  ( $a > 1$  y  $a \in \mathbf{R}$ ), con la finalidad de detectar más pronto una anomalía en el proceso, lo que ocurre con esto es volver a aumentar el número de observaciones en el periodo  $t$ .

La finalidad de este análisis es entender que si incrementamos el número de observaciones por muestra se reduce la varianza del estimador, lo que a su vez ayuda a reducir la probabilidad de cometer error tipo II. Por tanto, la manipulación de los parámetros  $n$  y  $t$  en el diseño de un gráfico de control, busca reducir el valor de  $\beta$  para tomar decisiones sobre el proceso con mejores elementos de juicio.

Está claro que al no ser  $\alpha = \beta = 0$ , se pueden cometer errores; por tanto en el diseño de gráficos

de control se desea minimizar falsas alarmas bajo control (asociadas al valor de  $\alpha$ ) y detectar de forma rápida si el proceso está fuera de control (asociada al valor de  $\beta$ ).

### *ARL's, características*

La norma más utilizada para medir el rendimiento de un gráfico de control es “el promedio de la longitud de las rachas” (ARL por sus siglas en inglés); es decir, el promedio del número de muestras sucedidas hasta obtener una señal de fuera de control. Dado que cada longitud de racha (RL) cumple con las características de un ensayo Bernoulli, se puede afirmar que  $RL \sim \text{Geométrica}(p)$ ; la distribución Geométrica es un caso especial de la Distribución Binomial Negativa, cuando el número de éxitos  $r = 1$ .

$$P(RL = RL') = (1-p)^{RL'-1}p$$

$$E(RL) = 1/p = ARL$$

$$\text{VAR}(RL) = (1-p)/p^2$$

RL' es un valor específico de RL y  $p$  está asociada a las probabilidades de cometer los errores de tipo I y II, identificadas en la figura 2.1 como las probabilidades  $\alpha$  y  $\beta$ .

Dado que  $H_0$  propone un estado bajo control del proceso y que la probabilidad de rechazar que el proceso está bajo control (Rechazar  $H_0$ ) cuando sí lo está, va asociada a  $\alpha$ , entonces a la

detección de esta falsa alarma se le llama  $ARL_0$ , y está dada por:

$$ARL_0 = 1/\alpha$$

El  $ARL_0$  depende solo de  $\alpha$ , y su valor lo determina el investigador; por convención  $\alpha = 0.0027$ ,  $Z_{\alpha/2} = 3 * \sigma = 3$ , cuando  $Z \sim N(0, 1)$ , esto reduce el  $ARL_0$  a 370.

$$\alpha = 1 - \int_{-3}^3 f(z) dz = 0.0027$$

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370$$

Este valor se interpreta de la siguiente manera: en promedio se requerirá muestrear 370 veces hasta tener una falsa alarma o hasta obtener una muestra que de señal de fuera de control cuando realmente el proceso está bajo control.

De la misma manera,  $H_1$  propone que el proceso no está bajo control y aceptar que el proceso está bajo control (Aceptar  $H_0$ ) cuando no lo está, va asociado a  $\beta$ , entonces a la detección de un estado fuera de control del proceso se le llama  $ARL_1$  y está dada por:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

En este caso, lo que se obtendría es el inverso de la Potencia del Contraste o Potencia de la Prueba de Hipótesis  $(1-\beta)^{-1}$ . Por este motivo se puede construir la Curva Característica de Operación (OC por sus siglas en inglés), la cual gráficamente nos indica la potencia de la prueba en función del desplazamiento  $d = k\sigma$  de la media. Ya que se ha demostrado que la  $\sigma_{\bar{x}}$  depende del tamaño de la muestra  $n$ , entonces la curva OC indica la inversa de la potencia de la prueba en función del tamaño de la muestra  $n$  y del nivel  $k$  de desplazamiento de la media en términos de  $\sigma$ .

Es claro que se desea que las falsas alarmas de que el proceso está fuera de control sean menos frecuentes, es por eso que a menor  $\alpha$  mayor  $ARL_0$ . Así mismo, necesitamos detectar pronto cuando el proceso está fuera de control, por eso necesitamos un  $\beta$  pequeño lo que da como resultado un  $ARL_1$  pequeño. De aquí la importancia de minimizar el  $ARL_1$  debido a su relación con  $\beta$  y este a su vez de  $n$  y en ocasiones de  $t$ . Por lo expuesto anteriormente, el ARL es el principal indicador de la calidad de la optimización de los gráficos de control propuestos en la presente tesis.

Estudios como los de Kramer y Schmid (1996) prueban que el  $ARL_1$  de un gráfico de control modificada, es mayor que el  $ARL_1$  de un gráfico de control de Shewhart para observaciones independientes.

Existen otros métodos de evaluación o de cálculo del ARL adicionales al anteriormente descrito, entre ellos están:

- Simulaciones a través del método de Monte Carlo: permite resolver el problema mediante la simulación de variables aleatorias que cumplan con las características deseadas del proceso y a través de ellas se calcula el ARL.
- Procesos estocásticos a través de Cadenas de Markov: permite resolver el problema mediante la definición de los diferentes estados del proceso y el cálculo del ARL a través de matrices (Brook y Evans, 1972).
- Ecuaciones integrales (método de Gauss con cuadratura): resuelve el problema mediante la derivación analítica de una ecuación integral y a través de la resolución de cuadratura gaussiana permite obtener una solución aproximada (Alve, 2012).

Los primeros dos métodos descritos, se analizan en detalle en el apartado 2.3 de esta tesis.

Algunos trabajos realizados con estas metodologías son los siguientes: Roberts (1959) utilizó por primera vez simulaciones a través del método de Monte Carlo (MC) para obtener el ARL de un gráfico de control. Brook y Evans (1972) evaluaron el ARL del gráfico de control EWMA utilizando un enfoque de estado finito de cadena de Markov. Crowder (1987) utilizó un sistema de ecuación integral (IE) para determinar el ARL. Sukparungsee y Areepong (2009) utilizan ecuaciones integrales numéricas para la evaluación del ARL del gráfico de control EWMA. Sukparungsee y Areepong (2012) aplican el enfoque martingala para

aproximar el valor del ARL. Gan (1998) calcula el ARL mediante el uso de las ecuaciones diferenciales.

#### **2.2.4 Evolución de los gráficos de control**

Después de la aportación realizada por Shewhart analizada en la sección anterior, apareció un segundo gran aporte al tema de los gráficos de control entre 1940 y 1960, donde surgieron gráficos de control que procuraron cubrir las limitaciones existente en los gráficos de Shewhart como la toma de decisiones considerando solo la última muestra obtenida, perdiendo la información provista por las muestras anteriores; de tal forma que el enfoque principal de estos nuevos gráficos fue considerar información histórica para detectar pequeños desplazamientos en el proceso y desarrollar un gráfico de control para varias características de calidad a la vez.

##### *Gráficos de control CUSUM y EWMA*

En 1954, Page introdujo el gráfico de control de sumas acumulada hasta la  $i$ -ésima muestra la que fue denominada CUSUM chart, para ello Page propuso el estadístico

$$C_m = \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \hat{\mu}_0)$$

Siendo  $m$  el número de muestras consideradas,  $\bar{x}_j$  el promedio de la  $i$ -ésima muestra y  $\hat{\mu}_0$  el estimador del promedio de la variable monitorizada del proceso en un estado bajo control. Page observó que si el proceso se mantiene bajo control en  $\mu_0$ , el estadístico  $C_m$  debería fluctuar aleatoriamente alrededor de 0 y cualquier desplazamiento de la media haría que los valores se vayan acumulando sobre o bajo 0 dependiendo del desplazamiento.

Para determinar si el proceso sale de control se construyeron los límites de control, superior  $C^+$  e inferior  $C^-$ , denominados cusum unilaterales de la siguiente manera:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

donde los valores iniciales son  $C^+ = C^- = 0$ . El valor de tolerancia o referencial  $K$  generalmente es la mitad del desplazamiento

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{\delta\sigma}{2} = k\sigma$$

cuando el desplazamiento es representado por  $\delta$  en términos de  $\sigma$ ; además  $\mu_0$  y  $\sigma$  son valores



conocidos de los parámetros para un estado bajo control. Los límites de control o intervalos de decisión están dados por  $0 \pm H = h\sigma$ , generalmente el valor de  $h = 5$ . Además es necesario obtener el valor de  $d = h/k$ .

Dado que  $C_i^-$  obtenido de esta manera será mayor que 0 pero representa los valores negativos acumulados, para graficarlos hay que multiplicar su valor por -1.

Los valores óptimos de  $k$  y  $h$ , son definidos a través del cálculo del ARL; su cálculo es complejo. Kemp (1962) propuso realizarlo a través del Nomograma.

Otra forma de analizar el gráfico CUSUM, es a través de lo que Barnard (1959) llamara esquema V-Mask. Sin embargo, esta forma de análisis del gráfico CUSUM ha tenido sus detractores; Jhonson (1961) afirmó que la V-Mask da resultados inexactos o imprecisos. Montgomery (1996) recomienda el no uso de este esquema debido a que no está claro hasta qué punto se deben utilizar los brazos hacia atrás de la V-Mask, lo que complica su interpretación.

En 1959, manteniendo la filosofía de utilizar la información previa con el fin de aumentar la eficacia para detectar pequeños desplazamientos en el proceso, Roberts S. introduce el gráfico de medias móviles ponderadas exponencialmente (EWMA, por sus siglas en inglés). Para ello se consideró la media  $t$ , y  $k-1$  medias inmediatamente anteriores, con el valor del ponderador  $0 < \lambda \leq 1$ ; de esta manera su estadístico es:

$$Z_t = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda(1-\lambda)^i \bar{x}_{t-i} + (1-\lambda)^t \mu_0$$

reemplazando  $t = i-1$ ; luego multiplicando la última ecuación por  $(1-\lambda)$  y el producto se lo resta a la ecuación inicial, se obtiene:

$$Z_i - (1-\lambda)Z_{i-1} = \lambda \bar{x}_i$$

$$Z_i = \lambda \bar{x}_i + (1-\lambda)Z_{i-1}$$

Además  $z_0 = \mu_0$ ; por tanto, asumiendo la normalidad de  $X$  y de  $\bar{X}$ , entonces  $Z_i$  se distribuye normalmente con parámetros

$$E(Z_i) = [1 - (1-\lambda)^i] \mu + [(1-\lambda)^i] \mu_0$$

cuando el proceso está bajo control  $E(Z_i) = \mu_0$

$$\sigma_{Z_i}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 \left[ \frac{\lambda}{2-\lambda} \right] [1 - (1-\lambda)^{2i}] = \frac{\sigma_0^2}{n} \left[ \frac{\lambda}{2-\lambda} \right] [1 - (1-\lambda)^{2i}]$$

si  $i$  es suficientemente grande,  $(1-\lambda)^{2i} \approx 0$ , esto da como resultado que

$$\sigma_{Z_i}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right)$$

lo cual indica que la línea central es igual a  $\mu_0$  y que los límites de control son

$$UCL = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \sigma_{z_i} = \mu_0 + L \sigma_{z_i}$$

$$LCL = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \sigma_{z_i} = \mu_0 - L \sigma_{z_i}$$

Para obtener el ARL del gráfico EWMA se puede realizar inicialmente un proceso similar al del gráfico de medias, ya que los dos estadísticos utilizados en estos gráficos de control tienen una distribución normal con media y varianza conocidas.

$$\beta_r = P(LCL \leq Z_i \leq UCL | r)$$

Cuando  $r$  es el número de muestras con el desplazamiento.

$$\beta_r = P\left(\frac{LCL - E(Z_i)}{\sqrt{VAR(Z_i)}} \leq Z \leq \frac{UCL - E(Z_i)}{\sqrt{VAR(Z_i)}} | r\right)$$

reemplazando los términos de la media y varianza de  $Z_i$  en la fórmula, y haciendo que el desplazamiento  $|\mu - \mu_0| = \delta$ , se obtiene

$$\beta_r = \Phi\left(Z_{\alpha/2} - \frac{1 - (1 - \lambda)^r}{\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}} \delta\right) + \Phi\left(Z_{\alpha/2} + \frac{1 - (1 - \lambda)^r}{\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}} \delta\right) - 1$$

Es importante recordar que  $Z_{\alpha/2} = L$ , generalmente toma el valor de 3.

Esta expresión mide la probabilidad de aceptar que el proceso está bajo control en el momento  $r$ , cuando realmente a ocurrido un desplazamiento de magnitud  $\delta$  en la media del proceso; sin embargo, dado que  $r = 1, 2, \dots$ , esto indica que conforme se incrementa  $r$  cambiará la probabilidad de detectar el desplazamiento.

Para calcular el ARL hay que obtener el valor esperado de la variable aleatoria  $r$ , momento en que se detecta el desplazamiento. Luego,

$$P(r=1 | \delta, \lambda) = (1-\beta_1); P(r=2 | \delta, \lambda) = \beta_1(1-\beta_2); P(r=3 | \delta, \lambda) = \beta_1\beta_2 (1-\beta_3); \dots$$

$$ARL = E(r) = \sum_{r=1}^{\infty} r P(r | \delta, \lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{r-1} \beta_i$$

$$\text{con } \beta_0 = 1$$

De esta manera puede obtenerse el ARL para el gráfico de control EWMA.

Otras formas de obtener el ARL para el gráfico EWMA fueron propuestas: Roberts (1959). Utilizando simulación construyó un nomograma para variables aleatorias normalmente distribuida. Robinson y Ho (1978) evaluaron el ARL utilizando la expansión de Edgeworth. Crowder (1987) muestra que puede ser escrita como una integral de Fredholm de segundo

orden. Lucas y Saccucci (1990) utilizaron cadenas de Markov para realizar su evaluación.

Otros investigadores estudiaban la forma de monitorizar varias variables a la vez y no solo una, tal como ocurría con los gráficos de control hasta ahora revisados.

### *EWMA multivariado*

Por otro lado, Lowry et al. (1992) propusieron el gráfico EWMA multivariado como una extensión del EWMA univariado, utilizando más información que los gráficos  $T^2$  de Hotelling. El interés se centró en el control simultáneo de  $p$  características de calidad correlacionadas entre sí. Los vectores MEWMA se definen como:  $Z_i = R X_i + (I_p - R)Z_{i-1}$ ;  $Z_i$  es el  $i$ -ésimo vector EWMA;  $X_i$  es la  $i$ -ésima observación;  $i \in N$ ;  $I_n = \text{diag}(1_1, 1_2, \dots, 1_p)$ ;  $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_p)$ ;  $0 < r_j \leq 1$ ;  $j = 1, 2, \dots, p$ . Se considera  $Z_0 = 0$  el estado inicial.

Si todos los  $r_j$  son iguales, es decir si todas las variables tienen el mismo peso, entonces se tendría que  $Z_i = r X_i + (1 - r) Z_{i-1}$ . Observe que cuanto mayor sea  $r$  menor será la aportación de las observaciones pasadas, a esto se le llama menor profundidad de la memoria.

El estadístico MEWMA es  $T_i^2 = Z_i' \Sigma_z^{-1} Z_i$ , donde:

$$\Sigma_z = \left[ \frac{r(1 - (1 - r)^{2i})}{2 - r} \Sigma_x \right] \approx \frac{r}{(2 - r)n} \Sigma_x$$

El límite de control está dado por  $h > 0$ , el cual se seleccionará dependiendo del valor determinado o deseado de ARL.

Cuando todos los  $r_j$  son iguales, el desempeño del ARL del MEWMA depende únicamente del parámetro de no centralidad  $\lambda = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) = nd^2$ ; cuando  $d$  es la magnitud del desplazamiento que se desea detectar, utilizando la distancia de Mahalanobis,  $\boldsymbol{\mu}_0$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  son los parámetros provenientes de un estado bajo control y  $\boldsymbol{\mu}_1$  es el vector de promedios del proceso dado el desplazamiento. Por lo tanto, los parámetros  $r$ ,  $h$ ,  $p$  y  $d$ , son los valores a considerar para optimizar el ARL del MEWMA.

Lowry (1992) propuso el uso de tablas obtenidas a través de simulación, para hallar  $h$  y  $r$ , con diferentes valores de desplazamiento  $d$  del vector de promedios, y valores de  $p = 2, 3, 4, 5, 10$  y  $20$  para valores de  $ARL_0 = 50, 100, 200, 500$  y  $1000$ ; lo que las limita para estos casos específicos. Aparisi y García-Díaz (2007), utilizando algoritmos genéticos desarrollaron un software, el cual aplica el concepto de diseño óptimo sobre un punto. Este diseño consiste en especificar el  $ARL_0$  deseado y la magnitud del cambio  $d$  que se desea detectar. Entonces se obtiene la combinación  $(r, h)$  que provee el mínimo  $ARL_d$  ( $ARL_1$  o fuera de control), para un determinado tamaño de muestra  $n$  y número de variables de control  $p$ ; las funciones de aptitud “fitness” que utilizaron fueron:

$$1) \max -w_1 |ARL_0 - ARL(d=0)| - w_2 ARL_d \text{ si } (ARL_0 - ARL(0)) \leq 0,$$

$$2) \max - 2w_1|\text{ARL}_0 - \text{ARL}(d=0)| - w_2 \text{ARL}_d \text{ si } (\text{ARL}_0 - \text{ARL}(0)) > 0,$$

El  $\text{ARL}_0$  representa el ARL deseado,  $\text{ARL}(d=0)$  representa el ARL evaluado en el punto  $d=0$ ,  $\text{ARL}_d$  el ARL en el punto  $d$  en el cual se desea optimizar el gráfico, y  $w_1$ ,  $w_2$  representan los pesos de cada objetivo a optimizar en cada ecuación;  $w_1=1$  y  $w_2=5$ , fueron los valores recomendados.

#### *CUSUM Multivariado (MCUSUM)*

Crosier (1988), planteó una extensión del gráfico de control CUSUM propuesta por Page (1954), este gráfico de control es conocido como CUSUM multivariado o MCUSUM. Se recomienda su uso cuando se trabaja con dos o más características de calidad, las cuales son variables aleatorias normales multivariadas.

Para realizar el gráfico MCUSUM, es necesario considerar la independencia de las observaciones de variables normales multivariadas, de la cual se conoce su matriz de covarianza  $\Sigma$ , y se extraen muestras de tamaño  $n$ . Es necesario definir inicialmente  $k$  y  $C_i$

$$k = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)}}{2} = \frac{d}{2}$$

$$C_i = \sqrt{(\mathbf{L}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{L}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

de esta manera se define el estadístico como  $Y_i = \sqrt{\mathbf{L}_i' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{L}_i}$ ; si  $C_i \leq k$  entonces  $\mathbf{L}_i = \mathbf{0}$ , si  $C_i > k$ ,  $\mathbf{L}_i = (\mathbf{L}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0) * (1 - \frac{k}{C_i})$ . Siendo  $\mathbf{X}_i$  el vector de promedios de sub-grupos de tamaño  $n$  de la  $i$ -ésima muestra,  $\boldsymbol{\mu}_0$  el vector de valores objetivos o del estado bajo control,  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matriz de covarianzas, y  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ . Si  $Y_i > h$  el proceso se declara fuera de control. Manteniendo la convención de reiniciar el gráfico MCUSUM después de una señal de fuera de control. El UCL o  $h$  es calculado por simulación para obtener un ARL deseado. Lee & Khoo (2006) proponen un diseño óptimo para el gráfico de control CUSUM multivariado.

### *Gráfico de control multivariado $T^2$ de Hotelling*

En el año de 1947 Harold Hotelling planteó el uso del estadístico  $T^2$  para contraste de hipótesis de vectores de medias provenientes de una distribución normal  $p$ -variada. En este caso Hotelling buscó a través del estadístico  $T^2$  aumentar el número de variables ( $p$ ) en la prueba sin reducir el nivel  $\alpha$  de significación de la prueba. Recuerde que si se desean controlar un número de variables de calidad  $p > 1$  (un gráfico de control por cada variable) la probabilidad que los  $p$  parámetros se encuentren en sus límites de control es  $(1 - \alpha)^p$  si las  $p$  variables son independientes y  $P(\text{Error tipo I}) = 1 - (1 - \alpha)^p$ , con nivel de significación  $\alpha$  para cada gráfico de control; además, es poco probable que con gráficos de control independientes



sea detectado un valor anormal, atípico o también llamado influyente en regresión múltiple.

En 1936 Mahalanobis introdujo una distancia matemática que mide la distancia entre dos variables aleatorias  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$   $p$ -dimensionales con igual función de distribución de probabilidades y matriz de varianzas y covarianzas  $\Sigma$ . Se definió como

$$d_m(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})}$$

Por otro lado, si  $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$  con vector de medias  $\mu'_X = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]$  y matriz de covarianzas  $\Sigma_{p \times p}$  (simétrica y definida positiva), el cuadrado de la distancia estandarizada de  $\mathbf{X}$  a  $\boldsymbol{\mu}$  (cuadrado de la distancia de Mahalanobis) es

$$d_m^2 = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}).$$

Dado que  $\left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\right) (x - \mu)(\sigma^2)^{-1}(x - \mu)$ , se tiene lo siguiente para  $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} e^{\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} e^{\left[\frac{-1}{2}(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)\right]}$$

Generalizando para  $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$$f(x) = \left[ \frac{1}{|\Sigma|^{1/2} (2\pi)^{p/2}} \right] \exp\left[\left(\frac{-1}{2}\right)(x-\boldsymbol{\mu})'(\Sigma)^{-1}(x-\boldsymbol{\mu})\right]$$

Además, si  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $X^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \sim \chi_{gl=1}^2$

Por lo tanto, al seleccionar una muestra aleatoria de la población  $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , se tiene que

$$\chi_0^2 = n(\mathbf{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu) = nd_m^2$$

es el estadístico de la prueba y si deseamos realizar el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, se tiene que el UCL =  $\chi_{\alpha,p}^2$  y LCL = 0; siendo  $\alpha$  el nivel de significancia y  $p$  el número de variables de calidad monitorizadas.

Cuando no se cuenta con los parámetros originales se deben estimar:  $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$  y  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ ; esto cambia el estadístico a  $T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\bar{\mathbf{X}}})' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \bar{\bar{\mathbf{X}}})$ .

Bajo algunas suposiciones, Tracy, Young y Mason (1992), demuestran que la distribución de  $T_i^2$  es

$$T_i^2 = \frac{p(m-1)(m+1)}{m(m-p)} F_{p,m-p}$$

sus límites de control serían:

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1}$$

$$LCL = 0$$

Seber (1984) indica que si  $m$  tiende a infinito,  $T^2$  converge en distribución a una chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad, siendo  $m$  el número de muestras utilizadas para estimar  $\mu_0$  y

$$T_i^2 \approx \chi_p^2$$

Cuando el proceso a sufrido una desviación en al menos uno de los promedios de sus variables, el vector  $\mu_1$  se aleja del vector de promedios  $\mu_0$  del estado bajo control en una distancia  $d$  de Mahalanobis, entonces  $T^2$  tiene una distribución chi-cuadrado no centralizada con  $p$  grados de libertad y con descentrado

$$\lambda = nd^2 = n(\mu_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$$

siendo  $n$  el número de observaciones o tamaño de la muestra y  $\Sigma$  la matriz de covarianzas de  $X$ , durante el estado bajo control del proceso.

Uno de los problemas que se encontraron en este gráfico, fue la falta de identificación de la o las variables que generaban el estado de fuera de control. Murphy (1987) propuso una

selección de las variables que se encontraban fuera de control para un gráfico de control  $T^2$  de Hotelling identificando la aportación de cada variable al estadístico.

Aparisi (1996) hace una comparación del desempeño del gráfico  $T^2$  con el de los gráficos simultáneos de Shewhart para determinar las ventajas que ofrece el uso del gráfico  $T^2$ .

Para obtener una mejor descripción del gráfico  $T^2$  ver Montgomery (2012) capítulo 11 o Johnson y Wichern (2007) capítulo 5. Tal como ocurre con el gráfico MEWMA (Lowry et al, 1992) o CUSUM multivariante (Woodall y Ncube, 1985; Crosier, 1986), también existen mejoras en el gráfico  $T^2$ .

#### *Gráfico $T^2$ con parámetros adaptativos*

Un avance en el gráfico de control multivariado  $T^2$  de Hotelling fue optimizar su rendimiento introduciendo la idea de parámetros adaptativos. En este contexto se tiene el gráfico  $T^2$  con tamaño de muestra adaptativa propuesto por Aparisi (1996). Básicamente su propuesta es que el tamaño de muestra  $n_i$  para calcular  $T_i^2$  dependa del valor que tome  $T_{i-1}^2$ ; si  $0 < T_{i-1}^2 < UWL$ ,  $T_i^2$  se calcula con  $n_1$ ; si  $UWL < T_{i-1}^2 < UCL$ ,  $T_i^2$  se calcula con una muestra de tamaño  $n_2$ , hasta que el proceso se estabilice; con  $n_2 > n_1$  y  $0 < UWL < UCL$ .

Las bases estadísticas necesarias para realizar estos gráficos de control se describen a continuación.

Sea  $X_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , procedente de una población con distribución normal multivariada, con parámetros  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$ , de la cual se extrae la muestra  $i$ , obteniéndose de ellas  $p$  características de calidad correlacionadas.

El estadístico utilizado es el  $T^2$  de Hotelling tiene la forma

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)$$

Si  $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$ ,  $T_i^2$  tiene función de distribución de probabilidad  $\chi^2$  no-centralizada y parámetro de no-centralización  $\lambda = nd^2$ ; siendo  $d$  (la distancia de Mahalanobis) el cambio o desplazamiento ocurrido durante el proceso.

Para un estado bajo control  $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_0$  se tiene;

$$ARL_0 = \frac{1}{\int_{UCL}^{\infty} f(x) dx} = \frac{1}{\alpha}$$

$f(x)$  se distribuye como una  $\chi_{gl=p}^2$ .

Cuando  $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$  ha ocurrido un desplazamiento  $d$ , entonces;

$$ARL_d = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-P(T_i^2 < UCL/d)} = \frac{1}{1-F_X(UCL/d)} = \frac{1}{\int_{UCL}^{\infty} f(x; p, \lambda = pd^2) dx}$$

La función de distribución de probabilidad  $\chi^2$  no-centralizada, está dada por

$$f(x; p, \lambda) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\lambda}{2}\right)} x^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}}{2^{p/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^j}{4^j j! \Gamma\left(j + \frac{p}{2}\right)}$$

con  $p$  grados de libertad y  $\lambda$  como parámetro de no-centralidad.

Por otro lado, dado que  $n_1 < n_2$ , existe un  $n_0$  tal que  $b_1 n_1 + b_2 n_2 = n_0$ , donde  $b_1 + b_2 = 1$ . Los ponderadores  $b_1$  y  $b_2$  son en realidad las probabilidades de los estados iniciales, donde

$$b_1 = P(\chi_p^2 < CWL) = F_X(UWL)$$

por tanto  $b_2 = 1 - b_1$  y representa  $P(\chi_p^2 > UWL) = 1 - F_X(UWL)$ .

Esto equivale a decir que  $b_1$  es la probabilidad que el estadístico  $\chi_p^2$  sea menor que el límite de alerta y  $b_2$  su complemento.

Para calcular el ARL se utilizaron Cadenas de Markov. Se definen 3 estados:

- $E_1, T_i^2 < UWL;$
- $E_2, UWL \leq T_i^2 < UCL; y$
- $E_3, T_i^2 \geq UCL$

Otra aportación realizada por Aparisi (2001) es la modificación al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, donde el intervalo de tiempo entre muestreo varía dependiendo de los valores que tome el estadístico. En él se hace uso del promedio de tiempo necesario para que ocurra una señal de fuera de control (ATS por sus siglas en inglés), donde  $ATS = t * ARL$  y  $t$  es el tiempo transcurrido entre muestras; también se utilizan cadenas de Markov para optimizar el  $ARL$  y con ello el  $ATS$ .

Aparisi y García-Díaz (2001) propusieron aumentar la eficacia del gráfico  $T^2$  de Hotelling a través de señales adicionales, debido a que el gráfico carece de potencia para detectar pequeños cambios durante el proceso.

#### *Gráfico $T^2$ con Muestreo Doble ( $DS T^2$ )*

El gráfico de muestreo doble  $DST^2$  propuesto por Champ y Aparisi (2008) obtiene información del proceso a través de dos muestras aleatorias independientes, tomadas al mismo

tiempo y de forma periódica, cada una de tamaño  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente, con ello obtenían dos estadísticos  $T^2$

$$T_{k,i}^2 = n_i(\bar{\mathbf{X}}_{k,i} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{k,i} - \boldsymbol{\mu}_0); i=1, 2$$

cuando  $k$  representa a la secuencia de muestras tomadas,  $i$  representa al primer o segundo grupo de la muestra tomada en el instante  $k$ , y  $\bar{\mathbf{X}}_{k,i}$  representa el vector de promedios del  $i$ -ésimo grupo de la  $k$ -ésima muestra.

En función de esto se crean los límites de alerta ( $w_1$ ) y de control ( $h_1$  y  $h$ ), para monitorizar el proceso, utilizando  $w_1$  y  $h_1$  para el estadístico  $T_{k,i}^2$  y  $h$  para el estadístico  $Q_k^2$  dado por

$$Q_k^2 = \frac{1}{n} (n_1 T_{k,1}^2 + n_2 T_{k,2}^2)$$

siendo  $n = n_1 + n_2$ .

La toma de decisiones para determinar el estado del proceso se lo realiza de la siguiente manera:

1. Si  $T_{k,1}^2 \geq h_1$  ( $h_1 > 0$ ), señal de que el proceso está potencialmente fuera de control;
2. Si  $0 < T_{k,1}^2 < w_1 < h_1$ , esperar hasta la siguiente muestra;



3. Si  $w_1 \leq T_{k,1}^2 < h_1$ , obtener más información a través del estadístico  $Q_k^2$  para tomar una decisión;
  - a. Si  $Q_k^2 \geq h$ , señal de que el proceso está potencialmente fuera de control.
  - b. Si  $Q_k^2 < h$ , volver a utilizar el estadístico  $T_{k,i}^2$

Por otro lado, entre los años 1960 y 2000, hubo énfasis en el control de procesos de variables autocorrelacionadas. Entre las aportaciones relevantes se tiene a Layth, et al. (1988) que proponen modelamiento estadístico y ajuste por medio de series temporales y la aplicación de un procedimiento estándar de gráfico de control para residuos del ajuste.

En 1988, Alwan y Roberts propusieron el uso del gráfico de control para causas especiales (SCC). Su propuesta fue “limpiar” los datos autocorrelacionados y monitorizar los errores de predicción. Si el modelo y la predicción eran adecuadas los errores serían independientes, pudiendo aplicarse para su control un gráfico Shewhart tradicional. Harris and Ross (1991) y Runger & Prabhu (1995) complementaron el estudio investigando acerca de procesos que requerían ser monitorizados sobre la base de la MMSE (Minimum Mean Square Error) de modelos autorregresivos AR(1). Wardell et al. (1992), ofrece guías para una selección del gráfico de control apropiado, ya que según su estudio, el monitorizar los datos autocorrelacionados originales, puede ofrecer mejores resultados que aplicar el gráfico SCC, cuando el proceso presenta autocorrelación positiva.

Zhang (1998) encontró que el gráfico de control EWMA para el caso de procesos estacionarios (EWMAST), tiene mejor desempeño que el gráfico SCC, cuando el proceso no presenta una fuerte autocorrelación y los cambios en la media son pequeños.

Otras importantes aportaciones son las realizadas por Croasdale (1974) quien introdujo el gráfico de control para esquemas de doble muestreo (DS por sus siglas en inglés), el cual es basado en la optimización del ARL en la medida que se realiza un segundo muestreo que certifique el estado fuera de control del proceso si la primera muestra así lo determinaba.

#### *Estados inicial y estacionario en el control de procesos*

El Dr. Shewhart además de crear la base para lo que hoy se conoce como control estadístico de procesos y especialmente para el gráfico de control, también desarrolló el concepto de un “estado” de control estadístico. En el SPC se determinan dos posibles estados del proceso: el estado inicial del proceso, llamado zero-state y se refiere a un gráfico de control inicializado en el valor meta; es decir, un proceso que en su etapa inicial se encuentra en el estado bajo control deseado. Mientras el estado estacionario, llamado steady-state, se refiere a un gráfico de control que se evalúa después que el estadístico ha alcanzado su estado de equilibrio; es decir, un proceso que ha alcanzado su etapa de madurez.

Formalmente, Ross (1996) describe al steady-state de la siguiente manera: Una cadena de Markov irreductible, positiva-recurrente es estacionaria si el estado inicial es elegido de

acuerdo a las probabilidades estacionarias (en el caso de una cadena ergódica o regular, es equivalente a imaginar que el proceso comienza en el tiempo  $t = -\infty$ ). Decimos que dicha cadena está en estado estacionario.

Durante el SPC un proceso que se encuentre en steady-state tiene propiedades que permanecen invariantes a lo largo del tiempo. El steady-state es una situación más general que el de equilibrio. Cuando un proceso se encuentra en steady-state el comportamiento observado en el tiempo  $i$  es el que tiene mayor probabilidad de ocurrir en los siguientes momentos  $i + j$  ( $j > 1$ ); esto equivale a decir en el ámbito de los procesos estocásticos, que las probabilidades de que los diferentes estados se repetirán permanecerán constantes en el tiempo.

Generalmente los procesos no alcanzan el steady-state hasta algún tiempo después de que se haya iniciado, se requiere de una fase de puesta en marcha o inicialización.

Lucas y Saccucci (1990), ya hacían referencia a los zero-state y steady-state, en su artículo sobre el gráfico de control EWMA: propiedades y mejoramiento. Luego de esto, su uso ha sido común en artículos relacionados al tema.

*Otras aportaciones a los gráficos de control multivariantes basados en el estadístico  $T^2$*

He (2002) extiende el método desarrollado por Croasdale (1974) del DS, hacia un muestreo doble y triple multivariado, para los gráficos y usando algoritmos genéticos que optimicen el ARL. El mismo He (2005) extendería la teoría para desarrollar gráficos multivariados utilizando múltiples muestras.

Tsung y Apley (2002), estudiaron la detección de cambios dinámicos en los procesos de múltiples variables. Capizzi y Masarotto (2003) analizaron la adaptación de gráficos EWMA y de gráficos CUSUM. De igual manera lo hicieron Sparks (2000) y Shu (2008).

Las aportaciones en los últimos años, realizadas a los gráficos de control, se caracterizan por poner mayor interés a la reducción del  $ARL_1$  dado un  $ARL_0$ , utilizando teorías como las cadenas de Markov y algoritmos genéticos, para obtener los parámetros de los gráficos de control. Algo que empezó a tener auge fue el uso de siglas para reducir el nombre de la metodología que se esté utilizando y/o del objetivo que se busca. A continuación se muestran algunos ejemplos:

- DS: double sample
- VSS: variable sample sizes
- VSI: variable sampling intervals
- DWL: double warning limits

- BDS: bivariate control charts with double sampling
- VSSVSI: variable sample size and sampling intervals
- AATS: adjusted average time to signal
- ICA: independent component analysis

Ding (2006) presentó un ejemplo en el que ICA supera al PCA durante la reducción de datos. A diferencia de la PCA que trata de maximizar la variación explicable, el ICA busca componentes que puedan agrupar los datos en grupos distintos. Lee (2003) integra ICA con MEWMA para el control de procesos. Albazzaz y Wang (2004) aplican técnicas al SPC del ICA basado en operaciones por lotes.

Faraz (2006) en su estudio de gráficos  $T^2$  de Hotelling con DWL, el cual es una extensión de VSI y de VSS, asume que la longitud del tiempo del proceso bajo control tiene función de distribución de probabilidad exponencial y utiliza cadenas de Markov para obtener las propiedades del gráfico  $T^2$ . Afirma que el gráfico DWL es más rápido que los gráficos VSI y/o VSS para detectar casi todos los cambios que ocurren en la media del proceso.

Champ (2008) hace una extensión de los gráficos DS propuestas por He (2002), estudiando dos DS para monitorizar el vector de medias, utilizando un gráfico  $DST^2$  tradicional y un gráfico  $DST^2$  combinado, utilizando algoritmos genéticos para obtener los parámetros óptimos del gráfico.

Costa (2008) consideró el gráfico  $T^2$  con DS para realizar control de procesos bivariados (BDS), siendo esta en esencia una combinación de los gráficos propuestos por Aparisi (1996) y por Champ y Aparisi (2007).

Wang (2008) propuso un gráfico de control  $T^2$  adaptativo para monitorizar sistemas con cambios dinámicos, manteniendo la optimalidad de sus predecesores gráficos recursivos pero con la ventaja de que pueden ser fácilmente ajustado para mejorar los niveles de sensibilidad en determinados cambios de rangos.

Faraz (2010) realiza una unificación y algunas correcciones a los enfoques de la cadena de Markov para el desarrollo de gráficos de control con rango variable de muestreo, lo que dio como resultado mayor certeza a sus resultados haciendo una revisión de los gráficos VSS, VSI, VSSVSI y AATS.

Chang (2009) realiza un diseño económico del gráfico VSSI  $T^2$ . Mientras que Torng (2009) presentaba una modificación estadística para el diseño del gráfico DS; ambos autores utilizaron algoritmos genéticos para optimizar los parámetros de los modelos.

Tsung (2010) hace una revisión interesante sobre las diferentes técnicas para la construcción de gráficos adaptativos, separando las aportaciones de varios autores por temáticas: detección de cambios; trato con dimensionalidad alta; seguimiento de procesos con medias dinámicas; detección de cambios dinámicos; gráficos de control adaptativos para el seguimiento del

proceso; estimación recursiva de la media bajo control / varianza / covarianza; estimación recursiva de cambios de media fuera de control; estimación recursiva de cambios de direcciones de procesos multivariantes; un gráfico de doble cara direccionalmente variante para procesos multivariantes.

Una de las últimas aportaciones de Faraz (2011) es la construcción de un modelo para encontrar un diseño estadístico económico (ESD) del gráfico DWLT<sup>2</sup>, usando el modelo general propuesto por Lorenzen (1986), encontraron los valores óptimos de los parámetros que minimizan los costos de muestreo, para ello hicieron uso de algoritmos genéticos. Además compararon los costos de muestreo de costo fijo para los gráficos VSI, VSS, VSIVSS con DWL.

Una de las metodologías más utilizadas en esta etapa de los gráficos de control es la explicada por Lee y Khoo (2006) en su trabajo sobre la optimización de los parámetros de un gráfico de control MCUSUM, quienes tomando las bases dejadas por Brook y Evans (1972), realizan el cálculo del ARL zero-state de un gráfico de control modelado a través de una cadena de Markov, de esta forma

$$ARL = \mathbf{s}' (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{1}$$

cuando  $\mathbf{s}$  es el vector inicial de la cadena de Markov, con dimensión  $m+1$ ;  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimensión  $(m+1) \times (m+1)$ ;  $\mathbf{P}$  es la matriz de probabilidades de transición

$(m+1) \times (m+1)$ ; y  $\mathbf{1}$  es el vector de dimensión  $m+1$ , con valores de uno en cada uno de sus elementos. De esta manera se obtiene el ARL a través de matrices, facilitando su cálculo.

Aparisi, ya ha hecho uso de esta metodología, como el gráfico de control propuesto para tamaño de muestra adaptativo (1996), la optimización del gráfico de control EWMA (Aparisi y García-Díaz, 2007), gráfico de control  $T^2$  con doble muestreo (Champ y Aparisi, 2008), entre otras.

### **2.2.5 Diseño de los gráficos de control**

Los gráficos de control han demostrado su eficacia en el control y monitorización de procesos, por tal motivo, los investigadores de esta área del conocimiento, buscan constantemente mejorar su eficiencia, a través de un diseño óptimo, variando los valores de sus parámetros: tamaño de la muestra, límites de control, frecuencia de toma de muestras y reglas para determinar señales de fuera de control.

Los gráficos de control de Shewhart, consideran una línea central dada por el promedio del estimador; dos líneas, superior e inferior a  $\pm 3\sigma$  del promedio del estimador, con las cuales se determinan las señales de fuera de control; las muestras de tamaño  $n$  se recogen a intervalos de tiempo determinados. Sin embargo, el diseño óptimo de un gráfico de control implica la



selección de valores adecuados de los parámetros propios de cada uno; por ejemplo, el gráfico MEWMA requiere de los parámetros  $r$ ,  $h$ ,  $p$  y  $d$ , el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling requieren de valores óptimos de  $w$  y  $CL$  dados  $n$ ,  $p$  y  $d$ .

El enfoque estadístico más utilizado para el diseño de gráficos de control, es considerar el valor del ARL deseado, ya sea incrementando el valor del ARL bajo control (generalmente este valor es fijado a través del  $\alpha$ ) o reduciendo el ARL fuera de control o los dos a la vez. Para Carlyle et ál. (2000) esta manera de optimizar es llevar los gráficos de control a un contexto de contraste de hipótesis, donde las probabilidades de error tipo I y II, dados por  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, están asociados a los conceptos de ARL bajo control y ARL fuera de control, respectivamente.

En los capítulos 3 y 4, se hace uso de este enfoque para realizar los gráficos propuestos, fijando un valor de ARL bajo control, se busca minimizar el ARL fuera de control, para un determinado número de muestras, variables y distancias de Mahalanobis en el cálculo del estadístico  $T^2$ . También se aplica el criterio de Woodall (1985) para determinar zonas de control que minimicen las falsas señales de fuera de control y detectar de forma rápida señales reales de fuera de control.

Los gráficos de control propuestos en el presente trabajo tienen tres o cuatro parámetros a optimizar:  $w = w_1, w_2, CL_{p1}$ , y  $CL_p$ . Para la optimización el tamaño de la muestra  $n$ , y el número de variables,  $p_1$  y  $p$  son datos del problema, que se suponen dados.

Adicionalmente a los parámetros del problema el usuario debe especificar el cambio para el cual desea obtener el máximo rendimiento; en este caso lo que se requiere especificar son las distancias (de Mahalanobis),  $d_1$  relacionada a las  $p_1$  variables y  $d$  relacionada con las  $p$  variables. La selección de un cambio para la optimización es un requisito común en los gráficos de control. Por ejemplo, el rendimiento de los gráficos de control EWMA o MEWMA dependen del tamaño del cambio (en unidades de sigma o la distancia de Mahalanobis) y con el fin de encontrar el mejor parámetro de suavizado y un límite de control, el tamaño del cambio debe ser previamente especificado.

El problema de la optimización del diseño de los gráficos propuestos, para un cambio dado en el vector de promedios, puede ser formalmente expresado como sigue

Dado:

- El ARL bajo control requerido:  $ARL_0$
- los valores de  $p_1$  y  $p_2$ ,  $p = p_1 + p_2$
- el tamaño de la muestra  $n$ ,
- las distancias del cambio (es decir, las distancias de Mahalanobis del vector de promedios en el estado fuera de control con respecto al vector de promedios de un

estado bajo control de  $\mathbf{X}$ ) para los cuales el ARL tiene que ser minimizado: para las  $p_1$  variables:  $d_{p1}$ ; y para todas las  $p$  variables:  $d_p$ ;

Encontrar: el(los) límite(s) de advertencia y el(los) límite(s) de control:  $w = w_1, w_2, CL_{p1}$ , y  $CL_p$ , tal que

Minimice: el  $ARL(d_{p1}, d_p)$ , fuera de control

Sujeto a:  $ARL(d = 0) = ARL_0$

$ARL_0$  es el valor del ARL fuera de control que el usuario desea optimizar, mientras  $ARL(d=0)$  es el valor obtenido a través de la optimización.

## **2.3 Metodología**

### **2.3.1 Cadenas de Markov y su aplicación a los gráficos de control**

Como se indicó en el tema “*ARL's, características*” del apartado 2.2, un método muy utilizado para el cálculo del ARL es a través de las cadenas de Markov. A continuación se revisa la teoría relacionada a este tema y su aplicación a los gráficos de control.

Las cadenas de Markov reciben su nombre por el matemático ruso Andrei Markov quien a inicios del siglo XX desarrolló su estudio sobre teoría de probabilidades. Para iniciar el tema de las cadenas de Markov es necesario recordar que estas son un proceso estocástico; son utilizadas para proveer una solución analítica a ciertos problemas de simulación. Smith y Roberts (1993) hacen una interesante discusión sobre las cadenas de Markov combinada con el método de Montecarlo como herramientas para la simulación de eventos.

#### *Descripción de una cadena de Markov*

Si se tiene una sucesión  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_t, \dots$  de observaciones de la cual no se puede hacer una predicción exacta del valor que puede tomar la siguiente observación pero se puede obtener la probabilidad de cada uno de los posibles valores, entonces se tiene un proceso estocástico.

Un proceso estocástico puede ser: discreto, cuando su estado puede variar en determinados momentos; y continuo, cuando su estado puede variar en cualquier momento.

A aquellos procesos estocásticos discretos en el cual su evolución depende únicamente de su estado actual y no de los anteriores se le denomina proceso de Markov. Es decir, si  $X_t: t \geq 0$  es un proceso estocástico discreto, donde cada  $X_t$  es una variable aleatoria discreta. Se dice que  $X_t$  tiene la propiedad markoviana si

$$P\{X_{t+1} = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t\} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i_t\} = p_{i,j}(t)$$

donde,  $p_{i,j}(t)$  es la probabilidad de que el proceso, estando en el tiempo  $t$ , pase del estado  $i$  al estado  $j$ , en el siguiente instante; si esta probabilidad no depende del tiempo  $t$ ,  $p_{i,j}(t) = p_{i,j}$ , se dice que las probabilidades de transición son estacionarias. Si  $p_{i,j} > 0$ , se dice que el estado  $E_i$  se puede comunicar con el estado  $E_j$ .

La serie de probabilidades  $\{p_{i,j}\}$  para cada  $i$  fijo es una distribución de probabilidades ya que en cualquier caso puede ocurrir cualquiera de los  $E_i$  estados ( $i=1, \dots, m$ ) los cuales son mutuamente excluyentes.

Cuando las probabilidades son colocadas de forma matricial se obtiene lo que se denomina matriz de probabilidades de transición o simplemente matriz de transición  $\mathbf{P}$ , la cual cumple con las siguientes características:

1.  $p_{i,j} \geq 0$ ; para todo  $i, j$ ; y
2.  $\sum_{\forall j} p_{i,j} = 1$ ; para todo  $i$ .

Si en el tiempo  $t$  el proceso de Markov se encuentra en el estado  $i$  la probabilidad de que  $u$  pasos después se encuentre en el estado  $j$  es

$$P\{X_{u+t} = j / X_t = i\} = P\{X_u = j / X_0 = i\} \text{ (estacionaria)}$$

$$=p_{i,j}^{(u)} \text{ (elemento } i,j \text{ de la matriz } P_u)$$

Si  $\mathbf{a}' = (a_0, a_1, \dots, a_m)$  es la distribución inicial de la cadena de Markov (con  $m$  estados), entonces la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $j$  en el tiempo  $t$  es:  $P\{X_t = j\} =$  elemento  $j$  del vector  $\mathbf{a}' P^{(t)}$ ;  $p_i^{(0)}$  es la probabilidad de que el sistema ocupe inicialmente el estado  $E_i$ , de modo que  $\sum_{i=1}^m p_i^{(0)} = 1$ . Así mismo  $p_j^{(1)}$  a la probabilidad de alcanzar  $E_j$  en un solo paso, entonces, por el teorema de probabilidad total  $p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^m p_i^{(0)} p_{i,j}$ .

Ya que  $p_i^{(0)}$  y  $p_j^{(1)}$  pueden ser expresados de manera vectorial (Marín, 2012) como

$$P^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)}) \text{ y}$$

$$P^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_m^{(1)});$$

se tiene que

$$P^{(1)} = [p_j^{(1)}] = [\sum_{i=1}^m p_i^{(0)} p_{i,j}] = P^{(0)} \mathbf{T}$$

siendo  $\mathbf{T}$  la matriz de transición.

Una cadena de Markov es irreducible si cumple cualquiera de las siguientes condiciones (equivalentes entre sí):

- Desde cualquier estado de  $E$  se puede acceder a cualquier otro.
- Todos los estados se comunican entre sí.
- $C(x)=E$  para algún  $x \in E$ .
- $C(x)=E$  para todo  $x \in E$ .
- El único conjunto cerrado es el total.

Si existe un estado en el cual se puede entrar pero no se puede volver a salir, a este estado se le denomina absorbente. Una cadena de Markov con espacio de estados finito se dice absorbente si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- La cadena tiene al menos un estado absorbente.
- De cualquier estado no absorbente se accede a algún estado absorbente.

Trasladando esto al control estadístico de procesos; si denotamos como  $A$  al conjunto de todos los estados absorbentes, su complemento  $D$  es la submatriz que contiene las probabilidades de

ir de un estado a otro, sin que se emita una señal de fuera de control; de tal manera que la matriz de transición siempre se puede llevar a la forma:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son submatrices estocásticas de  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  corresponde a los estados contenidos en el conjunto D,  $\mathbf{R}$  una matriz suplementaria,  $\mathbf{0}$  es la matriz nula e  $\mathbf{I}$  la matriz identidad. Bajo estas condiciones y utilizando estos elementos, se puede obtener la matriz  $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$ , y con ella el valor de ARL del gráfico de control que tenga algún estado inicial  $i$ , con  $\mathbf{S}$  como vector de probabilidades iniciales ( $\sum_j \mathbf{S}_j = 1$ ), entonces:  $E(\text{RL})_i = \text{ARL}_i = \mathbf{S}' (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$  (Brooks y Evans, 1972). De esta forma, se puede obtener el ARL para los gráficos propuestos, a través de

$$\text{ARL} = \mathbf{b}' (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

siendo  $\mathbf{b}$  el vector correspondiente al estado inicial del proceso markoviano, el cual se detalla más adelante, manteniendo la descripción de las matrices según el párrafo anterior.

A través de este diseño, se evalúa el desempeño de los gráficos de control propuestos en el capítulo 4 de la presente tesis.

Brook y Evans (1972) presentaron una aproximación de la cadena de Markov para analizar el desempeño de un gráfico de control CUSUM. Runger y Prabhu (1996) mostraron un modelo



de cadena de Markov para un gráfico de control MEWMA. Lucas y Saccucci (1990) utilizaron cadenas de Markov para realizar una evaluación sobre las propiedades y ventajas de un gráfico de control EWMA. Aparisi (2001) aplica cadenas de Markov cuando realiza una modificación al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, donde el intervalo de tiempo entre muestreo es variable dependiendo de los valores que tome el estadístico. Faraz (2006) realizó un estudio de gráficos  $T^2$  de Hotelling con DWL el cual es una extensión de VSI y de VSS, asumiendo que la longitud del tiempo del proceso bajo control tiene función de distribución de probabilidad exponencial y utilizando cadenas de Markov para obtener las propiedades del gráfico  $T^2$ . El mismo Faraz (2009) realizó una unificación y algunas correcciones a los enfoques de la cadena de Markov para el desarrollo de gráficos de control con rango variable de muestreo, lo que dio como resultado mayor certeza a sus resultados, haciendo una revisión de los gráficos VSS, VSI, VSSVSI y AATS. Lee y Khoo (2006) propusieron una modificación a la forma de cálculo de la función de distribución de la longitud de rachas (RL por sus siglas en inglés) para un diseño óptimo del gráfico de control MCUSUM, tomando como base el trabajo de Brook y Evans (1972) donde el ARL zero-state es obtenido para un gráfico de control modelado a través de una cadena de Markov.

### **2.3.2 Métodos heurísticos de optimización de parámetros: Algoritmos genéticos (GA)**

Es necesario el uso de métodos heurísticos para la obtención de los parámetros de un gráfico de control optimizado debido a la complejidad del procedimiento. A continuación se revisa la base teórica de los algoritmos genéticos y su aplicación en la optimización de gráficos de control.

El diccionario de la Real Academia de la Lengua, define Heurística como, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc. Es decir, es la forma de resolver problemas de forma práctica o informal. En tanto el método heurístico es un enfoque que utiliza al máximo la estructura del problema a resolver, a la vez que utiliza un conjunto de reglas empíricas-rationales, para obtener una solución muy cercana a la óptima.

Para introducir al lector en el tema de los algoritmos genéticos utilizados en la metodología heurística, hay que mencionar la teoría de Charles Darwin, publicada en su libro “El origen de las especies” escrito en 1859, la cual propone que las especies tienen su origen a través de la selección natural o la preservación de las razas favorecidas en la lucha por la vida. Las especies con características genéticas favorables para su entorno son las seleccionadas para la procreación y la obtención de descendencia con mejores condiciones para su supervivencia. Observando este comportamiento en la naturaleza investigadores del área de programación, a partir de la década de los 50's del siglo pasado, adoptaron este tipo de comportamiento y lo utilizaron como reglas empíricas-rationales para construir novedosos algoritmos.

A esta nueva metodología de programación la denominaron “computación evolutiva” la cual fue diseñada principalmente como una herramienta para la optimización. La idea central es emular la teoría Darwinista para “evolucionar” una población de candidatos a ser solución de un problema conocido, utilizando operadores inspirados en la selección natural y la variación genética natural. Mitchell (1998) describe algunas de las principales aportaciones en este tema:

- Rechenberg a inicio de los 70's introdujo las “estrategias evolutivas”, trabajo que fue continuado por Schwefel (1975, 1977)
- Fogel, Owens y Walsh (1966) fueron los creadores de la “programación evolutiva”
- Box (1957), Friedman (1959), Bledsoe (1961), Bremermann (1962), y Reed, Toombs y Baricelli (1967) desarrollaron su trabajo en los algoritmos para la optimización y el aprendizaje inspirados en la evolución.

La primera vez que se mencionó el término algoritmos genéticos y la primera publicación sobre una aplicación del mismo se deben a Bagley (1967) que diseñó algoritmos genéticos para buscar conjuntos de parámetros en funciones de evaluación de juegos. Sin embargo, es a John Holland a quien se le ha considerado creador de los GA. Holland desarrolló junto a sus alumnos y colegas, durante las décadas de 1960 y 1970 los principales estudios realizados sobre algoritmos genéticos.

Los GA son procesos estructurados que tienen la finalidad de realizar búsqueda. Utilizan como base de su metodología los mecanismos de selección y genética natural. Combinan la supervivencia de los más compatibles (individuos mejor adaptados) entre las estructuras de cadenas (población), con una estructura de información previamente aleatorizada (mecanismos de selección), la cual es intercambiada (reproducción y mutación) para obtener nuevos individuos con mejores características de compatibilidad o de adaptación.

Siguiendo los patrones descritos se pueden construir algoritmos de búsqueda con algunas de las capacidades de innovación de la búsqueda humana a los que se denominan algoritmos genéticos.

Los principales objetivos que se desean alcanzar con la aplicación de los GA's son:

- explicar de forma rigurosa el proceso adaptativo de los sistemas naturales abstrayendo el problema inicial.
- diseñar sistemas artificiales que sean capaces de emular los mecanismos más importantes de los sistemas naturales.

Esto se realiza a partir de una población aleatoria inicial se obtiene una siguiente generación (nueva población) de “criaturas artificiales” utilizando las partes más adecuadas de la información genética ofrecida por el progenitor (elementos más aptos de la población). Estas

características vendrán representadas, generalmente, en forma de bits. Este complejo proceso aprovecha de manera eficiente la información histórica, con el fin de optimizar la búsqueda y su propio desempeño.

Algunas de las ventajas del uso de los GA son:

- i) Manejo de muchos parámetros de forma simultánea;
- ii) No requiere de información previa del problema;
- iii) Es poco sensible a máximos locales;
- iv) Trabaja con varias soluciones de forma simultánea;

Algunas desventajas son:

- i) Puede tardar en converger a la solución;
- ii) Es sensible a la presencia de un individuo muy apto lo que podría hacer que convergiera prematuramente;
- iii) Es compleja la definición del problema y su representación;

Los GA tienen elementos básicos, los cuales son denominados de forma similar que en la terminología biológica. Estos son:

- Individuo, una posible solución al problema planteado;
- Población, es un conjunto de individuos/ posibles soluciones;
- Gen, es una representación de un parámetro específico del individuo;
- Cromosoma, es la agrupación de genes de un individuo, que puede ser representado como una ristra o cadena de valores;
- Genotipo, composición o estructura genética de un individuo;
- Fenotipo, conjunto de parámetros representando un cromosoma en particular, el cual da información sobre su capacidad de adaptación al medio;
- Función de evaluación/ adaptación, función que mide la capacidad de un individuo para adaptarse al problema, utilizando la información provista por el cromosoma de un individuo;
- Fase de reproducción, etapa en la que los mejores individuos son seleccionados para su cruzamiento;

- Selección de los padres, es una selección aleatoria, donde se evalúan las características de los individuos; y se les otorga una probabilidad de ser seleccionado, la cual dependerá del resultado obtenido de la evaluación de su cromosoma en la función de la evaluación;
- Operador de cruce, toma dos padres de entre los que tienen mejores características; inicialmente determina de forma aleatoria una cantidad de los primeros elementos de la ristra que representa el cromosoma de cada padre, con la finalidad de dividirlo en dos subristras; luego combinando las dos subristras, de cada padre, se crean dos nuevos descendientes. El operador de cruce se aplica de forma aleatoria a los pares de padres seleccionados, con probabilidad de ocurrencia mayor que 0.5.
- Operador de mutación, es aplicado a los descendientes. Se selecciona de forma aleatoria un gen y se cambia (muta), con una baja probabilidad de ocurrencia. Su aplicación mejora la búsqueda y la convergencia del AG. Entendiéndose por convergencia cuando al menos el 95% de los individuos de una población, comparten un mismo valor en un gen determinado.

Cada individuo de la población representa una posible solución al problema, el cual debe ser reconocido y evaluado por el algoritmo. El reconocimiento se lo realiza cuando el individuo es codificado para su reproducción y mutación, y se lo decodifica para realizar su evaluación en la función a optimizar.

Ampliando lo anotado en los párrafos anteriores, a continuación se detallan los operadores más relevantes en la aplicación de GA.

### *Codificación de variables*

Para iniciar el trabajo con GA, se debe parametrizar el problema a través de una cadena de variables, las cuales serán quienes contengan la información del cromosoma; esta información se puede codificar de forma:

- i) binaria; cada cromosoma es una cadena de bits (1 o 0), es la forma original de codificación y por tanto la más utilizada aunque no es práctica en todos los casos;
- ii) numérica; se utilizan cadenas de números que representan un número en una secuencia; generalmente se utiliza en problemas en los que hay que ordenar algo;
- iii) por valor directo; es utilizado en problemas que requieren del uso de valores complicados (ciertos números reales), cuya codificación con números binarios sería muy complejo.

En la presente tesis para la codificación de las variables se utilizó codificación binaria, sobre la base de los resultados obtenidos anteriormente por el grupo de investigación liderado por el



Dr. Aparisi, quienes observaron previamente que el rendimiento del algoritmo era superior en comparación con los otros métodos de codificación.

### *Selección de los individuos*

Como sostiene la teoría de Darwin, solo los individuos más aptos o mejor adaptados son los que sobreviven. Por este motivo es necesario tener un operador para la selección de los mejores individuos en la población. Los operadores más utilizados son:

- i) Selección por ruleta; se crea una ruleta con los cromosomas de cada generación, donde cada uno de ellos tendrá su parte dependiendo de su puntuación; así el cromosoma con mayor puntuación (más apto), tendrá mayor probabilidad de ser seleccionada.
- ii) Selección por rango; a cada cromosoma se le asigna un rango numérico, basado en su aptitud, utilizando este rango se realiza la selección.
- iii) Selección elitista: copia los mejores cromosomas para evitar su pérdida durante la selección.
- iv) Selección por torneo: se escogen al azar un determinado número de individuos y se reproduce el más apto.

Los programas desarrollados en esta tesis ofrecen la opción de utilizar selección por ruleta y selección por torneo, en este último caso, se ofrece la posibilidad de que el número de participantes en el torneo sean 2, 4 o 10.

#### *Operadores de cruzamiento (crossover)*

Una vez seleccionados los individuos, se debe realizar una operación de cruzamiento entre pares de los individuos seleccionados. De esta manera se realiza la aportación de la información de los padres a sus descendientes, con el fin de mejorar la aptitud de la nueva generación de individuos en la población. Los operadores más utilizados son:

- i) Cruzamiento de 1 punto: los dos cromosomas son cortados en un punto específico, luego de ello un progenitor aporta (copia) la primera parte de su cromosoma al del nuevo individuo y el otro progenitor aporta la segunda parte del cromosoma.
- ii) Cruzamiento de 2 puntos: es igual que al de un punto, diferenciándose que ahora serán dos puntos de cruce y no solo uno. Un progenitor aporta dos secciones (inicial y final) del cromosoma al descendiente, mientras el segundo progenitor aporta solo una sección (media).
- iii) Cruzamiento uniforme: los padres aportan de forma aleatoria cada uno de los genes a su descendiente.

- iv) Cruzamiento aritmético: los padres se combinan utilizando alguna regla aritmética para aportar la información al descendiente.

Los programas desarrollados en esta tesis ofrecen la opción de utilizar como tipos de cruzamiento: 1 punto, 2 puntos y uniforme. Adicionalmente se ofrece la posibilidad de seleccionar la probabilidad de cruzamiento (0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99).

#### *Operador de mutación*

En la naturaleza se dan también cambios inespecíficos en los genes de los elementos de la población. A esta acción se la denomina mutación. Esta acción incrementa la variabilidad genética de la población y se realiza a través de una probabilidad de mutación previamente establecida. Estas probabilidades suelen ser bajas para evitar hacer del GA una búsqueda aleatoria.

Las probabilidades de mutación que los programas realizados ofrecen al usuario son: 0.01, 0.03, 0.05, 0.10, 0.15.

Otras opciones disponibles en los programas son: tamaño de la población; reinicio del algoritmo si al menos un porcentaje de la población determinado por el usuario, se repite en la siguiente generación; y el criterio de parada del algoritmo (determinado por el usuario) a través de un número de evaluaciones o de un número de generaciones.

### *Función de adaptación o fitness*

Para saber la aptitud de los individuos y cuál de ellos son los seleccionados como mejores de la población, hace falta evaluar a cada uno de ellos. Esto se realiza a través de la función de adaptación o fitness. La regla general para la obtención de una buena función fitness es que debe mostrar el valor del individuo de una forma cercana a la realidad. Para evitar la presencia de individuos no válidos pero con buen valor en la función fitness se debe restringir el espacio de búsqueda.

Esta tesis utiliza un espacio restringido para la búsqueda de los valores óptimos de los parámetros. Los individuos que no cumplen con las restricciones, no son considerados. La fitness utilizada en esta tesis pondera la aportación que hace cada individuo, penalizando según la distancia entre el ARL bajo control objetivo y el ARL bajo control obtenido con el individuo. Así mismo penaliza con el valor del ARL fuera de control. De esta manera se asegura que mientras más distante esté el  $ARL_0$  obtenido del deseado y más grande el  $ARL_1$  conseguido, dicho individuo tendrá menor valor de la función fitness.

Dado que los GA son muy utilizados para realizar optimización y que los gráficos de control requieren de la optimización de sus parámetros, este es un método ideal y muy utilizado en la construcción de nuevos gráficos de control, como los propuestos en esta tesis. Algunas de estas aplicaciones fueron las realizadas por Celano y Fichera (1999), He, et ál, (2002), Aparisi,

et ál, (2001, 2004, 2007, 2010, 2011), Lee y Khoo (2006), Champs y Aparisi (2008), entre otros, que diseñaron gráficos de control aplicando GA.

### **2.3.3 Obtención de ARL's a través de simulación**

Fue necesaria la aplicación de simulación para la obtención de ARLs como técnica de validación de los resultados obtenidos y de esa manera comprobar los ARLs conseguidos a través de las otras metodologías aplicadas en esta tesis. A continuación se revisan las bases teóricas del tema.

Estadísticamente la simulación es una técnica utilizada para realizar experimentos *in silico* (en computadora), utilizando uno o un conjunto de modelos probabilísticos, para obtener soluciones aproximadas a preguntas sobre temas estocásticos.

La simulación consta de los siguientes pasos:

- Estudiar el problema e identificar los objetivos y sus resultados esperados;
- Definir y construir el modelo con el cual se obtendrán los resultados esperados;
- Definir claramente los elementos de entrada del modelo;

- Implementación del modelo *in silico*;
- Comprobar que el modelo obtenido cumple con los requisitos iniciales.

Existen diferentes métodos de simulación, el más utilizado es el método Monte Carlo, desarrollado por John von Neumann y S. M. Ulam, durante el proyecto Manhattan. Otros métodos utilizados son: Método de la transformada inversa, Método de aceptación-rechazo, Método de composición, Método de convolución.

El caso que interesa es la generación de variables aleatorias normales multivariadas, por ello se debe recordar que si  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , entonces  $X = \sigma Z + \mu$ , donde  $Z \sim N(0, 1)$ . Por otro lado; si se simulan  $n$  variables aleatorias independientes con distribución  $U[0, 1]$ , y  $S = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ , por el teorema del límite central, cuando  $n \rightarrow \infty$ , la distribución de  $S$  tiende a una distribución Normal. De esta manera se podría conseguir variables aleatorias normales, sin embargo requiere de un mayor uso de recursos para poder obtener los resultados esperados.

Otra manera de simular las variables aleatorias normales es haciendo uso de la convergencia en distribución de la variable aleatoria Gamma a una distribución Normal de la siguiente manera: sea  $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ , si  $\alpha$  toma valores elevados y  $\beta$  toma valores muy pequeños  $Y \rightarrow N(\alpha\beta, \alpha\beta^2)$ . De esta manera, se pueden obtener variables aleatorias normales utilizando menores recursos.

Una forma muy utilizada para obtener variables aleatorias  $N(0, 1)$ , es a través del método de transformación en dos dimensiones, generando dos variables  $U[0, 1]$ . Se obtienen dos variables normales tipificadas de la siguiente manera:  $Z_1 = \sqrt{-2 \log(u_1)} \text{Cos}(2\pi u_2)$  y  $Z_2 = \sqrt{-2 \log(u_1)} \text{Sen}(2\pi u_2)$ .

Este último método se utilizó para el desarrollo de los programas que simulan las condiciones del proceso y calculan el ARL a través de un elevado número de longitudes de racha de un gráfico de control con características inicialmente especificadas en los elementos de entrada.

Con el fin de estudiar las características de dicho gráfico, se simularon variables aleatorias normales haciendo uso de la función  $\text{RandG}(\mu, \sigma)$  de la librería Math, la cual genera números aleatorios normales con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ .

La simulación se lleva a cabo considerando que las  $p$  o  $p_1$  variables monitorizadas son variables aleatorias con distribución conjunta  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , donde  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector de promedios y  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matriz de covarianzas, respectivamente.

Dado que para optimizar el gráfico, el usuario sólo necesita especificar las distancias de Mahalanobis  $d_1$  y  $d$  y no la dirección del desplazamiento real en el espacio  $p$ -dimensional, y que ciertos gráficos multivariantes direccionales (Zou y Tsung, 2008, Li et al 2012), que están optimizados para detectar cambios en un sentido de giro específico, por lo general funcionan mal para cambios en direcciones diferentes a las especificadas, los simuladores de los gráficos

de control propuestos, se desarrollaron utilizando condiciones especiales del vector de promedios y de la matriz de covarianza del estado bajo control.

La finalidad es obtener un cambio específico  $d$ , utilizando la distancia de Mahalanobis, de tal forma que  $\lambda = nd^2 = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$ .

Aplicando lo realizado por Lee y Khoo (2006) para facilitar la interpretación de los resultados de la simulación, se asume que  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$ , y que  $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$ , de esta manera la distancia  $d$  está afectada básicamente por el desplazamiento  $\delta_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) que exista en cada una de las  $p$  variables del vector  $\boldsymbol{\mu}_1$ . El desplazamiento deseado se obtiene de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \dots \\ \mu_{1p} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$



Cuando  $\boldsymbol{\mu}_1$  es el vector de promedios de un estado fuera de control del proceso; y  $\mu_{1j} = 0 + \delta_j$ , ( $j = 1, \dots, p$ ); es decir, se asume que cada componente de  $\boldsymbol{\mu}_1$  es igual al promedio desplazado de su respectiva variable.

Dado que  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{I}$ , y que

$$(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \delta_p \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)} = \sqrt{\delta_1^2 + \dots + \delta_p^2}$$

Asumiendo que todos los  $\delta_i$  son iguales,  $d = \sqrt{\delta^2 + \dots + \delta^2} = \delta\sqrt{p}$ , por tanto  $\delta = \frac{d}{\sqrt{p}}$ .

Lo siguiente fue generar una matriz de datos de dimensión  $p$  filas y  $n$  columnas, las cuales contenían variables aleatorias normales con media cero y varianza unitaria. A cada valor aleatorio generado, se le sumó el valor de  $\delta$ ; con ello se logró generar variables aleatorias normales, las cuales contaban con un desplazamiento  $\delta$  en el promedio de cada variable, manteniendo su varianza unitaria, lo que a su vez aseguró la obtención de una distancia  $d$  de Mahalanobis, tal como se lo requería para la simulación. Este fue el procedimiento básico utilizado para obtener la variable aleatoria  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

Los datos obtenidos, fueron analizados utilizando la prueba de normalidad de Shapiro-Wilks, para cada variable generada de forma individual, debido a que inicialmente se asumió que la matriz de covarianzas  $\Sigma = \mathbf{I}$ .

Una vez obtenida la matriz de datos con la distancia  $d$  requerida se procedió a calcular el estadístico  $T^2 = n(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)$ , manteniendo las mismas consideraciones antes mencionadas sobre el vector de promedios y la matriz de covarianza del estado bajo control del proceso.

Finalmente se realizó un bucle, en el cual se determinó el número de rachas a ser conseguidas, para luego calcular el promedio de su longitud y presentar el ARL requerido.

#### *Elección del número de simulaciones*

Si se considera la posibilidad de evaluar todos y cada uno de los valores que pueda tomar cada parámetro del gráfico de control y con ello obtener el mejor ARL, este proceso podría demorar muchas horas de evaluación. Esta demora promueve la aplicación de simulación y de los métodos heurísticos vistos en el apartado 2.3.2, para reducir el tiempo de evaluación.

La metodología utilizada calcula el promedio de la longitud de rachas (ARL) luego de obtener  $N$  valores de longitud de rachas (LR) o los puntos previos hasta la aparición de una señal de fuera de control. Mientras mayor sea  $N$ , mejor será la estimación del ARL.

Tal como se indicó en la sección 2.2.3, el  $RL \sim \text{Geométrica}(p)$ ; si  $RL'$  es un valor específico de  $RL$ , se tiene lo siguiente:

$$P(RL = RL') = (1-p)^{RL'-1}p$$

$$E(RL) = 1/p = ARL$$

$$\text{VAR}(RL) = (1-p)/p^2$$

$$\sigma_{RL} = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \frac{1}{p}\sqrt{1-p} = ARL\sqrt{1-p}$$

Dado que el valor de  $p$  suele ser pequeño, el valor del  $ARL$  se puede aproximar a la desviación típica de la longitud de rachas,  $\sigma_{RL} \cong ARL$ .

Considerando el peor de los casos para  $\sigma$ , asumiendo que  $ARL'$  es un valor estimado de  $ARL$  y aplicando el teorema del límite central debido a que  $N$  toma valores muy grandes, se tiene

$$\sigma_{ARL'} = \frac{ARL}{\sqrt{N}}$$

Si se desea una probabilidad superior al 95% de que la diferencia entre  $ARL'$  y  $ARL$  sea menor que un valor  $k$  específico (0.02), se tiene

$$P(|ARL' - ARL| < 0.02 * ARL) \geq 0.95$$

Resolviendo esta ecuación se tiene que N debe tomar valores mayores o iguales a 9604 ( $N \geq 9604$ ); es decir, se deberán hacer un número superior a 9600 simulaciones para que el ARL estimado no difiera en más del 2% del valor real del ARL.

Bajo estas consideraciones y para ser más precisos en las estimaciones del ARL, se trabajaron con tamaños de  $N > 40000$ .

---

## **CAPÍTULO 3**

---

### **DISEÑO Y OPTIMIZACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL CON DOBLE DIMENSIÓN (DDT<sup>2</sup>)**

### 3.1 Introducción

El operario que desea monitorizar varias características de calidad de un proceso puede decidirse por un esquema basado en el control de cada variable con un gráfico de control univariante (esquema múltiple) o puede monitorizar todas las variables empleando un gráfico de control multivariante (enfoque multivariado).

Tal como se vio en el capítulo 2 de esta tesis, el primer gráfico de control multivariante fue el gráfico de control  $T^2$  (Hotelling, 1947), que tiene en cuenta la correlación entre las variables y es por tanto, en muchos casos más adecuado que el empleo de un gráfico separado univariado para cada variable. Aparisi et al. (2010) realiza una comparación entre el uso de varios esquemas univariados y el esquema multivariado. El gráfico  $T^2$  sigue siendo, un esquema básico que ocupa en el contexto multivariante del SPC, un lugar análogo al del gráfico de Shewhart en el contexto univariado del SPC. Más información de esquemas multivariantes de control de proceso se puede encontrar en Lowry y Montgomery (1995), Bersimis et al. (2006) o Montgomery (2012) capítulo 5.

Cuando un proceso tiene varias variables correlacionadas a ser monitorizadas puede ocurrir que algunas variables son de bajo costo, rápido y fácil de medir, y las otras variables son costosas o difíciles de medir (sin mencionar la posibilidad de que la medición sea destructiva). Con esta motivación, en este capítulo se propone y analiza un nuevo esquema de muestreo para ser utilizado con el gráfico de control  $T^2$ .

Este esquema es análogo e inspirado en los procedimientos de muestreo doble (double-sampling), analizados en el capítulo dos de esta tesis, que apuntan a una mejor asignación de esfuerzo de muestreo. Inicialmente utilizados para el muestreo de aceptación por lotes (ver, Duncan, 1992; Montgomery, 2012), el procedimiento de doble muestreo se ha ampliado para gráficos de control (Croasdale, 1974; Daudin, 1992; Steiner, 1999; Costa y Magalhães, 2005; Rodriguez et al, 2011; Champ y Aparisi, 2008).

En este capítulo se muestra el desarrollo de un gráfico de control de doble dimensión  $T^2$  (DDT<sup>2</sup>), que es análogo al gráfico de control de doble muestreo (DS). En cada tiempo de muestreo, las  $p_1$  variables que son baratas o rápidas de medir se miden y se calcula el estadístico  $T_{p_1}^2$ . Si su valor es inferior a un umbral dado (denominado límite de advertencia, como con el gráfico DS), el proceso se considera bajo control. Si su valor es demasiado alto (por encima del límite de control) el proceso es declarado fuera de control. Si su valor está entre el límite de advertencia y el límite de control, se miden las  $p_2$  variables restantes (siendo  $p = p_1 + p_2$ ) y el estadístico global  $T_p^2$  se compara con el límite de control apropiado (hay diferentes límites de control para el conjunto de variables  $p_1$  de bajo costo y para el conjunto total de variables  $p$ ).

Esto coincide con el bien conocido procedimiento de doble muestreo excepto por el hecho de que las mediciones adicionales son de diferentes variables en vez de constituir una muestra complementaria de una variable única.

Por lo tanto, si se emplea el gráfico de control DDT<sup>2</sup> las variables  $p_2$  que son difíciles o costosas de medir, se miden sólo cuando existe la necesidad de adquirir más información. De esta manera, el coste de muestreo se reduce en comparación con el procedimiento de muestrear siempre todas las  $p$  variables para calcular la estadística  $T_p^2$ . Sin embargo, la potencia del gráfico propuesto para detectar cambios en el proceso es mayor que la potencia de un gráfico  $T^2$  que utiliza sólo el conjunto de  $p_1$  variables que son fáciles y/o baratas de medir, puesto que la información proporcionada por las  $p_2$  variables - que son caras o difíciles de medir - cuando se miden, aumenta significativamente la capacidad de detectar cambios en el proceso.

La sección 3.2 describe las generalidades del gráfico de control propuesto. En la sección 3.3 se presenta el modelo matemático para el cálculo de los indicadores de desempeño; la sección 3.4 indica la forma de validar los resultados obtenidos, utilizando simulación. La sección 3.5 describe la optimización de su diseño, el cual se logra con la ayuda de un software amigable desarrollado como resultado de la tesis. La sección 3.6 compara su rendimiento con el del gráfico estándar  $T^2$ . La sección 3.7 muestra el respectivo análisis de sensibilidad. Por último, en la sección 3.8 se presentan las conclusiones del capítulo.

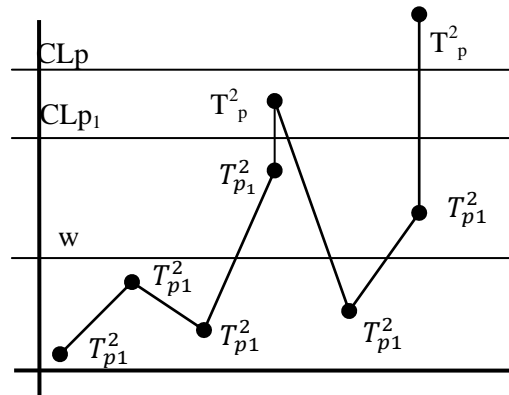


### 3.2 Generalidades del gráfico de control de Doble Dimensión $T^2$ (DDT<sup>2</sup>)

El gráfico de control estándar  $T^2$  consiste en periódicamente tomar una muestra de tamaño  $n$  del proceso con el fin de obtener el vector de media de la muestra  $\bar{X}$ , para todas las  $p$  variables a ser monitorizadas. El estadístico  $T^2$  se calcula como  $T^2 = n(\bar{X} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{X} - \boldsymbol{\mu}_0)$  donde  $\boldsymbol{\mu}_0' = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})$  es el vector de promedios y  $\boldsymbol{\Sigma}$  es la matriz de covarianza del estado bajo control del vector  $\mathbf{X}$ . Este estadístico  $T^2$  se distribuye como una variable aleatoria chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad cuando los parámetros del proceso son conocidos y el proceso está bajo control ( $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ ). Se busca el límite de control (CL) con el fin de obtener una probabilidad  $\alpha$  de que el estadístico  $T^2$  caiga fuera de este límite de control. La distribución de  $T^2$  cuando el proceso está fuera de control,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$ , tiene una distribución chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = nd^2 = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$  donde  $d$  es la distancia de Mahalanobis de  $\boldsymbol{\mu}_1$  con respecto a  $\boldsymbol{\mu}_0$ .

La Figura 3.1 muestra el gráfico de Doble Dimensión  $T^2$  (DDT<sup>2</sup>), el cual tiene un límite de alerta  $w$  y dos límites de control,  $CL_{p1}$  y  $CL_p$ . Tal como se explicó en el apartado 3.1 de esta tesis, la monitorización consiste en muestrear  $n$  ítems del proceso y medir en primera instancia solo el subgrupo formado las  $p_1$  variables que son fáciles y/o baratas de medir. Con esta información, se calcula y grafica el estadístico  $T_{p1}^2$  de Hotelling sobre el gráfico de control. Si

$T_{p_1}^2 < w$  no se toma ninguna acción futura. Si  $T_{p_1}^2 \geq CL_{p_1}$  el proceso es considerado fuera de control.



**Figura 3.1. El gráfico de control  $DDT^2$ .**

Por otra parte, la segunda etapa del procedimiento se hace necesaria cuando  $w \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}$ , como el valor del estadístico  $T_{p_1}^2$  es alto, pero no lo suficiente como para considerar que el proceso está fuera de control. Por tanto, debe ser analizada más información estadística de la muestra. Así, las  $p_2$  variables restantes ( $p_2 = p - p_1$ ) se miden a partir de las mismas unidades de la muestra de tamaño  $n$  antes considerada y todas las mediciones de las  $p$  variables de las  $n$  unidades se emplean para calcular el estadístico  $T_p^2$ . Si  $T_p^2 > CL_p$  el proceso se considera fuera de control, de lo contrario se considera bajo control.

Un caso especial analizado es cuando  $p_1 = 1$ , es decir, el seguimiento se basa normalmente en el muestreo de una variable, y cuando sea necesario, más variables se muestrean y se

combinan. Con el fin de tener un gráfico de control más fácil, con un eje vertical común para los dos estadísticos que se trazan, ambos con un valor mínimo de 0, se propone que el estadístico para  $p_1 = 1$  sea  $T_{p_1}^2 = n(X - \mu_0)^2 / \sigma_0^2$ , siendo  $\mu_0$  y  $\sigma_0^2$  el promedio y la varianza de la variable en un estado bajo control. En este caso la distancia  $d_{p_1}$ , entre el promedio desplazado y el promedio bajo control del proceso, es el valor absoluto del cambio normalizado, es decir,  $d_{p_1} = |\mu_1 - \mu_0| / \sigma_0$ .

En este capítulo se optimizan los valores de los parámetros ( $w$ ,  $CL_{p_1}$  y  $CL_p$ ) del gráfico DDT<sup>2</sup>. Como se muestra más adelante, en muchos casos el valor de  $CL_{p_1}$  se puede tomar como infinito, y el gráfico resultante es más fácil de utilizar, con un único límite de control, sin pérdida notable en el rendimiento.

### 3.3 Medidas de rendimiento

Para este gráfico de control DDT<sup>2</sup>, se emplean dos medidas de rendimiento, para evaluar el rendimiento en comparación con el gráfico estándar T<sup>2</sup>:

- (i) el coste medio por muestra cuando el proceso está bajo control, y
- (ii) el número promedio de muestras necesarias para detectar un cambio en el

proceso, ARL.

Ambos indicadores se describen a continuación.

### *Coste medio por muestra*

El costo del muestreo es una función de la proporción de veces que todas las variables son medidas. Sea  $C_{p_1}$  el costo del muestreo cuando sólo el conjunto de variables  $p_1$  se mide. El costo de muestrear las variables caras  $C_{p_2}$  es por definición  $C_{p_2} > C_{p_1}$ . Sea  $C_{p_2} = aC_{p_1}$ , con  $a > 1$ . Por lo tanto, el coste total cuando todas las variables se miden, es  $C_p = C_{p_1} + C_{p_2} = C_{p_1} \cdot (1 + a)$ .

Teniendo en cuenta una combinación de los parámetros ( $w$ ,  $CL_{p_1}$ ,  $CL_p$ ) del gráfico DDT<sup>2</sup>, el coste promedio de un muestreo (ACS) del gráfico de control DDT<sup>2</sup>,  $ACS_{DDT^2}$  es:

$$ACS_{DDT^2} = \%p_1 \cdot C_{p_1} + \%p \cdot C_p = \%p_1 \cdot C_{p_1} + \%p \cdot [C_{p_1} \cdot (1 + a)]$$

$$ACS_{DDT^2} = C_{p_1} \cdot [(\%p_1 + \%p) + a \cdot \%p]$$

$$ACS_{DDT^2} = C_{p_1} \cdot (1 + a \cdot \%p) \tag{3.1}$$

Donde  $\%p = F_{\chi^2_{p_1}}(CL_{p_1}) - F_{\chi^2_{p_1}}(w)$ , es la proporción de veces que todas las variables se

miden cuando el proceso está bajo control, siendo  $F_{\chi^2_{p_1}}$  la función de distribución chi-cuadrado centralizada con  $p_1$  grados de libertad.

El gráfico de control estándar de  $T^2$  cuando se utiliza y se mide siempre el conjunto de  $p$  variables, tiene un costo de muestreo de:

$$CS_{T_p^2} = C_{p1} \cdot (1 + a) \quad (3.2)$$

Por lo tanto, la relación entre el coste de muestreo del gráfico  $DDT^2$  y el coste de muestreo del gráfico estándar  $T^2$  es igual a:

$$\frac{ACS_{DDT^2}}{CS_{T_p^2}} = \frac{1+a \cdot \%p}{1+a} \quad (3.3)$$

El coste medio de muestreo cuando el proceso está fuera de control (que es mayor que cuando el proceso está bajo control) no es considerado por los siguientes motivos:

- (i) cuando el proceso está fuera de control, la prioridad del usuario es una detección rápida de este estado, lo que evita o reduce casi a cero el coste de producción no conforme o elementos de baja calidad, y el aumento en la probabilidad de pasar a la segunda etapa de muestreo cuando el proceso sale de control es precisamente el mecanismo por el cual el gráfico  $DDT^2$  aumenta su probabilidad de señal;

- (ii) el efecto del costo promedio de muestreo del estado fuera de control en el costo total de la muestra es variable y difícil de cuantificar sintéticamente, ya que depende del ARL fuera de control, el tamaño del cambio (que no siempre será el mismo para el cual se ha optimizado el gráfico), y la frecuencia en la que el proceso esté fuera de control;
- (iii) se supone que el proceso permanece bajo control la mayor cantidad de tiempo, por tanto, este costo no es relevante en comparación con el coste de muestreo bajo control y también en vista de la importancia de la detección rápida de las causas especiales; se debe tener en cuenta, que este coste será menor que el coste de muestreo de un gráfico estándar  $T^2$  para todas las  $p$  variables.

*Número promedio de muestras necesarias para detectar un cambio en el proceso, ARL*

La segunda medida de rendimiento es el promedio de la longitud de rachas (ARL), que es el número esperado de muestras hasta que una señal de fuera de control es señalada por el gráfico de control. Esta es la medida más común del rendimiento estadístico y por tanto es adoptada en esta tesis.

Cuando los puntos marcados en el gráfico son independientes, el ARL es simplemente el inverso de la probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites de control. Para el gráfico de control estándar  $T^2$ , cuando el proceso está bajo control es:

$$ARL = \frac{1}{\alpha}$$

donde  $\alpha$  es la probabilidad de falsa alarma. Cuando el proceso está fuera de control

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - P[\chi_p^2(\lambda) < CL]}$$

donde  $\beta$  es la probabilidad de error Tipo II y  $\chi_p^2(\lambda)$  es la función de distribución chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = n \cdot d^2$ , y  $d$  es la distancia de Mahalanobis. Por lo tanto, el ARL del gráfico de control DDT<sup>2</sup> se calcula como sigue:

$$ARL = \frac{1}{1 - P_a}$$

siendo  $P_a$  la probabilidad de ausencia de señal, dada por

$$P_a = P_1 + P_2, \tag{3.4}$$

y a su vez,  $P_1$  es la probabilidad de que el primer estadístico, calculado con sólo el conjunto de  $p_1$  variables, no de señales de fuera de control ni indique la necesidad de medir las variables restantes, es decir,

$$P_1 = P(T_{p1}^2 < w) \quad (3.5)$$

y  $P_2$  es la probabilidad de que el primer estadístico caiga en la región de advertencia (entre el límite de alerta y el límite de control) y que el estadístico obtenido con las  $p$  variables sea menor que el límite de control, dado que el primer estadístico cayó en la región de advertencia. Por lo tanto, existe la necesidad de calcular un estadístico  $T^2$  con todas las  $p$  variables, y este estadístico no supera el límite de control de  $CL_p$ :

$$P_2 = P(w \leq T_{p1}^2 < CL_{p1}) * P(T_p^2 < CL_p | w \leq T_{p1}^2 < CL_{p1}) \quad (3.6)$$

De esta manera, para poder calcular  $P_2$ , es necesaria la distribución condicional de  $T_p^2$ .

Murphy (1987) muestra que, cuando el proceso está bajo control, con  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , el estadístico  $D = T_p^2 - T_{p1}^2$  se distribuye como  $\chi_{p2}^2$ , donde  $p_2 = p - p_1$ . Por lo tanto, cuando el proceso está bajo control,

$$P(T_p^2 < CL_p | w \leq T_{p1}^2 < CL_{p1}) = P(D < CL_p - T_{p1}^2) = P(\chi_{p2}^2 < CL_p - T_{p1}^2) \quad (3.7)$$

Para el caso fuera de control, en el Apéndice 1 se demuestra que  $D \sim \chi_{p2}^2[\lambda = n(d_p^2 - d_{p1}^2)]$

Como consecuencia de lo anterior, cuando el proceso está fuera de control,



$$P(T_p^2 < CL_p | w \leq T_{p1}^2 < CL_{p1}) = P(D < CL_p - T_{p1}^2)$$

$$P(T_p^2 < CL_p | w \leq T_{p1}^2 < CL_{p1}) = P(\chi_{p2}^2[\lambda = n(d_p^2 - d_{p1}^2)] < CL_p - T_{p1}^2) \quad (3.8)$$

Combinando (3.1) y (3.2) se puede observar que, cuando el proceso está bajo control,

$$P_2 = [F_{p1}(CL_{p1}) - F_{p1}(w)] * F_{p2}(CL_{p2} - T_{p1}^2) \quad (3.9)$$

donde  $F_\nu$  es la función de distribución chi-cuadrado con  $\nu$  grados de libertad; y cuando el proceso está fuera de control, combinando (3.7) y (3.9), se obtiene

$$P_2 = [F_{p1,nd_1^2}(CL_{p1}) - F_{p1,nd_1^2}(w)] * F_{p2,nd^2}(CL_p - T_{p1}^2) \quad (3.10)$$

donde  $F_{\nu, \lambda}$  es la función de distribución chi-cuadrado no-centralizada con  $\nu$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda$ .

Este modelo se ha comprobado por simulación, como se describe en la siguiente sección.

### 3.4 Comprobación de parámetros óptimos y valores de ARL a través de simulación

Para comprobar si los ARLs obtenidos corresponden a los valores especificados de  $ARL_0$ ,  $p_1$ ,  $p$ ,  $d_1$  y  $d$ , se realizó una simulación que estima el valor obtenido del ARL utilizando los parámetros optimizados ( $w$ ,  $CL_{p_1}$ ,  $CL_p$ ) del gráfico de control.

La simulación se lleva a cabo considerando que las  $p$  o  $p_1$  variables monitorizadas son variables aleatorias que tienen una distribución conjunta  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , donde  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector de promedios y  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matriz de covarianzas, respectivamente.

Considerando que para optimizar el gráfico, el usuario sólo necesita especificar las distancias  $d_1$  y  $d$  y no la dirección del desplazamiento real en el espacio  $p$ -dimensional. El simulador del gráfico de control DDT<sup>2</sup> se desarrolló utilizando condiciones especiales del vector de promedios y de la matriz de covarianza del estado bajo control, tal como lo aplicado por Lee y Khoo (2006).

La finalidad es obtener un cambio específico  $d$ , de tal forma que

$$\lambda = nd^2 = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0).$$

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

$$d = \sqrt{\delta_1^2 + \dots + \delta_{p_1}^2 + \delta_{p_1+1}^2 + \dots + \delta_p^2} \quad (3.11)$$

cuando  $\Sigma = \Sigma^{-1} = \mathbf{I}$ ,  $\mu_0 = \mathbf{0}$ ;  $\mu_{1i} = 0 + \delta_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ). Es decir, se asume que cada componente de  $\mu_1$  es igual al promedio desplazado de su respectiva variable.

Con esta información procedemos a obtener el  $\delta$  para las  $p_1$  variables contenidas en  $S_1$ . Asumiendo que todos los  $\delta_i$  correspondientes a las  $p_1$  variables son iguales,

$$d_1^2 = \delta_1^2 + \dots + \delta_{p_1}^2 = \delta^2 + \dots + \delta^2 = p_1 * \delta^2$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{p_1}} = \delta^{(1)}$$

Para facilitar la obtención de los siguientes descentrados, se utiliza  $d_1^2 = \delta_1^2 + \dots + \delta_{p_1}^2$ .

Luego, para determinar el valor de los desplazamientos de las restantes  $p_2$  variables ( $p = p_1 + p_2$ ), de tal forma que se cumpla con las dos distancias  $d$  y  $d_1$ . A estos desplazamientos se los identifica como  $\delta^{(2)}$ . Considerando 3.11, se tiene

$$d^2 = (\delta_1^2 + \dots + \delta_{p_1}^2) + \delta_{p_1+1}^2 + \dots + \delta_p^2$$

dado que  $d_1^2 = \delta_1^2 + \dots + \delta_{p_1}^2$

$$d^2 = d_1^2 + \delta_{p_1+1}^2 + \dots + \delta_p^2$$

Asumiendo que  $\delta_{p_1+1}^2 = \dots = \delta_p^2$ , se tiene

$$d^2 = d_1^2 + p_2 \delta^2$$

$$\sqrt{\frac{d^2 - d_1^2}{p_2}} = \delta^{(2)}$$

De esta manera se obtienen los desplazamientos para cada una de las variables aleatorias generadas a través de la simulación con distribución  $N(\delta^{(i)}, 1)$ , siendo  $\delta^{(1)}$  para las  $p_1$  variables y  $\delta^{(2)}$  para las restantes  $p_2$  variables.

Lo siguiente fue generar una matriz de datos, de dimensión  $p$  filas y  $n$  columnas, las cuales contenían variables aleatorias normales con media cero y varianza unitaria. A cada valor aleatorio generado, se le sumó el valor de  $\delta$  respectivo ( $\delta^{(i)}$  para el subgrupo  $p_i$  del grupo de  $p$  variables monitorizadas;  $i = 1, 2$ ); con ello se logró generar variables aleatorias normales con su respectivo desplazamiento en el promedio de cada variable, manteniendo su varianza unitaria, lo que a su vez aseguró la obtención de las distancias  $d_1$  y  $d$ , tal como se lo requería para la simulación.

Una vez obtenida la matriz de datos con las distancias  $d_1$  y  $d$  requeridas, se procedió a calcular el estadístico  $T^2 = n(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)$ , manteniendo las mismas consideraciones antes mencionadas sobre el vector de promedios y la matriz de covarianza del estado bajo control del proceso.

Finalmente se realizó un bucle, en el cual se determinó el número de rachas a ser conseguidas, para luego calcular el promedio de su longitud y presentar el ARL requerido.

### **3.5 Diseño y optimización del software desarrollado**

El gráfico de control DDT<sup>2</sup> tiene tres parámetros a optimizar:  $w$ ,  $CL_{p1}$  y  $CL_p$ . Para la optimización, el tamaño de la muestra  $n$ , y el número de variables  $p_1$  y  $p$ , son datos del problema que se suponen dados. Además, el usuario debe especificar los cambios  $d_1$  y  $d$  para los cuales desea obtener el máximo rendimiento. La selección de un cambio para la optimización es un requisito común en los gráficos de control. Por ejemplo, el rendimiento de los gráficos de control EWMA o MEWMA dependen del tamaño del cambio (unidades sigma o la distancia de Mahalanobis) y con el fin de encontrar el mejor parámetro de suavizado y un límite de control, el tamaño del cambio debe ser previamente especificado.

El problema de la optimización en el diseño del gráfico de control DDT<sup>2</sup>, para un cambio dado

en el vector de promedios, puede ser formalmente expresado como sigue:

Dado:

- El ARL bajo control requerido:  $ARL_0$
- los valores de  $p_1$  y  $p_2$ ,  $p = p_1 + p_2$
- el tamaño de la muestra  $n$
- las distancias del cambio (es decir, las distancias de Mahalanobis del vector de promedios en el estado fuera de control con respecto al vector de promedios de un estado bajo control de  $\mathbf{X}$ ) para los cuales el ARL tiene que ser minimizado: para las  $p_1$  variables:  $d_{p1}$ ; y para todas las  $p$  variables:  $d_p$ ;

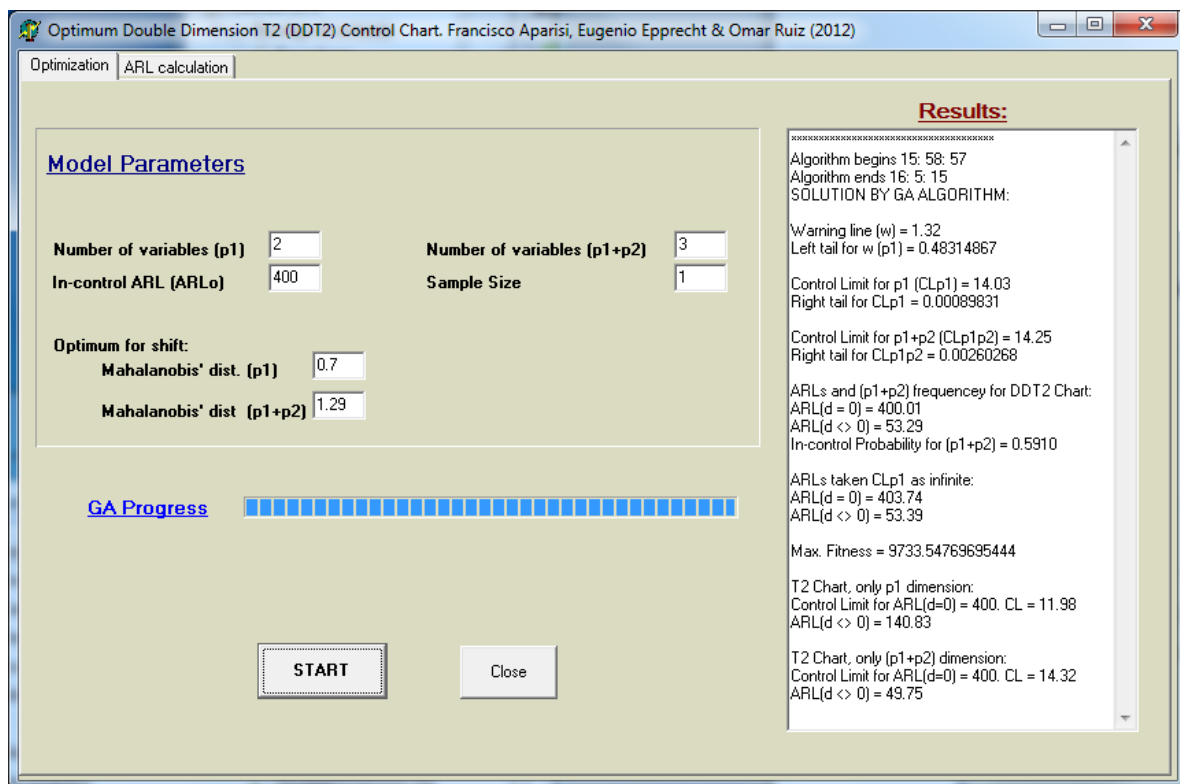
Encontrar: el límite de advertencia y los límites de control:  $w$ ,  $CL_{p1}$ , y  $CL_p$ , tal que

Minimice: el  $ARL(d_{p1}, d_p)$ , fuera de control

Sujeto a:  $ARL(d = 0) = ARL_0$

Para facilitar el uso del gráfico  $DDT^2$  y su optimización se realizó un software amigable en Windows ®. La ventana de interfaz del usuario se muestra en la Figura 3.2. A través de un

algoritmo genético (GA) se obtiene la optimización. El uso de GAs para esta optimización es crucial, ya que la evaluación del ARL para un conjunto dado ( $w$ ,  $CL_{p1}$ ,  $CL_p$ ) es bastante lenta, debido a la complejidad de la fórmula para evaluar el ARL. Por lo tanto, el uso de un procedimiento de búsqueda heurística reduce el número de combinaciones a ser computadas.



*Figura 3.2. Software para la optimización del gráfico de control DDT<sup>2</sup> control chart, aplicado y resuelto para un ejemplo específico.*

El Apéndice 2 presenta en detalle las características de este software y sus variantes. Para más información sobre el uso de GA en general, y en particular sobre su uso para la optimización

de los gráficos de control, se puede consultar Chen (2007), Kaya (2009) y Aparisi et al. (2010).

### *Ejemplo de aplicación*

Con el fin de ilustrar el software y su uso, se presenta el siguiente ejemplo de aplicación. La producción de un componente electrónico se controla a través de la medición de tres variables: 1 - El voltaje entre dos conectores (mV); 2 - La corriente entre otros dos conectores (mA); 3 - La tensión máxima que puede resistir el componente antes de quemarse (V). Por supuesto, la medición de la última variable significa la destrucción de la unidad.

El costo de muestreo de las primeras dos variables es de 0.18 €, mientras muestrear todas las variables cuesta 1.28 €. Por lo tanto  $a = C_{p2}/C_{p1} = (1.28 - 0.18) / 0.18 = 6.11$ .

Debido a esta gran diferencia de coste se decidió evaluar esta tercera variable sólo cuando sea necesario. Un estudio inicial denota que el gráfico de control DDT<sup>2</sup> cumple los requisitos para el control de este proceso, porque la tercera variable (V) claramente produce una distancia de Mahalanobis más grande, y un alto coste para la medición y a la supervisión de procesos, como se muestra más adelante.

Suponiendo que en un estado bajo control se tiene el siguiente vector de medias y las matrices de covarianzas y de correlación:



$$\mathbf{m}_0 = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 23.1 \\ 9.32 \end{pmatrix}; \Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.036 & 0.033 \\ 0.036 & 0.15 & 0.054 \\ 0.033 & 0.054 & 0.22 \end{pmatrix}; [\rho] = \begin{pmatrix} 1 & 0.66 & 0.5 \\ 0.66 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 1 \end{pmatrix};$$

Con el fin de seleccionar las distancias de Mahalanobis para realizar la optimización, una evaluación histórica muestra que muchas veces el proceso cambia produciendo un vector de medias en un estado fuera de control,  $\mathbf{m}_1$ :

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 7.23 \\ 23.35 \\ 8.92 \end{pmatrix}$$

Este vector de medias del estado fuera de control  $\mathbf{m}_1$  produce las siguientes distancias de Mahalanobis:  $d_{p1} = 0.7$ ;  $d_p = 1.29$ . El responsable del proceso desea que, cuando esté bajo control, muestre un ARL de 400 ( $ARL_0 = 400$ ), empleando un tamaño de muestra  $n = 1$ . La Figura 3.2 muestra la solución óptima encontrada por el software, para este ejemplo de aplicación.

Una breve descripción del software es la siguiente: "Model parameters" es la sección donde el usuario indica los valores de  $ARL_0$ ,  $n$ ,  $p_1$ ,  $p$ ,  $d_{p1}$  y  $d_p$ . Con esta información el GA encuentra los parámetros del gráfico de control  $w$ ,  $CL_{p1}$  y  $CL_p$ , y presenta la información en la ventana "Results". En este ejemplo el software devuelve los parámetros siguientes:  $w = 1.32$ ,  $CL_{p1} = 14.03$ ,  $CL_p = 14.25$ . El software muestra para cada uno de estos parámetros el área de la cola probabilidad derecha; por ejemplo,  $P(\chi_{p1}^2 > w) = 0.4831$ .

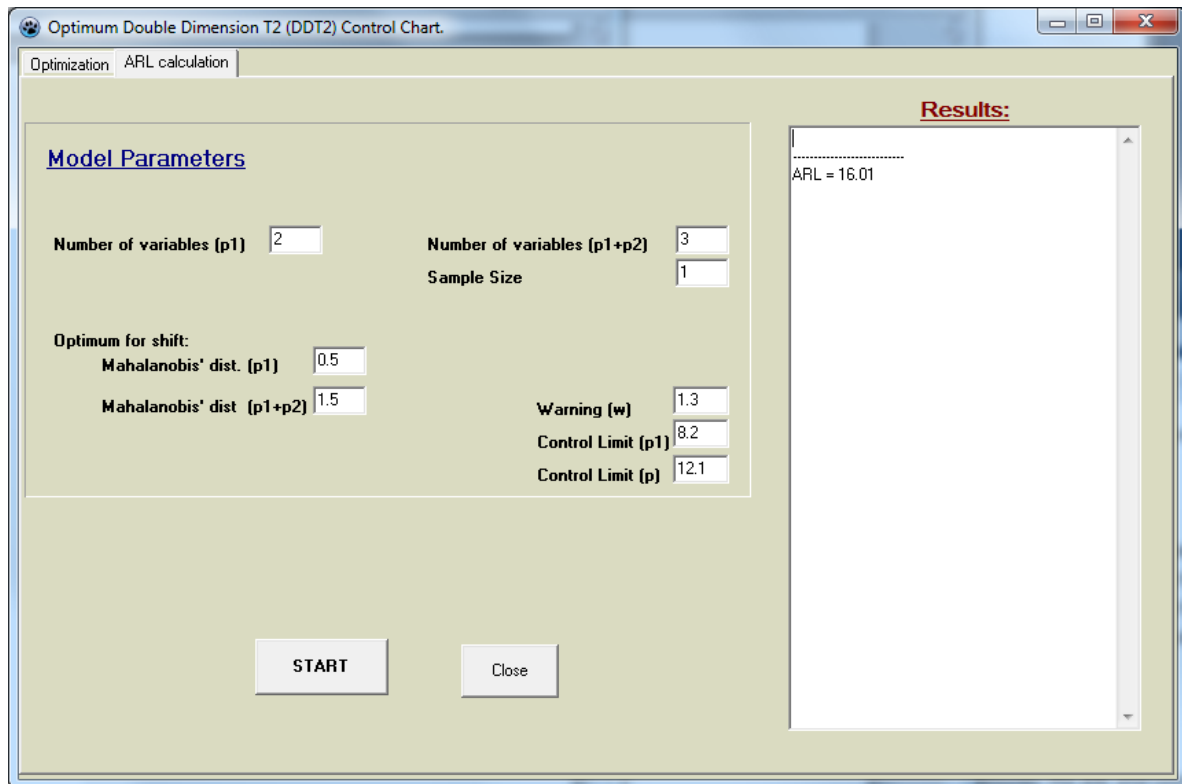
Los parámetros anteriores producen un gráfico de control  $DDT^2$  con el ARL bajo control deseado,  $ARL_0 = 400$ . El ARL fuera de control minimizado es 53.29. El software muestra el ARL del gráfico de control estándar  $T^2$  cuando se utilizan siempre las variables  $p_1$  o  $p$ ; en este caso el ARL cuando se miden sólo las variables 1 y 2 es 140.83. El  $DDT^2$  produce una reducción en el ARL del 62.2%. El ARL cuando se miden siempre las tres variables es 49.75; por lo tanto, en este caso el  $DDT^2$  es 7% peor. No obstante, el  $DDT^2$  requiere sólo una fracción del coste necesario para el gráfico de control  $T^2$ . Concretamente, la lectura de la Figura 3.2 cuando  $\%p = 0.591$ , es la siguiente

$$\frac{ACS_{DDT^2}}{CS_{T_p^2}} = \frac{1 + a \cdot \%p}{1 + a} = \frac{1 + 6.11 \cdot 0.591}{1 + 6.11} = \frac{4.61}{7.11} = 65\%$$

Por lo tanto, el gráfico  $DDT^2$  obtiene un ARL muy similar al obtenido por el gráfico de control estándar  $T^2$  para 3 variables, pero con un 65% de los gastos necesarios. Así pues, el gráfico  $DDT^2$  muestra un rendimiento muy bueno. El gráfico de control estándar  $T^2$  que mide sólo las dos primeras variables tiene un ARL de 140.83, 2.64 veces mayor que el obtenido por el gráfico de control  $DDT^2$ .

Además, el programa muestra más información en la frase "ARLs taken  $CL_{p_1}$  as infinite:" (ARLs si  $CL_{p_1}$  es infinito). A menudo es posible eliminar el límite de control  $CL_{p_1}$ , y el gráfico de control  $DDT^2$  resultante muestra prácticamente el mismo rendimiento. La ventaja es, por supuesto, tener un sistema más sencillo, con sólo dos líneas:  $w$  y  $CL_p$  ( $CL_{p_1 p_2}$  en el figura 3.2) En este ejemplo, si se elimina  $CL_{p_1}$  (tomado como infinito) el ARL bajo control es

403.74, prácticamente el 400 requerido, y el ARL fuera de control es 53.39, de nuevo prácticamente el mismo que el ARL óptimo, 53.29. Por lo tanto, si el usuario retira el límite de control  $CL_{p_1}$ , podrá obtener el mismo rendimiento, con un gráfico de control más fácil.

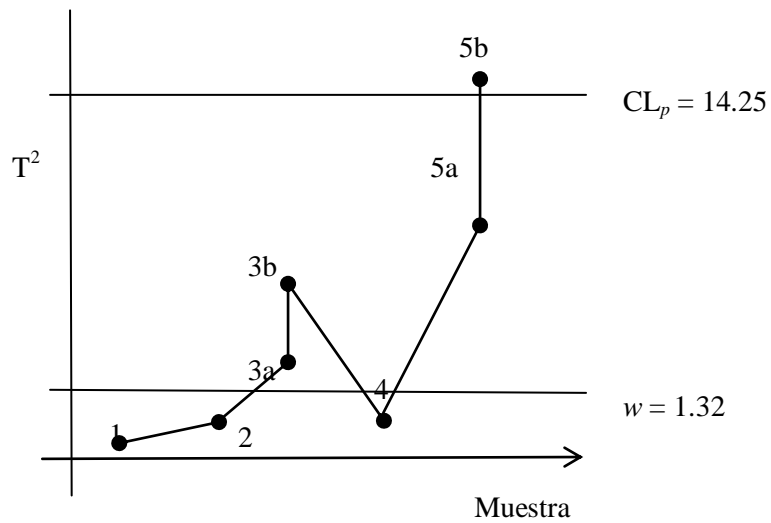


*Figura 3.3. Tab "ARL calculation" del software para la optimización del gráfico DDT<sup>2</sup>.*

La interfaz del software tiene dos pestañas: "Optimization" (Optimización) y "ARL Calculation" (Cálculo del ARL). La optimización anterior se ha realizado en la pestaña con el mismo nombre. Si el usuario final desea calcular el ARL para una combinación dada ( $w$ ,  $CL_{p_1}$ ,

$CL_p$ ) puede utilizar la pestaña " ARL Calculation" y fácilmente podrá obtener el nuevo valor del ARL, tal como lo muestra la Figura 3.3.

Con el fin de ilustrar mejor el uso del gráfico de control  $DDT^2$  se presenta una simulación de su uso a través de la Tabla 3.1 y la Figura 3.4, que son auto-explicativos. Se ha decidido eliminar  $CL_{p_1}$  en esta simulación, de tal manera que se corresponde con el ejemplo anterior.



**Figura 3.4. Gráfico de control  $DDT^2$  simulado de la Tabla 3.1.**

Número de la Muestra	Vector Muestral $\bar{X}_{p1}$	$T_{p1}^2$	Vector Muestral $\bar{X}_p$	$T_p^2$	Comentarios
1	$\begin{pmatrix} 7.18 \\ 23.14 \end{pmatrix}$	0.296	-	-	Inicia con $p_1$ variables. $T_{p1}^2$ cae debajo del límite de alerta $w$ . No requiere muestreo adicional.
2	$\begin{pmatrix} 7.25 \\ 23.05 \end{pmatrix}$	0.596	-	-	$T_{p1}^2$ debajo del límite de alerta $w$ . No requiere muestreo adicional.
3a	$\begin{pmatrix} 7.11 \\ 23.32 \end{pmatrix}$	1.455	-	-	$T_{p1}^2$ dentro del área de alerta. Variable adicional debe ser medida y combinada.
3b	-	-	$\begin{pmatrix} 7.11 \\ 23.32 \\ 10.45 \end{pmatrix}$	3.52	$T_p^2$ debajo del límite de control $CL_p$ . Proceso bajo control.
4	$\begin{pmatrix} 7.16 \\ 22.97 \end{pmatrix}$	0.346	-	-	$T_{p1}^2$ debajo del límite de alerta $w$ . No requiere muestreo adicional.
5a	$\begin{pmatrix} 7.75 \\ 20.98 \end{pmatrix}$	11.34	-	-	$T_{p1}^2$ dentro del área de alerta. Variable adicional debe ser medida y combinada.
5b	-	-	$\begin{pmatrix} 7.75 \\ 20.98 \\ 6.87 \end{pmatrix}$	14.332	$T_p^2 > CL_p$ . El proceso es declarado fuera de control

**Tabla 3.1. Muestreo simulado para el gráfico de control DDT<sup>2</sup>.**

### 3.6 Análisis del rendimiento y Comparación

Se ha analizado el rendimiento del gráfico de control DDT<sup>2</sup> para muchos casos, combinando diferentes valores de  $(p_1, p)$  y de  $(d_{p1}, d_p)$ :  $(p_1, p) = (1, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 6),$  y  $(5, 7)$ ;

$(d_{p_1}, d_p) = (0.2, 0.5), (0.2, 1), (0.2, 1.5), (0.2, 2), (0.5, 0.7), (0.5, 1), (0.5, 1.5), (0.5, 2), (1, 1.2), (1, 1.5), (1, 2), (1, 2.5), (1.5, 1.8), (1.5, 2), (1.5, 2.5), (1.5, 3), (2.5, 3), (2.5, 3.5), (2.5, 4), (2.5, 4.5), (3.5, 4), (3.5, 4.5), (4, 5),$  y  $(4, 6)$ . Todos estos casos se han evaluado para un ARL bajo control de 200, 400 y 1000. Los resultados se muestran en las Tablas 3.2 a 3.16. Para casos adicionales o diferentes que se desee analizar, se puede hacer uso del software desarrollado y fácilmente obtener los resultados requeridos.

La descripción de la información que figura en las tablas es la siguiente: "Problem Parameters" muestra la optimización que se ha llevado a cabo, es decir, los valores de  $ARL_0$ ,  $p_1$ ,  $p$ ,  $d_{p_1}$  y  $d_p$ . La columna " $T^2$  always  $p_1$  |  $ARL(d_{p_1})$ " muestra el ARL fuera de control de un gráfico de control estándar  $T^2$ , donde se mide sólo el subconjunto de  $p_1$  variables; esto es para mostrar el rendimiento cuando las variables que son fáciles y baratas de medir son las únicas variables que se miden. De la misma manera, la columna de " $T^2$  always  $p$  |  $ARL(d_p)$ " devuelve el ARL fuera de control del gráfico de control estándar  $T^2$  cuando se miden siempre todas las  $p$  variables muestreadas. Esta columna muestra el rendimiento máximo que se puede conseguir empleando el gráfico estándar  $T^2$ . El gráfico de control  $DDT^2$  obtendrá, como se indica más adelante, una actuación que en varias ocasiones supera al gráfico  $T^2$  para las variables  $p$ , con una fracción de su costo de muestreo, lo que es muy notorio.

Aunque pueda parecer paradójico, este efecto es análogo a lo que ocurre con los sistemas de DS. Los planes y los gráficos DS tienen mayor potencia y similar probabilidad de error tipo uno, y tamaño promedio de la muestra que planes de muestreo simple (y gráficos de control

con un solo muestreo). Alternativamente, los sistemas de doble muestreo se pueden utilizar para lograr la misma potencia de los sistemas de muestreo individuales, con un tamaño promedio de muestra más baja, lo que indica un coste de muestreo inferior. Los planes de muestreo doble son más eficientes que los planes de muestreo individuales (en términos de la relación de potencia / costo) debido a una mejor asignación de esfuerzo en el muestreo.

Con el gráfico de control  $DDT^2$  se miden todas las  $p$  variables sólo parte del tiempo. Combinado con el hecho de que el gráfico rara vez (o nunca en la versión con un solo CL) emite una alarma con únicamente las  $p_1$  variables, este gráfico tiene un valor de límite de control menor para las  $p$  variables que el gráfico estándar  $T^2$ , logrando así el mismo  $ARL_0$  del gráfico  $T^2$ . Estos pequeños límites de control dan como resultado un mejor rendimiento del  $ARL$  fuera de control del gráfico de control  $DDT^2$ . Además de este pequeño límite de control, la probabilidad de medir todas las variables con este gráfico se incrementa cuando hay un cambio en el proceso, y la combinación de estos dos hallazgos da como resultado un menor  $ARL$  fuera de control que el del gráfico de control estándar  $T^2$ .

Las siguientes cuatro columnas de las Tablas, bajo el título " $DDT^2$ ", muestran la información sobre el gráfico de control optimizado  $DDT^2$ . La primera columna, " $ARL(d)$  ( $\%T^2_{p_1}$ ,  $\%T^2_p$ )" devuelve el  $ARL$  fuera de control del gráfico  $DDT^2$  y el porcentaje de mejora en comparación con los gráficos estándar  $T^2$  cuando son siempre medidas las  $p_1$  o  $p$  variables. Las columnas "Optimun Parameters" muestran los resultados obtenidos a partir del software, es decir los valores de  $w$ ,  $CL_{p_1}$  y  $CL_p$  que minimicen el  $ARL(d)$  para ese caso. La columna " $\%p$ " indica el

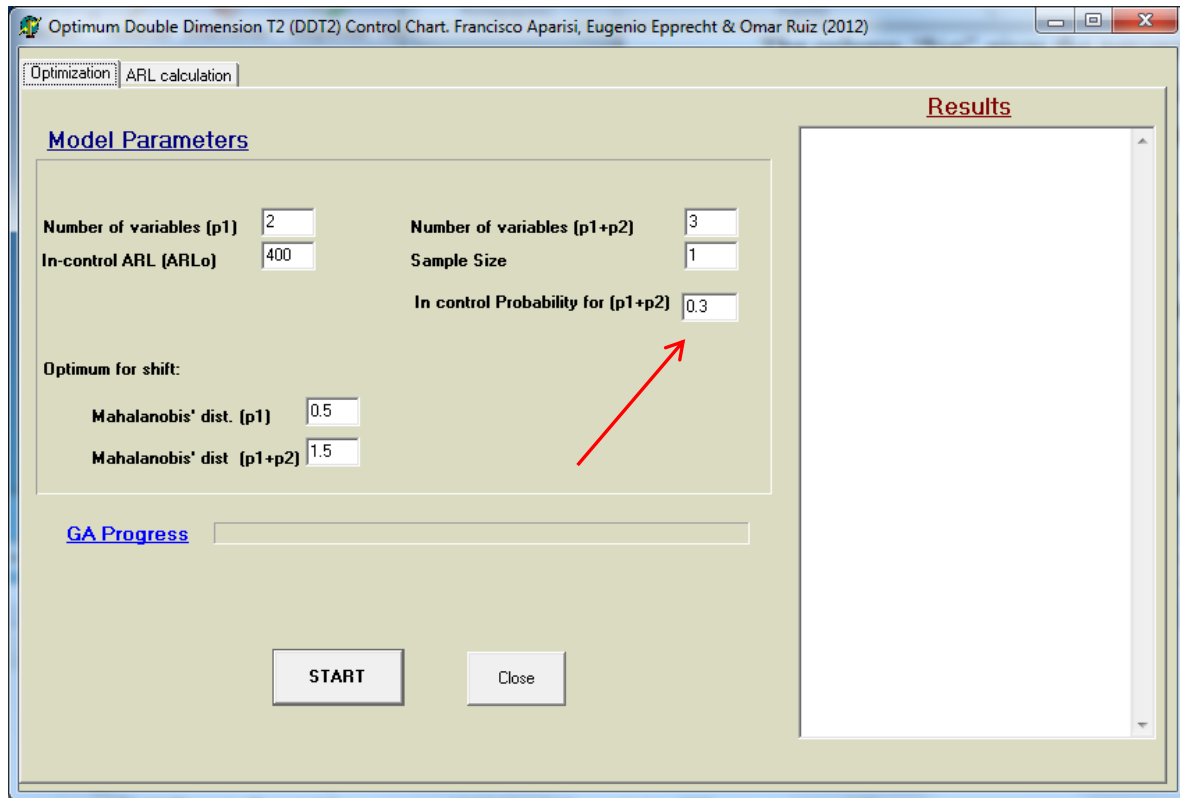
porcentaje de veces que todas las variables se miden cuando es empleado el gráfico  $DDT^2$  y el proceso está bajo control. Este valor es necesario para obtener el coste medio de muestreo, en función del coste de la medición de las  $p_1$  variables, y el costo de la medición de todas las  $p$  variables, dada por la ecuación 3.3.

El valor de "% $p$ " presenta mucha variación, que van desde el 7% en el mejor de los casos y el 99% en el peor. Sin embargo, estos valores grandes de % $p$  aparecen muy pocas veces, en las tablas cuando  $p_1 = 5$ , y para valores muy pequeños de  $d_{p1}$ . En otras palabras, en algunos pocos casos, la minimización del ARL fuera de control devuelve un esquema en el que las  $p$  variables se miden muy frecuentemente cuando el proceso está bajo control, por lo que el óptimo prácticamente consiste en emplear el gráfico estándar  $T^2$  cuando todas las  $p$  variables se miden siempre. En tales casos, una restricción en "% $p$ " es necesaria en la formulación del problema de optimización, con el fin de obtener una solución económica, que es todavía muy buena en el rendimiento del ARL, como se muestra más adelante. Por esa razón, las soluciones óptimas bajo la restricción % $p = 30\%$  se muestran en la columna " $DDT^2$  (% $p = 30$ )". El usuario del software, puede especificar un valor diferente para % $p$ .

El software para la optimización con una restricción en el % $p$  (valor que debe introducir el usuario) también se desarrolló y está disponible. Esta versión del software se muestra en la Figura 3.5. Sin embargo, la optimización devuelve la gran mayoría de las veces un gráfico de control  $DDT^2$  con un bajo valor de % $p$ , y con un ARL mejor o muy cerca de la ARL obtenido



por el gráfico de control estándar  $T^2$  para las  $p$  variables. En tales casos, la columna de "DDT<sup>2</sup> (% $p = 30$ )" se puede utilizar para analizar la sensibilidad de la solución a los cambios en % $p$ .



**Figura 3.5. Software para la optimización del gráfico de control DDT<sup>2</sup>, cuando se requiere una restricción sobre el % $p$ .**

La columna "  $CL_{p1} = \infty?$ " tiene un asterisco el cual indica si al retirar  $CL_{p1}$  tiene poco impacto en el rendimiento de los gráficos de control DDT<sup>2</sup>. Concretamente, hay un asterisco cuando tanto el ARL bajo control como el ARL fuera de control difieren simultáneamente menos de 5%, cuando se compara el gráfico DDT<sup>2</sup> con  $CL_{p1}$  y sin  $CL_{p1}$ . Por lo tanto, en esos casos, el

usuario puede utilizar el gráfico de control  $DDT^2$  sin  $CL_{p1}$ . Esta posible simplificación ocurre en la mayoría de los casos, como se puede observar en las Tablas 3.2 a 3.16.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)					
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	Clp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters				
							(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp			(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp				
200	1	2	0.2	0.5	169.91	115.58	118.51 (30.25; -2.53)	000.51 - 10.23 - 10.23	48		127.68 (24.85; -10.46)	001.11 - 10.10 - 10.16				
				1	169.91	41.92	56.96 (66.47; -35.87)	001.02 - 10.15 - 10.18	32		57.93 (65.9; -38.19)	001.11 - 10.10 - 10.16				
				1.5	169.91	15.78	29.66 (82.54; -87.95)	001.52 - 9.99 - 10.07	22		30.98 (81.76; -96.32)	001.52 - 9.36 - 10.24				
				2	169.91	6.88	19.06 (88.78; -177.03)	002.02 - 9.84 - 9.97	16		20.14 (88.14; -192.73)	002.02 - 9.11 - 10.24				
				0.5	0.7	0.7	90.93	78.00	80.28 (11.71; -2.92)	002.06 - 9.77 - 9.97	20		79.48 (12.59; -1.89)	001.33 - 9.41 - 10.27		
						1	90.93	41.92	48.29 (46.89; -15.19)	001.02 - 10.15 - 10.18	37		49.65 (45.39; -18.43)	001.34 - 10.02 - 10.11		
						1.5	90.93	15.78	24.27 (73.3; -53.8)	001.52 - 9.90 - 10.08	27		24.19 (73.39; -53.29)	001.52 - 9.99 - 10.07		
						2	90.93	6.88	14.99 (83.51; -117.87)	002.02 - 9.84 - 9.97	20		14.95 (83.55; -117.29)	002.02 - 9.96 - 9.96		
						1	1.2	1.2	28.21	27.96	25.83 (8.43; 7.61)	002.03 - 9.94 - 9.98	33		17.04 (8.43; 7.61)	002.15 - 8.54 - 10.85
								1.5	28.21	15.78	16.55 (41.33; -4.87)	001.52 - 9.90 - 10.08	40		17.04 (39.59; -7.98)	002.23 - 9.67 - 9.95
				2	28.21			6.88	10.08 (64.26; -46.51)	002.02 - 8.95 - 10.36	32		9.53 (66.21; -38.51)	002.23 - 9.72 - 9.94		
				2.5	28.21			3.55	6.64 (76.46; -87.04)	002.56 - 9.47 - 9.92	26		6.57 (76.71; -85.07)	002.56 - 9.85 - 9.85		
				1.5	1.8	1.8	10.46	9.40	8.81 (15.77; 6.27)	002.57 - 9.35 - 9.97	40		9.04 (13.57; 3.82)	003.23 - 8.30 - 11.07		
						2	10.46	6.88	6.89 (34.13; -0.14)	002.58 - 9.45 - 9.92	40		7.37 (29.54; -7.12)	003.30 - 8.59 - 10.38		
						2.5	10.46	3.55	4.32 (58.69; -21.69)	002.58 - 9.45 - 9.92	40		5.09 (51.33; -43.38)	003.27 - 8.46 - 10.63		
						3	10.46	2.16	3.49 (66.63; -61.57)	003.21 - 9.50 - 9.75	33		3.74 (64.24; -73.14)	003.30 - 8.59 - 10.38		
						2.5	3	3	2.64	2.16	2.04 (22.72; 5.55)	003.28 - 9.65 - 9.71	48		2.19 (17.04; -1.38)	004.44 - 8.28 - 10.64
								3.5	2.64	1.53	1.65 (37.5; -7.84)	003.52 - 9.39 - 9.70	45		1.82 (31.06; -18.95)	004.52 - 8.39 - 10.30
				3.5	4	4	2.64	1.23	1.59 (39.77; -29.26)	04.03 - 8.29 - 10.79	34		1.66 (37.12; -36.06)	004.32 - 8.12 - 11.42		
						4.5	2.64	1.09	1.59 (39.77; -45.87)	04.52 - 8.16 - 11.11	29		1.58 (40.15; -44.95)	004.52 - 8.39 - 10.30		
						4	4	4	1.32	1.23	1.23 (6.81; 0)	05.16 - 8.13 - 10.91	15		1.21 (8.33; 1.62)	004.55 - 8.40 - 10.26
								4.5	1.32	1.09	1.14 (13.63; -4.58)	04.62 - 8.53 - 9.99	19		1.11 (15.9; -1.83)	004.05 - 9.55 - 9.58
						4	5	5	1.13	1.03	1.06 (6.19; -2.91)	05.14 - 8.28 - 10.30	9		1.04 (7.96; -0.97)	004.54 - 9.41 - 9.45
								6	1.13	1.00	1.07 (5.3; -7)	06.09 - 7.90 - 14.11	5		1.04 (7.96; -4)	005.13 - 9.32 - 9.35

Tabla 3.2. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 1 y p = 2.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)		
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters	
							(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp			(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp	
200	2	3	0.2	0.5	180.68	128.96	133.06 (26.35; -3.17)	0.51 - 12.69 - 12.79	77	*	138.96 (23.09; -7.75)	02.63 - 12.53 - 12.63	
				1	180.68	52.39	57.2 (68.34; -9.18)	1.02 - 12.65 - 12.75	60	*	67.31 (62.74; -28.47)	02.63 - 12.62 - 12.62	
				1.5	180.68	20.4	25.68 (85.78; -25.88)	1.6 - 12.54 - 12.72	44	*	31.64 (82.48; -55.09)	02.63 - 12.46 - 12.64	
				2	180.68	8.8	13.64 (92.45; -55)	2.12 - 12.49 - 12.68	34	*	16.20 (91.03; -84.09)	02.63 - 12.53 - 12.63	
				0.5	0.7	115.58	92.07	94.56 (18.18; -2.7)	1.33 - 12.73 - 12.73	51	*	97.13 (15.96; -5.49)	02.97 - 11.90 - 12.80
				1	115.58	52.39	55.41 (52.05; -5.76)	1.02 - 12.75 - 12.75	60	*	63.91 (44.7; -21.98)	02.97 - 11.90 - 12.80	
				1.5	115.58	20.4	24.11 (79.13; -18.18)	1.6 - 12.54 - 12.72	44	*	29.44 (74.52; -44.31)	02.99 - 12.59 - 12.59	
				2	115.58	8.8	12.93 (88.81; -46.93)	2.04 - 12.02 - 12.81	36	*	15.45 (86.63; -75.56)	02.99 - 12.59 - 12.59	
				1	1.2	41.92	35.68	35.63 (15; 0.14)	2.54 - 12.15 - 12.73	28	*	35.55 (15.19; 0.36)	03.57 - 12.37 - 12.55
				1.5	41.92	20.4	21.49 (48.73; -5.34)	1.56 - 12.2 - 12.8	45	*	23.87 (43.05; -17)	03.54 - 11.75 - 12.82	
				2	41.92	8.8	10.25 (75.54; -16.47)	2.12 - 12.51 - 12.68	34	*	12.14 (71.04; -37.95)	03.57 - 12.37 - 12.55	
				2.5	41.92	4.38	6.3 (84.97; -43.83)	2.58 - 11.89 - 12.8	27	*	8.09 (80.7; -84.7)	03.52 - 11.39 - 13.20	
				1.5	1.8	15.78	12.12	12.39 (21.48; -2.22)	3.01 - 11.51 - 13.12	22	*	12.88 (18.37; -6.27)	04.02 - 11.14 - 13.58
				2	15.78	8.8	9.04 (42.71; -2.72)	2.05 - 12.06 - 12.8	35	*	9.86 (37.51; -12.04)	04.06 - 11.51 - 12.96	
				2.5	15.78	4.38	5.38 (65.9; -22.83)	2.6 - 11.51 - 13.18	27	*	5.97 (62.16; -36.3)	04.05 - 11.44 - 13.04	
				3	15.78	2.55	3.3 (79.08; -29.41)	3.1 - 12.33 - 12.6	21	*	3.99 (74.71; -56.47)	04.07 - 11.63 - 12.84	
				2.5	3	3.55	2.55	2.56 (27.88; -0.39)	03.09 - 11.83 - 12.83	62	*	2.89 (18.59; -13.33)	004.84 - 10.84 - 14.60
				3.5	3.55	1.72	1.89 (46.76; -9.88)	03.94 - 11.51 - 12.98	54	*	2.24 (36.9; -30.23)	004.83 - 10.79 - 14.95	
				4	3.55	1.33	1.69 (52.39; -27.06)	04.04 - 10.87 - 14.58	50	*	1.80 (49.29; -35.33)	004.83 - 10.80 - 14.87	
				4.5	3.55	1.14	1.47 (58.59; -28.94)	04.52 - 11.37 - 13.05	48	*	1.57 (55.77; -37.71)	004.84 - 10.84 - 14.58	
				3.5	4	1.53	1.33	1.31 (14.37; 1.5)	005.44 - 12.20 - 12.33	35	*	1.41 (7.84; -6.01)	005.45 - 10.73 - 15.39
				4.5	4.5	1.53	1.14	1.17 (23.52; -2.63)	005.13 - 12.23 - 12.37	36	*	1.28 (16.33; -12.28)	005.43 - 10.68 - 16.20
				4	5	1.23	1.05	1.06 (13.82; -0.95)	005.13 - 12.23 - 12.37	23	*	1.12 (8.94; -6.66)	005.66 - 10.64 - 17.28
				6	1.23	1.00	1.05 (14.63; -5)	06.02 - 10.85 - 14.17	16	*	1.05 (14.63; -5)	005.66 - 10.64 - 15.95	

Tabla 3.3. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 2 y p = 3.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)		
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters	
							(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp			(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp	
200	2	4	0.2	0.5	180.68	138.1	142.43 (21.17; -3.13)	0.51 - 14.74 - 14.78	77	*	146.18 (19.09; -5.85)	02.64 - 14.07 - 14.47	
				1	180.68	60.95	67.16 (62.82; -10.18)	1.28 - 14.57 - 14.67	52	*	75.88 (58; -24.49)	02.64 - 14.39 - 14.46	
				1.5	180.68	24.62	30.89 (82.9; -25.46)	1.52 - 14.38 - 14.64	46	*	36.69 (79.69; -49.02)	02.64 - 14.07 - 14.47	
				2	180.68	10.63	16.37 (90.93; -53.99)	2.02 - 14.56 - 14.56	36	*	18.82 (89.58; -77.04)	02.63 - 13.91 - 14.48	
				0.5	0.7	115.58	102.43	103.94 (10.07; -1.47)	2.65 - 14.03 - 14.48	26	*	103.50 (10.45; -1.04)	03.01 - 14.23 - 14.40
				1	115.58	60.95	63.81 (44.79; -4.69)	1.02 - 14.71 - 14.71	60	*	69.07 (40.24; -13.32)	03.01 - 14.22 - 14.40	
				1.5	115.58	24.62	28.78 (75.09; -16.89)	1.62 - 14.36 - 14.64	44	*	34.05 (70.53; -38.3)	03.01 - 14.28 - 14.40	
				2	115.58	10.63	14.94 (87.07; -40.54)	2.02 - 14.56 - 14.56	36	*	18.97 (83.58; -78.45)	02.98 - 12.44 - 14.72	
				1	1.2	41.92	42.35	39.12 (6.67; 7.62)	5.07 - 12.22 - 14.35	7		39.42 (5.96; 6.91)	03.54 - 11.74 - 15.08
				1.5	41.92	24.62	25.04 (40.26; -1.7)	1.59 - 14.05 - 14.65	45	*	26.16 (37.59; -6.25)	03.62 - 13.83 - 14.30	
				2	41.92	10.63	12.12 (71.08; -14.01)	2.03 - 14.41 - 14.56	36	*	13.97 (66.67; -31.42)	03.61 - 13.47 - 14.33	
				2.5	41.92	5.19	7.27 (82.65; -40.07)	2.62 - 12.54 - 14.72	26		8.34 (80.1; -60.69)	03.62 - 13.83 - 14.30	
				1.5	1.8	15.78	14.68	13.5 (14.44; 8.03)	5.54 - 13.06 - 13.95	6	*	13.86 (12.16; 5.58)	04.05 - 11.43 - 15.36
				2	15.78	10.63	10.46 (33.71; 1.59)	3.28 - 14.2 - 14.35	19	*	11.50 (27.12; -8.18)	04.05 - 11.43 - 15.36	
				2.5	15.78	5.19	5.79 (63.3; -11.56)	2.62 - 12.54 - 14.72	26		6.63 (57.98; -27.74)	04.10 - 11.98 - 14.73	
				3	15.78	2.93	3.77 (76.1; -28.66)	3.2 - 13.99 - 14.37	20	*	4.27 (72.94; -45.73)	04.19 - 13.29 - 14.23	
				2.5	3	3.55	2.93	2.77 (21.97; 5.46)	05.12 - 13.44 - 14.00	52	*	2.91 (18.02; 0.68)	004.93 - 11.26 - 15.43
				3.5	3.55	1.91	1.96 (44.78; -2.61)	03.53 - 12.77 - 14.48	62		2.20 (38.02; -15.18)	004.93 - 11.26 - 15.43	
				4	3.55	1.42	1.62 (54.36; -14.08)	04.05 - 12.14 - 14.63	56		1.79 (49.57; -26.05)	004.93 - 11.26 - 15.43	
				4.5	3.55	1.19	1.52 (57.18; -27.73)	004.81 - 13.93 - 14.05	56		1.59 (55.21; -33.61)	004.93 - 11.26 - 15.43	
				3.5	4	1.53	1.42	1.36 (11.11; 4.22)	005.88 - 13.70 - 13.80	42		1.37 (10.45; 3.52)	005.89 - 12.19 - 14.09
				4.5	4.5	1.53	1.19	1.19 (22.22; 0)	004.81 - 13.93 - 14.05	47		1.21 (20.91; -1.68)	005.98 - 12.55 - 13.92
				4	5	1.23	1.07	1.09 (11.38; -1.86)	006.39 - 12.72 - 13.75	23		1.08 (12.19; -0.93)	006.26 - 12.33 - 13.91
				6	6	1.23	1.01	1.05 (14.63; -3.96)	06.16 - 11.19 - 15.15	17		1.05 (14.63; -3.96)	006.32 - 12.53 - 13.82

Tabla 3.4. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 2 y p = 4.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)		
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	Clp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters	
							(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp			(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp	
200	5	6	0.2	0.5	189.61	149.47	150.6 (20.57; -0.75)	0.51 - 18.44 - 18.54	99	*	155.73 (17.86; -4.18)	06.26 - 17.91 - 18.70	
				1	189.61	74.31	78.77 (58.45; -6)	1.08 - 17.81 - 18.73	95		82.78 (56.34; -11.39)	06.27 - 18.46 - 18.50	
				1.5	189.61	32.13	32.71 (82.74; -1.8)	1.52 - 18.37 - 18.55	91	*	40.36 (78.71; -25.61)	06.27 - 18.46 - 18.50	
				2	189.61	14.12	14.67 (92.26; -3.89)	2.02 - 18.29 - 18.56	84	*	21.49 (88.66; -52.19)	06.26 - 17.89 - 18.72	
				0.5	0.7	144.73	116.69	118.14 (18.37; -1.24)	0.72 - 18.39 - 18.55	98	*	120.95 (16.43; -3.65)	06.61 - 17.91 - 18.69
				1	144.73	74.31	75.11 (48.1; -1.07)	1.02 - 18.44 - 18.54	96	*	80.20 (44.58; -7.92)	06.62 - 18.49 - 18.49	
				1.5	144.73	32.13	34.53 (76.14; -7.46)	1.52 - 17.81 - 18.77	91		41.06 (71.62; -27.79)	06.61 - 17.91 - 18.69	
				2	144.73	14.12	15.33 (89.4; -8.56)	2.02 - 17.81 - 18.77	84		20.32 (85.96; -43.9)	06.61 - 18.17 - 18.56	
				1	1.2	68.13	53.43	53.88 (20.91; -0.84)	1.28 - 18.37 - 18.55	93	*	55.19 (18.99; -3.29)	07.17 - 17.91 - 18.67
				1.5	68.13	32.13	32.46 (52.35; -1.02)	1.52 - 18.3 - 18.56	91	*	35.39 (48.05; -10.14)	07.18 - 18.12 - 18.56	
				2	68.13	14.12	15.06 (77.89; -6.65)	2.02 - 17.81 - 18.77	84		17.61 (74.15; -24.71)	07.19 - 18.42 - 18.48	
				2.5	68.13	6.79	7.05 (89.65; -3.82)	2.58 - 18.42 - 18.54	76	*	10.30 (84.88; -51.69)	07.17 - 17.90 - 18.68	
				1.5	1.8	28.5	19.47	19.55 (31.4; -0.41)	1.82 - 18.3 - 18.56	87	*	20.44 (28.28; -4.98)	07.67 - 17.84 - 18.70
				2	28.5	14.12	14.22 (50.1; -0.7)	2.1 - 18.39 - 18.56	83	*	15.61 (45.22; -10.55)	07.67 - 17.84 - 18.70	
				2.5	28.5	6.79	7.19 (74.77; -5.89)	2.58 - 17.89 - 18.78	76		8.52 (70.1; -25.47)	07.71 - 17.91 - 18.65	
				3	28.5	3.69	3.86 (86.45; -4.6)	3.12 - 18.36 - 18.56	68	*	5.26 (81.54; -42.54)	07.74 - 18.45 - 18.46	
				2.5	3	5.99	3.69	3.85 (35.72; -4.33)	006.08 - 10.68 - 18.74	33		4.15 (30.71; -12.46)	08.63 - 17.27 - 19.46
				3.5	5.99	2.29	2.36 (60.6; -3.05)	003.63 - 17.91 - 18.76	81		3.08 (48.58; -34.49)	008.59 - 17.00 - 20.53	
				4	5.99	1.62	1.66 (72.28; -2.46)	004.02 - 18.34 - 18.56	80		2.29 (61.76; -41.35)	008.59 - 17.00 - 20.53	
				4.5	5.99	1.28	1.37 (77.12; -7.03)	004.58 - 18.27 - 18.57	77		1.89 (68.44; -47.65)	008.59 - 17.00 - 20.53	
				3.5	4	2.10	1.62	1.62 (22.85; 0)	004.78 - 18.30 - 18.57	58		1.78 (15.23; -9.87)	009.40 - 16.98 - 20.58
				4.5	2.10	1.28	1.29 (38.57; -0.78)	004.80 - 18.30 - 18.56	58		1.70 (19.04; -32.81)	009.35 - 16.77 - 24.83	
				4	5	1.52	1.12	1.16 (23.68; -3.57)	05.47 - 17.19 - 19.84	35		1.28 (15.78; -14.28)	009.70 - 16.79 - 23.54
				6	1.52	1.01	1.03 (32.23; -1.98)	06.32 - 17.20 - 19.80	35		1.11 (26.97; -9.9)	009.70 - 16.79 - 23.54	

Tabla 3.5. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 5 y p = 6.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)		
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	Clp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters	
							(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp			(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp	
200	5	7	0.2	0.5	189.61	153.17	155.55 (17.96; -1.55)	0.51 - 20.05 - 20.28	99	*	157.24 (17.07; -2.65)	06.29 - 19.95 - 20.17	
				1	189.61	79.67	80.79 (57.39; -1.4)	1.02 - 20.17 - 20.27	96	*	1.23 (99.35; 98.45)	01.66 - 3.79 - 3.79	
				1.5	189.61	35.52	36.12 (80.95; -1.68)	1.52 - 20.17 - 20.27	91	*	44.55 (76.5; -25.42)	06.29 - 19.96 - 20.17	
				2	189.61	15.8	16.36 (91.37; -3.54)	2.06 - 19.99 - 20.27	84	*	24.34 (87.16; -54.05)	06.27 - 18.49 - 20.48	
				0.5	0.7	144.73	121.81	123.51 (14.66; -1.39)	0.74 - 19.92 - 20.28	98	*	124.16 (14.21; -1.92)	06.65 - 20.08 - 20.15
				1	144.73	79.67	80.65 (44.27; -1.23)	1.02 - 20.17 - 20.27	96	*	85.74 (40.75; -7.61)	06.64 - 20.06 - 20.15	
				1.5	144.73	35.52	36.01 (75.11; -1.37)	1.52 - 20.17 - 20.27	91	*	43.27 (70.1; -21.81)	06.64 - 19.78 - 20.16	
				2	144.73	15.8	16.58 (88.54; -4.93)	2.58 - 19.83 - 20.27	76	*	23.81 (83.54; -50.69)	06.62 - 18.45 - 20.48	
				1	1.2	68.13	58.13	59.15 (13.18; -1.75)	6.6 - 20.1 - 20.15	25	*	58.51 (14.12; -0.65)	07.23 - 19.96 - 20.12
				1.5	68.13	35.52	35.76 (47.51; -0.67)	1.52 - 20.17 - 20.27	91	*	40.15 (41.06; -13.03)	07.19 - 18.37 - 20.48	
				2	68.13	15.8	16.01 (76.5; -1.32)	2.06 - 19.99 - 20.27	84	*	19.65 (71.15; -24.36)	07.22 - 19.41 - 20.16	
				2.5	68.13	7.58	7.86 (88.46; -3.69)	2.54 - 19.86 - 20.27	77	*	11.01 (83.83; -45.25)	07.23 - 19.96 - 20.12	
				1.5	1.8	28.5	21.72	22.82 (19.92; -5.06)	2.38 - 17.91 - 21.03	79		22.82 (19.92; -5.06)	07.71 - 17.90 - 20.80
				2	28.5	15.8	16 (43.85; -1.26)	4.56 - 19.98 - 20.23	47	*	17.39 (38.98; -10.06)	07.73 - 18.30 - 20.48	
				2.5	28.5	7.58	7.8 (72.63; -2.9)	2.57 - 19.18 - 20.36	76	*	9.23 (67.61; -21.76)	07.77 - 19.07 - 20.18	
				3	28.5	4.06	4.21 (85.22; -3.69)	3.06 - 19.95 - 20.26	69	*	6.19 (78.28; -52.46)	07.71 - 17.90 - 20.80	
				2.5	3	5.99	4.06	4.06 (32.22; 0)	03.09 - 20.18 - 20.26	88	*	4.90 (18.19; -20.68)	009.70 - 16.79 - 23.25
				3.5	5.99	2.48	2.49 (58.43; -0.4)	003.67 - 20.19 - 20.25	86		3.50 (41.56; -41.12)	008.59 - 17.00 - 23.10	
				4	5.99	1.72	1.76 (70.61; -2.32)	004.04 - 19.74 - 20.26	83		2.35 (60.76; -36.62)	008.63 - 17.27 - 21.84	
				4.5	5.99	1.34	1.48 (75.29; -10.44)	05.14 - 18.15 - 20.75	74		1.95 (67.44; -45.52)	008.62 - 17.20 - 22.07	
				3.5	4	2.10	1.72	1.76 (16.19; -2.32)	05.79 - 17.73 - 21.15	54		1.81 (13.8; -5.23)	009.45 - 17.21 - 21.92
				4.5	2.10	1.34	1.45 (30.95; -8.2)	05.40 - 17.27 - 22.10	52		1.52 (27.61; -13.43)	009.42 - 17.07 - 22.54	
				4	5	1.52	1.15	1.15 (24.34; 0)	05.17 - 18.44 - 20.56	42		1.29 (15.13; -12.17)	009.71 - 16.83 - 25.07
				6	1.52	1.02	1.03 (32.23; -0.98)	006.14 - 19.17 - 20.26	44		1.13 (25.65; -10.78)	009.70 - 16.79 - 26.42	

Tabla 3.6. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 5 y p = 7.

PROBLEM PARAMETERS					Xbar always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)		
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	
400	1	2	0.2	0.5	332.25	216.90	232.64 (29.98; -7.25)	0.68 - 11.51 - 11.67	42	*	239.70 (27.85; -10.51)	1.11 - 11.44 - 11.58	
				1	332.25	71.45	96.27 (71.02; -34.73)	1.02 - 11.59 - 11.59	32	*	98.12 (70.46; -37.32)	1.11 - 11.45 - 11.58	
				1.5	332.25	24.52	45.50 (86.3; -85.56)	1.52 - 11.20 - 11.52	23	*	47.03 (85.84; -91.8)	1.52 - 10.79 - 11.64	
				2	332.25	9.79	26.15 (92.12; -167.1)	2.02 - 11.28 - 11.40	16	*	26.91 (91.9; -174.87)	2.02 - 10.75 - 11.53	
				0.5	0.7	165.97	140.83	141.70 (14.62; -0.61)	0.75 - 11.46 - 11.67	44	*	145.14 (12.55; -3.06)	1.34 - 10.23 - 12.05
					1	165.97	71.45	81.73 (50.75; -14.38)	1.04 - 11.51 - 11.59	36	*	83.68 (49.58; -17.11)	1.35 - 11.51 - 11.52
				1.5	165.97	24.52	37.05 (77.67; -51.1)	1.52 - 11.20 - 11.52	27	*	37.05 (77.67; -51.1)	1.52 - 11.20 - 11.52	
				2	165.97	9.79	20.53 (87.63; -109.7)	2.02 - 11.28 - 11.40	20	*	20.53 (87.63; -109.7)	2.02 - 11.28 - 11.40	
				1	1.2	46.41	45.90	41.19 (11.24; 10.26)	4.13 - 10.91 - 11.02	14	*	41.67 (10.21; 9.21)	2.28 - 10.80 - 11.45
					1.5	46.41	24.52	25.78 (44.45; -5.13)	1.60 - 10.86 - 11.59	40		26.57 (42.74; -8.36)	2.27 - 10.64 - 11.52
				2	46.41	9.79	13.10 (71.77; -33.81)	2.02 - 10.75 - 11.53	33		14.37 (69.03; -46.78)	2.25 - 10.18 - 11.84	
				2.5	46.41	4.65	8.31 (82.09; -78.7)	2.56 - 10.85 - 11.37	27	*	8.22 (82.28; -76.77)	2.56 - 11.20 - 11.30	
				1.5	1.8	15.66	13.85	12.69 (18.96; 8.37)	3.37 - 10.16 - 11.57	32		12.80 (18.26; 7.58)	3.57 - 9.97 - 11.72
					2	15.66	9.79	9.93 (36.59; -1.43)	2.57 - 10.23 - 11.71	42		10.20 (34.86; -4.18)	3.59 - 10.09 - 11.57
				2.5	15.66	4.65	6.67 (57.4; -43.44)	2.58 - 9.59 - 12.80	40		6.98 (55.42; -50.1)	3.51 - 9.62 - 12.42	
				3	15.66	2.63	4.47 (71.45; -69.96)	3.85 - 10.97 - 11.07	29	*	4.46 (71.51; -69.58)	3.60 - 10.14 - 11.52	
				2.5	3	3.33	2.63	2.50 (24.92; 4.94)	3.29 - 10.22 - 11.53	51		2.74 (17.71; -4.18)	5.24 - 9.44 - 12.47
					3.5	3.33	1.75	1.87 (43.84; -6.85)	4.05 - 10.97 - 11.03	48	*	2.21 (33.63; -26.28)	5.24 - 9.44 - 12.47
				4	3.33	1.33	1.62 (51.35; -21.8)	4.06 - 10.53 - 11.14	46		1.91 (42.64; -43.6)	5.45 - 9.77 - 11.42	
				4.5	3.33	1.14	1.65 (50.45; -44.73)	4.52 - 9.41 - 12.92	36		1.79 (46.24; -57.01)	5.17 - 9.33 - 13.20	
				3.5	4	1.46	1.33	1.30 (10.95; 2.25)	4.64 - 9.89 - 11.51	27		1.29 (11.64; 3)	4.03 - 10.00 - 11.55
					4.5	1.46	1.14	1.20 (17.8; -5.26)	5.23 - 9.54 - 12.07	23		1.16 (20.54; -1.75)	4.53 - 10.29 - 11.15
				4	5	1.20	1.05	1.09 (9.16; -3.8)	5.13 - 9.27 - 13.86	13		1.06 (11.66; -0.95)	5.13 - 10.82 - 10.82
					6	1.20	1.00	1.07 (10.83; -7)	6.04 - 9.22 - 14.12	11		1.07 (10.83; -7)	6.03 - 10.63 - 10.63

Tabla 3.7. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 1 y p = 2.



PROBLEM PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)			
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	Clp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters		
							(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp			(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp		
400	2	3	0.2	0.5	356.48	244.94	249.93 (29.88; -2.03)	0.51 - 14.06 - 14.31	78	*	263.86 (25.98; -7.72)	2.64 - 14.07 - 14.13		
				1	356.48	91.24	100.58 (71.78; -10.23)	1.02 - 14.06 - 14.27	61	*	116.34 (67.36; -27.5)	2.64 - 14.07 - 14.13		
				1.5	356.48	32.51	41.19 (88.44; -26.69)	1.52 - 14.15 - 14.22	47	*	49.30 (86.17; -51.64)	2.64 - 14.07 - 14.13		
				2	356.48	12.85	20.06 (94.37; -56.1)	2.02 - 14.03 - 14.19	37	*	23.11 (93.51; -79.84)	2.64 - 13.99 - 14.14		
				0.5	0.7	216.90	169.12	171.14 (21.09; -1.19)	0.74 - 14.07 - 14.29	72	*	175.87 (18.91; -3.99)	3.01 - 14.05 - 14.10	
					1	216.90	91.24	96.29 (55.6; -5.53)	1.02 - 14.06 - 14.27	64	*	106.40 (50.94; -16.61)	3.01 - 14.06 - 14.10	
					1.5	216.90	32.51	38.75 (82.13; -19.19)	1.52 - 13.99 - 14.24	51	*	46.01 (78.78; -41.52)	3.01 - 14.06 - 14.10	
					2	216.90	12.85	18.32 (91.55; -42.56)	2.02 - 14.03 - 14.19	41	*	21.97 (89.87; -70.97)	3.01 - 14.06 - 14.10	
					1	1.2	71.45	59.96	59.41 (16.85; 0.91)	2.89 - 14.07 - 14.11	39	*	59.55 (16.65; 0.68)	3.62 - 13.79 - 14.08
					1.5	71.45	32.51	33.69 (52.84; -3.62)	1.52 - 14.05 - 14.23	53	*	36.18 (49.36; -11.28)	3.62 - 13.79 - 14.08	
				1	2	71.45	12.85	14.92 (79.11; -16.1)	2.02 - 14.03 - 14.19	52	*	17.37 (75.68; -35.17)	3.62 - 13.79 - 14.08	
					2.5	71.45	5.90	8.17 (88.56; -38.47)	2.56 - 14.06 - 14.14	43	*	9.82 (86.25; -66.44)	3.61 - 13.46 - 14.19	
					1.5	1.8	24.52	18.33	17.99 (26.63; 1.85)	3.23 - 14.06 - 14.08	49	*	19.13 (21.98; -4.36)	4.15 - 12.73 - 14.78
						2	24.52	12.85	13.08 (46.65; -1.78)	2.60 - 13.89 - 14.16	57	*	13.67 (44.24; -6.38)	4.20 - 13.48 - 14.11
					2.5	24.52	5.90	6.53 (73.36; -10.67)	2.57 - 14.05 - 14.14	58	*	7.44 (69.65; -26.1)	4.20 - 13.48 - 14.11	
					3	24.52	3.18	4.16 (83.03; -30.81)	3.22 - 13.96 - 14.09	49	*	4.88 (80.09; -53.45)	4.18 - 13.09 - 14.35	
				2.5	3	4.65	3.18	3.31 (28.81; -4.08)	4.12 - 12.75 - 14.75	57	*	3.61 (22.36; -13.52)	5.11 - 12.28 - 15.90	
					3.5	4.65	2.01	2.09 (55.05; -3.98)	3.52 - 13.67 - 14.12	65	*	2.47 (46.88; -22.88)	5.13 - 12.40 - 15.39	
					4	4.65	1.46	1.79 (61.5; -22.6)	4.04 - 12.45 - 15.41	57	*	1.86 (60; -27.39)	5.17 - 12.67 - 14.71	
					4.5	4.65	1.20	1.58 (66.02; -31.66)	4.52 - 12.39 - 15.53	53	*	1.69 (63.65; -40.83)	5.11 - 12.26 - 16.01	
					3.5	4	1.75	1.46	1.54 (12; -5.47)	9.07 - 12.35 - 14.44	19	*	1.58 (9.71; -8.21)	5.87 - 12.11 - 17.12
						4.5	1.75	1.20	1.25 (28.57; -4.16)	5.41 - 12.76 - 14.52	38	*	1.43 (18.28; -19.16)	5.85 - 12.03 - 18.87
				4	5	1.33	1.08	1.11 (16.54; -2.77)	5.12 - 12.45 - 15.22	24	*	1.13 (15.03; -4.62)	6.23 - 12.23 - 15.94	
					6	1.33	1.01	1.07 (19.54; -5.94)	7.03 - 12.85 - 14.09	23	*	1.07 (19.54; -5.94)	6.16 - 12.01 - 19.79	

Tabla 3.8. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 2 y p = 3.

PROBLEM PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)	
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters
							(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp			(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp
400	2	4	0.2	0.5	356.48	264.91	267.68 (24.91; -1.04)	0.51 - 16.36 - 16.36	78	*	280.60 (21.28; -5.92)	2.65 - 15.35 - 16.09
							116.98 (67.18; -8.45)	1.02 - 15.98 - 16.30	61	*	133.21 (62.63; -23.5)	2.55 - 15.31 - 16.11
				1	356.48	107.86	50.10 (85.94; -25.37)	1.52 - 15.26 - 16.27	47	*	58.84 (83.49; -47.24)	2.65 - 15.35 - 16.09
							24.12 (93.23; -52.27)	2.02 - 15.33 - 16.19	37	*	27.59 (92.26; -74.17)	2.65 - 15.24 - 16.10
				1.5	356.48	39.96	191.05 (11.91; -0.24)	0.92 - 16.20 - 16.31	67	*	192.33 (11.32; -0.91)	3.02 - 15.24 - 16.04
							112.04 (48.34; -3.87)	1.02 - 15.98 - 16.30	64	*	121.59 (43.94; -12.72)	3.02 - 15.35 - 16.03
				2	356.48	15.84	46.34 (78.63; -15.96)	1.52 - 16.10 - 16.23	51	*	54.36 (74.93; -36.03)	3.02 - 15.58 - 16.02
							22.02 (89.84; -39.01)	2.02 - 15.32 - 16.19	41	*	25.98 (88.02; -64.01)	3.02 - 15.58 - 16.02
				0.5 0.7	216.90	190.59	66.47 (72.4; 8.19)	7.25 - 12.79 - 16.22	7		67.16 (72.4; 7.23)	3.61 - 13.49 - 16.45
							40.40 (43.45; -1.1)	1.52 - 16.10 - 16.23	62	*	42.36 (40.71; -6)	3.64 - 14.69 - 16.00
				1	216.90	107.86	17.93 (74.9; -13.19)	2.02 - 15.32 - 16.19	52	*	20.26 (71.64; -27.9)	3.65 - 15.30 - 15.93
							9.58 (86.59; -34.17)	2.57 - 15.27 - 16.11	43	*	13.78 (80.71; -92.99)	3.59 - 12.77 - 17.28
				1.5	216.90	39.96	20.58 (16.06; 9.09)	6.42 - 15.14 - 15.39	21	*	20.84 (15; 7.95)	4.26 - 14.95 - 15.85
							15.49 (36.82; 2.2)	3.11 - 15.31 - 16.02	51	*	15.61 (36.33; 1.45)	4.26 - 15.05 - 15.84
				2	216.90	15.84	7.67 (68.71; -7.42)	2.57 - 15.27 - 16.11	58	*	9.97 (59.33; -39.63)	4.16 - 12.78 - 17.13
							4.68 (80.91; -25.46)	3.20 - 15.24 - 16.01	50	*	6.29 (74.34; -68.63)	4.15 - 12.64 - 17.42
				1 1.2	71.45	72.40	3.50 (24.73; 6.16)	6.42 - 15.14 - 15.39	46	*	4.38 (5.8; -17.42)	5.07 - 12.02 - 22.47
							2.33 (49.89; -2.64)	4.06 - 14.36 - 15.99	63		3.30 (29.03; -45.37)	5.08 - 12.08 - 20.59
				1.5 1.8	24.52	22.64	1.77 (61.93; -10.62)	4.25 - 15.21 - 15.83	64	*	2.35 (49.46; -46.87)	5.09 - 12.14 - 19.67
							1.55 (66.66; -22.04)	4.53 - 14.77 - 15.82	61	*	1.87 (59.78; -47.24)	5.09 - 12.15 - 19.55
				2.5	24.52	15.84	1.51 (13.71; 5.62)	5.72 - 15.04 - 15.55	50	*	1.60 (8.57; 0)	5.90 - 12.23 - 18.59
							1.29 (26.28; -1.57)	6.63 - 14.92 - 15.35	45	*	1.49 (14.85; -17.32)	5.85 - 12.04 - 21.39
				3	24.52	3.73	1.19 (10.52; -7.2)	5.23 - 12.07 - 20.71	22		1.20 (9.77; -8.1)	6.17 - 12.04 - 21.28
							1.06 (20.3; -4.95)	6.13 - 12.16 - 19.08	21		1.07 (19.54; -5.94)	6.20 - 12.13 - 19.45
3.5	24.52	7.14	1.07 (20.3; -4.95)	6.13 - 12.16 - 19.08	21		1.07 (19.54; -5.94)	6.20 - 12.13 - 19.45				
			1.07 (20.3; -4.95)	6.13 - 12.16 - 19.08	21		1.07 (19.54; -5.94)	6.20 - 12.13 - 19.45				

Tabla 3.9. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 2 y p = 4.

PROBLEM PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)	
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	Clp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters
							(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp			(%T2p1; %T2p)	w - CLp1 - CLp
400	5	6	0.2	0.5	376.27	289.71	289.75 (22.99; -0.01)	0.51 - 20.21 - 20.25	99	*	296.67 (21.15; -2.4)	6.29 - 20.20 - 20.21
					376.27	134.33	134.58 (64.23; -0.18)	1.02 - 20.21 - 20.25	96	*	148.11 (60.63; -10.25)	6.29 - 20.12 - 20.21
					376.27	53.59	54.09 (85.62; -0.93)	1.52 - 20.21 - 20.25	91	*	70.89 (81.15; -32.28)	6.28 - 19.51 - 20.48
					376.27	21.70	22.38 (94.05; -3.13)	2.02 - 20.19 - 20.25	85	*	32.60 (91.33; -50.23)	6.28 - 19.51 - 20.48
					278.88	220.50	220.54 (20.91; -0.01)	0.72 - 20.21 - 20.25	98	*	225.13 (19.27; -2.09)	6.65 - 20.12 - 20.21
					278.88	134.33	134.49 (51.77; -0.11)	1.02 - 20.22 - 20.25	96	*	151.70 (45.6; -12.93)	6.64 - 19.50 - 20.48
	0.5	0.7	1.5	2	278.88	53.59	53.95 (80.65; -0.67)	1.52 - 20.21 - 20.25	92	*	68.82 (75.32; -28.41)	6.64 - 19.50 - 20.48
					278.88	21.70	22.25 (92.02; -2.53)	2.02 - 20.19 - 20.25	86	*	31.90 (88.56; -47)	6.64 - 19.50 - 20.48
					121.87	93.57	93.53 (23.25; 0.04)	2.53 - 20.18 - 20.25	83	*	95.10 (21.96; -1.63)	7.23 - 20.10 - 20.20
					121.87	53.59	56.26 (53.83; -4.98)	1.52 - 19.59 - 20.48	93		57.63 (52.71; -7.53)	7.23 - 20.10 - 20.20
					121.87	21.70	21.98 (81.96; -1.29)	2.02 - 20.14 - 20.26	89	*	26.46 (78.28; -21.93)	7.23 - 20.10 - 20.20
					121.87	9.63	10.46 (91.41; -8.61)	2.56 - 19.59 - 20.48	83		14.40 (88.18; -49.53)	7.22 - 19.48 - 20.48
	1.5	1.8	2	2.5	46.93	30.90	31.78 (32.28; -2.84)	1.87 - 19.59 - 20.48	93		31.52 (32.83; -2)	7.81 - 20.15 - 20.18
					46.93	21.70	22.14 (52.82; -2.02)	2.07 - 19.82 - 20.35	92	*	24.08 (48.68; -10.96)	7.79 - 19.45 - 20.48
					46.93	9.63	10.35 (77.94; -7.47)	2.56 - 19.48 - 20.56	88		12.07 (74.28; -25.33)	7.79 - 19.45 - 20.48
					46.93	4.84	5.22 (88.87; -7.85)	3.04 - 19.56 - 20.49	83		7.28 (84.48; -50.41)	7.77 - 19.16 - 20.81
					8.38	4.84	4.84 (42.24; 0)	3.86 - 20.20 - 20.24	85	*	5.33 (36.39; -10.12)	8.83 - 19.09 - 20.87
					8.38	2.80	2.82 (66.34; -0.71)	3.67 - 20.13 - 20.25	85	*	3.30 (60.62; -17.85)	8.84 - 19.18 - 20.73
	3.5	4	4.5	4	8.38	1.86	2.01 (76.01; -8.06)	4.05 - 19.19 - 20.87	82		2.37 (71.71; -27.41)	8.84 - 19.20 - 20.70
					8.38	1.40	1.56 (81.38; -11.42)	4.56 - 18.99 - 21.22	79		2.16 (74.22; -54.28)	8.78 - 18.55 - 23.04
					2.53	1.86	1.86 (26.48; 0)	7.58 - 19.79 - 20.28	59	*	2.01 (20.55; -8.06)	9.74 - 18.77 - 21.62
					2.53	1.40	1.46 (42.29; -4.28)	5.30 - 19.16 - 20.88	61		1.59 (37.15; -13.57)	9.73 - 18.70 - 21.92
					1.73	1.18	1.21 (30.05; -2.54)	7.71 - 19.19 - 20.77	43		1.37 (20.8; -16.1)	10.10 - 18.44 - 24.85
					1.73	1.02	1.04 (39.88; -1.96)	6.71 - 18.86 - 21.49	42		1.21 (30.05; -18.62)	10.09 - 18.39 - 29.50

Tabla 3.10. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 5 y p = 6.

PROBLEM PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)					
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d)	Optimum Parameters	% p	Clp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters				
							(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp			(%T2p1; %T2p)	w - Clp1 - Clp				
400	5	7	0.2	0.5	376.27	297.34	298.04 (20.79; -0.23)	0.51 - 21.75 - 22.04	99	*	310.05 (17.59; -4.27)	6.29 - 20.47 - 22.15				
				1	376.27	145.05	145.44 (61.34; -0.26)	1.03 - 21.86 - 22.04	96	*	160.11 (57.44; -10.38)	6.30 - 21.75 - 21.95				
				1.5	376.27	59.85	60.44 (83.93; -0.98)	1.52 - 21.82 - 22.04	91	*	77.46 (79.41; -29.42)	6.29 - 20.47 - 22.15				
				2	376.27	24.57	25.36 (93.26; -3.21)	2.02 - 21.73 - 22.04	85	*	34.60 (90.8; -40.82)	6.30 - 21.58 - 21.96				
				0.5	0.7	278.88	231.11	231.62 (16.94; -0.22)	0.72 - 21.86 - 22.04	98	*	238.18 (14.59; -3.05)	6.65 - 20.45 - 22.14			
						1	278.88	145.05	145.27 (47.9; -0.15)	1.03 - 21.75 - 22.04	96	*	160.17 (42.56; -10.42)	6.65 - 20.47 - 22.13		
						1.5	278.88	59.85	63.75 (77.14; -6.51)	1.66 - 20.47 - 22.25	90	*	71.58 (74.33; -19.59)	6.66 - 21.72 - 21.94		
						2	278.88	24.57	25.15 (90.98; -2.36)	2.03 - 22.03 - 22.03	86	*	33.73 (87.9; -37.28)	6.66 - 21.72 - 21.94		
						1	1.2	121.87	102.68	103.57 (15.01; -0.86)	4.30 - 20.47 - 22.22	61	*	105.39 (13.52; -2.63)	7.23 - 19.83 - 22.43	
								1.5	121.87	59.85	60.05 (50.72; -0.33)	1.90 - 21.75 - 22.04	90	*	63.81 (47.64; -6.61)	7.25 - 21.55 - 21.92
				2	121.87			24.57	25.07 (79.42; -2.03)	2.02 - 21.24 - 22.08	89	*	30.88 (74.66; -25.68)	7.24 - 20.45 - 22.11		
				2.5	121.87			10.88	11.79 (90.32; -8.36)	2.58 - 20.46 - 22.25	83	*	15.82 (87.01; -45.4)	7.24 - 20.45 - 22.11		
				1.5	1.8	46.93	34.88	34.86 (25.71; 0.05)	3.81 - 21.75 - 22.02	77	*	34.99 (25.44; -0.31)	7.85 - 21.86 - 21.88			
						2	46.93	24.57	24.61 (47.56; -0.16)	2.02 - 21.74 - 22.04	93	*	25.66 (45.32; -4.43)	7.84 - 21.38 - 21.90		
						2.5	46.93	10.88	11.01 (76.53; -1.19)	2.56 - 21.65 - 22.04	88	*	13.20 (71.87; -21.32)	7.82 - 20.44 - 22.08		
						3	4	46.93	5.41	5.60 (88.06; -3.51)	3.03 - 21.57 - 22.04	84	*	7.42 (84.18; -37.15)	7.83 - 20.91 - 21.96	
								2.5	8.38	5.41	5.86 (30.07; -8.31)	3.82 - 19.35 - 23.05	83	*	6.98 (16.7; -29.02)	8.78 - 18.55 - 25.77
								3.5	8.38	3.07	3.08 (63.24; -0.32)	3.53 - 21.98 - 22.02	89	*	3.84 (54.17; -25.08)	8.83 - 19.09 - 23.24
				4	8.38			2.00	2.17 (74.1; -8.5)	4.14 - 19.63 - 22.73	82	*	2.45 (70.76; -22.5)	8.93 - 20.44 - 22.00		
				3.5	4	8.38	1.47	1.80 (78.52; -22.44)	4.68 - 18.79 - 24.37	78	*	2.22 (73.5; -51.02)	8.80 - 18.74 - 24.37			
						2.53	2.00	1.99 (21.34; 0.5)	10.60 - 20.44 - 21.84	50	*	2.04 (19.36; -2)	9.83 - 19.38 - 22.65			
						4.5	2.53	1.47	1.57 (37.94; -6.8)	5.69 - 19.19 - 23.25	61	*	1.53 (39.52; -4.08)	10.02 - 21.16 - 21.76		
						4	5	1.73	1.21	1.23 (28.9; -1.65)	6.24 - 20.08 - 22.32	49	*	1.30 (24.85; -7.43)	10.18 - 18.84 - 23.78	
								6	1.73	1.03	1.05 (39.3; -1.94)	6.36 - 19.68 - 22.60	47	*	1.14 (34.1; -10.67)	10.12 - 18.54 - 25.72

Tabla 3.11. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 5 y p = 7.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)		
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	
1000	1	2	0.2	0.5	806.42	500.00	544.64 (32.46; -8.92)	0.51 - 12.78 - 13.72	48		550.90 (31.68; -10.18)	01.12 - 13.43 - 13.43	
				1	806.42	145.95	195.55 (75.75; -33.98)	001.02 - 13.35 - 13.46	32		204.92 (74.58; -40.4)	001.12 - 12.79 - 13.54	
				1.5	806.42	44.63	82.49 (89.77; -84.83)	001.52 - 12.78 - 13.45	23		82.34 (89.78; -84.49)	001.52 - 12.78 - 13.45	
				2	806.42	15.95	40.86 (94.93; -156.17)	002.02 - 13.15 - 13.28	16		41.65 (94.83; -161.12)	002.02 - 12.73 - 13.36	
				0.5	0.7	369.51	309.15	311.01 (15.83; -0.6)	002.05 - 13.24 - 13.26	20		361.49 (2.17; -16.93)	004.75 - 12.71 - 13.21
				1	369.51	145.95	166.49 (54.94; -14.07)	001.14 - 13.43 - 13.43	34		172.86 (53.21; -18.43)	001.36 - 12.77 - 13.49	
				1.5	369.51	44.63	65.25 (82.34; -46.2)	001.52 - 13.31 - 13.36	27		66.70 (81.94; -49.45)	001.52 - 12.82 - 13.44	
				2	369.51	15.95	32.04 (91.32; -100.87)	002.02 - 13.15 - 13.28	20		32.04 (91.32; -100.87)	002.02 - 13.14 - 13.28	
				1	1.2	90.87	89.47	81.99 (9.77; 8.36)	002.04 - 13.26 - 13.30	34		80.70 (11.19; 9.8)	002.02 - 13.02 - 13.28
				1.5	90.87	44.63	46.83 (48.46; -4.92)	001.98 - 12.79 - 13.35	35		20.73 (49.09; -3.65)	002.34 - 13.19 - 13.22	
				2	90.87	15.95	20.46 (77.48; -28.27)	002.04 - 12.79 - 13.34	34		11.41 (77.18; -29.96)	002.34 - 13.19 - 13.22	
				2.5	90.87	6.82	11.49 (87.35; -68.47)	002.53 - 12.72 - 13.26	28		22.07 (87.44; -67.3)	002.56 - 13.08 - 13.19	
				1.5	1.8	27.26	23.57	15.37 (21.16; 8.82)	002.56 - 12.68 - 13.26	44		17.38 (19.03; 6.36)	003.78 - 11.49 - 13.99
				2	27.26	15.95	7.77 (43.61; 3.63)	002.57 - 12.77 - 13.24	44		9.80 (36.24; -8.96)	003.78 - 11.50 - 13.97	
				2.5	27.26	6.82	4.97 (71.49; -13.92)	002.62 - 12.77 - 13.23	43		6.17 (64.04; -43.69)	003.78 - 11.49 - 13.99	
				3	27.26	3.50	3.23 (81.76; -42)	003.04 - 12.69 - 13.17	38		3.56 (77.36; -76.28)	003.78 - 11.49 - 13.99	
				2.5	3	4.66	3.50	2.59 (30.68; 7.71)	003.86 - 12.68 - 13.02	56		2.72 (23.6; -1.71)	006.33 - 11.32 - 13.65
				3.5	4.66	2.13	1.78 (44.42; -21.59)	04.03 - 11.14 - 14.99	49		2.31 (41.63; -27.69)	006.33 - 11.32 - 13.65	
				4	4.66	1.51	1.68 (61.8; -17.88)	004.06 - 12.30 - 13.11	53		2.12 (50.42; -52.98)	006.33 - 11.32 - 13.65	
				4.5	4.66	1.22	1.47 (63.94; -37.7)	04.55 - 11.68 - 13.49	46		1.59 (54.5; -73.77)	006.33 - 11.32 - 13.65	
				3.5	4	1.72	1.51	1.30 (14.53; 2.64)	04.55 - 11.50 - 13.77	37		1.25 (1.74; -11.92)	005.34 - 10.83 - 23.32
				4.5	4.5	1.72	1.22	1.14 (24.41; -6.55)	05.28 - 11.16 - 14.54	32		1.05 (7.55; -30.32)	005.34 - 10.83 - 23.32
				4	5	1.31	1.09	1.08 (12.97; -4.58)	07.05 - 11.13 - 14.05	16		1.05 (4.58; -14.67)	005.28 - 10.83 - 23.41
				6	1.31	1.01	1.08 (17.55; -6.93)	06.08 - 10.89 - 16.90	18		1.05 (19.84; -3.96)	005.13 - 12.76 - 12.81	

Tabla 3.12. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 1 y p = 2.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)	
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp
1000	2	3	0.2	0.5	876.52	570.38	654.83 (25.29; -14.8)	2.13 - 15.25 - 16.31	34		551.94 (31.55; -10.38)	01.11 - 13.35 - 13.44
				1	876.52	191.13	210.66 (75.96; -10.21)	1.02 - 16.07 - 16.17	60	*	633.54 (27.72; -11.07)	02.64 - 15.35 - 16.29
				1.5	876.52	60.93	75.25 (91.41; -23.5)	1.58 - 15.89 - 16.16	45	*	241.56 (72.44; -26.38)	02.65 - 16.06 - 16.10
				2	876.52	21.61	32.18 (96.32; -48.91)	2.09 - 15.89 - 16.13	35	*	90.83 (89.63; -49.07)	02.65 - 15.96 - 16.11
		0.5	0.7	1	500	378.25	406.44 (18.71; -7.45)	2.86 - 15.35 - 16.25	24		37.65 (95.7; -74.22)	02.65 - 16.06 - 16.10
				1.5	500	191.13	213.32 (57.33; -11.6)	1.04 - 15.25 - 16.38	59		399.54 (20.09; -5.62)	03.02 - 15.34 - 16.26
				2	500	60.93	70.69 (85.86; -16.01)	1.56 - 15.91 - 16.16	46	*	221.05 (55.79; -15.65)	03.02 - 15.96 - 16.08
				1	145.95	120.14	30.93 (93.81; -43.12)	4.11 - 14.71 - 16.64	13		90.22 (81.95; -48.07)	03.02 - 15.23 - 16.32
				1.5	145.95	60.93	123.33 (15.49; -2.65)	1.58 - 15.91 - 16.16	45	*	35.77 (92.84; -65.52)	03.02 - 15.96 - 16.08
				2	145.95	21.61	62.54 (57.14; -2.64)	2.05 - 14.89 - 16.64	36		119.68 (17.99; 0.38)	03.65 - 15.35 - 16.19
				2.5	145.95	8.94	27.83 (80.93; -28.78)	2.62 - 15.85 - 16.1	27	*	66.48 (54.45; -9.1)	03.66 - 15.94 - 16.03
		1.5	1.8	1	44.63	32.16	11.82 (91.9; -32.21)	4.57 - 15.27 - 16.09	10		29.26 (79.95; -35.4)	03.65 - 15.34 - 16.20
				2	44.63	21.61	31.85 (28.63; 0.96)	2.05 - 15.34 - 16.32	36		13.99 (90.41; -56.48)	03.66 - 15.94 - 16.03
				2.5	44.63	8.94	22.31 (50.01; -3.23)	2.56 - 15.34 - 16.28	28		31.58 (29.24; 1.8)	04.28 - 15.67 - 16.02
				3	44.63	4.37	10.05 (77.48; -12.41)	3.22 - 15.23 - 16.23	20		22.37 (49.87; -3.51)	04.28 - 15.77 - 16.00
				2.5	6.82	4.37	5.59 (87.47; -27.91)	05.41 - 14.07 - 18.26	51		12.05 (73; -34.78)	04.25 - 14.71 - 16.64
				3.5	6.82	2.53	5.18 (24.04; -18.53)	003.99 - 15.35 - 16.16	66		6.48 (85.48; -48.28)	04.26 - 15.03 - 16.32
				4	6.82	1.71	2.65 (61.14; -4.74)	004.18 - 15.23 - 16.20	65		2.78 (59.23; -9.88)	005.42 - 15.15 - 16.10
				4.5	6.82	1.32	1.92 (71.84; -12.28)	004.53 - 15.40 - 16.08	62		2.07 (69.64; -21.05)	005.43 - 15.26 - 16.04
				3.5	2.13	1.71	1.61 (76.39; -21.96)	004.39 - 15.71 - 16.00	57		1.75 (74.34; -32.57)	006.33 - 14.33 - 17.04
				4.5	2.13	1.32	1.67 (21.59; 2.33)	004.62 - 15.61 - 16.00	56		1.75 (17.84; -2.33)	006.25 - 13.86 - 21.14
				4	1.51	1.13	1.32 (38.02; 0)	06.54 - 14.05 - 18.17	30		1.66 (22.06; -25.75)	006.66 - 13.86 - 21.05
				6	1.51	1.01	1.20 (20.52; -6.19)	06.12 - 13.87 - 20.72	30		1.28 (15.23; -13.27)	006.66 - 13.86 - 21.05

Tabla 3.13. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 2 y p = 3.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)			
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp		
1000	2	4	0.2	0.5	876.52	628.41	694.42 (20.77; -10.5)	3.88 - 17.88 - 17.98	14	*	663.95 (24.25; -5.65)	02.65 - 17.80 - 18.16		
				1	876.52	230.76	300.99 (65.66; -30.43)	1.45 - 17.89 - 18.29	48	*	283.08 (67.7; -22.67)	02.65 - 17.80 - 18.16		
				1.5	876.52	76.66	98.3 (88.78; -28.22)	1.62 - 17.64 - 18.28	44	*	110.22 (87.42; -43.77)	02.65 - 17.80 - 18.16		
				2	876.52	27.31	40.78 (95.34; -49.32)	2.1 - 17.75 - 18.22	35	*	45.91 (94.76; -68.1)	02.65 - 17.80 - 18.16		
				0.5	0.7	1	500	434.68	444.74 (11.05; -2.31)	4.51 - 17.89 - 17.89	10	*	438.59 (12.28; -0.89)	03.02 - 16.49 - 18.24
						1.5	500	230.76	266.42 (46.71; -15.45)	3.85 - 17.91 - 17.99	14	*	257.29 (48.54; -11.49)	03.03 - 17.75 - 18.11
				1	1.5	1	500	76.66	91.83 (81.63; -19.78)	1.64 - 17.89 - 18.27	44	*	102.11 (79.57; -33.19)	03.03 - 17.75 - 18.11
						2	500	27.31	37.25 (92.55; -36.39)	2.1 - 17.75 - 18.22	35	*	43.39 (91.32; -58.87)	03.03 - 17.75 - 18.11
				1	1.2	1	145.95	148.29	134.03 (8.16; 9.61)	7.56 - 15.15 - 17.92	2		136.95 (6.16; 7.64)	03.65 - 15.10 - 18.80
						1.5	145.95	76.66	79.71 (45.38; -3.97)	1.99 - 17.9 - 18.22	37	*	79.43 (45.57; -3.61)	03.67 - 17.79 - 18.02
				1	2	1	145.95	27.31	31.58 (78.36; -15.63)	2.58 - 17.89 - 18.15	27	*	33.85 (76.8; -23.94)	03.67 - 17.79 - 18.02
						2.5	145.95	11.09	16.01 (89.03; -44.36)	2.58 - 15.25 - 18.75	27		16.55 (88.66; -49.23)	03.67 - 17.47 - 18.03
				1.5	1.8	1	44.63	40.71	37.06 (16.96; 8.96)	7.32 - 15.27 - 17.93	2		37.36 (16.28; 8.22)	04.31 - 17.62 - 17.93
						2	44.63	27.31	26.61 (40.37; 2.56)	3.13 - 17.93 - 18.08	21	*	26.52 (40.57; 2.89)	04.31 - 17.62 - 17.93
				1.5	2.5	1	44.63	11.09	11.69 (73.8; -5.41)	2.58 - 17.89 - 18.15	27	*	18.78 (57.92; -69.34)	04.23 - 14.20 - 20.52
						3	44.63	5.26	6.57 (85.27; -24.9)	3.37 - 16.62 - 18.15	18	*	7.14 (84; -35.74)	04.30 - 16.81 - 17.99
				2.5	3	1	6.82	5.26	5.20 (23.75; 1.14)	08.00 - 14.61 - 18.44	32		6.31 (7.47; -19.96)	006.65 - 13.82 - 24.34
						3.5	6.82	2.92	3.01 (55.86; -3.08)	03.94 - 15.76 - 18.32	68		3.86 (43.4; -32.19)	005.34 - 14.12 - 20.69
				2.5	4	1	6.82	1.90	2.08 (69.5; -9.47)	04.51 - 16.95 - 17.94	65	*	2.68 (60.7; -41.05)	005.34 - 14.12 - 20.69
						4.5	6.82	1.41	1.72 (74.78; -21.98)	004.82 - 16.50 - 17.95	62		1.84 (73.02; -30.49)	005.44 - 15.39 - 18.24
				3.5	4	1	2.13	1.90	1.78 (16.43; 6.31)	06.33 - 16.60 - 17.66	55	*	1.98 (7.04; -4.21)	006.26 - 13.91 - 22.65
						4.5	2.13	1.41	1.63 (23.47; -15.6)	08.05 - 14.01 - 20.78	34		1.68 (21.12; -19.14)	006.26 - 13.91 - 22.65
				4	5	1	1.51	1.18	1.32 (12.58; -11.86)	06.48 - 13.86 - 23.78	29		1.32 (12.58; -11.86)	006.66 - 13.87 - 23.62
						6	1.51	1.02	1.10 (27.15; -7.84)	07.07 - 14.09 - 20.46	29		1.12 (25.82; -9.8)	006.66 - 13.86 - 24.01

Tabla 3.14. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 2 y p = 4.

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)			
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp		
1000	5	6	0.2	0.5	935.3	695.63	728.53 (22.1; -4.72)	0.57 - 22.29 - 22.45	99	*	712.33 (23.83; -2.4)	06.30 - 22.39 - 22.43		
				1	935.3	295.08	311.35 (66.71; -5.51)	1.06 - 22.29 - 22.45	96	*	322.69 (65.49; -9.35)	06.30 - 22.39 - 22.43		
				1.5	935.3	106.35	110.02 (88.23; -3.45)	1.52 - 22.26 - 22.45	91	*	128.50 (86.26; -20.82)	06.30 - 22.39 - 22.43		
				2	935.3	38.83	40.26 (95.69; -3.68)	2.02 - 22.23 - 22.45	85	*	61.95 (93.37; -59.54)	06.30 - 21.36 - 23.04		
				0.5	0.7	0.7	667.43	512.45	558.24 (16.35; -8.93)	10.56 - 22.33 - 22.33	6	*	522.95 (21.64; -2.04)	06.66 - 22.34 - 22.43
						1	667.43	295.08	309.75 (53.59; -4.97)	1.06 - 22.29 - 22.45	96	*	313.33 (53.05; -6.18)	06.66 - 22.39 - 22.42
				1.5	1.5	1.5	667.43	106.35	109.56 (83.58; -3.01)	1.52 - 22.26 - 22.45	91	*	125.16 (81.24; -17.68)	06.66 - 22.34 - 22.43
						2	667.43	38.83	40.01 (94; -3.03)	2.02 - 22.23 - 22.45	85	*	51.98 (92.21; -33.86)	06.66 - 22.34 - 22.43
				1	1.2	1.2	264.95	197.48	203.3 (23.26; -2.94)	1.28 - 22.28 - 22.45	94	*	200.14 (24.46; -1.34)	07.26 - 22.33 - 22.42
						1.5	264.95	106.35	108.4 (59.08; -1.92)	1.52 - 22.26 - 22.45	91	*	113.07 (57.32; -6.31)	07.26 - 22.34 - 22.42
				2	2	2	264.95	38.83	39.46 (85.1; -1.62)	2.02 - 22.27 - 22.45	85	*	46.13 (82.58; -18.79)	07.26 - 22.34 - 22.42
						2.5	264.95	15.56	16.1 (93.92; -3.47)	2.62 - 22.38 - 22.44	76	*	21.31 (91.95; -36.95)	07.26 - 22.27 - 22.43
				1.5	1.8	1.8	91.78	57.64	57.98 (36.82; -0.58)	1.82 - 22.3 - 22.45	87	*	58.53 (36.22; -1.54)	07.86 - 22.32 - 22.41
						2	91.78	38.83	39.04 (57.46; -0.54)	2.44 - 22.39 - 22.44	78	*	40.62 (55.74; -4.6)	07.86 - 22.32 - 22.41
				2.5	2.5	2.5	91.78	15.56	20.36 (77.81; -30.84)	2.59 - 21.02 - 23.69	76	*	18.84 (79.47; -21.07)	07.85 - 21.74 - 22.63
						3	91.78	7.1	7.32 (92.02; -3.09)	3.11 - 22.36 - 22.44	68	*	9.74 (89.38; -37.18)	07.85 - 21.74 - 22.63
				2.5	3	3	13.30	7.10	7.11 (46.54; -0.14)	03.18 - 22.37 - 22.46	91	*	8.36 (37.14; -17.74)	08.96 - 20.99 - 23.70
						3.5	13.30	3.75	3.77 (71.65; -0.53)	003.66 - 22.35 - 22.46	89	*	4.13 (68.94; -10.13)	009.00 - 21.93 - 22.49
				4	4	4	13.30	2.29	2.34 (82.4; -2.18)	004.06 - 22.34 - 22.46	87	*	2.75 (79.32; -20.08)	009.01 - 22.21 - 22.40
						4.5	13.30	1.61	1.69 (87.29; -4.96)	004.56 - 22.37 - 22.45	85	*	2.14 (83.9; -32.91)	009.01 - 22.21 - 22.40
				3.5	4	4	3.33	2.29	2.27 (31.83; 0.87)	004.69 - 22.31 - 22.46	75	*	2.82 (15.31; -23.14)	009.97 - 20.59 - 26.69
						4.5	3.33	1.61	1.61 (51.65; 0)	005.45 - 22.31 - 22.45	74	*	2.07 (37.83; -28.57)	009.97 - 20.62 - 26.09
				4	5	5	2.09	1.28	1.27 (39.23; 0.78)	005.45 - 22.31 - 22.45	59	*	1.51 (27.75; -17.96)	0010.45 - 20.59 - 26.65
						6	2.09	1.04	1.06 (49.28; -1.92)	006.55 - 22.03 - 22.51	57	*	1.17 (44.01; -12.5)	0010.45 - 20.60 - 26.43

Tabla 3.15. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 5 y p = 6.



DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	DDT2				DDT2 (%p = 30)			
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp		
1000	5	7	0.2	0.5	935.3	712.51	754.32 (19.34; -5.86)	0.51 - 24.21 - 24.31	99	*	735.23 (21.39; -3.18)	06.30 - 24.25 - 24.25		
				1	935.3	321.18	341.59 (63.47; -6.35)	1.02 - 24.21 - 24.31	96	*	351.77 (62.38; -9.52)	06.30 - 24.25 - 24.25		
				1.5	935.3	120.32	125.08 (86.62; -3.95)	1.56 - 23.92 - 24.31	91	*	145.49 (84.44; -20.91)	06.30 - 23.90 - 24.26		
				2	935.3	44.64	46.5 (95.02; -4.16)	2.04 - 23.63 - 24.32	84	*	62.60 (93.3; -40.23)	06.30 - 23.00 - 24.37		
				0.5	0.7	0.7	667.43	538.54	584.34 (12.44; -8.5)	11.26 - 23.99 - 24	5	*	551.15 (17.42; -2.34)	06.67 - 23.87 - 24.25
						1	667.43	321.18	339.57 (49.12; -5.72)	1.02 - 24.21 - 24.31	96	*	341.59 (48.82; -6.35)	06.67 - 24.24 - 24.24
				1.5	1.5	1.5	667.43	120.32	124.5 (81.34; -3.47)	1.56 - 23.92 - 24.31	91	*	141.05 (78.86; -17.22)	06.67 - 24.24 - 24.24
						2	667.43	44.64	46.74 (92.99; -4.7)	2.6 - 23.93 - 24.3	76	*	60.98 (90.86; -36.6)	06.67 - 23.03 - 24.35
				1	1.2	1.2	264.95	218.98	225.56 (14.86; -3)	9.61 - 23.02 - 24.2	9	*	221.12 (16.54; -0.97)	07.27 - 23.02 - 24.33
						1.5	264.95	120.32	122.99 (53.57; -2.21)	1.56 - 23.92 - 24.31	91	*	127.07 (52.04; -5.61)	07.27 - 23.85 - 24.23
				2	2	2	264.95	44.64	45.39 (82.86; -1.68)	2.11 - 24.3 - 24.3	83	*	52.78 (80.07; -18.23)	07.27 - 23.68 - 24.24
						2.5	264.95	17.88	18.97 (92.84; -6.09)	2.58 - 22.99 - 24.42	76	*	24.69 (90.68; -38.08)	07.27 - 23.02 - 24.33
				1.5	1.8	1.8	91.78	65.99	66.58 (27.45; -0.89)	2.72 - 23.91 - 24.3	74	*	66.68 (27.34; -1.04)	07.86 - 22.95 - 24.32
						2	91.78	44.64	45.09 (50.87; -1)	2.61 - 23.66 - 24.32	76	*	46.07 (49.8; -3.2)	07.88 - 24.03 - 24.20
				2.5	2.5	2.5	91.78	17.88	18.12 (80.25; -1.34)	2.59 - 23.68 - 24.32	76	*	20.93 (77.19; -17.05)	07.86 - 22.95 - 24.32
						3	91.78	8.07	8.28 (90.97; -2.6)	3.07 - 23.83 - 24.3	69	*	10.54 (88.51; -30.6)	07.88 - 24.03 - 24.20
				2.5	3	3	13.30	8.07	8.13 (38.87; -0.74)	06.15 - 22.97 - 24.38	76	*	10.90 (18.04; -35.06)	0010.45 - 20.54 - 28.51
						3.5	13.30	4.18	4.20 (68.42; -0.47)	004.08 - 24.19 - 24.30	89	*	5.51 (58.57; -31.81)	008.96 - 21.08 - 25.99
				4	4	4	13.30	2.50	2.79 (79.02; -11.6)	04.15 - 21.60 - 25.23	86	*	3.46 (73.98; -38.4)	008.96 - 21.08 - 25.99
						4.5	13.30	1.71	1.84 (86.16; -7.6)	005.26 - 22.96 - 24.41	81	*	2.89 (78.27; -69)	008.94 - 20.68 - 28.18
				3.5	4	4	3.33	2.50	2.48 (25.52; 0.8)	005.23 - 23.02 - 24.40	76	*	3.06 (8.1; -22.4)	009.97 - 20.55 - 31.10
						4.5	3.33	1.71	1.73 (48.04; -1.16)	005.67 - 22.92 - 24.41	75	*	2.01 (39.63; -17.54)	0010.00 - 20.91 - 26.50
				4	5	5	2.09	1.33	1.33 (36.36; 0)	005.26 - 22.95 - 24.41	62	*	1.43 (31.57; -7.51)	0010.50 - 21.01 - 26.07
						6	2.09	1.05	1.11 (46.88; -5.71)	08.05 - 20.90 - 26.70	50	*	1.14 (45.45; -8.57)	0010.69 - 23.18 - 24.10

Tabla 3.16. Gráfico de control DDT<sup>2</sup> Optimizado para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 5 y p = 7.

El análisis de las tablas 3.2 a 3.16 ofrece algunas conclusiones generales, que son las mismas para los diferentes valores de  $ARL_0$ . En cuanto al  $ARL_1$ , el gráfico  $DDT^2$  siempre supera en rendimiento al gráfico estándar  $T^2$  para las  $p_1$  variables, e incluso en más del 14% de los casos analizados su rendimiento es mayor o igual al del gráfico estándar  $T^2$  para las  $p$  variables, lo que es notorio, ya que en esos casos el gráfico  $DDT^2$  es más rápido y más económico a la vez. Por ejemplo, algunos casos en que el  $DDT^2$  supera al gráfico de control  $T^2$  de  $p$  variables son:

i) De la Tabla 3.7,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 1.5$ ,  $d_p = 1.8$ ,  $ARL(T_p^2) = 13.85$ ,  $ARL(DDT^2) = 12.69$ , y esta medición de todas las variables de sólo el 32% de las veces.

ii) De la Tabla 3.8,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 1$ ,  $d_p = 1.2$ ,  $ARL(T_p^2) = 59.96$ ,  $ARL(DDT^2) = 59.41$ , y el gráfico de control  $DDT^2$  sólo mide todas las variables en un 39% de las muestras.

iii) De la Tabla 3.9,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 1.5$ ,  $d_p = 1.8$ ,  $ARL(T_p^2) = 22.64$ ,  $ARL(DDT^2) = 20.58$  con un valor conocido de  $\%p = 21$ .

Cuando el  $ARL_1$  del gráfico de control  $DDT^2$  es más grande que el del gráfico  $T^2$  para  $p$  variables, las diferencias son pequeñas manteniéndose bajo el valor de  $\%p$ . En más del 40% de los casos analizados la diferencia no supera el 5%. Algunos ejemplos son los siguientes:

i) De la Tabla 3.8,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 0.5$ ,  $d_p = 1.5$ ,  $ARL(T_p^2) = 32.51$ ,  $ARL(DDT^2) = 38.75$ ,  $\%p = 51$ .

ii) De la Tabla 3.9,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 1$ ,  $d_p = 2$ ,  $ARL(T_p^2) = 15.84$ ,  $ARL(DDT^2) = 17.93$ , y la medición de todas las variables sólo el 52% de las veces.

iii) De la Tabla 3.10,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 1.5$ ,  $d_p = 3$ ,  $ARL(T_p^2) = 4.84$ ,  $ARL(DDT^2) = 5.22$ ,  $\%p = 83$ .

Sin embargo, como se comentó antes, hay algunos casos en los parámetros del gráfico de control óptimo  $DDT^2$  que producirán una combinación que es prácticamente el gráfico estándar  $T^2$  para  $p$  variables, es decir, el valor de  $\%p$  es cercana al 100%. Dos ejemplos:

i) De la Tabla 3.10,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 0.5$ ,  $d_p = 1.5$ ,  $ARL(T_p^2) = 53.59$ ,  $ARL(DDT^2) = 53.95$ ,  $\%p = 92$ .

ii) De la Tabla 3.11,  $ARL_0=400$ ,  $d_{p1} = 0.5$ ,  $d_p = 0.7$ ,  $ARL(T_p^2) = 231.11$ ,  $ARL(DDT^2) = 231.62$ ,  $\%p = 98$ .

En estos casos siempre los ARL de los dos sistemas son muy similares, ya que ambos gráficos de control son prácticamente equivalentes, debido al bajo valor del límite de alerta ( $w$ ). El gráfico de control  $DDT^2$  es óptimo para minimizar el  $ARL_1$ , pero en estos casos la solución no es aceptable en términos de coste. Con el fin de resolver este problema, que prácticamente sólo pasa por  $p_1 = 5$  y para valores muy pequeños de  $d_{p1}$ , se

ha desarrollado una versión del programa de optimización en el que el usuario puede fijar el valor de  $\%p$  (Figura 3.5). Si los dos ejemplos anteriores se resuelven con esta restricción, las Tablas 3.10 y 3.11 muestran que los nuevos ARLs fuera de control son 68.82 y 238.18, respectivamente. Estos dos ejemplos son representativos, como en el primer caso empeora el ARL un 28%, aunque ahora el costo es significativamente más económica, y en el segundo el ARL es prácticamente el mismo, con la misma reducción en el precio del muestreo, siendo  $\%p = 30$  en ambos casos.

Por lo tanto, después de considerar los resultados de las Tablas 3.2 a 3.16, se puede concluir que el gráfico de control  $DDT^2$  es un esquema multivariado útil cuando algunas de las variables son caras de medir. Además puede aumentar significativamente la potencia del gráfico para detectar cambios en el proceso. Hay algunos casos en los que el gráfico de control  $DDT^2$  supera al gráfico  $T^2$  para todas las variables. En los casos en que la minimización del ARL sin restricciones produce un esquema costoso (altos valores de  $\%p$ ), el problema puede ser resuelto de nuevo con una limitación en el  $\%p$ .

### **3.7 Análisis de Sensibilidad**

Para obtener los parámetros del gráfico de control  $DDT^2$  el operario debe definir previamente un desplazamiento  $(d_{p1}^*, d_p^*)$  para los cuales se va a minimizar el ARL fuera de control, mientras se mantiene el ARL bajo control deseado. Esta es una práctica común en la optimización de parámetros de los gráficos de control de calidad. Por

ejemplo, Champ y Aparisi (2008) también han optimizado el gráfico de control de doble muestreo  $T^2$  con un cambio en el proceso. Sin embargo, surge la siguiente pregunta: ¿el gráfico optimizado  $DDT^2$  presenta un mejor desempeño para otros cambios diferentes al cambio seleccionado para la optimización? Esta pregunta es contestada a continuación.

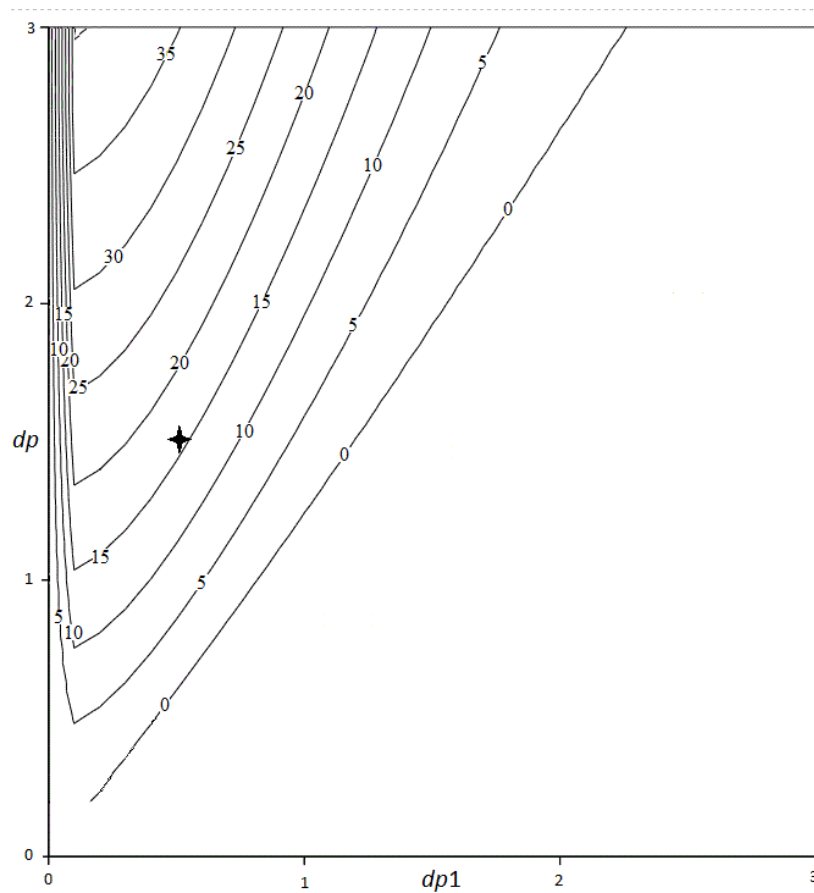
Las figuras 3.6 a 3.9 muestran los gráficos de contorno de las diferencias porcentuales entre los ARL fuera de control del gráfico  $DDT^2$  y los ARL del gráfico estándar  $T^2$  para  $p$  variables, con una estrella se muestra para qué cambio el gráfico  $DDT^2$  está optimizado. Para cada punto de contorno  $(d_{p1}, d_p)$ , las diferencias porcentuales se calculan de la siguiente manera:

$$\frac{ARL_{DDT^2}(d_{p1}, d_p) - ARL_{T_p^2}(d_p)}{ARL_{DDT^2}(d_{p1}, d_p)} \cdot 100 \quad (3.12)$$

Los casos seleccionados (figuras 3.7 – 3.9) para la comparación son representativos de los tipos de comportamiento que se encuentran en este análisis de sensibilidad. El primer tipo de comportamiento se muestra en la Figura 3.6 para los casos  $p_1 = 2$ ,  $p = 3$ ,  $d_{p1}^* = 0.5$  y  $d_p^* = 1.5$ . Hay una pequeña diferencia entre los ARLs de ambos gráficos (aproximadamente 15%) para el punto seleccionado para la optimización; sin embargo, esta diferencia tiende a ser menor cuando el valor de  $d_{p1}$  aumenta, debido a que el rendimiento de los gráficos  $DDT^2$  depende de ambos cambios  $(d_{p1}, d_p)$ , y el ARL del gráfico  $T^2$  sólo depende  $d_p^*$ .

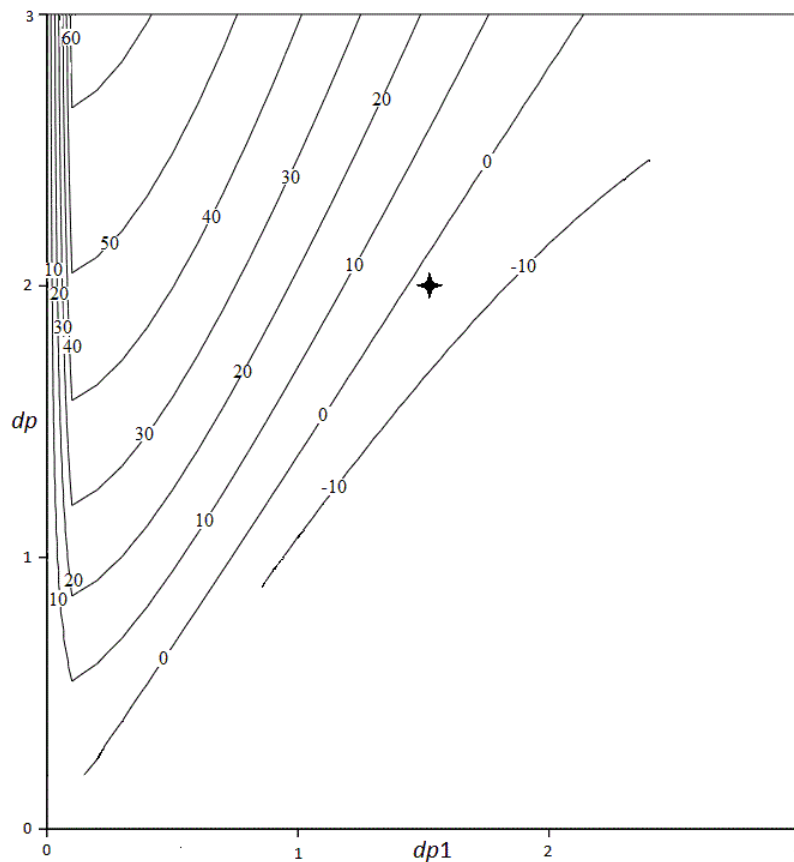
De manera similar, cuando el valor de  $d_{p1}$  disminuye, las diferencias son mayores, pero nunca de manera considerable. Al moverse a lo largo de una línea vertical (es decir,

aumentando  $d_p$  mientras se mantiene constante  $d_{p1}$ ), ambos gráficos reducen sus ARLs. Sin embargo, el gráfico estándar  $T^2$  tiene un mejor rendimiento y la diferencia en ARLs aumenta ligeramente. Desplazándose a lo largo de la línea  $d_{p1} = d_p$ , el gráfico de control  $DDT^2$  supera al gráfico  $T^2$ , lo que ocurre en todos los casos analizados.



**Figura 3.6. Diferencia porcentual del  $ARL(DDT^2)$  respecto al  $ARL(T^2_p)$ , para el caso**

$$p_1 = 2, p = 3, d_{p1}^* = 0.5 \text{ y } d_p^* = 1.5$$

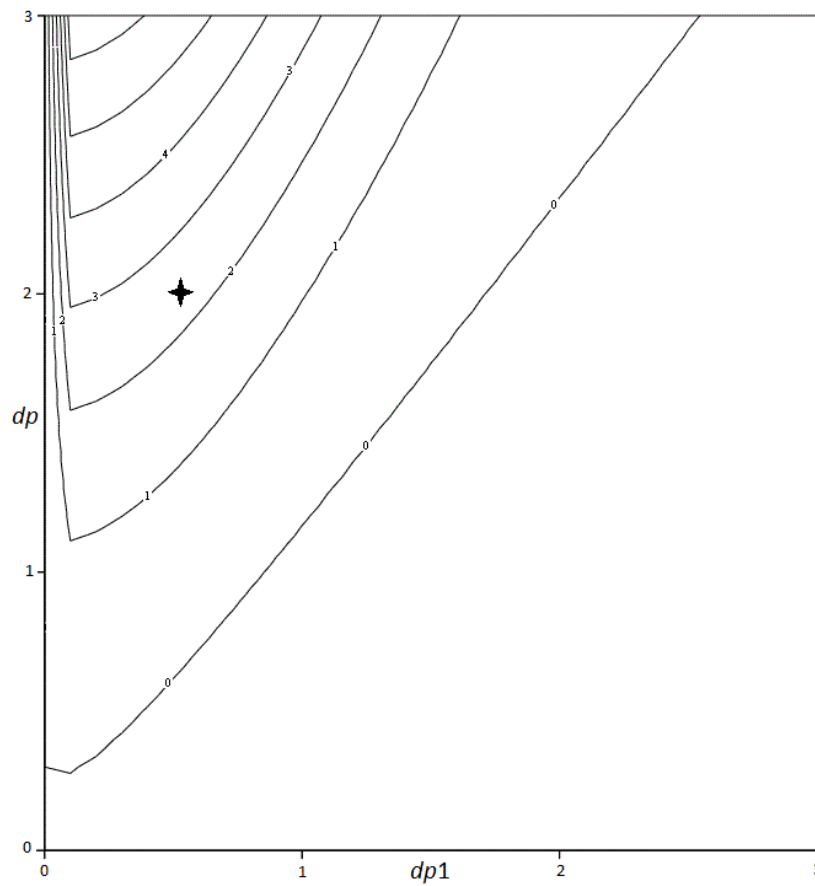


**Figura 3.7.** *Diferencia porcentual del  $ARL(DDT^2)$  respecto al  $ARL(T_p^2)$ , para el caso*

$$p_1 = 2, p = 4, d_{p1}^* = 1.5 \text{ y } d_p^* = 2$$

La Figura 3.7 ilustra el caso ( $p_1 = 2, p = 4, d_{p1}^* = 1.5$  and  $d_p^* = 2$ ) cuando el gráfico optimizado  $DDT^2$  supera al gráfico  $T^2$  en el punto seleccionado para la optimización. El área donde el gráfico de control  $DDT^2$  supera al gráfico estándar  $T^2$  es mayor que el área en la figura 3.6, y las mejoras son mayores que 10%. Para valores pequeños de  $d_{p1}$  y grandes de  $d_p$ , el gráfico  $DDT^2$  realiza un peor rendimiento comparado con en el caso

mostrado en la figura 3.6. Sin embargo, los ARLs de los dos gráficos son bastante similares para una amplia zona que rodea el punto seleccionado para la optimización.



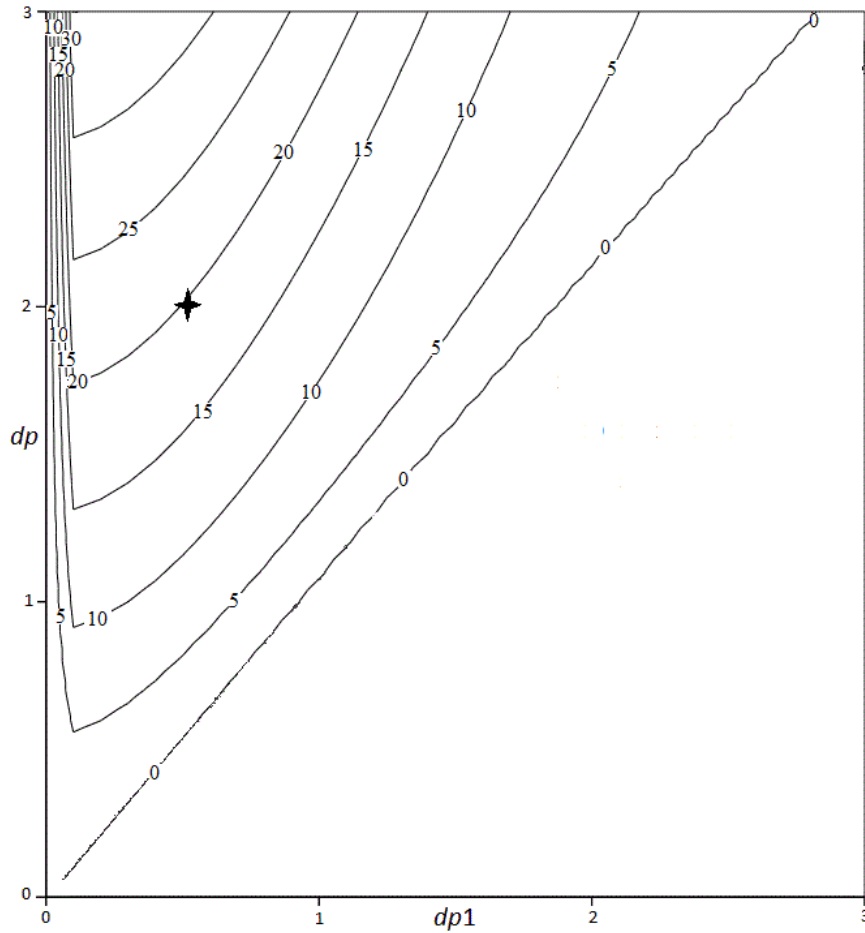
**Figura 3.8.** *Diferencia porcentual del  $ARL(DDT^2)$  respecto al  $ARL(T_p^2)$ , para el caso*

$$p_1 = 5, p = 6, d_{p_1}^* = 0.5 \text{ y } d_p^* = 2$$



La Figura 3.8 (case  $p_1 = 5$ ,  $p = 6$ ,  $d_{p_1}^* = 0.5$  and  $d_p^* = 2$ ) es representativa del comportamiento especial que se produce cuando el número de variables a monitorizar no es pequeña. En estos casos, para cualquier punto  $(d_{p_1}, d_p)$ , la diferencia entre el rendimiento de los gráficos de control DDT<sup>2</sup> y el del gráfico estándar T<sup>2</sup> para  $p$  variables son siempre pequeñas. Los gráficos son prácticamente equivalentes en términos de ARL. La razón de esto se demuestra por las Tablas 3.5 y 3.6, que indican que para dichos valores de  $p_1$  y  $p$ , la optimización tiende a producir un gráfico de control DDT<sup>2</sup> con grandes valores de  $\%p$ . Por lo tanto, el gráfico DDT<sup>2</sup> es equivalente al del gráfico T<sup>2</sup> y se hace necesario utilizar una restricción para  $\%p$  en la optimización, con el fin de obtener una reducción significativa de los costos de muestreo.

Repitiendo la optimización para el mismo caso presentado en la Figura 3.8, pero con la limitación adicional que  $\%p = 50\%$ . Con ello se obtienen las curvas de nivel mostrados en la Figura 3.9. Ahora, los resultados y conclusiones son muy similares a los resultados y conclusiones de la figura 3.7. Es decir, las diferencias de ARL para el punto seleccionado  $(d_{p_1}^*, d_p^*)$  no son grandes, las diferencias son similares alrededor del punto seleccionado y cuando aumenta  $d_{p_1}$ , las diferencias tienden a ser más pequeñas y negativas para los cambios cercanos a la línea  $d_{p_1} = d_p$ .



**Figura 3.9.** *Diferencia porcentual del  $ARL(DDT^2)$  respecto al  $ARL(T_p^2)$ , para el caso  $p_1 = 5, p = 6, d_{p1}^* = 0.5$  y  $d_p^* = 2$  con la restricción  $\%p = 50\%$*

En resumen, aunque la optimización del gráfico de control  $DDT^2$  requiere que el usuario especifique un cambio  $(d_{p1}^*, d_p^*)$ , la selección de este cambio no necesita ser muy preciso ya que el gráfico optimizado  $DDT^2$  tiene un rendimiento similar para un gran área de cambios que rodean al cambio especificado. Para grandes cambios en  $d_{p1}$ , el rendimiento del gráfico estándar  $T^2$  superará al  $DDT^2$ ; para cambios grandes de  $d_p$  y pequeños de  $d_{p1}$ , el gráfico  $T^2$  también superará al gráfico  $DDT^2$ .

### 3.8 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó un nuevo gráfico de control multivariante diseñado para el caso en que algunas de las variables a ser monitorizadas son muy caras y/o más difíciles de medir que las otras. Se logró obtener un gráfico de control de doble dimensión  $T^2$  ( $DDT^2$ ) que ayuda a monitorizar las variables caras y/o difíciles sólo cuando es necesario, para proporcionar un esquema más económico, manteniendo un buen rendimiento en la detección de cambios en el proceso. Es decir, bajos valores de ARL fuera de control.

Se logró obtener un procedimiento para determinar los parámetros óptimos del gráfico  $DDT^2$  que minimiza su ARL fuera de control. Se llevó a cabo una comparación del rendimiento del gráfico de control  $DDT^2$  con el rendimiento del gráfico estándar  $T^2$ . Los resultados mostraron que el gráfico  $DDT^2$  optimizado supera en más del 10% de los casos analizados al gráfico estándar  $T^2$  para todas las  $p$  variables. Es decir, se obtiene un esquema de control más rápido y más barato, empleando el gráfico  $DDT^2$ . En el resto de los casos, cuando el  $T^2$  muestra valores más bajos de ARL, las diferencias en el rendimiento medido a través del ARL tienden a ser pequeños, mientras el gráfico  $DDT^2$  produce claramente un esquema más barato.

Con el fin de facilitar y promover el uso del gráfico  $DDT^2$  se ha desarrollado software amigable, que permite al usuario obtener fácilmente los mejores parámetros para

cualquier caso por él requerido.

Los ARLs obtenidos con el software desarrollado fueron comprobados a través de simulación. Los valores conseguidos con uno y otro método son muy cercanos y en muchas ocasiones el mismo, dependiendo básicamente de la cantidad de decimales mostrados. Esto era de esperarse, ya que el software realiza cálculos específicos de probabilidades que llevan consigo errores de redondeo. Mientras que el método de simulación obtiene los ARLs utilizando generación de números pseudo-aleatorios. Sin embargo, la simulación aseguró que los resultados de los valores óptimos para la construcción del gráfico de control DDT<sup>2</sup> obtenidos por el software, son los correctos.

---

## Aportaciones del capítulo

La primera aportación realizada es el gráfico de control con doble dimensión  $T^2$  (DDT<sup>2</sup>). Este es un gráfico con altos requerimientos matemáticos y estadísticos para su diseño, pero con muy bajo grado de complejidad para su aplicación en términos operativos. Ofrece excelentes resultados en términos del ARL fuera de control, en función de la distancia y el número de variables utilizadas para la optimización.

Otra aportación realizada es el ofrecer una sencilla fórmula para la evaluación en términos de coste del muestreo, la cual ayuda a comparar los costes del uso del gráfico  $T^2$  versus el gráfico de control DDT<sup>2</sup>. Siendo ésta una fórmula fácil de aplicar para otros casos similares.

Otra aportación es el software desarrollado para realizar el diseño del gráfico DDT<sup>2</sup>. El usuario puede definir la situación del proceso sobre la cual quiere optimizar el diseño, según su necesidad. El software no ofrece únicamente los valores óptimos del gráfico, sino también información muy valiosa para el operario, tal como, porcentaje de veces que se miden todas las variables en un estado bajo control, lo cual ayuda a calcular con costes del muestreo; como varía el ARL fuera de control si se elimina el límite de control para las  $p_1$  variables entre otras.

Otra aportación del capítulo son las tablas obtenidas con el software para determinados casos. Estas tablas podrán servir para operarios que tengan características similares de

sus procesos o para investigadores que deseen comparar el rendimiento de sus gráficos con el propuesto en este capítulo.

Finalmente de este capítulo se obtuvo un artículo: "Reducing Sampling Costs of Multivariate SPC with a Double-Dimension  $T^2$  Control Chart" aceptado 01-2013, en International Journal of Production Research, con factor de impacto 1.760 en el año 2011 y está ubicada en el puesto 8 de los Journal de "Operations Research and Management Science".

---

## **CAPÍTULO 4**

---

### **DISEÑO Y OPTIMIZACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL CON DIMENSIÓN VARIABLE (VDT<sup>2</sup>)**

## 4.1 Introducción

En este capítulo, se considera el uso del gráfico de control  $T^2$  cuando el número de variables aleatorias a ser monitorizadas es variable. Por este motivo se la denominó gráfico de control con dimensión variable (VDT<sup>2</sup>). La dimensionalidad del gráfico depende básicamente de la complejidad o economía que representa medir un grupo adicional de  $p_2$  variables de un proceso, en el cual se deben controlar  $p = p_1 + p_2$  variables.

Tal como se vio en el capítulo dos, el grupo de  $p_1$  variables corresponde a las menos costosas o menos complejas de monitorizar. Sin embargo, la aportación que hacen para conocer el cambio ocurrido en el proceso es muy importante para determinar rápidamente un cambio significativo en su calidad. El grupo restante de  $p_2$  variables son más complejas o más costosas de tratar, y se utilizará en el momento en que el proceso indique, a través de las  $p_1$  variables iniciales, riesgo de que el proceso pueda salir de control.

Este método se presenta como una herramienta muy útil, de manera especial, cuando se tienen las  $p_2$  variables que requieren de un método de muestreo destructivo.

Los resultados obtenidos por este nuevo gráfico muestran claramente las ventajas que ofrece, especialmente cuando la magnitud del descentrado supera las dos unidades en  $d_p$ . Además, al comparar estos resultados con el desempeño del gráfico MCUSUM, el gráfico VDT<sup>2</sup> siempre lo supera para las  $p_1$  variables en dichos cambios.



Otra aportación presentada en este capítulo son los programas computacionales desarrollados y que forman parte de los resultados de la tesis. Parámetros como: número de variables  $p_1$  y  $p$ , tamaño de la muestra  $n$ , magnitud del descentrado  $d_{p_1}$  y  $d_p$ ,  $ARL_0$  deseado para un proceso que está bajo control, son características que el usuario del programa puede variar de acuerdo a su necesidad o requerimientos. El resultado que de ellos se obtiene son los valores de los límites de control ( $LC$ ) y de alerta ( $w$ ), para minimizar el  $ARL_1$ , el cual indica prontamente que el proceso se encuentra fuera de control.

En muchos trabajos sobre el control de procesos multivariantes o en un contexto más amplio del análisis multivariante, el objetivo principal es reducir la dimensión final del problema (reducción permanente del número de variables). A partir del trabajo de Hotelling (1947) con el gráfico de control  $T^2$ , hubieron otros trabajos muy importante como los de Jackson (1980, 1981a, 1981b) sobre el uso de componentes principales y análisis de factores, así como la contribución de MacGregor y Kourti (1995), Nomikos y MacGregor (1995) y Kourti y MacGregor (1996), que tienen como objetivo reducir la dimensionalidad de los problemas de los procesos de seguimiento con un gran número de variables a través de métodos de proyección utilizando variables latentes, especialmente en el control de procesos químicos.

Aparisi et al. (2010) también estudió los gráficos de control de componentes principales y su optimización. Sin embargo, estos métodos requieren la medición de todas las variables. La reducción que proporcionan reside en el análisis. El contexto y las motivaciones son diferentes de las consideradas en este trabajo, donde se desea reducir el

número de variables debido a su coste de medición. Con esta motivación, Costa y De Magalhães (2005) analizaron y propusieron un gráfico de control en el que una variable de calidad  $X$  muy cara de medir, es sustituida por una  $Y$  que se mide solamente cuando hay una indicación de que el proceso puede estar fuera de control. Este gráfico está diseñado para el control de proceso estadístico univariado. En el contexto multivariado, el único trabajo que existe en la actualidad, a nuestro conocimiento, es el propuesto por González y Sánchez (2010), en el cual se requiere de una reducción del número de variables. Sin embargo, la reducción es permanente, midiendo el mismo subconjunto fijo de todo el conjunto de variables. Esto crea el riesgo de que ciertas alteraciones sean indetectables, como señalan los autores en las consideraciones finales de su artículo.

Otro objetivo de los gráficos con parámetros adaptativos o variable es obtener una mayor eficiencia del muestreo en el que uno o más parámetros del gráfico, tales como intervalo de muestreo, tamaño de la muestra y/o el factor utilizado para calcular los límites de control, varíen de acuerdo con la información contenida en el último valor del estadístico utilizado. En este contexto se tienen ejemplos que incluyen el intervalo variable (o adaptativo) de muestreo (VSI), gráficos tales como los propuestos y analizados por Reynolds et al. (1988), Runger y Montgomery (1993), Saccucci et al. (1992) y Epprecht et al. (2010), el tamaño variable (o adaptativo) de la muestra (VSS), vistos en Prabhu et al. (1993), Costa (1994) y el gráfico multivariado con tamaño de muestra adaptativo de Aparisi (1996). Los gráficos del tamaño variable (o adaptativo) de la muestra y el intervalo de muestreo (VSSI) propuestos en Prabhu et al. (1994), Costa (1997) y Reynolds y Arnold (2001), el gráfico de control con parámetro variable ( $V_p$ ) estudiado por Costa (1998, 1999), y el VSS, VSI, VSSI,  $V_p$  y otros tipos de gráficos adaptables

analizados en Epprecht et al. (2003). Estos gráficos tienen, en promedio, tiempos más cortos para detectar de pequeñas a moderadas señales de cambio en el proceso, comparados con los gráficos tradicionales (fijos) correspondientes con similares costos promedios de muestreo, lo que equivale a decir que, como alternativa pueden ser diseñados para tener en promedio menor costo de muestreo para señalar las alteraciones de forma más rápida que el gráfico tradicional con parámetros fijos.

Una vez más, la mayoría de estas obras se aplican al SPC univariante, y la única que se aplica para el multivariado SPC (Aparisi, 1996) no se basa en una reducción en el número (promedio) de variables a ser medidas, que es el objetivo central del procedimiento que proponemos aquí. Sin embargo, su funcionamiento es análogo al de los gráficos de control adaptativos, como se verá en este capítulo.

Steiner (2000) también realiza un trabajo motivado por el coste y/o el tiempo de las mediciones. Sin embargo, propone que se varíe el sistema de medición o el dispositivo en vez del número de variables. Utiliza una combinación de "un sistema de medición rápido pero relativamente inexacta (...) y una más precisa y costosa, y posiblemente más lento, con dispositivo de medición alternativo". La motivación es similar a la nuestra, pero nos centramos en el contexto multivariado y proponer al variar el número de variables a medir de una forma dinámica, es decir, de acuerdo con la información contenida en la última muestra.

El resto de este documento contiene, en este orden, una descripción del gráfico propuesto y su funcionamiento; el modelo matemático para el cálculo de ARL, la

formulación del problema de optimización del diseño gráfico, una descripción del software desarrollado para resolver la optimización, análisis de rendimiento, estudio de robustez, y por último las conclusiones.

## 4.2 Generalidades del gráfico de control VDT<sup>2</sup>

El procedimiento estándar para la construcción del gráfico de control T<sup>2</sup>, implica tomar de forma periódica, una muestra de tamaño  $n$ . Posteriormente se realiza el cálculo del vector de promedios muestrales  $\bar{\mathbf{X}}$  de las  $p$  variables a ser monitorizadas, seguidamente se calcula el estadístico T<sup>2</sup>

$$T^2 = n(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})$  es el vector de promedios y  $\boldsymbol{\Sigma}$  es la matriz de covarianzas del vector de variables  $\mathbf{X}$ ; los dos parámetros multivariados representan un estado bajo control del proceso.

La expresión contenida en 4.1, se denomina estadística T<sup>2</sup> de Hotelling, la cual se distribuye como una variable aleatoria chi-cuadrado no centralizada  $\chi_{p,\lambda}^2$ , con  $p$  grados de libertad y descentrado

$$\lambda = nd^2 = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (4.2)$$

donde  $d$  es la distancia de Mahalanobis entre  $\boldsymbol{\mu}_0$  y el vector de medias obtenido durante el proceso  $\boldsymbol{\mu}_1$ , siendo conocidos los parámetros de la población.

Bajo estas consideraciones, el gráfico de control  $T^2$  con dimensión variable, con función de distribución  $\chi_{p,\alpha}^2$ , actúa y se lo interpreta tal como el gráfico de control de Shewhart, cuando este tiene un límite de control ( $CL$ ) y probabilidad de error tipo I ( $\alpha$ ).

Cuando el proceso está bajo control, es decir  $\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$  se tiene que  $\lambda = 0$ , esto reduce la distribución a una chi-cuadrado centralizada  $\chi_p^2$ . Así pues, existe una probabilidad  $\alpha$  de que el estadístico  $T^2$  supere un punto crítico dado por  $\chi_{p,\alpha}^2$  por lo que la tasa de error global puede mantenerse exactamente en el nivel  $\alpha$  mediante el uso de un gráfico de control de Hotelling. Cuando el proceso está fuera de control, es decir  $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$  se obtiene  $\lambda \neq 0$ .

Para determinar la probabilidad de que el proceso se salga de control se utiliza la función de distribución chi-cuadrado no centralizada, dada por

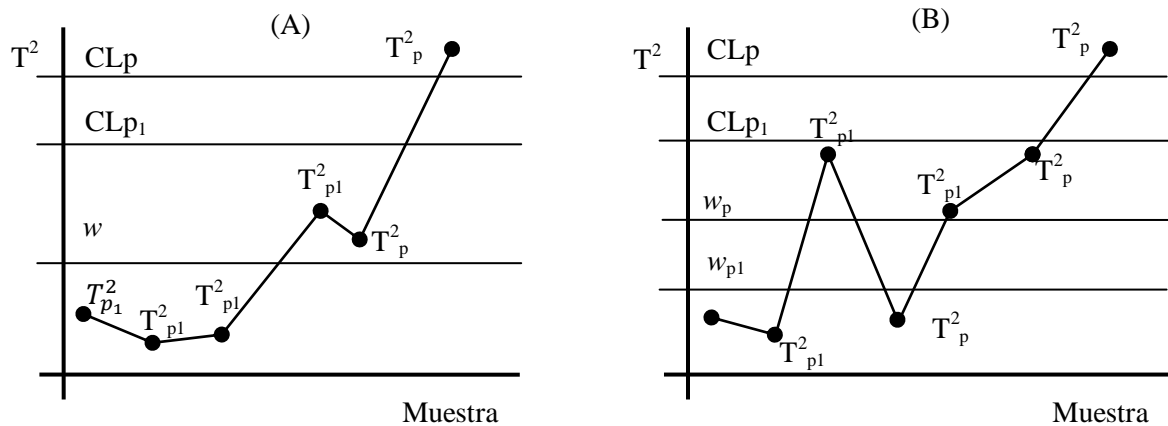
$$\chi_{p,\lambda}^2(x) = e^{(-\lambda/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{(\lambda/2)^j}{j!} * \frac{1}{\left[ 2^{(\frac{p}{2}+j)} * \Gamma\left(\frac{p}{2}+j\right) \right]} * \int_0^x y^{(\frac{p}{2}+j+1)} * e^{(-y/2)} dy \right]$$

Para obtener el promedio de la longitud de las rachas (ARL) como indicador del

rendimiento del gráfico de control, se hace uso de las cadenas de Markov.

Se determinan tres estados posibles, dividiendo el espacio de todos los posibles valores del estadístico  $T^2$  a través de dos líneas que delimitan tres regiones. La primera línea o límite es una de alerta  $w$  y la otra corresponde al límite de control CL. La primera región  $[0, w)$  determina que el proceso se encuentra bajo control. La segunda región  $[w, CL)$  determina un estado de alerta e indica que el proceso podría salir de control, y la tercera región  $[CL, \infty)$  determina que el proceso se salió de control. En la siguiente sección se analiza en detalle la cadena de Markov utilizada.

La figura 4.1 muestra las dos versiones del gráfico de control VDT<sup>2</sup>, sus límites de alerta ( $w$ ) y de control (CL) que generan los estados de la cadena de Markov.



**Figura 4.1** Gráfico de control VDT<sup>2</sup>; (A) un límite de alerta  $w$ ; (B) dos límites de alerta  $w_{p1}$

y  $w_p$

### 4.3 Dinámica del gráfico VDT<sup>2</sup>

La idea principal del uso del gráfico de control VDT<sup>2</sup> es optimizar el uso de recursos, especialmente la utilización de las  $p$  variables a monitorizar donde  $p = p_1 + p_2$ . Debido a las dificultades que podrían acarrear el hecho de medir las  $p_2$  variables adicionales ya sea por costos o por dificultad en su medición. Es por ello que todas las  $p$  variables solo serán monitorizadas cuando el proceso indique que es necesario hacerlo; es decir, que el estadístico obtenido con las  $p_1$  variables da una señal de alerta que indique inestabilidad en el proceso. Mientras no ocurra esto no se monitorizan las  $p_2$  variables adicionales.

Para el caso del gráfico VDT<sup>2</sup> que monitoriza un proceso multivariado, se cuenta con dos límites de control y al menos un límite de alerta. Es decir, tal como se observa en la figura 4.1, en el gráfico propuesto se abordan dos situaciones:

a) Gráfico de control con tres parámetros, un límite de alerta  $w$  para monitorizar  $T^2$  cuando este se obtenga ya sea con  $p_1$  o  $p$  variables; un límite de control  $CL_{p_1}$  cuando se utilizan  $p_1$  variables; y otro límite de control  $CL_p$  cuando se utilizan las  $p$  variables.

b) Gráfico de control con cuatro parámetros, un límite de alerta  $w_{p_1}$  y un límite de control  $CL_{p_1}$  cuando  $T^2$  se obtiene a través de  $p_1$  variables. Además, otro límite de alerta  $w_p$  y de control  $CL_p$  cuando se requiere el uso de las  $p$  variables.

Como se puede deducir, la función del límite de alerta  $w$  en el gráfico de control es determinar la presencia de una desviación  $d$  representado a través del incremento en el

valor de  $T^2$ . Esta desviación, sin ser lo suficientemente grande como para que el proceso sea declarado fuera de control lo podría llevar a ese estado en las siguientes muestras.

La selección de uno u otro gráfico de control será decisión del usuario final, ya que el uso del gráfico con cuatro parámetros no involucra mayor grado de complejidad. Así mismo, el uso del gráfico con tres parámetros tampoco involucra una pérdida considerable de sensibilidad, reflejada en un  $ARL_1$  mayor que el anterior. En muchos casos el  $ARL_1$  del gráfico con 3 parámetros es menor que un 1% al  $ARL_1$  del gráfico con 4 parámetros.

Las opciones de diseño del gráfico  $VDT^2$  considera la posibilidad de iniciar el proceso en zero-state o steady-state, además de la selección de utilizar uno o dos límites de control y de alerta. Para determinar el número de variables de la siguiente muestra, a continuación se describen los estados para el gráfico de control  $VDT^2$ , con dos límites de alerta y dos límites de control, para una muestra de tamaño  $n$  e iniciando el proceso con las primeras  $p_1$  variables:

- a) Si  $T_{p_1}^2 \geq CL_{p_1}$  (el valor del estadístico calculado para las  $p_1$  variables es igual o excede el límite de control) se determina que el proceso está fuera de control y deberá reiniciarse automáticamente.
- b) Si  $T_{p_1}^2 < w_{p_1}$ , en la siguiente muestra se mantendrá el conjunto de  $p_1$  variables a ser monitorizadas con  $w_{p_1}$  como límite de alerta y  $CL_{p_1}$  como límite de control.



- c) Si  $w_{p_1} \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}$  en la siguiente muestra se toman las  $p$  variables para calcular el estadístico ( $T_p^2$ ), en cuyo caso los nuevos límites de alerta y de control estarían dados por  $w_p$  y  $CL_p$  respectivamente.
- d) Si  $T_p^2 \geq CL_p$  se determina que el proceso está fuera de control y deberá reiniciarse automáticamente.
- e) Si  $w_p \leq T_p^2 < CL_p$  en la siguiente muestra se mantienen el uso de las  $p$  variables para calcular el estadístico.
- f) Si  $T_p^2 < w_p$  la siguiente muestra se vuelve a tomar sólo de las primeras  $p_1$  variables.

Es importante aclarar que dependiendo del número de variables con que se calcule  $T^2$  cambiará la dimensión de la matriz de covarianzas  $\Sigma$ . Si  $T^2$  se debe obtener con las  $p$  variables su dimensión será  $p \times p$ . Si  $T^2$  se debe obtener únicamente con las primeras  $p_1$  variables su dimensión será  $p_1 \times p_1$ . Claramente se puede observar que la matriz de covarianzas para las  $p_1$  variables es la matriz superior izquierda de la matriz de covarianzas para las  $p$  variables.

#### **4.4 Obtención de parámetros del gráfico VDT<sup>2</sup> para un ARL bajo control dado**

Tal como se describió en el apartado 4.2 el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling requiere de toma periódica de muestras de tamaño  $n$  del vector aleatorio  $\mathbf{X}$  de dimensión  $p$  (variables a ser monitorizadas), con parámetros  $\boldsymbol{\mu}_0' = (\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0p})$  vector de medias y  $\boldsymbol{\Sigma}$  matriz de covarianzas de un proceso bajo control, del cual se extrae una muestra y se obtiene  $\bar{\mathbf{X}}$ . El estadístico utilizado  $T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$  tiene una distribución de probabilidades chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad.

Cuando el proceso está bajo control ( $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ ) y existe una probabilidad  $\alpha$  de que el estadístico supere el punto crítico  $\chi_{p,\alpha}^2$ , la tasa de error global puede mantenerse exactamente en un nivel  $\alpha$  con un límite de control superior (CL) de  $\chi_{p,\alpha}^2$ . Si el proceso está fuera de control ( $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$ )  $T^2$  tiene una distribución de probabilidades chi-cuadrado no centralizada con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad dado por  $\lambda = nd^2 = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$ .

Montgomery (2008) ofrece más detalles sobre el gráfico de control  $T^2$ .

El diseño del gráfico propuesto es particionar el total de las  $p$  variables monitorizadas en dos subgrupos: Sólo  $p_1$  variables (subgrupo  $S_1$ ) son monitorizadas cuando no existe evidencia de que exista una desviación que pueda llevar al proceso al estado de alerta, es decir  $T^2 < w$ . Todas las  $p = p_1 + p_2$  variables son monitorizadas solo cuando el estadístico del proceso caen en la zona de alerta  $w \leq T^2 < CL$ .

Para este fin se propone el gráfico de dimensión variable  $T^2$  ( $VDT^2$ ). El procedimiento empleado es similar al realizado por Aparisi (1996) en el gráfico de control  $T^2$  VSS en el cual el parámetro variable fue el tamaño de la muestra.

Para describir el funcionamiento del gráfico de control  $VDT^2$  es conveniente empezar con la versión más general, el gráfico con dos conjuntos de límites. Este gráfico tiene un límite de control de  $CL_{p_1}$  y un límite de advertencia  $w_{p_1}$  a utilizar cuando la muestra contiene únicamente el subconjunto de variables  $p_1$  en  $S_1$ , también tiene un límite de control de  $CL_p$  y un límite de advertencia  $w_p$  para ser utilizado cuando todas las variables se miden.

En términos generales, el funcionamiento de este gráfico es similar a los gráficos VSI, VSS, VSSI,  $V_p$  mencionados en la introducción. La diferencia es que, en lugar de adaptar o variar intervalo de muestreo, tamaño de muestra y/o los límites de control, se modifica de manera adaptativa el número de variables que hay que medir.

Cuando se inicializa el gráfico la primera muestra sólo contiene las  $p_1$  variables del subconjunto  $S_1$ . Si  $T_p^2 \geq CL_p$  o  $T_{p_1}^2 \geq CL_{p_1}$  el gráfico indica que el proceso está fuera de control. Si  $T_p^2 < w_p$  o  $T_{p_1}^2 < w_{p_1}$  en la siguiente muestra sólo será medido el subconjunto de  $p_1$  variables. Si  $w_p \leq T_p^2 < CL_p$  o  $w_{p_1} \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}$  en la siguiente muestra todas las  $p$  variables se medirán para calcular  $T_p^2$ .

La operación del gráfico  $VDT^2$  con un solo límite de alerta  $w$  es similar, excepto que  $w_1 = w_2 = w$ . Tal como lo muestran las dos versiones del gráfico de control  $VDT^2$  presentadas en la figura 4.1.

#### **4.5 Obtención del ARL a través del gráfico $VDT^2$ utilizando cadenas de Markov**

Para medir el rendimiento de un gráfico de control, lo utilizado comúnmente es el promedio de la longitud de rachas (ARL) o el número esperado de muestras hasta que el gráfico presenta una señal de fuera de control. El ARL del gráfico de control estándar  $T^2$  se obtiene fácilmente como  $ARL = 1/Pr$ , donde  $Pr$  es la probabilidad para cualquier muestra dada que el estadístico  $T^2$  exceda el límite de control  $CL$ . Cuando el proceso está bajo control, se tiene

$$ARL = 1/\alpha$$

y cuando el proceso está fuera de control,

$$ARL = 1/(1 - \beta) = 1/[1 - P(\chi_p^2(\lambda) < CL)]$$

donde  $\chi_p^2(\lambda)$  es la distribución chi-cuadrada con  $p$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda = n \cdot d^2$ ,  $n$  es el tamaño de la muestra, y  $d$  es la distancia de

Mahalanobis.

Por otro lado, tal como se mencionó en el capítulo 2, el ARL se lo puede obtener a través de una cadena de Markov (Ross, 1996). Este proceso requiere definir elementos básicos tales como, los estados que alcanza la variable aleatoria, las probabilidades de pasar de un estado a otro y el estado inicial del proceso.

Utilizando estos elementos se puede obtener el ARL para el gráfico  $VDT^2$ , a través de matrices (Brooks y Evans, 1972), tal como se indica en la ecuación 4.3.

$$ARL = \mathbf{b}' (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} \quad (4.3)$$

siendo  $\mathbf{b}$  el vector correspondiente al estado inicial del proceso markoviano el cual se detalla más adelante,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad,  $\mathbf{Q}$  la matriz de transición y  $\mathbf{1}$  el vector unitario.

El ARL del gráfico de control  $VDT^2$  es calculado vía cadenas de Markov con tres estados:

Estado 1: El estadístico  $T^2$  cae bajo la línea de alerta ( $w_{p1}$  o  $w_p$ ) entonces la siguiente muestra contendrá solo  $p_1$  variables.

Estado 2: El estadístico  $T^2$  cae entre la línea de alerta y el límite de control, entonces, la siguiente muestra contendrá todas las  $p$  variables.

Estado 3: el estadístico  $T^2$  excede el respectivo límite de control (estado absorbente de la cadena de Markov)

La matriz de probabilidades de transición para la cadena de Markov es:

$$\mathbf{P}^s = \begin{bmatrix} p_{11}^s & p_{12}^s & p_{13}^s \\ p_{21}^s & p_{22}^s & p_{23}^s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando el superíndice  $s$  indica el estado del proceso:  $s = 0$  si el proceso está bajo control y  $s = 1$  si el proceso está fuera de control, con un cambio en la media correspondiente a la distancia  $d_1$  en el subespacio de las  $p_1$  variables y para una distancia  $d$  en el caso de utilizar el espacio  $p$ -dimensional de todas las variables.

Los elementos de la matriz  $\mathbf{P}$  están dados por:

$$p_{11}^s = P(T_{p_1}^2 < w_{p_1}) = P(\chi_{p_1}^2(\lambda_{p_1}) < w_{p_1})$$

$$p_{21}^s = P(T_p^2 < w_p) = P(\chi_p^2(\lambda_p) < w_p)$$

$$p_{12}^s = P(w_{p_1} \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}) = P(w_{p_1} \leq \chi_{p_1}^2(\lambda_{p_1}) < CL_{p_1})$$

$$p_{22}^s = P(w_p \leq T_p^2 < CL_p) = P(w_p \leq \chi_p^2(\lambda_p) < CL_p)$$

$$p_{13}^s = P(CL_{p1} \leq T_{p1}^2) = P(CL_{p1} \leq \chi_{p1}^2(\lambda_{p1}))$$

$$p_{23}^s = P(CL_p \leq T_p^2) = P(CL_p \leq \chi_p^2(\lambda_p))$$

Cuando  $\lambda_{p1} = nd_{p1}^2$  es el desplazamiento si se utilizan solo las  $p_1$  variables y  $\lambda_p = nd_p^2$  es el desplazamiento si se utilizan las  $p$  variables. Si el proceso está bajo control ( $s = 0$ ),  $\lambda_{p1} = \lambda_p = 0$ . Los elementos de la fila tres no aparecen, pues pertenecen al estado absorbente.

Por ejemplo, considerando un solo límite de control  $p_{12}^s$  es la probabilidad de transición al pasar del estado 1 al estado 2, esto implica el incremento del valor de  $T^2$  en dos momentos subsecuentes.

Una vez definida la matriz de transición, se debe definir el vector de estados iniciales. Para ello se debe recordar lo visto en el capítulo 2 con respecto a los estados iniciales “zero-state” y “steady-state”. El zero-state, presenta un escenario inicial donde se presupone que el proceso empieza en un estado bajo control, es decir  $T^2 < w$  en el momento cero. Mientras el steady-state, presenta un escenario inicial donde  $T^2$  puede encontrarse en cualquiera de los estados previamente determinados, sin considerar el estado absorbente, es decir  $T^2 < w$  o  $w \leq T^2 < CL$  con  $p_1$  o  $p$  variables.

Tres tipos de ARLs son considerados:

- ARL bajo control ( $ARL_0$ ): número esperado de muestras hasta la aparición de una falsa alarma desde iniciada la monitorización o desde el reinicio de la monitorización una vez eliminada una causa especial;
- ARL zero-state fuera de control ( $ZSARL_1$ ): número esperado de muestras hasta que aparece una señal verdadera si el proceso está fuera de control cuando la monitorización del proceso se inicia o se reanuda;
- ARL steady-state fuera de control ( $SSARL_1$ ): número esperado de muestras después del cambio hasta la aparición de una alarma verdadera si el proceso está bajo control cuando la monitorización se inicia o se reanuda y se produce un cambio en la media (que se supone instantáneo y sostenido) en un momento posterior.

En cada caso, en el modelo de cadena de Markov el ARL corresponde al número esperado de visitas a los estados transitorios antes de estar en el estado 3 o estado absorbente. Esto de acuerdo a las propiedades elementales de la cadena de Markov (ver Ross, 1996). A continuación se indica la forma de calcular cada uno de los ARLs:

$$ARL_0 = \mathbf{b}'_0(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1}\mathbf{1}$$

$$ZSARL_1 = \mathbf{b}'_0(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1)^{-1}\mathbf{1}$$



$$SSARL_1 = \mathbf{b}'_1(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1)^{-1}\mathbf{1}$$

cuando  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{1} = [1 \ 1]'$ ,  $\mathbf{Q}_s$  ( $s = 0, 1$ ) es la sub-matriz de  $\mathbf{P}^s$  obtenida luego de eliminar la 3ra fila y la 3ra columna.  $\mathbf{b}_0$  es el vector de probabilidades iniciales del zero-state, esto es la probabilidad que la primera muestra sea tomada con las  $p_1$  variables en  $S_1$  o con todas las  $p$  variables; si la monitorización empieza siempre con  $p_1$  variables (la primera muestra tiene siempre solo las variables en  $S_1$ ), entonces  $\mathbf{b}'_0 = [1 \ 0]$ ; si la monitorización empieza siempre con todas las  $p$  variables, entonces  $\mathbf{b}'_0 = [0 \ 1]$ .

Los elementos del vector de probabilidades iniciales del steady-state del vector  $\mathbf{b}_1$ , son las probabilidades que la primera muestra después de un cambio sea tomada con las  $p_1$  variables en  $S_1$  o con todas las  $p$  variables, las cuales son equivalentes a las probabilidades que el valor de  $T^2$  de la última muestra antes de la caída por debajo o por encima del límite de advertencia debido al desplazamiento (condicionado a que no caen por encima del límite de control), que a su vez es proporcional a la cantidad esperada de visitas a los estados 1 y 2 respectivamente, cuando el proceso está bajo control dado por los elementos del vector

$$\mathbf{b}'_0(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1}$$

Entonces,

$$\mathbf{b}'_1 = \frac{\mathbf{b}'_0(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1}}{ARL_0}.$$

El procedimiento incluye el caso especial cuando el grupo  $S_1$  es unitario ( $p_1 = 1$ ). El gráfico de control univariado  $T^2$  es equivalente al gráfico estándar de Shewhart  $\bar{X}$  chart, en el sentido de que los límites de control y de alerta se pueden establecer para cada uno de los gráficos de tal forma que las probabilidades que  $\bar{X}$  caiga en cada región del gráfico  $\bar{X}$  (debajo del límite de alerta, entre los límites de alerta y de control o sobre el límite de control) son idénticos a las probabilidades que el estadístico univariado  $T^2$  caiga en la correspondiente región del gráfico  $T^2$ .

La función de distribución utilizada para los cálculos de cada componente  $p_{ij}^s$  de la matriz de probabilidades  $\mathbf{P}$ , es la de una variable aleatoria chi-cuadrada no centralizada, con  $p$  grados de libertad y descentrado  $\lambda$ .

#### **4.6 Diseño del gráfico, Optimización y Software desarrollado**

El problema de optimizar el diseño del gráfico de control  $VDT^2$  para un cambio dado puede ser formalmente declarado como se describe a continuación:

Dado: • el  $ARL_0$  deseado

- los valores de  $p_1$  y  $p_2$  ( $p = p_1 + p_2$ )
- la distancia de Mahalanobis del cambio para el cual el  $ARL_1$  va ser minimizado:

En el subespacio de las  $p_1$  variables de  $S_1$ :  $d_1^*$ ,

y en el espacio de todas las  $p$  variables:  $d^*$

Encontrar: los límites de control y de alerta:  $CL_{p_1}, CL_p, w_{p_1}$  y  $w_p$  (o solo  $w$ , para la versión del gráfico de control con un único límite de alerta), para

Minimizar: el  $ARL(d_1^*, d^*)$  fuera de control,

Sujeto a:  $ARL(d = 0) = ARL_0$

El software desarrollado para implementar la optimización planteada emplea Algoritmos Genéticos (GA). La Figura 4.1 muestra la interface del programa que optimiza el gráfico  $VDT^2$  con un límite de alerta. Un programa similar está disponible para la versión del  $VDT^2$  con dos límites de alerta.

### *Ejemplo de aplicación*

Supongamos que una parte mecánica tiene tres características de calidad a controlar: el diámetro ( $x_1$ , en mm), la longitud ( $x_2$ , en mm) y la resistencia a la tracción ( $x_3$ , en Kg). La

medida del diámetro y la longitud es rápida, fácil y barata. Sin embargo, la medición de la resistencia a la tracción es algo más complicada y consume mucho tiempo y es destructiva. Por lo tanto, un gráfico VDT<sup>2</sup> se propone en la que  $p = 3$  y  $p_1 = 2$ . Las variables  $p_1$  en  $S_1$  son el diámetro y la longitud, y la variable restante es la resistencia a la tracción. El vector de promedios, las matrices de covarianza y correlación para un estado bajo control son:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 5.06 \\ 10.08 \\ 148.2 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.012 & 0.008 & 0.068 \\ 0.008 & 0.021 & 0.154 \\ 0.068 & 0.154 & 3.12 \end{pmatrix}; [\boldsymbol{\rho}] = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.35 \\ 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.35 & 0.6 & 1 \end{pmatrix};$$

Supongamos también, que la evaluación histórica del proceso muestra que cuando hay cambios en el vector de medias, un vector de promedios común en un estado fuera de control es

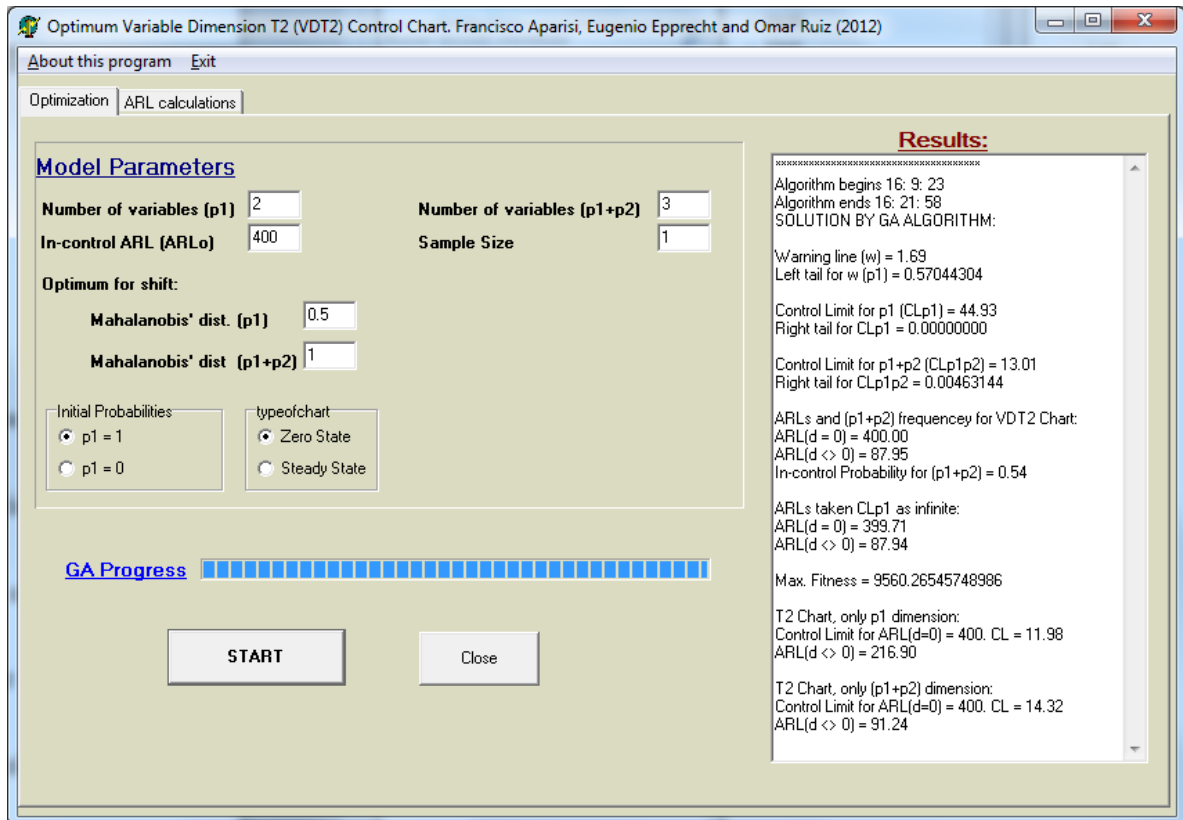
$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 5.02 \\ 10.01 \\ 146.43 \end{pmatrix},$$

para  $d_1 = 0.5$ , y  $d = 1$ . Por lo tanto, los parámetros del gráfico de control VDT<sup>2</sup> serían optimizados para minimizar el  $ARL_1$  dadas estas distancias  $d_1$  y  $d$ . Observe que en relación con el vector de promedios del estado fuera de control, a fin de optimizar el gráfico el usuario sólo necesita especificar las distancias  $d_1 = 0.5$ , y  $d = 1$ , y no la dirección del desplazamiento real en el espacio p-dimensional. Esta es una distinción importante entre el gráfico de control VDT<sup>2</sup> y ciertos gráficos multivariantes direccionales como los de Zou y Tsung 2008 o Li et al 2012 que están optimizados para

detectar cambios en un sentido de giro específico y por lo general funcionan mal para cambios en direcciones diferentes a las especificadas. Además, se muestra en una sección posterior que el gráfico de control VDT<sup>2</sup> es bastante robusto ante la presencia de valores no especificados.

La Figura 4.2 muestra la ventana de la interfaz de usuario del programa con los campos de introducción de los datos del problema llenados por el usuario y los resultados de la optimización mostrada en la parte derecha de la ventana. Este es el software para la versión del gráfico de control VDT<sup>2</sup> con un solo límite de una advertencia. El ARL<sub>0</sub> deseado de 400,  $d_1 = 0.5$ ,  $d = 1$  y el tamaño de la muestra  $n = 1$ .

La figura 4.2 también muestra los resultados de la optimización del gráfico de control VDT<sup>2</sup>. El límite de advertencia resultante es  $w = 1.69$ . Se debe considerar que  $CL_{p_1} = 44.93$  y cuando el proceso está bajo control la  $P(T_{p_1}^2 > 44.93)$  es prácticamente cero, lo que significa que no habría la necesidad del límite de control para las  $p_1$  variables en  $S_1$ .



*Figura 4.2. Interfaz del Software desarrollado para la optimización del gráfico de control*

### *VDT<sup>2</sup>*

Este es un resultado frecuente de este esquema de control como se verá en la siguiente sección y simplifica el uso del gráfico ya que son necesarias únicamente un sólo el límite de alerta y un límite de control para todas las  $p$  variables. Un resultado similar se observa en los gráficos de control adaptativos, específicamente en los gráficos  $V_p$  (Costa, 1999), donde con frecuencia los diseños óptimos o casi óptimos tienen dichos límites de control para muestras pequeñas de un ancho que en la práctica corresponde a no utilizar límite

de control. El límite de control  $CL_p$  para las muestras con todas las variables  $p$  es 13.01. Este gráfico tiene una ARL bajo control de  $ARL_0=400$  que es el valor requerido. El ARL fuera de control para el cambio dado es  $ARL_1=87.95$ .

El tiempo de cálculo es razonablemente corto (menor a 15 minutos en un equipo moderno) aunque varía ligeramente de un caso a otro, dependiendo principalmente del número de variables o incluso para el mismo caso según como se emplee el GA para la optimización.

A continuación se comparan los resultados del gráfico  $VDT^2$  con los del gráfico de control estándar  $T^2$  donde siempre se miden únicamente las  $p_1$  variables en  $S_1$  y con los del gráfico de control estándar  $T^2$  donde siempre se mide todas las  $p$  variables en cada tiempo de muestreo. Esta comparación es importante para apoyar la decisión sobre el gráfico de control que se utilice para el seguimiento del proceso de interés. La ventana de interfaz del software (Figura 4.2) muestra que el gráfico estándar de  $T^2$  con sólo las  $p_1$  variables en  $S_1$  tiene un ARL fuera de control  $ARL_1= 216.90$ , más de dos veces el ARL del gráfico de control  $VDT^2$ . Además, el ARL del gráfico  $VDT^2$  supera en rendimiento al del gráfico de control  $T^2$  en el que siempre se miden todas las  $p$  variables que tiene un ARL fuera de control  $ARL_1= 91.24$ . Aunque la mejora del ARL es marginal, el gráfico  $VDT^2$  es mucho mejor en términos de coste de muestreo (o la dificultad de muestreo) que un gráfico  $T^2$  empleando todas las  $p$  variables.

El software devuelve el porcentaje de veces que hay que probar todas las variables cuando el proceso está bajo control: 54%. Por lo tanto, es fácil de calcular el coste medio

de muestreo del gráfico VDT<sup>2</sup>.

Aplicando la fórmula 3.3 se tendría

$$\frac{ACS_{VDT^2}}{CS_{T_p^2}} = \frac{1 + a \cdot \%p}{1 + a}$$

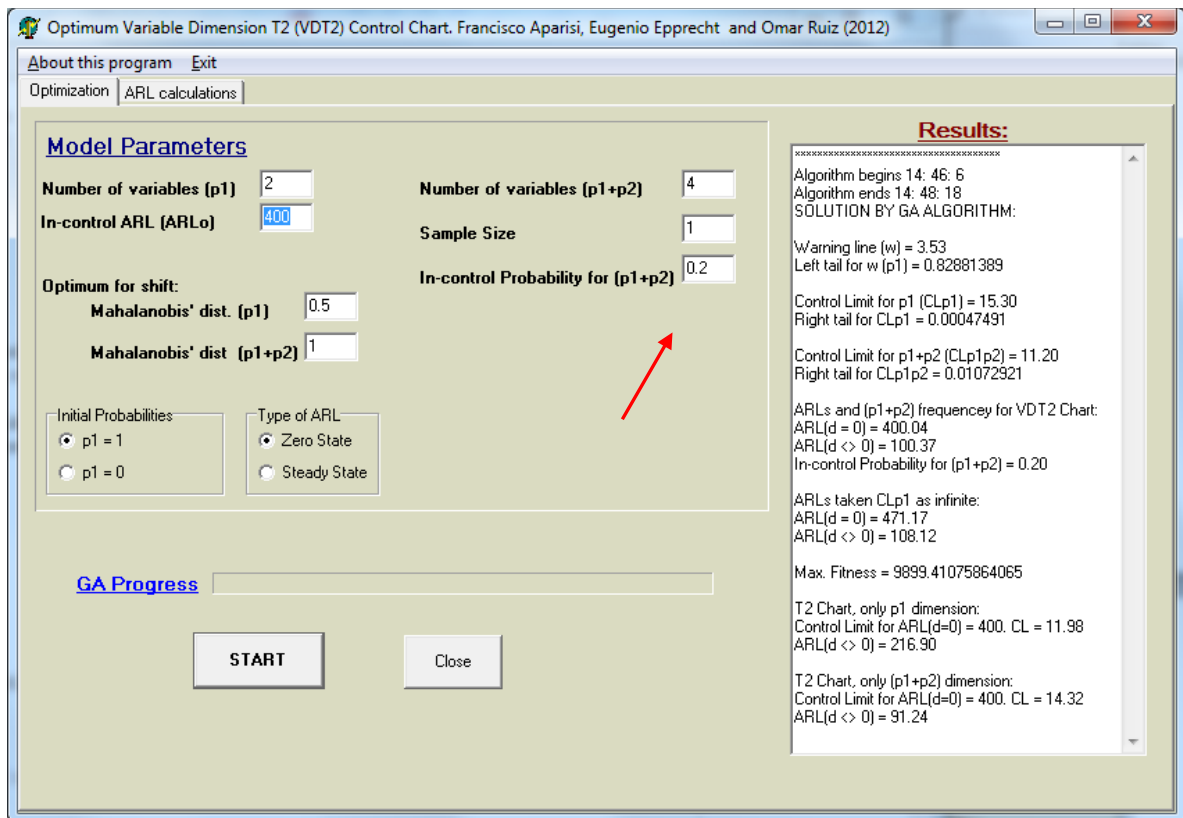
Cuando  $a$  es el costo adicional que representa medir una de las variables que no pertenecen al grupo  $S_1$  respecto a otra que sí pertenece al grupo de variables más económicas de medir.

Manteniendo los valores considerados en el ejemplo de aplicación del capítulo 3, el costo de muestreo de las primeras dos variables es de 0.18 €, mientras muestrear todas las variables cuesta 1.28 €. Por lo tanto  $a = C_{p2}/C_{p1} = (1.28 - 0.18) / 0.18 = 6.11$ . La lectura de la Figura 4.2, cuando  $\%p = 0.54$ , es la siguiente:

$$\frac{ACS_{VDT^2}}{CS_{T_p^2}} = \frac{1 + a \cdot \%p}{1 + a} = \frac{1 + 6.11 \cdot 0.54}{1 + 6.11} = \frac{4.29}{7.11} = 60.46\%$$

Por lo tanto, el gráfico VDT<sup>2</sup> obtiene un ARL muy similar al obtenido por el gráfico de control estándar T<sup>2</sup> para 3 variables pero con un 60.46% de los gastos necesarios, el gráfico VDT<sup>2</sup> muestra un rendimiento muy bueno.

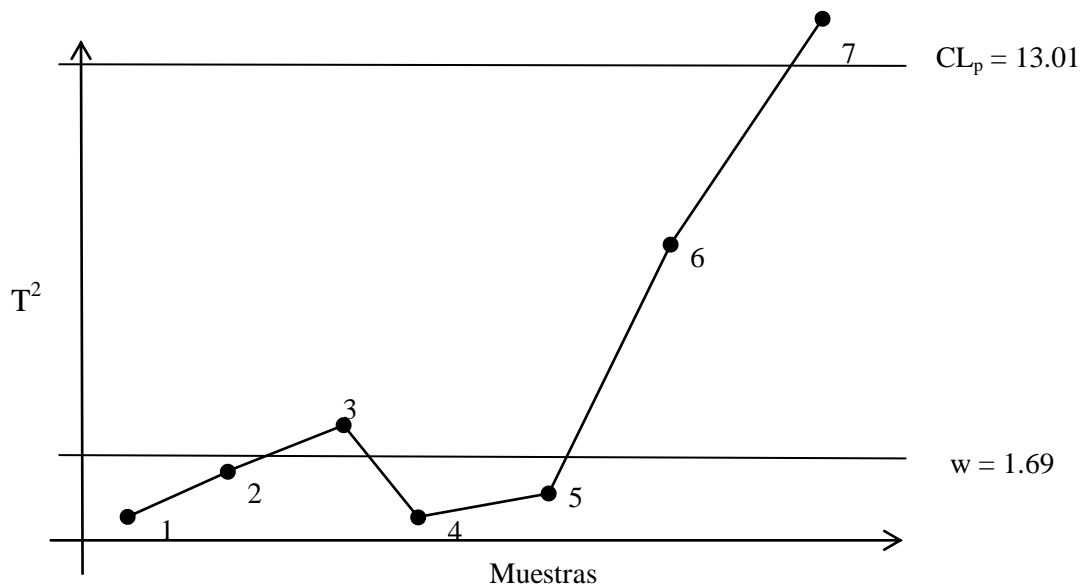




*Figura 4.3. Interfaz del Software desarrollado para la optimización del gráfico de control VDT<sup>2</sup> con una restricción en el porcentaje de veces que todas las variables son medidas (ver flecha roja)*

Se desarrolló otra versión del software donde el porcentaje de veces que todas las variables se miden cuando el proceso está bajo control es una limitación en la optimización. Supongamos que se requiere que el porcentaje total de veces que todas las  $p$  variables son monitorizadas es como máximo de 20%, debido a las limitaciones de costo o con el fin de lograr un procedimiento de control más fácil. En este caso (véase la Figura 4.3 donde una flecha roja apunta a esta opción), los rendimientos de optimización son: límite de advertencia  $w = 3.53$ ; límite de control para las  $p_1$  variables  $CL_{p_1} = 15.30$ ,

con probabilidad de cola derecha = 0.000475 (en este caso el límite de control no puede ser eliminado, porque entonces sería  $ARL_0 = 471.17$ ). El límite de control de todas las  $p$  variables  $CL_p = 11.20$ , con probabilidad de cola derecha = 0.0107. Este gráfico tiene  $ARL_0 = 400.04$ , prácticamente el valor requerido. El ARL fuera de control de este sistema para el cambio especificado es  $ARL_1 = 100.37$ . Esto significa que, con sólo una pequeña reducción en el rendimiento (midiendo todas las variables se obtiene un ARL fuera de control igual a 91.24), el coste de muestreo puede reducirse significativamente.



**Figura 4.4. Gráfico de control  $VDT^2$  para el ejemplo de la tabla 4.1**

Con el fin de ilustrar mejor el uso del gráfico  $VDT^2$  se simuló el procedimiento de

muestreo para la parte mecánica del mismo problema. La figura 4.4 muestra los parámetros del gráfico optimizado para este ejemplo y la Tabla 4.1 presenta las correspondientes muestras simuladas.

Muestra número	Vector muestral $\bar{X}$	$T_1^2$	$T_2^2$	Comentarios
1	$\begin{pmatrix} 5.03 \\ 10.003 \end{pmatrix}$	0.282	-	Inicia con $p_1$ variables. $T_1^2$ debajo del límite de alerta. Siguiete muestra con $p_1$ variables.
2	$\begin{pmatrix} 5.005 \\ 10.16 \end{pmatrix}$	1.234	-	$T_1^2$ debajo del límite de alerta. Siguiete muestra con $p_1$ variables.
3	$\begin{pmatrix} 5.17 \\ 10.01 \end{pmatrix}$	2.320	-	$T_1^2$ en la región de alerta. Siguiete muestra con todas las $p$ variables.
4	$\begin{pmatrix} 5.05 \\ 10.11 \\ 147.71 \end{pmatrix}$	-	0.333	$T_2^2$ debajo del límite de alerta. Siguiete muestra con $p_1$ variables.
5	$\begin{pmatrix} 5.00 \\ 10.12 \end{pmatrix}$	0.709	-	$T_1^2$ debajo del límite de alerta. Siguiete muestra con $p_1$ variables.
6	$\begin{pmatrix} 5.01 \\ 10.03 \\ 144.11 \end{pmatrix}$	-	7.104	$T_2^2$ en la región de alerta. Siguiete muestra con todas las $p$ variables.
7	$\begin{pmatrix} 5.12 \\ 10.02 \\ 142.7 \end{pmatrix}$	-	14.308	$T_2^2 > CL_2$ . El proceso es declarado fuera de control.

**Tabla 4.1. Muestras simuladas para ejemplificar el uso del gráfico de control VDT<sup>2</sup>**

Como se indica, el muestreo se inicia con las  $p_1$  variables en  $S_1$  y se obtiene un valor  $T^2$  que está por debajo del límite de advertencia. Por lo tanto, la siguiente muestra contendrá sólo las  $p_1$  variables también. El mismo escenario se produce para la muestra 2 de modo que la muestra 3 también contiene sólo las  $p_1$  variables. Sin embargo, la muestra 3 produce un estadístico  $T^2$  que cae en la región de advertencia, por lo tanto en la siguiente muestra todas las  $p$  variables son consideradas. El estadístico  $T^2$  de la muestra 4 vuelve a

la región por debajo del límite de advertencia por lo que el proceso está bajo control, lo que implica reducir el número de variables a medir en la muestra 5 de  $p = 3$  a  $p_1 = 2$ . La muestra 5 todavía produce un estadístico  $T^2$  por debajo del límite de advertencia, por lo tanto el estadístico  $T^2$  para la muestra 6 se calcula con  $p_1 = 2$  variables. Como el estadístico obtenido de la muestra 6 cae en la región de alerta el número de variables a ser consideradas para la muestra 7 es  $p = 3$ . Finalmente, el estadístico  $T^2$  de la muestra 7 cae por encima del límite de control  $CL_p$  en cuyo punto el proceso se considera fuera de control.

#### **4.7 Comprobación de parámetros óptimos y ARL conseguidos con la cadena de Markov a través de simulación**

Una vez que el software desarrollado, haciendo uso de algoritmos genéticos, obtiene los parámetros óptimos del gráfico de control VDT<sup>2</sup> y determina el ARL fuera de control para los casos donde se ha especificado  $ARL_0$ ,  $p_1$ ,  $p$ ,  $d_1$  y  $d$ , se necesitó comprobar que los ARLs obtenidos correspondían a los valores especificados juntamente con los límites de alerta y de control obtenidos de la optimización. Para ello se realizó una simulación que estima el valor obtenido del ARL.

La simulación se lleva a cabo considerando que las  $p$  o  $p_1$  variables monitorizadas son variables aleatorias con distribución conjunta  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , donde  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector de promedios y  $\boldsymbol{\Sigma}$  la matriz de covarianzas, respectivamente.

El simulador del gráfico de control VDT<sup>2</sup> se desarrolló utilizando condiciones especiales del vector de promedios y de la matriz de covarianza del estado bajo control tal como se describió en el apartado 2.3.3 de esta tesis.

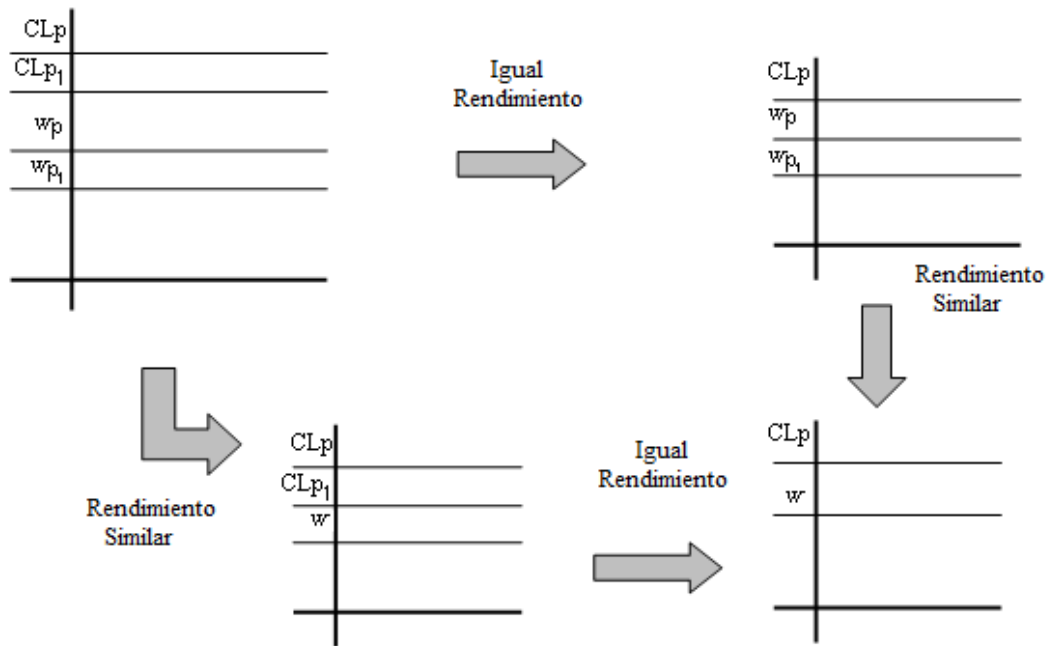
La finalidad fue obtener un cambio específico  $d$ , considerando la distancia de Mahalanobis, de tal forma que  $\lambda = nd^2 = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$ .

Se obtuvo la matriz de datos con la distancia  $d$  requerida, de forma similar a la realizada en el capítulo 3, bajo las condiciones aplicadas por M. Lee y M. Khoo (2006), con ello se procedió a calcular el estadístico  $T^2 = n(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)$ .

Finalmente se realizó un bucle, en el cual se determinó el número de rachas a ser conseguidas, para con ello calcular el promedio de su longitud y obtener el ARL requerido.

#### **4.8 Análisis del rendimiento del gráfico VDT<sup>2</sup>**

A continuación se analiza el rendimiento del gráfico de control VDT<sup>2</sup>. A través de las tablas obtenidas (ver tablas 4.2 – 4.16) se puede confirmar lo mostrado en la figura 4.5, el cual indica cómo al cambiar las diferentes versiones del gráfico de control VDT<sup>2</sup>, el rendimiento se mantiene.



**Figura 4.5. Análisis del rendimiento obtenido por las diferentes versiones del gráfico de control VDT<sup>2</sup>**

Los ARLs de un gráfico VDT<sup>2</sup> depende de un determinado tamaño de muestra  $n$ , límites de control y de advertencia y de los valores de  $p_1$ ,  $p$ ,  $d_1\sqrt{n}$  y  $d\sqrt{n}$ . Para  $p_1$ ,  $p$ ,  $n$  dados y los límites del gráfico (que puede ser establecido de forma que garantice un  $ARL_0$  deseado), el ARL fuera de control será el mismo para todas las direcciones y tamaños de los cambios que se corresponden con los mismos valores de  $d_1$  y  $d$ .

Usando estos valores  $d_1$  y  $d$  como entrada para el programa de optimización desarrollado (junto con  $p_1$ ,  $p$  y un valor especificado para la  $ARL_0$ ), el programa realiza el diseño óptimo para el gráfico VDT<sup>2</sup> y el valor del ARL para el desplazamiento especificado. El programa también devuelve los valores del ARL tradicional de dimensión fija no

adaptativa para el gráfico de control  $T^2$  con todas las  $p$  variables y para sólo las  $p_1$  variables en  $S_1$ . Esto permite al usuario evaluar las ventajas de utilizar el gráfico  $VDT^2$  para controlar su proceso particular y si decide utilizar el diseño óptimo facilitado por el programa.

Si el usuario desea obtener los parámetros óptimos para un  $ARL_0$  y/o distancias diferentes a las utilizadas en la presente tesis, puede hacer uso del programa para calcular el ARL fuera de control con los parámetros por él requeridos.

Se debe tener en cuenta que en las Figuras 4.2 y 4.3, la pestaña "Calculation ARL" es donde el usuario puede calcular el ARL para una combinación específica de  $p_1, p, d_1, d, CL_{p_1}, CL_p, w_{p_1}, (w_p)$  y  $n$ .

Se ha realizado la optimización para muchas combinaciones de  $ARL_0, p_1, p, d_1$  y  $d$ . En este documento se muestran los resultados de los siguientes casos (ver Tablas 4.2 a 4.16):  $ARL_0 = 200, 400, 1000; n = 1; (p_1, p) = (1, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 6), (5, 7);$  y  $[d_1, d]: [0.2, (0.5, 1, 1.5, 2)], [0.5, (0.7, 1, 1.5, 2)], [1, (1.2, 1.5, 2, 2.5)], [1.5, (1.8, 2, 2.5, 3)], [2.5, (4, 4.5)], [4, (5, 6)].$

Las tablas presentan los resultados para el escenario de zero-state. Sin embargo, los resultados y conclusiones generales para el caso de steady-state son los mismos. Se debe tener en cuenta que a pesar de que se considera  $n = 1$  por simplicidad en las Tablas, los resultados son invariantes para valores constantes de  $d_1\sqrt{n}$  y  $d\sqrt{n}$ , es decir en el lugar

de los valores de  $d_1$  y  $d$  se puede leer de forma más general  $d_1\sqrt{n}$  y  $d\sqrt{n}$  para el caso  $n > 1$ .



DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)	
200	1	2	0.2	0.5	115.94	115.58	(31.76; -0.31)	0.05 - 0.37 - 25.89 - 10.21	82	*	116	(31.72; -0.36)	0.41 - 20.48 - 9.97	73	*	26.16	23.98
					42.05	41.92	(75.25; -0.31)	0.1 - 0.56 - 22.02 - 10.02	75	*	42.22	(75.15; -0.71)	0.45 - 69.74 - 9.9	71	*	26.16	7.76
					15.99	15.78	(90.58; -1.33)	0.06 - 0.94 - 25.7 - 9.82	68	*	16.5	(90.28; -4.56)	0.47 - 18.11 - 9.87	69	*	26.16	4.28
					7.47	6.88	(95.6; -8.57)	0.05 - 1.66 - 68.7 - 9.54	59	*	8.02	(95.27; -16.56)	0.09 - 67.97 - 10.47	94	*	26.16	2.84
					77.96	78.00	(14.26; 0.05)	0.86 - 0.4 - 11.16 - 9.86	65		78.08	(14.13; -0.1)	0.15 - 12.55 - 10.4	90	*	11.7	12.59
					42.08	41.92	(53.72; -0.38)	0.05 - 0.28 - 17.92 - 10.29	86	*	42.26	(53.52; -0.81)	0.19 - 14.79 - 10.33	87	*	11.7	7.76
					15.91	15.78	(82.5; -0.82)	0.06 - 0.78 - 30.42 - 9.91	71	*	16.09	(82.3; -1.96)	0.69 - 19.74 - 9.49	57	*	11.7	4.28
					7.47	6.88	(91.78; -8.57)	0.08 - 0.95 - 69.96 - 9.79	67	*	7.95	(91.25; -15.55)	0.48 - 69.72 - 9.85	69	*	11.7	2.84
					18.97	27.96	(32.75; 32.15)	4.09 - 0.72 - 12.77 - 6.32	11		21.38	(24.21; 23.53)	2.55 - 10.74 - 6.87	13		5.08	5.91
					13.24	15.78	(53.06; 16.09)	2.65 - 0.81 - 24.34 - 7.62	23	*	13.89	(50.76; 11.97)	1.73 - 15.45 - 7.76	24	*	5.08	4.28
					7.21	6.88	(74.44; -4.79)	0.69 - 1.44 - 19.35 - 8.94	44	*	7.23	(74.37; -5.08)	1.16 - 19.62 - 8.68	38	*	5.08	2.84
					4.29	3.55	(84.79; -20.84)	0.11 - 1.8 - 15.48 - 9.42	55	*	4.65	(83.51; -30.98)	0.52 - 16.1 - 9.79	67	*	5.08	1.98
					4.26	9.40	(59.27; 54.68)	6.37 - 1.18 - 11.81 - 2.37	1		7.14	(31.73; 24.04)	2.55 - 10.62 - 6.9	13		3.02	3.27
					4.02	6.88	(61.56; 41.56)	5.3 - 1.4 - 16.08 - 3.68	3	*	5.95	(43.11; 13.51)	2.2 - 11.03 - 7.32	17	*	3.02	2.84
					3.52	3.55	(66.34; 0.84)	5.29 - 0.79 - 16.79 - 4.51	5	*	4.11	(60.7; -15.77)	1.73 - 13.71 - 7.8	24	*	3.02	1.98
					2.99	2.16	(71.41; -38.42)	0.09 - 2.95 - 13.37 - 9.24	49	*	3.23	(69.12; -49.53)	1.34 - 14.14 - 8.42	33	*	3.02	1.55
					1.49	2.16	(43.56; 31.01)	3.20 - 3.36 - 8.57 - 7.47	8		2.19	(17.04; -1.38)	3.30 - 8.81 - 6.99	7		1.54	1.55
					1.41	1.53	(46.59; 7.84)	2.61 - 3.82 - 7.91 - 10.33	11		1.27	(20.45; -37.25)	3.53 - 7.90 - 10.28	6		1.54	1.28
					1.27	1.23	(51.89; -3.25)	2.56 - 4.47 - 7.90 - 10.41	10		1.22	(51.89; -3.25)	004.02 - 7.89 - 10.36	4		1.54	1.13
					1.2	1.09	(54.54; -10.09)	2.56 - 4.75 - 7.95 - 10.02	10		1.22	(53.78; -11.92)	004.52 - 7.97 - 8.73	3		1.54	1.05
					1.87	1.23	(10.95; -8.72)	10.19 - 12.95 - 17.02 - 17.81	7		1.30	(1.51; -5.69)	4.06 - 7.89 - 10.35	4		1.13	1.13
					1.80	1.09	(14.28; -34.32)	10.52 - 7.51 - 16.70 - 20.87	8		1.29	(2.27; -18.34)	5.29 - 7.88 - 10.56	2		1.13	1.05
					1.42	1.03	(6.57; -23.47)	10.40 - 11.36 - 16.73 - 20.51	6		1.12	(0.88; -8.73)	5.29 - 7.88 - 10.56	2		1.05	1.02
					1.35	1.00	(11.18; -32.35)	5.42 - 23.64 - 16.03 - 29.28	26		1.12	(0.88; -12)	6.06 - 7.88 - 10.53	1		1.05	1

Tabla 4.2. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 1 y p = 2

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p				
ARL(O)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)					
200	2	3	0.2	0.5	180.68	128.96	127.98 (29.16; 0.75) 52.3	3.53 - 0.56 - 35.92 - 11.88	64	*	129.18 (28.5; -0.17) 52.33	0.72 - 45.23 - 12.44	83	*	51.05	26.49					
					1	180.68	52.39	(71.05; 0.17) 20.45	0.82 - 1.19 - 44.8 - 12.16	73	*	(71.03; 0.11) 20.65	1.09 - 44.7 - 12.11	71	*	51.05	10.13				
					1.5	180.68	20.40	(88.68; -0.24) 9.29	0.64 - 1.51 - 41.08 - 12.05	69	*	(88.57; -1.22) 9.66	1.38 - 45.23 - 11.96	66	*	51.05	5.47				
					2	180.68	8.80	(94.85; -5.56) 83.52	0.64 - 1.8 - 25.34 - 11.92	65	*	(94.65; -9.77) 89.79	1.37 - 44.7 - 12.11	71	*	51.05	3.5				
					0.5	0.7	115.58	92.07	(27.73; 9.28) 50.27	5.68 - 0.83 - 21.94 - 9.82	25	*	(22.31; 2.47) 51.4	2.21 - 18.45 - 10.86	39	*	23.98	16.91			
							1	115.58	52.39	(56.5; 4.04) 20.3	3.47 - 1.07 - 40.74 - 11.06	44	*	(55.52; 1.88) 20.32	1.62 - 42.73 - 11.75	60	*	23.98	10.13		
							1.5	115.58	20.40	(82.43; 0.49) 9.18	1.15 - 1.62 - 38.04 - 11.8	61	*	(82.41; 0.39) 9.52	1.41 - 27.82 - 11.74	60	*	23.98	5.47		
							2	115.58	8.80	(92.05; -4.31) 26.44	0.5 - 2.01 - 38.58 - 11.89	64	*	(91.76; -8.18) 30.08	1.37 - 41.49 - 11.95	66	*	23.98	3.5		
							1	1.2	41.92	35.68	(36.92; 25.89) 17.39	5.09 - 1.39 - 18.24 - 9.37	20	*	(28.24; 15.69) 18.56	2.55 - 14.8 - 9.36	18	*	7.76	7.79	
									1.5	41.92	20.40	(58.51; 14.75) 8.94	4.49 - 1.47 - 41.29 - 9.77	24	*	(55.72; 9.01) 8.96	2.61 - 19.68 - 10.56	35	*	7.76	5.47
					1.5	1.8	2	41.92	8.80	(78.67; -1.59) 5.09	1.77 - 2.11 - 31.12 - 11.23	47	*	(78.62; -1.81) 5.32	1.66 - 31.38 - 10.87	40	*	7.76	3.5		
								2.5	41.92	4.38	(87.85; -16.21) 8.95	0.92 - 2.55 - 40.96 - 11.51	54	*	(87.3; -21.46) 9.79	1.03 - 45.23 - 11.96	66	*	7.76	2.49	
								15.78	12.12	(43.28; 26.15) 7.49	5.51 - 1.94 - 14.94 - 8.5	12		(37.95; 19.22) 7.81	3.49 - 14.56 - 9.21	17		4.28	4.11		
								15.78	8.80	(52.53; 14.88) 4.86	4.67 - 2.38 - 15.88 - 8.9	15		(50.5; 11.25) 4.86	2.85 - 15.89 - 9.59	21		4.28	3.5		
								15.78	4.38	(69.2; -10.95) 3.34	2.01 - 2.54 - 24.38 - 10.88	40	*	(69.2; -10.95) 3.52	1.63 - 18.97 - 10.47	33	*	4.28	2.49		
								15.78	2.55	(78.83; -30.98) 2.64	0.59 - 3.22 - 20.92 - 11.5	53	*	(77.69; -38.03) 2.65	1.37 - 15.17 - 11.94	63		4.28	1.83		
					2.5	3	3.5	3.55	2.55	(25.63; -3.52) 2.27	4.22 - 3.72 - 11.54 - 10.26	14		(25.35; -3.92) 2.29	3.74 - 11.92 - 10.25	17		1.98	1.83		
								3.55	1.72	(36.05; -31.97) 2.05	2.74 - 5.20 - 11.30 - 11.34	23		(35.49; -33.13) 2.12	003.84 - 11.64 - 10.41	16		1.98	1.48		
								3.55	1.33	(42.25; -54.13) 1.92	2.56 - 4.20 - 10.60 - 12.83	26		(40.28; -59.39) 2.13	004.04 - 11.25 - 10.75	15		1.98	1.23		
								3.55	1.14	(45.91; -68.42) 1.17	2.57 - 5.23 - 10.67 - 12.61	24		(40; -86.84) 1.45	005.12 - 10.80 - 11.21	8		1.98	1.1		
								3.5	4	1.53	1.33	(23.02; 12.03) 1.41	4.57 - 6.85 - 10.66 - 12.28	9		(5.22; -9.02) 1.41	006.02 - 10.79 - 10.56	5		1.28	1.23
										1.53	1.14	(7.84; -23.68) 1.2	3.86 - 6.20 - 10.59 - 12.88	13		(7.84; -23.68) 1.2	004.53 - 10.68 - 12.23	11		1.28	1.1
					4	5	1.23	1.05	(2.43; -14.28) 1.2	7.04 - 10.50 - 10.56 - 15.52	2		(2.43; -14.28) 1.2	005.22 - 10.57 - 13.21	7		1.13	1.03			
							1.23	1.00	(2.43; -20) 1.2	5.81 - 10.70 - 10.50 - 20.85	5		(2.43; -20) 1.2	006.40 - 10.52 - 21.30	4		1.13	1			

Tabla 4.3. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 2 y p = 3

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p	
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)		
200	2	4	0.2	0.5	180.68	138.10	137.09 (24.12; 0.73) 60.32	3.34 - 1.35 - 43.65 - 13.48	55	*	137.48 (23.9; 0.44) 60.38	1.75 - 45.23 - 13.84	64	*	51.05	34.01		
					1	180.68	60.95	(66.61; 1.03) 24.37	1.19 - 1.77 - 31.48 - 14.07	71	*	(66.58; 0.93) 24.73	1.75 - 42.03 - 13.83	64	*	51.05	12.36	
					1.5	180.68	24.62	(86.51; 1.01) 10.94	0.52 - 2.59 - 41.87 - 13.95	67	*	(86.31; -0.44) 11.62	1.88 - 26.62 - 13.82	63	*	51.05	6.59	
					2	180.68	10.63	(93.94; -2.91) 90.4	0.64 - 2.52 - 67.44 - 13.93	66	*	(93.56; -9.31) 96.28	1.46 - 69.94 - 14.19	74	*	51.05	4.16	
					0.5	0.7	115.58	102.43	(21.78; 11.74) 56.98	6.49 - 1.72 - 19.53 - 10.23	13	*	(16.69; 6) 58.42	3.28 - 15.79 - 11.83	25		23.98	21.17
					1	115.58	60.95	(50.7; 6.51) 24.09	4.31 - 1.64 - 43.71 - 12.47	35	*	(49.45; 4.15) 24.13	2.29 - 37.81 - 13.18	48	*	23.98	12.36	
					1.5	115.58	24.62	(79.15; 2.15) 10.86	1.96 - 2.29 - 43.14 - 13.43	53	*	(79.12; 1.99) 11.4	2.01 - 36.78 - 13.72	61	*	23.98	6.59	
					2	115.58	10.63	(90.6; -2.16) 28.57	0.66 - 2.8 - 33.43 - 13.82	63	*	(90.13; -7.24) 32.26	1.88 - 21.08 - 13.78	62	*	23.98	4.16	
					1	1.2	41.92	42.35	(31.84; 32.53) 19.84	6.32 - 1.95 - 15.48 - 10.23	13		(23.04; 23.82) 20.91	4.46 - 14.36 - 10.53	13		7.76	9.43
					1.5	41.92	24.62	(52.67; 19.41) 10.35	4.92 - 2.57 - 20.98 - 10.87	18	*	(50.11; 15.06) 10.36	3.23 - 19.02 - 11.75	26	*	7.76	6.59	
					2	41.92	10.63	(75.31; 2.63) 5.75	2.45 - 2.81 - 44.37 - 12.82	41	*	(75.28; 2.53) 6.17	2.44 - 37.71 - 12.52	36	*	7.76	4.16	
					2.5	41.92	5.19	(86.28; -10.78) 9.82	0.65 - 2.99 - 27.18 - 13.76	62	*	(85.28; -18.88) 10.53	1.46 - 36.78 - 13.5	55	*	7.76	2.94	
					1.5	1.8	15.78	14.68	(37.76; 33.1) 8.33	6.13 - 2.56 - 14.67 - 9.81	10		(33.26; 28.26) 8.57	4.52 - 13.84 - 10.23	11		4.28	4.93
					2	15.78	10.63	(47.21; 21.63) 5.43	4.84 - 3.02 - 18.98 - 10.6	16	*	(45.69; 19.37) 5.44	3.67 - 15.45 - 11.31	20		4.28	4.16	
					2.5	15.78	5.19	(65.58; -4.62) 3.71	2.51 - 3.48 - 42.52 - 12.44	35	*	(65.52; -4.81) 3.93	2.51 - 19.43 - 11.83	27	*	4.28	2.94	
					3	15.78	2.93	(76.48; -26.62) 1.18	1.36 - 4.05 - 20.05 - 13.06	45	*	(75.09; -34.12) 2.74	0.74 - 16.85 - 13.44	53	*	4.28	2.15	
					2.5	3	3.55	2.93	(66.76; 59.72) 2.37	8.18 - 4.00 - 10.67 - 12.43	2		(22.81; 6.48) 2.45	005.23 - 11.84 - 10.70	8		1.98	2.15
					3.5	3.55	1.91	(33.23; -24.08) 2.1	2.64 - 5.30 - 11.31 - 13.45	26		(30.98; -28.27) 2.25	005.31 - 12.26 - 10.19	8		1.98	1.67	
					4	3.55	1.42	(40.84; -47.88) 1.95	2.58 - 5.16 - 10.71 - 14.54	27		(36.61; -58.45) 2.16	005.12 - 11.02 - 12.39	9		1.98	1.37	
					4.5	3.55	1.19	(45.07; -63.86) 1.47	2.58 - 6.72 - 11.01 - 13.80	24		(39.15; -81.51) 1.47	005.14 - 10.85 - 13.03	9		1.98	1.18	
					3.5	4	1.53	1.42	(3.92; -3.52) 1.42	5.89 - 10.21 - 10.78 - 12.50	5		(3.92; -3.52) 1.43	006.60 - 10.84 - 11.63	4		1.28	1.37
					4.5	1.53	1.19	(7.18; -19.32) 1.21	3.84 - 9.48 - 10.59 - 14.90	13		(6.53; -20.16) 1.21	005.12 - 10.64 - 14.40	9		1.28	1.18	
					4	5	1.23	1.07	(1.62; -13.08) 1.19	7.78 - 10.67 - 10.59 - 15.25	2		(1.62; -13.08) 1.2	005.35 - 10.56 - 15.39	8		1.13	1.07
					6	1.23	1.01	(3.25; -17.82)	4.64 - 13.64 - 10.43 - 20.49	9		(2.43; -18.81)	006.08 - 10.51 - 18.75	5		1.13	1	

**Tabla 4.4. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 2 y p = 4**

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p			
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp		% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp		% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)		
200	5	6	0.2	0.5	189.61	149.47	104.04 (45.12; 30.39)	10.24 - 3.06 - 57.89 - 11.09	24			119.85 (36.79; 19.81)	4.43 - 57.91 - 14.53	46			116.8	46.67		
							50.46 (73.38; 32.09)	5.11 - 5.78 - 28.94 - 14.2	42		51.41 (72.88; 30.81)	5.34 - 57.87 - 15.39	56			116.8	16.72			
						1	189.61	74.31	20.13 (89.38; 37.34)	6.52 - 3.7 - 28.94 - 14.68	48		21.85 (88.47; 31.99)	4.41 - 28.93 - 15.37	56			116.8	8.74	
						1.5	189.61	32.13	10.63 (94.39; 24.71)	3.42 - 4.56 - 28.93 - 15.73	61		10.69 (94.36; 24.29)	4.41 - 28.93 - 15.37	56			116.8	5.41	
						2	189.61	14.12	58.22 (59.77; 50.1)	8.74 - 4.29 - 57.88 - 11.09	24		60.15 (58.43; 48.45)	9.21 - 57.84 - 11.09	24			40.08	28.9	
						0.5	0.7	144.73	116.69	36.95 (74.46; 50.27)	9.06 - 3.98 - 28.95 - 11.09	24		46.07 (68.16; 38)	6.94 - 28.95 - 13.55	35			40.08	16.72
						1	144.73	74.31	21.24 (85.32; 33.89)	4.77 - 4.13 - 28.93 - 15.36	56		21.26 (85.31; 33.83)	4.41 - 28.93 - 15.37	56			40.08	8.74	
						1.5	144.73	32.13	10.35 (92.84; 26.69)	3.51 - 5.06 - 57.89 - 15.42	57		14.18 (90.2; -0.42)	4.41 - 34.25 - 17.27	60	*		40.08	5.41	
						2	144.73	14.12	20.33 (70.15; 61.95)	9.31 - 3.76 - 57.85 - 11.09	24		21.19 (68.89; 60.34)	7.02 - 28.94 - 11.09	24			14.61	12.53	
						1	1.2	68.13	53.43	14.29 (79.02; 55.52)	8.07 - 5.08 - 57.89 - 11.09	24		14.77 (78.32; 54.03)	7.02 - 28.94 - 11.09	24			14.61	8.74
						1.5	68.13	32.13	10.22 (84.99; 27.62)	3.28 - 4.43 - 28.95 - 15.86	63		13.64 (79.97; 3.39)	4.69 - 36.11 - 16.89	52	*		14.61	5.41	
						2	68.13	14.12	5.87 (91.38; 13.54)	0.96 - 4.62 - 57.91 - 16.37	70		6.09 (91.06; 10.3)	0.5 - 5.33 - 20.45	99			14.61	3.73	
						2.5	68.13	6.79	10.06 (64.7; 48.33)	10.3 - 3.72 - 57.85 - 11.28	18		10.23 (64.1; 47.45)	6.61 - 28.95 - 12.75	28			7.75	7.22	
						1.5	1.8	28.50	19.47	8.06 (71.71; 42.91)	8.08 - 5.25 - 57.84 - 12.14	23		9.34 (67.22; 33.85)	4.38 - 57.87 - 15.39	56			7.75	5.41
						2	28.50	14.12	6.9 (75.78; -1.62)	5.04 - 5.14 - 58.9 - 16.59	46	*	6.9 (75.78; -1.62)	5.4 - 33.21 - 16.34	42	*		7.75	3.73	
						2.5	28.50	6.79	3.23 (88.66; 12.46)	1.86 - 0.5 - 6.44 - 19.94	99		4.06 (85.75; -10.02)	0.66 - 10.24 - 18.88	99			7.75	2.78	
						3	28.50	3.69	3.67 (38.73; 0.54)	10.27 - 7.06 - 19.36 - 13.08	8		3.67 (38.73; 0.54)	007.70 - 20.02 - 14.83	18			3.33	2.78	
						2.5	3	5.99	3.69	2.9 (51.58; -26.63)	4.79 - 7.08 - 20.67 - 16.47	39		2.92 (51.25; -27.51)	006.97 - 20.65 - 15.35	24			3.33	2.09
						3.5	5.99	2.29	1.1 (81.63; 32.09)	3.56 - 4.15 - 16.79 - 18.52	64		2.47 (58.76; -52.46)	005.84 - 19.25 - 16.61	36			3.33	1.67	
						4	5.99	1.62	1.93 (67.77; -50.78)	2.87 - 8.86 - 14.45 - 17.22	46		2.2 (63.27; -71.87)	005.12 - 16.58 - 18.77	45			3.33	1.38	
						4.5	5.99	1.28	1.83 (12.85; -12.96)	10.34 - 10.83 - 17.17 - 15.41	6		1.83 (12.85; -12.96)	10.32 - 17.17 - 15.46	6			1.89	1.67	
						3.5	4	2.10	1.62	1.02 (51.42; 20.31)	3.53 - 4.70 - 16.74 - 18.55	59		1.7 (19.04; -32.81)	006.41 - 17.06 - 17.90	30			1.89	1.38
						4.5	2.10	1.28	1.02 (32.89; 8.92)	11.69 - 6.76 - 16.67 - 20.86	5		1.36 (10.52; -21.42)	005.15 - 16.05 - 19.86	45			1.52	1.19	
						4	5	1.52	1.12	1.33 (12.5; -31.68)	4.65 - 21.23 - 15.89 - 25.71	31		1.38 (9.21; -36.63)	0010.25 - 16.68 - 19.73	7			1.52	1.02
	6	1.52	1.01	1.01																

Tabla 4.5. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 5 y p = 6

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p				
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp		% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp		% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)			
200	5	7	0.2	0.5	189.61	153.17	120.85 (36.26; 21.1)	7.69 - 4.45 - 28.95 - 15.38		38		122.12 (35.59; 20.27)	6.49 - 57.9 - 14.87		33		116.8	46.67			
							53.05 (72.02; 33.41)	6.9 - 5.12 - 28.95 - 15.43		38		54.65 (72.74; 31.4)	6.15 - 28.94 - 15.33		37		116.8	16.72			
						1	200.51	79.67	23.7 (87.5; 33.27)	5.22 - 5.08 - 57.87 - 16.65		52		23.73 (87.48; 33.19)	5.1 - 57.86 - 16.71		53		116.8	8.73	
						1.5	189.61	35.52	11.73 (93.81; 25.75)	1.28 - 8.1 - 57.84 - 17.11		58		11.88 (93.73; 24.81)	4.84 - 28.93 - 17.05		57		116.8	5.42	
						2	189.61	15.80	84.21 (41.81; 30.86)	10.21 - 6.57 - 14.45 - 15.51		11		84.9 (41.33; 30.3)	9.78 - 14.45 - 14.93		9		40.08	28.9	
						0.5	0.7	144.73	121.81	47.58 (67.12; 40.27)	7.67 - 4.49 - 28.94 - 15.36		38		51.28 (64.56; 35.63)	5.1 - 57.86 - 16.71		53		40.08	16.72
						1	144.73	79.67	22.39 (84.52; 36.96)	6.67 - 5.03 - 57.88 - 15.68		41		22.88 (84.19; 35.58)	5.11 - 28.93 - 16.7		53		40.08	8.73	
						1.5	144.73	35.52	11.33 (92.17; 28.29)	4.5 - 5.57 - 57.91 - 16.76		53		15.82 (89.06; -0.12)	4.51 - 32.71 - 19.07		62	*	40.08	5.42	
						2	144.73	15.80	25.53 (62.52; 56.08)	9.68 - 4.78 - 28.94 - 13.13		20		26.8 (60.66; 53.89)	7.21 - 57.91 - 13.75		24		14.61	12.53	
						1	1.2	68.13	58.13	18.68 (72.58; 47.4)	7.69 - 4.47 - 57.88 - 15.36		38		24.94 (63.39; 29.78)	7.21 - 14.45 - 16.36		15		14.61	8.73
						1.5	68.13	35.52	10.7 (84.29; 32.27)	7.12 - 4.39 - 57.87 - 15.9		43		14.99 (77.99; 5.12)	5.55 - 32.59 - 18.25		46	*	14.61	5.42	
						2	68.13	15.80	7.87 (88.44; -3.82)	1.16 - 6.12 - 67.92 - 19.23		66	*	8.1 (88.11; -6.86)	4.4 - 33.36 - 18.69		54	*	14.61	3.73	
						2.5	68.13	7.58	10.42 (63.43; 52.02)	10.33 - 5.15 - 28.92 - 12.02		14		10.44 (63.36; 51.93)	7.03 - 57.84 - 13.76		24		7.75	6.5	
						1.5	1.8	28.50	21.72	9.04 (68.28; 42.78)	10.07 - 5.19 - 57.88 - 12.28		16		10.43 (63.4; 33.98)	9.02 - 14.45 - 15.78		12		7.75	5.42
						2	28.50	15.80	5.63 (80.24; 25.72)	6.25 - 6.74 - 28.92 - 14.95		34		5.65 (80.17; 25.46)	4.95 - 57.88 - 15.42		38		7.75	3.73	
						2.5	28.50	7.58	4.65 (83.68; -14.53)	1.2 - 6.8 - 60.37 - 19.09		63	*	4.88 (82.87; -20.19)	5.11 - 31.33 - 18.62		53	*	7.75	2.78	
						3	28.50	4.06	3.02 (49.58; 25.61)	8.61 - 6.44 - 21.14 - 16.23		19		3.03 (49.41; 25.36)	009.51 - 14.45 - 15.24		10		3.33	2.78	
						2.5	3	5.99	4.06	1.2 (79.96; 51.61)	8.01 - 11.75 - 26.15 - 15.14		14		2.6 (56.59; -4.83)	007.87 - 14.45 - 16.96		19		3.33	2.09
						3.5	5.99	2.48	1.3 (78.29; 24.41)	2.87 - 5.49 - 16.73 - 20.29		64		2.27 (62.1; -31.97)	005.47 - 14.44 - 18.96		47		3.33	1.68	
						4	5.99	1.72	2.14 (64.27; -59.7)	2.56 - 6.31 - 16.76 - 20.27		60		2.24 (62.6; -67.16)	005.12 - 16.84 - 20.19		52		3.33	1.38	
						4.5	5.99	1.34	1.25 (40.47; 27.32)	10.60 - 11.19 - 16.73 - 20.53		6		1.85 (11.9; -7.55)	0010.45 - 17.26 - 16.75		7		1.89	1.68	
						3.5	4	2.10	1.72	1.04 (50.47; 22.38)	8.56 - 10.78 - 16.87 - 19.50		13		1.66 (20.95; -23.88)	004.52 - 15.37 - 21.91		62		1.89	1.38
						4.5	2.10	1.34	1.35 (11.18; -17.39)	4.50 - 5.76 - 15.58 - 22.48		52		1.36 (10.52; -18.26)	005.16 - 15.45 - 23.09		52		1.52	1.19	
						4	5	1.52	1.15	1.33 (12.5; -30.39)	5.38 - 13.03 - 16.03 - 25.88		28		1.38 (9.21; -35.29)	0010.25 - 16.66 - 21.90		7		1.52	1.02
	6	1.52	1.02	1.02																	

Tabla 4.6. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=200, p<sub>1</sub> = 5 y p = 7

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits				VDT2 - one warning limit				CUSUM always p1	MCUSUM always p	
ARL(0)	p1	p	d1	d	ARL(d1)	ARL(d)	ARL (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL	Optimum Parameters w - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL(d1)	ARL(d)	
400	1	2	0.2	0.5	332.25	216.9	217.16 (34.63; -0.11)	0.15 - 0.2 - 69.29 - 11.72	88	*	217.18 (34.63; -0.12)	0.13 - 17.18 - 11.81	92	*	109.78	109.17	
				1	332.25	71.45	73.42 (77.9; -2.75)	1.28 - 1.02 - 69.39 - 10.09	39	*	74.03 (77.71; -3.61)	1.18 - 20.83 - 10.05	38	*	109.78	11.39	
				1.5	332.25	24.52	25.55 (92.31; -4.2)	0.69 - 1.66 - 20.93 - 10.23	42	*	26.72 (91.95; -8.97)	1.37 - 69.81 - 9.73	32	*	109.78	5.97	
				2	332.25	9.79	10.12 (96.95; -3.37)	0.18 - 1.17 - 27.04 - 10.96	60	*	10.73 (96.77; -9.6)	0.63 - 21.51 - 10.99	61	*	109.78	3.19	
				0.5	0.7	165.97	140.83	138.88 (16.32; 1.38)	2.14 - 0.28 - 14.74 - 10.7	51	*	139.58 (15.9; 0.88)	3.63 - 23 - 6.38	6	*	29.44	15.29
				1	165.97	71.45	70.36 (57.6; 1.52)	0.06 - 0.69 - 20.86 - 11.36	73	*	71.94 (56.65; -0.68)	1.99 - 40.96 - 8.74	20	*	29.44	11.39	
				1.5	165.97	24.52	23.92 (85.58; 2.44)	0.06 - 0.94 - 69.5 - 11.21	68	*	24 (85.53; 2.12)	0.51 - 17.92 - 11.2	67	*	29.44	5.97	
				2	165.97	9.79	10.08 (93.92; -2.96)	0.08 - 1.77 - 21.62 - 10.85	57	*	10.45 (93.7; -6.74)	0.6 - 17.29 - 11.05	62	*	29.44	3.19	
				1	1.2	46.41	45.9	27.37 (41.02; 40.37)	4.7 - 0.49 - 55.24 - 7.6	11	*	33.05 (28.78; 27.99)	2.51 - 12.82 - 8.21	13		10.13	6.92
				1.5	46.41	24.52	17.97 (61.27; 26.71)	3.6 - 0.6 - 51.7 - 8.49	17	*	19.87 (57.18; 18.96)	2.05 - 17.14 - 8.67	19	*	10.13	5.97	
				2	46.41	9.79	9.25 (80.06; 5.51)	1.93 - 1.24 - 24.52 - 9.28	26	*	9.26 (80.04; 5.41)	1.48 - 26.75 - 9.55	30	*	10.13	3.19	
				2.5	46.41	4.65	5.42 (88.32; -16.55)	0.77 - 2.31 - 22.14 - 9.91	35	*	5.52 (88.1; -18.7)	1.05 - 20.74 - 10.27	42	*	10.13	2.65	
				1.5	1.8	15.66	13.85	5.14 (67.17; 62.88)	6.94 - 1.45 - 23.94 - 3.02	1	*	9.51 (39.27; 31.33)	2.89 - 14.52 - 7.51	10		5.26	3.73
				2	15.66	9.79	4.67 (70.17; 52.29)	6.48 - 1.33 - 16.25 - 3.87	2	*	7.58 (51.59; 22.57)	2.63 - 14.97 - 7.86	12		5.26	3.19	
				2.5	15.66	4.65	4.84 (69.09; -4.08)	2.57 - 1.69 - 13.76 - 8.42	16		4.91 (68.64; -5.59)	2.44 - 67.74 - 8.06	14	*	5.26	2.65	
				3	15.66	2.63	3.52 (77.52; -33.84)	0.05 - 0.46 - 9.15 - 11.98	80		3.54 (77.39; -34.6)	1.06 - 15.46 - 10.29	42	*	5.26	1.71	
				2.5	3	3.33	2.63	2.49 (25.22; 5.32)	3.64 - 3.42 - 10.32 - 7.77	6		2.5 (24.92; 4.94)	3.91 - 10.22 - 7.5	5		2.34	1.71
				3.5	3.33	1.75	2.23 (33.03; -27.42)	2.56 - 3.91 - 9.45 - 10.36	11		2.23 (33.03; -27.42)	3.51 - 9.75 - 8.76	7		2.34	1.57	
				4	3.33	1.33	2.05 (38.43; -54.13)	2.71 - 4.47 - 9.35 - 10.6	10		2.16 (35.13; -62.4)	4.05 - 9.26 - 10.3	5		2.34	1.19	
				4.5	3.33	1.14	1.94 (41.74; -70.17)	2.56 - 4.76 - 9.18 - 11.65	11		2.23 (33.03; -95.61)	5.13 - 9.19 - 10.43	2		2.34	1.08	
3.5	4	1.46	1.33	1.41 (3.42; -6.01)	3.8 - 4.32 - 9.25 - 10.54	5		1.41 (3.42; -6.01)	5.3 - 9.19 - 10.3	2		1.44	1.19				
4.5	1.46	1.14	1.37 (6.16; -20.17)	3.9 - 4.7 - 9.2 - 11	5		1.38 (5.47; -21.05)	4.55 - 9.19 - 10.82	3		1.44	1.08					

Tabla 4.7. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 1 y p = 2

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit					MCUSUM always p1	MCUSUM always p		
ARL(0)	p1	p	d1	d	ARL(d1)	ARL(d)	ARL (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL	Optimum Parameters w - CL1 - CL	% p	CL1 = inf?	ARL(d1)	ARL(d)				
400	2	3	0.2	0.5	356.48	244.94	243.93 (31.57; 0.41)	4.58 - 0.59 - 37.02 - 12.79	49	*	245.53 (31.12; -0.24)	1.04 - 44.19 - 13.68	74	*	109.17	37.30				
							89.74						90.01	1.3 - 22.29 - 13.43	66	*	109.17	12.90		
							31.67							31.73	1.52 - 22.47 - 13.2	59	*	109.17	6.73	
							12.83							13.22	1.29 - 23.18 - 13.44	66	*	109.17	4.21	
							146.17							163.5	2.15 - 21.06 - 12.5	42	*	32.49	22.42	
						0.5		0.7	216.90	169.12	(32.6; 13.57)	7.15 - 0.63 - 21.61 - 10.7	18	*	(24.61; 3.32)	2.15 - 21.06 - 12.5	42	*	32.49	22.42
											84.51				87.95	1.69 - 44.93 - 13.01	54	*	32.49	12.90
											(61.03; 7.37)	4.03 - 0.73 - 27.59 - 12.8	49	*	(59.45; 3.6)	1.59 - 43.08 - 13.12	57	*	32.49	6.73
											30.84				31.05	1.27 - 22.43 - 13.46	66	*	32.49	4.21
											(85.78; 5.13)	2.44 - 1.47 - 67.01 - 12.77	48	*	(85.68; 4.49)	1.27 - 22.43 - 13.46	66	*	32.49	4.21
											12.82				13.05	1.27 - 22.43 - 13.46	66	*	32.49	4.21
											(94.08; 0.23)	1.11 - 2.09 - 56.19 - 13.09	56	*	(93.98; -1.55)	1.27 - 22.43 - 13.46	66	*	32.49	4.21
											38.75				48.31	3.83 - 17.09 - 10.62	17	*	11.39	9.60
						1		1.2	71.45	59.96	(45.76; 35.37)	7 - 1.29 - 21.39 - 9.2	9	*	(32.38; 19.42)	3.83 - 17.09 - 10.62	17	*	11.39	9.60
											24.6				27.94	2.86 - 38.77 - 11.65	29	*	11.39	6.73
											(65.57; 24.33)	5.09 - 1.44 - 44.69 - 10.85	20	*	(60.89; 14.05)	2.86 - 38.77 - 11.65	29	*	11.39	6.73
											11.97				12.01	2.19 - 42.01 - 12.44	41	*	11.39	4.21
											(83.24; 6.84)	2.55 - 1.95 - 53.75 - 12.36	40	*	(83.19; 6.53)	2.19 - 42.01 - 12.44	41	*	11.39	4.21
											6.37				6.51	1.88 - 26 - 12.8	49	*	11.39	2.94
											(91.08; -7.96)	0.99 - 3.18 - 38.4 - 12.79	49	*	(90.88; -10.33)	1.88 - 26 - 12.8	49	*	11.39	2.94
						11.96				13.53	4.14 - 16.44 - 10.31	14	*	5.97	5.00					
	1.5		1.8	24.52	18.33	(51.22; 34.75)	6.1 - 1.22 - 20.72 - 10.26	15	*	(44.82; 26.18)	4.14 - 16.44 - 10.31	14	*	5.97	5.00					
						9.57				10.34	3.59 - 18.94 - 10.82	19	*	5.97	4.21					
						(60.97; 25.52)	5.07 - 2.62 - 22.7 - 9.81	12	*	(57.83; 19.53)	3.59 - 18.94 - 10.82	19	*	5.97	4.21					
						5.87				5.91	2.43 - 20.11 - 12.19	36	*	5.97	2.94					
						(76.06; 0.5)	3.09 - 2.83 - 39.25 - 11.48	27	*	(75.89; -0.16)	2.43 - 20.11 - 12.19	36	*	5.97	2.94					
						3.88				4.03	2.14 - 53.22 - 12.5	43	*	5.97	2.19					
						(84.17; -22.01)	0.76 - 2.54 - 36.58 - 13.09	56	*	(83.56; -26.72)	2.14 - 53.22 - 12.5	43	*	5.97	2.19					
						3.02				3.03	4.82 - 13.63 - 10.38	10	*	2.65	2.19					
	2.5		3	4.65	3.18	(35.05; 5.03)	4.91 - 3.09 - 13.8 - 10.67	12	*	(34.83; 4.71)	4.82 - 13.63 - 10.38	10	*	2.65	2.19					
						2.53				2.6	5.16 - 13.45 - 10.14	8	*	2.65	1.71					
						(45.59; -25.87)	3.02 - 4.2 - 14.19 - 11.75	22	*	(44.08; -29.35)	5.16 - 13.45 - 10.14	8	*	2.65	1.71					
						2.22				2.29	4.1 - 12.51 - 12.47	14	*	2.65	1.39					
						(52.25; -52.05)	2.57 - 5.68 - 12.59 - 13.03	24	*	(50.75; -56.84)	4.1 - 12.51 - 12.47	14	*	2.65	1.39					
						2.05				2.28	5.16 - 12.14 - 12.99	8	*	2.65	1.19					
						(55.91; -70.83)	2.56 - 5.63 - 11.97 - 14.38	24	*	(50.96; -90)	5.16 - 12.14 - 12.99	8	*	2.65	1.19					
						1.6				1.6	5.55 - 12.26 - 12.07	6	*	1.57	1.39					
	3.5		4	1.75	1.46	(8.57; -9.58)	7.19 - 4.66 - 12.15 - 11.59	3	*	(8.57; -9.58)	5.55 - 12.26 - 12.07	6	*	1.57	1.39					
						1.07				1.53	5.24 - 12.15 - 12.88	8	*	1.57	1.19					
						(38.85; 10.83)	9.96 - 6.15 - 12.07 - 10.27	1	*	(12.57; -27.5)	5.24 - 12.15 - 12.88	8	*	1.57	1.19					
						1.28				1.28	5.29 - 11.99 - 14.24	7	*	1.29	1.08					
						(3.75; -18.51)	5.53 - 7.49 - 11.97 - 14.56	6	*	(3.75; -18.51)	5.29 - 11.99 - 14.24	7	*	1.29	1.08					

Tabla 4.8. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 2 y p = 3

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p	
ARL(0)	p1	p	d1	d	ARL(d1)	ARL(d)	ARL (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL	Optimum Parameters w - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL(d1)	ARL(d)		
400	2	4	0.2	0.5	356.48	264.91	260.65 (26.88; 1.6)	4.86 - 1.12 - 37.2 - 14.54	43	*	263.13 (26.18; 0.67)	1.91 - 44.7 - 15.29	60	*	109.17	41.52		
					1	107.86	105.07 (70.52; 2.58)	2.54 - 1.64 - 40.54 - 15.2	58	*	105.26 (70.47; 2.41)	1.8 - 43.23 - 15.41	64	*	109.17	14.31		
					1.5	39.96	38.49 (89.2; 3.67)	1.52 - 2.15 - 44.53 - 15.32	61	*	38.55 (89.18; 3.52)	1.99 - 44.9 - 15.2	58	*	109.17	7.43		
					2	15.84	15.59 (95.62; 1.57)	0.5 - 2.37 - 61.28 - 15.62	70	*	16.15 (95.46; -1.95)	1.8 - 43.23 - 15.41	64	*	109.17	4.62		
					0.5	0.7	216.90	190.59	158.53 (26.91; 16.82)	7.68 - 1.09 - 38.05 - 12.11	15	*	177.02 (18.38; 7.11)	3.89 - 18.02 - 12.79	19	*	32.49	25.00
					1	107.86	95.65 (55.9; 11.32)	5.52 - 1.27 - 41.44 - 13.76	31	*	101.29 (53.3; 6.09)	2.54 - 44.06 - 14.53	43	*	32.49	14.31		
					1.5	39.96	37.15 (82.87; 7.03)	3 - 1.89 - 42.8 - 14.73	47	*	37.37 (82.77; 6.48)	2.32 - 27.02 - 14.81	49	*	32.49	7.43		
					2	15.84	15.47 (92.86; 2.33)	0.71 - 2.51 - 43.48 - 15.49	66	*	15.72 (92.75; 0.75)	2.12 - 39.71 - 15.05	54	*	32.49	4.62		
					1	1.2	71.45	72.40	43.19 (39.55; 40.34)	6.99 - 1.73 - 18.15 - 11.54	11	*	52.26 (26.85; 27.81)	4.96 - 15.84 - 11.53	10	*	11.39	10.71
					1.5	39.96	28.25 (60.46; 29.3)	5.89 - 1.89 - 49.56 - 12.37	17	*	31.73 (55.59; 20.59)	3.7 - 22.36 - 12.97	22	*	11.39	7.43		
					2	15.84	14.01 (80.39; 11.55)	3.04 - 2.68 - 44.17 - 14.09	36	*	14.03 (80.36; 11.42)	3.12 - 43.85 - 13.76	31	*	11.39	4.62		
					2.5	7.14	7.4 (89.64; -3.64)	1.64 - 3.49 - 63.74 - 14.65	46	*	7.77 (89.12; -8.82)	1.85 - 23.69 - 15.36	62	*	11.39	3.21		
					1.5	1.8	24.52	22.64	12.99 (47.02; 42.62)	7.2 - 2.68 - 17.35 - 10.08	6	*	14.67 (40.17; 35.2)	4.99 - 16.28 - 11.42	10	*	5.97	5.51
					2	15.84	10.59 (56.81; 33.14)	5.75 - 2.7 - 19.12 - 11.64	12	*	11.42 (53.42; 27.9)	4.3 - 18.29 - 12.21	15	*	5.97	4.62		
					2.5	7.14	6.61 (73.04; 7.42)	4.07 - 3.37 - 36.71 - 12.79	20	*	4.53 (73.04; 7.42)	3.86 - 19.6 - 12.78	20	*	5.97	3.21		
					3	3.73	4.32 (82.38; -15.81)	0.92 - 3.77 - 69.66 - 14.98	53	*	4.53 (81.52; -21.44)	2.52 - 24.82 - 14.56	44	*	5.97	2.39		
					2.5	3	4.65	3.73	3.16 (32.04; 15.28)	5.98 - 5.19 - 13.89 - 11.04	6	*	3.21 (30.96; 13.94)	6.36 - 14.09 - 10.21	5	*	2.65	2.39
					3.5	2.27	2.67 (42.58; -17.62)	3.43 - 5.82 - 14.45 - 13.19	18	*	2.67 (42.58; -17.62)	4.66 - 14.33 - 12.36	12	*	2.65	1.86		
					4	1.60	2.31 (50.32; -44.37)	2.73 - 6.05 - 12.46 - 15.26	24	*	2.42 (47.95; -51.25)	4.02 - 12.14 - 15.76	18	*	2.65	1.49		
					4.5	1.27	2.1 (54.83; -65.35)	2.56 - 5.51 - 11.96 - 16.5	27	*	2.25 (51.61; -77.16)	4.53 - 12.14 - 15.52	13	*	2.65	1.25		
					3.5	4	1.75	1.60	1.62 (7.42; -1.25)	5.79 - 9.68 - 12.59 - 12.44	5	*	1.63 (6.85; -1.87)	7.76 - 12.13 - 12.99	2	*	1.57	1.49
					4.5	1.27	1.56 (10.85; -22.83)	4.1 - 7.51 - 11.99 - 16.37	12	*	1.56 (10.85; -22.83)	5.35 - 12.07 - 15.54	8	*	1.57	1.25		
					4	5	1.33	1.11	1.28 (3.75; -15.31)	5.78 - 10.92 - 11.99 - 16.28	5	*	1.28 (3.75; -15.31)	5.28 - 11.99 - 16.34	8	*	1.29	1.11
					6	1.01	1.26 (5.26; -24.75)	5.13 - 16.3 - 11.88 - 19.16	7	*	1.26 (5.26; -24.75)	6.06 - 11.98 - 16.48	5	*	1.29	1.01		

Tabla 4.9. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 2 y p = 4



DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p		
ARL(0)	p1	p	d1	d	ARL(d1)	ARL(d)	ARL (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL	Optimum Parameters w - CL1 - CL2	% p	CL1 = inf?	ARL(d1)	ARL(d)			
400	5	6	0.2	0.5	376.27	289.71	183.33 (51.27; 36.71)	10.17 - 2.63 - 57.86 - 13.79	31		183.73 (51.17; 36.58)	6.38 - 57.91 - 13.64	30		145.11	48.87			
							63.73 (83.06; 52.55)	7.51 - 3.82 - 57.89 - 14.46	38		65.94 (82.47; 50.91)	5.1 - 57.9 - 15.24	46		145.11	16.91			
						1	376.27	134.33	26.04 (93.07; 51.4)	5.04 - 4.91 - 57.85 - 15.4	48		26.04 (93.07; 51.4)	5 - 57.86 - 15.37	47		145.11	8.70	
						1.5	376.27	53.59	12.34 (96.72; 43.13)	2.55 - 6.76 - 57.91 - 15.92	54		20.95 (94.43; 3.45)	3.99 - 31.52 - 19.11	63	*	145.11	5.41	
						2	376.27	21.70	122.95 (55.91; 44.24)	12.46 - 7.57 - 14.45 - 15.37	3		123.17 (55.83; 44.14)	12 - 14.45 - 15.25	3		45.37	29.64	
						0.5	0.7	278.88	220.50	45.49 (83.68; 66.13)	8.61 - 5.28 - 57.85 - 11.09	20		61.49 (77.95; 54.22)	5 - 57.86 - 15.37	47		45.37	16.91
						1	278.88	134.33	24.9 (91.07; 53.53)	5.3 - 4.64 - 57.87 - 15.41	48		24.98 (91.04; 53.38)	5 - 57.86 - 15.37	47		45.37	8.70	
						1.5	278.88	53.59	12.42 (95.54; 42.76)	4.09 - 4.17 - 57.88 - 16.49	60		20.72 (92.57; 4.51)	4.28 - 34.5 - 18.92	58	*	45.37	5.41	
						2	278.88	21.70	29.8 (75.54; 68.15)	9.4 - 6.4 - 57.88 - 10.8	13		37.7 (69.06; 59.7)	10.2 - 14.45 - 16.89	7		15.62	12.56	
						1	1.2	121.87	93.57	19.39 (84.08; 63.81)	8.25 - 4.71 - 57.87 - 12.99	25		34.68 (71.54; 35.28)	10.56 - 14.45 - 16.59	6		15.62	8.70
						1.5	121.87	53.59	12.31 (89.89; 43.27)	8.02 - 2.71 - 57.86 - 15.51	49		19.86 (83.7; 8.47)	4.74 - 35.28 - 18.6	51	*	15.62	5.41	
						2	121.87	21.70	9.57 (92.14; 0.62)	3.94 - 5.26 - 58.95 - 18.69	53	*	9.59 (92.13; 0.41)	4.74 - 35.28 - 18.6	51	*	15.62	3.71	
						2.5	121.87	9.63	12.04 (74.34; 61.03)	8.76 - 2.88 - 57.86 - 14.63	39		12.25 (73.89; 60.35)	9.16 - 28.94 - 10.22	11		8.06	6.41	
						1.5	1.8	46.93	30.90	9.55 (79.65; 55.99)	8.53 - 3.17 - 57.9 - 14.39	37		13.79 (70.61; 36.45)	10.2 - 14.45 - 16.89	7		8.06	5.41
						2	46.93	21.70	8.81 (81.22; 8.51)	6.98 - 5.28 - 58.06 - 17.33	31	*	9.04 (80.73; 6.12)	5.08 - 33.14 - 18.35	46	*	8.06	3.71	
						2.5	46.93	9.63	5.29 (88.72; -9.29)	2.66 - 5.88 - 37.99 - 18.87	57	*	5.38 (88.53; -11.15)	5.17 - 34.08 - 18.28	45	*	8.06	2.75	
						3	46.93	4.84	3.64 (56.56; 24.79)	3.93 - 6.08 - 57.85 - 15.48	49		4.38 (47.73; 9.5)	7.21 - 23.23 - 16.68	22		3.46	2.75	
						2.5	3	8.38	4.84	2.83 (66.22; -1.07)	3.12 - 6.5 - 57.88 - 15.75	52		3.28 (60.85; -17.14)	6.87 - 22.6 - 17.17	25		3.46	2.14
						3.5	8.38	2.80	2.65 (68.37; -42.47)	3.03 - 6.67 - 23.97 - 18.73	52		2.69 (67.89; -44.62)	5.58 - 21.98 - 18.3	40		3.46	1.71	
						4	8.38	1.86	2.27 (72.91; -62.14)	2.69 - 4.98 - 18 - 20.52	62		2.42 (71.12; -72.85)	5.82 - 23.91 - 17.91	37		3.46	1.39	
						4.5	8.38	1.40	2.03 (19.76; -9.13)	10.9 - 9.35 - 19.16 - 15.9	6		2.03 (19.76; -9.13)	10.44 - 19.16 - 16.17	6		2.01	1.71	
						3.5	4	2.53	1.86	1.85 (26.87; -32.14)	3.84 - 5.08 - 18.37 - 20.26	55		1.86 (26.48; -32.85)	5.42 - 18.41 - 20.21	42		2.01	1.39
						4.5	2.53	1.40	1.5 (13.29; -27.11)	5.64 - 8.41 - 18.29 - 20.49	30		1.5 (13.29; -27.11)	5.34 - 18.34 - 20.31	43		1.60	1.18	
						4	5	1.73	1.18	1.42 (17.91; -39.21)	4.82 - 17.35 - 18.02 - 21.37	30		1.42 (17.91; -39.21)	6.25 - 18.04 - 21.22	32		1.60	1.03
	6	1.73	1.02	1.02															

Tabla 4.10. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 5 y p = 6

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p				
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters		% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters		% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)			
								w1 - w2 - CLp1 - CLp					w - CLp1 - CLp								
400	5	7	0.2	0.5	376.27	297.34	186.81 (50.35; 37.17)	8.17 - 4.51 - 57.85 - 15.6		34		190.17 (49.45; 36.04)	6.74 - 57.91 - 15.19		30		145.11	52.40			
							70.32 (81.31; 51.52)	8.16 - 3.81 - 57.91 - 16.45		42		73.51 (80.46; 49.32)	5.11 - 57.89 - 17.48		53		145.11	18.05			
						1	43.27 (88.5; 27.7)	2.04 - 3.15 - 57.91 - 20.48		86		43.47 (88.44; 27.36)	2.93 - 28.95 - 20.48		86		145.11	9.31			
						1.5	23.54 (93.74; 4.19)	3.54 - 5.12 - 68.81 - 20.88		63	*	23.6 (93.72; 3.94)	4.71 - 65.31 - 20.72		59	*	145.11	5.75			
						2	123.59 (55.68; 46.52)	12.42 - 11.25 - 14.45 - 16.6		3		123.63 (55.66; 46.5)	12.34 - 14.45 - 16.58		3		45.37	31.79			
						0.5	0.7	59.19 (78.77; 59.19)	8.63 - 4.89 - 57.88 - 14.77		27		61.62 (77.9; 57.51)	6.61 - 57.91 - 15.37		32		45.37	18.05		
						1	278.88	231.11	26.48 (90.5; 55.75)	7.13 - 5.2 - 57.84 - 15.87		36		26.71 (90.42; 55.37)	6.25 - 28.92 - 15.88		36		45.37	9.31	
						1.5	278.88	59.85	13.74 (95.07; 44.07)	5.32 - 4.48 - 57.9 - 17.87		57		23.16 (91.69; 5.73)	5.43 - 31.44 - 20.17		48	*	45.37	5.75	
						2	278.88	24.57	36.94 (69.68; 64.02)	12.72 - 11.02 - 14.45 - 16.31		3		36.96 (69.67; 64)	12.43 - 14.45 - 16.48		3		15.62	13.42	
						1	1.2	121.87	102.68	20.87 (82.87; 65.12)	9.35 - 5.04 - 57.86 - 13.9		21		22.16 (81.81; 62.97)	6.37 - 28.94 - 15.71		35		15.62	9.31
						1.5	121.87	59.85	12.28 (89.92; 50.02)	8.77 - 5.21 - 28.95 - 14.34		24		21.75 (82.15; 11.47)	5.44 - 51.16 - 20.16		48	*	15.62	5.75	
						2	121.87	24.57	10.61 (91.29; 2.48)	4.64 - 5.89 - 69.49 - 20.3		50	*	10.62 (91.28; 2.38)	5.44 - 51.16 - 20.16		48	*	15.62	3.95	
						2.5	121.87	10.88	11.15 (76.24; 68.03)	9.74 - 5.77 - 57.9 - 12.84		16		12.05 (74.32; 65.45)	7.23 - 28.93 - 14.61		25		8.06	6.85	
						1.5	1.8	46.93	34.88	9.65 (79.43; 60.72)	9.85 - 6.17 - 28.93 - 12.43		14		9.88 (78.94; 59.78)	6.38 - 57.9 - 15.69		35		8.06	5.75
						2	46.93	24.57	9.56 (79.62; 12.13)	7.21 - 6.66 - 43.56 - 18.62		26	*	9.72 (79.28; 10.66)	6.67 - 35.29 - 19.06		31	*	8.06	3.95	
						2.5	46.93	10.88	4.12 (91.22; 23.84)	0.82 - 0.67 - 5.2 - 24.56		100		5.87 (87.49; -8.5)	5.79 - 34.02 - 19.86		43	*	8.06	2.92	
						3	46.93	5.41	3.62 (56.8; 33.08)	11.79 - 7.14 - 14.44 - 18.37		6		4.56 (45.58; 15.71)	8.62 - 23.15 - 17.34		15		3.46	2.92	
						2.5	3	8.38	5.41	3.1 (63; -0.97)	7.68 - 8.78 - 14.44 - 20.54		19		3.44 (58.94; -12.05)	7.61 - 23.42 - 18.36		22		3.46	2.27
						3.5	8.38	3.07	2.8 (66.58; -40)	3.11 - 10.37 - 29.82 - 20.01		45	*	2.81 (66.46; -40.5)	5.99 - 20.72 - 20.33		40		3.46	1.82	
						4	8.38	2.00	2.32 (72.31; -57.82)	2.57 - 5.42 - 18.42 - 22.03		66		2.45 (70.76; -66.66)	5.35 - 22.45 - 20.47		49		3.46	1.47	
						4.5	8.38	1.47	2.08 (17.78; -4)	11.79 - 11.75 - 19.02 - 16.97		4		2.16 (14.62; -8)	10.31 - 18.54 - 20.5		7		2.01	1.82	
						3.5	4	2.53	2.00	1.9 (24.9; -29.25)	5.93 - 10.71 - 18.8 - 21.11		27		1.9 (24.9; -29.25)	5.22 - 18.16 - 22.29		51		2.01	1.47
						4.5	2.53	1.47	1.51 (12.71; -24.79)	5.23 - 9.1 - 18.36 - 22.1		34		1.51 (12.71; -24.79)	5.16 - 18.25 - 22.19		52		1.60	1.23	
						4	5	1.73	1.21	1.24 (28.32; -20.38)	4.97 - 20.94 - 14.45 - 20.98		29		1.41 (18.49; -36.89)	6.1 - 17.37 - 27.04		38		1.60	1.03
	6	1.73	1.03	1.03																	

Tabla 4.11. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=400, p<sub>1</sub> = 5 y p = 7

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits					VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)	
1000	1	2	0.2	0.5	806.42	500.00	499.45 (38.06; 0.11)	0.29 - 0.15 - 45.69 - 13.58	89	*	532.98 (33.9; -6.59)	2.24 - 68.21 - 10.21	17	*	65.92	32.47	
				1	806.42	145.95	142.52 (82.32; 2.35)	0.37 - 0.59 - 27.57 - 13.04	68	*	144.21 (82.11; 1.19)	1.01 - 23.86 - 12.18	44	*	65.92	11.01	
				1.5	806.42	44.63	42.38 (94.74; 5.04)	0.37 - 0.96 - 21.82 - 12.75	59	*	46.12 (94.28; -3.33)	1.53 - 21.9 - 11.32	29	*	65.92	5.73	
				2	806.42	15.95	15.37 (98.09; 3.63)	0.11 - 1.18 - 24.43 - 12.87	62	*	15.86 (98.03; 0.56)	0.84 - 24.93 - 12.47	51	*	65.92	3.65	
			0.5	0.7	369.51	309.15	298.1 (19.32; 3.57)	2.84 - 0.26 - 17.99 - 12.13	43	*	306.25 (17.11; 0.93)	5.3 - 15.43 - 6.3	2		20.83	18.98	
				1	369.51	145.95	140.05 (62.09; 4.04)	1.84 - 0.29 - 26.52 - 12.66	56	*	149.81 (59.45; -2.64)	2.73 - 40.96 - 9.5	12	*	20.83	11.01	
				1.5	369.51	44.63	41.94 (88.64; 6.02)	0.68 - 0.81 - 69.46 - 12.62	55	*	46.75 (87.34; -4.75)	2.24 - 21.2 - 10.22	17	*	20.83	5.73	
				2	369.51	15.95	15.37 (95.84; 3.63)	0.21 - 1.34 - 21.47 - 12.69	57	*	18.89 (94.88; -18.43)	2.24 - 21.24 - 10.22	17	*	20.83	3.65	
			1	1.2	90.87	89.47	44.35 (51.19; 50.43)	5.04 - 0.54 - 35.35 - 9.02	9	*	59.01 (35.06; 34.04)	3.43 - 14.79 - 8.77	7		7.73	8.3	
				1.5	90.87	44.63	26.79 (70.51; 39.97)	4.65 - 0.62 - 26.22 - 9.23	10	*	32.85 (63.84; 26.39)	2.29 - 23.92 - 10.14	16	*	7.73	5.73	
				2	90.87	15.95	12.9 (85.8; 19.12)	3.05 - 1.18 - 28.5 - 10.04	15	*	13.21 (85.46; 17.17)	1.72 - 26.62 - 11.01	25	*	7.73	3.65	
				2.5	90.87	6.82	6.98 (92.31; -2.34)	0.75 - 1.22 - 27.22 - 12.25	46	*	7.05 (92.24; -3.37)	1.08 - 69.41 - 12.06	42	*	7.73	2.56	
			1.5	1.8	27.26	23.57	6.52 (76.08; 72.33)	8.4 - 1.2 - 32.14 - 3.6	1	*	14 (48.64; 40.6)	3.64 - 16.24 - 8.36	6		4.20	4.28	
				2	27.26	15.95	5.76 (78.87; 63.88)	7.29 - 1.6 - 26.62 - 4.73	1	*	10.59 (61.15; 33.6)	2.75 - 18.63 - 9.5	11	*	4.20	3.65	
				2.5	27.26	6.82	4.42 (83.78; 35.19)	5.81 - 2.57 - 21.13 - 6.02	2	*	5.95 (78.17; 12.75)	2.26 - 21.14 - 10.19	16	*	4.20	2.56	
				3	27.26	3.50	3.75 (86.24; -7.14)	5.64 - 3.33 - 33.84 - 5.99	2	*	4.2 (84.59; -20)	0.94 - 22.86 - 12.3	47	*	4.20	1.91	
			2.5	3	4.66	3.50	2.3 (50.64; 34.28)	3.31 - 3.27 - 16.07 - 8.82	8		3.04 (34.76; 13.14)	3.92 - 15.69 - 8.03	5		1.96	1.91	
				3.5	4.66	2.13	1.83 (60.72; 14.08)	2.80 - 3.64 - 12.52 - 10.11	10		1.83 (60.72; 14.08)	003.84 - 14.34 - 8.30	5		1.96	1.53	
				4	4.66	1.51	1.01 (78.32; 33.11)	3.39 - 4.32 - 23.78 - 8.44	7		1.62 (65.23; -7.28)	004.12 - 11.16 - 10.82	5		1.96	1.27	
				4.5	4.66	1.22	1.49 (68.02; -22.13)	3.13 - 4.62 - 11.68 - 10.45	8		1.56 (66.52; -27.86)	005.17 - 10.99 - 10.79	2		1.96	1.14	
			3.5	4	1.72	1.51	1.04 (39.53; 31.12)	3.86 - 4.05 - 11.19 - 10.95	5		1.61 (6.39; -6.62)	7.73 - 10.86 - 10.66	0		1.29	1.27	
				4.5	1.72	1.22	1.01 (41.27; 17.21)	3.66 - 5.00 - 10.87 - 13.17	6		1.53 (11.04; -25.4)	5.24 - 10.86 - 12.68	2		1.29	1.14	
			4	5	1.31	1.09	*	- - -	0		1.27 (3.05; -16.51)	5.12 - 10.83 - 13.71	2		1.14	1.05	
				6	1.31	1.01	*	- - -	0		1.27 (3.05; -25.74)	6.56 - 10.81 - 20.83	1		1.14	1.01	

Tabla 4.12. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 1 y p = 2

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits				VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1; %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)
1000	2	3	0.2	0.5	876.52	570.38	566.23	5.67 - 0.5 - 40.24 - 14.4	41	*	576.8	1.37 - 44.87 - 15.33	64	*	112.78	42
							(35.4; 0.72)			(34.19; -1.12)						
							185.29	3.76 - 0.63 - 38.91 - 15.12	58	*	187.36	1.37 - 44.87 - 15.33	64	*	112.78	13.86
							(78.86; 3.05)			(78.62; 1.97)						
							57.19	2.29 - 1.34 - 36.23 - 14.94	53	*	57.49	1.54 - 44.83 - 15.15	58	*	112.78	7.18
							(93.47; 6.13)			(93.44; 5.64)						
							20.57	1.12 - 1.83 - 35.11 - 15.18	59	*	20.64	1.68 - 37.19 - 15	54	*	112.78	4.42
							(97.65; 4.81)			(97.64; 4.48)						
							308.46	7.48 - 0.64 - 31.18 - 12.45	17	*	363.81	2.45 - 22.58 - 14.13	36	*	32.47	24.74
							(38.3; 18.45)			(27.23; 3.81)						
							163.07	6.41 - 0.67 - 43.36 - 13.29	25	*	182.16	1.98 - 44.57 - 14.66	47	*	32.47	13.86
							(67.38; 14.68)			(63.56; 4.69)						
							53.88	4.02 - 1.18 - 53.7 - 14.07	35	*	56.07	1.98 - 44.57 - 14.66	47	*	32.47	7.18
							(89.22; 11.57)			(88.78; 7.97)						
							20.17	1.89 - 1.92 - 55.15 - 14.75	48	*	20.61	1.35 - 23.69 - 15.36	64	*	32.47	4.42
							(95.96; 6.66)			(95.87; 4.62)						
							65.95	8.44 - 1.07 - 44 - 10.21	6	*	91.83	4.77 - 19.25 - 11.5	10		11.01	10.26
							(54.81; 45.1)			(37.08; 23.56)						
							39.17	6.32 - 1.14 - 66.57 - 12.24	15	*	49.19	3.38 - 39.66 - 13.01	22	*	11.01	7.18
							(73.16; 35.71)			(66.29; 19.26)						
							17.46	4.77 - 1.5 - 65.49 - 13.07	22	*	18.38	2.47 - 43.98 - 14.09	36	*	11.01	4.42
							(88.03; 19.2)			(87.4; 14.94)						
							8.73	1.65 - 2.65 - 56.61 - 14.55	44	*	8.76	2.15 - 28.88 - 14.47	43	*	11.01	3.13
							(94.01; 2.34)			(93.99; 2.01)						
16.45	7.51 - 1.27 - 22.39 - 10.83	8	*	21.27	4.55 - 20.96 - 11.68	11	*	5.73	5.28							
(63.14; 48.84)			(52.34; 33.86)													
12.95	6.07 - 2.16 - 22.01 - 11.21	9	*	15.41	3.83 - 22.06 - 12.5	17	*	5.73	4.42							
(70.98; 40.07)			(65.47; 28.69)													
7.55	4.26 - 2.75 - 24.91 - 12.52	17	*	7.71	3.28 - 38.27 - 13.13	23	*	5.73	3.13							
(83.08; 15.54)			(82.72; 13.75)													
4.8	1.11 - 3.56 - 31.27 - 14.61	45	*	4.84	2.74 - 44.35 - 13.77	31	*	5.73	2.27							
(89.24; -9.83)			(89.15; -10.75)													
4.14	7.68 - 5.11 - 14.06 - 12.55	2		4.15	07.00 - 44.38 - 8.74	3		2.56	2.27							
(39.29; 5.26)			(39.14; 5.03)													
2.83	3.89 - 10.42 - 14.85 - 13.43	13		2.98	004.74 - 22.76 - 11.43	10		2.56	1.77							
(58.5; -11.85)			(56.3; -17.78)													
1.56	2.67 - 5.69 - 13.81 - 16.33	23		2.67	005.17 - 20.96 - 10.95	8		2.56	1.45							
(77.12; 8.77)			(60.85; -56.14)													
2.25	2.57 - 6.38 - 13.81 - 16.33	23		2.43	005.16 - 15.24 - 12.21	8		2.56	1.23							
(67; -70.45)			(64.36; -84.09)													
1.87	10.28 - 4.77 - 13.91 - 11.62	1		1.88	9.86 - 13.90 - 11.94	1		1.53	1.45							
(12.2; -9.35)			(11.73; -9.94)													
1.71	4.30 - 4.83 - 13.90 - 15.75	12		1.72	005.27 - 13.90 - 15.43	8		1.53	1.23							
(19.71; -29.54)			(19.24; -30.3)													
1.41	6.68 - 12.03 - 13.80 - 16.81	3		1.41	8.14 - 13.82 - 15.96	2		1.27	1.1							
(6.62; -24.77)			(6.62; -24.77)													
1.37	6.79 - 11.03 - 13.76 - 20.49	3		1.38	7.77 - 13.78 - 20.51	2		1.27	1.01							
(9.27; -35.64)			(8.6; -36.63)													

Tabla 4.13. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 2 y p = 3

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits				VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)
1000	2	4	0.2	0.5	876.52	628.41	609.43	6.33 - 0.88 - 39.48 - 16.18	36	*	620.61	1.67 - 45.23 - 17.6	68	*	112.78	51.75
							(30.47; 3.02)			(29.19; 1.24)						
							218.82	4.28 - 1.37 - 43.52 - 16.61	43	*	221.29	1.67 - 45.23 - 17.6	68	*	112.78	16.69
							(75.03; 5.17)			(74.75; 4.1)						
							71.11	2.12 - 1.88 - 36.42 - 17.28	59	*	71.21	1.96 - 35.29 - 17.3	59	*	112.78	8.49
							(91.88; 7.23)			(91.87; 7.1)						
							25.54	1.3 - 2.92 - 45.03 - 17.13	55	*	25.64	2.29 - 43.65 - 16.92	50	*	112.78	5.17
							(97.08; 6.48)			(97.07; 6.11)						
							336.14	8.56 - 0.96 - 39.97 - 13.89	13	*	397.88	3.88 - 21.94 - 14.86	20	*	32.47	30
							(32.77; 22.66)			(20.42; 8.46)						
							190.24	7.11 - 0.94 - 43.42 - 15.37	25	*	212.52	2.56 - 30.66 - 16.59	43	*	32.47	16.69
							(61.95; 17.55)			(57.49; 7.9)						
							65.92	4.4 - 1.67 - 29.24 - 16.12	35	*	68.49	2.5 - 45.19 - 16.66	44	*	32.47	8.49
							(86.81; 14)			(86.3; 10.65)						
							24.69	2.42 - 2.67 - 41.66 - 16.61	43	*	24.69	2.56 - 58.12 - 16.59	43	*	32.47	5.17
							(95.06; 9.59)			(95.06; 9.59)						
							73.93	8.56 - 1.45 - 22.17 - 12.54	7	*	100.79	5.56 - 18.21 - 12.82	7	*	11.01	12.25
							(49.34; 50.14)			(30.94; 32.03)						
							45.78	6.95 - 1.98 - 28.3 - 13.34	10	*	57.49	3.44 - 68.41 - 15.43	26	*	11.01	8.49
							(68.63; 40.28)			(60.6; 25)						
							20.61	4.69 - 2.42 - 43.36 - 15.04	22	*	21.69	3.57 - 42.59 - 15.25	24	*	11.01	5.17
							(85.87; 24.53)			(85.13; 20.57)						
							10.3	2.54 - 3.54 - 50.64 - 16.1	35	*	10.34	3.21 - 31.54 - 15.74	30	*	11.01	3.57
							(92.94; 7.12)			(92.91; 6.76)						
18.64	8.32 - 2.21 - 23.83 - 11.48	5	*	23.39	5.43 - 21.27 - 12.79	8	*	5.73	6.18							
(58.23; 54.21)			(47.59; 42.54)													
44.63	7.76 - 2.5 - 52.87 - 11.77	5	*	86.99	4.92 - 36.27 - 21.2	38	*	5.73	5.17							
(66.43; 45.14)			(83.09; 24.21)													
8.59	4.83 - 3.28 - 65.79 - 14.25	15	*	8.73	4.13 - 42.71 - 14.49	17	*	5.73	3.57							
(80.75; 22.54)			(80.43; 21.28)													
5.47	1.73 - 5.12 - 61.48 - 16.23	37	*	5.49	3.58 - 36.15 - 15.24	24	*	5.73	2.65							
(87.74; -3.99)			(87.69; -4.37)													
3.86	7.76 - 5.41 - 15.29 - 11.55	3	*	4.02	006.51 - 21.55 - 11.35	4	*	2.56	2.65							
(43.4; 26.61)			(41.05; 23.57)													
1.58	4.03 - 5.58 - 13.77 - 18.78	15	*	3.08	005.50 - 16.39 - 13.33	8	*	2.56	2.01							
(76.83; 45.89)			(54.83; -5.47)													
2.62	5.38 - 11.09 - 14.07 - 16.21	6	*	2.68	005.27 - 16.43 - 13.61	9	*	2.56	1.61							
(61.58; -37.89)			(60.7; -41.05)													
1.55	2.68 - 6.14 - 13.78 - 18.59	24	*	2.52	005.42 - 15.90 - 13.66	8	*	2.56	1.35							
(77.27; -9.92)			(63.04; -78.72)													
1.88	7.15 - 4.21 - 14.03 - 15.76	4	*	1.89	10.32 - 14.06 - 11.18	0	*	1.53	1.61							
(11.73; 1.05)			(11.26; 0.52)													
1.23	7.62 - 7.69 - 13.83 - 17.82	2	*	1.74	006.36 - 14.02 - 16.02	5	*	1.53	1.35							
(42.25; 12.76)			(18.3; -23.4)													
1.23	6.49 - 11.02 - 13.76 - 21.15	4	*	1.41	005.48 - 13.82 - 18.39	8	*	1.27	1.18							
(18.54; -4.23)			(6.62; -19.49)													
1.36	5.17 - 13.03 - 13.72 - 20.73	7	*	1.39	008.38 - 13.80 - 19.83	2	*	1.27	1.02							
(9.93; -33.33)			(7.94; -36.27)													

Tabla 4.14. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 2 y p = 4

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits				VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p					
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)					
1000	5	6	0.2	0.5	935.30	695.63	261.25	8.64 - 4.05 - 57.86 - 13.68	27		273.87	6.51 - 57.88 - 13.92	29		240.73	69.89					
							(72.06; 62.44)			(70.71; 60.62)											
					1	935.30	295.08	82.38	9.26 - 2.58 - 28.93 - 15.25	41		83.03			(91.12; 71.86)	6.94 - 28.92 - 13.39	25		240.73	21.85	
								(91.19; 72.08)			(91.12; 71.86)										
					1.5	935.30	106.35	33.78	9.24 - 2.77 - 28.92 - 14.91	38		63.89			(93.16; 39.92)	2.07 - 57.84 - 20.49	91		240.73	10.89	
								(96.38; 68.23)			(93.16; 39.92)										
					2	935.30	38.83	29.99	5.91 - 1.2 - 57.87 - 20.88	93		35.63			(96.19; 8.24)	4.33 - 68.97 - 21.12	58	*	240.73	6.64	
								(96.79; 22.76)			(96.19; 8.24)										
					0.5	0.7	667.43	512.45	153.55	3.81 - 10.26 - 28.94 - 15.09	39		271.6			(59.3; 46.99)	5.12 - 14.45 - 66.2	46		60.93	39.73
									(76.99; 70.03)			(59.3; 46.99)									
					1	1	667.43	295.08	66.15	9.39 - 4.14 - 57.84 - 12.86	21		69.95			(89.51; 76.29)	6.82 - 57.89 - 13.53	26		60.93	21.85
									(90.08; 77.58)			(89.51; 76.29)									
					1.5	1.5	667.43	106.35	29.19	8.59 - 3.01 - 28.94 - 15.09	39		29.41			(95.59; 72.34)	4.81 - 57.87 - 16.16	50		60.93	10.89
									(95.62; 72.55)			(95.59; 72.34)									
					2	2	667.43	38.83	34.55	6.7 - 3.86 - 67.06 - 20.48	44	*	35.19			(94.72; 9.37)	4.54 - 67.38 - 20.98	54	*	60.93	6.64
									(94.82; 11.02)			(94.72; 9.37)									
					1	1.2	264.95	197.48	44.62	12 - 1.53 - 57.9 - 15.52	44		93.9			(64.55; 52.45)	5.12 - 14.45 - 66.2	46		19.30	16.04
									(83.15; 77.4)			(64.55; 52.45)									
					1.5	1.5	264.95	106.35	41.67	14.41 - 2.57 - 57.89 - 9.65	8		91.35			(65.52; 14.1)	6 - 36.01 - 19.87	35	*	19.30	10.89
									(84.27; 60.81)			(65.52; 14.1)									
					2	2	264.95	38.83	30.27	9.38 - 3.55 - 44.82 - 19.21	26	*	33.52			(87.34; 13.67)	5.02 - 34.6 - 20.64	47	*	19.30	6.64
									(88.57; 22.04)			(87.34; 13.67)									
					2.5	2.5	264.95	15.56	11.81	6.58 - 1.5 - 57.89 - 19.82	86		14.1			(94.67; 9.38)	5.23 - 35.99 - 20.48	44	*	19.30	4.46
									(95.54; 24.1)			(94.67; 9.38)									
1.5	1.8	91.78	57.64	19.33	14.45 - 2.9 - 67.6 - 8.69	1	*	41.8			(54.45; 27.48)	7.21 - 35.58 - 18.72	22	*	9.66	7.95					
				(78.93; 66.46)			(54.45; 27.48)														
2	2	91.78	38.83	18.68	14.45 - 2.13 - 33.86 - 10.64	1	*	28.97			(68.43; 25.39)	7.21 - 35.58 - 18.72	22	*	9.66	6.64					
				(79.64; 51.89)			(68.43; 25.39)														
2.5	2.5	91.78	15.56	12.14	9.03 - 4.7 - 62.61 - 18.57	20	*	12.97			(85.86; 16.64)	6.3 - 35.91 - 19.62	31	*	9.66	4.46					
				(86.77; 21.97)			(85.86; 16.64)														
3	3	91.78	7.10	4.55	7.22 - 6.02 - 57.84 - 13.53	26		6.97			(92.4; 1.83)	5.81 - 34.16 - 20.03	37	*	9.66	3.3					
				(95.04; 35.91)			(92.4; 1.83)														
2.5	3	13.30	7.10	5.24	10.73 - 6.53 - 41.60 - 16.27	8	*	5.62			(57.74; 20.84)	008.30 - 28.96 - 17.88	15	*	4.00	3.3					
				(60.6; 26.19)			(57.74; 20.84)														
3.5	3.5	13.30	3.75	1.33	3.09 - 6.02 - 20.71 - 22.29	54		3.85			(71.05; -2.66)	007.21 - 28.76 - 18.78	22	*	4.00	2.47					
				(90; 64.53)			(71.05; -2.66)														
4	4	13.30	2.29	3.01	2.57 - 7.12 - 24.41 - 21.12	53		3.03			(77.21; -32.31)	006.18 - 25.23 - 19.95	33		4.00	1.98					
				(77.36; -31.44)			(77.21; -32.31)														
4.5	4.5	13.30	1.61	2.51	3.46 - 10.97 - 46.75 - 20.29	41	*	2.6			(80.45; -61.49)	005.90 - 29.44 - 19.99	36	*	4.00	1.6					
				(81.12; -55.9)			(80.45; -61.49)														
3.5	4	3.33	2.29	2.5	10.43 - 11.09 - 20.71 - 20.48	6		2.56			(23.12; -11.79)	06.10 - 20.91 - 21.79	33		2.27	1.98					
				(24.92; -9.17)			(23.12; -11.79)														
4.5	4.5	3.33	1.61	2.14	4.72 - 7.41 - 20.51 - 22.45	39		2.14			(35.73; -32.91)	006.24 - 20.68 - 22.11	32		2.27	1.6					
				(35.73; -32.91)			(35.73; -32.91)														
4	5	2.09	1.28	1.67	4.09 - 12.24 - 20.59 - 22.31	36		1.67			(20.09; -30.46)	005.67 - 20.51 - 22.45	39		1.80	1.34					
				(20.09; -30.46)			(20.09; -30.46)														
6	6	2.09	1.04	1.59	10.40 - 11.07 - 20.49 - 22.72	7		1.60			(23.44; -53.84)	10.77 - 20.49 - 22.76	6		1.80	1.06					
				(23.92; -52.88)			(23.44; -53.84)														

Tabla 4.15. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 5 y p = 6

DESIGN PARAMETERS					T2 always p1	T2 always p	VDT2 - two warning limits				VDT2 - one warning limit				MCUSUM always p1	MCUSUM always p
ARL(0)	p1	p	dp1	dp	ARL(dp1)	ARL(dp)	ARL(d) (%T2p1, %T2p)	Optimum Parameters w1 - w2 - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(d)	Optimum Parameters w - CLp1 - CLp	% p	CLp1 = inf?	ARL(dp1)	ARL(dp)
1000	5	7	0.2	0.5	935.30	712.51	280.46	10.52 - 3.76 - 28.93 - 14.74	24		285.03	7.21 - 28.93 - 14.85	25		240.73	78.48
							(70.01; 60.63)			(69.52; 59.99)						
							133.59			134.75						
							80.48	3.35 - 3.76 - 28.95 - 20.48	77		(85.59; 58.04)	3.61 - 57.86 - 20.53	77		240.73	24.37
							(91.39; 33.11)			(87.96; 6.47)	5.2 - 36.22 - 22.68	52	*	240.73	12.11	
							40.71	7.62 - 1.46 - 28.92 - 22.4	91		40.75					
							(95.64; 8.8)	6.04 - 5.14 - 66.41 - 22.37	46	*	(95.64; 8.71)	5.06 - 34.77 - 22.79	54	*	240.73	7.32
							259.2			284.97						
							(61.16; 51.86)	0.93 - 20.96 - 14.45 - 51.35	49		(57.3; 47.08)	5.36 - 14.45 - 51.35	49		60.93	44.86
							138.03			304.68						
							(79.31; 57.02)	2.44 - 3.82 - 28.94 - 20.8	80		(54.35; 5.13)	5.55 - 36.1 - 22.4	46	*	60.93	24.37
							103.23			110.16						
							(84.53; 14.2)	9.61 - 3.49 - 35.35 - 21.64	34	*	(83.49; 8.44)	5.24 - 35.6 - 22.65	51	*	60.93	12.11
							39.39			40.44						
							(94.09; 11.76)	6.81 - 4.62 - 65.8 - 22.29	44	*	(93.94; 9.4)	4.72 - 33.61 - 23.04	59	*	60.93	7.32
							74.74			102.31						
							(71.79; 65.86)	0.89 - 27.19 - 14.45 - 51.13	49		(61.38; 53.27)	5.37 - 14.45 - 40.2	49		19.30	17.81
							35.55			45.62						
							(86.58; 70.45)	2.48 - 14.15 - 57.86 - 17.27	45		(82.78; 62.08)	3.64 - 57.84 - 20.48	77		19.30	12.11
							33.73			37.15						
							(87.26; 24.43)	9.51 - 4.42 - 69.22 - 20.81	25	*	(85.97; 16.77)	6.29 - 35.53 - 21.76	36	*	19.30	7.32
							12.28			15.8						
							(95.36; 31.31)	7.64 - 2.1 - 57.88 - 20.72	79		(94.03; 11.63)	6.19 - 35.55 - 21.85	37	*	19.30	4.95
							12.66			13.11						
(86.2; 80.81)	8.85 - 8.45 - 28.94 - 12.86	14		(85.71; 80.13)	6.95 - 28.92 - 15.37	28		9.66	8.77							
26.97			31.63													
(70.61; 39.58)	11.14 - 3.55 - 63.5 - 20.48	22	*	(65.53; 29.14)	7.21 - 32.25 - 20.8	25	*	9.66	7.32							
13.44			14.16													
(85.35; 24.83)	8.6 - 5.79 - 59.75 - 20.54	22	*	(84.57; 20.8)	7.4 - 62.65 - 20.71	24	*	9.66	4.95							
7.64			7.66													
(91.67; 5.32)	6.2 - 7.09 - 67.11 - 21.54	33	*	(91.65; 5.08)	6.29 - 35.53 - 21.76	36	*	9.66	3.58							
5.5			5.82													
(58.64; 31.84)	11.83 - 7.32 - 31.39 - 16.95	6	*	(56.24; 27.88)	009.72 - 26.78 - 18.46	9		4.00	3.58							
4.15			4.17													
(68.79; 0.71)	8.03 - 6.84 - 41.74 - 20.48	22	*	(68.64; 0.23)	7.00 - 28.45 - 21.16	28	*	4.00	2.76							
3.19			3.2													
(76.01; -27.6)	2.74 - 8.31 - 23.21 - 23.09	52		(75.93; -28)	007.93 - 25.97 - 20.38	19		4.00	2.14							
2.59			2.67													
(80.52; -51.46)	3.74 - 11.57 - 52.86 - 22.03	40	*	(79.92; -56.14)	4.98 - 25.59 - 22.98	55		4.00	1.76							
2.38			2.48													
(28.52; 4.8)	12.14 - 10.04 - 21.36 - 18.78	4		(25.52; 0.8)	12.96 - 20.87 - 19.44	2		2.27	2.14							
2.21			2.22													
(33.63; -29.23)	3.53 - 4.94 - 20.55 - 24.33	65		(33.33; -29.82)	06.05 - 20.54 - 24.30	39		2.27	1.76							
1.69			1.7													
(19.13; -27.06)	10.70 - 12.55 - 20.87 - 21.29	6		(18.66; -27.81)	005.88 - 20.55 - 24.29	41		1.80	1.45							
1.58			1.69													
(24.4; -50.47)	6.17 - 20.87 - 19.97 - 30.83	22		(19.13; -60.95)	13.13 - 20.46 - 30.77	2		1.80	1.1							

Tabla 4.16. ARLs optimizados del gráfico de control VDT<sup>2</sup> para ARL<sub>0</sub>=1000, p<sub>1</sub> = 5 y p = 7

La estructura de las tablas es la siguiente: La columna "Design parameters" presenta los datos para la optimización. Por ejemplo el primer caso de la Tabla 4.8, el  $ARL_0$  requerido es 400,  $p_1 = 2$ , y  $p = 3$ ; el cambio en la media para el cual el gráfico es optimizado, corresponde a  $d_1 = 0.2$  y  $d = 0.5$ . En cuanto a las siguientes columnas de la tabla: un gráfico de control estándar  $T^2$  (de dimensión fija) usando sólo las  $p_1 = 1$  variables tendría un ARL fuera de control de  $ARL_1 = 356.48$  para este cambio, y el gráfico de control estándar  $T^2$  en todas las  $p = 2$  variables muestra un ARL fuera de control igual a 244.94.

Las columnas siguientes de la tabla muestran los parámetros del diseño y las medidas de rendimiento del gráfico de control  $VDT^2$  con uno y dos límites de alerta. Por ejemplo, con dos límites de alerta, los parámetros óptimos para el mismo caso son  $w_{p_1} = 4.58$ ,  $w_p = 0.59$ ,  $CL_{p_1} = 37.02$  and  $CL_p = 12.79$ . Con estos parámetros, el ARL fuera de control del gráfico  $VDT^2$  es 243.93, el cual es 31.57% más pequeño que el ARL del gráfico  $T^2$  con solo una variable en  $S_1$ , y 0.41% más pequeño que el ARL del gráfico  $T^2$  con todas las  $p = 2$  variables. La columna "% p" muestra el porcentaje de veces que todas las variables fueron medidas cuando el proceso está bajo control: 49% de las veces. " $CL_{p_1} = \text{inf?}$ " indica si es posible eliminar el límite de control para las  $p_1$  variables. Un asterisco en esta columna significa que la diferencia entre los ARLs del gráfico de control con  $CL_{p_1}$  y sin este límite de control es menor que 3%, esto puede considerarse despreciable. El último grupo de columnas es análoga a las precedentes, excepto por la versión del gráfico de control de un límite de alerta. Los parámetros optimizados son:  $w = 1.04$ ,  $CL_{p_1} = 44.19$  and  $CL_p = 13.68$ . Otra vez,  $CL_{p_1}$  puede ser removido sin afectar el rendimiento del gráfico (un asterisco es encontrado en la última columna). El ARL fuera de control para este gráfico es 245.53, muy cercano al ARL del gráfico con dos límites de control y dos de alerta (243.93). Esta similitud en el rendimiento de las dos versiones del gráfico  $VDT^2$  (con uno y dos límites de alerta) ocurre frecuentemente en el grupo de casos analizados y puede ser visto en las tablas del  $VDT^2$ .



Dados estos resultados se podrían aplicar dos simplificaciones al gráfico de control  $VDT^2$  con dos límites de advertencia y dos límites de control. En muchos casos  $CL_{p_1}$  puede ser removido de ambos gráficos. Además, el rendimiento de los gráficos optimizados con uno o dos límites de advertencia son muy similares en la gran mayoría de los casos. Como resultado, en algunas ocasiones un muy buen rendimiento (casi óptimo) puede obtenerse a través de un gráfico de control simple con un solo límite de advertencia y un límite de control.

En la mayoría de los casos, el gráfico  $VDT^2$  se comporta mejor que el gráfico estándar  $T^2$  con todas las  $p$  variables. Las mayores mejoras (reducciones en el ARL fuera de control) se obtienen para los cambios de tamaño moderado:  $d_1$  alrededor de 1. Por ejemplo, la mejora más grande en las tablas del caso  $ARL_0=400$  es para el caso  $p_1 = 5, p = 6, d_1 = 1, d = 1.2$ , donde un gráfico  $T^2$  sobre la base de las 6 variables tiene un ARL fuera de control = 93.57, frente a un valor del 29.8 para el gráfico optimizado  $VDT^2$ , una mejora del 68.15%, con el beneficio adicional de monitorear todas las variables en sólo el 13% de las ocasiones cuando el proceso está bajo control. Cabe resaltar que la proporción de veces que todas las variables se miden tiende a ser menor cuando la diferencia entre  $d_1$  y  $d$  es menor. Las tablas muestran que para valores fijos de  $d_1, p_1, p$  y  $ARL_0$ , esta proporción con muy pocas excepciones, aumenta con  $d$ . Esto tiene sentido porque, cuanto menor sea la diferencia, menor será el beneficio de medir adicionalmente las variables costosas.

Los ARLs del gráfico de control  $VDT^2$  en pocos casos son más grandes que el ARL del gráfico estándar  $T^2$ . Por ejemplo, el peor de los casos en la comparación del gráfico  $VDT^2$  con dos límites de alerta en la Tabla 4.7 es el caso  $d_1= 1.5, d=3$ : el ARL del gráfico  $VDT^2$  es 3.52, mientras que el ARL del gráfico estándar  $T^2$  utilizando sólo la primera variable ( $p_1 = 1$ ) es 2.63. Sin embargo, en términos generales el gráfico  $VDT^2$  muestra un mejor rendimiento que el gráfico estándar  $T^2$ .

Este mejor desempeño del gráfico  $VDT^2$  puede parecer paradójico a primera vista. Sin embargo, se explica por el hecho de que el gráfico  $VDT^2$  tiene una leve forma de memoria en el siguiente sentido que presentará una señal de fuera de control dadas dos consecutivas observaciones de tamaño moderado (la primera observación con  $T_{p_1}^2 > w_{p_1}$  y la segunda observación con  $T_p^2 > CL_p$ ). En contraste, el gráfico estándar  $T^2$  requiere de un gran número de observaciones. En este sentido, la razón de la mejora en el rendimiento del gráfico  $T^2$  introducido por el procedimiento de dimensión variable es análoga a la razón de la mejora en el rendimiento presentada por las "run rules" para los gráficos Shewhart.

Otra manera de ver esto es la siguiente: con el gráfico de control  $VDT^2$  se miden todas las  $p$  variables sólo una parte de las veces. Esto permite que este gráfico tenga un menor valor de límite de control para  $p$  variables comparado con el límite de control del gráfico estándar  $T^2$ , logrando a su vez un  $ARL_0$  igual o similar al último. Estos pequeños límites de control resultantes permiten el mejor rendimiento del gráfico  $VDT^2$  en un estado fuera de control. Además de este límite de control más pequeño, cuando hay un cambio en el proceso la probabilidad de medir todas las variables con este gráfico aumenta significativamente y la combinación de estos dos resultados de datos da como resultado un menor  $ARL$  fuera de control que el del gráfico estándar  $T^2$ .

También se ha llevado a cabo una comparación con el gráfico de control MCUSUM (Crosier, 1986). Las dos últimas columnas de las Tablas 4.2 a 4.16 muestran el  $ARL$  óptimo para el MCUSUM cuando se utilizan las  $p_1$  variables y cuando se utilizan todas las  $p$  variables. Aunque esta comparación es algo injusta ya que el gráfico  $VDT^2$  es un gráfico del tipo Shewhart. Sin embargo, el  $ARL$  del gráfico MCUSUM puede ser utilizado como un valor de referencia correspondiente a un mejor rendimiento cuando se miden siempre ya sean  $p_1$  o  $p$  variables, además motiva en el futuro el desarrollo de un gráfico de control de dimensión variable en función de las sumas acumuladas y/o de promedios exponencialmente ponderados del estadístico  $T^2$ . Los parámetros del gráfico de control MCUSUM para las variables  $p_1$  en  $S_1$ , fueron optimizados para un cambio de magnitud  $d_1$

y los parámetros del gráfico de control MCUSUM para todas las  $p$  variables fueron optimizados para un cambio de magnitud  $d$ . El procedimiento para la optimización de la MCUSUM se basa en Lee y Khoo (2006). Cuando  $p_1 = 1$  (Tabla 4.2 por ejemplo) los ARL son los del gráfico de control univariado CUSUM optimizado.

De las comparaciones del rendimiento se obtienen las siguientes conclusiones. El MCUSUM en el que todas las  $p$  variables son medidas muestra siempre el mejor rendimiento. Este resultado era previsible, ya que la MCUSUM acumula la información de muestras anteriores. Además, tener en cuenta todas las variables constituye una ventaja adicional, aunque esto no es siempre suficiente para asegurar un mejor rendimiento; por ejemplo, se ha visto que el gráfico  $T^2$  con todas las variables no siempre tiene un ARL menor que el gráfico  $VDT^2$ . Por otra parte la motivación para el gráfico  $VDT^2$  es evitar siempre la medición de todas las variables, debido a los costos limitaciones o dificultades en las mediciones. Comparando el gráfico  $VDT^2$  con el MCUSUM para  $p_1$  variables únicamente, el gráfico  $VDT^2$  supera al MCUSUM en más de la mitad de los casos. En los casos en que ambos cambios ( $d_1, d$ ) son grandes, 3.5 o más, el gráfico  $VDT^2$  siempre supera al MCUSUM para  $p_1$  variables únicamente. Este resultado era esperado, como consecuencia de la inercia del estadístico MCUSUM. En el resto de casos parece que no hay una regla general para predecir qué gráfico tiene un mejor rendimiento.

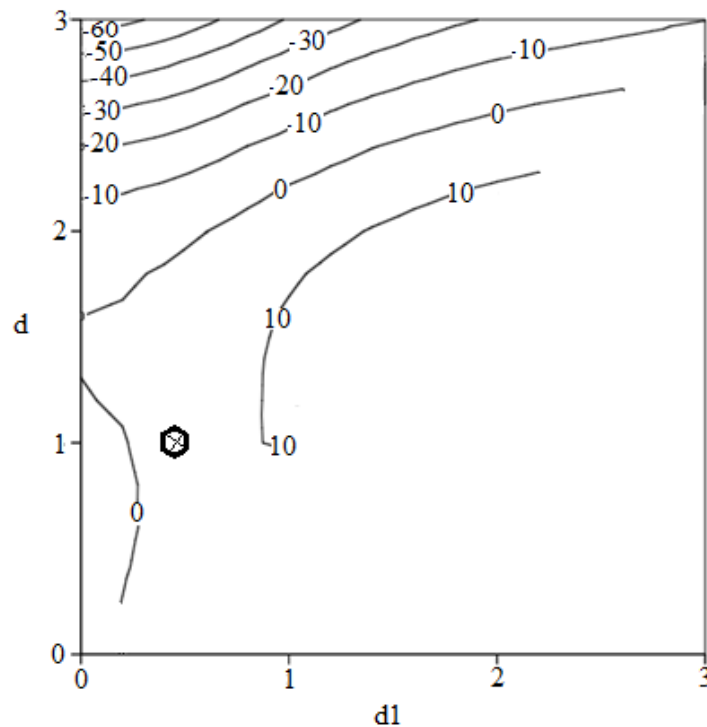
#### **4.9 Análisis de sensibilidad de la optimización**

Cuando un gráfico está optimizado para una distancia de desplazamiento dado, en este caso para las distancias de Mahalanobis ( $d_1^*, d^*$ ) y muestra un buen desempeño para esa distancia de desplazamiento, la pregunta que surge es si el rendimiento es bueno también para otras distancias diferentes a las seleccionadas para la optimización, es decir ( $d_1, d$ )  $\neq$  ( $d_1^*, d^*$ ). Esta pregunta es relevante porque no es deseable un gráfico con un buen

rendimiento en  $(d_1^*, d^*)$  pero con muy mal rendimiento para otras posibles distancias. Para investigar la solidez de los resultados se ha calculado el porcentaje de mejora del gráfico  $VDT^2$  relativa al gráfico estándar  $T^2$  para todas las  $p$  variables. Para algún cambio dado este porcentaje se calcula de la siguiente manera:

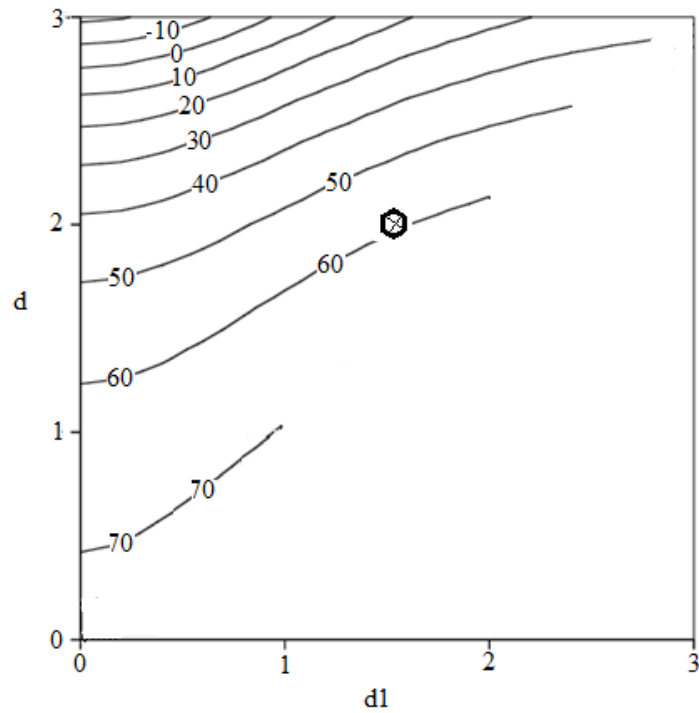
$$\text{diferencia relativa (\%)} = 100 \cdot \frac{ARL(T^2) - ARL(VDT^2)}{ARL(T^2)}$$

La Figura 4.6 muestra el porcentaje de mejora sobre el plano de los posibles cambios  $(d_1, d)$ , cuando el gráfico  $VDT^2$  está optimizado para el caso:  $p_1 = 2, p = 3, d_1^* = 0.5, d^* = 1$ . El punto  $(d_1^*, d^*)$  está marcado con una cruz.



**Figura 4.6.** Porcentaje de mejora del ARL de un gráfico de control optimizado  $VDT^2$ , relativo al gráfico de control  $T^2$  (gráfico de control  $VDT^2$  optimizado para  $p_1 = 2, p = 3$  y  $d_1 = 0.5, d = 1$ )

La figura 4.7 muestra la misma variación en el porcentaje para un caso diferente:  $p_1 = 5$ ,  $p = 7$ ,  $d_1^* = 1.5$ ,  $d^* = 2$ . Debido a que  $d \geq d_1$  los contornos están restringidos a la mitad superior izquierda de la diagonal del plano. Por supuesto, el ARL bajo control es el mismo para ambos gráficos y es igual a 400.



**Figura 4.7. Porcentaje de mejora del ARL de un gráfico de control optimizado  $VDT^2$ , relativo al gráfico de control  $T^2$  (gráfico de control  $VDT^2$  optimizado para  $p_1 = 5$ ,  $p = 7$  y  $d_1 = 1.5$ ,  $d = 2$ )**

Las conclusiones obtenidas son las mismas para otros casos estudiados y los gráficos de contorno son siempre muy similares. El comportamiento observado en las Figuras 4.6 y 4.7 es como se esperaba. Por ejemplo, la Figura 4.6 muestra que el porcentaje de mejora del gráfico  $VDT^2$  relativo al gráfico estándar  $T^2$  es 4% (88.02 vs 91.24). Este porcentaje es muy similar alrededor del punto seleccionado para la optimización. Si el cambio real  $d_1$  tiene un valor mayor que  $d_1^*$  (que corresponde a moverse a la derecha en el plano), la mejora es grande, ya que mientras que el ARL del gráfico  $T^2$  sólo depende de  $d$  el ARL del gráfico  $VDT^2$  depende de  $d_1$  y  $d$ . Así, mientras que el ARL del gráfico estándar  $T^2$  permanece constante para todos los puntos en una línea horizontal, el ARL del gráfico  $VDT^2$  disminuye a medida que nos movemos hacia la derecha a lo largo de esa línea. Por la misma razón, moviéndose a la izquierda a lo largo de una línea horizontal imaginaria, el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  tiende a disminuir. Sin embargo, la variación de la mejora es pequeña mostrando una robustez del rendimiento del gráfico  $VDT^2$  (en términos de la ganancia relativa al gráfico  $T^2$ ).

Ambas representaciones gráficas (figuras 4.6 y 4.7) dependen de  $d$ . Sin embargo, el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  depende también de  $d_1$ , así que en este caso se mantiene sin cambios. Por lo tanto, para valores grandes de  $d$ , el gráfico  $T^2$  es favorecido (ya que todas las muestras se toman con todas las variables). De tal manera que el porcentaje de mejora sobre el gráfico  $T^2$  se reduce, siendo negativo en algunos casos para valores grandes de  $d$ . Sin embargo, para valores moderados de  $d$ , el hecho de que el límite de control del gráfico  $VDT^2$  es más pequeño puede compensar este efecto y favorecerla sobre el gráfico  $T^2$ . Una vez más la reducción en el porcentaje de mejora es bastante pequeña, lo que muestra la robustez del rendimiento del gráfico de control  $VDT^2$ .

Las observaciones y conclusiones de la figura 4.7 son en naturaleza las mismas que la anterior. En este caso el ARL fuera de control para  $(d_1^*, d^*)$  es 24.57 para el gráfico estándar  $T^2$  y 9.88 para el gráfico  $VDT^2$ , lo que representa una mejora de aproximadamente 60%.

Como se mencionó anteriormente, la variación mostrada por el gráfico de contorno es similar en todos los casos que se han considerado: cuando se mueve hacia la derecha a lo largo de una línea horizontal aumenta el porcentaje de mejora de los del gráfico VDT<sup>2</sup>, cuando nos movemos a lo largo de una línea vertical lo disminuye. En su conjunto, las figuras muestran poco deterioro del porcentaje de mejora del gráfico VDT<sup>2</sup> para diferentes cambios al punto  $(d_1^*, d^*)$  empleados para la optimización, a menos que estos cambios sean demasiado lejos de  $(d_1^*, d^*)$ .

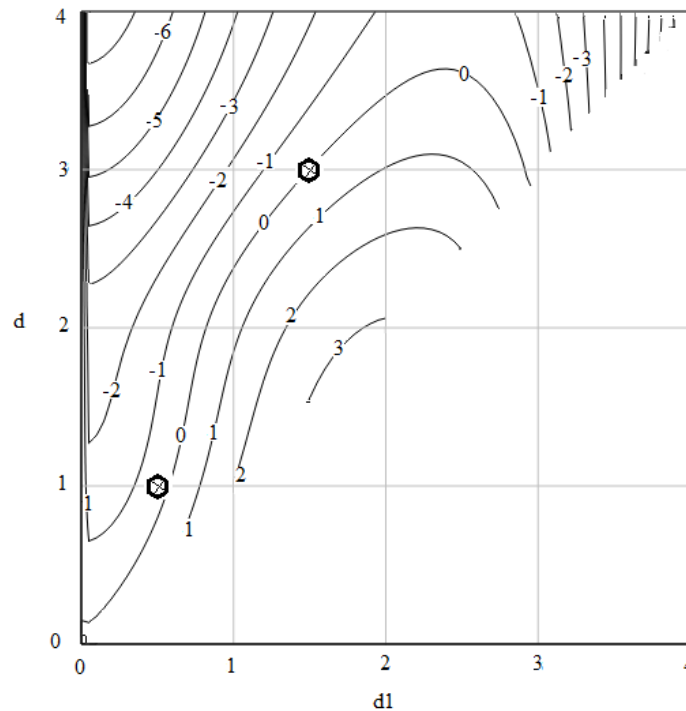
Las figuras anteriores también ilustran el rendimiento del gráfico de control VDT<sup>2</sup> cuando  $d_1 = 0$  y  $d > 0$ . Cuando no hay cambio en el conjunto de  $p_1$  variables. En tales casos, el gráfico VDT<sup>2</sup> es todavía capaz de detectar el estado fuera de control, ya que el rendimiento depende tanto de  $d_1$  como de  $d$ . Podemos ver en las figuras 4.6 y 4.7 que hay una reducción en el porcentaje de mejoría cuando hay un movimiento hacia la izquierda a lo largo de una línea horizontal hasta que  $d_1 = 0$ . Por ejemplo, la Figura 4.7 muestra que el porcentaje de mejora se reduce de 60% en el punto seleccionado (1.5, 2.0) a un valor que es aún mayor que 40% en (0.0, 2.0). En el caso de la figura 4.6, la reducción en el porcentaje de mejora es de 4% a -2%.

Una pregunta relacionada con lo anterior, u otra forma de plantear la pregunta acerca de la solidez de la optimización es: "¿Qué tan sensible es el rendimiento de los gráficos de control de los VDT<sup>2</sup> a los valores  $(d_1^*, d^*)$  elegidos para la optimización de la gráfico?". Con el fin de responder a esta pregunta, ahora se compara el rendimiento de gráficos optimizados VDT<sup>2</sup> para dos parejas distintas  $(d_1^*, d^*)$ , denominado como puntos "A" y "B". Tres casos son estudiados: Caso 1:  $p_1 = 2, p = 3, A = (0.5, 1), B = (1.5, 3)$ ; Caso 2:  $p_1 = 2, p = 4, A = (0.25, 1), B = (1.5, 3)$ ; Caso 3:  $p_1 = 5, p = 6, A = (1, 2), B = (2.5, 3)$ .

Las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 (una para cada caso) muestran los puntos A y B (marcado con puntos en forma de cruz) y los gráficos de contorno de las diferencias porcentuales en los ARLs fuera del control de los gráficos optimizados para cada punto. La diferencia porcentual se calcula para cada punto del plano como  $100 \frac{ARL(A) - ARL(B)}{\max [ARL(A), ARL(B)]}$ , donde  $ARL(A)$

y  $ARL(B)$  denotan respectivamente, el ARL fuera de control (en el punto de interés sobre el plano  $d_1 \times d$ ) del gráfico  $VDT^2$  optimizado para el punto A y para el punto B.

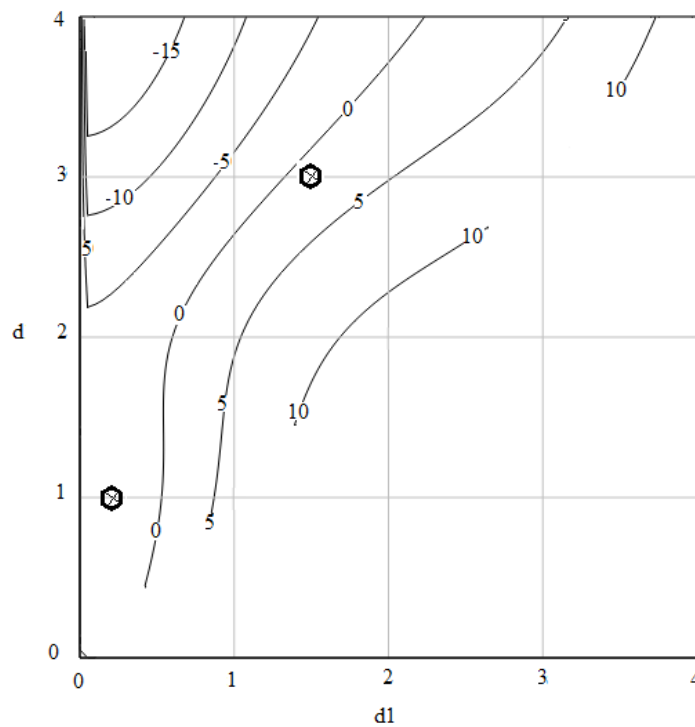
Los casos presentados aquí cubren diferentes escenarios. En los dos primeros (Figuras 4.8 y 4.9),  $p_1$  es pequeño ( $p_1 = 2$ ) y prácticamente no hay diferencias en los valores de ARL de los dos gráficos, excepto en la región del plano  $d_1 \times d$ , donde  $d_1$  es pequeño y  $d$  es grande (en la esquina superior izquierda de las figuras). Incluso en esta región, las diferencias no son grandes: aproximadamente 5% para el Caso 1 y entre 10% y 15% para el Caso 2. Las diferencias son mayores en el caso 2, porque la diferencia entre los valores de  $d_1^*$  en los puntos A y B es mayor que en el Caso 1. Puesto que en el Caso 2 uno de los gráficos es optimizado para un valor más pequeño  $d_1^*$ , las diferencias de los cambios con pequeños  $d_1$  son más significativos.



**Figura 4.8.** Diferencias porcentuales del ARL de dos gráficos de control  $VDT^2$  optimizados.  $p_1 = 2$ ,  $p = 3$ , óptimo para A =  $(d_1=0.5, d=1)$ , y para B =  $(d_1=1.5, d=3)$



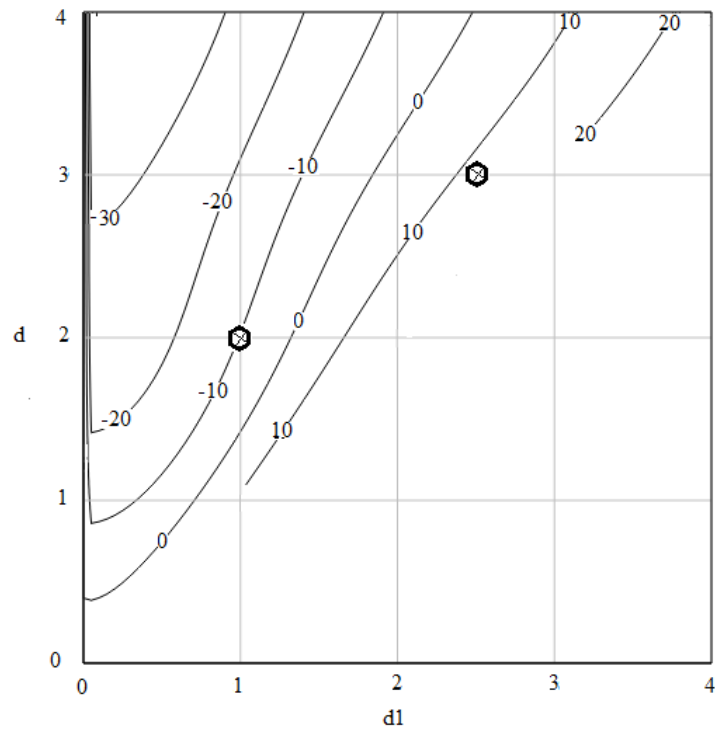
Se puede concluir que, si  $p_1$  es pequeño el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  no se ve afectado significativamente por la elección de los valores de  $d_1^*$  y  $d^*$ .



**Figura 4.9.** Diferencias porcentuales del ARL de dos gráficos de control  $VDT^2$  optimizados.  $p_1 = 2$ ,  $p = 4$ , óptimos para  $A = (d_1=0.25, d=1)$ , y para  $B = (d_1=1.5, d=3)$

A continuación se investigó lo que sucedió con un valor mayor de  $p_1$ . La Figura 4.9 muestra las diferencias por ciento en los ARLs fuera de control para el Caso 3, donde  $p_1 = 5$ . Las diferencias son más importantes que en los casos anteriores: alrededor de 10% en la

zona de las parejas seleccionadas  $(d_1^*, d^*)$  para los que los gráficos están optimizados (aunque esta es todavía una diferencia moderada, es bastante grande en comparación con los casos anteriores) y aproximadamente 30% en la esquina superior izquierda del plano.



**Figura 4.10.** Diferencias porcentuales del ARL de dos gráficos de control  $VDT^2$  optimizados.  $p_1 = 5$ ,  $p = 6$ , óptimos para  $A = (d_1=1, d=2)$ , y para  $B = (d_1=2.5, d=3)$

Se puede observar que la optimización del gráfico de control  $VDT^2$  parece muy robusta para pequeños valores de  $p_1$ . Si  $p_1$  es pequeño las diferencias en los ARLs fuera de control son pequeñas sobre la región de los posibles valores de  $(d_1^*, d^*)$ . Por lo tanto, la elección de  $(d_1^*, d^*)$  no es crítica.

Cuando  $p_1$  es mayor,  $p_1 = 5$  por ejemplo, el rendimiento es más sensible a la elección de  $(d_1^*, d^*)$ . Aunque las diferencias máximas de ARL en este ejemplo son aproximadamente 30%, en la mayoría de los casos son alrededor de 15%.

El usuario que emplee el gráfico  $VDT^2$  con valores  $p_1$  grandes debe seleccionar el punto  $(d_1^*, d^*)$  teniendo en cuenta los más comunes cambios que provocan fuera de control en el proceso, para obtener el máximo rendimiento de éstos casos específicos. Por lo tanto, la optimización del gráfico de control  $VDT^2$  es bastante robusta.

#### **4.10 Comparación de resultados $DDT^2$ versus $VDT^2$**

Una vez obtenidos los resultados de los gráficos de control propuestos en esta tesis ( $DDT^2$  y  $VDT^2$ ) es interesante observar en el rendimiento comparativo entre ellos.

En términos generales el gráfico  $VDT^2$  parece tener un mejor desempeño que el gráfico  $DDT^2$ . Sin embargo, al ver los resultados más en detalle, lo primero que se puede observar es que la distancia  $d_1$  no afecta mayormente los resultados alcanzados por uno u otro gráfico, no así la distancia  $d_p$  la cual al superar el valor de 3 ( $d_p > 3$ ), el gráfico  $DDT^2$  comienza a tener mejor rendimiento que el gráfico  $VDT^2$  y a medida que esa distancia se incrementa, la diferencia es más evidente. Este resultado es previsible debido a que la aportación que realizan las  $p_2$  variables al cálculo del estadístico  $T^2$  para el gráfico  $DDT^2$  es considerada en el mismo instante de la detección de una desviación en el proceso, mientras que la aportación que hacen las  $p_2$  variables al cálculo del estadístico  $T^2$  para el gráfico  $VDT^2$  se realiza en la muestra siguiente a la detección de la desviación.

Se puede observar, respecto al gráfico  $T_{p_1}^2$ , que ambos gráficos ( $DDT^2$  y  $VDT^2$ ) tienen mejor desempeño en todos los casos analizados con respecto al gráfico  $T_p^2$ . Mientras el  $VDT^2$  denota que a medida que se incrementa el número de variables mejora su

rendimiento. Por ejemplo, si  $p_1=1$  y  $p=2$  los casos en que  $VDT^2$  tiene mejor rendimiento que  $T_p^2$ , son los que cumplen con  $0.5 \leq d_1 \leq 1$ ; en cambio, si  $p_1=5$  y  $p=7$  los casos en que  $VDT^2$  tiene mejor rendimiento que  $T_p^2$ , únicamente se debe cumplir que  $d_p \leq 3$ . Entre tanto, el gráfico  $DDT^2$  tiene mejor desempeño que el gráfico  $T_p^2$  cuando la distancia  $d_1$  es mayor o igual a uno ( $d_1 \geq 1$ ) y las distancia  $d_p$  es cuando más 0.5 unidades mayor que  $d_1$  ( $d_1 < d \leq 0.5 + d_1$ ).

Por otro lado, se puede observar que con respecto al gráfico MCUSUM para las  $p$  variables, en términos generales, ninguno de los gráficos lo supera. Mientras que al comparar el gráfico MCUSUM para  $p_1$  variables ambos gráficos presentan mejores resultados en las siguientes condiciones:

- a) Si  $d_1 < 2$  y  $d - d_1 > 1$
- b) Si  $2 \leq d_1 < 3$  y  $d - d_1 \geq 1$
- c) Si  $d_1 > 3.5$

Los valores de  $p$  y  $p_1$  afectan ligeramente estas condiciones, especialmente en los límites de los intervalos.

Concretamente se muestran algunos ejemplos en el mismo orden mostrado en los literales anteriores:

- a) Dados  $ARL_0=400$ ,  $p_1 =2$ ,  $p =4$ ,  $d_1 =0.2$ ,  $d =0.5$  se obtuvieron los siguientes resultados:  $ARL_1(VDT^2)=38.49$ ,  $ARL_1(DDT^2)=50.07$ ,  $ARL_1(MCUSUM_{p_1})=109.17$
- b) Dados  $ARL_0=400$ ,  $p_1 =5$ ,  $p =6$ ,  $d_1 =2.5$ ,  $d =3.5$  se obtuvieron los siguientes resultados:  $ARL_1(VDT^2)=2.83$ ,  $ARL_1(DDT^2)=2.82$ ,  $ARL_1(MCUSUM_{p_1})=3.46$

- c) Dados  $ARL_0=400$ ,  $p_1 =2$ ,  $p=4$ ,  $d_1 =3.5$ ,  $d =4.5$  se obtuvieron los siguientes resultados:  $ARL_1(VDT^2)=1.56$ ,  $ARL_1(DDT^2)=1.3$ ,  $ARL_1(MCUSUM_{p_1})=1.57$

## 4.11 Conclusiones del capítulo

En este capítulo, se presenta un nuevo gráfico de control multivariante  $T^2$  en el cual el número de variables monitorizadas puede asumir dos valores de forma adaptativa. El gráfico  $VDT^2$  está ideado para situaciones en las que  $p_1$  de las  $p$  variables a ser monitorizadas son fáciles de medir y a un bajo costo, mientras que las  $p_2$  ( $p_2 = p - p_1$ ) variables restantes son difíciles o costosas de medir. Existen dos versiones del gráfico con uno y dos límites de alerta, los cuales son analizados.

Los ARLs de estos gráficos para los escenarios de zero-state y steady-state se calculan a través de un modelo de cadena de Markov. La optimización de los parámetros de estos gráficos se realiza empleando algoritmos genéticos. Se desarrolló un software basado en Windows<sup>®</sup> para optimizar los parámetros del gráfico de control.

Los ARLs obtenidos con el software desarrollado, fueron comprobados a través de simulación. Los valores obtenidos con uno y otro método fueron muy cercanos y en la mayoría de las ocasiones el mismo.

Los gráficos optimizados muestran un rendimiento muy bueno en comparación con el gráfico de control estándar  $T^2$  que siempre utiliza sólo  $p_1$  variables y con el gráfico  $T^2$  que siempre usa todas las  $p$  variables.

En más del 65% de los casos analizados el ARL fuera de control del gráfico  $VDT^2$  es menor o igual que el ARL del gráfico de control estándar  $T^2$  con todas las variables. Esta

mejora es especialmente importante para los cambios moderados en el vector de medias, y las pocas excepciones son los casos en que el cambio es grande y que es detectado rápidamente por cualquier gráfico de control. Incluso en los casos en los que la mejora en la velocidad de detección es pequeña (8.5% de los casos analizados), la medición de todas las  $p$  variables se produce sólo para un porcentaje de las muestras tomadas. En estos casos, el beneficio proporcionado por el procedimiento es la reducción de las veces en las que todas las variables son medidas, de esa forma se reduce la complejidad y/o el coste del procedimiento de control. Sin embargo, en la mayoría de los casos (65% de los casos) el beneficio es doble: una detección más rápida de la condición fuera de control junto con una reducción en la complejidad y/o el coste de muestreo y medición.

Además, frecuentemente, el gráfico de control VDT<sup>2</sup> con dos límites de advertencia y dos límites de control se puede simplificar con prácticamente ninguna pérdida de rendimiento. En primer lugar, en muchos casos el límite de control para las  $p_1$  variables se puede quitar, el resultado en los valores del ARL bajo control y fuera de control permanecen prácticamente inalterados. En segundo lugar, el rendimiento del gráfico optimizado VDT<sup>2</sup> con un solo límite de advertencia es bastante similar a la realización de la versión con dos límites de advertencia, por lo tanto esa línea también podría ser retirada del gráfico. Esto lleva a un gráfico con sólo dos líneas - un límite de alerta y un límite de control - que es bastante simple y fácil de operar.

El que haya la opción de simplificar el gráfico de control VDT<sup>2</sup> es beneficioso, ya que el procedimiento de dimensión variable representa una carga administrativa adicional (debido a que las variables a medir en cada muestra no son las mismas, y esto puede ser confuso para los trabajadores. En este capítulo se ha demostrado que en muchos casos el beneficio de utilizar el gráfico VDT<sup>2</sup> puede ser muy significativo.

El estudio de robustez en el rendimiento de los gráficos de control optimizado VDT<sup>2</sup> muestra que: (i) la optimización del gráfico VDT<sup>2</sup> tiene un buen rendimiento para otros

cambios en las distancias alejadas del punto  $(d_1^*, d^*)$  elegido para la optimización; y (ii) el gráfico de control optimizado VDT<sup>2</sup> para dos puntos diferentes  $(d_1^*, d^*)$  tienen un rendimiento muy similar, lo que demuestra que la selección de los valores  $(d_1^*, d^*)$  no es crítica para el buen desempeño del gráfico.

Por otra parte, la comparación de los resultados con el gráfico MCUSUM muestra que el gráfico VDT<sup>2</sup> siempre supera a la MCUSUM sobre las  $p_1$  variables para grandes cambios y en varios otros, aunque al parecer sin un patrón regular para saber en qué casos cada uno es mejor; sin embargo, el CUSUM para únicamente  $p_1 = 1$  variables, es mejor para valores pequeños de cambios  $d_1$  con las ventajas adicionales de simplicidad operativa y siempre incurriendo en menores costos de medición. Teniendo en cuenta que los gráficos CUSUM y EWMA se desempeñan mejor que los gráficos de Shewhart correspondientes para pequeños y moderados cambios, un trabajo futuro es una extensión del gráfico EWMA-VDT<sup>2</sup>.





---

## Aportaciones del capítulo

La primera aportación realizada es el gráfico de control con dimensión variable VDT<sup>2</sup>. Este es un gráfico complejo en su diseño debido a los requerimientos algebraicos, matemáticos, estadísticos y computacionales para su diseño. Sin embargo, tiene bajo grado de complejidad para su aplicación en términos operativos. Ofrece ARLs fuera de control muy buenos comparables con los obtenidos por el gráfico MCUSUM.

Otra aportación realizada es el software desarrollado para realizar el diseño del gráfico VDT<sup>2</sup>, esto da la libertad al usuario de optimizar el gráfico en función de la situación del proceso a optimizar. El software ofrece los valores óptimos del gráfico, además de información que ayuda a calcular los costes del muestreo o si se puede eliminar el límite de control para las  $p_1$  variables para facilitar al gráfico, entre otras.

En este capítulo también se presentan las tablas obtenidas con el software para determinados casos. Estas tablas podrán servir para operarios que tengan características similares de los procesos que desean optimizar o para investigadores que deseen comparar el rendimiento de sus gráficos con el propuesto en este capítulo.

Este capítulo aporta el artículo "T<sup>2</sup> Control Charts with Variable Dimension" publicado en 2012, en *Journal of Quality Technology*, vol. 44, no. 4, pp. 375-393. Esta revista tiene factor de impacto 1.564 y ocupa la posición 22 en los *Journal of "Statistics & Probability"*.



---

## **CAPÍTULO 5**

---

### **CONCLUSIONES GENERALES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN**

## 5.1 Conclusiones generales

*Con respecto a los objetivos iniciales planteados*

Esta tesis presenta dos nuevos gráficos de control multivariante con dimensión variable de forma adaptativa ( $DDT^2$ ,  $VDT^2$ ) de tal forma que cada vez que se realice un muestreo del proceso el número de variables utilizadas podría variar en función de la información obtenida de ellas.

Se logró reducir el ARL fuera de control con respecto al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, dado que los gráficos propuestos ( $DDT^2$  y  $VDT^2$ ) trabajan con dos dimensiones  $p_1$  y  $p$  ( $p_1 < p$ ). Los  $ARL_1$  de los gráficos propuestos para todos los casos analizados presentan mejor rendimiento que los obtenidos por el gráfico  $T^2$  conseguido con solo las primeras  $p_1$  variables y en la mayoría de los casos cuando el gráfico  $T^2$  es obtenido con todas las  $p$  variables.

Se logró una rebaja considerable de los costos asociados al muestreo, utilizando solo cuando es necesaria la totalidad de variables involucradas en el proceso. En términos generales, a medida que las distancias  $d_1$  y  $d$  van incrementando se va reduciendo el porcentaje de veces que se utilizan las  $p$  variables ( $\%p$ ) del proceso bajo control. El número de variables tiene un efecto inverso, a medida que aumentan  $p_1$  y  $p$ , el porcentaje ( $\%p$ ) va incrementando. Por este motivo, se puede afirmar que a pequeñas distancias y mayor cantidad de variables, se obtienen los porcentajes más altos (coste alto de muestreo, aunque más económico que utilizar todas las  $p$  variables) y cuando se consideran pocas variables y distancias mayores éste porcentaje es bajo.

Se obtuvo, para cada gráfico propuesto, un software que realice la optimización de acuerdo a las necesidades del usuario, con una interfaz amigable y que provea de toda la información necesaria para que el operario pueda tomar una buena decisión a partir de ella.

*Con respecto al gráfico de control DDT<sup>2</sup>*

El gráfico DDT<sup>2</sup> obtiene un ARL fuera de control muy similar al obtenido por el gráfico de control estándar T<sup>2</sup> para  $p$  variables, pero utilizando solamente un porcentaje de los gastos necesarios relacionados al muestreo.

El gráfico DDT<sup>2</sup> siempre supera al gráfico estándar T<sup>2</sup> para las  $p_1$  variables, e incluso en algunas ocasiones supera al gráfico estándar T<sup>2</sup> para las  $p$  variables, lo que es notorio, ya que en esos casos el gráfico DDT<sup>2</sup> es más rápido y más económico a la vez.

A menudo es posible eliminar el límite de control  $CL_{p1}$ , y el gráfico de control DDT<sup>2</sup> resultante muestra prácticamente el mismo rendimiento. La ventaja es, por supuesto, tener un sistema más sencillo, con sólo dos líneas:  $w$  y  $CL_p$ . Por lo tanto, si el usuario retira el límite de control  $CL_{p1}$ , podrá obtener el mismo rendimiento, con un gráfico de control más fácil.

En muy pocos casos, la minimización del ARL fuera de control devuelve un esquema en el que las  $p$  variables se miden muy frecuentemente cuando el proceso está bajo control, por lo que el óptimo prácticamente consiste en emplear el gráfico estándar T<sup>2</sup> cuando todas las  $p$  variables se miden siempre.

También se desarrolló un software para la optimización con una restricción en el % $p$  (valor que debe introducir el usuario); éste diseño a menudo devuelve un gráfico de control DDT<sup>2</sup> con un bajo valor de % $p$ , y con un ARL<sub>1</sub> mejor o muy cerca de la ARL<sub>1</sub> obtenido por el gráfico de control estándar T<sup>2</sup> para las  $p$  variables.

En general, el gráfico de control DDT<sup>2</sup> es un esquema multivariado útil cuando algunas de

las variables son caras de medir; y aumenta significativamente la potencia de la gráfica para detectar cambios en el proceso. Hay algunos casos en los que el gráfico de control  $DDT^2$  supera al gráfico  $T^2$  para todas las variables. En los casos en que la minimización del  $ARL_1$  sin restricciones produce un esquema costoso (altos valores de  $\%p$ ), el problema puede ser resuelto de nuevo con una limitación en el  $\%p$ .

#### *Con respecto al gráfico de control $VDT^2$*

Se obtuvo un nuevo gráfico de control multivariante del tipo  $T^2$  ( $VDT^2$ ), en el que el número de variables monitorizadas puede asumir dos valores. En la mayoría de los casos analizados, el gráfico  $VDT^2$  se comporta mejor que el gráfico estándar  $T^2$  con todas las  $p$  variables. Las mayores mejoras (reducciones en el ARL fuera de control) se obtienen para los cambios de tamaño moderado:  $d_1$  alrededor de 1. Los ARLs del gráfico de control  $VDT^2$  son más grandes que el  $ARL_1$  del gráfico estándar  $T^2$  en muy pocos casos.

El gráfico  $VDT^2$  tiene una leve forma de memoria, pues presenta una señal de fuera de control dadas dos observaciones consecutivas de tamaño moderado (la primera observación con  $w_{p_1} \leq T_{p_1}^2 < CL_{p_1}$  y la segunda observación con  $T_p^2 > CL_p$ ); a diferencia del gráfico estándar  $T^2$  que sólo lo puede indicar con un gran número de observaciones.

Se elaboraron dos programas que realizan la optimización para las dos versiones del gráfico  $VDT^2$ , con uno y dos límites de alerta, los cuales fueron analizados. Los ARLs de estos gráficos para zero-state y steady-state se pueden calcular a través de un modelo de cadena de Markov. La optimización de los parámetros de estos gráficos se realiza empleando algoritmos genéticos (GA).

Al comparar el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  con el del MCUSUM, cuando todas las  $p$  variables son medidas, este último siempre presenta el mejor rendimiento, pues acumula la información de muestras anteriores. Al comparar el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  con el MCUSUM para  $p_1$  variables únicamente, el gráfico  $VDT^2$  supera a la MCUSUM en más de la mitad de los casos, especialmente cuando los cambios  $(d_1, d)$  son grandes, 3.5 o más.

Dado el análisis de sensibilidad realizado del gráfico  $VDT^2$ , se puede afirmar que el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  no se ve afectado significativamente por la elección de los valores de  $d_1$  y  $d$ , ya que el gráfico se muestra robusto en sus optimizaciones aunque los valores de  $d_1$  y  $d$  del proceso difieran de los valores  $(d_1^*, d^*)$  para los cuales el gráfico fue optimizado; esto demuestra que la selección de dichos valores no es crítica para el buen desempeño del gráfico.

Se obtuvo un beneficio adicional, proporcionado por la reducción de las veces en las que todas las variables son medidas, reduciendo la complejidad y/o el coste del procedimiento de control. En muchos casos el beneficio es múltiple: una detección más rápida de la condición fuera de control, una reducción en la complejidad, y reducción del coste de muestreo y medición.

## 5.2 Futuras líneas de investigación

Al comparar el rendimiento del gráfico  $VDT^2$  con el gráfico de control MCUSUM, el  $ARL_1$  del gráfico MCUSUM puede ser utilizado como un valor de referencia correspondiente a un mejor rendimiento cuando se miden siempre ya sean  $p_1$  o  $p$  variables; esto motiva en el futuro el desarrollo de un gráfico de control de dimensión variable en función de las sumas acumuladas y/o de promedios exponencialmente ponderados del estadístico  $T^2$ . Teniendo en cuenta que los gráficos CUSUM y EWMA se desempeñan mejor que los gráficos  $T^2$  de Shewhart correspondientes para cambios pequeños y moderados, un trabajo futuro es una extensión del gráfico EWMA-  $VDT^2$ , el cual ya está siendo objeto de estudio.

Quedan pendiente analizar otras opciones del gráfico con dimensión variable, como la de variar el tamaño de muestra y el número de variables a la vez, obteniéndose el gráfico  $VDSST^2$  (Variable Dimension and Sample Size  $T^2$ ); pues como se pudo analizar en esta tesis, el desplazamiento y el estadístico del control del proceso, están afectados por el tamaño de la muestra. De este tema se ha elaborado un artículo y se ha enviado a una revista especializada, actualmente está en fase de evaluación.

Otra vía de análisis del rendimiento de los gráficos propuestos, a través del tiempo promedio hasta la aparición de una señal de fuera de control (ATS). Esto lo está trabajando el Dr. Aparisi en una tesis del programa del Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos, Mejora de Procesos y Toma de Decisiones, ofrecido por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad.



## **Bibliografía**

Alt, F.B. (1985). "Multivariate Control Charts" in Encyclopedia of Statistical Sciences, vol 6. (S. Kotz y N. L. Johson, Eds. Wiley, New York).

Alve, C. (2012). O método de Equação Integral com Quadratura Gaussiana para otimizar os parâmetros do gráfico de controle multivariado de Somas Acumuladas. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico.

Albazzaz, H., and Wang, X. Z. (2004). Statistical process control charts for batch operations based on independent component analysis. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 43(21), 6731-6741.

Alwan, L.C. (1986). "Cusum Quality Control-Multivariate Approach", *Communications in Statistics*, 15, 3531-3543.

Alwan, L.C., Roberts, H.V. (1988). Time Series Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Business & Economic Statistics* 6, (1), 87-95.

Aparisi F., De Luna, M., Epprecht. E. (2011). Optimization of a Set of Xbar or Principal Components Control Charts Using Genetic Algorithms. *International Journal of Production Research*. Version 1.

Aparisi, F. and García-Díaz, J. C. (2001). Aumento de la potencia del gráfico de control multivariante  $T^2$  de Hotelling utilizando señales adicionales de falta de control. *Revista Estadística Española*. Vol. 43, Núm. 148, págs. 171 a 188

Aparisi, F. (1996). A comparison between the simultaneous use of Shewhart charts and the use of the  $T^2$  control chart. *Proceedings of the Section of Physical and Engineering Sciences of the American Statistical Association*. Pp: 275-280.

Aparisi, F. (1996). "Hotelling's  $T^2$  control chart with adaptive sample sizes". *International Journal of Production Research*, 34, 2853-2862.

- Aparisi, F. and García-Díaz, J. C. (2007). Design and Optimization of EWMA Control Charts for In-control, Indifferent, and Out-of-control Regions. *Computers & Operations Research (Revista JCR)*. Vol: 34(7) pp: 2096-2108.
- Aparisi, F., De Luna, M., Epprecht, E. (2010). Optimisation of a set of or principal components control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, 48(18), 5345-5361.
- Bagley, J. D. (1967). *The Behavior of Adaptive Systems Which Employ Genetic and Correlative Algorithms*. PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor.
- Barnard, G.A. (1959). Control charts and stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society B (Methodological)* (21): 239–71.
- Basharin, G. P., Langville, A. N., Naumov, V. A. (2004). The Life and Work of A. A. Markov. *Linear Algebra and its Applications* 386: pp. 3-26.
- Bersimis, S., Psarakis, S. & Panaretos, J. (2006). Multivariate statistical process control charts: an overview. *Quality and Reliability Engineering International*, 23(5), 517 - 543.
- Brook D. & Evans D.A. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length. *Biometrika* 59, 3, p. 539.
- Capilla, C. y Roero, R. (1993). Señales de falta de control en gráficos Estadística. *Revista Española*, 35, 665-685.
- Capizzi, G. and Masarotto, G. (2003). An adaptive exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, 45, 199-207.
- Carlyle, W. M., Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (2000) Optimization Problems and Methods in Quality Control and Improvement, *Journal of Quality Technology*, 32: 1-19.
- Carot, V. (1998). *Control estadístico de la calidad*. Ed. Univ. Politéc. Valencia, 708 pages
- Celano, G., Fichera, S. (1999) Multiobjective economic design of an X control chart. *Computers and Industrial Engineering* , Volume 37 Issue 1-2.

- Champ, C. W. & Aparisi, F. (2008). Double Sampling Hotelling's  $T^2$  Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 24, 153-166.
- Champ, C. W. & Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules, *Technometrics*, 29, 393-399.
- Chen, Y. K. (2009). Economic design of  $T^2$  control charts with the VSSI sampling scheme. *Quality and Quantity*. Volume 43, Issue 1, pp 109-122.
- Chen, Y. K. (2007). Economic design of variable sampling interval  $T^2$  control charts. A hybrid Markov Chain approach with genetic algorithms. *Expert Systems with Applications*. Vol. 33, pp. 683-689.
- Costa, A. F. (1994). Charts with Variable Sample Size. *Journal of Quality Technology* 26(3), 155-163.
- Costa, A. F. (1997). Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology* 29, 197-204.
- Costa, A. F. (1998). Joint and R Charts with Variable Parameters. *IIE Transactions* 30, 505-514.
- Costa, A. F. (1999). Charts with Variable Parameters. *Journal of Quality Technology* 31, 408-416.
- Costa, A.F. & De Magalhães, M. S. (2005). Economic design of two-stage charts: the Markov-chain approach. *International Journal of Production Economics* 95(1), 9-20.
- Costa A. F. B. & Machado, M. A. G. (2008). Bivariate control charts with double sampling. *Journal of Applied Statistics*, Taylor and Francis Journals, vol. 35(7), pages 809-822.
- Croasdale, R. (1974). Control charts for a double-sampling scheme based on average production run length, *International Journal of Production Research*, 12, pp.585-592.

- Crosier, R. B. (1986). A New Two-Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme. *Technometrics* 28, 3, 187-194.
- Crosier, R. B. (1988). Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes. *Technometrics* 30, 291-303.
- Crowder S.V. (1987). A simple method for studying run length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics*, 29, 401-407.
- Daudin, J. J. (1992). Double sampling charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2), pp. 78-87.
- Deming, W. E. (1975). On probability as a basis for action. *The American Statistician*, 29(4) pp146-152
- Deming, W. E. (1986). *Out of the Crisis*. MIT Press. ISBN 0-911379-01-0.
- Ding, Y., Zeng, L., and Zhou, S. Y. (2006). Phase I analysis for monitoring nonlinear profiles in manufacturing processes. *Journal of Quality Technology*, 38(3), 199-216.
- Dudding, B. P. & Jennett, W. J. (1944). *Quality Control Chart Technique*. General Electric, London.
- Duncan, A. J. (1992). *Quality Control and Industrial Statistics*. 5th ed., Irwin, Homewood, IL.
- Edwards G. D. (1913). *Western Electric - A Brief History*. *Western Electric News*, April 1913, Vol. II No. 2,
- Epprecht, E. K., Costa, A. F. B. & Mendes, F.C.T. (2003). Adaptive Control Charts for Attributes. *IIE Transactions*, v. 35, n. 6, 567-582.
- Epprecht, E. K., Simões, B. F., & Mendes, F.C. (2010). A variable sampling interval EWMA chart for attributes. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49, 281-292.

Faraz, A., & Parsian, A. (2006). Hotelling's T<sup>2</sup> control chart with double warning lines. *Statistical Papers*, 47(4), 569-593.

Faraz, A., Kazemzadeh, R. B., Parsian, A., Moghadam, M. B. (2010). On the advantages of economically designed the Hotelling's T<sup>2</sup> control chart with variable sample sizes and sampling intervals. *Quality & Quantity*. Springer Science & Business Media B.V. ISSN: 0033-5177.

Faraz, A., & Saniga, E. (2011). Economic Statistical Design of a T<sup>2</sup> Control Chart with Double Warning Lines. *Quality & Reliability Engineering International*, 27, 125--139.

Ferrer, A. (2007). "Multivariate Statistical Process Control based on Principal Component Analysis (MSPC-PCA): Some Reflections and a Case Study in an Autobody Assembly Process", *Quality Engineering* 19 (4), 311-325.

FORD Corporation. (1984). "Statistical Process Control", Code EU880.

Fuchs, C. y Kenett, R. (1998). "Multivariate Quality Control- Theory and Applications". Marcel Dekker Inc.,

Gan F.F. (1998). Designs of one- and two-sided exponential EWMA chart. *Journal of Quality Technology*, 30, 55-69.

González, I. and Sanchez, I. (2010). Variable Selection for Multivariate Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology* 42(3), 242-259.

Harris, T. J., and Ross, W. M. (1991). Statistical Process Control for Correlated Observations. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 69,48–57.

He, D. (2002). Development of Multivariate Double Sampling X-bar Control Charts. Presented at the INFORMS 2002 Annual Meeting, San Jose, CA,

He, D. and Grigoryan, A. (2005). Multivariate Multiple Sampling Charts. *IIE Transactions*, 37, 509-521.

Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control. In C. Eisenhart, M. W. Hastay, and W. A. Wallis, eds. *Techniques of Statistical Analysis*. New York: McGraw-Hill

Ishikawa, K., (1974). *Guide to Quality Control*. (UNIPUB, New York).

Jackson, J. E. (1980). Principal Components and Factor Analysis: Part I - Principal Components. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 201-213.

Jackson, J. E. (1981). Principal Components and Factor Analysis: Part II - Additional Topics Related to Principal Components. *Journal of Quality Technology*, 13(1), 46-58.

Jackson, J. E. (1981). Principal Components and Factor Analysis: Part III - What Is Factor Analysis? *Journal of Quality Technology*, 13(2), 125-130.

Jackson, J. E., (1985). Multivariate Quality Control. *Communications in Statistics*, 14, pp. 2657-2688.

Johnson, N. L. (1961), A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Chart. *Journal of the American Statistical Association*, 56, 835 -840.

Johnson, N. L. and Leone, F. C. (1962). *Cumulative Sum Control Charts: Mathematical Principles Applied to Their Construction and Use*. *Industrial Quality Control*, 18.

Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007). *Applied multivariate statistical analysis*. 6th ed. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

Kaya, I. (2009). A genetic algorithm approach to determine the sample size for control charts with variables and attributes. *Expert Systems with Applications*, Vol. 36, pp. 8719-8734.

Kemp, K. W. (1962). The use of cumulative sums for sampling inspection schemes. *Appl. Statist.*, 11, 16-31.

Kramer, H. and W. Schmid (1996). The influence of parameter estimation on the ARL of Shewhart type charts for time series. *Arbeitsbericht 60*, Europa-Universitat Viadrina Frankfurt (Oder).

- Kourti, T. & MacGregor, J. F. (1996). Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring. *Journal of Quality Technology*, 28(4), 409-428.
- Layth C. A., Harry V. R. (1988). Time-Series Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Business & Economic Statistics - J BUS ECON STAT* , vol. 6, no. 1, pp. 87-95.
- Lee, M. H. and Khoo, B. C. (2006). Optimal Statistical Designs of a Multivariate CUSUM Chart based on ARL and MRL. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 13(5), 479-497.
- Lee, J. M., Yoo, C., and Lee, I. B. (2003). Statistical process monitoring with multivariate exponentially weighted moving average and independent component analysis. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 36(5), 563-577.
- Li, J., Tsung, F. and Zou, C. (2012). Directional Control Schemes for Multivariate Categorical Processes. *Journal of Quality Technology*, 44, pp. 136-154.
- Lorenzen, T.J. and Vance, L.C. (1986). The economic Design of control chart: A Unified Approach. *Technometrics*, 28, 3-10.
- Lowry, C. A., Woodall W. H., Champ C. W. and Rigdon S. E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* 34, 46-53.
- Lowry, C.A. & Montgomery, D.C. (1995). A review of multivariate control charts. *IIE Transactions*, 27(1), 800-810.
- Lucas, J. M. & Saccucci M. S. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, Vol. 32, No. 1
- MacGregor, J. F. & Kourti, T. (1995). Statistical Process Control of Multivariate Processes. *Control Engineering Practice*, 3(3), 403-414.
- Mahalanobis, P.C. (1936). On the generalised distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Science of India* 12, 49-55.

Marín Diazaraque J. M., (2012). Cadenas de Markov. Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid. Sitio web: <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema4pe.pdf>. (Visitada 07/01/2013).

Montgomery, D. C. (2008). Introduction to Statistical Quality Control, 6th Edition. Wiley, New York.

Montgomery, D. C. (2012). Introduction to Statistical Quality Control, 7th Edition. Wiley, New York.

Murphy, B. J. (1987). Selecting out of control variables with the T2 multivariate quality control procedure. *The Statistician* 36 (5), 571-583.

Neuhauser, B. M., (2006). Shewhart W A. 1924 and the Hawthorne Factory. *Qual Saf Health Care*.15142-143.143.

Nomikos, P. & MacGregor, J. F. (1995). Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Processes. *Technometrics*, v. 37, n. 1, p. 41-59.

Page, E.S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, Vol. 41, No. 1.

Page, E. S. (1955). Control Charts with Warning Limits, *Biometrika*, 42, 243-257.

Page, E. S. (1962). A modified Control Chart with warning lines, *Biometrika*, 49, 171-176.

Pignatello, J. J. & Runger, G. C. (1990). Comparisons of multivariate CUSUM charts. *Journal of Quality Technology*, 22, 173- 186.

Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1994). A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval Control Scheme. *Journal of Quality Technology* 26, 164-176.

Prabhu, S. S., Runger, G. C., and Keats, J. B. (1993). An Adaptive Sample Size Chart. *International Journal of Production Research* 31, 2895-2909.



- Rechenberg, I. (1971): Evolutionsstrategie - Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution (PhD thesis).
- ReVelle, J. B. (2004). Quality Essentials: A Reference Guide from A to Z. ASQ Quality Press, pages 185-186.
- Reynolds, M. R., Amin, R. W., Arnold, J. C. and Nachlas, J. A. (1988). Charts with Variable Sampling Intervals. *Technometrics*, 30, 181-192.
- Reynolds, M. R., Jr., and Arnold, J.C. (2001). EWMA Control Charts with Variable Sample Sizes and Variable Sampling Intervals. *IIE Transactions*, 33, 511-530.
- Robinson, P. B., and Ho. T. Y. (1978). Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods. *Technometrics*, 20, 85-93.
- Roberts S.W. (1959). Control chart tests based on geometric moving average. *Technometrics*, 1, 239-250
- Rodrigues, A. A., Epprecht, E. K., and De Magalhães, M. S. (2011). Double Sampling Control Charts for Attributes. *Journal of Applied Statistics*, 38(1), pp. 87-112.
- Ross, S. D., (1996) *Stochastics Processes*. 2th Edition. John Wiley & Son.
- Ruiz-Falcó, A. (2006). *Control Estadístico de Procesos*. Universidad Pontificia Comillas de Madrid.
- Runger, G. C., Montgomery, D. C. (1993). Adaptive Sampling Enhancements for Shewhart Control Charts. *IIE Transactions* 25, 41-51.
- Runger, G. C. and Prabhu S. S. (1996). A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 91, No. 436, pp. 1701-1706
- Saccucci, M. S.; Amin, R. W.; and Lucas, J. M. (1992). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes with Variable Sampling Intervals. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 21, 627-657.

Seber, G. A. F., (1984). *Multivariate Observations*. John Wiley & sons, Eds., New York, NY.

Shannon, R., Johannes, J. D. (1976). Systems simulation: the art and science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 6(10). pp. 723-724.

Shewhart, W. A., (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. New York: D. Van Nostrand Co., Inc.

Shu, L., Jiang, W. and Tsui, K. L. (2008). A weighted CUSUM chart for detecting patterned mean shifts. *Journal of Quality Technology*, 40, 194-213.

Smith, A.F.M. and Roberts, G.O. (1993). Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods (with discussion). *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B* 55, 3-24.

Sparks, R. S. (2000). CUSUM charts for signaling varying location shifts. *Journal of Quality Technology*, 32, 157-171.

Steiner, S. H. (1999). Confirmation sample control charts. *International Journal of Production Research*, 37(4), pp. 737-748.

Steiner, S. H. (2000). Statistical Process Control Using Two Measurement Systems. *Technometrics*, 42, 178-187.

Sukparungsee S. and Areepong Y. (2009). A Study of the Performance of EWMA Chart with Transformed Weibull Observations. *Thailand Statistician*, 7, 179-191.

Sukparungsee S., (2012). Combining Martingale and Integral Equations for Finding Optimal Designs of EWMA Procedure. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, no. 90, 4471 - 4482

Tagaras, G. (1998). A Survey of Recent Developments in the Design of Adaptive Control Charts. *Journal of Quality Technology* 30(3), 212-231.

Tsung, F. and Apley, D. W., (2002). The Dynamic T2 Chart for Monitoring Feedback-Controlled Processes. *IIE Transactions*, 34(12), pp. 1043-1053.

Tsung, F., Wnag, K. (2010). Adaptive Charting Techniques: Literature Review and Extensions. *Frontiers in statistical quality control* 9. 2010, p. 19-35

Tracy, N. D., Young, J. C. and Mason, R. L. (1992). Multivariate Control Charts for Individual Observations. *Journal of Quality Technology*, 24, 88-95.

Trejos, A., Carvajal, P., Barrera, M. (2004). Generador de procesos normales multivariados. *Scientia et Technica Año X, No 25, UTP. ISSN 0122-1701 Pp. 185-189*

Torng C., Lee P., (2009). The Performance of Double Sampling Control Charts Under Non Normality. *Communications in Statistics - Simulation and Computation - CSSC* , vol. 38, no. 3, pp. 541-557.

Wang, K., Tsung, F., (2008). An Adaptive T2 Chart for Monitoring Dynamic Systems. *ASQ*, Vol. 40, No. 1.

Wardell, D. G., Moskowitz, H. and Plante, R. D. (1992). Control charts in the presence of data correlation, *Management Science* 38: 1084–1105.

Western Electric, (1956). "Statistical Quality Control Handbook", Select Code 700-444. Western Electric Corporation, Indianapolis, IN.

Woodall, W. H. and Ncube, M. M. (1985). Multivariate CUSUM quality control procedures. *Technometrics* 27, 285-292.

Zhang, N. F. (1998). A Statistical Control Chart for Stationary Process Data. *Technometrics*, 40, 24-38.

Zou, C. and Tsung, F. (2008). "Directional MEWMA Schemes for Multistage Process Monitoring and Diagnosis". *Journal of Quality Technology* 40, pp. 407-427.



## Apéndice 1

### La Distribución de $D = T_p^2 - T_{p1}^2$

Usando la notación de Murphy (1987) se replantea el problema. Sea  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio de dimensión  $p = p_1 + p_2$  con distribución normal multivariante, con vector de promedios  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de covarianzas  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Ambos  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  pueden estar particionados de acuerdo a las dimensiones  $p_1$  y  $p_2$  como se muestra a continuación

$$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \rightarrow X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_{p_1+p_2} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{1,1} & \boldsymbol{\Sigma}_{1,2} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{2,1} & \boldsymbol{\Sigma}_{2,2} \end{bmatrix} \right),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{1,2} = \boldsymbol{\Sigma}_{2,1}'$$
(A1)

Se define un valor objetivo para  $\boldsymbol{\mu}$  como un vector constante  $\boldsymbol{\mu}_0$  de dimensión  $p$  particionado de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \mu_0^{(1)} \\ \mu_0^{(2)} \end{bmatrix}$$
(A2)

Sea  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio compuesto por  $n$  observaciones aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $X_1, \dots, X_n$  y se define un vector de promedios muestrales  $\bar{\mathbf{X}}$ , particionado de la siguiente manera,

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{X}^{(1)} \\ \bar{X}^{(2)} \end{bmatrix}$$
(A3)

Ahora, se definen dos estadísticos y su diferencia  $D$ ,

$$T_p^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \quad (\text{A4.a})$$

$$T_{p_1}^2 = n(\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)})' \Sigma_{1,1}^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \quad (\text{A4.b})$$

$$D = T_p^2 - T_{p_1}^2 \quad (\text{A4.c})$$

Queda por demostrar que  $D$  está dado por (A4.c) que sigue una distribución chi-cuadrado no centralizada con parámetro de no centralidad que depende de  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  y  $\bar{\mathbf{X}}^{(1)}$ . Específicamente se puede afirmar que  $D$  es  $n$  veces el cuadrado de la distancia de Mahalanobis entre  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$  con respecto a  $\boldsymbol{\mu}_0$ . Además,  $D$  es igual a  $n$  veces el cuadrado de la distancia de Mahalanobis de la media condicional de  $\mathbf{X}^{(2)}$  dado el valor observado  $x^{(1)}$  del vector aleatorio  $\mathbf{X}^{(1)}$ .

En primer lugar se presenta una lista de las propiedades y de los resultados que se utilizan, de la fórmula general de la inversa de una matriz particionada,

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1}^{-1} + \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2} (\Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2})^{-1} \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} & -(\Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2})^{-1} \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \\ -(\Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2})^{-1} \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} & (\Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2})^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A5})$$

### *La distribución del promedio muestral $\bar{\mathbf{X}}$*

Un resultado muy conocido es que, si  $\bar{\mathbf{X}}$ , en la ecuación (A3), es medida sobre una muestra aleatoria independiente e idénticamente distribuida, que proviene de una distribución normal multivariante, tal como la descrita en (A1), entonces

$$\bar{\mathbf{X}} \sim N_p \left( \boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma} \right) \quad (\text{A6})$$

Además, se puede notar que la condición se mantiene para los subvectores de  $\bar{\mathbf{X}}$ :

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_{p_1+p_2} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, (1/n) \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{bmatrix} \right), \quad (\text{A6.a})$$

*Un resultado sobre la distribución condicional Normal Multivariante*

Si el vector aleatorio  $\mathbf{X}$  es definido como en la ecuación (A1), la distribución condicional de  $\mathbf{X}^{(2)}$  condicionada a la observación del valor  $x^{(1)}$  para el vector aleatorio  $\mathbf{X}^{(1)}$  está dada por una distribución Normal Multivariante de dimensión  $p_2$ , con media y matriz de covarianzas expresadas en términos de la partición de la matriz  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Formalmente,

$$\mathbf{X}_{2/1} \equiv (\mathbf{X}^{(2)} | \mathbf{X}^{(1)} = x^{(1)}) \sim N_{p_2} \left( \boldsymbol{\mu}_{2/1}, \boldsymbol{\Sigma}_{2/1} \right) \quad (\text{A7})$$

con

$$\boldsymbol{\mu}_{2/1} = \boldsymbol{\mu}^{(2)} + \boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{2,1} (x^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}) \quad (\text{A8.a})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{2/1} = \boldsymbol{\Sigma}_{2,2} - \boldsymbol{\Sigma}_{2,1} \boldsymbol{\Sigma}_{1,1}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{1,2} \quad (\text{A8.b})$$

Nótese la coincidencia del lado derecho de (A8.b) con la inversa de la submatriz inferior derecha del lado derecho de la ecuación (A5).

*Demostración:* Primero es necesario expresar  $D$  en términos de una distribución condicional (Murphy, 1987).

Sea  $D = T_p^2 - T_{p_1}^2$ ; entonces, utilizando las ecuaciones (4.4.a) y (4.4.b)

$$D = n(\bar{X} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0) - n(\bar{X}^{(1)} - \mu_0)' \Sigma_{1,1}^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \mu_0) \quad (\text{A9})$$

Expresando (A9) en términos de la partición de  $\mathbf{X}$ ,

$$D = n \left[ (\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)})' \Sigma_{1,1}^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \right] \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \\ (\bar{X}^{(2)} - \mu_0^{(2)}) \end{bmatrix} - n (\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)})' \Sigma_{1,1}^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \quad (\text{A10})$$

Se define una variable auxiliar  $Y$  tal que

$$Y = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) = \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{n}(\bar{X}^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \\ \sqrt{n}(\bar{X}^{(2)} - \mu_0^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

Usando el resultado de (A6.a) se sabe que

$$Y \sim N_p(\theta, \Sigma) \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_{p_1+p_2} \left( \begin{bmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A12})$$

con

$$\theta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0) = \begin{bmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{n}(\mu^{(1)} - \mu_0^{(1)}) \\ \sqrt{n}(\mu^{(2)} - \mu_0^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

y, usando (A8.a) y (A8.b),



$$Y_{2/1} \equiv (Y^{(2)} | Y^{(1)} = y^{(1)}) \sim N_{p_2}(\theta_{2/1}, \Sigma_{2/1}) \quad (\text{A14})$$

con

$$\theta_{2/1} = \theta^{(2)} + \Sigma_{2,2}^{-1} \Sigma_{2,1} (y^{(1)} - \theta^{(1)}) \text{ y } \Sigma_{2/1} = \Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2} \quad (\text{A15})$$

Luego de aplicar un largo proceso algebraico, usando (A5) en la ecuación (A10), se puede utilizar (A15) y (A13) para obtener:

$$D = Y_{2/1}' \Sigma_{2/1}^{-1} Y_{2/1} \quad (\text{A16})$$

Ahora se probará la distribución de  $D$ . Primero, se define el vector aleatorio,

$$Z = \Sigma_{2/1}^{-\frac{1}{2}} Y_{2/1} \quad (\text{A17})$$

Luego, utilizando (A16) para escribir  $D$  como

$$D = Z'Z \quad (\text{A18})$$

Luego, es fácil verificar que

$$Z \sim N_{p_2} \left( \Sigma_{2/1}^{-\frac{1}{2}} \theta_{2/1}, I_k \right) \quad (\text{A19})$$

Entonces, por la definición de la distribución chi-cuadrada no centralizada,

$$D \sim \chi_{p_2, \lambda_{2/1}}^2 \quad (\text{A20})$$

Con el parámetro de no centralidad dado por

$$\lambda_{2/1} = \left( \Sigma_{2/1}^{-1/2} \theta_{2/1} \right)' \left( \Sigma_{2/1}^{-1/2} \theta_{2/1} \right) = \theta_{2/1}' \Sigma_{2/1}^{-1} \theta_{2/1} \quad (\text{A21})$$

Utilizando otra vez (A5) y realizando en orden inverso una manipulación similar a la utilizada para obtener (A16) de (A10), se obtiene

$$\lambda_{2/1} = \theta_{2/1}' \Sigma_{2/1}^{-1} \theta_{2/1} = \theta' \Sigma^{-1} \theta - \theta_1' \Sigma_{11}^{-1} \theta_1 = n(\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) - n(\mu^{(1)} - \mu_0^{(1)})' \Sigma_{11}^{-1} (\mu^{(1)} - \mu_0^{(1)})$$

El cual es  $n$  veces la distancia de Mahalanobis entre  $\mu$  y  $\mu^{(1)}$  respecto a  $\mu_0$ .

## **Apéndice 2**

### ***Software de optimización: Gráficos de Dimensión Variable: DDT2 y VDT2***

#### ***Manual del usuario***

El Software y la documentación de los gráficos de dimensión variable, es el resultado de la presente tesis doctoral, con la participación del siguiente grupo de colaboradores:

PhD. Francisco Aparisi García (faparisi@eio.upv.es).

PhD. Eugenio Kahn Epprecht (eke@puc-rio.br)

PhD. (c) Omar Ruiz Barzola (oruiz@espol.edu.ec)

El software fue desarrollado el año 2012 en la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia-España.

#### ***Prólogo***

El software desarrollado, en sus diferentes versiones, es el resultado de la presente tesis doctoral, realizada por Omar Ruiz, dirigida por el Dr. Francisco Aparisi y co-dirigida por el Dr. Eugenio Epprecht.

El manual está estructurado de la siguiente manera: inicialmente se describe su forma de instalación y requerimientos técnicos; luego se describen los aspectos generales del software y posteriormente se describen cada una de las versiones del programa para la optimización de los dos gráficos de control obtenidos en la tesis DDT2 y VDT2.

El presente manual refleja el estado del software al momento de la culminación de la tesis, sin embargo el software está siendo mejorado constantemente, optimizando los algoritmos, mejorando su interfaz, agregando nuevas consideraciones del proceso, etc.

#### ***Instalación***

El software ha sido creado como una versión portable, lo que da la facilidad de iniciar el archivo ejecutable desde un dispositivo removible o copiando el archivo ejecutable en el ordenador. No requiere de configuración adicional

### ***Requerimientos técnicos***

Procesador: Tipo Pentium o superior

Memoria mínima sugerida: 500 Mb

Sistemas operativos: Windows XP, NT, Vista. (No funciona en las diferentes versiones de Linux)

Configuración del monitor: definición mínima 800x600

Importante: el software reconoce automáticamente la configuración de la hora del ordenador y lo utiliza para mostrar los resultados.

El software fue realizado bajo ambiente Windows. Está desarrollado en el software libre Lazarus 1.0.2 (Free Pascal) con licencia GPL/LGPL.

### ***Aspectos generales***

Se desarrollaron dos programas para realizar la optimización de los gráficos de control obtenidos: Optimizador para el gráfico DDT2 y Optimizador para el gráfico VDT2. Los optimizadores ofrecen una interfaz amigable, para que el usuario no tenga dificultades en el uso e interpretación de los resultados. Al iniciar, se visualiza la ventana única del programa, la cual contiene dos pestañas. La primera pestaña “Optimization” sirve para encontrar los valores óptimos de los parámetros del gráfico de control, de tal forma que minimice el ARL fuera de control dadas las condiciones del proceso especificadas por el usuario, y la pestaña “ARL calculation” sirve para calcular el ARL con valores de los parámetros del gráfico de control definidos por el usuario. También se desarrolló una versión de cada programa para que considere dentro de las restricciones la proporción de veces que se utilizan todas las variables cuando el proceso esté bajo control.

La búsqueda de los valores de los parámetros óptimos para cada gráfico de control se realiza a través de algoritmos genéticos. Los valores utilizados para cada parámetro del AG son los siguientes: Tamaño de población = 200, Tipo de cruzamiento = 2 puntos, Probabilidad de cruzamiento = 0.95, Probabilidad de mutación = 0.03, Método de selección = Torneo, Tamaño del torneo = 2, Número de evaluaciones = 40000. Estos valores fueron obtenidos por estudios anteriores realizados por el equipo de trabajo del Dr. Aparisi. La función de adaptación (fitness) fue la siguiente:  $\text{If } (ARLo - ARL(d=0)) > 0 \text{ then Fitness} = \text{Maximum} - 2w1 * \text{ABS}(ARLo - ARL(d=0)) - w2 * ARL(d)$ ;  $\text{If } (ARLo - ARL(d=0)) \leq 0 \text{ then Fitness} = \text{Maximum} - w1 * \text{ABS}(ARLo - ARL(d=0)) - w2 * ARL(d)$ ; los pesos  $w1$  y  $w2$  fueron obtenidos a través de un pequeño diseño de experimento.

### ***Optimizador gráfico DDT2***

A continuación se describe el programa desarrollado para la optimización del gráfico de control DDT2.

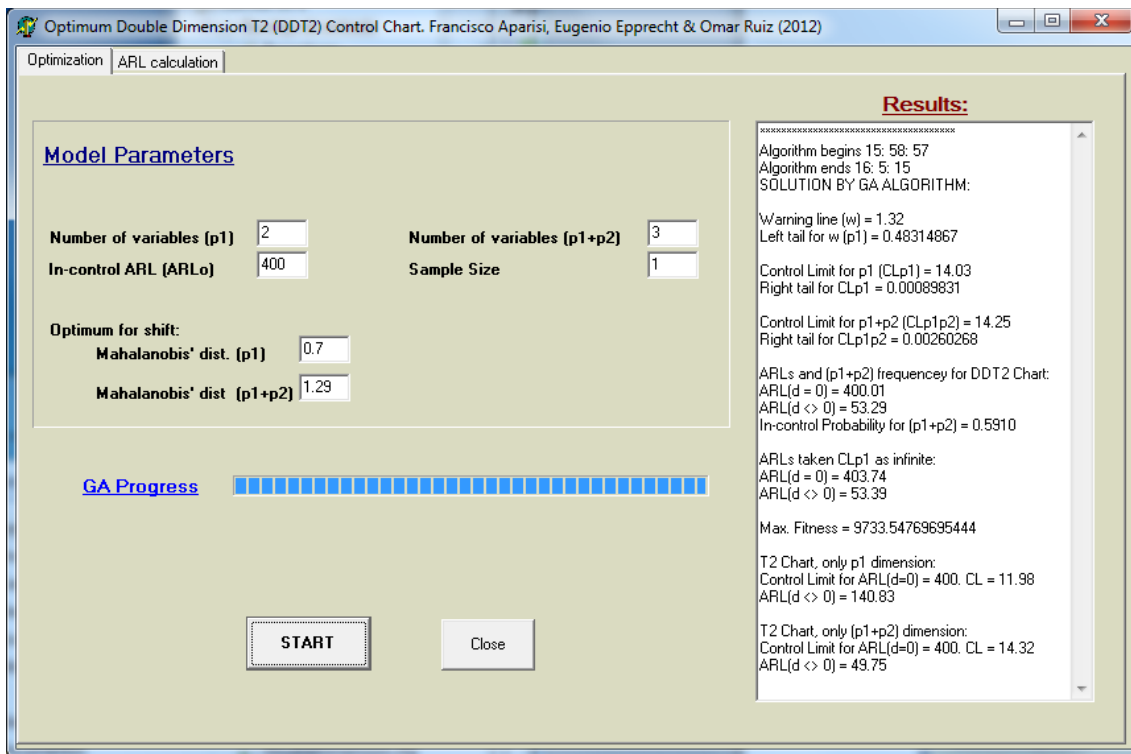
*La pestaña para la optimización contiene 3 secciones:*

En la primera sección, se ingresan los valores que condicionan el estado del proceso para el cual se desea obtener los valores óptimos de los parámetros del gráfico de control: (i) Number of variables ( $p_1$ ), corresponde al número de variables de bajo costo o más fáciles de medir; (ii) Number of variables ( $p_1+p_2$ ), corresponde al número total de variables a ser monitorizadas en el proceso; (iii) In-control ARL (ARL<sub>0</sub>), corresponde al ARL bajo control fijado por el dueño del proceso relacionado a la probabilidad de error tipo I ( $\alpha$ ); (iv) Sample Size, corresponde al número de observaciones o tamaño de muestra que se utilizará durante el proceso y que será fijo; (v) Mahalanobis' dist. ( $p_1$ ), corresponde al desplazamiento que se desea detectar durante el proceso cuando se está monitorizando solamente con las  $p_1$  variables; (vi) Mahalanobis' dist. ( $p$ ), corresponde al desplazamiento que se desea detectar durante el proceso cuando se está monitorizando todas las  $p$  variables.

En la segunda sección, se tiene la ventana de salida de los resultados. En ella se puede visualizar la hora de inicio y fin del cálculo; los parámetros del gráfico de control ( $w$ ,  $CL_{p1}$  y  $CL_p$ ) cada uno con sus respectivas probabilidades de ocurrencia; el ARL bajo y fuera de control obtenidos con los parámetros anteriores; la probabilidad de utilizar las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control; el valor de ajuste de la función multiobjetivo "fitness"; los ARL's y límites de control si se utilizara el gráfico  $T2_{p1}$  o  $T2_p$ , dadas las condiciones inicialmente planteadas del proceso.

La tercera sección consta del botón "Start" para el inicio del cálculo, "Close" para cerrar el programa y la barra "GA Progress" que indica el avance de los cálculos requeridos para realizar la optimización.

La figura A2.1. muestra un ejemplo de aplicación, donde el ARL bajo control deseado es 400, el número de variables a monitorizar son  $p_1=2$  y  $p=3$ , las respectivas distancias de Mahalanobis son  $d(p_1)=0.7$  y  $d(p)=1.29$ , con un tamaño de muestra  $n=1$ .

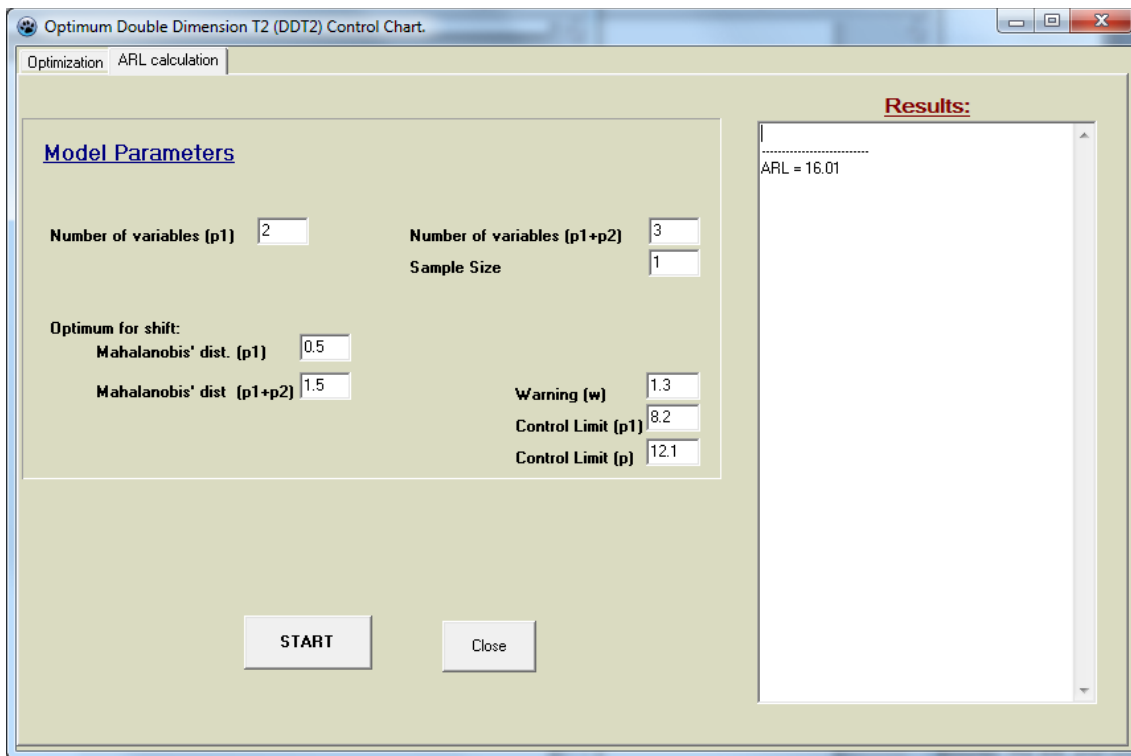


**Figura A2.1. Optimizador DDT2**

La ventana de resultados indica que el optimizador tardó menos de 7 minutos en realizar la optimización. Los valores de los parámetros del gráfico DDT2 son  $w=1.32$  con probabilidad de cola izquierda de 0.48314867,  $CL_{p1}=14.03$  con probabilidad de cola derecha de 0.000898,  $CL_{p1p2}=CL_p=0.0026026$ . Con estos valores el gráfico de control DDT2 tendría el ARL bajo control de 400.01 y el ARL fuera de control de 53.29. El valor de ajuste de la función multiobjetivos es de 9733.5476. También se puede observar que si se utiliza el gráfico de control T2 con  $p_1$  variables a monitorizar, el límite de control óptimo sería 11.98 y tendría un ARL fuera de control de 140.83. Así mismo, si se utiliza el gráfico de control T2 con  $p$  variables a monitorizar, el límite de control óptimo sería 14.32 y tendría un ARL fuera de control de 49.75.

*La pestaña para el cálculo del ARL contiene 3 secciones*

En la primera sección, se ingresan los valores que condicionan el estado del proceso: Number of variables ( $p_1$ ), Number of variables ( $p_1+p_2$ ), In-control ARL ( $ARL_0$ ), Sample Size, Mahalanobis' dist. ( $p_1$  Mahalanobis' dist. ( $p$ )); adicionalmente se deberán ingresar los valores de los parámetros del gráfico Warning ( $w$ ), Control Limit ( $p_1$ ) y Control Limit ( $p$ ).



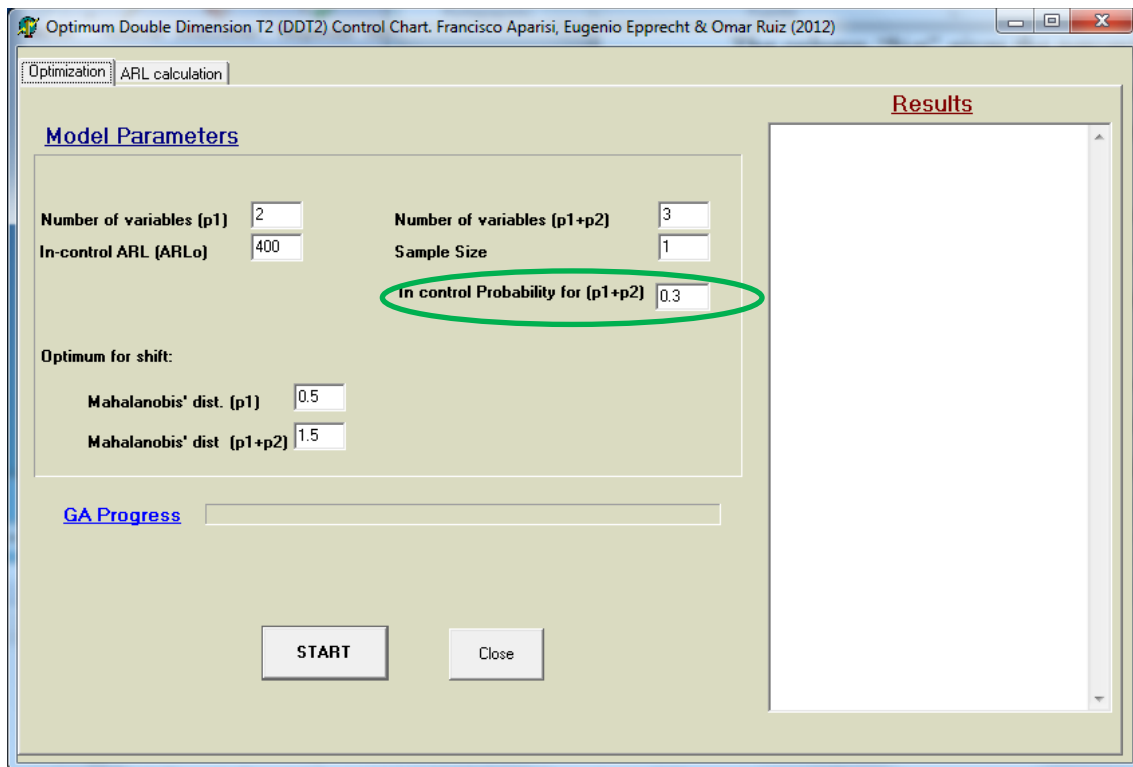
*Figura A2.2. Cálculo del ARL para un caso específico*

En la segunda sección, se tiene la ventana de salida de los resultados. En ella se visualizará únicamente el ARL obtenido bajo las condiciones indicadas

La tercera sección consta del botón “Start” para el inicio del cálculo, y “Close” para cerrar el programa.

La figura A2.2 presenta un ejemplo de aplicación donde se desea obtener el ARL para el caso de  $p_1=2$ ,  $p=3$ , las respectivas distancias son  $d(p_1)=0.5$ ,  $d(p_1+p_2)=1.5$ , con tamaño de muestra  $n=1$ . Los parámetros del gráfico de control que se desean evaluar son  $w=1.3$ ,  $CL(p_1)=0.2$  y  $CL(p)=12.1$ . El ARL obtenido bajo esas condiciones es  $ARL=16.01$ .

La figura A2.3 muestra una versión modificada del optimizador del gráfico DDT2 que contiene los mismos parámetros anteriormente descritos más la inclusión del parámetro “In control Probability for  $(p_1+p_2)$ ” como una restricción adicional del proceso, este parámetro indica la proporción de veces que se utilizan todas las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control.



**Figura A2.3. Optimizador DDT2 con restricción en la proporción de veces que se utilizan las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control.**

### **Optimizador gráfico VDT2**

A continuación se describe el programa desarrollado para la optimización del gráfico de control VDT2.

*La pestaña para la optimización contiene 3 secciones:*

En la primera sección, se ingresan los valores que condicionan el estado del proceso para el cual se desea obtener los valores óptimos de los parámetros del gráfico de control: (i) Number of variables ( $p_1$ ), corresponde al número de variables de bajo costo o más fáciles de medir; (ii) Number of variables ( $p_1+p_2$ ), corresponde al número total de variables a ser monitorizadas en el proceso; (iii) In-control ARL ( $ARL_0$ ), corresponde al ARL bajo control fijado por el dueño del proceso relacionado a la probabilidad de error tipo I ( $\alpha$ ); (iv) Sample Size, corresponde al número de observaciones o tamaño de muestra que se utilizará durante el proceso y que será fijo; (v) Mahalanobis' dist. ( $p_1$ ), corresponde al desplazamiento que se desea detectar durante el proceso cuando se está monitorizando solamente con las  $p_1$  variables; (vi) Mahalanobis' dist. ( $p$ ), corresponde al desplazamiento que se desea detectar durante el proceso cuando se está monitorizando con todas las  $p$

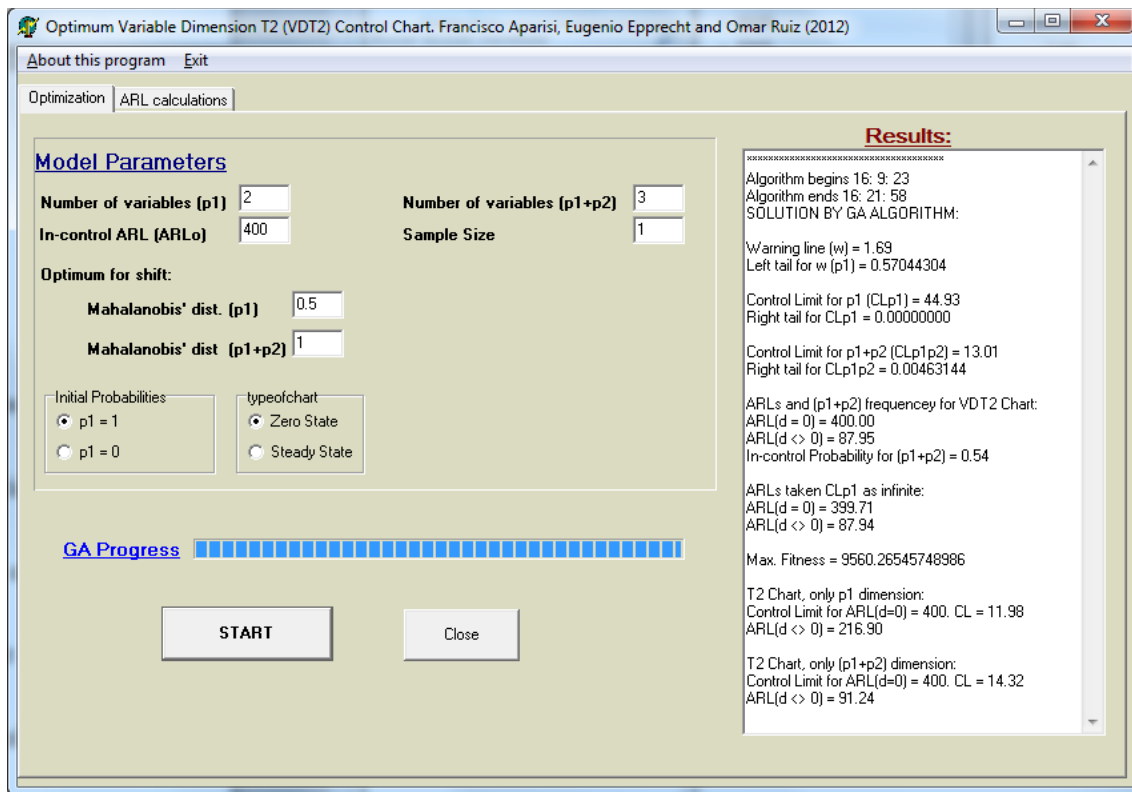


variables. Dado que para este gráfico se requiere utilizar cadenas de Markov, hace falta determinar los valores del vector de probabilidades iniciales “Initial probabilities” para iniciar con el proceso con solo las  $p_1$  variables ( $p_1=1$ ) o con todas las  $p$  variables ( $p_1=0$ ) y si el tipo de gráfico “type of chart” será “zero state” o “steady state”.

En la segunda sección, tal como en el gráfico DDT2, se tiene la ventana de salida de los resultados. En ella se puede visualizar la hora de inicio y fin del cálculo; los parámetros del gráfico de control ( $w_1$ ,  $w_2$  o simplemente  $w$ ,  $CL_{p1}$  y  $CL_p$ , según sea el caso) cada uno con sus respectivas probabilidades de ocurrencia; el ARL bajo y fuera de control obtenidos con los parámetros anteriores; la probabilidad de utilizar las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control. Adicionalmente se muestran los valores de ARLs si el límite de control para las  $p_1$  variables fuera infinito (500), con la finalidad de saber si se puede eliminar este límite; se sugiere eliminarlo si entre los respectivos valores de  $ARL_0$ 's y los de  $ARL_1$ 's no hubiera una diferencia mayor de 3%. Finalmente los parámetros que aparecen en la ventana de resultados son el valor de ajuste de la función multiobjetivo “fitness”; los ARL's y límites de control si se utilizara el gráfico  $T_{2p1}$  o  $T_{2p}$ , dadas las condiciones inicialmente planteadas del proceso.

La tercera sección consta del botón “Start” para el inicio del cálculo, “Close” para cerrar el programa y la barra “GA Progress” que indica el avance de los cálculos requeridos para realizar la optimización.

La figura A2.4 muestra un ejemplo de aplicación, donde el ARL bajo control deseado es 400, el número de variables a monitorizar son  $p_1=2$  y  $p=3$ , las respectivas distancias de Mahalanobis son  $d(p_1)=0.5$  y  $d(p)=1.00$ , con un tamaño de muestra  $n=1$ , utilizando solo las  $p_1$  variables al inicio del proceso y en zero-state.



**Figura A2.4. Optimizador VDT2 con un solo límite de control**

La ventana de resultados indica que el optimizador tardó aproximadamente 12 minutos en realizar la optimización. Los valores de los parámetros del gráfico VDT2 son  $w=1.69$  con probabilidad de cola izquierda de  $0.57044304$ ,  $CL_{p1}=44.93$  con probabilidad de cola derecha de  $0.00000000$ ,  $CL_{p1p2}=CL_p=413.01$  con probabilidad de cola derecha de  $0.00463144$ . Con estos valores el gráfico de control VDT2 tendría el ARL bajo control de  $400.00$  y el ARL fuera de control de  $87.95$ . Si el límite de control para las  $p_1$  variables ( $CL_{p1}$ ) tomara el valor infinito ( $500$ ) los respectivos ARL sería  $ARL_0=399.71$  y  $ARL_1=87.94$ , dado que las diferencias son muy pequeñas,  $CL_{p1}$  podría ser eliminado. El valor de ajuste de la función multiobjetivos es de  $9560.2654$ . También se puede observar que si se utiliza el gráfico de control T2 con  $p_1$  variables a monitorizar, el límite de control óptimo sería  $11.98$  y tendría un ARL fuera de control de  $216.90$ . Así mismo, si se utiliza el gráfico de control T2 con  $p$  variables a monitorizar, el límite de control óptimo sería  $14.32$  y tendría un ARL fuera de control de  $91.24$ .

*La pestaña para el cálculo del ARL contiene 3 secciones*

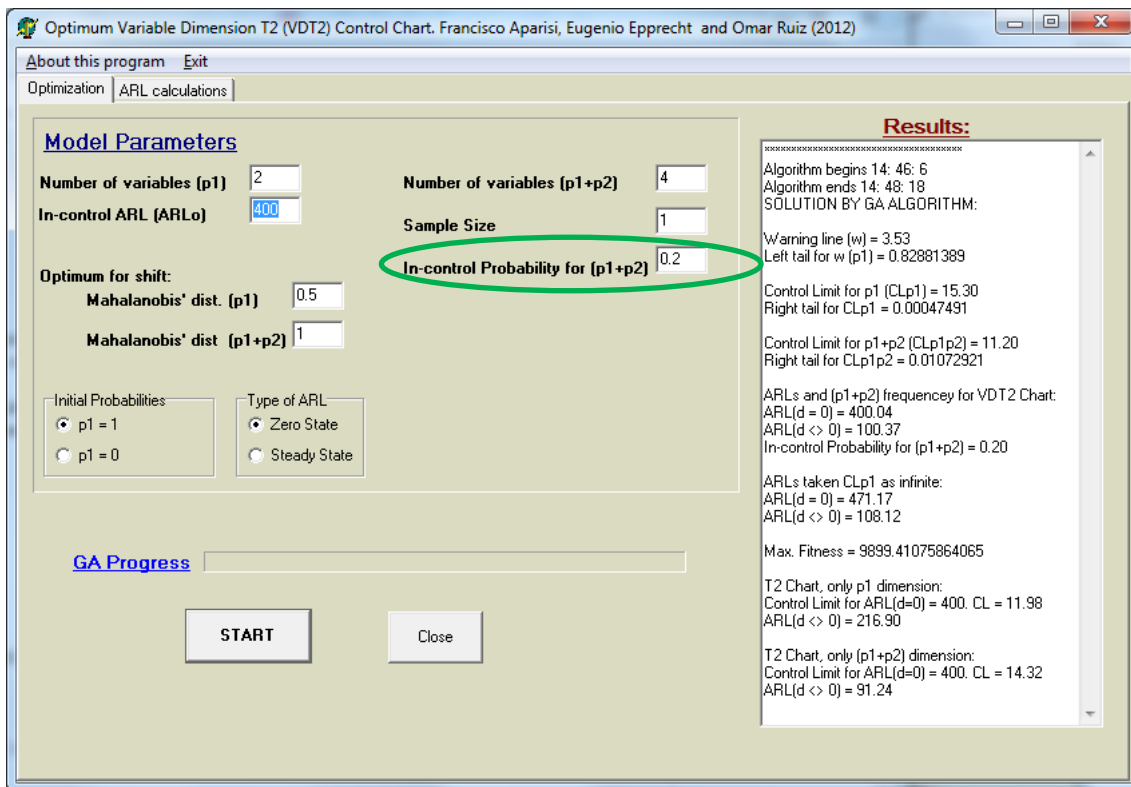
En la primera sección, se ingresan los valores que condicionan el estado del proceso: Number of variables ( $p_1$ ), Number of variables ( $p_1+p_2$ ), In-control ARL ( $ARL_0$ ), Sample

Size, Mahalanobis' dist. ( $p_1$  Mahalanobis' dist. ( $p$ ); adicionalmente se deberán ingresar los valores de los parámetros del gráfico Warning ( $w_1$ ,  $w_2$  o  $w$  según sea el caso), Control Limit ( $p_1$ ) y Control Limit ( $p$ ).

En la segunda sección, se tiene la ventana de salida de los resultados. En ella se visualizará únicamente el ARL obtenido bajo las condiciones indicadas

La tercera sección consta del botón “Start” para el inicio del cálculo, y “Close” para cerrar el programa.

La figura A2.5 muestra la versión modificada del optimizador del gráfico VDT2 que contiene los mismos parámetros anteriormente descritos más la inclusión del parámetro “In control Probability for ( $p_1+p_2$ )” el cual fija la proporción de veces que se desea utilizar todas las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control.



**Figura A2.5. Optimizador VDT2 con un límite de control y con restricción en la proporción de veces que se utilizan las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control.**

En este ejemplo de aplicación se presenta el mismo caso analizado en la figura A2.4; se observa el incremento del ARL fuera de control al forzar la proporción de veces que se desea utilizar las  $p$  variables cuando el proceso está bajo control, cuando no se realizaba esta restricción, el gráfico utilizaba el 54% de las veces todas las variables.