



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Aplicación del Principio de las Fuerzas Virtuales a la resolución estática de estructuras hiperestáticas

<b>Apellidos, nombre</b>	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
<b>Departamento</b>	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
<b>Centro</b>	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



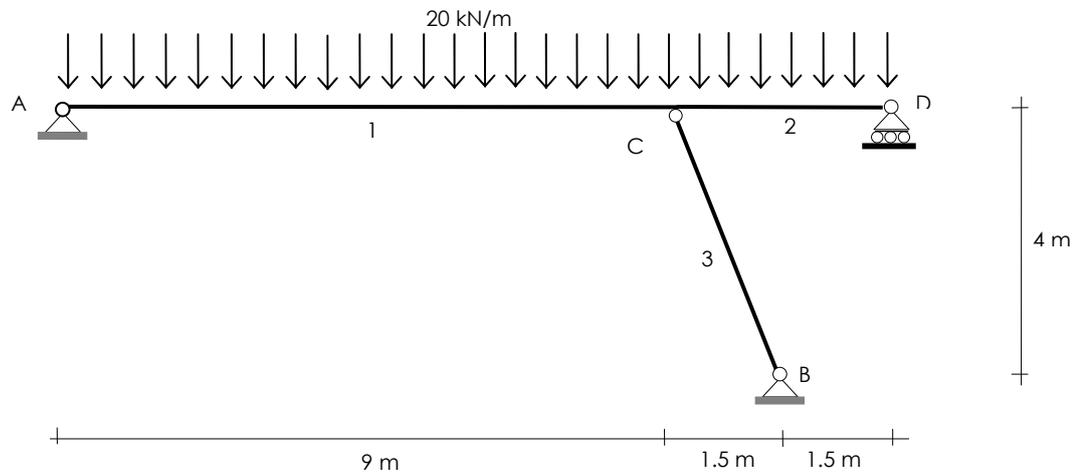


Figura1. Esquema de la estructura

El proceso de cálculo que se seguirá es el siguiente:

- Obtención del grado de indeterminación estática y selección de la(s) redundante(s).
- Planteamiento del equilibrio en la estructura real, obteniendo reacciones y leyes de esfuerzos en función de la(s) redundantes.
- Planteamiento del (de los) estado(s) virtual(es) de fuerzas, obteniendo reacciones y leyes de esfuerzos.
- Obtención de la(s) redundante(s) a partir de la(s) ecuación(es) de balance energético (ecuaciones de compatibilidad).
- A partir de la(s) redundante(s), obtención de todas las incógnitas estáticas y de las leyes de esfuerzos.

## 4.2 Obtención del grado de indeterminación estática y selección de redundante(s)

El grado de indeterminación estática de esta estructura puede deducirse muy fácilmente ya que, por ser el soporte biarticulado y no estar cargado perpendicularmente a su directriz, solamente trabajará a axil, transmitiendo una única componente de fuerza incógnita a la subestructura superior.

La estructura propuesta es, por tanto, hiperestática de grado 1, es decir, hay una única fuerza redundante. Una vez seleccionada ésta, habrá que plantear un único estado de fuerzas virtuales para determinar su valor.

Las fuerzas redundantes son fuerzas incógnitas externas o internas, independientes entre sí. En este caso concreto se elige como fuerza redundante la reacción inclinada en el apoyo B,  $R_B$ .

### 4.3 Planteamiento del equilibrio en la estructura real

Se plantea el equilibrio en la estructura real expresando todas las incógnitas estáticas así como las leyes de esfuerzos en función de la incógnita principal que es la fuerza redundante elegida (figura 2).

$$\sum F_x=0 \quad R_{xA} - 0.35 R_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y=0 \quad R_{yA} + R_{yD} + 0.936 R_B = 240 \quad (2)$$

$$\sum M_2=0 \quad R_{yD} \cdot 12 + 0.936 R_B \cdot 10.5 = 0.35 R_B \cdot 4 + 240 \cdot 6 \quad (3)$$

Proyectamos  $R_B$  en ejes globales:

$$R_{xB} = 0.35 R_B \quad R_{yB} = 0.936 R_B \quad (4)$$

Expresamos las reacciones en función de la redundante elegida:

$$R_{xA} = 0.35 R_B \quad (5)$$

$$R_{yA} = 120 - 0.233 R_B \quad (6)$$

$$R_{yD} = 120 - 0.702 R_B \quad (7)$$

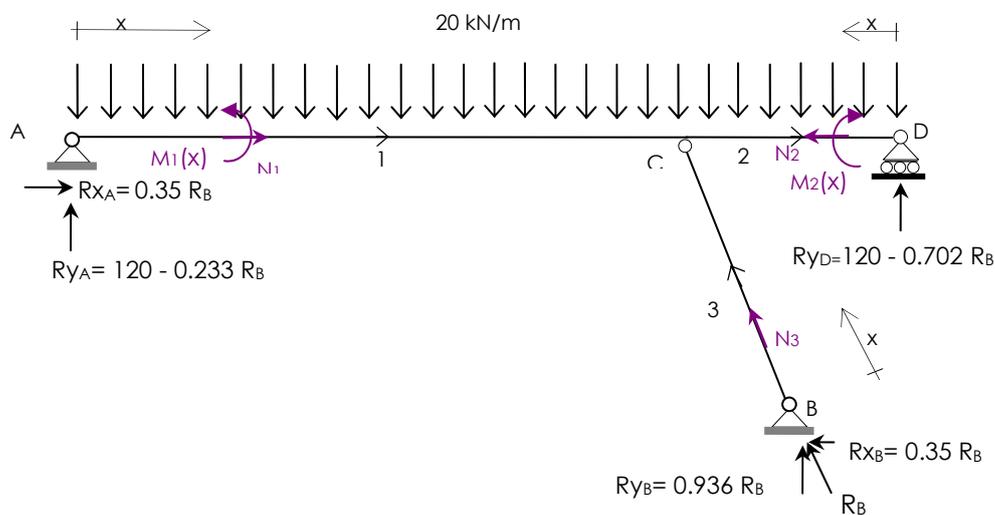


Figura 2. Esquema del equilibrio en la estructura real

Leyes de esfuerzos

$$\text{Barra 1: } N_1 = - R_{xA} = - 0.35 R_B \quad (8)$$

$$M_1(x) = R_{yA} x - 10 x^2 = (120 - 0.233 R_B) x - 10 x^2 \quad (9)$$

$$\text{Barra 2: } N_2 = 0 \quad (10)$$

$$M_2(x) = R_{yD} x - 10 x^2 = (120 - 0.702 R_B) x - 10 x^2 \quad (11)$$

$$\text{Barra 3: } N_3 = - R_B \quad (12)$$

#### 4.4 Planteamiento del estado virtual

En el estado virtual aplicaremos una fuerza virtual de valor unidad en el apoyo B, en la dirección de la redundante  $R_B$  (figura 3).

Para tener una configuración estática admisible, anularemos la redundante virtual coincidente con la redundante real, es decir  $\delta R_B (= 0)$ .

El estado virtual quedará resuelto estáticamente al aplicar las condiciones de equilibrio.

##### Equilibrio en el estado virtual

$$\Sigma F_x=0 \quad \boxed{\delta R_{xA} = 0.35}$$

$$\Sigma F_y=0 \quad \boxed{\delta R_{yA} = - 0.233}$$

$$\Sigma M=0 \quad \boxed{\delta R_{yD} = -0.702}$$

##### Leyes de esfuerzos en el estado virtual

$$\text{Barra 1: } \delta N_1 = - 0.35 \quad (13)$$

$$\delta M_1(x) = - 0.233 x \quad (14)$$

$$\text{Barra 2: } \delta N_2 = 0 \quad (15)$$

$$\delta M_2(x) = - 0.702 x \quad (16)$$

$$\text{Barra 3: } \delta N_3 = - 1 \quad (17)$$

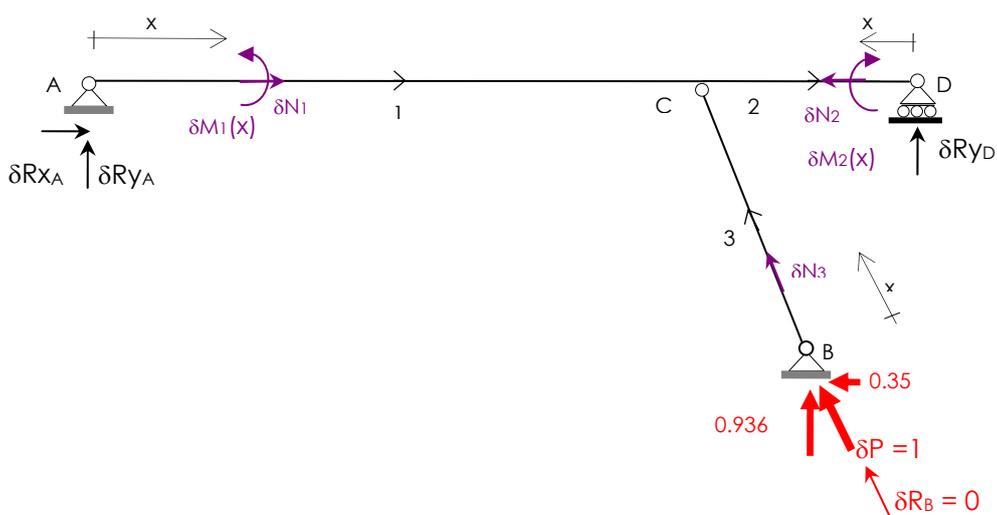


Figura 3. Esquema del equilibrio en la estructura virtual



## 4.5 Obtención de la fuerza redundante

Las fuerzas virtuales externas realizarán un trabajo virtual complementario ( $\delta W^*$ ) y las fuerzas internas un trabajo virtual complementario interno que expresaremos como energía virtual complementaria ( $\delta U^*$ ).

La ecuación de balance energético del principio de las Fuerzas Virtuales se expresa como:

$$\delta W^* = \delta U^* \quad (18)$$

- Trabajo virtual complementario (producido por las fuerzas exteriores virtuales y los desplazamientos reales de su punto de aplicación):

$$\delta W^* = 1 \cdot 0 = 0 \quad (19)$$

- Energía virtual complementaria (suma de la energía virtual complementaria por axil y por flector de las barras)

$$\begin{aligned} \delta U^* &= \delta U_{a1}^* + \delta U_{f1}^* + \delta U_{f2}^* + \delta U_{a3}^* = \frac{N_1}{EA_1} \delta N_1 L_1 + \int_0^{L_1} \frac{M_1(x)}{EI_1} \delta M_1(x) dx + \int_0^{L_2} \frac{M_2(x)}{EI_2} \delta M_2(x) dx + \\ &+ \frac{N_3}{EA_3} \delta N_3 L_3 = \frac{(-0.35 R_B) \cdot (-0.35) \cdot 9}{1640100} + \int_0^9 \frac{[(120 - 0.233 R_B) x - 10 x^2](-0.233 x)}{11961.6} dx + \\ &+ \int_0^3 \frac{[(120 - 0.702 R_B) x - 10 x^2](-0.702 x)}{11961.6} dx + \frac{(-R_B) \cdot (-1) \cdot 4.272}{714000} = 1.48 \cdot 10^{-3} R_B - 0.296 \end{aligned} \quad (20)$$

Siendo:

$\delta U_{a1}^*$ , la energía virtual de deformación por axil de la barra 1

$\delta U_{f1}^*$ , la energía virtual de deformación por flexión de la barra 1

$\delta U_{f2}^*$ , la energía virtual de deformación por flexión de la barra 2

$\delta U_{a3}^*$ , la energía virtual de deformación por axil de la barra 3

Las barras 2 y 3 no deforman por axil y flector respectivamente.

- Sustituyendo en la ecuación de balance energético se obtiene la fuerza redundante:

$$1.48 \cdot 10^{-3} R_B - 0.296 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R_B \approx 200 \text{ kN}}$$

## 4.6 Obtención de las incógnitas estáticas a partir de la fuerza redundante

A partir de la fuerza redundante se obtienen todas las incógnitas estáticas, así como las leyes de esfuerzos, sustituyendo en las ecuaciones (4), (5), (6) y (7), (8), (9), (10), (11) y (12):

El equilibrio final se representa en la figura 4.



Reacciones:

$$\begin{aligned} (4) \quad R_{XB} &= 0.35 R_B & \Rightarrow & \boxed{R_{XB} \approx 70 \text{ kN}} \\ R_{YB} &= 0.936 R_B & \Rightarrow & \boxed{R_{YB} \approx 187 \text{ kN}} \\ (5) \quad R_{XA} &= 0.35 R_B & \Rightarrow & \boxed{R_{XA} \approx 70 \text{ kN}} \\ (6) \quad R_{YA} &= 120 - 0.233 R_B & \Rightarrow & \boxed{R_{YA} \approx 73.4 \text{ kN}} \\ (7) \quad R_{YD} &= 120 - 0.702 R_B & \Rightarrow & \boxed{R_{YD} \approx -20.4 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Leyes de esfuerzos:

$$\begin{aligned} (8) \quad \text{Barra 1:} \quad N_1 &= -R_{XA} = -0.35 R_B = -70 \\ (9) \quad M_1(x) &= R_{YA} x - 10 x^2 = (120 - 0.233 R_B) x - 10 x^2 = 73.4 x - 10 x^2 \\ (10) \quad \text{Barra 2:} \quad N_2 &= 0 \\ (11) \quad M_2(x) &= R_{YD} x - 10 x^2 = (120 - 0.702 R_B) x - 10 x^2 = -20.4 x - 10 x^2 \\ (12) \quad \text{Barra 3:} \quad N_3 &= -R_B = -200 \end{aligned}$$

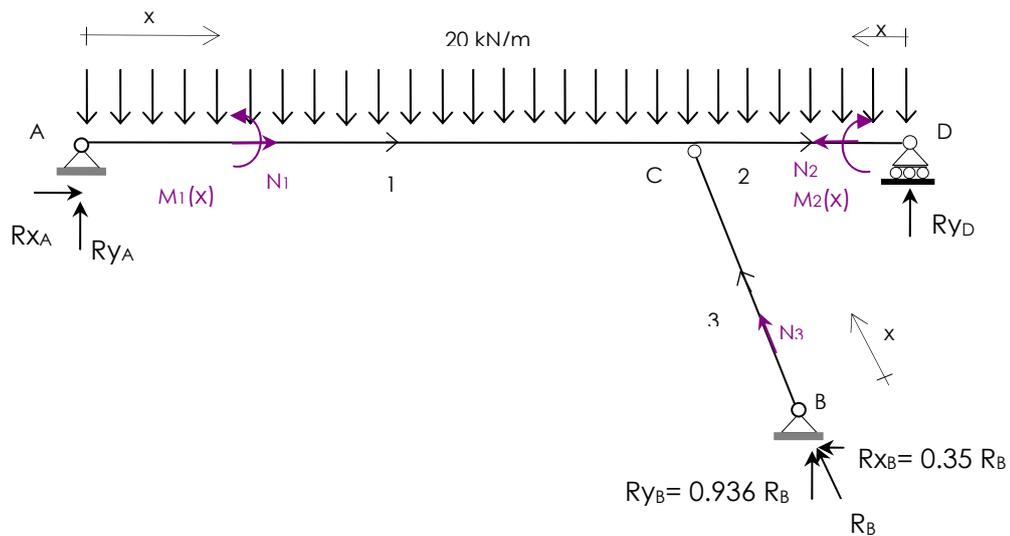


Figura 4. Equilibrio final de la estructura real

## 5 Cierre

A lo largo de este tema se ha resuelto estáticamente una estructura hiperestática de grado 1 mediante el Principio de las Fuerzas virtuales.

Como ejercicio de aplicación se propone resolver estáticamente la estructura de la figura 5.

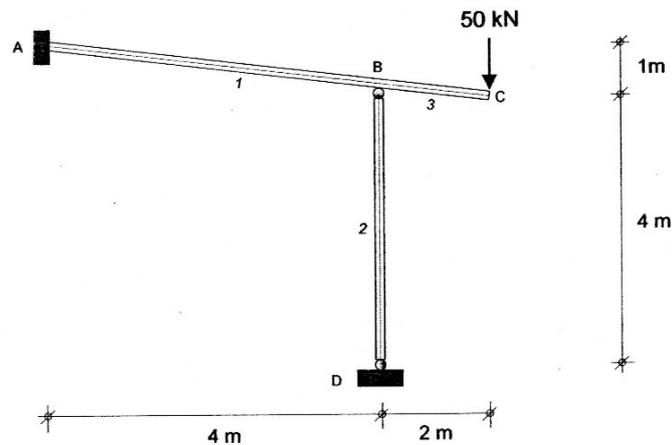


Figura 5. Estructura propuesta

Datos de las barras:    barras 1 y 3: IPE 300:     $A = 53.8 \text{ cm}^2$                      $I = 8360 \text{ cm}^4$   
                              barra 2:  $\Phi 100.5$ :     $A = 14.92 \text{ cm}^2$                      $I = 168 \text{ cm}^4$   
                               $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

(Resultado:  $R_{yA} = -33.63 \text{ kN}$ ,  $R_{MA} = -46.52 \text{ kNm}$ ,  $R_{yD} = 83.63 \text{ kN}$ )

## 6 Bibliografía

### 6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

### 6.2 Figuras: Autora de las figuras: Luisa Basset

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Esquema del equilibrio en la estructura real

Figura 3. Esquema del equilibrio en la estructura virtual

Figura 4. Equilibrio final en la estructura real

Figura 5. Estructura propuesta