Modelos continuos de crecimiento: del modelo exponencial al modelo logístico

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

Resumen de las ideas clave

El objetivo de este trabajo es introducir diferentes formulaciones del modelo continuo de crecimiento exponencial, también denominado modelo de Malthus. El modelo está formulado mediante una ecuación diferencial ordinaria. La presentación del modelo está basada en un razonamiento discreto con paso al límite que permite interpretar adecuadamente los parámetros que aparecen involucrados. Después de presentar el modelo, se obtendrá su solución así como sus principales propiedades, tales como la monotonía, curvatura y comportamiento asintótico. A lo largo de la exposición, se perseguirá relacionar los resultados teóricos obtenidos con la interpretación práctica de los mismos. Posteriormente se aplicará el modelo de crecimiento exponencial para ajustar los datos del Índice de Precios al Consumo (IPC) y poder utilizarlos como un primer modelo para la predicción de este importante índice económico. El trabajo finalizará realizando una crítica al modelo exponencial que motivará la introducción del modelo de crecimiento logístico o de Verhulst, el cual será objeto de estudio en otro trabajo.

1 Introducción

El estudio de modelos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) resulta una parte fundamental de la formación matemática a nivel universitario, y en particular, en los estudios con intensificación en economía donde el carácter dinámico de las variables económicas hace muy apropiada la utilización de esta herramienta matemática. En este trabajo se estudiará un modelo sencillo, denominado modelo exponencial o de Malthus, para introducir al lector en la modelización dinámica del crecimiento de poblaciones. Como veremos en el desarrollo del trabajo, este modelo retiene conceptualmente muchas ideas fértiles para el estudio posterior de modelos más complejos, lo que hace que sea un ejemplo muy adecuado para iniciarse al estudio de otros modelos continuos más complejos. En lugar de enunciar el modelo directamente a través de la e.d.o. de tipo lineal con coeficientes constantes que lo determina y, con objeto de abundar en la interpretación de los parámetros que aparecen en su formulación, llegaremos a dicha e.d.o. mediante un paso al límite basado en un simple razonamiento de balance de los flujos de las poblaciones que determinan las variaciones de la población. Posteriormente, utilizando resultados elementales sobre teoría de e.d.o.'s calcularemos la solución del modelo y exploraremos sus principales propiedades tales como la monotonía, curvatura y comportamiento a largo plazo. Para ilustrar la aplicabilidad del modelo en contextos diferentes del estudio de poblaciones, lo aplicaremos para ajustar y predecir un importante indicador económico: el IPC (Índice de Precios al Consumo). Finalmente, realizaremos una crítica del modelo que nos conducirá a la introducción de un modelo más complejo basado en una e.d.o. de tipo no lineal, denominado modelo logístico, el cual se estudiará en profundidad en otro trabajo.

2 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer el valor formativo de los modelos dinámicos basados en e.d.o.'s así como su potencialidad y limitaciones para estudiar la compleja realidad económica, particularizando esta crítica al modelo exponencial de crecimiento de poblaciones y la motivación del estudio de un modelo más complejo como es el modelo logístico.
- Estudiar los aspectos cualitativos y cuantitativos de modelos formulados a través de e.d.o.'s y discutir las propiedades que se infieren a partir, primero de su formulación y después de su solución.
- Iniciarse en la aplicación de los modelos basados en e.d.o.'s a datos reales, incluyendo la calibración de parámetros.
- Comprender cómo se plantea un modelo basado en una e.d.o. a partir de un razonamiento por paso al límite y valorar que dicho enfoque permite interpretar mejor los parámetros del modelo.

3 El modelo continuo de crecimiento exponencial o de Malthus

3.1 Planteamiento e interpretación del modelo sin considerar la migración

En este apartado vamos a introducir un modelo continuo basado en una e.d.o. para explicar el crecimiento de poblaciones. Advertimos al lector del error común que supone pensar que este tipo de modelos se refieren únicamente al crecimiento de especies biológicas, ya que, los argumentos de su construcción son extrapolables a otros muchos contextos, como puede ser el crecimiento del número de móviles en una determinada región, el crecimiento del número de artículos científicos publicados en un determinado área de conocimiento, la evolución de índices económicos como puede ser el Índice de Precios al Consumo (IPC), etc. Sin embargo, pensar en un primer momento en el contexto biológico del crecimiento de poblaciones facilita la comprensión del desarrollo durante la exposición. El modelo que se presentará constituye una primera aproximación al estudio de modelos de crecimiento, y como tal, ha sido un punto de partida de otros modelos continuos más complejos. El modelo que estudiaremos fue propuesto por el economista y demógrafo Thomas R. Malthus en el siglo XIX, aunque con otra formalización del lenguaje (véase referencia [1] para una traducción al español del trabajo original).

El modelo de crecimiento de Malthus (también denominado modelo de crecimiento exponencial) está formulado a través de un problema de valor inicial (p.v.i.) basado en una e.d.o. de primer orden lineal homogénea a coeficientes constantes (véase Ecuación 1).

$$\left.\begin{array}{lll} p'(t) & = & \alpha p(t), \quad t > t_0 \geq 0 \\ p(t_0) & = & p_0 \end{array}\right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad y \quad p_0 > 0$$

Ecuación 1. Problema de valor inicial (p.v.i.) que define el modelo exponencial *o de Malthus.*

En dicho modelo las variables son:

- $p(t)$: población en el instante t.
- p_0 : población inicial en el instante t_0.
- α constante de crecimiento relativo de la población.

El modelo debe ser interpretado haciendo uso del significado físico de la derivada. Obsérvese que la e.d.o. nos indica que la variación instantánea de la población en el instante t, dada por $p'(t)$, es directamente proporcional (siendo α la constante proporcionalidad) a la población $p(t)$ que hay en dicho instante. La idea básica que subyace a esta propuesta de modelización es que, cuanto mayor es el número de individuos, i.e., mayor es $p(t)$, mayor es la variación (dada por $p'(t)$) que puede sufrir la población. Obviamente, esta afirmación requiere de numerosos matices. En primer lugar, la variación de la población puede ser creciente o decreciente y ello dependerá de la diferencia entre el número de individuos que nacen y mueren. Intuitivamente, la constante α, que puede ser tanto positiva como negativa, es la que determina el crecimiento o decrecimiento de la población. Si aislamos α de la e.d.o. entenderemos mejor el rol que desempeña en el modelo, así como la denominación anterior de constante de crecimiento relativo. Obsérvese que $\alpha = p'(t)/p(t)$. Como el denominador de esta fracción es siempre positivo (por representar una población), el signo de α está determinado por el signo de $p'(t)$:

- Si $p'(t) > 0 \Rightarrow \alpha > 0$: En efecto, si $p'(t) > 0$ entonces sabemos que la población crece y por la definición de α se tiene: $\alpha > 0$.
- Si $p'(t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$: En efecto, si $p'(t) = 0$ entonces sabemos que la población permanece constante e igual al valor inicial p_0 y por la definición de α se tiene: $\alpha = 0$.
- Si $p'(t) < 0 \Rightarrow \alpha < 0$: En efecto, si $p'(t) < 0$ entonces sabemos que la población decrece y por la definición de α se tiene: $\alpha < 0$.

Hasta ahora hemos enunciado el modelo exponencial e interpretado los parámetros que lo definen. A continuación, estableceremos la e.d.o. que determina el modelo a partir de un razonamiento basado en un sencillo balance de masas y un paso al límite. De esta forma se pretende arrojar más luz acerca de la interpretación de la constante α relativa a la variación de la población. Para seguir mejor la exposición es conveniente tener presente la representación gráfica dada en la Figura 1.

Fijado un instante temporal arbitrario t, consideremos un intervalo de tiempo de longitud Δt. Queda así determinado el intervalo $[t, t+\Delta t]$. Denotaremos por $p(t)$ y $p(t+\Delta t)$ a los valores de la población en sus extremos. Vamos a estudiar la variación de la población en ese intervalo temporal, la cual está dada por

$\Delta p(t) = p(t+\Delta t) - p(t)$, como si de un balance de masas se tratara, asumiendo que las variaciones que se produzcan se deberán a los nacimientos y defunciones que tengan lugar en dicho intervalo. Obsérvese que la variaciones también podrían deberse a los flujos de emigración e inmigración, pero simplificamos la exposición omitiendo la existencia de flujos migratorios. Posteriormente, veremos que el modelo también puede plantearse siguiendo un razonamiento análogo si se considera la inmigración y emigración de los individuos. Si suponemos que las tasas de nacimiento y muerte son constantes, podremos denotarlas por b y d, respectivamente. Es natural suponer que los nacimientos (defunciones) que tienen lugar en el intervalo $\left[t, t+\Delta t\right]$ son directamente proporcionales a b y d, respectivamente, así como a la longitud de dicho intervalo. Del razonamiento anterior se infiere la relación dada en la Ecuación 2. De dicha relación también se tiene que el signo del parámetro α puede ser positivo (cuando la tasa de nacimientos sea mayor que la de defunciones: $b > d$) o negativo (cuando la tasa de nacimientos sea menor que la de defunciones: $b < d$). Se deduce por tanto de la exposición que α está ligado a la tasa de variación de la población.

Figura 1. Planteamiento del modelo exponencial.

$$\Delta p(t) = p(t+\Delta t) - p(t) = \underbrace{bp(t)\Delta t}_{\text{nacimientos}} - \underbrace{dp(t)\Delta t}_{\text{defunciones}} = \underbrace{(b-d)}_{\alpha} p(t)\Delta t = \alpha p(t)\Delta t$$

$$\frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \alpha p(t) \Rightarrow \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \alpha p(t) \Rightarrow p'(t) = \alpha p(t)$$

Ecuación 2. Variación de la población en el intervalo $\left[t, t+\Delta t\right]$ según el modelo exponencial *o de Malthus.*

Aunque de momento no hemos calculado la solución $p(t)$ del modelo exponencial (esto se hará en el siguiente apartado), es posible, distinguiendo varios casos en función del signo del parámetro α y de razonamientos sencillos, deducir propiedades interesantes de la solución. Concretamente, a continuación inferiremos a partir de la e.d.o. del modelo (véase Ec.1) la monotonía y la curvatura de $p(t)$.

- Si $\alpha > 0$: Como por definición $p(t) > 0$ (por representar una población), de la e.d.o. se tiene que: $p'(t) = \alpha p(t) > 0$, lo que nos indica que $p(t)$ es creciente. Si derivamos respecto de t ambos miembros de la e.d.o., se deduce que: $p''(t) = \alpha p'(t) > 0$, lo cual nos informa de que $p(t)$ es convexa. Resumiendo cuando la tasa de crecimiento relativo es positiva, sabemos (sin resolver el p.v.i. que determina la solución del modelo) que la población tendrá un crecimiento rápido o convexo.
- Si $\alpha < 0$: Como por definición $p(t) > 0$ (por representar una población), de la e.d.o. se tiene que: $p'(t) = \alpha p(t) < 0$, lo que nos indica que $p(t)$ es decreciente. Si derivamos respecto de t ambos miembros de la e.d.o., se deduce que: $p''(t) = \alpha p'(t) > 0$, lo cual nos informa de que $p(t)$ es de nuevo convexa. Resumiendo cuando la tasa de crecimiento relativo es negativa,

sabemos (sin resolver el p.v.i. que determina la solución del modelo) que la población tendrá un decrecimiento lento o convexo.

No hemos analizado el caso en que $\alpha = 0$, ya que, como hemos visto anteriormente ello conduce al caso trivial en que la solución es constante.

3.2 Solución del modelo y estudio asintótico

Vamos ahora a calcular la solución $p(t)$ del modelo dado en la Ec.1 y a estudiar a partir de ella, el comportamiento de $p(t)$ a largo plazo, es decir, cuando $t \to \infty$. Para ello requeriremos de la identificación de los coeficientes del modelo dado en la Ec.1, con los de un problema general de valor inicial basado en una e.d.o. lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden (véase Ecuación 3): $a = \alpha$ y $b = 0$. Esto nos permite obtener explícitamente la dinámica del tipo de interés (véase Ecuación 4).

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & a\,x(t) + b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{a(t-t_0)}\left(x_0 + \dfrac{b}{a}\right) - \dfrac{b}{a} & \text{si} \quad a \neq 0, \\ b(t - t_0) + x_0 & \text{si} \quad a = 0. \end{cases}$$

Ecuación 3. Solución de un p.v.i. general basado en una e.d.o. lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden.

$$p(t) = \begin{cases} p_0 e^{\alpha(t-t_0)} & \text{si} \quad \alpha \neq 0, \\ p_0 & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Ecuación 4. Dinámica de la población del modelo de crecimiento dado en la Ec.1.

Esta expresión de $p(t)$ corrobora las conclusiones que hemos obtenido anteriormente (véase Ec.5).

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} p'(t) = \alpha p_0 e^{\alpha(t-t_0)} > 0 \Rightarrow p(t) \text{ es creciente} \\ p''(t) = \alpha^2 p_0 e^{\alpha(t-t_0)} > 0 \Rightarrow p(t) \text{ es convexa} \end{cases} \\ \alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} p'(t) = \alpha p_0 e^{\alpha(t-t_0)} < 0 \Rightarrow p(t) \text{ es decreciente} \\ p''(t) = \alpha^2 p_0 e^{\alpha(t-t_0)} > 0 \Rightarrow p(t) \text{ es convexa} \end{cases} \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} p'(t) = 0 \Rightarrow p(t) \text{ es constante (creciente y decreciente)} \\ p''(t) = 0 \Rightarrow p(t) \text{ es constante (cóncava y convexa)} \end{cases}$$

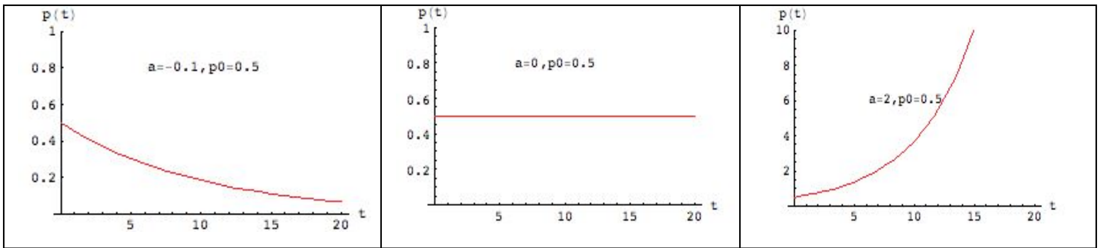
Ecuación 5. Monotonía y curvatura de la población del modelo de crecimiento dado en la Ec.1.

Observemos que tomando límites en la expresión de $p(t)$ obtenida en la Ec.4 se deduce que si $\alpha \neq 0$, la población tenderá a crecer de forma geométrica o exponencial si $\alpha > 0$, lo que conducirá a una explosión a largo plazo, mientras que la población desaparecerá si $\alpha < 0$, lo que conducirá a una extinción a largo plazo. El caso $\alpha = 0$ conduce al escenario en que la población permanece en equilibrio en todo instante, siendo el valor de $p(t)$ el inicial, i.e., $p(t)=p_0$ (véase Ec.6).

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha>0 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha<0 \\ p_0 & \text{si} \quad \alpha=0 \end{cases}$$

Ecuación 6. Comportamiento asintótico o a largo plazo de $p(t)$.

En la Figura 2 se han representado gráficamente las diferentes situaciones del comportamiento de la solución del modelo para valores específicos de los parámetros.



Extinción	Invariabilidad	Explosión

Figura 2. Representación gráfica de los tres tipos de comportamiento de la solución del modelo de crecimiento exponencial *para diferentes valores de los parámetros:* $\alpha \in \{-0.1, 0, 2\}$ y $p_0 = 0.5$.

3.3 Aplicación del modelo: calibración de parámetros

En este apartado vamos a aplicar el modelo de crecimiento exponencial para modelizar el Índice de Precios al Consumo (IPC) durante un cierto período. Los datos han sido extraídos del Instituto Nacional de Estadística (INE) y corresponden al período febrero de 2010 hasta enero de 2011 con base 2011 (véase [2]).

Fecha	Febrero 2010	Marzo 2010	Abril 2010	Mayo 2010
IPC	106.484	107.273	108.416	108.657
Fecha	Junio 2010	Julio 2010	Agosto 2010	Septiembre 2010
IPC	108.851	108.363	108.637	108.712
Fecha	Octubre 2010	Noviembre 2010	Diciembre 2010	Enero 2011
IPC	109.705	110.3	110.979	110.166

Tabla 1. Datos del IPC período Febrero 2010 a Enero 2011 con base 2011.

Fuente: http://www.ine.es

Asumiendo que la dinámica del IPC considerado en la Tabla 1 sigue el modelo descrito en el p.v.i. dado en la Ec.1, deseamos determinar los valores de los parámetros de dicho modelo. En nuestro caso, como a continuación argumentaremos, reduciremos esta calibración al ajuste únicamente del parámetro α. Se trata de determinar el valor numérico de $\alpha \neq 0$ de modo que $p(t)$

dada en la Ec.4 se "ajuste lo mejor posible" a las observaciones del IPC mostradas en la Tabla 1. Obsérvese que en nuestro contexto y a partir de la Tabla 1, $p_0 = 106.484$, además, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $t_0 = 0$ que corresponde al inicio (febrero de 2010). Se hace por tanto necesario indicar qué significa en nuestro contexto la expresión: "que ajuste lo mejor posible". Para ello, haciendo uso del concepto de ajuste estadístico en el sentido de los mínimos cuadrados (véase [3]), entenderemos por dicha expresión que la suma de las diferencias al cuadrado entre las observaciones p_i, $0 \le i \le 11$, de los valores del IPC dados en la Tabla 1 y los valores proporcionados por la solución del modelo (la cual está dada en la Ec.4) sean lo más pequeñas posibles. Esta función está explicitada en la Ec.7. En ella, se identifica el índice $i: 0 \le i \le 11$ con cada uno de los 12 valores mensuales del IPC dados en la Tabla 1. Así, $i = 0$ corresponde al IPC del mes de febrero de 2010, $i = 1$ corresponde al IPC del mes de marzo de 2010, y así sucesivamente hasta $i = 11$ que corresponde al IPC del mes de enero de 2011. Nótese que el primer sumando de dicha función, que corresponde a $i = 0$, es nulo, ya que, la condición inicial del p.v.i., i.e., el valor de $p(t)$ en t_0 dado en la Ec.1 coincide con el primer valor del IPC.

$$e(\alpha) = \sum_{i=0}^{11} \left(p_i - p_0 e^{\alpha \times i} \right)^2$$

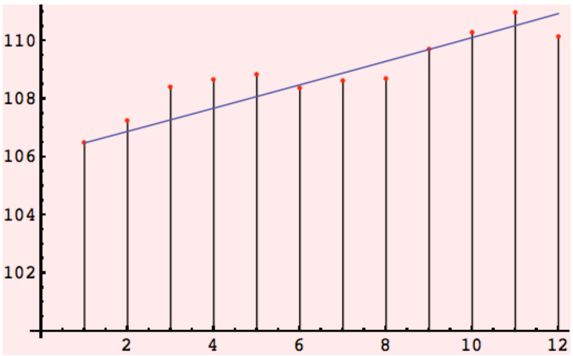
Ecuación 7. Función de error cuadrático a minimizar.

Utilizando técnicas apropiadas de optimización numérica de funciones podemos calcular el valor del parámetro α que minimiza la función de error $e(\alpha)$ dada en la Ec.7. Este tipo de técnicas están implementadas en diferentes programas. Utilizando el comando `NMinimize` del software Mathematica® (véase [4]) el valor que se obtiene es: $\hat{\alpha} = 0.0446935$ que proporciona el siguiente valor del error: $e(\hat{\alpha}) = 4.24488$. Por lo tanto, y de acuerdo al modelo y a su ajuste a los datos, la Ec. 4 indica la fórmula de ajuste buscada.

$$p(t) = 106.484\, e^{0.0446935 t}$$

Ecuación 8. Modelo ajustado a los datos del IPC dados en la Tabla 1.

En la Gráfica 1 se ha representado el ajuste (línea continua) y los datos del IPC (puntos). Aunque la función de ajuste es exponencial, como el valor obtenido del parámetro α ha sido muy pequeño, aparenta ser una recta. La función $p(t)$ dada en la Ec. 8 nos permite hacer predicciones. Por ejemplo, según el modelo estimado la variación estimada del IPC entre febrero de 2010 y febrero de 2012 ha sido del 9.35038% (véase Ecuación 9). Por lo tanto, un artículo que en febrero de 2010 valía 100 euros, según el modelo en febrero de 2012 valía 109.35 euros.



Gráfica 1. Representación del ajuste del modelo a los datos del IPC de la Tabla 1.

$$\text{Variación del IPC 02/2010 a 02/2012} = \frac{p(24)-p(0)}{p(0)} = 9.35038, \quad p(t)=106.484\,e^{0.0446935t}$$

Ecuación 9. Modelo ajustado a los datos del IPC dados en la Tabla 1.

4 Introduciendo en el modelo la migración

Anteriormente hemos señalado que al plantear el modelo de crecimiento exponencial podríamos haber considerado en la variación de la población la influencia debida no solo a los nacimientos y defunciones, sino también a los movimientos migratorios. Asumiendo que tanto las emigraciones como las inmigraciones son constantes y denotando sus tasas por e e i, respectivamente, un razonamiento análogo al mostrado en la Ec.2 nos conduce a la relación mostrado en Ecuación 10. Es conveniente observar, como diferencia conceptual respecto del análisis hecho en la Ec.2, que los movimientos migratorios de emigración se asumen proporcionales a la población $p(t)$ existente en el instante t, mientras que los flujos de inmigración son independientes.

$$\Delta p(t) = p(t+\Delta t) - p(t) = \underbrace{bp(t)\Delta t}_{\text{nacimientos}} - \underbrace{dp(t)\Delta t}_{\text{defunciones}} - \underbrace{ep(t)\Delta t}_{\text{emigrantes}} + \underbrace{i\Delta t}_{\text{inmigrantes}} = \underbrace{(b-d-e)}_{\alpha}p(t)\Delta t + \underbrace{i}_{\beta}\Delta t = \alpha p(t)\Delta t + \beta\Delta t$$

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} = \alpha p(t) + \beta \Rightarrow \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to\infty} \alpha p(t) + \beta \Rightarrow p'(t) = \alpha p(t) + \beta$$

Ecuación 10. Variación de la población en el intervalo $[t, t+\Delta t]$ según el modelo

exponencial *o de Malthus con migraciones.*

La solución del modelo exponencial con migración se realiza de nuevo identificando los coeficientes del modelo obtenido: $p'(t) = \alpha p(t) + \beta$, con los del modelo general dado en la Ec.3: $a = \alpha$ y $b = \beta$. No explicitamos ahora esta expresión por obtenerse de forma directa y porque no entraremos en hacer un análisis detallado de la misma como sí se ha hecho con modelo de crecimiento sin migración. En cualquier caso obsérvese que se trata simplemente de renombrar los parámetros del modelo matemático general.

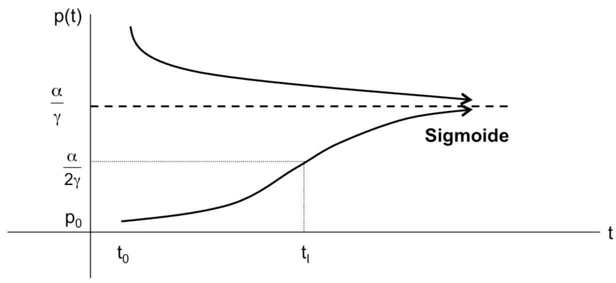
5 Del modelo exponencial de Malthus al modelo logístico de Verhulst

Hemos visto que cuando en el modelo exponencial el parámetro α es positivo, se predice un comportamiento explosivo o de crecimiento ilimitado. Obviamente esta predicción no es verosímil, pues no existe ninguna población que pueda crecer de forma ilimitada, ya que, los recursos siempre limitan el crecimiento, al igual que el aforo o capacidad del medio. Este inconveniente motivó históricamente que se formulasen otros modelos que superasen este inconveniente. Fue el matemático belga Pierre François Verhulst quien años después de Malthus introdujo un término de freno no lineal $-\gamma\left(p(t)\right)^2$ siendo $\gamma > 0$ y probó que el nuevo modelo explicaba satisfactoriamente la evolución de numerosas poblaciones, cumpliendo además que no explotaba a largo plazo. El modelo resultante puede verse en la Ecuación 11. Obsérvese que en la formulación de dicho modelo se asume $\alpha > 0$, ya que le modelo logístico se plantea en el en caso en que el modelo exponencial falla.

$$\left.\begin{array}{rcl} p'(t) & = & \alpha p(t) - \gamma\left(p(t)\right)^2, \quad t > t_0 \geq 0 \\ p(t_0) & = & p_0 \end{array}\right\}, \quad \alpha,\gamma > 0 \quad \text{y} \quad p_0 > 0$$

Ecuación 11. Problema de valor inicial (p.v.i.) que define el modelo logístico o de Verhulst.

En un trabajo que está en preparación se estudiará en detalle el modelo logístico y se demostrará que su solución tiene un comportamiento como el mostrado en la Figura 3, el cual depende del valor de la condición inicial. Obsérvese que el modelo logístico tiene un comportamiento asintótico incondicionalmente estable.



$$t_I = t_0 + \ln\left(\frac{\alpha - \gamma p_0}{\gamma p_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Figura 3. Representación gráfica de la solución del modelo logístico de Verhulst. Obsérvese que en el caso en que la condición inicial es menor que α / γ la solución tiene un punto de inflexión en el punto t_I especificado.

6 Cierre

La búsqueda de puentes formativos que conecten diferentes áreas de conocimiento en la formación universitaria entendemos que es un compromiso docente que debemos asumir en el marco de la docencia universitaria actual. En este trabajo, se ha tratado de materializar esta idea conectando las áreas de Matemáticas y Economía, a través del estudio de un modelo de crecimiento de poblaciones basado en una ecuación diferencial ordinaria.

7 Bibliografía

[1] Malthus, T.R.: “Ensayo sobre el principio de la población”, Madrid 1846.

[2] http://www.ine.es

[3] Gujarati, D.N.: “Econometría”, 4ª edición, McGraw Hill, 2003.

[4] Wolfram Mathematica 9. Software disponible en: http://www.wolfram.com/products/mathematica