Introducción a los modelos dinámicos continuos de tipos de interés con reversión a la media

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

El estudio de modelos económicos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) constituye un contenido básico en la formación matemática con intensificación en economía y sus aplicaciones. En este trabajo mostramos un modelo sencillo, pero creemos con un gran valor formativo, basado en una e.d.o. lineal completa a coeficientes constantes para estudiar la evolución de los tipos de interés. El modelo asume implícitamente en su formulación que el comportamiento de esta magnitud económica es estable a largo plazo, es decir, que "regresa" a un valor medio. En el trabajo de discute, en un primer paso, la interpretación del modelo y, en segundo lugar, se obtiene explícitamente la solución. Posteriormente, se muestra cómo aplicar el modelo a un caso práctico donde se requiere calibrar los parámetros del modelo. Esta aplicación se realiza sobre el índice europeo denominado EONIA a modo de ilustración del desarrollo teórico previo. El trabajo intenta aportar una reflexión con carácter formativo acerca de la modelización mediante e.d.o.'s y su puesta en práctica, analizando tanto los aspectos cualitativos como cuantitativos del proceso de modelización y realizando una crítica constructiva, desde el punto de vista formativo, del valor de este modelo.

2 Introducción

El estudio de modelos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s) resulta una parte fundamental de la formación matemática a nivel universitario, y en particular, en los estudios con intensificación en economía donde el carácter dinámico de las variables económicas hace muy apropiada la utilización de esta herramienta matemática. En este trabajo se va a estudiar la modelización dinámica de los tipos de interés mediante una e.d.o. de tipo lineal no homogénea o completa. En primer lugar formularemos el modelo y analizaremos el significado del mismo a partir de la interpretación de la e.d.o. en la cual se basa llegando a obtener, sin resolver la e.d.o., algunas de las propiedades de su solución. Con ello se pretende mostrar al lector la posibilidad de extraer información cualitativa del modelo a partir de su propio planteamiento y proporcionar mayor coherencia inicial al modelo abstracto formulado a través de la e.d.o. Posteriormente, se obtendrá la solución explícita del modelo y se discutirán desde el punto de vista económico su significado. El estudio se completa con una aplicación práctica del modelo a datos reales de tipos de interés del mercado europeo interbancario a través del índice EONIA.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer el valor formativo de los modelos dinámicos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Reconocer la potencialidad y también las limitaciones de los modelos matemáticos para estudiar la compleja realidad económica.

- Estudiar los aspectos cualitativos y cuantitativos de modelos formulados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias y discutir las propiedades que se infieren a partir, primero de su formulación y después de su solución.
- Iniciarse en la aplicación de los modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias a datos reales, lo que incluye la calibración de parámetros y la discusión de la respuesta del modelo frente a los datos reales.

4 Un modelo dinámico determinístico de tipos de interés

4.1 Planteamiento e interpretación del modelo

El tipo de interés es una magnitud económica de gran relevancia, pues de ella dependen una gran número de magnitudes que intervienen directamente en el estado general de la economía de un país. Las variaciones de los tipos de interés ofrecidos por el dinero en bancos y otras entidades financieras afectan directamente a los mercados bursátiles. Así, por ejemplo, cuando los tipos de interés suben, se producen bajadas en las cotizaciones de las acciones en la bolsa. Estos movimientos decrecientes pueden explicarse por diferentes razones. En primer lugar, los altos tipos de interés elevan las cargas financieras de las empresas y, por tanto, empeoran los resultados económicos, lo que provoca un descenso de los dividendos repartidos y de las cotizaciones. Asimismo, cuando suben los tipos de interés aumenta la rentabilidad de las inversiones en renta fija, como las obligaciones, la deuda pública o los bonos, por ejemplo. Esto provoca un desplazamiento de los inversores hacia los títulos de renta fija, en detrimento de la renta variable, que siempre implica un mayor riesgo. En tercer lugar, los tipos de interés elevados hacen disminuir el consumo al encarecerse la financiación de las ventas a crédito. Esto provoca una disminución de las ventas y, por tanto, un empeoramiento de los resultados de las empresas, lo que afecta a las cotizaciones de las acciones. Desde este simple razonamiento podemos justificar la importancia del estudio y búsqueda de modelos apropiados para modelizar la evolución de los tipos de interés.

Aunque los tipos de interés fluctúan con el paso del tiempo, son muchos los tipos de interés que se negocian en el mercado cuyas series históricas presentan una cierta estabilización, lo que ha motivado la propuesta de modelos de tipos de interés que tienen un comportamiento asintótico estable. Este tipo de propuestas modelizadoras se apoyan en el hecho empírico de que cuando existen valores altos (bajos) del tipo de interés, los propios mecanismos que rigen los mercados tienden a adoptar decisiones que provocan una caída (subida) de los tipos para que las empresas se financien más fácilmente (los mercados especulativos como las bolsas financieras se dinamicen). De este modo, y por indicarlo de forma coloquial, las *fuerzas ocultas* de la economía actúan de forma que estabilizan o equilibran (al menos por períodos de longitud variable) la dinámica del tipo de interés. A continuación, vamos a presentar un modelo de tipo de interés basado en una e.d.o. cuyo comportamiento a largo plazo (asintótico) tiende (o regresa) a un valor medio en el cual se estabiliza. La descripción de este tipo de comportamiento motiva que comúnmente se denomine “modelo de tipos de interés con reversión o regresión a la media”.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Para introducir el modelo denotaremos por $r(t)$ el tipo de interés en el instante t y, r_0 el valor del tipo de interés que se ha publicado en el instante inicial del estudio, y que denotaremos por t_0, es decir: $r(t_0)=r_0$. El valor límite hacia el cual se asume que tiende a largo plazo $r(t)$ se denotará por r_e y, atendiendo al modelo, la velocidad a la que el tipo de interés se acerca a este valor de estabilización (representado por la derivada $r'(t)$), asumiremos que es directamente proporcional a la desviación del tipo de interés observado en cada instante respecto del valor de estabilización, esto es, en notación matemática: $r(t)-r_e$. La constante de proporcionalidad indica la velocidad a la cual $r(t)$ se acerca al valor de estabilización r_e. Esta exposición del modelo se traduce a lenguaje matemático mediante el problema de valor inicial (p.v.i.) dado en la Ecuación 1.

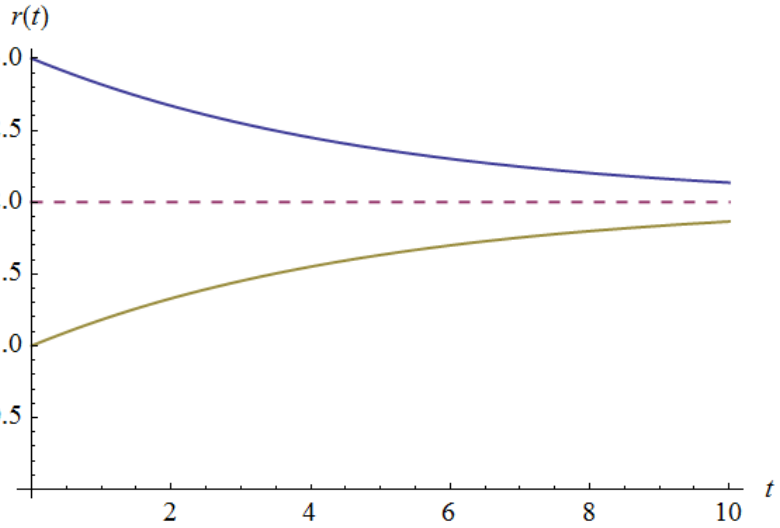
$$\left.\begin{array}{lcl} r'(t) & = & \alpha\left(r_e-r(t)\right),\quad t>t_0\ge 0 \\ r(t_0) & = & r_0 \end{array}\right\},\quad \alpha, r_0, r_e>0$$

Ecuación 1. Problema de valor inicial (p.v.i.) de la dinámica del tipo de interés con reversión o regresión a la media.

Antes de pasar a resolver este p.v.i. y estudiar el comportamiento de la solución a largo plazo, es decir, cuando $t\to\infty$, vamos a analizar la dinámica del modelo sin resolverlo. Para ello observemos a partir de la e.d.o. dada en la Ecuación 1 que:

- Fijado $t>t_0$ tal que $r(t)>r_e$, entonces como $\alpha>0$ se tiene que el término de la derecha de la e.d.o. es negativo: $\alpha\left(r_e-r(t)\right)<0$. De aquí se infiere que el término de la izquierda de la e.d.o. es también negativo: $r'(t)<0$, lo que nos indica que $r(t)$ decrece a partir de $t>t_0$. Además, como después el valor de $r(t)$ se acerca a r_e.
- Fijado $t>t_0$ tal que $r(t)=r_e$, entonces como $\alpha>0$ se tiene que el término de la derecha de la e.d.o. es nulo: $\alpha\left(r_e-r(t)\right)=0$. De aquí se infiere que el término de la izquierda de la e.d.o. es también nulo: $r'(t)=0$, lo que nos indica que $r(t)$ permanece constante a partir de $t>t_0$.
- Por el contrario, fijado $t>t_0$ tal que $r(t)<r_e$, entonces como $\alpha>0$ se tiene que el término de la derecha de la e.d.o. es positivo: $\alpha\left(r(t)-r_e\right)>0$. De aquí se infiere que el término de la izquierda de la e.d.o. es positivo: $r'(t)>0$, lo que nos indica que $r(t)$ crece a partir de $t>t_0$. Además, como después el valor de $r(t)$ se acerca a r_e.

Este análisis que, como hemos subrayado anteriormente no ha requerido de la solución del p.v.i., nos revela que el comportamiento gráfico de la solución es el mostrado en la Gráfica 1. En esta representación gráfica se ha representado el comportamiento de la solución en el caso particular en que $\alpha=0.2>0$, $t_0=0$, $r_e=2$ (este valor corresponde a la línea en trazo discontinuo), $r_0=1$ (este valor está asociado a la solución $r(t)$ con trazo continuo de color marrón claro situada por debajo de la solución de equilibrio en trazo discontinuo) y $r_0 = 3$ (este valor está asociado a la solución $r(t)$ con trazo continuo de color azul situada por encima de la solución de equilibrio en trazo discontinuo).



Gráfica 1. Comportamiento de los tipos del interés según el modelo de reversión a la media dado en la Ecuación 1.

4.2 Solución del modelo y estudio asintótico

Vamos ahora a calcular la solución $r(t)$ del modelo dado en la Ecuación 1 y a estudiar a partir de ella, el comportamiento de $r(t)$ a largo plazo, es decir, cuando $t \to \infty$. Para ello requeriremos de la identificación de los coeficientes del modelo dado en la Ecuación 1, con los de un problema *patrón* de valor inicial basado en una e.d.o. lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden (véase Ecuación 2): $a = -\alpha \neq 0$ y $b = \alpha r_e$. Esto nos permite obtener explícitamente la dinámica del tipo de interés (véase Ecuación 3).

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & ax(t)+b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{a(t-t_0)}\left(x_0 + \dfrac{b}{a}\right) - \dfrac{b}{a} & \text{si} \quad a \neq 0, \\ b(t-t_0) + x_0 & \text{si} \quad a = 0. \end{cases}$$

Ecuación 2. Solución de un p.v.i. *patrón* basado en una e.d.o. lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden.

$$r(t) = e^{-\alpha t}\left(r_0 - r_e\right) + r_e.$$

Ecuación 3. Dinámica del tipo de interés del modelo dado en la Ecuación 1.

Observemos que tomando límites en la expresión de $r(t)$ obtenida en la Ecuación 3 se deduce que el modelo predice que a largo plazo el tipo de interés tenderá al valor r_e (véase Ecuación 4). Este hecho avala la denominación del modelo y del parámetro r_e como tipo de interés a largo plazo o de equilibrio.

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\left(r_0 - r_e\right) + r_e = \underbrace{\left(\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\right)}_{=0}\left(r_0 - r_e\right) + r_e = r_e.$$

Ecuación 4. Obtención analítica del tipo de interés a largo plazo o de equilibrio.

Observemos que las conclusiones mostradas en la Gráfica 1 anterior son también inferidas desde la solución explícita dada en la Ecuación 3 tanto si $r_0 > r_e$ como si $r_0 < r_e$ (véase Ecuación 5).¡

$$r_0 > r_e \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r_0 - r_e}_{>0} \quad \Rightarrow \quad r(t) = e^{-\alpha t}\left(r_0 - r_e\right) + r_e > r_e$$
$$r_0 < r_e \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r_0 - r_e}_{<0} \quad \Rightarrow \quad r(t) = e^{-\alpha t}\left(r_0 - r_e\right) + r_e < r_e$$

Ecuación 5. Análisis de la dinámica del tipo de interés del modelo dado en la Ecuación 1.

4.3 Aplicación del modelo: calibración de parámetros

Resulta particularmente interesante la aplicación del modelo en el caso en que se disponen de datos reales para de este modo poder contrastar su potencialidad, aunque sea con las limitaciones que supone tratar un problema tan complejo como es la modelización de los tipos de interés con un modelo simplificado como el que hemos expuesto. Sin embargo, y como ya se ha señalado en la Introducción, este estudio tiene aquí, sobretodo, interés formativo. La aplicación la vamos a realizar sobre un período de un mes natural (que corresponde a aproximadamente 20 días operativos del mercado) para el índice EONIA. EONIA (Euro OverNight Index Average) es el índice medio del tipo de la moneda euro a un día, fruto de las operaciones de crédito interbancarias (véase [1]). En la Tabla 1 se recogen los valores de EONIA en los días no festivos desde el 19 de febrero a 18 de marzo de 2013 (véase [1]).

Fecha	19/02/2013	20/02/2013	21/02/2013	22/02/2013
EONIA	0.062	0.069	0.070	0.071
Fecha	25/02/2013	26/02/2013	27/02/2013	28/02/2013
EONIA	0.064	0.065	0.056	0.066
Fecha	01/03/2013	04/03/2013	05/03/2013	06/03/2013
EONIA	0.059	0.060	0.061	0.070
Fecha	07/03/2013	08/03/2013	11/03/2013	12/03/2013
EONIA	0.063	0.060	0.064	0.068
Fecha	13/03/2013	14/03/2013	15/03/2013	18/03/2013
EONIA	0.068	0.067	0.070	0.069

Tabla 1. Datos del EONIA.

Fuente: http://www.bde.es/webbde/es/estadis/infoest/ti_1_7 pdf

Asumiendo que la dinámica del tipo de interés considerado sigue el modelo descrito en el p.v.i. dado en la Ecuación 1, deseamos determinar los valores de los parámetros de dicho modelo. En nuestro caso, como a continuación argumentaremos, reduciremos esta calibración al ajuste únicamente del parámetro α. Se trata de determinar el valor numérico de α de modo que $r(t)$ dada en la Ecuación 3 se "ajuste lo mejor posible" a las observaciones del tipo de interés mostradas en la Tabla 1. Obsérvese que en nuestro contexto y a partir de la Tabla 1, $r_0 = 0.062$, además, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $t_0 = 0$ que corresponde al inicio del período (19 de febrero de 2013). Por otra parte, y haciendo uso de la interpretación del parámetro r_e como el valor al cual tiende el tipo de interés a largo plazo, tomaremos $r_e = 0.070$, si bien es cierto que esta elección debe tomarse con las reservas obvias, ya que, la serie de datos de la Tabla 1 es demasiado corta como para justificar este comportamiento asintótico. Con todo ello, y como acabamos de señalar, el único parámetro que debe determinarse es α (que como ya indicamos, puede interpretarse como la velocidad a la cual los tipos de interés $r(t)$ convergen al valor de equilibrio r_e).Se hace por tanto necesario indicar qué significa en nuestro contexto la expresión: "que ajuste lo mejor posible". Para ello, haciendo uso del concepto de ajuste estadístico en el sentido de los mínimos cuadrados (véase [2]), entenderemos por dicha expresión que la suma de las diferencias al cuadrado entre las observaciones r_i, $0 \le i \le 19$, de los valores del EONIA dados en la Tabla 1 y los valores proporcionados por la solución del modelo, la cual está dada en la Ecuación 3, sean lo más pequeñas posibles. Esta función está explicitada en la Ecuación 6. En ella, se identifica el índice $i: 0 \le i \le 19$ con cada uno de los 20 días de cotización del EONIA dados en la Tabla 1. Así, $i = 0$ corresponde al día 19 de febrero de 2013, $i = 1$ corresponde al día 20 de febrero de 2013, y así sucesivamente hasta $i = 19$ que corresponde al 18 de marzo de 2013. Nótese que el primer sumando de dicha función, que corresponde a $i = 0$, es nulo, ya que, la condición inicial del p.v.i., i.e., el valor de $r(t)$ en t_0 dado en la Ecuación 1 coincide con el primer valor cotizado del tipo de interés.

$$e(\alpha) = \sum_{i=0}^{19} \left(r_i - \left(e^{-\alpha \times i} \left(r_0 - r_e \right) + r_e \right) \right)^2$$

Ecuación 6. Función de error cuadrático a minimizar.

Utilizando técnicas apropiadas de optimización numérica de funciones podemos calcular el valor del parámetro α que minimiza la función de error $e(\alpha)$ dada en la Ecuación 6. Este tipo de técnicas están implementadas en diferentes programas. Utilizando el comando `NMinimize` del software Mathematica® (véase [3]) el valor que se obtiene es: $\hat{\alpha} = -0.042706$ que proporciona el siguiente valor del error: $e(\hat{\alpha}) = 0.00038546$. Por lo tanto, y de acuerdo al modelo y a su ajuste a los datos, la Ecuación 7 indica la fórmula de ajuste buscada.

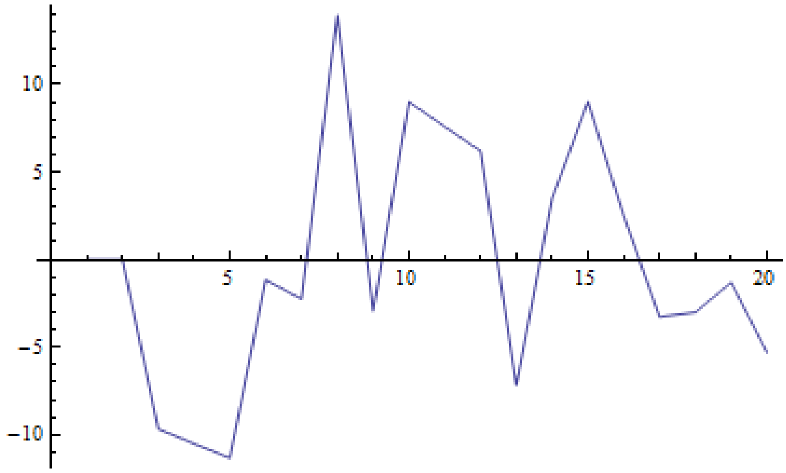
$$r(t) = 0.07 - 0.008 e^{-0.042706t}$$

Ecuación 7. Modelo ajustado a los datos del EONIA dados en la Tabla 1.

Finalmente, vamos a analizar de forma sencilla la calidad del ajuste del modelo a los datos. Para ello, calcularemos el error relativo del ajuste (véase Ecuación 8). En la Gráfica 2 hemos representado dichos errores. Observamos que el mayor error que comete el modelo es del 14%, lo cual es aceptable considerando la sencillez del mismo.

$$\text{error relativo(i)} = \frac{0.07 - 0.008\,e^{-0.042706i} - r_i}{r_i}, \quad 0 \le i \le 19$$

Ecuación 8. Error relativo del ajuste.



Gráfica 2. Representación de los errores relativos en cada instante de la Tabla 1.

5 Cierre

La búsqueda de puentes formativos que conecten diferentes áreas de conocimiento en la formación universitaria entendemos que es un compromiso docente que debemos asumir en el marco de la docencia universitaria actual. En este trabajo, se ha tratado de materializar esta idea conectando las áreas de Matemáticas y Finanzas, a través del estudio de un modelo de tipos de interés basado en una ecuación diferencial ordinaria.

Por otra parte, cabe subrayar que el arte de modelizar en cualquier ciencia consiste en saber elegir unas “pocas” variables, así como asumir las hipótesis más “realistas” posibles que representen adecuadamente el fenómeno objeto de estudio. En este caso, se ha tratado de estudiar la evolución temporal del tipo de interés asumiendo que esta magnitud económica tiende a estabilizarse en torno a un valor de equilibrio. Esta hipótesis recoge el comportamiento observado en ciertos tipos de interés durante períodos de longitud variable que en la práctica deben calcularse. Con este trabajo se ha pretendido ilustrar las ideas básicas dentro del complejo proceso de modelización pensando en que ello sirva para estimular al lector en la profundización de técnicas más avanzadas.

6 Bibliografía

[1] http://www.bde.es/webbde/es/estadis/infoest/ti_1_7.pdf

[2] Gujarati, D.N.: “Econometría”, 4ª edición, McGraw Hill, 2003.

Este excelente texto presenta en su Capítulo 3 una introducción básica al método clásico de mínimos cuadrados. La exposición de este método se hace de forma sencilla y amena, mostrando ejemplos que ilustran los conceptos básicos.

[3] Wolfram Mathematica 9. Software available at: http://www.wolfram.com/products/mathematica